Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет електроніки та комп'ютрених наук

Кафедра систмного проектування

Реферат

на тему:

“LU-розклад матриці. Ітераційні методи уточнення розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь”

Виконав:

студент групи ФеП-31

Суворов О.А.

Перевірив:

проф. Бугрій О.М.

Львів - 2023

1 Теоретичні відомості про LU-розклад матриці

LU-розклад матриці - це метод обчислення, який дозволяє представляти матрицю у вигляді добутку нижньої трикутної матриці L та верхньої трикутної матриці U. Цей метод заснований на факторизації матриці та має застосування в різних галузях, таких як матричний аналіз, геометричні проблеми та інше.

Основні теми, де використовується LU-розклад:

- Представлення матриці у вигляді добутку L та U.
- Застосування LU-розкладу для розв'язку СЛАР.
- Використовується для обчислення оберненої матриці.
- Детермінант може бути обчислений через добуток детермінанту матриці L та детермінанту матриці U.

Алгоритм розкладу LU-матриці

Перед самим алгоритмом необхідно пояснити (описати) обов'язкові визначення, які будуть використовуватись для розв'язку матриці даним способом:

- L-матриця: нижня трикутна матриця, в якій всі діагональні елементи рівні одиниці.
- U-матриця: верхня трикутна матриця, в якій всі діагональні елементи також рівні одиниці.
- A-матриця: матриця добутку двох матриць (L та U).
- Означення добутку двох матриць: $a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} u_{jk}$

Алгоритм LU-розкладу - є доволі простим методом, тому складається він не з багатьох наступних кроків:

1. Задаємо дві порожні матриці, тобто всі значення матриць 0.
2. Заповнюємо діагональні елеменети в матриці U одиницями.
3. Обраховуємо почергово значення елементів k стовпця матриці L, а також k рядка матриці U за даними формулами (спочатку елементи стовпчика матриці L, а потім елементи рядка U):

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk}, i \geq k$$

$$u_{ki} = \frac{1}{l_{kk}} [a_{ki} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} u_{ji}], i > k$$

2 Теоретичні відомості по ітераційним методам уточнення розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Ітераційні методи уточнення розв'язку СЛАР – це методи, які дозволяють наближено розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) шляхом послідовного наближення до розв'язку. Ці методи є ефективними для розв'язання СЛАР великого розміру, коли прямі методи, такі як метод Крамера або метод Гауса, є непридатними.

Основна ідея ітераційних методів полягає в тому, що вихідне наближення до розв'язку використовується як початкове значення для послідовності функцій, які наближаються до розв'язку. При цьому кожне наступне наближення повинно бути кращим за попереднє.

Найпопулярніші методи:

- Метод Якобі: $x_{k+1} = x_k - L^{-1}(b - Ax_k)$, де x_k - наближення до розв'язку в k-ій ітерації, L – нижня трикутна матриця, отримана з матриці A, b – вектор правих частин, x – вектор невідомих.
- Метод Гауса-Зейделя: даний метод є модифікацією методу Якобі, в якому на кожній ітерації використовується не тільки нижня трикутна матриця, а й верхня трикутна матриця, отримана з матриці A. Формула для методу Гауса-Зейделя має такий вигляд: $x_{k+1} = x_k - (L^{-1} + U^{-1})(b - Ax_k)$

Для того, щоб визначити, який ітераційний метод слід використовувати для розв'язання конкретної СЛАР, необхідно враховувати такі фактори:

- Розмір СЛАР: Ітераційні методи ефективніші для розв'язання СЛАР великого розміру.
- Структура матриці A: Ітераційні методи, які використовують нижню і верхню трикутні матриці, ефективніші для матриць, які мають такий вид.

Алгоритм розв'язку СЛАР використовуючи вже розкладеної LU-матриці

Якщо задана система лінійних рівнянянь по типу $A_x = LU_x b$ та задано A і b, тоді кроки для розв'язку даного рівняння будуть виглядати ось так:

1. Розв'язати рівняння $L_y = b$ та знайти y.
2. Розв'язати рівняння $U_x = y$ та знайти x.

