Métodos computacionales 2 - Tarea 3

a) Valeria castillo y olga gonzález

a) ¿cuál es el significado físico de k?

Es una medida de la fuerza necesaria para desplazar un objeto un volumen V.

si lo pensamos desde las soluciones, sería un parámetro que determine la magnitud de la fuerza que un cuerpo le daría a otro al cambiarlo en su volumen

b) ¿Es conservativa la fuerza?

si fuerza conservativa, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 = \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + F \cdot d\vec{r}_2$

$$= k|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3 \times \frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} \cdot (d\vec{r}_1) +$$

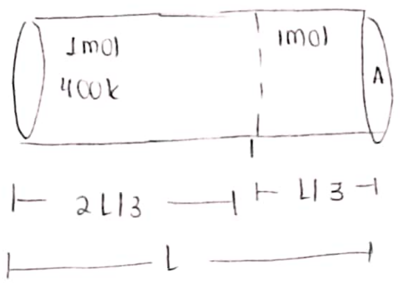
$$k|\vec{r}_1-\vec{r}_2)^3 \times \frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|r_1-r_2|}$$

$$= 2k|\vec{r}_1-\vec{r}_2| - 2k|\vec{r}_1-\vec{r}_2| = 0$$

Entonces sí es conservativa

Punto 3. Termodinámica

a) Encuentre la temperatura de equilibrio de la sección derecha antes de conectar el alambre de cobre



si es un cilindro

$$V_1 = \frac{2L}{3} \times A$$

$$V_2 = \frac{L}{3} A$$

En el equilibrio mecánico, las presiones $P_{(1)}$, P_2 son iguales.

Ahora, por la ecuación de estado

$$P_{(1)} = \frac{n R T_{(1)}^{(0)}}{V_{(1)}} = \frac{(nR)(400k)}{2LA} \times 3 = \frac{600R}{LA}$$

$$T_{(2)}^{(0)} = \frac{P_{(1)} \times V_{(1)}}{nR} = \frac{600R}{LA} \times \frac{LA}{3R} = 200k \;//$$

b) considerando que no se realiza trabajo y que el proceso es lo suficientemente lento use la ley de la termodinámica y la ley de transferencia de Fourier para encontrar

$$n C_v \frac{dT_{(1)}}{dt} = -\frac{kA}{l}(T_1 - T_2) \quad ; \quad n C_v \frac{dT_2}{dt} = \frac{kA}{l}(T_1 - T_2)$$

* Tenemos la primera ley de la termodinámica

$$\Delta U^{(T)} = \Delta U^{(1)} + \Delta U^{(2)} = \Delta Q^{(1)} + \Delta Q^{(2)} = 0$$

Entonces $\Delta Q^{(1)} = -\Delta Q^{(2)}$ (1)

* La ley de transferencia de Fourier

$$\frac{dQ}{dt} = -k \oint\!\!\oint \nabla T \cdot ds$$

si consideramos que la temperatura es independiente de la superficie

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{-kA\Delta T}{l} \quad (2)$$

* Gas ideal $\quad dQ = nC_v \, dT$ (3)

→ Para (1), que pierde calor ya que $T_{(1)}^{(0)} > T_{(2)}^{(0)}$ $\quad \Delta Q < 0$

usando (2) y (3)

$$\frac{dQ_{(1)}}{dT_{(1)}} = \frac{dQ_{(1)}}{dt}\frac{dt}{dT_{(1)}} \Rightarrow \frac{-kA\Delta T}{l}\frac{dt}{dT_{(1)}} = nC_v \Rightarrow nC_v\frac{dT_{(1)}}{dt} = \frac{-kA\Delta T}{l}$$

$$\rightarrow nC_v \frac{dT_{(1)}}{dt} = \frac{-kA}{l}(T_1 - T_2) \quad //$$

$$\rightarrow \frac{dQ_{(2)}}{dT_{(2)}} = \frac{dQ_{(2)}}{dt}\frac{dt}{dT_{(2)}} \rightarrow nC_v\frac{dT_{(2)}}{dt} = \frac{-kA}{l}(T_2 - T_1)$$

$$\rightarrow nC_v\frac{dT_{(2)}}{dt} = \frac{kA}{l}(T_1 - T_2) \quad //$$

Donde podemos definir $C = \frac{kA}{nC_v l}$ y $C_v = \frac{3}{2}R$.

