ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

ГЕНЕРУВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Існує багато методів моделювання неперервних випадкових величин. Зокрема, **метод виключення** (метод Неймана).

Нехай випадкова величина X визначена на скінченному інтервалі $(a;b)$ і густина її розподілу обмежена, так що $f(x) \leq M$. Тоді, використовуючи пару рівномірно розподілених на інтервалі (0;1) випадкових чисел R, здійснюємо такім дії для розіграшу (моделювання) значення X:

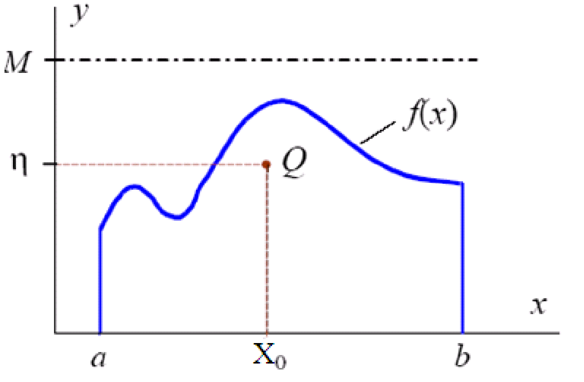


Рисунок 1 - Графічне зображення методу Неймана

1. Розігруємо два значення r_1 і r_2 випадкової величини R і будуємо випадкову точку Q (див. рисунок1) з координатами $X_0=a+r_1 \cdot (b-a)$, $\eta=r_2 \cdot M$.

2. Якщо $\eta>f(X_0)$, то пару значень (r_1, r_2) відкидаємо і переходимо до пункту 1; інакше приймаємо $X = X_0$.

Таким чином, визначаються координати випадкової точки $Q(X_0,\eta)$ і, якщо точка опиниться під кривою $f(x)$, то абсциса цієї точки приймається як значення випадкової величини $X=X_0=a+r_1 \cdot (b-a)$ з густиною розподілу $f(x)$. В іншому випадку точка відкидається, визначаються координати наступної точки, і все повторюється.

Моделювання випадкової величини, розподіленої за показниковим законом

Показниковим (експоненціальним) називається закон розподілу неперервної випадкової величини X, функція густини розподілу ймовірності якої має вигляд:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \tag{3}$$

де постійна величина $\lambda>0$ є параметром показникового закону розподілу ймовірності. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини $F_X(x)$ буде:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \tag{4}$$

З показниковим законом розподілу доводиться часто стикатися при визначенні надійності систем, дослідженні систем масового обслуговування та ін. Випадкова величина, що має показниковий розподіл, коротко записується так: $X \in E(\lambda)$.

Числові характеристики показникового розподілу: математичне сподівання $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, дисперсія $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Згідно з визначенням функції розподілу $F_X(x)$ вона приймає значення на відрізку [0,1]. Тому для отримання реалізації x_i неперервної випадкової величини X можна спочатку згенерувати за допомогою датчика випадкових чисел $\{r_i\}$ з рівномірним розподілом в інтервалі [0,1] деяке число r_i, а потім знайти x_i, при якому $r_i = F_X(x_i)$ тобто $x_i = F_X^{-1}(r_i)$, де функція F_X^{-1} обернена відносно функції розподілу F_X. Розглянутий метод моделювання неперервної випадкової величини має назву методу оберненої функції. Недоліком методу є аналітичні труднощі при знаходженні оберненої функції F_X^{-1}.

Розглянемо застосування методу оберненої функції для моделювання випадкової величини X з показниковим розподілом. Нехай параметр λ показникового закону заданий. За допомогою датчика випадкових чисел $\{r_i\}$ з рівномірним розподілом в інтервалі [0,1] генерують випадкове число r_i. Знаходять x_i, при якому $r_i = F_X(x_i) = 1 - e^{-\lambda x_i}$. Розв'язуючи це рівняння відносно x_i, маємо:

$$x_i = \frac{-\ln(1-r_i)}{\lambda}. \tag{6}$$

Оскільки $r_i \in [0,1]$, то випадкові величини r_i і $(1-r_i)$ мають той самий рівномірний розподіл в інтервалі [0,1]. Тому остаточно:

$$x_i = \frac{-\ln r_i}{\lambda}. \tag{7}$$

Моделювання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.

Нормальний розподіл (розподіл Гаусса) є видом розподілу, що найчастіше зустрічається. З ним доводиться стикатися при аналізі виробничих похибок, контролю технологічних процесів і режимів, при аналізі і прогнозуванні різних явищ. Цей закон є граничним, до якого наближаються інші закони розподілу.

