

Оглавление

	Стр.
Введение	2
Глава 1. Обзор существующих методов динамической адаптации сеток	6
Глава 2. Динамическая адаптация сетки путём движения узлов	9
2.1 Метод движения сетки	9
2.2 Упрощенная формулировка метода движения сетки	12
2.3 Реализация в программном комплексе Noisette.	12
Глава 3. Численные результаты	15
Заключение	23
Список литературы	25
Список публикаций	29
Приложение А. Математическое описание аэродинамики движущихся тел на основе метода погруженных границ на подвижной сетке	30
А.1 Математическая модель для неподвижных сеток	31
А.2 Математическая модель для подвижных сеток	32
А.3 Технология расчета системы газодинамических уравнений в СЭЛ форме на движущихся сетках с неизменной топологией для треугольной сетки	33

Введение

Актуальность темы исследования: Одной из наиболее сложных задач вычислительной газовой динамики и аэродинамики является математическое моделирование течений вокруг движущихся тел. В частности, большое количество фундаментальных задач направлено на исследование аэродинамики движущихся относительно друг друга тел и/или элементов одного тела. К таким задачам можно отнести исследование аэродинамических и акустических свойств крыла самолёта с механизацией, включая выдвигающиеся или задвигающиеся закрылки и предкрылки; влияние на аэродинамику и акустику открывающихся технологических отсеков и выдвигаемых частей, например, при выпуске шасси самолёта; моделирование траектории сбрасываемых грузов и ряд других проблем.

В таких задачах могут присутствовать два типа тел, движущихся относительно друг друга. Первый тип – это основное, родительское, тело, второй – тело или тела, совершающие, вообще говоря, достаточно сложные движения относительно основного тела. В такой ситуации трудно, а порою даже невозможно, использовать традиционный подход к описанию обтекаемого объекта граничными узлами или граничными элементами расчётной сетки. Такой подход логично применить только к покоящемуся родительскому телу, в системе расчёта которого моделировать передвижения остальных, более мелких, объектов.

Для описания движущихся тел в качестве наиболее удобного подхода все большее распространение приобретают методы погруженных границ (в англоязычной научной литературе – Immersed Boundary Conditions или IBC метод) [1–3]. Методы погруженных границ составляют целый класс методов, позволяющих обеспечить выполнение граничных условий на поверхности обтекаемых тел в процессе численного расчёта без описания его геометрии сеточными узлами. Это означает, что может быть использована «сплошная» расчётная сетка, покрывающая всю область определения задачи, включая препятствие.

Как и в случае неподвижных тел, повысить точность моделирования перемещающихся объектов и образующихся вокруг них пограничных слоёв в рамках метода погруженных границ можно за счёт сгущения сетки в областях, прилегающих к погруженным границам таких объектов. Возможным, хотя далеко

не оптимальным способом организации нужного сгущения является использование стационарных сеток с достаточно мелкими сеточными элементами в подобласти, покрывающей траекторию возможного движения моделируемого тела. Понятно, что для продвижения на сколь-нибудь дальнейшее расстояние этот метод является весьма трудоёмким, т.к. ведёт к необходимости использования огромных расчётных сеток. К тому же он не даёт решения в том случае, когда траектория движения тела неизвестна заранее, а определяется в процессе расчёта на основе вычисления действующих на тело аэродинамических сил.

Выходом в такой ситуации может стать использование динамической адаптации сетки, причём такой, которая была бы заметно дешевле по стоимости расчёта на изначально всюду очень подробных стационарных сетках и не приводила к ухудшению параллельной эффективности всего численного алгоритма.

В данной работе рассматривается подход, основанный на преобразовании координат узлов или «подвижной сетке», и его адаптация к алгоритму моделирования течения вокруг подвижных твёрдых тел, заданных погруженными границами. Работоспособность разработанных алгоритмов демонстрируется на решении двумерных тестовых задач на неструктурированных треугольных сетках при использовании упрощённой формулировки метода.

Целью данной работы является разработка эффективной технологии динамической адаптации неструктурированных сеток к границе движущегося обтекаемого тела заданного методом погруженных граничных условий. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Анализ существующих алгоритмов динамической сеточной адаптации.
2. Разработка алгоритма динамической адаптации неструктурированной сетки.
3. Адаптация алгоритма к использованию погруженных граничных условий и функции линий уровня, описывающей геометрию твёрдого тела.
4. Реализация алгоритма в рамках некоммерческого исследовательского комплекса программ NOISEtte++, разрабатываемом в отделе вычислительной аэродинамики и аэроакустики ИПМ РАН.
5. Рассмотрение двумерной постановки для треугольных сеток. Тестирование на тестовых задачах с аналитически заданной геометрией тела и заданным законом его движения.

Научная новизна: Новаторство предлагаемых в работе решений заключается в первую очередь в применении метода «быстрой», не меняющей

топологии, динамической адаптации сетки в комплексе с заданием геометрии обтекаемого объекта погруженными граничными условиями.

Практическая значимость: Данный подход к адаптации сетки позволяет создание более эффективной методики численного исследования движущихся в турбулентных потоках тел по сравнению с существующими подходами, использующими неструктурированные сетки. Помимо использования алгоритма адаптации совместно в погруженными граничными условиями, его можно успешно использоваться для решения задач с «традиционным» описанием подвижных тел граничными сеточными узлами при условии не столь больших отклонений от их исходного положения (например, разного рода колебательных движений), а также, для адаптации сетки к полям решения.

Методология и методы исследования. Методы работы основаны на численном решении систем линейных алгебраических уравнений реализованном в программном комплексе NOISEtte++ с использованием MPI-OpenMP распараллеливания. Также при решении тестовых задач использовались методы и модели газовой динамики реализованные в программном комплексе NOISEtte++, в частности численные схемы с квазиодномерной реконструкцией переменных [4], методы погруженных границ [5,6] и описание аэродинамики движущихся тел на основе метода погруженных границ на подвижной сетке (см. Приложение А). Результаты тестовых расчетов сравниваются с данными эксперимента.

Положения, выносимые на публичное представление:

1. Разработан алгоритм динамической адаптации неструктурированной сетки для использования совместно в методом погруженных граничных условий и функции линий уровня, описывающей геометрию твёрдого тела.
2. Алгоритм реализован в рамках некоммерческого исследовательского комплекса программ NOISEtte++ с использованием MPI-OpenMP распараллеливания, разрабатываемом в отделе вычислительной аэродинамики и аэроакустики ИПМ РАН.
3. На основе разработанного алгоритма проведен вычислительный эксперимент моделирования течения за движущимся цилиндром.

Работоспособность разработанных алгоритмов демонстрируется на решении двумерных тестовых задач на неструктурированных треугольных сет-

ках. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. Доклад на 14-ом международном научном семинаре «Математические модели и моделирование в лазерно-плазменных процессах и передовых научных технологиях» (LPPM3-2016). Тема доклада: «Динамическая адаптация треугольной сетки к границе движущегося объекта, заданного с использованием метода погруженных границ, на основе алгоритма перераспределения узлов».
2. Доклад на 6-ой Всероссийской конференции «Вычислительный эксперимент в аэроакустике» (г. Светлогорск Калининградской области, 19-24 сентября 2016 года). Тема доклада: «Моделирование аэродинамики движущихся тел с использованием сеточной адаптации в погруженным границам на неструктурированных треугольных сетках». [1]

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 1 работе в издании, входящем в базу Scopus:

1. Статья “Моделирование аэродинамики движущегося тела, заданного погруженными границами на динамической адаптивной неструктурированной сетке“ в журнале “Математическое моделирование“ [2].
Статья переведена на английский язык: “Simulating Aerodynamics of a Moving Body Specified by Immersed Boundaries on Dynamically Adaptive Unstructured Meshes“ в журнале “Mathematical Models and Computer Simulations“ [3]

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и приложения. В первой главе приводится обзор литературы по существующим методам динамической адаптации расчётной сетки. Во второй главе приводится математическая формулировка метода динамической сеточной адаптации путём перераспределения узлов без изменения топологии сетки. В третьей главе приводятся результаты расчётов двумерных тестовых задач с аналитически заданной геометрией тела и заданным законом его движения на треугольной неструктурированной сетке.

Глава 1. Обзор существующих методов динамической адаптации сеток

Подробные обзоры методов динамической адаптации сетки представлены в книгах Томпсона [7], Лисейкина [8], Хуанг и Рассела [9]. В целом, все техники адаптации могут быть разделены на две большие группы: h -методы, которые основаны на локальном измельчении и огрублении сетки, и r -методы, которые предполагают передвижение узлов сеточных элементов во всей сетке (или на ее обширном участке), чтобы обеспечить желаемую концентрацию в нужных регионах. В методах локального сеточного измельчения/огрубления (h -методы) [10–12] узлы добавляются или, наоборот, удаляются на фиксированных временных слоях так, чтобы численное решение на них разрешалось с заданной точностью. Подход, основанный на преобразовании координат узлов или подвижной сетке во всей расчётной области или в достаточно большой под-области (r -методы) [9] в основном используется для динамической адаптации сетки к численному решению путём стягивания сеточных узлов в области с большими градиентами. Такая техника успешно используется во всем мире при решении широкого круга прикладных задач и в том числе в вычислительной газовой динамике [13–15]. Методы подвижной сетки могут быть также разделены на характерные группы алгоритмов, а именно на вариационные методы и методы, основанные на решении дифференциальных уравнений.

