Домашняя работа 1. Оценка погрешностей.

1.

Решение *Хотим, чтобы остаток ряда был не больше* $\epsilon = 10^{-6}$.

Оценим остаток ряда через интеграл (будем считать, что n *достаточно большое, и* $n^2 > n + z$*).*

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k - z} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x - z}$$

$$\frac{1}{x^2 - x - z} = (\frac{1}{x - x_2} - \frac{1}{x - x_1}) \cdot A,$$

где $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4z}}{2}$, $A = \frac{1}{\sqrt{1+4z}}$.

$$\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x - z} = A(\ln(x - x_2) - \ln(x - x_1)) \Big|_n^{\infty} = A \ln \frac{x - x_2}{x - x_1} \Big|_n^{\infty} = A \ln \frac{n - x_1}{n - x_2}$$

Нам надо подобрать такое n*, чтобы это выражение было меньше* ϵ*. Для того, чтобы оценить это* n *точно, можно использовать бинпоиск.*

Теперь мы хотим посчитать с помощью ускорения. Возьмём ряд $\frac{1}{k(k-1)}$ *для* $k \geq 2$*. Его сумма 1.*

Если рассмотреть разность рядов, то получим $\sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2-k-z} = -\frac{1}{z} + \sum_2^{\infty} \frac{1}{k^2-k-z} = -\frac{1}{z} + \sum_2^{\infty} (\frac{1}{k^2-k-z} - \frac{1}{k^2-k}) + 1 = 1 - \frac{1}{z} + z \sum_2^{\infty} (\frac{1}{(k^2-k-z)k(k-1)})$

Теперь нам снова надо оценить интеграл $\frac{1}{(k^2-k-z)k(k-1)}$*. Скажем, что если мы уменьшим знаменатель, то интеграл только увеличится, и оценим его, как* $\frac{1}{(k-1)^4}$ *(выберем такое* z*, чтобы эта оценка выполнялась).*

$$\int_n^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^4} = -\frac{1}{3(x-1)^3} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{3(n-1)^3}.$$

В таком случае, $\frac{z}{3(n-1)^3} \approx \epsilon$*, то есть* $n \approx \sqrt[3]{\frac{z}{3\epsilon}} + 1$.

(Первую часть можно сделать также: оценить каждое слагаемое, начиная с какого-то места, как $\frac{1}{(k-1)^2}$*, посчитать интеграл, начиная с* n*, он будет равен* $\frac{1}{(n-1)}$*, а дальше* $\frac{1}{(n-1)} = \epsilon$*, то есть* $n \approx \frac{1}{\epsilon} + 1$*. Так как это работает в разы быстрее, то в коде сделано так).*

2.

Решение

$$s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} z^k$$

Посмотрим на отношение соседних элементов этого ряда.

$$\frac{z^{k+1}/(2k+1)}{z^k/(2k-1)} \to z$$