Густина розподілу випадкової величини X, що має нормальний розподіл, виражається формулою:

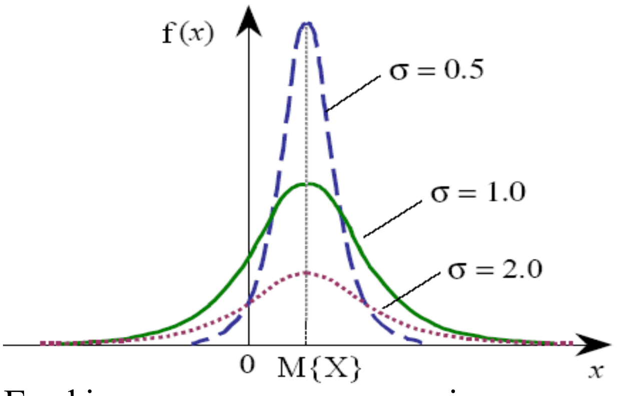
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{8}$$

Функція розподілу ймовірностей випадкової величини X:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right) d\xi. \tag{9}$$

Числові характеристики нормального розподілу: математичне сподівання $M(X) = m$, дисперсія $D(X) = \sigma^2$. Випадкова величина X, що має нормальний розподіл з параметрами m, σ коротко записується так: $X \in N(m,\sigma)$.

Величина $M(X)$ характеризує центр ваги розподілу X і не впливає на форму кривої. Величина σ характеризує розкид випадкової величини X відносно її середнього значення $M(X)$ (див. рисунок).



Графік нормального розподілу

При моделюванні нормальної випадкової величини застосовують метод, заснований на центральній граничній теоремі теорії ймовірностей. Згідно з цією теоремою, при додаванні достатньо великого числа незалежних випадкових величин, порівнянних за своїми дисперсіями, отримується випадкова величина, розподілена приблизно за нормальним законом, причому цей закон тим ближче до нормального, чим більше випадкових величин додається. Як показали дослідження, при додаванні вже $n \geq 8$ випадкових величин з рівномірним розподілом в інтервалі [0,1] отримується випадкова величина, яка з точністю, достатньою для більшості практичних задач, може вважатися нормальною.

Якщо випадкова величина $R\{r_i\}$ розподілена рівномірно в інтервалі [0,1], то її математичне сподівання $M(R)$=1/2, а дисперсія $D(R)$=1/12. Тоді для практичного використання можна вважати, що випадкова величина $\xi = \sum_{i=1}^{n} r_i$ розподілена нормально при $n \geq 8$ з математичним сподіванням $M(\xi)=n/2$, дисперсією $D(\xi)=n/12$ і середньоквадратичним відхиленням $\sigma=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{n/12}$.

Моделювання будь-якого нормального розподілу $X \in N(m,\sigma)$ може бути здійснено за очевидною формулою:

$$X = m + \sigma Y , \qquad (10)$$

де випадкова величина $Y \in N(0,1)$. Нормальний розподіл з параметрами (0,1) називається стандартним нормальним розподілом.

Для отримання величини Y пронормуємо випадкову величину ξ:

$$Y = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)} = \frac{12}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} r_i - \frac{n}{2} \cdot \right)$$

Тепер $Y \in N(0,1)$. При n = 12 ця формула помітно спрощується:

$$Y = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6. \qquad (11)$$

Отже стандартний нормальний розподіл з достатньою точністю можна змоделювати за допомогою (11).

Для моделювання довільного нормального розподілу $X \in N(m, \sigma)$ використаємо (10):

$$X = m + \sigma Y = m + \sigma\left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6\right).$$

Описана процедура реалізується алгоритмом:

1. За допомогою датчика випадкових чисел з рівномірним розподілом в інтервалі [0,1] генерують 12 чисел r_k.

2. Обчислюють x_i за формулою

$$x_i = m + \sigma\left(\sum_{k=1}^{12} r_k - 6\right)_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

3. Пункти 1 і 2 повторюють, поки не буде досягнуто потрібного об’єму вибірки.

Порядок виконання роботи

Частина 1

1. Змоделювати методом Неймана *N*=100 значень неперервної випадкової величини із заданою густиною розподілу ймовірності (таблиця 1). Номер варіанту дорівнює порядковому номеру студента у списку академічної групи.

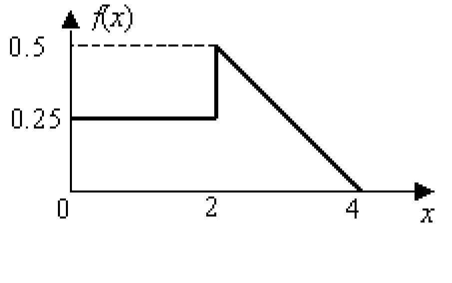
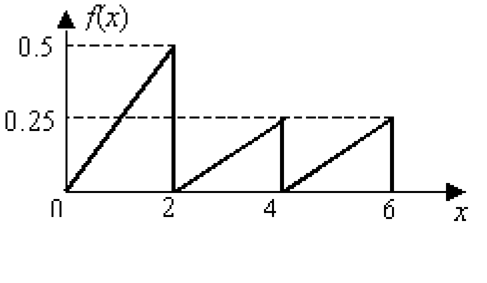
(Функції для графіка розраховуються за формулами $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, або $y = kx + b$ (залежно від виду графіка)).

