

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра космической физики

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПЛОТНОСТИ
РАССЕЯННЫХ СКОПЛЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПОСЛЕ
ВЫИМЕТАНИЯ ЗВЕЗДООБРАЗУЮЩЕГО ГАЗА, МЕТОДАМИ
ЗАДАЧИ Н ТЕЛ**

(магистерская диссертация)

Студент:
Бородина Ольга Игоревна



(подпись студента)

Научный руководитель:
Поляченко Евгений Валерьевич,
д-р физ.-мат. наук



(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2022

Содержание

1 Аннотация	3
2 Обозначения и сокращения	4
3 Введение	5
4 Моделирование задачи N-тел	7
4.1 Начальные условия	8
4.2 Параметры кода	12
5 Оценка качества фитирования	15
6 Подбор профиля объемной плотности	21
6.1 Описание моделей при помощи распределения Кинга	23
6.2 Описание моделей при помощи распределения Дэнена	26
6.3 Описание моделей при помощи распределения Чжао	28
6.4 Описание моделей скоплений с помощью функции Чжао с фиксированными параметрами	32
7 Исследование поверхностной плотности скопления в раз- личных проекциях	35
7.1 Построение проекции модельного скопления на картинную плоскость	36
7.2 Описание проекции модельного скопления при помощи функ- ции Чжао	41
8 Заключение	45

1 Аннотация

В работе анализируется огромный массив данных, полученных в ходе моделирования задачи N -тел для рассеянных звездных скоплений. Особенностью этих моделей является отсутствие первоначального динамического равновесия вследствие быстрого выметания газа, из которого образовались звезды. Бурная релаксация, наблюдаемая в течение первых 50 млн лет и сопровождаемая потерей значительной части звезд, сменяется фазой секулярной эволюции, в которой происходит медленное уменьшение массы скопления. Нашей основной целью было исследование профиля плотности и формы скопления в ходе длительной секулярной фазы.

До сих пор для описания рассеянных звездных скоплений используется профиль Кинга, предполагающий наличие сферической симметрии. Мы показываем, что такой профиль не является оптимальным ни с точки зрения наблюдаемого распределения, ни с точки зрения симметрии. Эти недостатки становятся особенно заметны с появлением более качественных наблюдательных данных благодаря космической миссии GAIA. В предложении сферической симметрии предлагается использовать частный случай профиля Чжао.

При определении характеристик скопления из анализа его поверхностной плотности в проекции на картинную плоскость необходимо учитывать взаимное расположение центра Галактики и скопления относительно наблюдателя.

2 Обозначения и сокращения

РЗС — рассеянное звездное скопление

ЗС — звездное скопление

К-С тест — тест Колмогорова-Смирнова

ГП — главная последовательность

СО — система отсчета

NBU — единицы задачи N -тел

SFE — star formation efficiency (эффективность звездообразования)

CDF — cumulative distribution function (кумулятивная функция распределения)

3 Введение

Считается, что рассеянные звездные скопления (РЗС) образуются в облаках молекулярного газа в плоскости диска галактик [1]. Сразу после начала образования звезд молекулярный газ начинает выметаться под действием давления излучения и звездного ветра. Этот процесс происходит в течение нескольких миллионов лет, еще до взрыва первых сверхновых. Такой сценарий описан как в теоретических работах (например, [2]), так и согласуется с наблюдательными данными [3]. Предполагается [4], что изначально звезды и газ находились в виримальном равновесии. Однако, после удаления газа потенциала скопления оказывается недостаточно для удержания звезд с большой кинетической энергией. Наступает процесс бурной релаксации, в результате которого часть скопления может прийти в состояние равновесия по отношению к среднему гравитационному полю системы. В ходе бурной релаксации первоначальные свойства плотности скопления меняются. Для того, чтобы исследовать профиль плотности скопления, следует описать его при помощи аналитической функции.

В 1962 г. Кинг [5] предложил эмпирическую формулу для описания распределения плотности скоплений на основе наблюдений, сделанных в обсерваториях Паломар и Маунт-Вильсон. В те годы астрономы использовали фотографические пластиинки, детектирующие качества которых были существенно ниже, чем у ПЗС-матриц. Также данные, полученные на фотомульсии отражали поверхностную яркость скоплений, нежели численную плотность звезд. Следовательно, получаемое распределение плотности могло оказаться чувствительным к способу детектирования излучения. Кроме того отметим, что предложенное Кингом распределение было основано на обработке изображений шаровых скоплений, характерные распределения плотности которых могут существенно отличаться от распределений в РЗС.

Исследования РЗС стали важной частью галактической астрономии. Они помогли установить такие важные характеристики как функцию масс (ФМ) [6] и создать астрономическую шкалу расстояний в нашей Галактике [7]. Поэтому оказалось также крайне необходимым описывать параметры плотности звезд рассеянных скоплений. До сих пор в литературе для этого используется распределения Кинга, даже когда оно не всегда хорошо подходит для реальных скоплений, как это было показано в работе [8].

Динамику РЗС широко изучают при помощи моделирования задачи N -тел, так как оно позволяет протестировать различные начальные параметры, при которых образовывались скопления. Поэтому *целью данной работы* является исследование секулярной эволюции скопления при помощи моделирования N -тел. Для этого мы должны изучить распределение плотности РЗС после бурной релаксации и подобрать наиболее подходящие функции для описания профиля плотности. *Объектом исследования* являются рассеянные звездные скопления, *предметом исследования* — профиль плотности звезд скопления и возможная эллиптичность РЗС.

Работа организована следующим образом: в главе [4] «Моделирование задачи N -тел» мы опишем методику создания модельных скоплений. В главе [5] «Оценка качества фитирования» мы обсуждаем различные подходы к численной оценке качества фитирования моделей и обосновываем выбор алгоритма, используемого далее в главе «Описание моделей различными функциями» для сравнения нескольких видов фитирующих функций. Затем в главах [6] и [7] «Подбор профиля объемной плотности» и «Исследование поверхностной плотности скопления в различных проекциях» мы описываем процесс фитирования профиля плотности в трехмерном пространстве и в проекции на картинную плоскость. В конце работы приводятся основные результаты и выводы.

4 Моделирование задачи N -тел

Звездообразование начинается в облаках молекулярного водорода, где из-за охлаждения или малого возмущения развивается джинсовская неустойчивость. В результате некоторые сгустки газа начинают сжиматься и фрагментироваться, так что в каждом из них зарождаются скопления из протозвезд. Такие скопления называются погруженными, потому что протозвезды все еще погружены в звездообразующий газ. Мы в данной работе предполагаем, что такие системы из газа и протозвезд находятся в вироальном равновесии друг с другом. Затем звезды становятся на главную последовательность (ГП), и когда в самых массивных звездах начинаются термоядерные реакции, то звездообразующий газ полностью выметается за пределы скопления. Это происходит под действием звездного ветра, давления излучения, а также давления ионизованного газа. В ходе моделирования мы считаем, что временем, в течение которого происходит этот процесс, можно пренебречь. Сразу после удаления газа в скоплении остаются только звезды, кинетическая энергия которых не уравновешена с потенциальной. В результате скопление может потерять значительную часть звезд или даже полностью распасться. Если РЗС пережило бурную релаксацию, то начинается процесс секулярной эволюции, продолжающейся сотни миллионов лет.

Очевидно, что чем большая доля газа превратилась в звезды, тем лучше выполняется условие вироального равновесия, а значит больше вероятность того, что скопление не разрушится в ходе бурной релаксации. Для количественного определения этой доли газа используется величина ‘эффективности звездообразования’ (star formation efficiency или SFE). Далее мы опишем то, как в данной работе реализовано моделирование звезд РЗС в потенциальном поле Галактики, какие начальные условия были использованы и в чем заключается алгоритм моделирования N -тел.

4.1 Начальные условия

В данной работе мы обсуждаем несколько видов начальных функций плотности: распределения Пламмера

$$\rho_P(r) = \rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{a_P^2}\right)^{-5/2} \quad (1)$$

и Дэнена

$$\rho_D(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{a_D}\right)^{-\gamma} \left(1 + \frac{r}{a_D}\right)^{\gamma-4}. \quad (2)$$

Оба вида распределений принадлежат семейству двустепенных моделей.

В работе [9] отметили, что локальная эффективность звездообразования выше в областях повышенной плотности газа. Это обусловлено не только большим количеством газа, но и более быстрым формированием звезд, поскольку характерное время образования обратно пропорционально плотности газа, $\tau \propto \rho_{\text{gas}}^{-1/2}$. Учитывая оба фактора, можно показать [9], что для степенной зависимости плотности облака молекулярного газа перед началом звездообразования $\rho_{\text{gas}} \propto r^{-p}$ получается зависимость $\rho_{\text{stars}} \propto r^{-q}$ с показателем $q = 3p/2$. Таким образом, для того, чтобы получить РЗС с пламмеровской зависимостью плотности звезд на периферии ($q = 5$) в начале процесса звездообразования нужно иметь молекулярное облако, в котором плотность спадает с показателем $p = 3.3$. Наблюдения же показывают [10, 11], что для асимптотики внешней части молекулярных облаков характерны значения $1 < p < 2$, хотя нужно отметить, что существуют и другие работы, в которых допускается значения $p < 3$ [12].

Для функции Дэнена наклон внешней части профиля плотности звездообразующего газа $p \approx 2.6$, а это значит, что данный профиль лучше соответствует наблюдательным оценкам профиля плотности молекулярных облаков. Поэтому в нашей статье [13] мы также приняли решение рассмотреть профиль Дэнена.

По сравнению с профилем Пламмера, семейство распределений Дэнен-

на имеет дополнительный параметр γ , позволяющий задавать различные законы роста плотности звезд в центре скопления. В нашей работе мы рассматриваем значения $\gamma = \{0, 1, 2\}$. Параметр γ имеет смысл степени концентрации звезд в центре скопления. При ненулевых значениях γ говорят о наличии ‘каспа’ (cusp) плотности.

Модели с $\gamma = 0$ не имеют особенностей в распределении плотности в центре. В этом они похожи на распределение Пламмера. Поэтому сравнение хода эволюции моделей с начальными профилями плотности этих двух видов распределений позволяет выявить влияние закона спадания плотности на периферии на выживаемость скоплений [13].

В дополнение к различным вариантам асимптотик в центре скопления, мы исследуем эволюцию РЗС с разной эффективностью звездообразования SFE, которую можно рассчитать следующим образом:

$$\text{SFE}_r(r) = \frac{M_\star(< r)}{M_\star(< r) + M_{\text{gas}}(< r)}, \quad (3)$$

где M_\star — масса образовавшихся звезд, а M_{gas} — масса незадействованного ходе звездообразования газа. Для описания эффективности звездообразования в моделях Дэнена используется SFE, посчитанное до расстояния $r = 20 r_h$, где r_h — радиус, внутри которого находится половина массы скопления. Для моделей с начальным распределением Пламмера SFE считается до $r = 10 a_p \approx 7.7 r_h$ (согласно [13], такой выбор предельного расстояния для расчета SFE соответствует $r = 20 r_h$ для моделей Дэнена).

Движение скоплений происходит по круговой орбите Солнца радиуса R_{orb} в потенциале Галактики, который имеет осесимметричную форму и состоит из трех компонентов: диска, балджа и гало [14] вида:

$$\Phi(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{b^2 + z^2})^2}}, \quad (4)$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса компонента Галактики, а

a и b являются параметрами сплюснутости и характерного радиуса компонента. Их значения представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Численные значения параметров компонентов потенциала Галактики из формулы (4).

