Métodos computacionales 2- semana 4

Lunar rocket

Nombres: Valeria Castillo
Olga González

a) Suponemos la Tierra inmóvil y la Luna siguiendo una órbita circular cuya frecuencia angular es $\omega = 2.6617 \times 10^{-6} s$

b) Simulación hecha en el S.I que resulte más conveniente en el caso del sistema Tierra Luna. El paso de integración debe ser en segundos de vuelo pero se puede graficar cada 1000 pasos usando animation dado que el viaje dura días terrestres.

Resultaría pertinente usar el sistema en el cual se define

- $G = \dfrac{4\pi^2}{(365.2421)^2}$ (da una simulación en días)

- Masa medida en masas solares

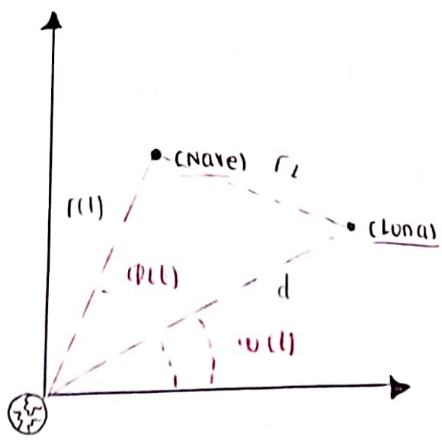
$M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ kg; $M_T = 3.0033 \times 10^{-6} M_\odot$; $M_L = 3.694 \times 10^{-8} M_\odot$

- Distancias medidas en unidades astronómicas

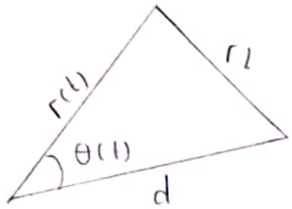
$1 AU = 1.496 \times 10^{11}$ m ; $r_L = 1.161 e^{-5}$ AU ; $d = 2.569 \times 10^{-3}$ AU

c) Muestre usando la figura (1) que la distancia Nave-Luna está dada por

$$r_L(r, \phi, t) = \sqrt{r(t)^2 + d^2 - 2r(t)\, d \cos(\phi - \omega t)}$$



Para resolver este problema podemos usar la regla del coseno. Si denotamos $\theta(t)$ al ángulo formado entre la Luna y la nave, tenemos



De esta forma

$$r_L^2(r,\theta,t) = d^2 + r^2(t) - 2r(t)d\cos(\theta(t))$$

ya que $\theta(t) = \phi(t) - \omega_L t$ y considerando ω como constante

$$r_L^2(r,\phi,t) = d^2 + r^2(t) - 2r(t)d\cos(\phi(t) - \omega t)$$

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{d^2 + r^2(t) - 2r(t)d\cos(\phi(t) - \omega t)} \quad (1)$$

d) usando esta distancia muestre que el hamiltoniano de la nave está dado por

$$H = P_r\dot{r} + P_\phi\dot{\phi} - L = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\phi^2}{2mr^2} - \frac{GmM_T}{r} - \frac{GmM_L}{r_L(r,\phi,t)}$$

Donde L es la energía cinética menos la potencial de la nave en coordenadas polares.

El movimiento de la nave con respecto a la tierra es circular, de manera que

$\vec{P}_{N-T} = r(t)(\cos(\phi t)\hat{x} + \sin(\phi t)\hat{y})$, si ahora transformamos a coordenadas polares

$$\hat{r} = \cos(\phi t)\hat{x} + \sin(\phi t)\hat{y}$$
$$\hat{\phi} = -\sin(\phi t)\hat{x} + \cos(\phi t)\hat{y}$$

$$\vec{r}_{N-T} = r(t)[\cos(\phi t)\hat{x} + \sin(\phi t)\hat{y}]$$

$$\frac{d\vec{r}_{N-T}}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\hat{r} + r(t)\left[-\sin(\phi t)\frac{d\phi}{dt}\hat{x} + \cos(\phi t)\frac{d\phi}{dt}\hat{y}\right]$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

y así

$$T = \frac{1}{2}m_N\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}m_N\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_N r^2\dot{\phi}^2 \quad (2)$$

c) Muestre que las ecuaciones de Hamilton son .... Note que las dos primeras se refieren momento lineal y angular de la nave y las segundas a la fuerza. Este sistema no tiene solución analítica al ser no lineales.