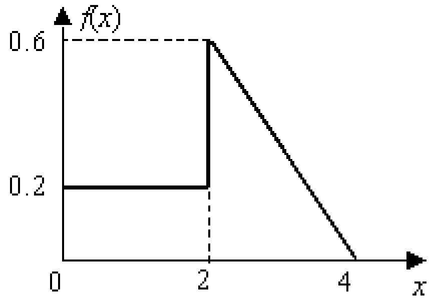
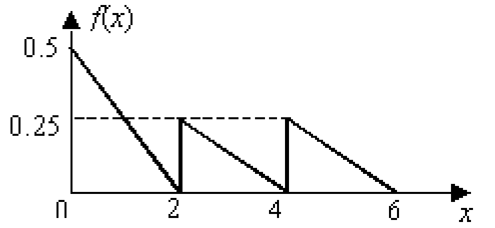
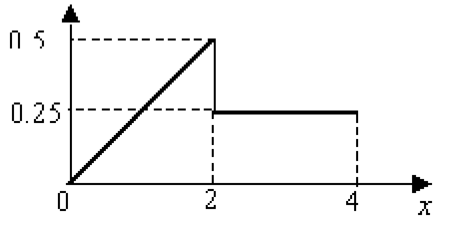
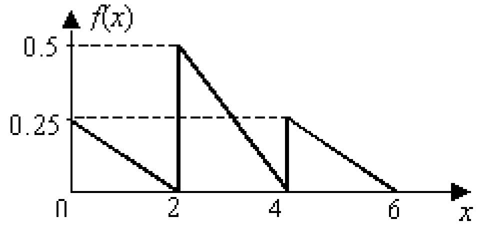
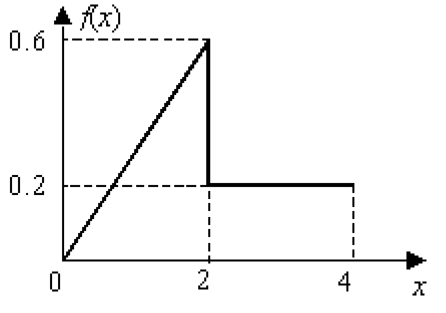
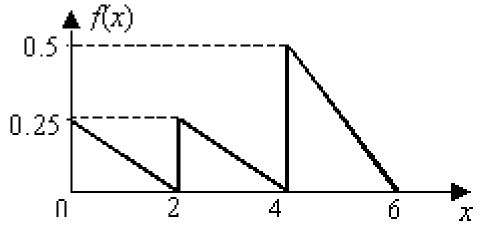
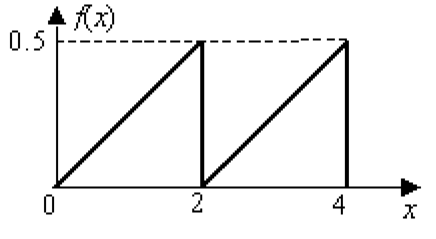
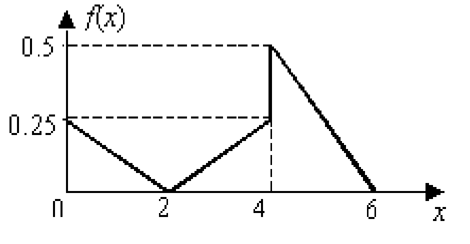
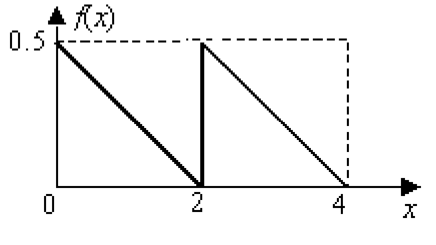
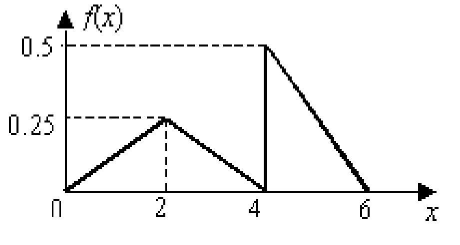
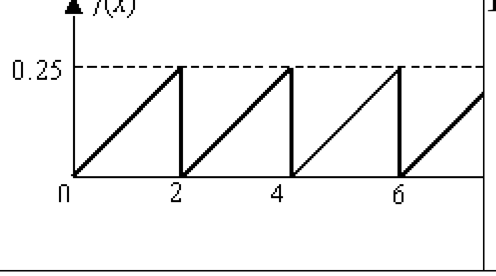
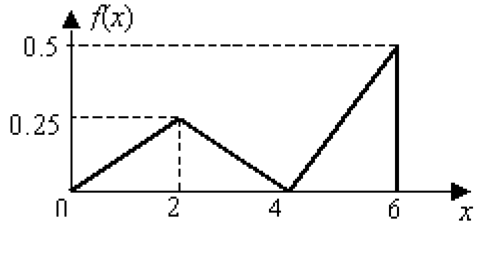
2. Оцінити вибіркові математичне сподівання і дисперсію отриманої випадкової величини.