Компонент Галактики	$M [M_\odot]$	a [пк]	b [пк]
Балдж	1.4×10^{10}	0.0	0.3
Диск	9.0×10^{10}	3.3	0.3
Гало	7.0×10^{11}	0.0	25.0

Угловую скорость скопления на круговой орбите вокруг центра галактики Ω можно найти из следующей формулы:

$$\Omega = V_{\text{orb}}/R_{\text{orb}}, \quad (5)$$

где $R_{\text{orb}} = 8178$ пк и $V_{\text{orb}} = 234.73$ км с⁻¹ [15].

Типичные скопления, которые наблюдаются на солнечном галактоцентрическом расстоянии, имеют параметр влияния приливного поля $\lambda = 0.05$, где λ задается следующим выражением:

$$\lambda = \frac{r_h}{R_J}. \quad (6)$$

Для вычисления r_h из формулы (6) следует найти радиус Якоби [16]:

$$R_J = \left(\frac{GM}{(4 - \beta^2)\Omega^2} \right)^{1/3} \approx 24.52 \text{ пк}, \quad (7)$$

где нормированная эпциклическая частота $\beta = 1.37$.

Необходимо также задать начальные параметры скопления. В наших расчетах начальная масса скопления равна $M_0 = 6000M_\odot$ и число звезд $N_0 = 10455$, а также half-mass радиус $r_h = 0.05 R_J = 1.23$ пк. Выбор начальной массы и числа звезд является менее существенным, так как они значительно меньше влияют на выживаемость РЗС по сравнению с параметром эффективности звездообразования [17]. Используемые значения

SFE для Дэнена имеют значения [0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.10, 0.20, 0.30], для Пламмера — [0.15, 0.20, 0.25]. Центр скопления лежит в плоскости Галактики на том же расстоянии от ее центра, что и Солнце.

Для профиля плотности звезд Дэнена и заданного SFE можно вычислить распределение плотности газа в скоплении [18]. Затем можно определить потенциал и разыграть координаты, скорости и массы звезд. Так как одному и тому же распределению потенциала и функции масс могут отвечать различные наборы параметров частиц, мы используем 9 различных реализаций: три по массам и три по координатам и скоростям звезд. Это дает нам возможность более точно оценить эволюцию скопления и исключить случайные отклонения, которые возможны в системах со столь малым количеством звезд. Отдельные реализации звездных скоплений (координат, скоростей и масс), получаются при помощи программы MKHALO [13, 19].

При расчетах мы используем N -body единицы, такие что $[M] = 6000M_{\odot}$, $[r] = r_h$, $G = 1$, тогда $[t] \approx 0.26$ Myr.

4.2 Параметры кода

Получив массы, положения и скорости звезд скопления для начального момента времени $t = 0$ Муг, мы переходим к вычислению этих значений для дальнейших моментов времени.

В нашей задаче в рамках одной реализации моделируется лишь одно звездное скопление, поэтому можно использовать код с прямым вычислением попарного взаимодействия. Преимущество прямого кода заключается в точности расчета взаимодействия соседних частиц, а недостаток – быстрый рост времени расчета временного шага интегрирования с ростом числа частиц $t \propto \mathcal{O}(N^2)$. В данном случае был использован код φ -GRAPE [20] с интегратором Эрмита 4-го порядка с модифицированным алгоритмом для сокращения вычислительной сложности. Код запускается на GPU/CUDA при помощи библиотеки YEBISU [21]. Интегрирование происходит по схеме Эрмита с иерархическим построением временных шагов, что позволяет достичь 4-го порядка по точности. Алгоритм состоит из следующих шагов (для более подробного описания см. [22]):

Сначала вычисляются ускорение и его первая производная для всех частиц:

$$\mathbf{a}_{i,1} = \sum_{j \neq i} Gm_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{(r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{(3/2)}} \quad (8)$$

и

$$\dot{\mathbf{a}}_{i,1} = \sum_{j \neq i} Gm_j \left[\frac{\mathbf{v}_{ij}}{(r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{(3/2)}} + \frac{3(\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})\mathbf{r}_{ij}}{(r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{(5/2)}} \right], \quad (9)$$

где

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_{j,p} - \mathbf{x}_{i,p}, \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_{j,p} - \mathbf{v}_{i,p} \quad (11)$$

и $\epsilon = 10^{-4}$ NB – параметр сглаживания.

Затем в зависимости от того, насколько большая кривизна траектории звезд, то есть как близко звезда подходит к другим массам, мы вычис-

ляем шаги по времени индивидуально для каждой частицы при помощи следующей формулы:

$$\Delta t_i = \eta_s \frac{|\mathbf{a}_i|}{|\dot{\mathbf{a}}_i|}. \quad (12)$$

и $\eta_s = 0.01$ — параметр, контролирующий точность вычислений.

Так как все звезды обладают своим значением Δt_i и мы не можем эффективно и параллельно интегрировать их по-отдельности, мы группируем звезды в блоки по времени:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \Delta t_i < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad (13)$$

приравнивая $\Delta t_{i,b} = (1/2)^n$ для звезд в соответствующем блоке.

Звезды с минимальным $\Delta t_{\min} = 2^{-n_{\max}} = 2^{-32}$ на данный момент называются активными, именно для них будут рассчитываться в первую очередь следующие координаты и скорости. Затем вычисляются предварительные (predicted) координаты и скорости всех частиц согласно формулам:

$$\mathbf{x}_{j,p} = \mathbf{x}_{j,0} + (t - t_j) \mathbf{v}_{j,0} + \frac{(t - t_j)^2}{2} \mathbf{a}_{j,0} + \frac{(t - t_j)^3}{6} \dot{\mathbf{a}}_{j,0} \quad (14)$$

и

$$\mathbf{v}_{j,p} = \mathbf{v}_{j,0} + (t - t_j) \mathbf{a}_{j,0} + \frac{(t - t_j)^2}{2} \dot{\mathbf{a}}_{j,0}. \quad (15)$$

Затем с помощью предварительных координат и скоростей вычисляются скорректированные координаты и скорости для активных звезд:

$$\mathbf{x}_{i,1} = \mathbf{x}_{i,p} + \frac{\Delta t_i^4}{24} \mathbf{a}_{i,0}^{(2)} + \frac{\Delta t_i^5}{120} \mathbf{a}_{i,0}^{(3)} \quad (16)$$

и

$$\mathbf{v}_{i,1} = \mathbf{v}_{i,p} + \frac{\Delta t_i^3}{6} \mathbf{a}_{i,0}^{(2)} + \frac{\Delta t_i^4}{24} \mathbf{a}_{i,0}^{(3)}, \quad (17)$$

где вторая и третья производная ускорения $\mathbf{a}_{i,0}^{(2)}$ и $\mathbf{a}_{i,0}^{(3)}$ вычисляются из следующих уравнений:

$$\mathbf{a}_{i,0}^{(2)} = \frac{-6(\mathbf{a}_{i,0} - \mathbf{a}_{i,1}) - \Delta t_i(4\dot{\mathbf{a}}_{i,0} + 2\ddot{\mathbf{a}}_{i,1})}{\Delta t_i^2} \quad (18)$$

$$\mathbf{a}_{i,0}^{(3)} = \frac{12(\mathbf{a}_{i,0} - \mathbf{a}_{i,1}) + 6\Delta t_i (\dot{\mathbf{a}}_{i,0} + \dot{\mathbf{a}}_{i,1})}{\Delta t_i^3}. \quad (19)$$

Затем вычисляется снова Δt и процедура повторяется, определяются новые активные частицы.

Так как мы рассчитываем координаты и скорости звезд с учетом третьей производной ускорения, данный интегратор имеет 4-ый порядок точности. Однако использование этапов предиктора и корректора позволяет вычислять эти производные более выгодным образом, нежели при использовании классических расчетных сеток.

В нашей программе также применяются модели эволюции звезд, основанные на программах SSE [23], [24]. Для взрывов сверхновых различных масс мы используем разные скорости вылета компактных остатков.

5 Оценка качества фитирования

Чтобы оценить, насколько предложенное нами распределение подходит для описания распределения плотности РЗС, нужно ввести численную метрику. Поэтому ниже мы обсуждаем наиболее подходящие статистические тесты для нашей задачи.

Численная оценка качества фитирования необходима, чтобы определить насколько модельная функция хорошо описывает особенности распределения наблюдательных данных. χ^2 -тест является одним из наиболее распространенных методов оценки качества фита. Сначала вычисляется χ^2 метрика:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(F(x_i) - F_N(x_i))^2}{F(x_i)^2}, \quad (20)$$

где суммирование происходит по всем звездам, $F_N(x_i)$ – это кумулятивное распределение звезд по расстоянию от центра РЗС, эмпирически полученное из данных, $F(x_i)$ – кумулятивная функция, построенная из модели соответственно, а N – размер выборки. Затем вычисляется значение *p-value*, то есть вероятности, что наша гипотеза о том, что данные принадлежат распределению $F(x_i)$, верна:

$$p\text{-value} = \int_{\chi^2}^{\infty} f(x, k) dx, \quad (21)$$

где $f(x, k)$ – χ^2 -распределение с k степенями свободы:

$$f(x, k) = \begin{cases} \frac{x^{k/2-1} \exp(-x/2)}{2^{k/2} \Gamma(k/2)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}. \quad (22)$$

Но к сожалению, одним из условий применимости теста к данным является независимость точек $F_N(x_i)$ друг от друга. В нашей задаче звезды связаны гравитационными силами, и их положения в скоплении не случайны. Это означает, что значения $F_N(x_i)$ не являются независимыми друг от друга, а следовательно мы не можем пользоваться простым χ^2 -тестом.

Другой распространенный тест для оценки качества фита, тест Колмогорова-Смирнова (К-С тест), основан на вычислении следующей статистики:

$$L = \sqrt{N} \sup_x |F(x) - F_N(x)|. \quad (23)$$

Однако, если мы будем применять эту статистику к модели, параметры которой получены напрямую из данных, то формула (23) дает неверный результат при подсчете вероятностной оценки [25]. В нашей задаче мы получаем оптимальные параметры модели, фитируя данные, поэтому мы должны найти альтернативный метод определения качества фита. Такая задача часто встает перед астрономами и ими была разработана параметрически бутстранированная К-С процедура [25], см. Рис.1.

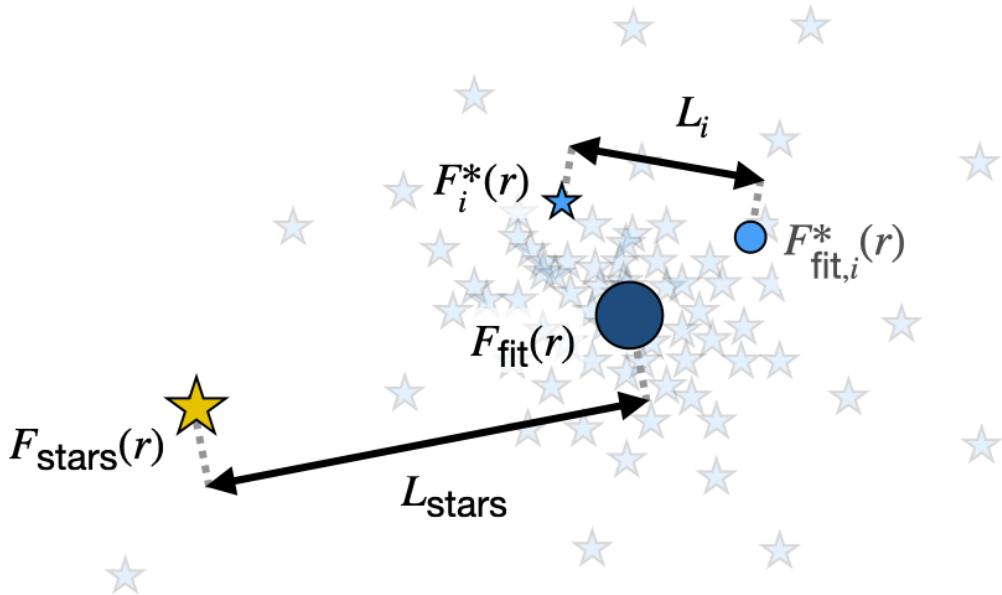


Рисунок 1 – Описание алгоритма бутстранированного К-С теста.

