Métodos computacionales 2: Tarea 2

Valeria Castillo y Olga González

1.1 Series de Fourier

Demostrar con rigor matemático los siguientes teoremas

1) Si $f(t)$ es continua cuando $-T/2 \leq t \leq T/2$ con $f(-T/2) = f(T/2)$ y si la derivada $f'(t)$ continua por tramos y diferenciable entonces la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

se puede diferenciar término por término

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Porque la función tiene derivadas continuas por tramos, se puede intercambiar la sumatoria por la derivada

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt}(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 (-a_n \sin(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t))$$

Sea $f(t)$ continua por tramos en el intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$ y $f(t+T) = f(t)$ demostrar que la serie de Fourier se puede integrar término por término

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_0}{2}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\, dt$$

por linealidad de la integral

Ahora, por continuidad por tramos, se puede intercambiar la serie por la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} a_n\cos(n w_0 t) + b_n \sin(n w_0 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n w_0} [+a_n \sin(n w_0 t_2) - a_n \sin(n w_0 t_1) - b_n \cos(n w_0 t_2) + b_n \cos(n w_0 t_1)]$$

$$= \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n w_0} [-b_n(\cos(n w_0 t_2) - \cos(n w_0 t_1))] + a_n(\sin(n w_0 t_2) - \sin(n w_0 t$$

1.2 presentación de funciones

1. Encontrar analíticamente la serie de Fourier de la función $f(t) = t$ para el intervalo $(-\pi, \pi)$ y $f(t+2\pi) + f(t)$

$T = 2\pi$, se hallarán los coeficientes de la serie

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = 0 \quad \text{(Función impar)}$$

$$a_m = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(mt)\,dt = 0 \quad \text{(Función impar por función par)}$$

$$b_m = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(mt)\,dt =$$

Aplicando integración por partes

$$dv = \sin(mt)\,dt, \quad v = \frac{-1}{m}\cos(mt)$$

$$u = t \quad , \quad du = dt$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-t}{m}\cos(mt)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt)\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t}{m}\cos(mt) + \frac{1}{m^2}\sin(mt)\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_m = \left[\frac{-\pi}{m}\cos(m\pi) + \cancel{\frac{1}{m^2}\sin(m\pi)}^{0} - \frac{\pi}{m}\cos(m\pi) + \cancel{\frac{1}{m^2}\sin(m\pi)}^{0} \right]$$

$$= \frac{2}{m}(-1)^{m-1}$$

$$f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nt) \quad //$$

$f(t)+f(t+2\pi)$, sigue teniendo un periodo de 2π,

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(mt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\sin(mt)\,dt$$

$$= \frac{2}{m}(-1)^{m-1} + 0$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\times 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt)\,dt = 0$$

$$a_0 = \frac{2\pi}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = \frac{2\pi}{\pi}\times(2\pi) = 4\pi$$

$$f(t)+f(t+2\pi) = 4\pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nt) \quad //$$

1.3 Función $\zeta(s)$ de Riemann

1. Integrar (analíticamente) la serie de Fourier de $f(t)=t^2$ en el intervalo $-\pi\leq t\leq\pi$ y $f(t+2\pi)=f(t)$

sea $f(t)=t^2$, con periodo $T=2\pi$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_m = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(mt)\,dt = \frac{2\times 2}{2\pi}\left[-\frac{t^2}{m}\sin(mt) + \frac{2t}{m^2}\cos(mt) - \frac{2}{m^3}\sin(mt)\right]_0^{\pi}$$

(función par)

$$= \frac{2}{\cancel{\pi}}\left[-\frac{\pi^2}{m}\sin(m\pi) + \frac{2\cancel{\pi}}{m^2}\cos(m\pi) - \frac{2}{m^3}\sin(m\pi)\right]$$

$$= \frac{4}{m^2}(-1)^m$$

$$b_m = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(mt)\,dt = 0 \quad \text{(función impar)}$$

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt),$$ si integramos esta función

$$\int t^2\,dt = \frac{\pi^2}{3}t + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{t^3}{3}$$

Entonces si definimos

$g(t) = \frac{1}{12}t(t^2-\pi^2)$, tiene representación en serie de Fourier

$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(nt)$, de manera que $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$, $a_n = 0$, $a_0 = 0$

Ahora, la identidad de Parseval indica

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[g(t)]^2\,dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{12}t(t^2-\pi^2)\right]^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+2}}{n^{3\cdot 2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

Integrando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{144} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 (t^4 - 2\pi^2 t^2 + \pi^4)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{144} \int_{-\pi}^{\pi} t^6 - 2\pi^2 t^4 + \pi^4 t^2)dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{144} \times 2 \left[\frac{t^7}{7} - \frac{2\pi^2 t^5}{5} + \frac{\pi^4 t^3}{3} \right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{72} \left[\frac{\pi^7}{7} - \frac{2\pi^7}{5} + \frac{\pi^7}{3} \right] = \frac{1}{72} \times \frac{1}{7 \times 5 \times 3} \left[\pi^6 (\underbrace{15 - 42 + 35}_{8}) \right.$$

$$= \qquad = \frac{1}{9} \times \frac{1 \times \pi^6}{105} = \frac{\pi^6}{945}$$