Согласно вариационному подходу, преобразование координат узлов определяется путём минимизации некоторого сеточного функционала. В работах разных авторов предлагаются различные типы подходящих сеточных функционалов. Так, в работе Винслоу (Winslow) [16] представлен эквипотенциальный метод, основанный на диффузии переменных. Вариационный метод Брэкбилла и Зальцмана (Brackbill, Saltzman) [17] строится на минимизации функции, зависящей от концентрации сеточных узлов, сеточной гладкости и ортогональности. В статье [18] предлагается сеточный функционал, зависящий от энергии гармонических отображений, а работах Кнаппа (Knupp) с соавторами [19, 20] используется идея обусловленности Якобиана преобразования координат. В [21] минимизируется функционал, реализующий условия так называемой «равнораспределённости». Наиболее свежий обзор сеточных функционалов, которые могут использоваться с целью адаптации, и их сравнение даётся в работе [22].

В методах, основанных на дифференциальных уравнениях подвижной сетки (MMPDE – moving mesh partial differential equations) [23], уравнение движения сетки и система газодинамических уравнений часто решаются совместно. В [24–26] уравнения движения сетки формулируются в зависимости от градиентов моделируемого течения применительно к двумерным задачам. Практические вопросы формулировки уравнений движения сетки и их решения подробно рассматриваются в работах [27] и [28].

Как в вариационных, так и в MMPDE методах расположением сеточных узлов управляет векторная или скалярная функция-монитор. Функция мониторинга обычно строится с целью оценки ошибки численного решения и равномерного распределения её по всем сеточным узлам [29].

К классу MMPDE методов можно отнести и несколько более упрощённый подход к адаптации сетки, который предложен Tukovic и Jasak [30, 31] и реализован в открытой библиотеке OpenFOAM [32]. В этом способе перемещения узлов сетки определяется уравнением Лапласа с переменной коэффициента диффузии, выполняющего роль функции-монитора. Авторы показали успешное применение этого метода при численном моделировании многофазных потоков.

В целом, MMPDE методы представляются наиболее эффективным подходом к динамической сеточной адаптации в задачах моделирования течений вокруг движущихся тел, если эти тела описываются при помощи метода погруженных границ. Использование погруженных границ и, благодаря этому, проведение расчётов подвижных объектов в односвязных областях открывает возможность расширения области применения MMPDE методов, которые до сих пор использовались в основном для адаптации сетки к полям численного решения, на задачи, требующие адаптации к поверхности движущегося твёрдого тела.

Привлекательность именно методов, основанные на решении уравнений движения сетки для этого класса задач объясняется несколькими причинами:

- они сохраняют топологию исходной сетки и не требуют интерполяции решения в новые узлы на каждом временном слое;
- сохранение сеточной топологии и отсутствие новых узлов позволяют использовать одну и ту же структуру данных и избежать динамического перераспределения узлов по подобластям декомпозиции при расчёте на параллельных вычислительных системах.

Такой подход к моделированию аэродинамики движущихся тел на неструктурированных сетках позволяет существенно сократить вычислительные затраты.

Глава 2. Динамическая адаптация сетки путём движения узлов

2.1 Метод движения сетки

Подробное описание и исследование адаптивных методов движения сетки было проведено Хуанг и Рассел в их монографии [9]. Основная идея этого подхода состоит в построении взаимно-однозначного отображения между физической Ω и вычислительной Ω_c областями, описываемыми в одномерном случае как:

$$\Omega : x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b \quad (2.1)$$

$$\Omega_c : \xi_0 = 0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = 1, \quad \text{где} \quad \xi_j = \frac{(j-1)}{(N-1)} \quad (2.2)$$

Будем искать такую сетку $x_1 = a < x_2 < \dots < x_N = b$, которая равномерно распределяет заранее заданную функцию плотности узлов сетки $\rho(x) > 0$ по отрезкам

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx = \dots = \int_{x_{N-1}}^{x_N} \rho(x) dx \quad (2.3)$$

Обозначим функцию отображения вычислительной области Ω_c в физическую Ω через $x(\xi)$. Принимая во внимание равенства (2.3) и определение координат ξ , имеет место следующее соотношение

$$\int_a^{x(\xi)} \rho(x) dx = \xi \int_a^b \rho(x) dx \quad (2.4)$$

Дифференцируя (2.4) по переменной ξ можно видеть, что функция удовлетворяет следующей краевой задаче для квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{d\xi} \left(\rho(x) \frac{dx}{d\xi} \right) = 0, \quad x(0) = a, \quad x(1) = b. \quad (2.5)$$

Несложно показать, что уравнение краевой задачи (2.5) является уравнением Эйлера-Лагранжа, определяющее решение вариационной задачи о минимизации функционала

$$I[x] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\rho(x) \frac{dx}{d\xi} \right)^2 d\xi. \quad (2.6)$$

Следовательно, искомое преобразование $x(\xi)$ можно трактовать как решение вариационной задачи (2.6), минимизирующей энергию отображения.

В случае непрерывного перемещения сетки уравнение (2.5) для нахождения отображения заменяется параболическим уравнением [27]

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{\tau \rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho(x) \frac{\partial x}{\partial \xi} \right), \quad (2.7)$$

где настроенный параметр τ определяет масштаб времени при решении нестационарного уравнения. Меньшие значения τ обеспечивают более быструю адаптацию сетки к изменениям в функции плотности узлов ρ .

В двумерном случае для определения функции отображения $x(\xi, \eta)$ вычислительной области Ω_c в физическую Ω используется вариационный принцип, позволяющий получить разрешающее уравнение на основе минимизации следующего функционала [24, 33]

$$I[\xi] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\mathbf{G}^{-1} \nabla \xi \cdot \nabla \xi) + (\mathbf{G}^{-1} \nabla \eta \cdot \nabla \eta)] d\mathbf{x}, \quad (2.8)$$

где $\xi(\xi, \eta)$ – вектор координат вычислительного пространства, $\nabla = \partial/\partial x, \partial/\partial y$ – оператор градиента и \mathbf{G} – 2×2 симметричная положительно определённая матрица, обычно называемая *мониторинговой функцией*. Функция, минимизирующая функционал, удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа:

$$\nabla \cdot (\mathbf{G}^{-1} \nabla \xi) = 0. \quad (2.9)$$

Методы построения движущихся сеток на основе решения уравнения в частных про-изводных (MMPDE) выводятся из уравнения градиентного потока (переноса градиента) для функционала $I[\xi]$. В работах [24, 33] это уравнение определяется следующим образом

$$\tau \sqrt{g} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\delta I[\xi]}{\delta \xi} \quad (2.10)$$

или

$$\tau \sqrt{g} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{G}^{-1} \nabla \xi), \quad (2.11)$$

где $g = \det(\mathbf{G})$.

Для проведения вычисления необходимо знать отображение $\mathbf{x}(\xi)$. Обращая уравнение (2.11) (меняя местами зависимые и независимые переменные),

получаем уравнение для нахождения $\mathbf{x}(\xi)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = & -\frac{\mathbf{x}_\xi}{\tau J \sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{(\mathbf{G} \mathbf{x}_\eta \mathbf{x}_\eta)}{Jg} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{(\mathbf{G} \mathbf{x}_\eta \mathbf{x}_\xi)}{Jg} \right\} \\ & - \frac{\mathbf{x}_\eta}{\tau J \sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{(\mathbf{G} \mathbf{x}_\xi \mathbf{x}_\eta)}{Jg} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{(\mathbf{G} \mathbf{x}_\xi \mathbf{x}_\xi)}{Jg} \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ есть матрица Якоби отображения $\mathbf{x}(\xi)$.

Остановимся подробнее на выборе мониторинговой функции \mathbf{G} в двумерном случае. Поскольку матрица \mathbf{G} симметрична, то её спектральное разложение представимо в виде

$$\mathbf{G} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T, \quad (2.13)$$

где λ_1 и λ_2 – положительные собственные значения (матрица \mathbf{G} положительно определена), а \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 – соответствующие нормированные собственные векторы, причём \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 взаимно ортогональны.

В настоящей работе мониторинговая функция выбирается согласно методу Винслоу [16]

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \rho(x, y) \quad (2.14)$$

Тогда мониторинговая функция (2.13) принимает вид диагональной матрицы с равными диагональными элементами

$$\mathbf{G}(x, y) = \rho(x, y) \mathbf{I}. \quad (2.15)$$

Следовательно, подразумевается, что деформация сетки будет происходить изотропно в направлении градиента функции $\rho(x, y)$, называемой *функцией плотности узлов сетки*.

Функционал (2.8) с мониторинговой функцией (2.15) приобретает вид

$$I[\xi, \eta] = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{1}{\rho(x, y)} (|\nabla \xi|^2 + |\nabla \eta|^2) dx dy \quad (2.16)$$

и тогда, согласно, (2.11) уравнение метода MMPDE запишется как

$$\tau \rho \frac{\partial \xi}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \xi \right) \quad (2.17)$$

Преобразуя уравнение (2.17) для зависимой переменной $\mathbf{x}(\xi)$, имеем [27]

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{1}{\tau \rho} \left[|\nabla \xi|^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \rho \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} + \nabla \xi \nabla \eta \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \rho \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \rho \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) + |\nabla \eta|^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \rho \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right] \quad (2.18)$$

2.2 Упрощенная формулировка метода движения сетки

Как показано в работах [30, 31], вместо уравнения движения сетки (2.18) для широкого круга задач допустимо использование его упрощенной формулировки, приводящей к уравнению Лапласа вида

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{1}{\tau \rho} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \rho \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \rho \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right]. \quad (2.19)$$

По всей видимости, такое упрощение допустимо, если рассматривается изотропная адаптация при относительно слабой степени требуемого сгущения сетки. При таких постановках использование уравнения движения сетки (2.19) не приводит к фатальному ухудшению качества адаптированной сетки и позволяет получать вполне приемлемые численные результаты.