Во-первых, для имеющейся зависимости числа звезд в сферических оболочках $\delta n(r)$ (более подробное описание приведено в главе 6) нужно получить оптимальные параметры фитирующей функции и найти $\delta n_{\text{fit}}(r)$. Затем вычисляются кумулятивные распределения $F_{\text{stars}}(r)$ и $F_{\text{fit}}(r)$ с помо-

щью следующей формулы:

$$F(r) = \sum_{r_i < r} \delta n(r_i). \quad (24)$$

Кумулятивное распределение звезд в скоплении $F_{\text{stars}}(r)$ и кумулятивное распределение оптимально подобранной функции $F_{\text{fit}}(r)$ изображены как желтая звезда и большой синий круг на рисунке 1 в пространстве расстояний между функциями. Дальнейший процесс можно разбить на две части.

Сначала мы многократно генерируем набор радиусов из N звезд из распределения $\delta n_{\text{fit}}(r)$ при помощи метода Монте-Карло (такая техника называется ‘бутстррап’), см. малые синие звездочки на рисунке 1. Это позволяет составить выборку из чисел, имитирующих расстояния от звезд скопления до его центра с заданным распределением. Таким образом, мы получаем распределение $\delta n_i^*(r)$, которое преобразуется в кумулятивное распределение $F_i^*(r)$. Функцию $F_{\text{fit}}(r)$ мы будем в дальнейшем называть родительской функцией по отношению к $F_i^*(r)$.

Для каждой из выборок вновь находятся оптимальные параметры. Определив оптимальную функцию $\delta n_{\text{fit},i}^*(r)$, мы находим $F_{\text{fit},i}^*(r)$ (уравнение 24), изображенную на рисунке 1 маленьким синим кружком. Теперь мы рассчитываем статистику K-C L_i для $F_i^*(r)$ и $F_{\text{fit},i}^*(r)$ при помощи формулы (23). Тем самым мы определили расстояние между функцией, которая по построению описывается нужной нам моделью. Мы повторяем эту процедуру $N_{\text{bootstrap}} = 10000$ раз, получая кумулятивное распределение расстояний $\text{CDF}(L_i)$.

В качестве второй части процедуры мы должны сравнить L_{stars} , то есть расстояние между распределениями $F_{\text{stars}}(r)$ и $F_{\text{fit}}(r)$, с кумулятивным распределением $\text{CDF}(L_i)$. Если L_{stars} лежит внутри 2σ распределения $\text{CDF}(L_i)$, тогда можно сделать вывод, что звезды скопления описываются выбранной нами фитирующей функцией, так же хорошо, как и выборки

$F_i^*(r)$ описываются родительскими функциями.

Так например, на рисунке 1 изображен тот случай, когда выбранная фитирующая функция $\delta n_{\text{fit}}(r)$ плохо описывает данные $\delta n(r)$, потому что желтая звезда лежит в среднем заметно дальше от большого синего круга, чем синие звезды.

Во время работы с выходными данными численного моделирования мы обнаружили, что в зависимости от объема звезд в выборке мы можем получать разное качество фитирования. Этот эффект можно объяснить на простом примере. На рисунке 2 показано распределение, имеющее вид гауссиана с дополнительным небольшим пиком, и гистограмма большой выборки из 10000 значений x .

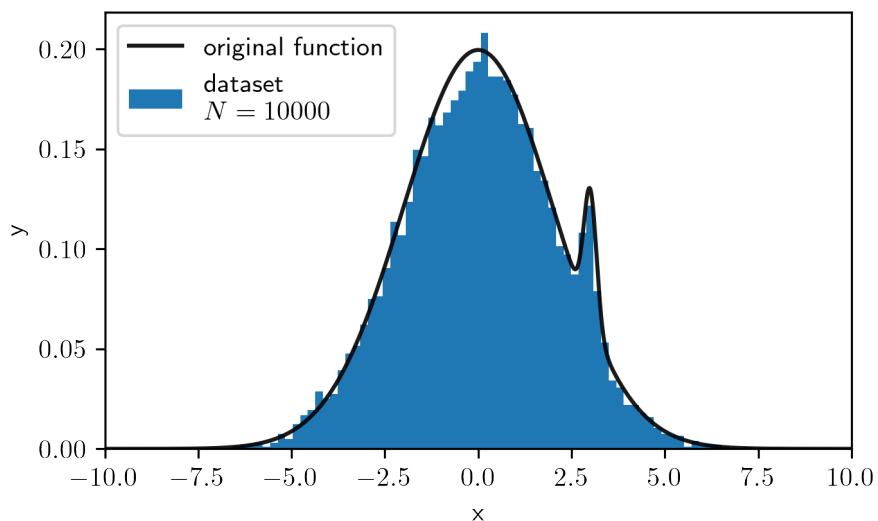


Рисунок 2 – Сэмплированные данные и их родительское распределение, которое представляет из себя гауссиану с дополнительным пиком

Теперь мы попробуем описать данные, полученные разыгрышем этого распределения при помощи одной лишь гауссовой функции с двумя свободными параметрами:

$$F(x) = \exp \left[\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (25)$$

Мы будем создавать подвыборки разного объема от 50 до 10000. Очевидно, что одиночная гауссиана может хорошо описывать подвыборки с малым числом данных, потому что в область пика может не попасть ни одной точки. С ростом объема выборки большее количество точек попадет в область малого пучка и это приведет к ухудшению оценки качества фита.

Для того, чтобы подтвердить или опровергнуть эту гипотезу, мы применили бутстранированный К-С тест к этим данным и исследовали, как зависит расстояние между фитом и распределением данных в зависимости от N .

На рисунке 3 видно, что для малых N расстояние L_{stars} не зависит от размера выборки, что говорит о том, что точек настолько мало, что мы одинаково хорошо описываем их распределение функцией, пусть даже и отличающейся от родительской.

При этом на расстояние L_i размер выборки не влияет, как можно видеть по оранжевой ломанной линии (рис. 3). Конечно, значение $\langle L_i \rangle$ подвержено флюктуациям, потому что выборки случайны и их число ограничено, но при этом явно выделяется горизонтальный тренд, показанный бледно-оранжевой линией. Горизонтальный тренд означает, что $\sup_x |F(x) - F_N(x)|$ из формулы (23) падает как $1/\sqrt{N}$, что обусловлено тем, что «лесенка» кумулятивной функции $F_N(x)$ становится более гладкой и похожей на $F(x)$. Но начиная с какого-то N_{crit} оранжевая и синяя линии расходятся и функция L_{stars} начинает расти как \sqrt{N} . Это объясняется тем, что $\sup_x |F(x) - F_N(x)|$ (ур. 23) устремляется к некоторой константе, обусловленной разницей между родительской и гауссовой функцией, то есть в данном случае размером дополнительного пика.

Такую же процедуру можно повторить для распределений с различной шириной дополнительного пика и показать, что чем больше родительское распределение отличается от фитирующей функции, тем меньше значение N_{crit} , для которого фит еще остается удовлетворительным. При большем

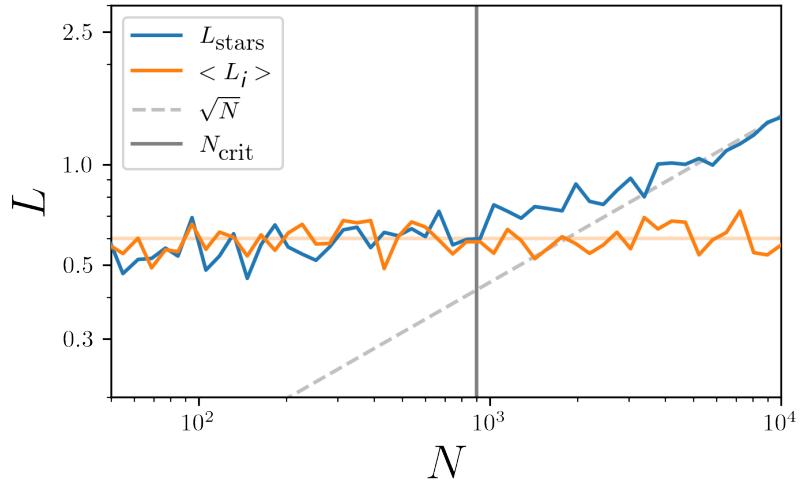


Рисунок 3 – Пример определения критического N_{crit} . Ломанная оранжевая линия показывает медианное значение для $\text{CDF}(L_i)$, тренду которого соответствует бледно-оранжевая линия. Синей линии соответствует значение L_{stars} в зависимости от различных N . Серой пунктирной линией показана зависимость \sqrt{N} . Место, где оранжевая и синяя линии расходятся, отмечено серой вертикальной линией, и это соответствует критическому числу N_{crit} .

значении N несоответствие модельного распределения и данных становится заметно. С другой стороны, чем лучше модельное распределение соответствует выборке, тем больший объем выборки можно взять. Поэтому значение N_{crit} можно использовать для оценки критерия качества описания данных той или иной фитирующей функцией.

Использование более подходящих фитирующих функций становится особенно актуально при работе с астрономическими данными в эпоху Gaia — космического телескопа, поставляющего астрометрическую информацию беспрецедентной точности и объема. Теперь мы получаем возможность проводить качественный отбор вероятных членов скопления, а значит учитывать в своем анализе большее число звезд. Естественно, потребуются модели, лучше описывающие распределение звезд в скоплениях.

6 Подбор профиля объемной плотности

При определении параметров скопления как правило предполагается его сферическая симметрия. В литературе нет согласия между тем, какой вид функции распределения плотности звезд скопления использовать для построения модели. В некоторых работах [8] используется $\rho(r)$, которая позволяет лучше описывать центральную область скопления, в других работах [26] часто встречается фитирование кумулятивного распределения:

$$n(r) = 4\pi \int_0^r ds s^2 \rho(s), \quad (26)$$

В последнем случае больший вес при фитировании уделяется периферийной части скопления, а в первом случае — центральной. Мы предлагаем использовать функцию δn , которая имеет смысл числа частиц в сферическом слое. Она одинаково хорошо показывает асимптотики в центре и на периферии, а также имеет характерный радиус, на котором происходит переход одной асимптотики в другую. Функция δn описывается следующим уравнением:

$$\delta n(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \delta r \quad (27)$$

для трехмерного распределения и уравнением

$$\delta n(r_{2D}) = 2\pi r \rho(r_{2D}) \delta r_{2D} \quad (28)$$

в случае работы со скоплением в проекции на плоскость.

Эта функция, в сравнении с $\rho(r)$ и $n(r)$, представлена на рис. 4. Она явным явным образом характеризуется внутренним и внешним наклоном профиля плотности, радиусом, на котором происходит переход между этими наклонами, а также тем, насколько быстро происходит этот переход.

Получив оптимальные параметры распределения, мы можем усреднить их по девяти разным реализациям и времени, поскольку состояние скопления фиксируется нами с избыточным шагом по времени 0.2 миллиона лет.

