Métodos computacionales 2,

02 2D Navier-Stokes

Valeria Castillo Chaux
Olga González López

Recordemos antes la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \quad ; \quad \vec{J} := \rho\, v(x,t) \quad (1)$$

Donde J es la corriente de masa, ρ su densidad y v la velocidad del fluido.

Ahora hemos de recordar la ecuación de Navier Stokes

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt} = \nu\vec{\nabla}^2\vec{v} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P(\rho,T,x) \quad (2)$$

Donde P es la presión y ν su viscosidad. Esta ecuación describe la hidrodinámica de un fluido.

En el caso estacionario (2) queda como

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \nu\vec{\nabla}^2\vec{v} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P(\rho,T,\vec{x}) \quad (3)$$

y (1)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \vec{\nabla}\cdot(\rho\,\vec{v}(\vec{x},t)) = 0 \quad \text{ó} \quad (\vec{\nabla}\cdot(\rho\,\vec{v}(\vec{r},t)) = 0 \text{ en el caso general})$$

En el caso en que la densidad no cambia,

$$\rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(x,t) = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \quad (4)$$

Ahora, definiendo la función potencial de corriente $\vec{v}(\vec{r},t)$

$$\vec{v} := \vec{\nabla}\times\vec{u}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

Si el fluido se mueve en solo 2 dimensiones, la componente $\vec{v}_z = 0\,\hat{z}$, entonces solo se requiere que $\vec{u} = u\,\hat{z}$

Así

$$\vec{v} = \frac{\partial u_z}{\partial y}\hat{x} + -\frac{\partial u_z}{\partial x}\hat{y} \quad ; \quad \vec{v}_x = \frac{\partial u_z}{\partial y}\hat{x} \quad y \quad \vec{v}_y = -\frac{\partial u_z}{\partial x}\hat{y} \qquad (5)$$

Por otro lado, el fluido puede experimentar rotaciones, estas se cuantifican físicamente por la vorticidad, definida como

$$\vec{w} := \vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}(\vec{r})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \nabla^2\vec{u} =$$

como $\vec{u}$ solo tiene componente en z

$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, ya que el fluido se mueve en 2 dimensiones. Así

$$\nabla^2\vec{u} = -\vec{w} \qquad (6)$$

Aplicando el rotacional a J (2) (lo intenté y no pude, perdón)

$$\nu\vec{\nabla}^2\vec{w} = [(\vec{\nabla}\times\vec{u})\cdot\vec{\nabla}]\,\vec{w} \qquad (7)$$

y dejando explícitamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -w \qquad (8)$$

$$\nu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = \left[\frac{\partial u_z}{\partial y}\hat{x} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\hat{y}\right]\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y}\right) w_x\hat{x} + w_y\hat{y}$$

$$= \frac{\partial u_z}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + -\frac{\partial u_z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (9)$$

PUNTO 3 Aplicando el método de diferencias finitas, muestre que la discretización queda como usando diferencias finitas la derivada central

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (10)$$

y la segunda derivada central

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (11)$$

si tomamos $f(x,y) = u_{ij}$ $\quad f(x \pm h) = u_{i\pm 1, j}$ $\quad f(x, y \pm h) = u_{i,j\pm 1}$

Así (8)

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = -w_{ij}$$

despejando para u_{ij}

$$-4u_{ij} = -w_{ij}h^2 - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + h^2 w_{i,j}\right] \quad (12)$$

Ahora, de (9)

$$\nu \left[\underbrace{\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2}}_{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)} + \underbrace{\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{h^2}}_{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)} \right] =$$

$$\left[\underbrace{\left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}\right)\left(\frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2h}\right)}_{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)} - \underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}\right)\left(\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2h}\right)}_{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)} \right]$$

$$[w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - 4w_{i,j}] = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\nu} \Big[(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})\Big]$$