Следует заметить, что численная реализация расчета с использованием уравнения (2.19) существенно проще по сравнению с полной формулировкой (2.18) и требует заметно меньше вычислительных ресурсов. В приводимых ниже примерах для отработки общего алгоритма используется упрощенная формулировка, в то время как рассмотрение общего случая планируется в ближайшем будущем.

2.3 Реализация в программном комплексе Noisette.

В конечно-объемной интерпретации оператор Лапласа может быть записан следующим образом

$$\nabla(\rho(\mathbf{x})\nabla\mathbf{x}) \approx \frac{1}{V} \int \nabla(\rho(\mathbf{x})\nabla\mathbf{x})dV. \quad (2.20)$$

Применяя теорему Остроградского-Гаусса к уравнению (2.20) и дискретизируя интеграл на треугольной сетке, получим:

$$\nabla(\rho(\mathbf{x})\nabla\mathbf{x}) \approx \frac{1}{S} \int \rho(\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{x})dS \approx \frac{1}{S} \sum_T \rho_T(\mathbf{n}_T \cdot (\nabla\mathbf{x})_T), \quad (2.21)$$

где T обозначает треугольник, \mathbf{n}_T – нормаль к элементу противоположному к узлу G и суммирование проводится по всем треугольникам прилегающим к узлу G

(Figure ...). Градиент $(\nabla \mathbf{x})_T$ на каждом треугольнике может быть вычислен как

$$(\nabla \mathbf{x})_T = \frac{1}{S_T} \sum_{e \in T} \mathbf{n}_e \frac{\mathbf{x}_L + \mathbf{x}_R}{2}, \quad (2.22)$$

где S_T – площадь треугольника, \mathbf{n}_e – нормаль к каждому элементу треугольника, \mathbf{x}_L и \mathbf{x}_R обозначают значения в левом и правом узле элемента соответственно.

Заметим, что в треугольнике $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_3$. Это позволяет нам переписать уравнение (2.22) в более удобной форме

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{x})_T &= \frac{1}{S_T} \left(\mathbf{n}_1 \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{2} + \mathbf{n}_2 \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3}{2} + \mathbf{n}_3 \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{S_T} \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}_1 (\mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3) + \frac{1}{2} \mathbf{x}_2 (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_3) + \frac{1}{2} \mathbf{x}_3 (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \right] = \\ &= -\frac{1}{2S_T} \sum_{k=0}^2 \mathbf{x}_k \mathbf{n}_k. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Таким образом, оператор Лапласа с переменным коэффициентом ρ на неструктурированной сетке может быть записан как

$$\begin{aligned} \nabla(\rho \nabla \mathbf{x}) &\approx \frac{1}{S_G} \sum_{T \ni G} \rho \mathbf{n}_T \left(-\frac{1}{2S_T} \sum_{k=0}^2 \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{n}_k \right) = \\ &= \frac{1}{2S_T} \left[- \sum_{K \in N^1(G)} \frac{\rho_G + \rho_K}{2} \mathbf{x}_K \sum_{T \ni G, K} \frac{\mathbf{n}_{T,G} \cdot \mathbf{n}_{T,K}}{2S_T} - \mathbf{x}_G \sum \frac{\mathbf{n}_{T,G}^2}{2S_T} \right] = \\ &= -\frac{1}{2S_G} \left[\sum_{K \in N^1(G)} \frac{\rho_G + \rho_K}{2} (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_K) \sum_{T \ni G, K} \frac{\mathbf{n}_{T,G} \cdot \mathbf{n}_{T,K}}{2S_T} \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

где S_G – площадь все прилегающих к узлу G треугольников, $N^1(G)$ – соседи узла G первого порядка.

Таким образом, дифференциальный оператор Лапласа с переменным коэффициентом в уравнение (2.18) можно заменить разностным оператором, обозначим его A

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{1}{\tau \rho} A \mathbf{x}. \quad (2.25)$$

Дискретизируя по времени и переписывая правую часть в более удобном виде, получаем

$$\frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\tau \rho^n} (A(\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n) + A \mathbf{x}^n). \quad (2.26)$$

Таким образом, решение уравнения (2.18) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

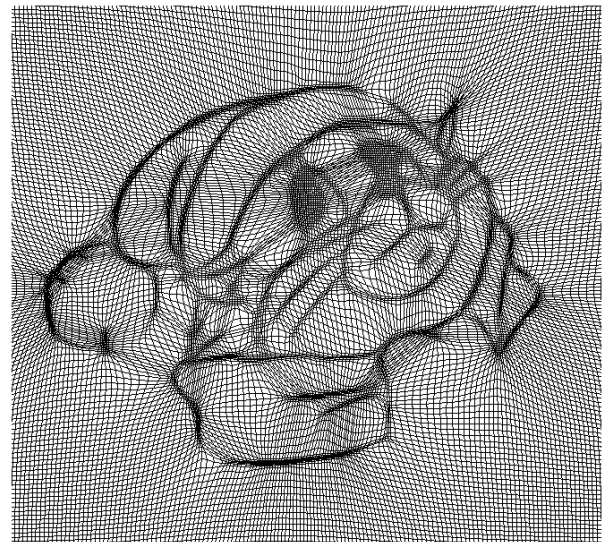
$$\left(\frac{\tau \rho^n}{\Delta t} - A \right) \Delta \mathbf{x} = A \mathbf{x}^n \quad (2.27)$$

на каждом шаге по времени.

Пример результата решения уравнения (2.27) для равномерных двумерных сеток с функцией ρ заданной таблицей значений проведен на рисунке 2.1. Это сетка не подходит для газодинамических расчетов и просто является примером работы алгоритма на произвольно заданной функции ρ .



а) функция сеточной плотности



б) результат адаптации

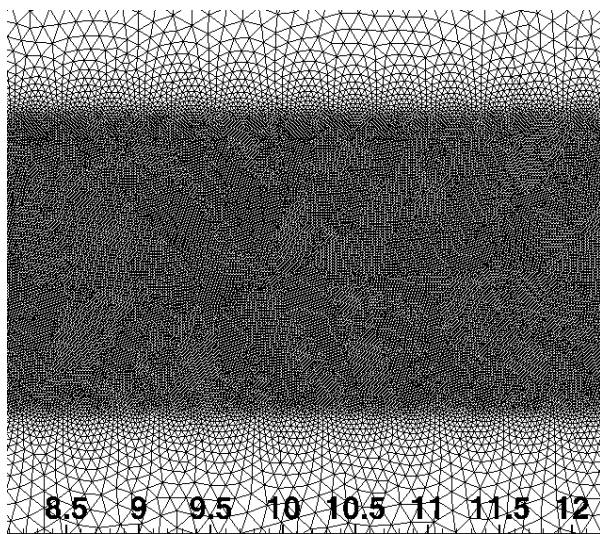
ρ

Рисунок 2.1 — Стационарная адаптация сетки путем перераспределения узлов у произвольно заданной функции сеточной плотности. (а) заданная функция сеточной плотности ρ , (б) результат адаптации к заданной функции ρ .

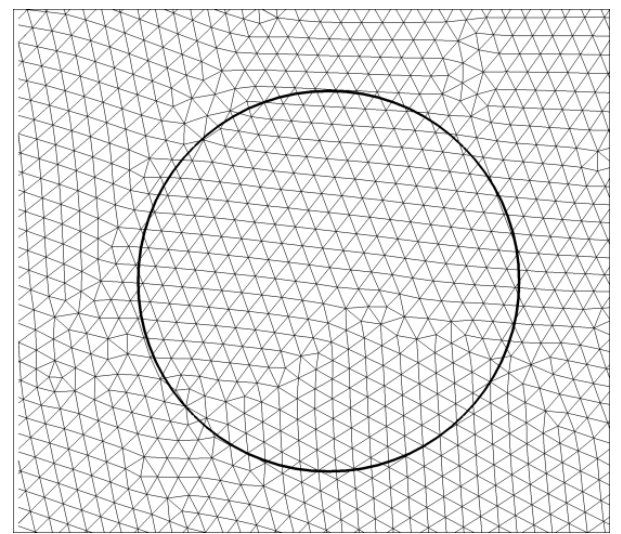
Глава 3. Численные результаты

Применение сеточной адаптации с использованием методики погруженных границ рассматривалось на примере решения двумерной модельной задачи – численного моделирования течения вокруг цилиндрического препятствия при его движении справа налево с дозвуковой скоростью U_B , соответствующей числу Маха равному 0.2. Число Рейнольдса Re , рассчитанное по диаметру и скорости движения цилиндра, полагалась равным 200. При численном решении данной задачи в качестве характерной скорости выбиралась скорость звука в невозмущенном потоке газа при нормальных условиях. Безразмерный радиус цилиндра R устанавливался равным величине 0.2. Тогда эффективное числа Рейнольдса Re , при котором проводились расчёты, имело значение 400.

