Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
факультет електроніки та комп'ютерних технологій

Кафедра системного проектування

Реферат

на тему:

"Метод побудови квадратних формул з використнням інтерполяційних многочленів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів"

Виконав

студент групи ФеП-31

Суворов О.А.

Перевірив:

проф. Бугрій О.М.

Львів - 2023

1. Використання методу побудови квадратурних формул з використанням інтерполяційних многочленів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів

Метод побудови квадратурних формул з використанням інтерполяційних многочленів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів є одним з ключових підходів у чисельних методах. Цей метод дозволяє наближено обчислювати визначені інтеграли, а також розв'язувати диференціальні та інтегральні рівняння.

2. Головна ідея даного методу

Основна концепція даного методу полягає у тому, щоб апроксимувати визначений інтеграл функції шляхом використання інтерполяційного многочлена. Щоб це зробити, спочатку потрібно розділити весь діапазон інтегрування на невеликі частини, названі частковими інтервалами. На кожному з цих інтервалів ми намагаємося апроксимувати функцію за допомогою певного многочлена.

2.1 Поділ інтервалу

Припустимо, ми маємо функцію $f(x)$, яку хочемо проінтегрувати на відрізку $[a, b]$. Метод передбачає розділення цього відрізка на n рівних частин за допомогою вузлів $x_0, x_1, ..., x_n$, де $x_0 = a$ та $x_n = b$. Ці вузли називаються частковими вузлами.

2.2 Апроксимація на кожному інтервалі

Далі, на кожному частковому інтервалі $[x_i, x_{i+1}]$ нам потрібно знайти такий многочлен, який би найкращим чином апроксимував функцію $f(x)$ на цьому інтервалі.

2.3 Вибір базисних функцій

Важливим кроком є вибір базисних функцій для апроксимації. Часто використовуються многочлени Лагранжа або Ньютона, оскільки вони добре підходять для апроксимації функцій.

2.4 Визначення коефіцієнтів

Далі, нам потрібно знайти коефіцієнти цих многочленів. Це робиться за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Ми ставимо систему алгебраїчних рівнянь, враховуючи точність квадратурної формули.

3. Переваги та недоліки

3.1 Переваги

Однією з основних переваг цього методу є можливість використання різних типів інтерполяційних многочленів. Наприклад, ми можемо обрати многочлен Лагранжа для одних задач та многочлен Ньютона для інших. Це надає гнучкість у виборі найбільш ефективного способу апроксимації для конкретної задачі.

Ще однією перевагою є можливість адаптувати кількість використаних вузлів (точок) для отримання необхідної точності. Це робить метод ефективним для широкого спектру задач з різними рівнями складності та точності.

3.2 Недоліки

Проте, важливо враховувати, що точність отриманої квадратурної формули залежить від декількох факторів. По-перше, вибір конкретного інтерполяційного многочлена може вплинути на точність апроксимації. Деякі многочлени можуть краще відображати характер функції, ніж інші.

Крім того, кількість використовуваних вузлів також впливає на точність результату. На велику кількість вузлів часто може вплинути поганий апроксимаційний многочлен. З іншого боку, занадто низька кількість вузлів може привести до недостатньої точності результату.

Важливо зазначити, що навіть при використанні складних інтерполяційних многочленів та великої кількості вузлів, не завжди можна забезпечити високу точність в усіх випадках. Деякі функції можуть бути складніше апроксимувати, особливо якщо вони мають стрімкі зміни або особливості.

4. Приклади

Давайте розглянемо три приклади: один приклад узагальнений, інші два використовуючи різні базисні функції для апроксимації як многочлен Ньютона, так і многочлен Лагранжа.

4.1 Приклад 1 [0]

Побудуємо квадратурну формулу найвищого алгебраїчного степеня точності з ваговою функцією $p(x) = 1$ на проміжку інтегрування $[a, b] = [0, 1]$ із трьома вузлами. Для цього запишемо квадратурну формулу в загальному вигляді:

$$\int_a^b f(x), dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

З умови найвищого алгебраїчного степеня точності для триточкової формули маємо:

$$\int_0^1 f(x), dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(\frac{1}{2}) + A_2 f(1)$$