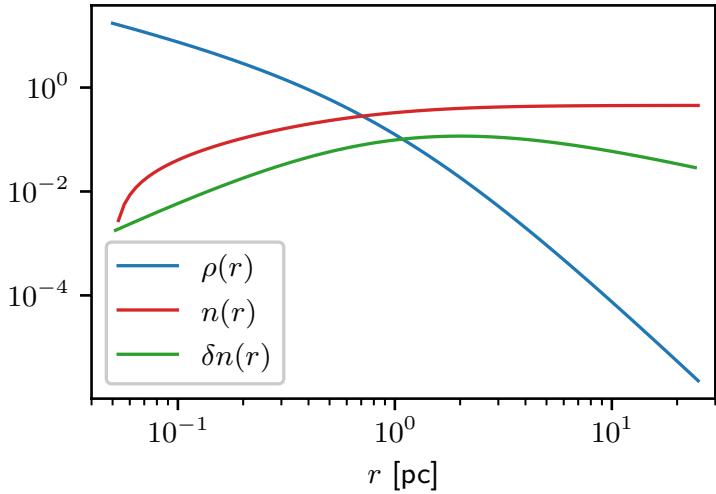


Рисунок 4 – Сравнение разных видов распределений: $\rho(r)$, $n(r)$ и $\delta n(r)$

Мы построили логарифмическую координатную сетку от 0.1 до 25 парсек и подсчитали количество звезд в каждом сферическом слое. Нижняя граница сетки обусловлена величиной неопределенности положения центра скопления и относительной рыхлостью РЗС: не всегда в центральном узле достаточная плотность, а в некоторых слоях звезд может не оказаться во все. В качестве верхней границы нашей координатной сетки мы используем рассчитанный для каждого момента времени радиус Якоби, R_J .

Таким образом, у нас есть значения $\delta n(r)$ для диапазона расстояний от 0.1 пк до R_J , и мы можем подбирать для этих данных оптимальные параметры фитирующих функций. Для фитирования мы пользуемся библиотекой `python` под названием `LMFIT` [27], которая позволяет не только находить ошибки определения оптимальных параметров, но также и удобным образом задавать границы для поиска оптимальных параметров или фиксировать их значения.

В следующих разделах мы показываем, какие фитирующие функции мы использовали для того, чтобы описывать профиль плотности РЗС.

6.1 Описание моделей при помощи распределения Кинга

Исторически в наблюдательной астрономии скопления описываются при помощи функции Кинга:

$$\rho_K(r) = \rho_0 \left[\left(1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right)^{-0.5} - \left(1 + \left(\frac{r_t}{r_c} \right)^2 \right)^{-0.5} \right]^2. \quad (29)$$

из его работы 1962 г. [5].

Эта функция имеет несколько параметров: ρ_0 — переменная для нормировки плотности на число звезд в скоплении, r_c — параметр для определения характерного центрального расстояния, а также r_t — приливной радиус скопления, максимальный радиус с ненулевой плотностью звезд, т.е. $\rho_K(r > r_t) = 0$. Также распределение Кинга предполагает сферическую симметрию РЗС, то есть в нем нет зависимости от угловых компонент.

Так как астрономы используют функцию Кинга как основное распределение для изучения РЗС, сравнивая значения параметров и каталогизируя их, мы первым делом решили использовать ее и исследовать, как описывает эта функция наши модельные скопления. Результат фитирования трех скоплений ($\gamma_0 = 0.0$ и SFE = 0.10; $\gamma_0 = 1.0$ и SFE = 0.10; Пламмера и SFE = 0.20) представлен на рисунке 5. Мы видим, что в центральной области скоплений функция хорошо повторяет профили плотности, однако на периферии функция Кинга существенно компактнее, чем модельные скопления. Также плохо описывает переход между асимптотиками в центре и на периферии.

Такое несоответствие между фитирующими функцией и профилем плотности скопления также отмечалось ранее и в работе с наблюдательными данными [8]. Это обусловлено тем, что РЗС обладают более рыхлой структурой и протяженной короной, нежели шаровые скопления, для которых этот профиль изначально был предложен, поэтому на периферии их плот-

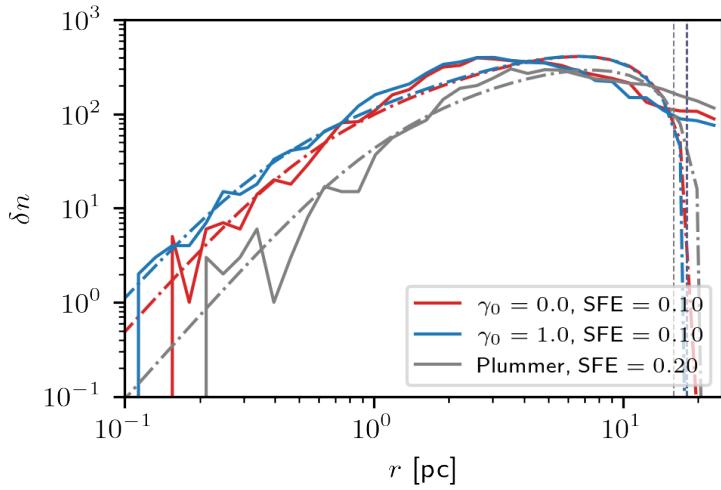


Рисунок 5 – Распределение звезд (слошные линии) и оптимальный фит (штрихпунктирная линия) в виде функции Кинга для моделей $\gamma_0 = 0.0$ и SFE = 0.10; $\gamma_0 = 1.0$ и SFE = 0.10; Пламмера и SFE = 0.20. Вертикальные линии соответствующих цветов расположены на расстоянии, равном радиусу Якоби. Все модели представлены для времени $t = 100$ Myr.

ность падает не настолько стремительно.

Для того, чтобы в дальнейшем сравнить качество фита, сделанного из функции Кинга, с другими моделями, мы определили N_{crit} (рис. 6) при помощи алгоритма на основе бутстранированного К-С теста, описанного в главе 5.

На рис. 6 представлен кумулятивный вид распределения $CDF(L_i)$ для функции Кинга. Мы видим, что уже для $N_{\text{crit}} = 100$ расстояние L_{stars} достигает 2σ в распределении $CDF(L_i)$, то есть критическое число звезд сильно меньше числа звезд в скоплении. Это говорит о том, что расстояние от фита до распределения звезд L_{stars} сильно больше, чем характерное расстояние L_i , на которое могут отклоняться выборки от своего родительского распределения (рис. 1), даже если их размер на порядок меньше нашего числа звезд.

Таким образом, мы делаем вывод, что фит функцией Кинга плохо опи-

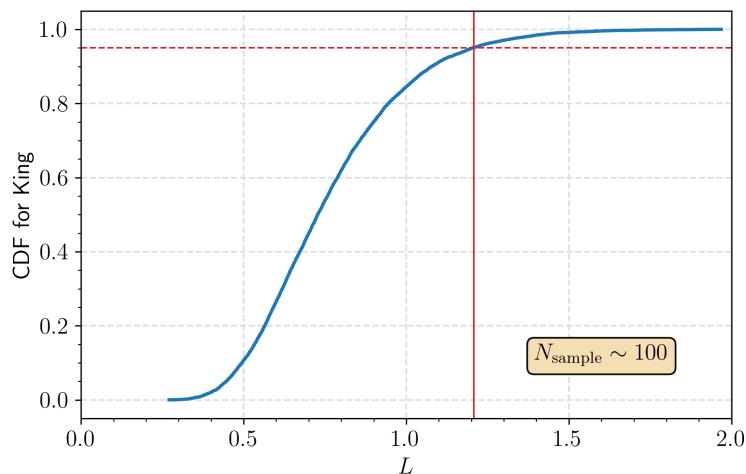


Рисунок 6 – Распределение $CDF(L_i)$ для функции Кинга показано синей линией. Красная горизонтальная линия показывает, где проходит граница 2σ . Красная вертикальная линия соответствует расстоянию L_{stars} для $N_{\text{crit}} = 100$.

сывают данные модельных скоплений, и нам следует найти более подходящую функцию.

6.2 Описание моделей при помощи распределения Дэнена

Так как в начальный момент времени скопление имело распределение Дэнена [2], мы предположили, что даже после бурной релаксации скопление можно будет описать этой функцией. Распределение Дэнена так же, как и функция Кинга, использует предположение о сферической симметрии скопления.

На графике 7 изображены распределения звезд и полученные фиты для нескольких моделей Дэнена и Пламмера.

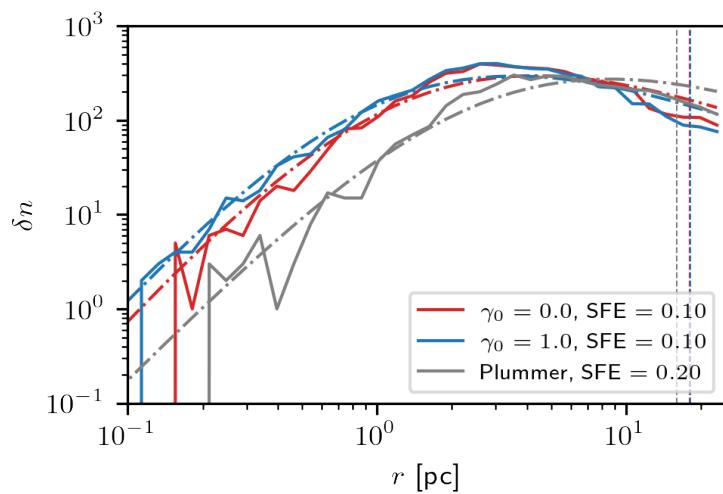


Рисунок 7 – Распределение звезд (сплошные линии) и оптимальный фит (штрихпунктирная линия) функции Дэнена для моделей $\gamma_0 = 0.0$ и SFE = 0.10; $\gamma_0 = 1.0$ и SFE = 0.10; Пламмера и SFE = 0.20. Вертикальные линии соответствующих цветов расположены на расстоянии, равном радиусу Якоби. Все модели представлены для времени $t = 100$ Мyr.

Для каждого фита можно увидеть различия по двум аспектам: во-первых, наклон профиля на периферии скопления больше, чем у функции Дэнена, а во-вторых, переход между внутренней и внешней асимптотиками происходит быстрее, чем это позволяет фитирующая функция.

Чтобы численно сравнить качество фитов, полученных для функции Дэнена, мы снова провели бутстранированный К-С тест. На рис. 8 представлены результаты этого алгоритма. Мы получили $N_{\text{crit}} = 300$, что больше, чем N_{crit} для функции Кинга. Это говорит о том, что это распределение лучше подходит для описания наших данных, но при этом это значение все еще на порядок меньше общего числа звезд в скоплении.

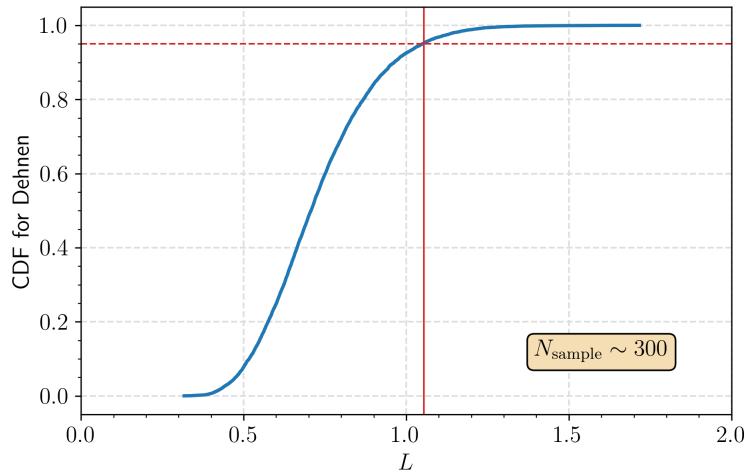


Рисунок 8 – Распределение $\text{CDF}(L_i)$ показано синей линией. Красная горизонтальная линия показывает, где проходит граница 2σ . Красная вертикальная линия соответствует расстоянию L_{stars} для $N_{\text{crit}} = 300$.