Для проведения расчёта движения цилиндра необходимо иметь подробную сетку на всём пути движения цилиндра, во-первых, для корректного описания физических процессов, происходящих при обтекании препятствия, и во-вторых, для более точного описания границы обтекаемого препятствия при использовании метода погруженных границ. Поэтому использование неподвижных (неадаптивных сеток) приводит к резкому возрастанию вычислительной сложности решения такого типа задач. Применение адаптивной сетки, сгущающейся к границе движущегося тела, и обеспечивающее нужное разрешение

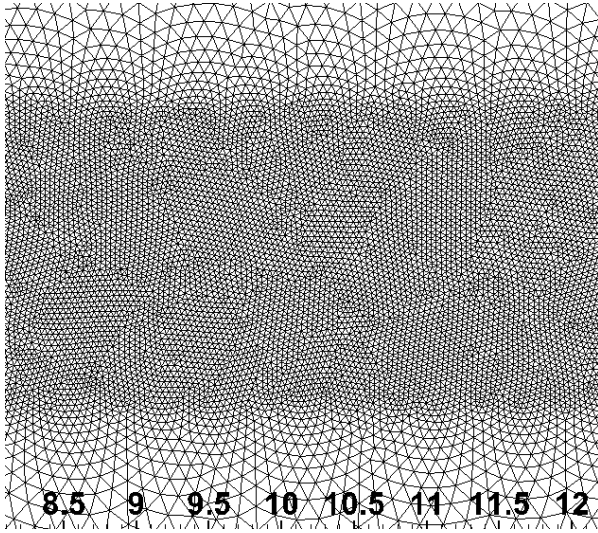


а) зона движения цилиндра

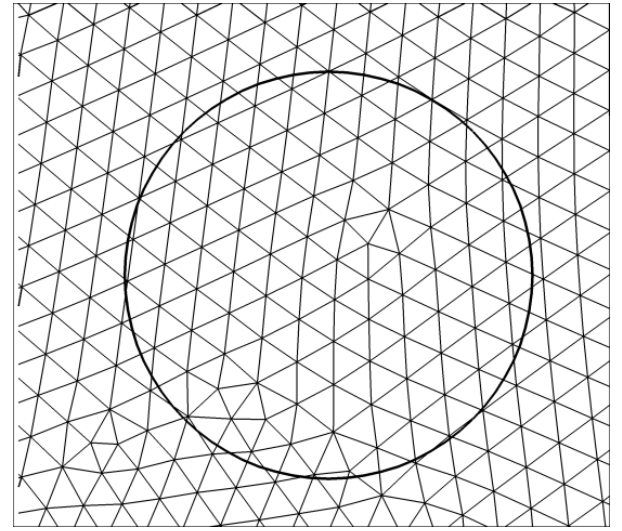


б) окрестность препятствия

Рисунок 3.1 — Фрагменты расчётной подробной сетки 1: (а) зона движения цилиндра, (б) окрестность препятствия.



а) зона движения цилиндра



б) окрестность препятствия

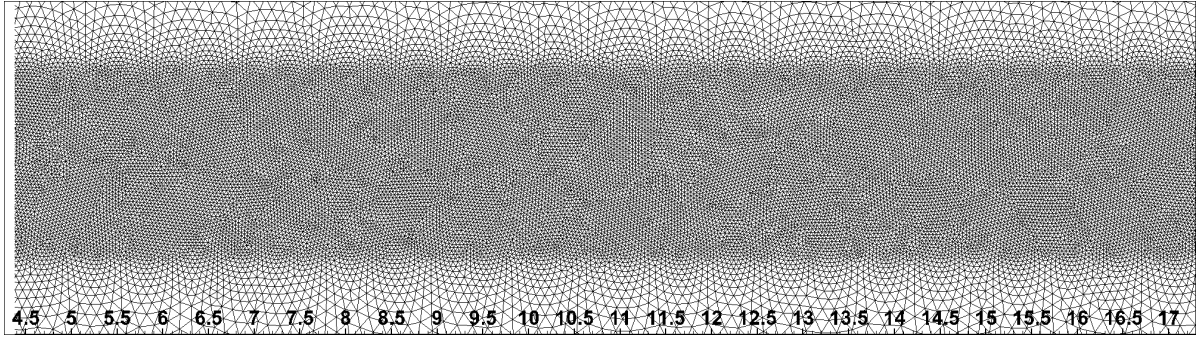
Рисунок 3.2 — Фрагменты расчётной подробной сетки 2: (а) зона движения цилиндра, (б) окрестность препятствия.

сетки в следе за телом, должно уменьшить размер сетки, и, как следствие вычислительную стоимость решения. Таким образом, необходимо сравнить качество численного решения, полученного на трёх сетках – подробной, грубой и грубой с адаптацией.

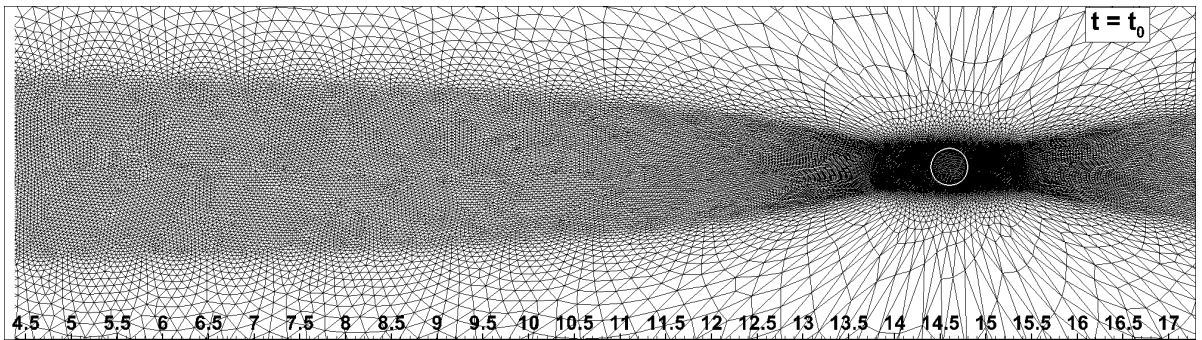
Для этого расчёты проводились на трёх неструктурированных треугольных сетках. Первая сетка (сетка 1) – подробная сетка с числом узлов равным 391628 (рисунок 3.1), вторая сетка (сетка 2) – сетка с числом узлов 110372, приблизительно в 3.5 раза меньшим, чем у подробной сетки (рисунок 3.2). Заметим, что в области движения цилиндра для сеток 1 и 2 определён регион квазиравномерной сетки с шагом h^1 и от него происходит огрубление сетки к границам расчётной области (см. рисунках 3.1а и 3.2а). Третья сетка (сетка 3) – это сетка 2, адаптирующаяся к поверхности движущегося цилиндрического препятствия, но не меняющая своей топологии. На рисунках 3.3 и 3.4 показаны фрагменты адаптивной сетки на различные моменты времени и положения движущегося цилиндра.

Закон адаптации сетки определяется управляющей функцией $\rho(\mathbf{x})$ в уравнении (2.19). Так как обтекаемое тело симметрично, то достаточно определить зависимость управляющей функции только от радиального направления r с центром, совпадающим с центром цилиндра. Данная функция должна определять

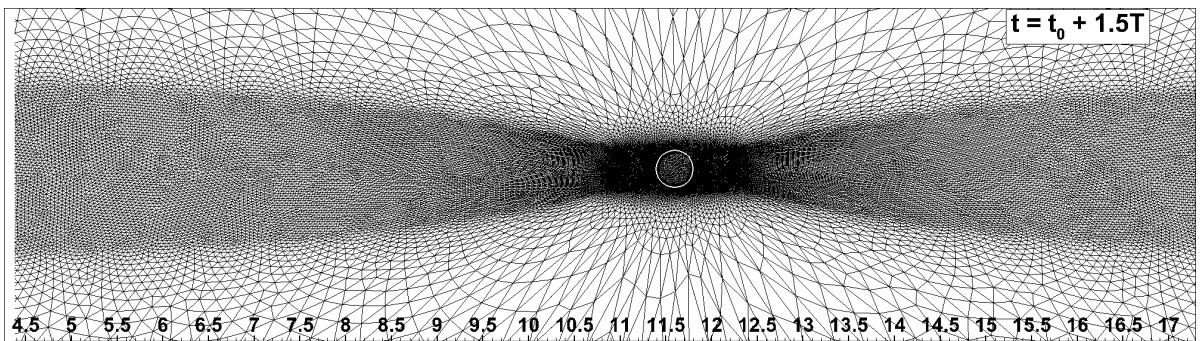
¹ Квазиравномерная треугольная сетка — сетка, состоящая из равносторонних треугольников с длиной стороны равной h .



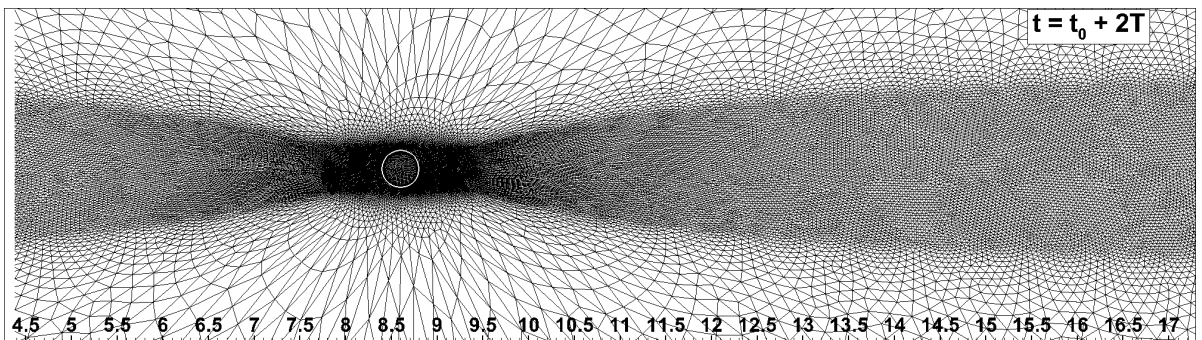
а) начало периода t_0



б) полтора периода $t_0 + 1.5T$



в) три периода $t_0 + 3T$



г) четыре с половиной периода $t_0 + 4.5T$

Рисунок 3.3 — Адаптация сетки 3 с течением времени. а) недеформированная сетка (сетка 2) и её адаптация на три момента времени: б)- начало периода t_0 , полтора периода $t_0 + 1.5T$ и три периода $t_0 + 3T$.