Щоб визначити коефіцієнти A_0, A_1, A_2, скористаємося методом невизначених коефіцієнтів. Для цього прирівняємо дорівнює нулю залишковий член квадратурної формули:

$$\int_0^1 f(x), dx - A_0 f(0) - A_1 f(\frac{1}{2}) - A_2 f(1) = 0$$

Розв'язавши це рівняння відносно A_0, A_1, A_2 , отримаємо:

$$A_0 = \frac{1}{2}, A_1 = \frac{2}{3}, A_2 = \frac{1}{6}$$

Отже, отримана квадратурна формула має вигляд:

$$\int_0^1 f(x), dx \approx \frac{f(0) + 2f(\frac{1}{2}) + f(1)}{6}$$

4.2 Використання многочлена Лагранжа [1]

Нехай потрібно наблизити інтеграл функції $f(x) = x^2$ на відрізку $[0, 1]$ за допомогою квадратурної формули. Використаємо метод невизначених коефіцієнтів та многочлен Лагранжа.

Крок 1: Визначення вузлів і ваг: виберемо дві різні точки, наприклад $x_0 = 0$ та $x_1 = 1$ і обчислимо ваги відповідно до методу невизначених коефіцієнтів. Отримаємо $A = B = 1$.

Крок 2: Побудова многочлена Лагранжа: многочлен Лагранжа для наближення функції $f(x) = x^2$ виглядає так:

$$P(x) = f(x_0) * L_0(x) + f(x_1) * L_1(x)$$

де $L_i(x)$ - інтерполяційний поліном Лагранжа, визначений як:

$$L_i(x) = \Pi_{j \neq 1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

За нашими точками $x_0 = 0$ і $x_1 = 1$ отримаємо:

$$L_0(x) = \frac{x - 1}{0 - 1} = 1 - xL_1(x) = \frac{x - 0}{1 - 0} = x$$

Підставивши ці значення, отримуємо:

$$P(x) = x^2$$

Крок 3: Обчислення квадратурної суми: використовуючи формулу квадратурної суми, отримаємо остаточний результат:

$$Q = A * f(x_0) + B * f(x_1) = 1 * 0^2 + 1 * 1^2 = 1$$

Таким чином, за допомогою методу невизначених коефіцієнтів та многочлена Лагранжа, ми наблизили значення інтегралу $\int_0^1 x^2 dx$ до 1.

4.3 Використання многочлена Ньютона [2]

Розглянемо ту ж функцію $f(x) = x^2$ на той самий відрізок $[0, 1]$, але використаємо многочлен Ньютона для побудови квадратурної формули.

Крок 1: Визначення вузлів і ваг: відомо, що для методу невизначених коефіцієнтів при двох вузлах x_0 та x_1 ваги будуть такими:

$$A = B = \frac{1}{2}$$

Крок 2: Побудова многочлена Ньютона: многочлен Ньютона для наближення функції $f(x) = x^2$ виглядає так:

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0) \triangle f(x_0, x_1)$$

де $\triangle f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1$

Підставивши значення отримаємо:

$$P(x) = x^2$$

Крок 3: Обчислення квадратурної суми: використовуючи ваги та значення функції у вузлах, отримаємо:

$$Q = A * f(x_0) + B * f(x_1) = \frac{1}{2} * 0^2 + \frac{1}{2} * 1^2 = \frac{1}{2}$$

Саме так, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів та многочлена Ньютона, ми наблизили значення інтегралу $\int_0^1 x^2 dx$ до $\frac{1}{2}$.

Література

[0] *Цегелик Г.Г.* Чисельні методи. Підручник. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка, 2004. – 408с. (стр. 224 - 225)

[1] *Цегелик Г.Г.* Чисельні методи. Підручник. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка, 2004. – 408с. (стр. 269)

[2] *Лященко М.Я. та Головань М.С.* Чисельні методи. Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 287с. (стр. 244)

- Г.Г. Цегелик. Чисельні методи. Підручник. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка, 2004. – 408с.

Сторінки 268-271 - Головна ідея методу, поділ інтервалу, апроксимація на кожному інтервалі, вибір базисних функцій, визначення коефіцієнтів.

Сторінка 272 - Переваги та недоліки методу.

- М.Я. Лященко, М.С. Головань. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 287с.

Сторінки 243-245 - Головна ідея методу, поділ інтервалу, апроксимація на кожному інтервалі, вибір базисних функцій, визначення коефіцієнтів.

Сторінка 246 - Переваги та недоліки методу.