$$\star\ |\dot{\vec{r}}| = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad (11)$$

$$\star\ |\dot{\phi}| = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \quad (12)$$

$$\star\ \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\left[\frac{-2p_\phi^2}{2mr^3} + \frac{6mm_T}{r^2} - 6mm_L\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_L(r,\phi,t)}\right)\right]$$, siguiendo de (7)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_L(r,\phi,t)}\right) = -\left[\frac{1}{r_L(r,\phi,t)^2} \times \frac{\partial r_L}{\partial r}\right] = \left[\frac{2r(t) - 2d\cos(\phi(t) - \omega t)}{2\sqrt{d^2 + r^2(t) - 2r(t)d\cos(\phi(t)-\omega t)}}\right]$$

$$= \frac{-[r(t) - d\cos(\phi(t) - \omega t)]}{r_L^3(r,\phi,t)}$$, reemplazando

$$\dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{6mm_T}{r^2} - \frac{6mm_L}{r_L^3(r,\phi,t)}\left[r(t) - d\cos(\phi(t) - \omega t)\right] \quad (13)$$

$$\star\ \dot{p}_\phi = \frac{-\partial H}{\partial \phi} = -6mm_L\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{r_L(r,\phi,t)}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{r_L(r,\phi,t)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{d^2+r^2-2rd\cos(\phi-\omega t)}} \times \left(-2r(t)d \times \sin(\phi - \omega t)\right) \times \frac{1}{r_L(r,\phi,t)^2}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{6mm_L}{r_L^3(r,\phi,t)} \times \left(r(t)d\sin(\phi(t) - \omega t)\right) \quad (14)$$

...a reducir el error de redondeo, se pueden definir nuevas variables normalizadas a la distancia lunar: $\tilde{r} = r/d$, $\tilde{P}_r = P_r/md$, $\tilde{P}_\phi = P_\phi/md^2$, ϕ. Muestre que el sistema se puede escribir como se sigue.

* siguiendo de (11)

$$\dot{\tilde{r}} d = \frac{\tilde{P}_r \times md}{m} \rightarrow \dot{\tilde{r}} = \tilde{P}_r \quad (15)$$

* siguiendo de (12)

$$\dot{\phi} = \frac{\tilde{P}_\phi \times md^2}{mr^2} = \frac{\tilde{P}_\phi \times d^2}{m\,\tilde{r}^2 d^2} = \frac{\tilde{P}_\phi}{\tilde{r}^2} \quad (16)$$

* siguiendo de (13),

Dado que $P_r = \tilde{P}_r md$, $\dot{P}_r = \dot{\tilde{P}}_r \times md$, y partiendo de (7) si reemplazamos

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{\tilde{r}^2 \times d^2 + d^2 - 2\tilde{r}(1)\,d^2 \cos(\phi - wt)}$$

$$r_L(1,\phi,t) = d\sqrt{\tilde{r}^2 + 1 - 2\tilde{r}(1)\cos(\phi - wt)}$$

Definiendo $\tilde{r}_L = r_L/d$

$$\tilde{r}_L \equiv \sqrt{1 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}\cos(\phi - wt)} \quad (17)$$

Entonces

$$\dot{\tilde{P}}_r \times md = \frac{\tilde{P}_\phi^2 \times m^2 \times d^4}{m\,\tilde{r}^3 d^3} - \frac{6mm_T}{\tilde{r}^2 d^2} - \frac{6mm_L}{\tilde{r}_L^3 \times d^3}\left[\tilde{r}d - d\cos(\phi - wt)\right]$$

$$\dot{\tilde{P}}_r = \frac{\tilde{P}_\phi^2}{\tilde{r}^3} - \frac{6m_T}{\tilde{r}^2 d^3} - \frac{6m_L}{\tilde{r}_L^3 \times d^3}\left[\tilde{r} - \cos(\phi - wt)\right]$$

Definiendo (18) $\Delta \equiv 6m_T/d^3$ y $\mu = m_L/m_T$ (19)

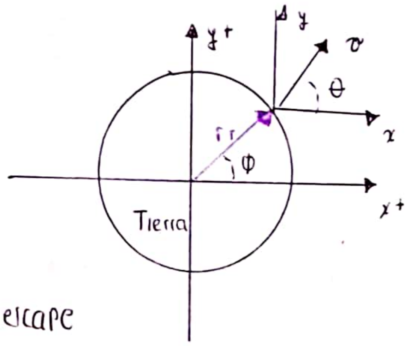
$$\dot{\tilde{P}}_r = \frac{\tilde{P}_\phi^2}{\tilde{r}^3} - \Delta\left[\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\mu}{\tilde{r}_L^3}\left[\tilde{r} - \cos(\phi - wt)\right]\right] \quad (20)$$