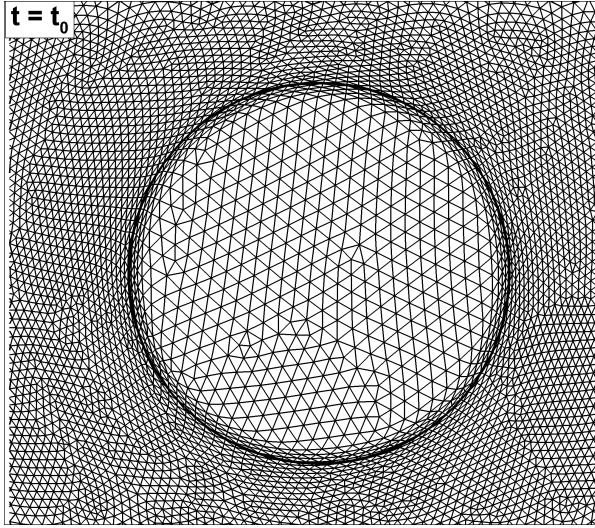
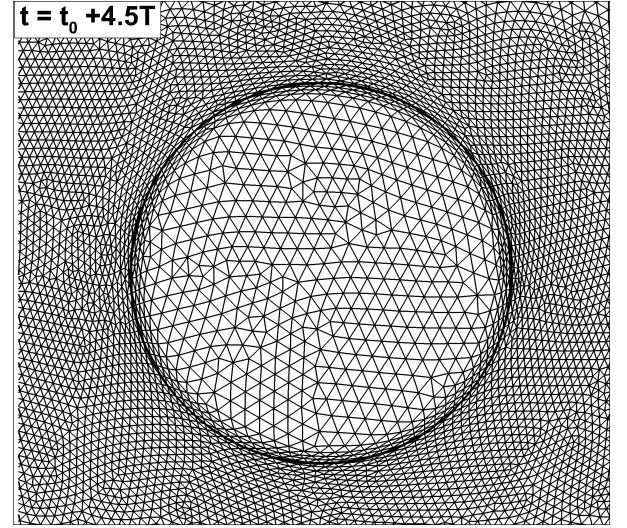
а) на начало периода t_0 б) на $t_0 + 4.5T$

Рисунок 3.4 — Сетка вблизи препятствия на начало периода t_0 и четыре с половиной периода $t_0 + 4.5T$

сгущение точек с внешней и внутренней стороны границы цилиндра и не изменять исходную сетку при удалении от центра цилиндрического препятствия. Этим условиям удовлетворяют функции типа гауссиана с управляющими параметрами

$$\rho r = \begin{cases} A \exp \left[-\frac{\ln 2}{b_1} (r - R)^{n_1} \right] + 1, & r \leq R, \\ A \exp \left[-\frac{\ln 2}{b_2} (r - R)^{n_2} \right] + 1, & r > R. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь амплитуда A и чётные показатели степени n_1, n_2 , определяют величину сгущения, значения полуширины гауссиана b_1, b_2 , задают толщины областей сгущения внутри и вне цилиндра, соответственно. В настоящем расчёте эти параметры полагались равными следующим значениям

$$A = 9, \quad n_1 = n_2 = 4, \quad b_1 = 1.6 \cdot 10^{-7}, \quad b_2 = 0.1 \quad (3.2)$$

Функция (3.1) с параметрами (3.2) трижды непрерывно дифференцируема и её график приведён на рисунке 5.

Из этого графика можно видеть, что наиболее сильная адаптация сетки (уменьшение амплитуды A на 46%) к границе цилиндра наблюдается на расстоянии приблизительно равным $0.08R$ от границы цилиндра во внутренней области и на расстоянии $3R$ во внешней области. На расстояниях больших $3R$ управляющая функция экспоненциально понижается до единицы, что исключает

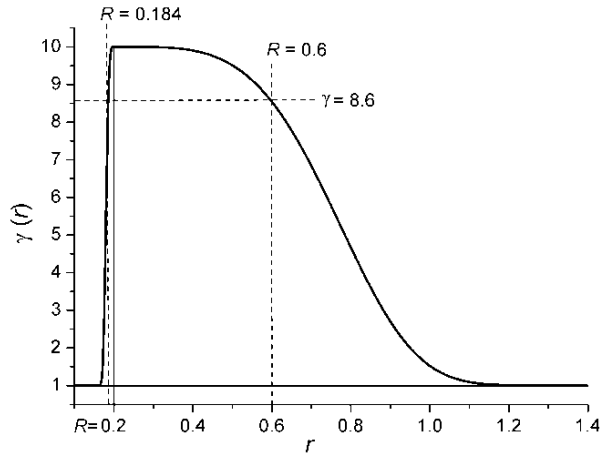


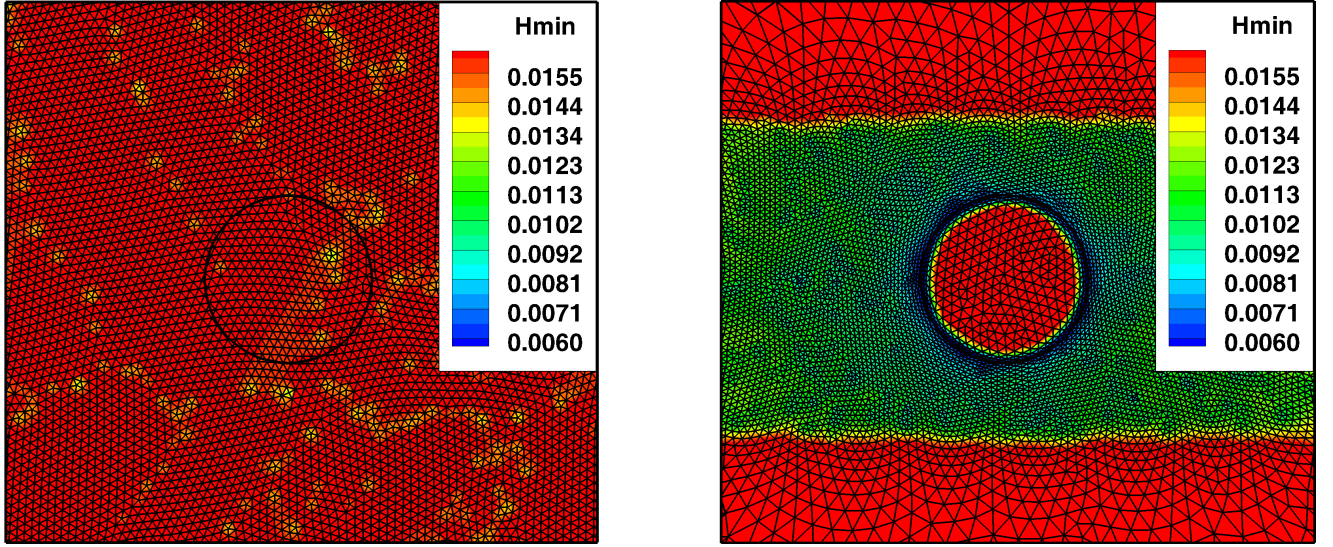
Рисунок 3.5 — График управляющей функции $\rho(r)$

адаптацию сетки вдали от центра цилиндра в направлении движения цилиндра. Такое изменение сетки можно наблюдать на рисунке 3. Из распределения узлов сетки, показанных на рисунке 3.3 видно, что в направлении перпендикулярном движению сетка сильно деформируется. Это явление связано с тем, что число узлов в адаптивной сетке не увеличивается, а в направлении перпендикулярном движению исходная недеформированная сетка 2 (на рисунке 3.3а) имеет меньшую плотность распределения узлов.

Из рисунков 3.3 и 3.4 видно, что адаптация сетки происходит практически однородно и не зависит от положения цилиндра в абсолютной системе координат. То есть фактически можно считать, что деформированная в начальный момент времени сетка перемещается как жёсткая конструкция в направлении движения цилиндра.

Также обратим внимание (см. рисунок 3.4), что при использовании изотропной управляющей функции (зависимость только от радиуса) не приводит к сильной деформации элементов сетки в области движения цилиндрического препятствия и сетка вне узкой окрестности вдоль границы цилиндра близка к квазиравномерной.

В процессе адаптации грубой сетки 2 размер элементов сетки в окрестности границы цилиндра имеет размер в среднем в 2.5 раза меньший, чем размер аналогичных элементов подробной сетки 1. Это можно видеть на рисунке 3.6, где показано распределение минимальных высот треугольников на подробной сетке (рисунок 3.6а) и на грубой сетке после адаптации (рисунок 3.6б).