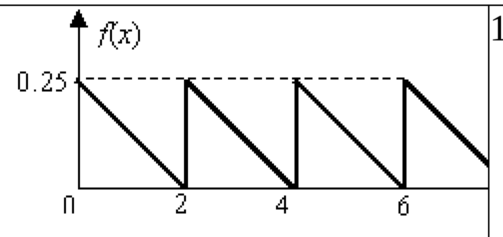
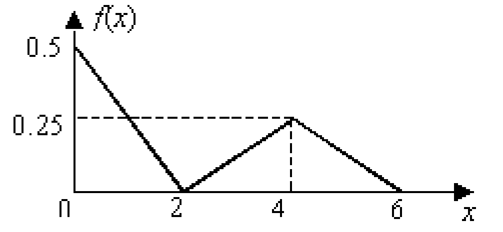
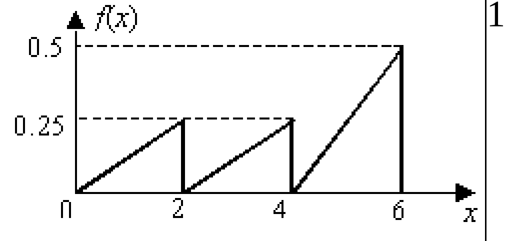
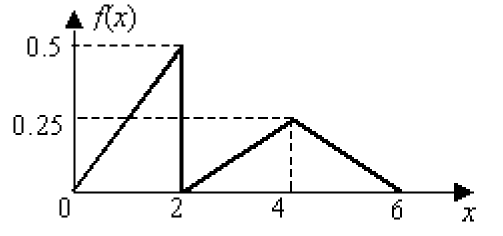
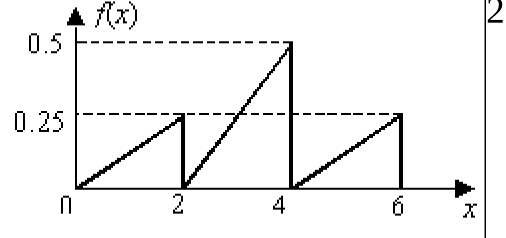
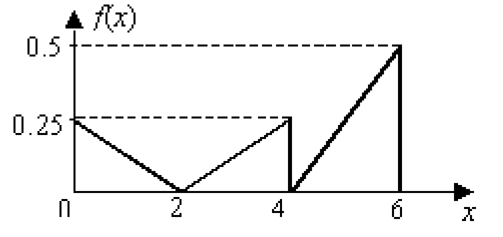
3. Побудувати гістограму та оцінити за її допомогою закон розподілу отриманої випадкової величини. Порівняти його із заданим.

4. Повторити п. 1-3 для *N*=1000. Порівняти результати.

Таблиця 1 – Густина розподілу ймовірності випадкової величини.

<table>
<tr><td>Варіант</td><td>Густина розподілу</td><td>Варіант</td><td>Густина розподілу</td></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>11</td><td>
</td></tr>
</table>

2		12	
3		13	
4		14	
5		15	
6		16	
7		17	

8		18	
9		19	
10		20	

Частина 2

1. Змоделювати послідовність із N=100 значень випадкової величини X, розподіленої за:

a) показниковим законом;

b) нормальним законом.

3.2. Для кожної вибірки визначити вибіркове середнє і вибіркову дисперсію та порівняти їх з теоретичними значеннями.

3.3. Побудувати гістограми та оцінити за їх допомогою закон розподілу випадкової величини X.

3.4. Повторити виконання роботи для N=1000. Порівняти результати.

Вибір параметрів моделювання:

Нехай n – порядковий номер студента у журналі.

Для моделювання показникового розподілу $\lambda = n/10$.

Для моделювання нормального розподілу $m = n$, $\sigma = n(\mathrm{mod}\,5)$.