★ siguiendo de (14) , $\dot{\tilde{p}}_\phi = \dot{\tilde{p}}_\phi \times md^2$

$$\dot{\tilde{p}}_\phi \times md^2 = \frac{-GmM_L}{\tilde{r}_L^3 \times d^3} \, (\tilde{r}\, d^2 \sin(\phi - wt))$$

$$\dot{\tilde{p}}_\phi = -\frac{\Delta\, \mu\, \tilde{r}}{\tilde{r}_L^3} \sin(\phi - wt) \quad (21)$$

g) Resolver el sistema de ecuaciones con el algoritmo de Runge-Kutta 4 con las siguientes condiciones iniciales.



★ Radio inicial $r = r_T$

★ Latitud sobre el planeta ϕ

★ Velocidad inicial $\vec{v} = [v\cos(\theta) + v\,\mathrm{sen}(\theta)]$

→ La magnitud debe ser cercana a la velocidad de escape

Ajustar los ángulos para lograr fotografiar el lado oculto de la Luna lanzando simulación cuando la luna se encuentre en el perigeo orbital el eje x.

Finalmente, para asignar los momentos canónicos iniciales muestre

Inicialmente se puede tomar $\vec{r}_v = r(\hat{x} + \hat{y})$, de manera que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\dot{r}_v = (v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$

Entonces, recordando lo obtenido en (Momentos)

★ $$\tilde{p}_r^{\,0} = \frac{p_r}{md} = \frac{m\dot{r}}{md} \; ; \qquad \dot{\vec{r}} = \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \times (2x\dot{x}\hat{x} + 2y\dot{y}\hat{y}) = \frac{x \cdot v_0\cos\theta\,\hat{x} + y\, v_0\sin\theta\,\hat{y}}{r}$$

Ahora, la localización de la nave sería en $(x, y) = R_T = (r\cos\phi, r\sin\phi)$

Así

$$\dot{r} = \frac{r v_0 \cos\theta \cos\phi \,\hat{i} + r(v_0 \sin\theta \sin\phi)\,\hat{j}}{r} \qquad v_0\,[\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi]$$

Ahora, $\cos(A - B) = \cos(A)\sin(B) + \sin(A)\sin(B)$, así $\dot{r} = v_0\cos(\theta - \phi)$, reemplazando

$$\tilde{p}_r = \frac{v_0}{d}\cos(\theta - \phi) = \tilde{v}_0 \cos(\theta - \phi) \quad ; \quad \tilde{v}_0 = v_0/d$$

$$\frac{p_\phi}{md^2} = \frac{mr^2\dot{\phi}}{md^2} = \frac{m\tilde{r}^2 d^2 \dot{\phi}}{md^2} = \tilde{r}^2\dot{\phi}$$

Ahora $\tan(\phi) = \frac{y}{x} \rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $\dot{\phi} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} \cdot \frac{1}{1+(y/x)^2}$

Ahora, $\sin\phi = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\sin\phi$, $1+(y/x)^2 = 1+\tan^2\phi = \sec^2(\phi)$

$$\dot{\phi} = \dot{y}x - \dot{x}y \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{d^2\tilde{r}^2\sin^2\phi} = \frac{(\dot{y}x - \dot{x}y)}{\tilde{r}^2 \times d^2}$$

$\dot{y}x = v_0 r\cos\phi\sin\theta$, $\dot{x}y = v_0 r\cos\theta\sin\phi$, $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$\dot{y}x - \dot{x}y = v_0 r(\cos\phi\sin\theta - \cos\theta\sin\phi) = v_0 r\sin(\theta-\phi)$

$$\dot{\phi} = \frac{\tilde{r}^2 \times v_0 \times \tilde{r} d\sin(\theta-\phi)}{\tilde{r}^2 \times d^2} = \tilde{r}\,\tilde{v}_0\sin(\theta-\phi)$$

Así $(\tilde{p}_r^0, \tilde{p}_\phi^0) = (\tilde{v}_0\cos(\theta-\phi), \tilde{v}_0\tilde{r}\sin(\theta-\phi))$