а) подробная сетка

б) адаптированная грубая сетка

Рисунок 3.6 — Пример распределения минимальных высот треугольников в расчётных сетках: а) подробная сетка (сетка 1), б) адаптированная грубая сетка (сетка 3)

При выполнении расчётов движущегося цилиндра на всех трёх сетках шаг интегрирования по времени выбирался согласно следующему критерию

$$\Delta t = \min(\Delta t_{CFD}, \Delta t_{MOV}) \quad (3.3)$$

где Δt_{CFD} – шаг определяемый устойчивостью разностной схемы и обеспечивающий корректность нестационарного интегрирования, Δt_{MOV} – временной шаг, выбираемый из условия прохождения приграничных ячеек границей цилиндра не менее чем за один шаг при расчёте временного слоя $t_1 = t_0 + \Delta t$.

$$\Delta t_{MOV} < \frac{h_{min}}{|U_B|}. \quad (3.4)$$

Здесь h_{min} минимальный размер приграничного элемента сетки на время t_0 .

Общая картина течения после выполнения расчёта с использованием адаптивной сетки показана на рисунке 3.7, где приведены поля завихренности на различные моменты времени. В таблице 1 приведены средние значения коэффициента сопротивления и числа Струхаля Sh , полученные по результатам этих расчетов на трёх сетках и экспериментальные значения из работы [33]. Число Струхаля Sh определено с помощью преобразования Фурье.

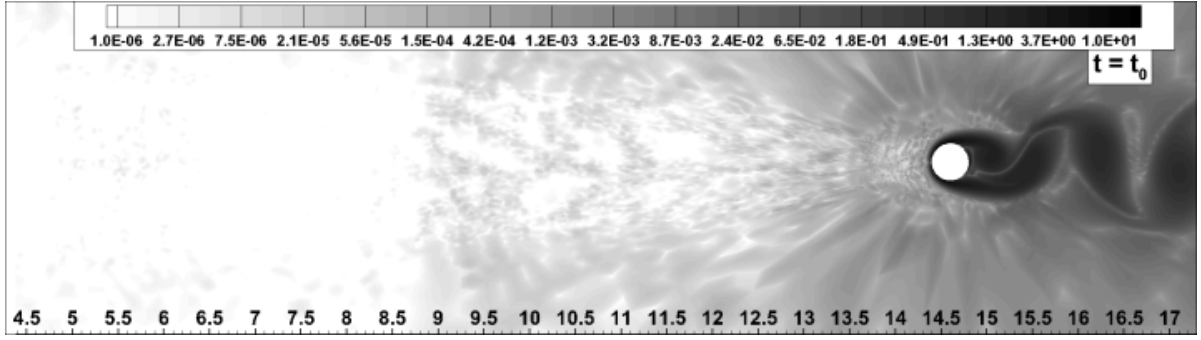
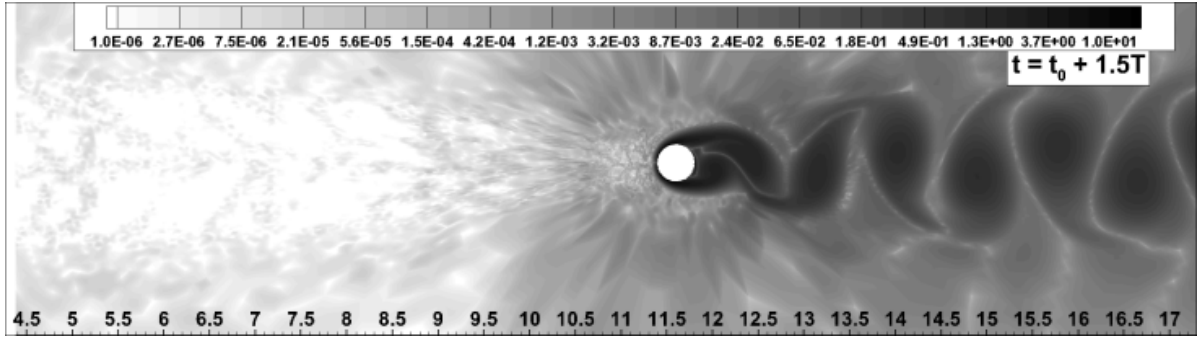
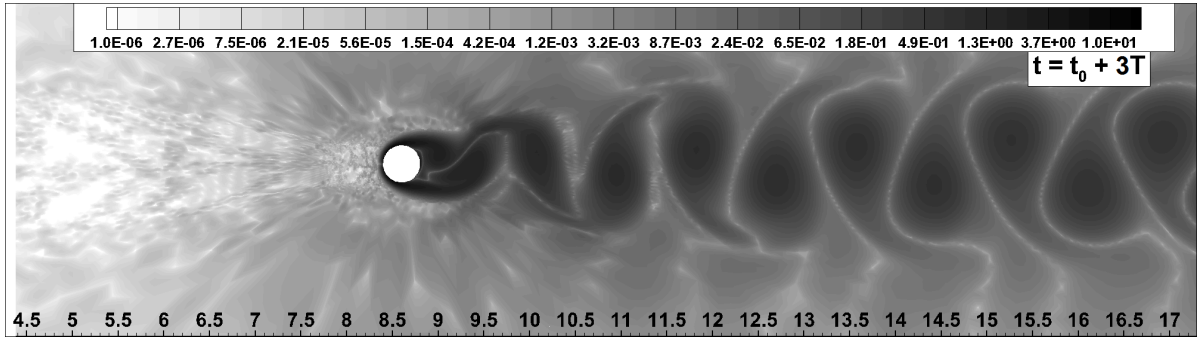
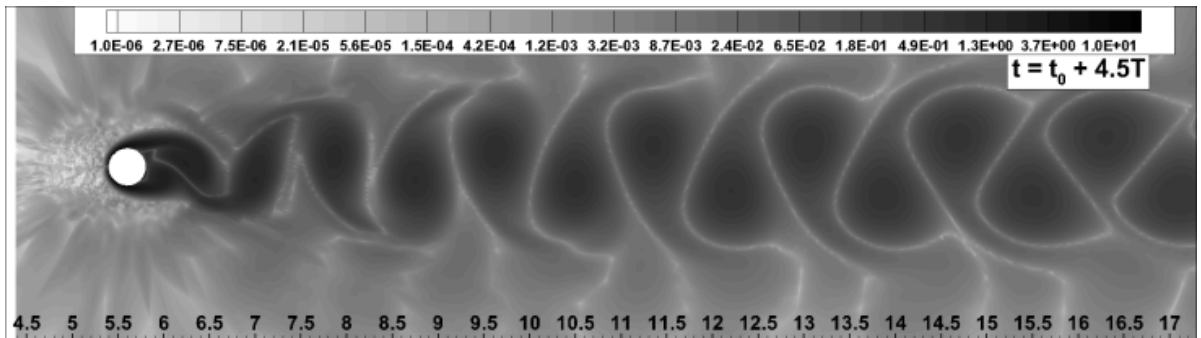
а) начало периода t_0 б) полтора периода $t_0 + 1.5T$ в) три периода $t_0 + 3T$ г) четыре с половиной периода $t_0 + 4.5T$

Рисунок 3.7 — Распределение завихренности на четыре момента времени: а) начало периода t_0 , б) полтора периода $t_0 + 1.5T$, в) три периода $t_0 + 3T$ и г) четыре с половиной периода $t_0 + 4.5T$

Таблица 1 — Средние значения коэффициентов силы сопротивления и число Струхаля, полученные расчётом на разных сетках.

	Эксперимент [33]	сетка 1	сетка 2	сетка 3
Sh	0.19	0.189	0.186	0.191
\overline{C}_d	1.34	1.218	1.118	1.301

Заключение

В работе разработан упрощенный быстрый алгоритм динамической адаптации сетки на основе перераспределения узлов с сохранением сеточной топологии. Этот метод в комплексе с методом погруженных границ для описания твёрдых объектов в односвязной области позволяет эффективное численное исследование движущихся в турбулентных потоках тел. Помимо использования алгоритма адаптации совместно в погруженными граничными условиями, его можно успешно использоваться для решения задач с «традиционным» описанием подвижных тел граничными сеточными узлами при условии не столь больших отклонений от их исходного положения (например, разного рода колебательных движений), а также для адаптации сетки к полям решения.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. На основе анализа существующих методов динамической сеточной адаптации выбран метод адаптации с движением узлов без изменения топологии сетки.
2. Разработан алгоритм динамической адаптации неструктурированной сетки для использования совместно в методе погруженных граничных условий и функции линий уровня, описывающей геометрию твёрдого тела.
3. Алгоритм реализован в рамках некоммерческого исследовательского комплекса программ NOISEtte++, разрабатываемом в отделе вычислительной аэродинамики и аэроакустики ИПМ РАН.
4. Рассмотрена двумерная постановка для треугольных сеток. Проведен численный расчет задаче о моделировании течения за движущимся цилиндром.

К настоящему времени данная технология разработана применительно к решению двумерных задач газовой динамики на треугольных сетках. Результаты, подтверждающие ее эффективность, продемонстрированы на модельных задачах и, в частности, на задаче о моделировании течения за движущимся цилиндром.

В дальнейшем планируется использовать уравнение движения сетки в полной формулировке, а также обобщение разработанной технологии на трёхмерные постановки. Также предполагается работа по усовершенствованию

техники адаптации неструктурированной сетки за счёт улучшения качества адаптивной сетки вблизи погруженной границы обтекаемого тела.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Козубской Т. К. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Бахвалова П. А. и Абалакина И. В. за помощь в работе и обсуждение результатов.