Таким образом, распределение Дэнена не подходит для описания скоплений после 50 миллионов лет. Данный факт является иллюстрацией того, что после бурной релаксации скопление теряет информацию о начальном профиле плотности. Это важный результат, он означает, что при моделировании скоплений начальные распределения плотности РЗС, вообще говоря, не обязаны совпадать с наблюдаемыми. Перед нами встала задача найти в литературе распределение, которое будет лучше описывать данные расчетов задачи N -тел.

6.3 Описание моделей при помощи распределения Чжао

Исходя из того, какие характеристики профиля плотности нам хочется задавать помимо тех, что есть в функции Дэнена, мы провели обзор литературы и нашли обобщение для двустепенных моделей. Такой функцией является распределение Чжао [28]:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{-\gamma} \left(1 + \left(\frac{r}{a}\right)^\alpha\right)^{\frac{\gamma-\beta}{\alpha}}, \quad (30)$$

и оно имеет пять параметров. Параметр γ описывает показатель степени в центре скопления, β — на периферии, α показывает насколько быстро происходит переход между этими двумя асимптотиками. Таким образом это распределение отличается от Дэнена наличием параметров α и β , которые нам необходимы исходя из предыдущего анализа (рис. 7). Данная функция является обобщением двустепенных моделей, то есть из нее можно получить как распределение Дэнена, так и распределение Пламмера. Чтобы получить распределение 2, нужно положить $\alpha = 1$ и $\beta = 4$, а распределение 1 получается при задании константами следующих параметров: $\alpha = 2$, $\beta = 5$ и $\gamma = 0$.

На рисунке 9 изображены фиты, полученные для функции Чжао. Можно сделать вывод, что для выбранного диапазона радиусов функция полностью описывает данные плотности модельных скоплений.

Мы также провели исследование качества фита (рисунок 10) и получили, что даже для $N_{\text{crit}} = N_{\text{stars}}$ расстояние L_{stars} лежит внутри 2σ для $CDF(L_i)$. Это говорит о том, что для данного количества звезд в скоплении мы не можем выявить различия между истинным распределением плотности и фитирующей функцией Чжао, что означает хорошее качество фита.

На самом деле неудивительно, что функция Чжао лучше описывает

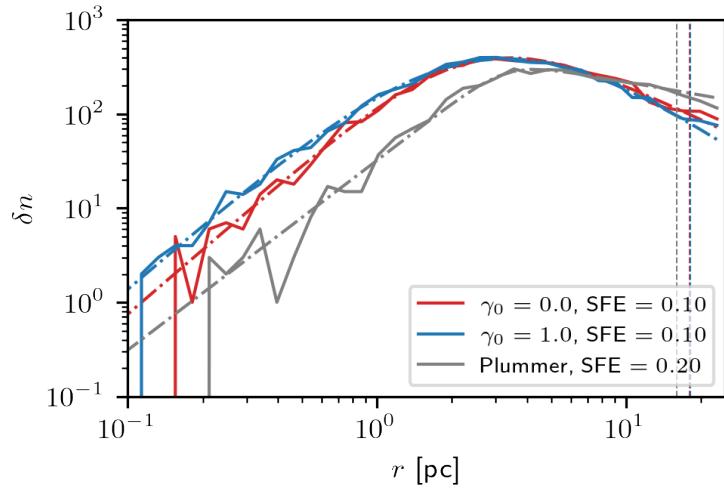


Рисунок 9 – Распределение звезд (слошные линии) и оптимальный фит (штрихпунктирная линия) функции Чжако для моделей $\gamma_0 = 0.0$ и SFE = 0.10; $\gamma_0 = 1.0$ и SFE = 0.10; Пламмера и SFE = 0.20. Вертикальные линии соответствующих цветов расположены на расстоянии, равном радиусу Якоби. Все модели представлены для времени $t = 100$ Myr.

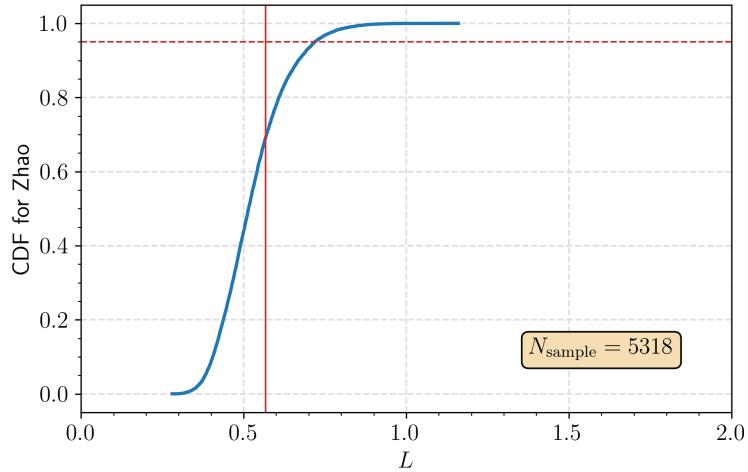


Рисунок 10 – Распределение $CDF(L_i)$ показано синей линией. Красная горизонтальная линия показывает, где проходит граница 2σ . Красная вертикальная линия соответствует расстоянию L_{stars} для $N_{\text{crit}} = N_{\text{stars}}$.

данные численного эксперимента: чем больше число параметров модели, тем лучше мы можем подобрать фит. Так как мы хотим представить аль-

тернативу функции Кинга, которая активно используется для описания РЗС, мы решили уменьшить число параметров. Теоретически можно по-дойти к этой задаче двумя способами: во-первых, можно выявить параметры, мало изменяющиеся со временем и принять их за константу, а во-вторых, можно исследовать, как выглядит пространство оптимальных параметров и найти корреляции. Мы решили сначала воспользоваться первой стратегией и построить график эволюции параметров из распределения Чжао.

Для начала для каждого момента времени мы определили параметры $\alpha, \beta, \gamma, a, \rho_0$ при помощи процедуры LMFIT. В качестве регуляризации оптимальные параметры с предыдущего шага становились начальными параметрами для поиска параметров для следующего шага по времени. Затем, мы повторили эту процедуру для всех реализаций функции распределения по скоростям и массам. Затем мы усреднили значения параметров по этим реализациям, а также по пяти соседним выходным файлам, чтобы добиться более плавной эволюции. На графике 11 точками изображены средние значения параметров, а бары ошибок взяты как 16-й и 84-й персентили соответствующих распределений параметров.

Из рисунка 11 видно, что такие параметры, как ρ_0, a , меняются со временем значительно, и их значения и ошибки их определения сильно зависят также от SFE модели. В то же время можно принять, что параметр γ не меняется со временем, и его значения также не зависят от SFE. Поэтому мы фиксируем $\gamma = 1$. Стоит отметить, что для изначальной $\gamma_0 = 0$ после бурной релаксации полученный оптимальный фит имеет $\gamma > 0$, то есть появляется касп.

Вторым параметром, который мы зафиксируем, будет являться α , для которой значение постоянно в пределах ошибок определения и равно $\alpha = 2$. То есть по сравнению с начальным распределением плотности до бурной релаксации, после нее у скопления образуется более резкий переход меж-

ду внутренней и внешней асимптотикой. Таким образом, мы сократили параметры модели до трех: ρ_0 , a , β , и теперь можем исследовать, как полученная функция воспроизводит данные наших модельных скоплений.

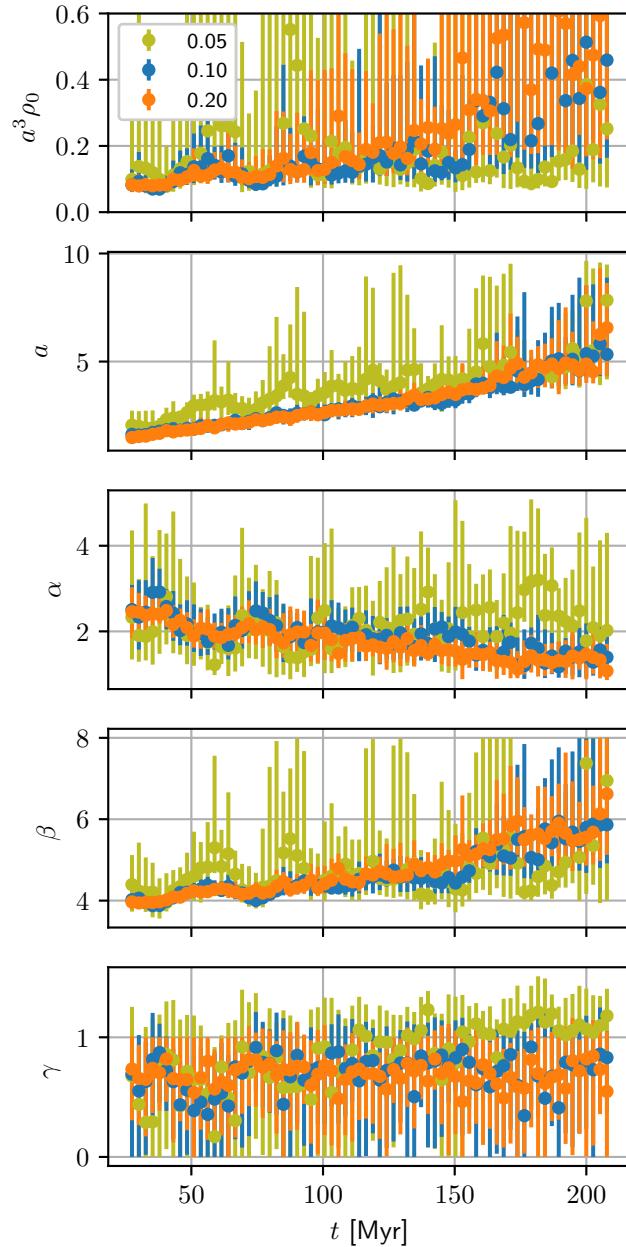


Рисунок 11 – Эволюция параметров $\rho_0 \cdot a^3$, a , β , γ , α из распределения Чжао для моделей с $\gamma_0 = 0$ и SFE = 0.05, 0.10, 0.20

6.4 Описание моделей скоплений с помощью функции Чжао с фиксированными параметрами

Как мы описали в разделе 6.3, мы можем сократить число параметров в функции Чжао, задав фиксированные значения для некоторых из них, исходя из анализа графика 11. Чтобы предложить альтернативу функции Кинга для описания плотности РЗС, мы хотим оставить такое же число параметров. Таким образом, задав точные значения параметров $\gamma = 1.0$ и $\alpha = 2.0$, осталось три свободных параметра ρ_0, a, β , и фитирующая функция приняла следующий вид:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{a} \right)^{-1} \left(1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right)^{\frac{1-\beta}{2}}. \quad (31)$$

При этом стоит заметить, что физический смысл некоторых параметров аналогичен переменным из функции Кинга: также есть параметр для нормировки на число звезд в скоплении ρ_0 и есть параметр для задания масштаба по радиусу в центре скопления a , который является аналогией переменной r_c . Однако функция Кинга плохо описывала асимптотику на периферии (рис. 5), а в предложенной нами формуле за это свойство отвечает отдельный свободный параметр β .

На рисунке 12 представлены фиты в виде функции Чжао с фиксированными параметрами для трех модельных скоплений с различными начальными распределениями плотности звезд.