Despejando para $w_{i,j}$

$$w_{i,j} = \frac{-1}{16\nu}\left[\left((u_{i,j+1}-u_{i,j-1})(w_{i+1,j}-w_{i-1,j})\right)-\left((u_{i+1,j}-u_{i-1,j})(w_{i,j+1}-w_{i,j-1})\right)\right]$$

$$+\frac{1}{4}\left[w_{i+1,j}+w_{i-1,j}+w_{i,j+1}+w_{i,j-1}\right]$$

$$w_{i,j} = \frac{R_0}{16}\left((u_{i+1,j}-u_{i-1,j})(w_{i,j+1}-w_{i,j-1})\right)-\frac{R_0}{16}\left((u_{i,j+1}-u_{i,j-1})(w_{i+1,j}-w_{i-1,j})\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(w_{i+1,j}+w_{i-1,j}+w_{i,j+1}+w_{i,j-1}\right) \quad (13)$$

Deberíamos dejar adimensional u, ahora ν tiene unidades de pascal, segundo

$$[\nu] = \frac{kg\,m}{s^2} \times \frac{s}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s}$$

si tomamos 1 kg de volumen y tomamos

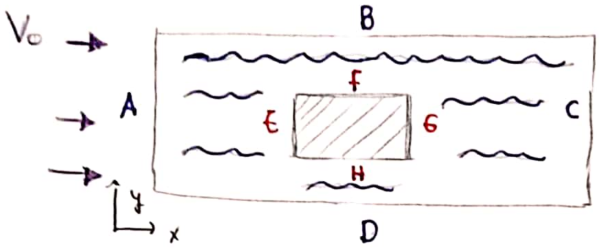
$$\frac{[\nu][V_0]}{[m]} = \frac{kg}{m \cdot s} \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{kg} = \frac{1}{s^2}$$

finalmente $\frac{[\nu][V_0][t]}{[m][}= \frac{1}{s}$ y así obtenemos la corriente por unidad de tiempo, el tiempo se discretiza con h, así

$$R = R_0 \times V_0 \times h = \frac{V_0 h}{\nu} \quad (14)$$

0.3 Condiciones de frontera

En este caso se está considerando un fluido en una caja al que se le imparte una velocidad V_0 y que contiene un obstáculo



En las partes donde no hay obstáculo, no debería tenerse vorticidad alguna, adicionalmente, en los lugares donde no hay velocidad, la corriente debe anularse. Además en C no hay cambios significativos en u y w, de manera que

$$\underline{C} \qquad u = w = 0 \qquad \frac{du}{dx} = \frac{dw}{dx} = 0$$

Por otro lado en D si puede haber cambios pero como no hay obstáculo, $w = 0$
dw/dx no se conoce

$$\underline{D} \qquad u = w = 0, \quad \frac{du}{dx} = 0$$

En B si hay una velocidad V_0 aplicada pero no hay obstáculo

$$v_x = \frac{du}{dy} = V_0 \quad , \quad w = 0 \qquad \underline{B} \rightarrow \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} = V_0$$

central

Finalmente en A no hay sucedido nada por lo que si bien puede haber velocidad, su cambio no es significativo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad w = 0 \qquad \underline{A}$$

Así en $\underline{C}$ usando la derivada forward de diferencias finitas

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} \qquad u_{i,j} = 0$$

$$w_{i-1,j} = w_{i,j} \qquad w_{i,j} = 0$$

En P

$u_{i,j} = 0$ $\quad w_{i,j} = 0$ $\quad u_{i+1,j} = u_i$

En A

$u_{i+1,j} = 0$ $\quad w_{i,j} = 0$

En B

$w_{i,j} = 0$ $\quad u_{i,j} = u_{i,j} + h_x V_0$

Ahora para el obstáculo, si tomamos una expansión de Taylor alrededor de $(y+h)$ para la función de corriente para evaluarla en E

$$u(x, y+h) \cong u(x,y) + h_x \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Ahora,

$$w = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

(no hay velocidad alguna)

$$w = +\frac{\partial v_y}{\partial x} = +\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2},$$

$$u(x, y+h) \cong u(x,y) + h \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} - \frac{h^2}{2} w$$

$$w_{i,j} = \frac{-2}{h^2}\left[u_{i,j+1} - u_{i,j}\right]$$ //

De manera similar, en E

$$u(x, y-h) \cong u(x,y) - \cancel{h_x \frac{\partial u}{\partial y}}^{0} - w_x \frac{(-h)^2}{2}$$

$$w_{i,j} = -\frac{2}{h^2}\left[u_{i,j-1} - u_{i,j}\right]$$ //

Scanned with CamScanner