Список литературы

1. Mittal Rajat, Iaccarino Gianluca, Immersed boundary methods // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2005. Jan. T. 37. C. 239–261.
2. Boiron Olivier, Chiavassa Guillaume, Donat Rosa, A high-resolution penalization method for large Mach number flows in the presence of obstacles // *Computers & fluids.* 2009. T. 38, № 3. C. 703–714.
3. Brown-Dymkoski Eric, Kasimov Nurlybek, Vasilyev Oleg V, A characteristic based volume penalization method for general evolution problems applied to compressible viscous flows // *Journal of Computational Physics.* 2014. T. 262. C. 344–357.
4. Abalakin Ilya, Bakhvalov Pavel, Kozubskaya Tatiana, Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // *International journal for numerical methods in fluids.* 2016. T. 81, № 6. C. 331–356.
5. Abalakin I. V., Duben A. P., Zhdanova N. S. [и др.]; Simulating an Unsteady Turbulent Flow around a Cylinder by the Immersed Boundary Method // *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2019. T. 11, № 1. C. 74–85.
6. Numerical Simulation of Slat Noise of High-Lift Devices Using Immersed Boundary Method on Unstructured Meshes / Kozubskaya Tatiana, Abalakin Ilya, Duben Alexey [и др.] // 25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2019. C. 2461.
7. Thompson Joe F., Soni Bharat K., Weatherill Nigel P. Handbook of grid generation. CRC press, 1998.
8. Liseikin V. D. Grid generation methods. Springer Science & Business Media, 2009.
9. Huang Weizhang, Russell Robert D. Adaptive Moving Mesh Methods. New York, NY: Springer New York, 2011. T. 174 из *Applied Mathematical Sciences*.
10. Adjrid S., Flaherty J. E., Moore P. K. [и др.]; High-order adaptive methods for parabolic systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 1992. T. 60, № 1. C. 94–111.

11. Eriksson Kenneth, Johnson Claes, Adaptive finite element methods for parabolic problems I: A linear model problem // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1991. T. 28, № 1. C. 43–77.
12. Babuska Ivo, Suri Manil, The p-and hp versions of the finite element method, an overview // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1990. T. 80, № 1-3. C. 5–26.
13. Baker Timothy J., Mesh adaptation strategies for problems in fluid dynamics // Finite Elements in Analysis and Design. 1997. Apr. T. 25, № 3. C. 243–273.
14. Breslavskii P. V., Mazhukin V. I., Dynamic adaptation method in gasdynamic simulations with nonlinear heat conduction // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. Nov. T. 48, № 11. C. 2102–2115.
15. Methods for the construction of moving grids for problems of fluid dynamics with big deformations / Yanenko N. N., Kroshko E. A., Liseikin V. V. [и др.] // Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics June 28–July 2, 1976 Twente University, Enschede. Springer, 1976. C. 454–459.
16. Winslow Alan M. Adaptive-mesh zoning by the equipotential method: Tech. Rep.: : Lawrence Livermore National Lab., CA (USA), 1981.
17. Brackbill J. U., Saltzman J. S., Adaptive zoning for singular problems in two dimensions // Journal of Computational Physics. 1982. T. 46, № 3. C. 342–368.
18. Dvinsky Arkady S., Adaptive grid generation from harmonic maps on Riemannian manifolds // Journal of Computational Physics. 1991. T. 95, № 2. C. 450–476.
19. Knupp Patrick M., Jacobian-weighted elliptic grid generation // SIAM Journal on Scientific Computing. 1996. T. 17, № 6. C. 1475–1490.
20. Knupp Patrick M., Robidoux Nicolas, A framework for variational grid generation: conditioning the Jacobian matrix with matrix norms // SIAM Journal on Scientific Computing. 2000. T. 21, № 6. C. 2029–2047.
21. Huang Weizhang, Variational mesh adaptation: isotropy and equidistribution // Journal of Computational Physics. 2001. T. 174, № 2. C. 903–924.

22. Huang Weizhang, Kamenski Lennard, Russell Robert D., A comparative numerical study of meshing functionals for variational mesh adaptation // arXiv preprint arXiv:1503.04709. 2015.
23. Huang Weizhang, Ren Yuhe, Russell Robert D., Moving mesh partial differential equations (MMPDES) based on the equidistribution principle // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1994. T. 31, № 3. C. 709–730.
24. Huang Weizhang, Russell Robert D., Moving mesh strategy based on a gradient flow equation for two-dimensional problems // SIAM Journal on Scientific Computing. 1998. T. 20, № 3. C. 998–1015.
25. Huang Weizhang, Russell Robert D., Analysis of moving mesh partial differential equations with spatial smoothing // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1997. T. 34, № 3. C. 1106–1126.
26. Huang Weizhang, Russell Robert D., A high dimensional moving mesh strategy // Applied Numerical Mathematics. 1998. T. 26, № 1. C. 63–76.
27. Huang Weizhang, Practical aspects of formulation and solution of moving mesh partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2001. T. 171, № 2. C. 753–775.
28. Budd Chris J., Huang Weizhang, Russell Robert D., Adaptivity with moving grids // Acta Numerica. 2009. May. T. 18. C. 111.
29. Cao Weiming, Huang Weizhang, Russell Robert D., A study of monitor functions for two-dimensional adaptive mesh generation // SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. T. 20, № 6. C. 1978–1994.
30. Jasak Hrvoje, Tukovic Zeljko, Automatic mesh motion for the unstructured finite volume method // Transactions of FAMENA. 2006. T. 30, № 2. C. 1–20.
31. Tukovic Zeljko, Jasak Hrvoje, A moving mesh finite volume interface tracking method for surface tension dominated interfacial fluid flow // Computers & fluids. 2012. T. 55. C. 70–84.
32. Jasak Hrvoje, Tukovic Zeljko. Dynamic mesh handling in OpenFOAM applied to fluid-structure interaction simulations // Proceedings of the V European

- Conference Computational Fluid Dynamics, Lisbon, Portugal, June. 2010. C. 14–17.
33. Henderson Ronald D, Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition // Journal of Fluid Mechanics. 1997. Т. 352. С. 65–112.
 34. Абалакин И. В., Жданова Н. С., Козубская Т. К., Реализация метода погруженных границ для моделирования задач внешнего обтекания на неструктурированных сетках // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 10. С. 5–20.
 35. Абалакин И. В., Дубень А. П., Жданова Н. С. [и др.]; Моделирование нестационарного турбулентного течения вокруг цилиндра методом погруженных границ // Математическое моделирование. 2018. Т. 30, № 5. С. 117–133.
 36. Hirt Cyrill W, Amsden Anthony A, Cook JL, An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds // Journal of computational physics. 1974. Т. 14, № 3. С. 227–253.
 37. Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П., Вариационный принцип получения уравнений магнитной гидродинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1981. Т. 21, № 2. С. 409–422.
 38. Будаг Б. М., Фомин С. В., Кратные интегралы и ряды. 2002.

Список публикаций

1. Моделирование аэродинамики движущихся тел с использованием сеточной адаптации к погруженным границам на неструктурированных треугольных сетках / Абалакин И. В., Бахвалов П. А., Доронина О. А. et al. // Сборник тезисов. — г. Светлогорск Калининградской обл.: 2016.
2. Абалакин И. В., Бахвалов П. А., Доронина О. А. et al.; Моделирование аэродинамики движущегося тела, заданного погруженными границами на динамически адаптивной неструктурированной сетке // Матем. моделирование. — 2018. — Vol. 30, no. 5. — Pp. 57–75.
3. Abalakin I. V., Bahvalov P. A., Doronina O. A. et al.; Simulating Aerodynamics of a Moving Body Specified by Immersed Boundaries on Dynamically Adaptive Unstructured Meshes // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2019. — Vol. 11, no. 1. — Pp. 35–45.

Приложение А

Математическое описание аэродинамики движущихся тел на основе метода погруженных границ на подвижной сетке

Для описания движущихся тел в качестве наиболее удобного подхода все большее распространение приобретают методы погруженных границ (в англоязычной научной литературе – Immersed Boundary Conditions или IBC метод) [1–3]. Методы погруженных границ составляют целый класс методов, позволяющих обеспечить выполнение граничных условий на поверхности обтекаемых тел в процессе численного расчёта без описания ее геометрии сеточными узлами. Это означает, что может быть использована «сплошная» расчётная сетка, покрывающая всю область определения задачи, включая препятствие.

Взаимодействие твёрдого тела и окружающей среды при этом может моделироваться несколькими способами. Один из них – это модификация дискретизированных газодинамических уравнений, основанная на геометрическом анализе пространственного расположения используемого разностного шаблона относительно границы твёрдого тела. Другой способ заключается во введении штрафных функций непосредственно в исходные уравнения. Они добавляются в виде источниковых членов и имеют ненулевое значение только в узлах расчётной сетки, находящихся внутри твёрдого тела.

Применение погруженных граничных условий заметно упрощает воспроизведение движения тел даже, если они имеют сложную геометрическую форму. Так, при использовании штрафных функций, изменение пространственного положения обтекаемого тела на каждом временном шаге сводится лишь к изменению источниковых членов в решаемых уравнениях, а не к ресурсоемкому перестроению расчётной сетки, требуемому при описании границы сеточными узлами.