Из графика 12 видно, что качество фита несколько ухудшилось по сравнению с тем, что было показано на рисунке 9 с описанием модельных скоплений с помощью функции Чжао с пятью параметрами. Для моделей с отсутствием каспа в начальной профиле плотности (то есть для $\gamma_0 = 0.0$, SFE = 0.10 и модели Пламмера, SFE = 0.20) наклон графика для центральной части скопления отличается от модели. Однако в связи с рыхлостью РЗС, колебания плотности в центре превышают отклонение фита δn_{fit} от линии

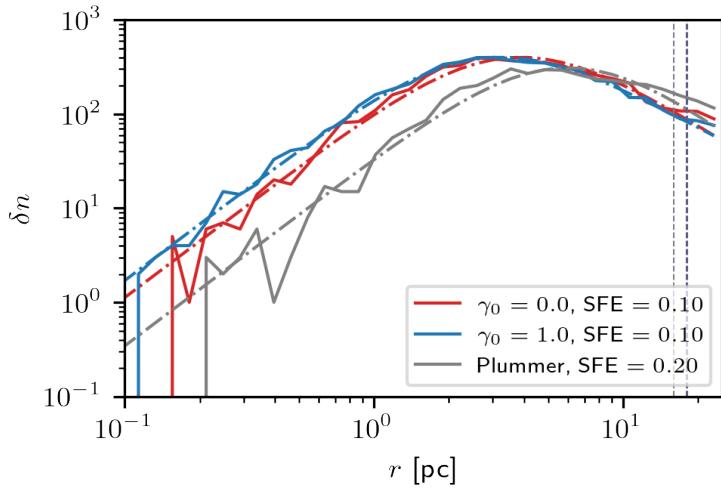


Рисунок 12 – Распределение звезд (слошные линии) и оптимальный фит (штрихпунктирная линия) функции Чжао с фиксированными параметрами для моделей $\gamma_0 = 0.0$ и SFE = 0.10; $\gamma_0 = 1.0$ и SFE = 0.10; Пламмера и SFE = 0.20. Вертикальные линии соответствующих цветов расположены на расстоянии, равном радиусу Якоби. Все модели представлены для времени $t = 100$ Myr

тренда центральной части функции δn .

Мы провели бутстранированный К-С тест, чтобы определить качество фита, проведенного с помощью предложенной нами функции, чтобы определить, можем ли мы считать, что нашли альтернативу функции Кинга. На графике [13] представлен кумулятивный вид распределения $CDF(L_i)$ для функции, имеющей вид из уравнения [31].

Мы видим, что вертикальная линия, обозначающая L_{stars} , лежит внутри 2σ распределения $CDF(L_i)$ даже для выборки размером, равным общему числу звезд, т.е. $N_{\text{crit}} = N_{\text{stars}}$. То есть распределение, предложенное нами, так же как и функция Чжао с большим числом параметров, может быть родительским для распределения плотности модельных скоплений.

Из этого можно сделать вывод, что предложенная нами функция достаточно хорошо описывает скопления после бурной релаксации и мы до-

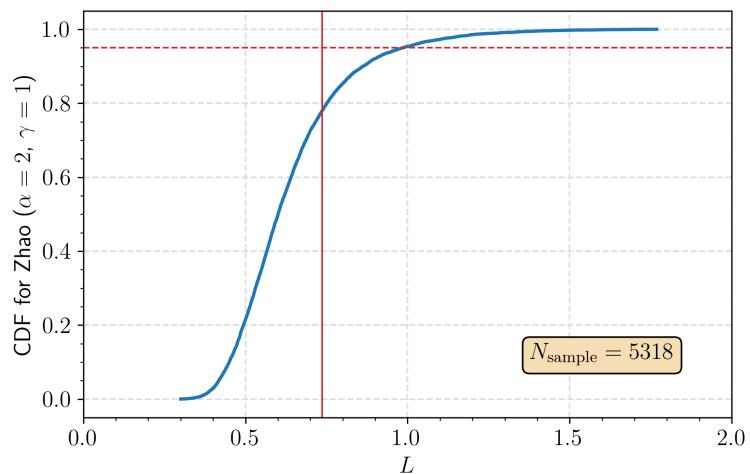


Рисунок 13 – Распределение $CDF(L_i)$ показано синей линией. Красная горизонтальная линия показывает, где проходит граница 2σ . Красная вертикальная линия соответствует расстоянию L_{stars} для $N_{crit} = N_{stars}$.

бились поставленной изначально цели исследования.

7 Исследование поверхности плотности скопления в различных проекциях

Как мы выяснили в прошлой главе, для описания плотности скопления в трехмерном пространстве хорошо подходит распределение Чжао с фиксированными параметрами. К сожалению, даже с данными последнего релиза GAIA DR3 мы не сможем восстановить полностью трехмерную карту РЗС с одинаковой точностью вдоль луча зрения и в картинной плоскости. Поэтому описание профиля плотности в двумерной проекции до сих пор является актуальной задачей.

Из-за того, что скопление может не обладать сферической симметрией, получаемые параметры профиля плотности могут зависеть от взаимного расположения РЗС и наблюдателя. В данной главе мы проанализируем вытянутость численных моделей РЗС, а также влияние несферичности скопления на оптимальную функцию, которая описывает плотность скопления.

7.1 Построение проекции модельного скопления на картинную плоскость

Изначально нам даны координаты звезд скопления в фиксированной неподвижной галактоцентрической системе отсчета $x_0y_0z_0$, где плоскость x_0y_0 соответствует плоскости диска Галактики (рисунок 14). Затем мы смещаем центр координат в центр плотности скопления и поворачиваем на угол $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, то есть так, чтобы ось x соединяла центр Галактики и центр скопления.

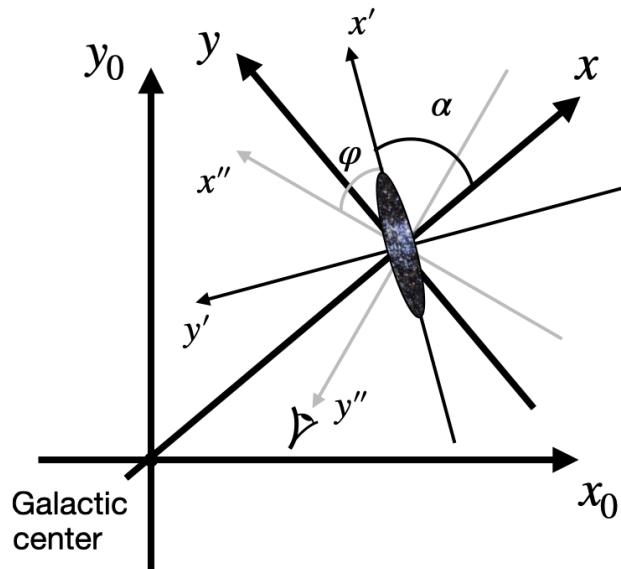


Рисунок 14 – Иллюстрация систем отсчета в плоскости диска Галактики.

$x_0y_0z_0$ — неподвижная галактоцентрическая СО, xyz — СО, связанная со скоплением и его движением вокруг центра Галактики. Тонкими черными линиями обозначена СО, в которой полуоси эллипсоида скопления направлены вдоль главных осей $x'y'z'$. Затем мы будем строить проекции скопления на картинную плоскость при наблюдении с оси y'' , обозначенной серым цветом

Для того, чтобы исследовать эффект проекции скопления мы должны

найти положение координат $x'y'$ (рисунок 14) в плоскости Галактики, где ось x' направлена вдоль большой полуоси эллипсоида скопления. Затем мы сможем поворачивать скопление на любой угол φ , чтобы исследовать то, как РЗС будет проецироваться на картинную плоскость $x''z''$, если наблюдатель будет смотреть со стороны оси y'' .

Чтобы определить положение эллипсоида скопления в пространстве, мы вычислили матрицу момента инерции в галактоцентрической системе координат xyz :

$$I_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\text{stars}} x_i x_j, \quad (32)$$

где x_i, x_j — координаты x, y, z . Так как мы хотим исследовать параметры эллипсоида скопления, не включая туда звезды из приливных хвостов, то мы ограничили радиус, внутри которого ведется суммирование до радиуса Якоби R_J , который мы определяем для каждого момента времени. Затем, получив матрицу I_{ij} , мы можем диагонализовать ее, то есть найти такие матрицы P, D что матрица D является диагональной и $D = P^{-1}IP$. Причем диагональные элементы матрицы D будут являться квадратами полуосей эллипсоида скопления, а матрица P будет представлять собой матрицу поворота, из которой мы нашли углы Эйлера при помощи библиотеки `scipy.spatial.transform`.

Углы Эйлера и матрица поворота связаны следующим соотношением:

$$\begin{aligned} P &= R_Z(\gamma)R_X(\beta)R_Z(\alpha) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33) \end{aligned}$$

Из графика 15 видно, что углы β и γ малы, и в основном нам достаточно поворачивать скопление один раз вокруг оси Z на угол α , то есть в плоскости Галактики, как это показано на рисунке 14. Причем угол α отличен от 0° вследствие наличия силы Кориолиса.

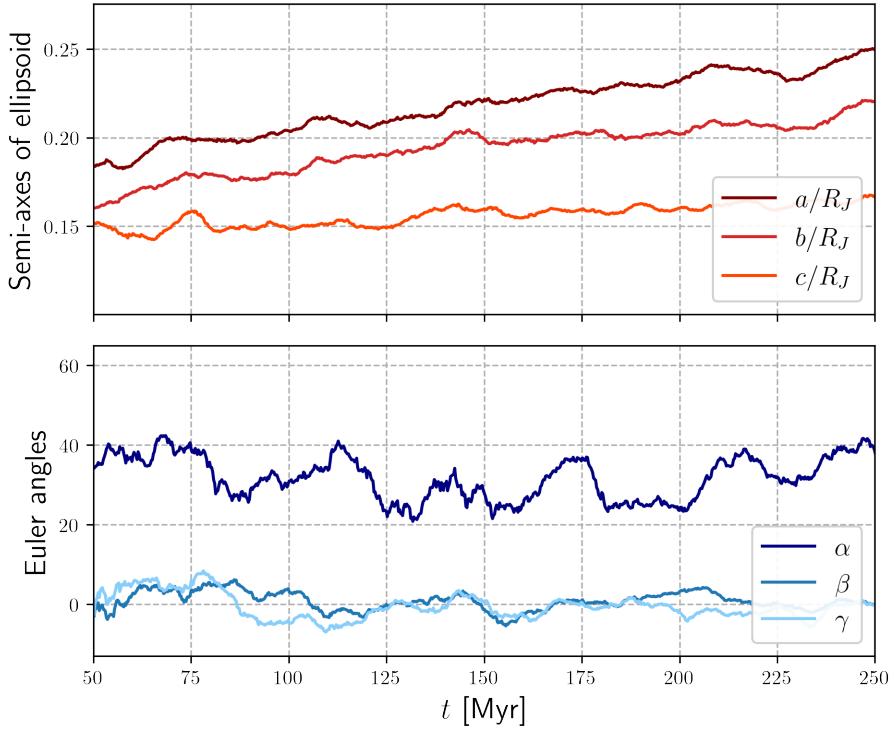


Рисунок 15 – Верхняя панель показывает эволюцию значений полуосей эллипсоида ЗС из звезд, находящихся на расстоянии $r < r_J$ от центра скопления. На нижней панели изображены углы Эйлера, на которые нужно повернуть эллипсоид, чтобы ось x'' была направлена вдоль большой полуоси.

Также из рисунка 15 видно, что скопление по своей форме сильно отличается от сферы (где $a = b = c$), причем соотношение между полуосями увеличивается со временем, скопление вытягивается вдоль оси x' и почти не меняется вдоль оси z' .

