

Sumowanie szeregów potęgowych

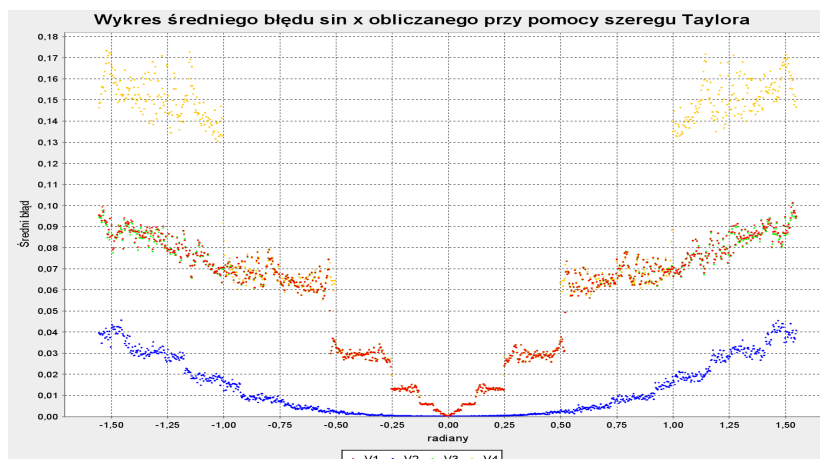
Oskar Lewna 278779

Wstęp

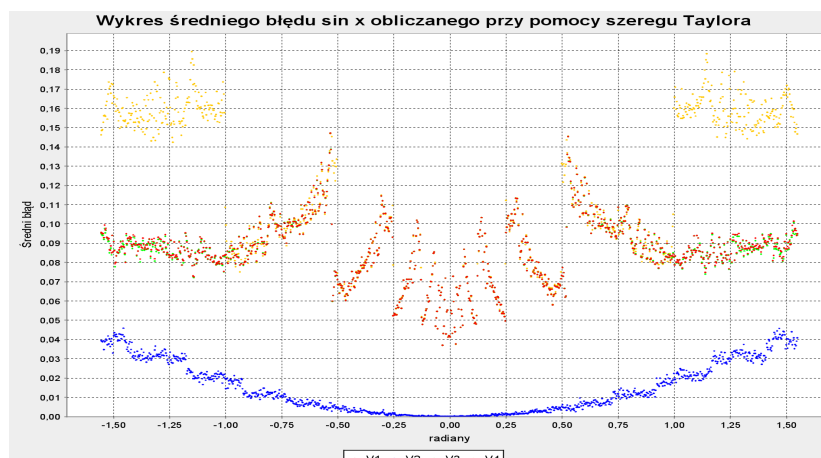
Przeprowadzono eksperyment dotyczący sumowania szeregów potęgowych. Eksperyment miał na celu sprawdzenie wielkości błędu pomiędzy funkcją wbudowaną oraz napisanymi ręcznie. Funkcją, jaką obliczano był $\sin x$. Cztery sposoby obliczania miały podane wymagania:

1. sumowanie elementów szeregu potęgowego obliczane bezpośrednio ze wzoru Taylora w kolejności od początku,
2. sumowanie elementów szeregu potęgowego obliczane bezpośrednio ze wzoru Taylora w kolejności od końca,
3. sumowanie elementów szeregu potęgowego od początku, ale obliczając kolejny wyraz szeregu na podstawie poprzedniego,
4. sumowanie elementów szeregu potęgowego od końca, ale obliczając kolejny wyraz szeregu na podstawie poprzedniego.

Eksperyment był napisany w języku Java z użyciem biblioteki do tworzenia wykresów JFreeChart. Przedział w eksperymencie wynosił od $\sin(-89.0^\circ)$ do $\sin(89.0^\circ)$. Na podanym przedziale wybrano milion wartości, z których zrobiono przedziały, po 1000 wartości. Następnie obliczono średnie błędy. Wyniki, pomnożone przez 10^{15} , przeprowadzonego eksperymentu przedstawione zostały na wykresach poniżej.



Błąd bezwzględny.



Błąd względny.

Hipotezy

1. sumowanie od końca daje dokładniejsze wyniki niż sumowanie od początku,

Jak widać na wykresach, sumowanie od końca jest oznaczone kolorem niebieskim, a sumowanie od początku jest oznaczone kolorem czerwonym. Sumowanie od końca daje o wiele dokładniejsze wyniki, ponieważ błędy są małe. Sumowanie od końca pozwala zacząć od dodawania małych składników, co minimalizuje błędy zaokrągleń. Hipoteza jest prawdziwa.

2. używając rozwinięcia wokół 0 (szeregu Maclaurina), przy tej samej liczbie składników szeregu dokładniejsze wyniki uzyskujemy przy małych argumentach,

Na obu wykresach widać dokładnie, że błędy dla wartości bliskim 0 są mniejsze niż te dla większych wartości. Gdy argument funkcji jest bliski zeru, większe potęgi argumentu są coraz mniejsze, a zatem składniki szeregu potęgowego maleją szybciej. Z kolei dla większych argumentów funkcji, większe potęgi argumentu są coraz większe, a składniki szeregu potęgowego rosną szybciej. Hipoteza jest również prawdziwa.

3. sumowanie elementów obliczanych na podstawie poprzedniego daje dokładniejsze wyniki niż obliczanych bezpośrednio ze wzoru.

Hipoteza jest nieprawdziwa, ponieważ najlepsze wyniki daje obliczanie ze wzoru od tyłu.

Pytania

1. Jak zależy dokładność obliczeń (błąd) od liczby sumowanych składników?

Im więcej składników tym lepsza dokładność obliczeń. Błąd jest tym wyższy, im mniej składników sumy potęgowej.

2. Ile składników w zależności od argumentu należy sumować aby otrzymać dokładność 10^{-6} ?

Im argument jest bliżej zera tym mniej składników jest potrzebne aby otrzymać podaną dokładność. Po przeprowadzeniu eksperymentu dla miliona argumentów ilość składników była w przedziale od 7 dla największych argumentów do 2 dla tych bliskich 0.

Kod do tworzenia wykresów: Dominik Belgrau.