Тепер пройдемося по даному методу трохи детальніше, а саме як саме обрахувати значення для x та y.

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{\ 11}}$$

$$y_k = \frac{1}{L_{kk}}(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} L_{kj} y_j), k = 2, ..., n$$

$$x_n = y_n$$

$$x_k = (y_k - \sum_{j=k+1}^{n} U_{kj} x_j), k = n-1, ..., 1$$

Алгоритм розв'язку СЛАР використовуючи метод Якобі

Метод Якобі характеризується сумою трьох матриць: $A = A^+ + D + A^-$, де A^+ - нижня трикутна матриця, D - матриця діагональна, A^- - верхньотрикутна матриця з нульовими елементами по діагоналі. Вихідну систему рівнянь можна подати у вигляді:

$$DX = -(A^+ + A^-)X + f$$

$$X = -D^{-1}(A^+ + A^-)X + D^{-1}f$$
$$X^{k+1} = -D^{-1}(A^+ + A^-)X^k + D^{-1}f$$

або в канонічній формі $X^{k+1} = CX^k + d$, де $C = -D^{-1}(A^+ + A^-)$ Отже, метод Якобі в розгорнутому вигляді буде ось таким:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1, j\neq 1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ij}} x_j^k + \frac{f_i}{a_{ii}}$$

Алгоритм розв'язку СЛАР використовуючи метод Гауса-Зейделя

Головна відмінність даного методу, що ми записуємо матрицю іншим виглядом. В цьому методі записуємо матрицю під виглядом суми 3-ох матриць, а саме $A = A^+ + D + A^-$, де всі параметри були описані у минулій секції даного реферату. Представимо вихідну систему у вигляді:

$$(A^+ + D)X = -A^-X + f$$
$$(A^+ + D)X^k + 1 = -A^-X^k + f$$

Щоб отримати достатню умову збіжності методу Зейделя, треба записати його в канонічній формі і методу простої ітерації:

$$X^{k+1} = -(A^+ + D)^{-1}A^-X^k + (A^+ + D)^{-1}f$$

Метод Гауса-Зейделя в розгорнутій формі:

$$x_i^{k+1} = \frac{f_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k$$

3 Розв'язання СЛАР методом Якобі з використанням LU-розкладу

Розглянемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Для застосування методу Якобі розкладемо матрицю коефіцієнтів A на суму нижньої трикутної матриці L, верхньої трикутної матриці U і діагональної матриці D:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Запишемо новий вигляд системи, де L, U та D представлені як окремі матриці:

$$(D+L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$$

Розв'язуємо отриману систему для кожного кроку методу Якобі. Початковий набір значень $x^{(0)}$ може бути вибраний довільно.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Знову записуємо систему вигляді $Ax = b$ і розв'язуємо її для кожного кроку методу Якобі.

4 Висновок

Розглянуті методи обчислень, а саме LU-розклад матриці та ітераційні методи уточнення розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь, відіграють важливу роль у сучасній обчислювальній математиці та інженерних дисциплінах.

LU-розклад матриці є потужним інструментом для розв'язання систем лінійних рівнянь, дозволяючи представити матрицю як добуток нижньотрикутної та верхньотрикутної матриці. Це полегшує обчислення та зменшує витрати часу.

Щодо ітераційних методів, вони виявляються ефективними при розв'язанні великих та розріджених систем рівнянь. Застосування цих методів дозволяє зблизитися до точного розв'язку системи, покращуючи збіжність та зменшуючи обчислювальні витрати.

У контексті навчання комп'ютерних наук, вивчення цих методів є важливим кроком для розуміння основ оптимізації обчислень та побудови ефективних алгоритмів. Результати застосування цих методів можуть мати широкий спектр застосувань в різних галузях від інженерії до науки про дані.

Література

[1] Бугрій О.М. *Лекція по СЛР*

[2] Wikipedia *LU-розклад матриці*

[3] Wikipedia *Метод Якобі*

[4] Wikipedia *Метод Гауса — Зейделя*

[5] В.М. Глушкова, А.А. Гончарова, В.В. Ремінського *Чисельні методи* Сторінки 184-212