Стоит отметить, что на нижней панели рисунка 15 значение угла α колеблется между 20° и 40° . Это может быть свидетельством того, что звезды скопления не находятся в состоянии равновесия. Это интересный результат, требующий дальнейшего исследования, так как колебания должны были исчезнуть за время порядка времени столкновительной релаксации, которое можно рассчитать по следующей формуле:

$$t_{\text{rel}} = \frac{0.1N}{\ln N} t_{\text{dyn}} = \frac{0.1N}{\ln N} \sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \quad (34)$$

Если подставить значения параметров скопления после бурной релаксации: $N = 1000$, $R = 3$ пк, $M = 500 M_{\odot}$, время столкновительной релаксации составляет $t_{\text{rel}} = 50$ Мyr.

Эллиптичность скопления зависит от того, на каком масштабе мы его исследуем. Так, для звезд внутри r_h сферическая симметрия почти сохраняется (рис. 16). Большие колебания углов на нижней панели являются следствием неопределенности их вычисления, а значит сферической симметрии скопления.

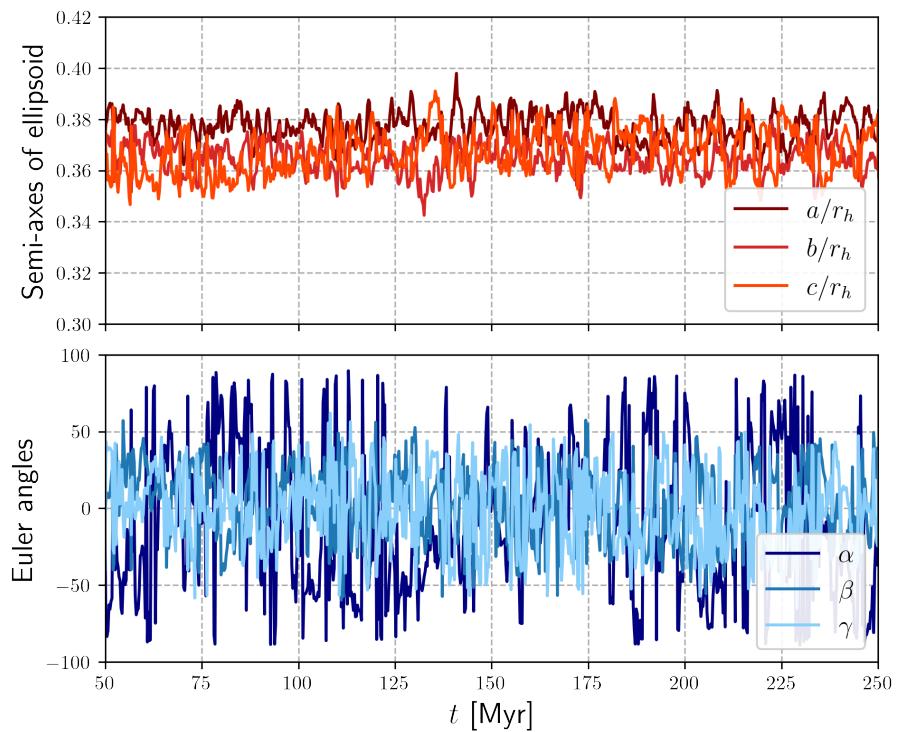


Рисунок 16 – Верхняя панель показывает эволюцию значений полуосей эллипсоида ЗС из звезд, находящихся на расстоянии $r < r_h$ от центра скопления. На нижней панели изображены углы Эйлера, на которые нужно повернуть эллипсоид, чтобы ось x'' была направлена вдоль большой полуоси.

Получив всю информацию о том, как нужно повернуть оси x, y , чтобы получить систему отсчета $x'y'$ (рис. 14), связанную со скоплением, где большая полуось эллипса будет вытянута вдоль оси абсцисс, мы можем

приступить к исследованию профиля плотности в разных проекциях.

7.2 Описание проекции модельного скопления при помощи функции Чжао

В главе 6.3 было продемонстрировано, что функция Чжао, имея достаточное число параметров, хорошо подходит для описания профиля плотности РЗС. Поэтому можно предположить, что если эту функцию проинтегрировать по одной из осей, то она будет подходить также для описания профиля плотности скопления в проекции на картинную плоскость.

Мы будем фитировать функцию $\delta n(r_{2D})$ из уравнения 28 для расстояния r_{2D} , определенного следующим образом: $r_{2D} = \sqrt{x^2 + z^2}$. Для начала была профитирована плотность скопления в неподвижной системе отсчета с центром в центре плотности скопления, т.е. ось абсцисс параллельна оси x_0 , а ось ординат — параллельна y_0 (рис. 14). В этой системе отсчета эллипсоид скопления будет проворачиваться, потому что его движение происходит относительно центра Галактики, а значит, если скопление несимметрично, оно будет проецироваться по-разному в зависимости от момента времени t .

На рисунке 17 показана эволюция параметров распределения Чжао для скоплений в проекции на невращающуюся плоскость xz . Как это можно заметить, параметры меняются немонотонно, достигая максимумов и минимумов в определенные моменты времени. Так как при исследовании профиля плотности в трехмерном пространстве (рис. 11) подобного эффекта не было, значит можно сделать вывод, что оптимальные параметры фита для проекции скопления зависят не только от физических свойств скопления, но также и от взаимного расположения РЗС, центра Галактики и наблюдателя.

Чтобы проверить эту гипотезу, мы провели фитирование профилем Чжао проекции скопления на плоскость $x''z''$, которая поворачивается вместе со скоплением, для целого набора углов φ . На рисунке 18 изображены

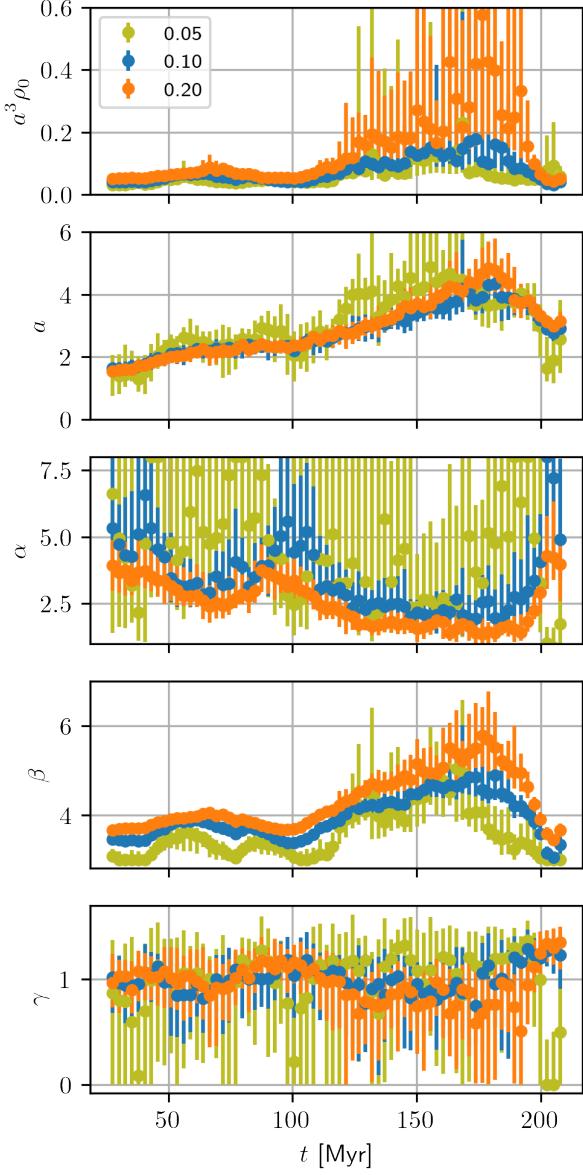


Рисунок 17 – Эволюция параметров $\rho_0 \cdot a^3$, a , β , γ , α из распределения Чжао для моделей с $\gamma_0 = 0$ и SFE = 0.05, 0.10, 0.20 в проекции на невращающуюся плоскость xz

эволюции параметров Чжао для проекции скоплений с $\varphi = 0^\circ$ (слева) и $\varphi = 90^\circ$ (справа).

На графиках (рис. 18) видно, что параметры эволюционируют монотонно, как и при исследовании профиля плотности в трехмерном пространстве (рис. 11), но при этом принимают различные значения при различных углах поворота φ . Заметим, что особенно отличается эволюция параметра β , но параметр γ при этом относительно не меняется ни во времени, ни

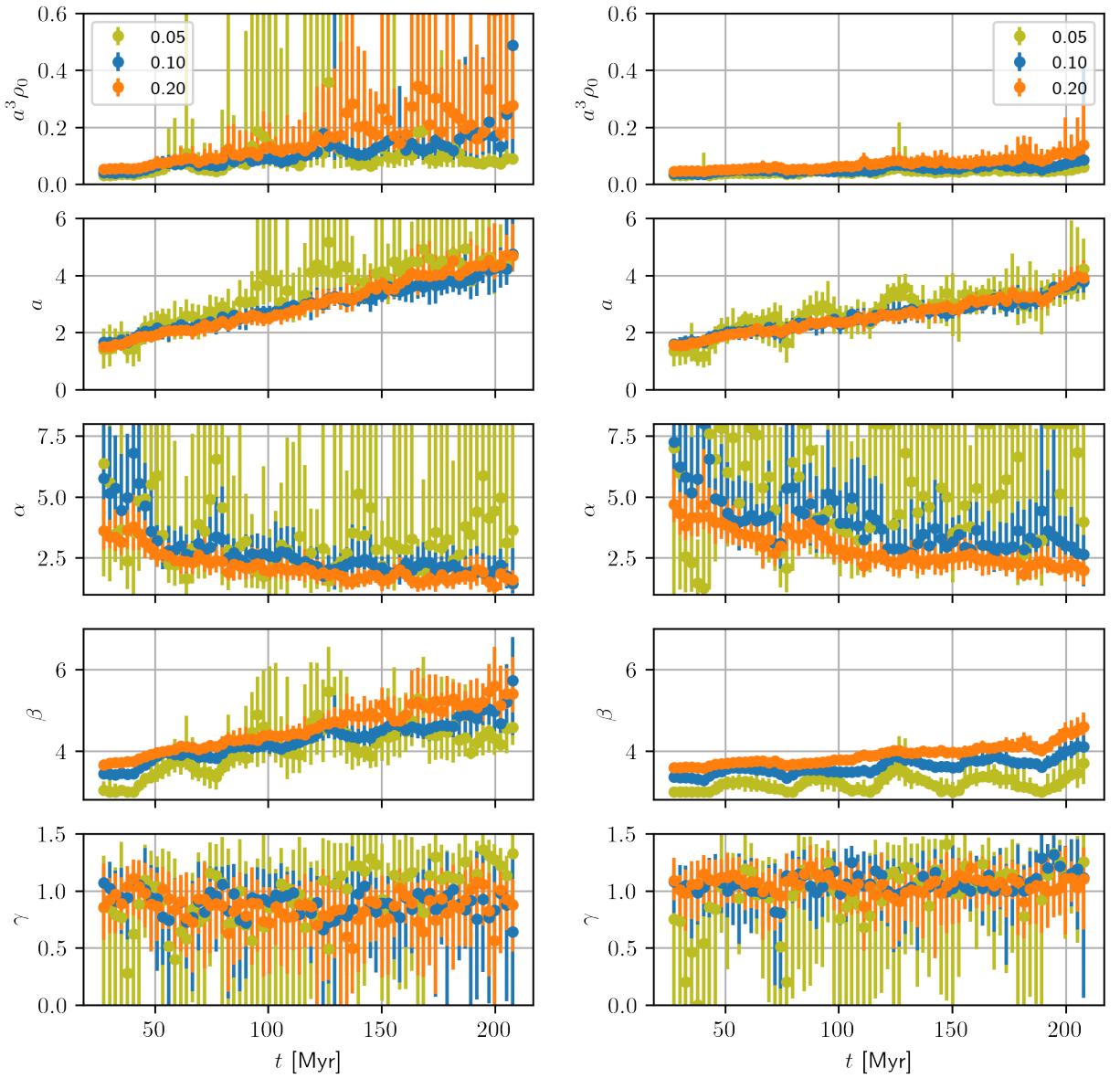


Рисунок 18 – Эволюция параметров $\rho_0 \cdot a^3$, a , β , γ , α из распределения Чжао для моделей с $\gamma_0 = 0$ и SFE = 0.05, 0.10, 0.20 в проекции на вращающуюся плоскость $x''z''$ для $\varphi = 0^\circ$ (слева) и $\varphi = 90^\circ$ (справа).