A.1 Математическая модель для неподвижных сеток

Следуя методу Бринкмана штрафных функций, система уравнений Навье-Стокса, описывающая течение в области Ω_f вокруг твёрдого тела Ω_B с границей $\partial\Omega_B$, модифицируется следующим образом [1, 2]:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_t + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) + S_\eta = \nabla \cdot \mathbf{F}_v(\nabla \mathbf{Q}), & (\mathbf{x}, t) \in \Omega_f \cup \Omega_B \cup \partial\Omega_B \\ \mathbf{Q}(t = 0) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{x}) \\ S_\eta = \eta^{-1} \chi(0, \rho(\mathbf{u} - \mathbf{U}_B), E) \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

где $\mathbf{Q} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E)$ – вектор безразмерных консервативных переменных, \mathbf{F} и \mathbf{F}_v – конвективные и вязкие потоки, ρ – плотность газа, \mathbf{u} – вектор скорости, \mathbf{U}_B – скорость движения твёрдого тела, E – полная энергия. Система замыкается уравнением состояния идеального газа: $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, где ε – внутренняя энергия, $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты, а полная энергия определяется соотношением: $E = \rho\varepsilon + \rho \mathbf{u}^2/2$.

Характеристическая функция χ определяет геометрическое место обтекаемого тела:

$$\chi = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_B \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_f \end{cases}. \quad (\text{A.2})$$

Как видно из (A.1), источниковые члены S_η , называемые штрафными функциями, добавляются только в уравнения импульса и энергии. В точках сетки, где характеристическая функция $\chi \neq 0$ (т.е. внутри препятствия), система трансформируется в модель Бринкмана пористой среды с параметром η , определяющим ее проницаемость: $0 < \eta \ll 1$: чем меньше коэффициент η , тем точнее воспроизводятся граничные условия при $\mathbf{x} \in \partial\Omega_B$.

В работе [34] возможности данного метода были продемонстрированы на примере решения двумерных модельных задач по расчёту дозвукового и сверхзвукового течения вокруг цилиндра. Работа [35] демонстрирует численное решение задачи турбулентного обтекания трёхмерного цилиндра. Для численного решения системы уравнений (A.1) использовалась оригинальная EBR (Edge-Based Reconstruction) схема повышенной точности, основанная на квазиодномерной рёберно-ориентированной реконструкции переменных [4].

А.2 Математическая модель для подвижных сеток

Для описания течения на движущихся адаптивных (деформируемых) сетках использовался смешанный эйлерово-лагранжев (СЭЛ) подход [36, 37] использования уравнений газовой динамики, как законов сохранения. Этот подход можно интерпретировать как промежуточное описание движения сплошной среды между эйлеровым подходом, использующим абсолютную систему координат и лагранжевым описанием, использующим систему координат, связанную с локальной скоростью движения среды. То есть выбирается такая система координат, которая не фиксирована по времени и не перемещается со скоростью среды.

Рассмотрим систему координат, движущуюся со скоростью $\dot{\mathbf{x}}$, равной скорости деформации сетки \mathbf{U}_M . Рассмотрим интеграл от вектора консервативных производных по произвольному жидкому объёму $V(t)$. Тогда полная производная от жидкого объёма запишется следующим образом [38], с.259]

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{Q} dV = \int_{V(t)} [\mathbf{Q}_t + \nabla \cdot (\mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}})] dV. \quad (\text{A.3})$$

Из законов сохранения (A.1) следует, что $\mathbf{Q}_t = -\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - S_\eta + \nabla \cdot \mathbf{F}_v(\nabla \mathbf{Q})$. Подставляя частную производную по времени в (A.3) получаем систему законов сохранения в СЭЛ форме

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{Q} dV = - \int_{V(t)} [\nabla \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}}) - \nabla \cdot \mathbf{F}_v(\nabla \mathbf{Q}) + S_\eta] dV. \quad (\text{A.4})$$

При заданном законе движения сетки $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{U}_M$ система законов сохранения (A.4) определяет математическую модель необходимую для проведения расчётов на адаптивной сетке с использованием метода погруженных границ. Заметим, что при $\dot{\mathbf{x}} = 0$ система (A.4) имеет эйлеровскую форму представления законов сохранения, а при $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$ – систему законов сохранения в лагранжевой форме.

А.3 Технология расчета системы газодинамических уравнений в СЭЛ форме на движущихся сетках с неизменной топологией для треугольной сетки

Кратко разработанную технологию можно представить для решения системы (А.4) следующим образом. Для простоты дальнейших выкладок определим вязко-невязкий поток $\mathbf{F}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \mathbf{F}_v(\nabla \mathbf{Q})$ и положим равным нулю источниковый член (для дальнейших выкладок он не имеет принципиального значения). Для аппроксимации системы законов сохранения (А.4) будем использовать конечно-объёмный подход, который в равной степени применим как к статическим сеткам, так и к меняющимся по любому непрерывному закону. Определим переменные в узлах неструктурированной сетки и будем рассматривать жидкий контрольный объём $V(t)$ в системе (А.4) как i -ую деформируемую сеточную ячейку $K_i(t)$, являющуюся контрольным объёмом, построенным вокруг узла i . Тогда для записи конечно-объёмной схемы для системы (А.4) заменим в правой части этой системы интегрирование по объёму интегрированием по поверхности $\partial K_i(t)$. Получаем

$$\frac{d}{dt} \iint_{K_i(t)} \mathbf{Q} dV + - \int_{\partial K_i(t)} \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\partial K_i(t)} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_M \cdot \mathbf{n}) dS = 0, \quad (\text{А.5})$$

где \mathbf{n} – нормаль к границе ячейки. Таким образом, интегральное уравнение, а, следовательно, и конечно-объёмная разностная схема приобретает дополнительное слагаемое, пропорциональное скорости движения граней сеточных ячеек.

При аппроксимации уравнений Эйлера или Навье-Стокса на движущихся неструктурированных сетках принципиально важным является одновременное обеспечение консервативности (выполнения законов сохранения) и геометрической консервативности (точной передачи однородного потока). Консервативность метода обеспечивается благодаря строгому следованию конечно-объёмному подходу. Для геометрической консервативности аппроксимация уравнения (А.5) должна быть точной, если \mathbf{Q} не зависит от координат и времени. Второе слагаемое при этом зануляется, поэтому рассмотрим аппроксимацию третьего слагаемого. Она осуществляется по-разному при применении явных и неявных схем для интегрирования разностного уравнения (А.5).

В случае многостадийной явной схемы (схемы Рунге-Кутты) необходимо на каждом временном подслое аппроксимировать последнее слагаемое в (A.5) так, чтобы при $\mathbf{Q} = \text{const}$ аппроксимация оказывалась точной. Для этого будем использовать следующую аппроксимацию на грани двух контрольных объёмов с центрами в точках R и L ($\partial K_L(t) \cap \partial K_R(t)$):

$$\int_{\partial K_i(t)} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_M \cdot \mathbf{n}) dS \approx \frac{\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_R}{2} \int_{\partial K_L(t) \cap \partial K_R(t)} \mathbf{U}_M \cdot \mathbf{n} dS, \quad (\text{A.6})$$

а оставшийся интеграл в правой части считать точно на каждый момент времени. В разработанной технологии в течение одного временного шага скорость движения сеточных узлов предполагается постоянной. Если $K_i(t)$ есть барицентрический¹ контрольный объём, то радиус-вектор каждой вершины этого объёма является линейной комбинацией радиус-векторов сеточных узлов. В результате средняя скорость по каждой грани сеточной ячейки также является постоянной в пределах шага, а интеграл в правой части (A.5) за счёт изменения площадей граней – линейной функцией времени. Величины контрольных объёмов, следовательно, являются квадратичной функцией. Поэтому, чтобы выполнялась геометрическая консервативность в (A.5), необходимо использовать метод Рунге-Кутты не ниже 2-го порядка.

Для записи неявного метода Эйлера проинтегрируем (A.5) по времени. Получаем

$$\iint_{K_i(t^{n+1})} \mathbf{Q} dV - \iint_{K_i(t^n)} \mathbf{Q} dV + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial K_i(t)} \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial K_i(t)} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_M \cdot \mathbf{n}) dS = 0, \quad (\text{A.7})$$

Чтобы аппроксимация была точной при $\mathbf{Q} = \text{const}$, запишем для третьего слагаемого в (A.5) аппроксимацию

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial K_i(t)} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_M \cdot \mathbf{n}) dS \approx \frac{\mathbf{Q}_L^{n+1} + \mathbf{Q}_R^{n+1}}{2} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial K_L(t) \cap \partial K_R(t)} \mathbf{U}_M \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{A.8})$$

Интеграл в правой части также вычисляется аналитически.

¹Под барицентрическим контрольным объёмом для треугольной сетки понимается многогранник, границей которого, является ломаная соединяющая центры рёбер и центры тяжести треугольников.

Аппроксимация второго слагаемого в (A.5) для конвективной части системы уравнений Навье-Стокса осуществляется при помощи схем с квазиодномерной реконструкцией переменных, как и в случае недеформируемой сетки. Они основаны на том, что повышение порядка точности осуществляется посредством квазиодномерной рёберно-ориентированной реконструкции значений физических переменных в центр ребра [4]. Коэффициенты реконструкции можно брать с недеформированной сетки или пересчитывать на каждом временном слое.

Аппроксимация вязких членов в уравнении Навье-Стокса проводится методом Галёркина на основе полиномов 1-го порядка как в случае покоящейся, так и в случае движущейся сетки и не требует внесения изменений.