$$\frac{dT_{(1)}}{dt} = -C(T_{(1)} - T_{(2)}) \quad ; \quad \frac{dT_{(2)}}{dt} = C(T_{(1)} - T_{(2)})$$

Dadas estas ecuaciones las condiciones iniciales de las derivadas están bien definidas

$$\left.\frac{dT_{(1)}}{dt}\right|_{t=0} = -C(T_{(1)}^{(0)} - T_{(2)}^{(0)}) \quad ; \quad \left.\frac{dT_{(2)}}{dt}\right|_{t=0} = C(T_{(1)}^{(0)} - T_{(2)}^{(0)})$$

Esto ya que $T_{(1)}|_{t=0} = T_{(1)}^{(0)}$ y $T_{(2)}|_{t=0} = T_{(2)}^{(0)}$

c) Encuentre analíticamente la solución del sistema de ecuaciones

Podemos construir la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{dT_{(1)}}{dt} \\ \frac{dT_{(2)}}{dt} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -(T_1 - T_2) \\ (T_1 - T_2) \end{pmatrix}$$

Si asumimos la solución

$$T_{(1)} = \xi^{(1)} e^{rt} \qquad T_{(2)} = \xi^{(2)} e^{rt}$$

$$\frac{dT_{(1)}}{dt} = r\xi^{(1)} e^{rt} \qquad \frac{dT_{(2)}}{dt} = r\xi^{(2)} e^{rt}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$r\xi^{(1)} = C(\xi^{(2)} - \xi^{(1)}) \quad ; \quad r\xi^{(2)} = C(\xi^{(1)} - \xi^{(2)})$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} r+C & -C \\ -C & r+C \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución no trivial se obtiene si $\det(A)=0$

$$\det(A) = r^2+2cr+c^2-c^2=0 \rightarrow r(r+2c)=0$$

→ Solución 1 $\quad r=0 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ Solución 2 $\quad r=-2c \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -c & -c \\ -c & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así

$$T_{(1)}(t) = C_1 + C_2 e^{-2ct} \quad ; \quad T_{(2)}(t) = C_1 - C_2 e^{-2ct}$$

Aplicando las condiciones iniciales de las derivadas

$$\left.\frac{dT_{(1)}}{dt}\right|_{t=0} = (-2c)C_2 = -c\left(T_{(1)}^{(0)} - T_2^{(0)}\right) \rightarrow C_2 = \frac{T_{(1)}^{(0)} - T_{(2)}^{(0)}}{2}$$

$$T_{(1)}(t)\big|_{t=0} = T_{(1)}^{(0)} = C_1 + \frac{\left(T_1^{(0)} - T_2^{(0)}\right)}{2} \rightarrow C_1 = \frac{T_{(1)}^{(0)} + T_{(2)}^{(0)}}{2}$$

Entonces

$$T_{(1)}(t) = \frac{\left(T_1^{(0)} + T_2^{(0)}\right)}{2} + \frac{\left(T_1^{(0)} - T_2^{(0)}\right)}{2} e^{-2ct} \;//$$

$$T_{(2)}(t) = \frac{T_1^{(0)} + T_2^{(0)}}{2} - \frac{T_1^{(0)} - T_2^{(0)}}{2} e^{-2ct} \;//$$

Scanned with CamScanner

d) Encuentre numéricamente la solución del sistema

ver código

d

e) ¿cuál es el límite termodinámico de ambas variables: $\lim_{t \to \infty} T_1(t)$ y $\lim_{t \to \infty} T_2(t)$?

recordando que $\lim_{t \to \infty} e^{-|\alpha| t} = 0$

Entonces $T_{(1)} \xrightarrow[t \to \infty]{} \dfrac{T_{(1)}^{(0)} + T_2^{(0)}}{2}$ // y $T_{(2)} \xrightarrow[t \to \infty]{} \dfrac{T_1^{(0)} + T_2^{(0)}}{2}$ //