при изменении угла φ . Это подтверждает вывод, сделанный нами ранее о том, что эллиптичность скопления не наблюдается в самом центре скопления, а только лишь на периферии. Это и приводит к тому, что параметр β варьируется в различных проекциях.

Таким образом, мы не можем сократить число параметров распределения Чжао для двумерной проекции независимо от положения скопления

относительно наблюдателя. Однако, из рисунка 18 можно сделать вывод, что следует сокращать число параметров по-разному для разных значений галактической долготы скопления.

8 Заключение

На основе выполненных расчетов задачи N -тел для большого числа различных начальных профилей плотности РЗС и SFE был проведен анализ возможных распределений плотности и их изменения в ходе секулярной эволюции. Массив моделей включал в себя 414 моделей Дэнена с каспом и 45 моделей Пламмера с однородным ядром. Каждая физическая модель имела несколько реализаций начальных значений масс и координат звезд. Было проведено исследование выживаемости скоплений в зависимости от показателя SFE и распределения плотности в начальной конфигурации. По результатам исследования опубликована статья в журнале *Astronomy & Astrophysics* [13].

Для оценки качества фитирования были проанализированы различные статистические тесты. Мы показываем (Глава 5), что для нашей задачи не подходят классические χ^2 и К-С тесты, так как первый должен применяться для независимых друг от друга значений, а второй — для модели, которая не была получена напрямую из данных. Поэтому было предложено использовать бутстранированный К-С тест, а в качестве ключевой характеристики качества фитирования при сравнении различных функций рассчитывать максимально допустимый размер выборки N_{crit} , при котором систематические отличия от наблюдаемых данных еще на начинают проявляться.

В главе 6 показано, что профиль Кинга плохо описывает модельные РЗС. Также неудовлетворительным для описания трехмерной плотности скоплений после бурной релаксации оказывается и первоначальное распределение Дэнена. Из этого можно сделать вывод о том, что бурная релаксация существенно меняет распределение звезд в скоплениях. В литературе было найдено 5-параметрическое семейство профилей плотности Чжао [28], хорошо описывающее распределение пространственной плот-

ности звезд скопления. В дальнейшем оказалось возможным уменьшить число независимых параметров до трех, зафиксировав в профиле Чжао (выражение [31]) значения параметров $\alpha = 2$ и $\gamma = 1$.

В главе [7] продемонстрировано, что скопление обладает сферически симметричной формой только внутри r_h , а внешняя его часть имеет форму трехосного эллипсоида. Вследствие этого, описание скоплений должно учитывать взаимное расположение наблюдателя, скопления и центра Галактики.

Данная работа выявила проблемы в описании профиля поверхностной плотности РЗС, поэтому важно продолжить это исследование. Дальнейшая работа может включать в себя следующие этапы:

1. Исследование зависимости и корреляции параметров Чжао друг от друга при помощи метода Markov chain Monte Carlo (МCMC [29]) для подбора еще более подходящей функции
2. Подбор оптимальных функций в зависимости от галактической долготы наблюдаемых РЗС.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-DFG 20-52-12009.

Список литературы

- [1] Mark R. Krumholz, Christopher F. McKee, and Joss Bland-Hawthorn. Star Clusters Across Cosmic Time. *ARA&A*, 57:227–303, August 2019.
- [2] J. M. Diederik Kruijssen, Andreas Schruba, Mélanie Chevance, Steven N. Longmore, Alexander P. S. Hygate, Daniel T. Haydon, Anna F. McLeod, Julianne J. Dalcanton, Linda J. Tacconi, and Ewine F. van Dishoeck. Fast and inefficient star formation due to short-lived molecular clouds and rapid feedback. *Nature*, 569(7757):519–522, May 2019.
- [3] Charles J. Lada and Elizabeth A. Lada. Embedded Clusters in Molecular Clouds. *ARA&A*, 41:57–115, January 2003.
- [4] H. Baumgardt and P. Kroupa. A comprehensive set of simulations studying the influence of gas expulsion on star cluster evolution. *MNRAS*, 380(4):1589–1598, October 2007.
- [5] Ivan King. The structure of star clusters. I. an empirical density law. *The Astronomical Journal*, 67:471, October 1962.
- [6] P. Kroupa and C. M. Boily. On the mass function of star clusters. *MNRAS*, 336(4):1188–1194, November 2002.
- [7] S. M. Percival, M. Salaris, and D. Kilkenny. The open cluster distance scale. A new empirical approach. *ApJ*, 400:541–552, March 2003.
- [8] Anton F. Seleznev. Open-cluster density profiles derived using a kernel estimator. *MNRAS*, 456(4):3757–3773, March 2016.
- [9] G. Parmentier and S. Pfalzner. Local-density-driven clustered star formation. *A & A*, 549:A132, January 2013.

- [10] Jouni Kainulainen, Christoph Federrath, and Thomas Henning. Unfolding the Laws of Star Formation: The Density Distribution of Molecular Clouds. *Science*, 344(6180):183–185, April 2014.
- [11] Charles J. Lada, Marco Lombardi, and João F. Alves. On the Star Formation Rates in Molecular Clouds. *ApJ*, 724(1):687–693, November 2010.
- [12] N. Schneider, S. Bontemps, P. Girichidis, T. Rayner, F. Motte, P. André, D. Russeil, A. Abergel, L. Anderson, D. Arzoumanian, M. Benedettini, T. Csengeri, P. Didelon, Francesco J. di, M. Griffin, T. Hill, R. S. Klessen, V. Ossenkopf, S. Pezzuto, A. Rivera-Ingraham, L. Spinoglio, P. Tremblin, and A. Zavagno. Detection of two power-law tails in the probability distribution functions of massive GMCs. *MNRAS*, 453:L41–L45, November 2015.
- [13] B. Shukirgaliyev, A. Otebay, M. Sobolenko, M. Ishchenko, O. Borodina, T. Panamarev, S. Myrzakul, M. Kalambay, A. Naurzabayeva, E. Abdikamalov, E. Polyachenko, S. Banerjee, P. Berczik, R. Spurzem, and A. Just. Bound mass of Dehnen models with a centrally peaked star formation efficiency. *A&A*, 654:A53, October 2021.
- [14] M. Miyamoto and R. Nagai. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *PASJ*, 27:533–543, January 1975.
- [15] Gravity Collaboration, R. Abuter, A. Amorim, M. Bauböck, J. P. Berger, H. Bonnet, W. Brandner, Y. Clénet, V. Coudé Du Foresto, P. T. de Zeeuw, J. Dexter, G. Duvert, A. Eckart, F. Eisenhauer, N. M. Förster Schreiber, P. Garcia, F. Gao, E. Gendron, R. Genzel, O. Gerhard, S. Gillessen, M. Habibi, X. Haubois, T. Henning, S. Hippler, M. Horrobin, A. Jiménez-Rosales, L. Jocou, P. Kervella, S. Lacour, V. Lapeyrère, J. B. Le Bouquin, P. Léna, T. Ott, T. Paumard, K. Perraut, G. Perrin, O. Pfuhl, S. Rabien,

- G. Rodriguez Coira, G. Rousset, S. Scheithauer, A. Sternberg, O. Straub, C. Straubmeier, E. Sturm, L. J. Tacconi, F. Vincent, S. von Fellenberg, I. Waisberg, F. Widmann, E. Wieprecht, E. Wiezorek, J. Woillez, and S. Yazici. A geometric distance measurement to the Galactic center black hole with 0.3% uncertainty. *A & A*, 625:L10, May 2019.
- [16] A. Just, P. Berczik, M. I. Petrov, and A. Ernst. Quantitative analysis of clumps in the tidal tails of star clusters. *MNRAS*, 392(3):969–981, January 2009.
- [17] B. Shukirgaliyev, G. Parmentier, P. Berczik, and A. Just. The star cluster survivability after gas expulsion is independent of the impact of the Galactic tidal field. *MNRAS*, 486(1):1045–1052, June 2019.
- [18] B. Shukirgaliyev, G. Parmentier, P. Berczik, and A. Just. Impact of a star formation efficiency profile on the evolution of open clusters. *A&A*, 605:A119, September 2017.
- [19] Paul J. McMillan and Walter Dehnen. Initial conditions for disc galaxies. *MNRAS*, 378(2):541–550, June 2007.
- [20] Peter Berczik, Rainer Spurzem, Long Wang, Shiyan Zhong, and Siyi Huang. Up to 700k GPU cores, Kepler, and the Exascale future for simulations of star clusters around black holes. In *Third International Conference "High Performance Computing*, pages 52–59, October 2013.
- [21] Keigo Nitadori and Junichiro Makino. Sixth- and eighth-order Hermite integrator for N-body simulations. *New Astronomy*, 13(7):498–507, October 2008.
- [22] Stefan Harfst, Alessia Gualandris, David Merritt, Rainer Spurzem, Simon Portegies Zwart, and Peter Berczik. Performance analysis of direct N-

body algorithms on special-purpose supercomputers. *New Astronomy*, 12(5):357–377, July 2007.

- [23] Jarrod R. Hurley, Onno R. Pols, and Christopher A. Tout. Comprehensive analytic formulae for stellar evolution as a function of mass and metallicity. *MNRAS*, 315(3):543–569, July 2000.
- [24] A. W. H. Kamlah, A. Leveque, R. Spurzem, M. Arca Sedda, A. Askar, S. Banerjee, P. Berczik, M. Giersz, J. Hurley, D. Belloni, L. Kühmichel, and L. Wang. Preparing the next gravitational million-body simulations: evolution of single and binary stars in NBODY6++GPU, MOCCA, and MCLUSTER. *MNRAS*, 511(3):4060–4089, April 2022.
- [25] G. J. Babu and E. D. Feigelson. Astrostatistics: Goodness-of-Fit and All That! In C. Gabriel, C. Arviset, D. Ponz, and S. Enrique, editors, *Astronomical Data Analysis Software and Systems XV*, volume 351 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 127, July 2006.
- [26] A. E. Piskunov, E. Schilbach, N. V. Kharchenko, S. Röser, and R. D. Scholz. Towards absolute scales for the radii and masses of open clusters. *A&A*, 468(1):151–161, June 2007.
- [27] Matthew Newville, Till Stensitzki, Daniel B. Allen, and Antonino Ingargiola. LMFIT: Non-Linear Least-Square Minimization and Curve-Fitting for Python, September 2014.
- [28] Hongsheng Zhao. Analytical models for galactic nuclei. *MNRAS*, 278(2):488–496, January 1996.
- [29] Daniel Foreman-Mackey, David W. Hogg, Dustin Lang, and Jonathan Goodman. emcee: The MCMC Hammer. *PASP*, 125(925):306, March 2013.