

Nota de Apresentação

S. Varela Sousa
(CFCUL)
sfsousa@fc.ul.pt

Considerações muito breves sobre os *Espaços* e as *Hipóteses*

Talvez sejam raras as ocasiões em que a investigação matemática e a indagação filosófica tenham entrado numa intimidade tão seminal como na prova¹ que o matemático alemão Bernhard Riemann prestou perante a Faculdade de Filosofia de Göttingen em Junho de 1854, intitulada *Sobre as Hipóteses nas Quais a Geometria se Fundamenta*. Não se trata apenas de um problema matemático com implicações metafísicas delicadas: são muitos os problemas matemáticos que as implicam; trata-se sim, de um problema matemático cuja abordagem revela, da parte de Riemann, uma metodologia de orientação filosófica intensa, quase inédita, à qual acresce o especial momento em que surge, o meado de um século no qual a geometria sofre o seu mais violento abalo, para imediatamente frutificar numa reconstrução que ampliou as suas fronteiras para lá de qualquer horizonte que os anteriores séculos de pensamento pudessem ter mirado.

Esse problema pode talvez apresentar-se através da pergunta: como determinar matematicamente o Espaço? Riemann direciona a sua investigação para a geometria e, como é natural, este problema de determinar o espaço diz respeito ao *espaço geométrico*. Pensou então o problema em dois momentos: no primeiro, procurando as propriedades *métricas*, e dentro destas, as *intrínsecas*, que definiriam esse espaço; no segundo momento, e porventura motivado pelas reflexões resultantes do primeiro, fez um movimento de grande beleza, interrogando-se sobre o que seria afinal este espaço geométrico, e que consequências teria a sua forma para o estudo da Natureza:

¹ Embora se trate de uma *dissertação* escrita para o efeito de prova académica, pela originalidade do tratamento que trouxe ao tema e pelo método inaugural que apresentou, referiremos frequentemente a *Über die Hypothesen...* como *lição*.

encontrando-se perante um problema espinhoso, compreendeu que além do problema da definição, era necessário encontrar instrumentos conceptuais que o pudessem auxiliar na tarefa de dominar um tal enigma, justamente, o da natureza do *Espaço* (aqui já não sendo tomado pelo espaço geométrico, mas pelo receptáculo mais geral onde é inscrito o espaço geométrico – primeiro, aquele que as «hipóteses» ou «sistemas de factos» de Euclides consagraram, e depois outros espaços que *outras* hipóteses poderiam talvez constituir)².

Enigma (ou «obscuridade», como Riemann preferiu chamar-lhe), que nem os matemáticos nem os filósofos tinham clareado: o leitor confirmará, logo no parágrafo que abre a dissertação, como Riemann começa por afirmar que sobre o Espaço os geómetras na verdade nada sabem. Sabem sem dúvida operar com «princípios fundamentais» que nele permitem construir, e postulam, sobre a forma de axiomas, as «determinações fundamentais» subjacentes a esses princípios. Porém, o exame que permitiria demonstrar a validade dessas construções, nunca foi suficientemente levado a cabo. Obscuridade agudizada, em boa parte, desde que, na sua *Estética Transcendental*, Immanuel Kant tinha prescrito ao Espaço uma natureza *apriorística*, sediada nas predisposições cognitivas intrínsecas ao *sujeito*, e portanto confinadas a um constrangimento: enquanto *intuição pura*, o Espaço encerrava-se na condição de uma idealidade constitutiva do próprio espírito humano, e da qual era, do ponto de vista humano, impossível sair. Esta concepção kantiana, ainda que determinando os limites da percepção subjectiva, acarretava porém uma dificuldade acrescida: Kant assumia que o espaço, como intuição pura, tinha o seu «protótipo» na geometria euclidiana (não será inteiramente fortuito que, no parágrafo já referido, Riemann questione a «necessidade» da «relação dos pressupostos» de construção geométrica ser «*a priori*»). Esta concepção não podia servir a Riemann; dito de maneira imperfeita: ao espaço subjectivo, de ordem transcendental, faltava contrapor o espaço objectivo, independente do sujeito e das suas condições perceptivas. Acontece que fora dos limites do conhecimento transcendental, Kant tinha dado passos temerosos (incluindo na doutrina do Espaço), detidos pela sua convicção acerca da impossibilidade de pensar a coisa-em-si.

Sem verdadeiramente se opor a Kant – até porque, em rigor, trataram problemas diferentes –, mas seguindo as hesitações de Johann Herbart, seu mestre em

² Nas muitas vezes em que fala de *espaço* na sua dissertação, Riemann refere-se sempre ao espaço físico. Este espaço físico aceita, ou melhor, pode ser descrito, por outros espaços, estes matemáticos. A oposição entre Espaço físico e espaços geométricos, nem sempre parece clara no texto de Riemann, mas com efeito é: se por um lado fala do *espaço* (físico), por outro, o matemático está interessado, dentro do quadro deste espaço, nos espaços geométricos (de ordem matemática, abstracta), para os quais cria uma nova aparelhagem conceptual: passam a ser designados por *grandezas* (ou *variedades*) *extensivas*, que podem possuir *n-dimensões*, cuja principal particularidade, a qual também as distingue entre si, é a de possuírem *superfícies* caracterizáveis pela *medida da sua curvatura*.

Filosofia, acerca da idealidade do Espaço, Riemann interessou-se justamente por essa dificuldade em apreender o Espaço na sua autonomia própria, como ideia, como conceito e como realidade, desapegado de qualquer ponto de vista ou concepção sistemática. E, ao subtrair a noção de Espaço aos limites constitutivos do espírito humano, Riemann restabelecia as condições para dar tratamento a esta noção, com a particular abstracção que convinha à ciência matemática.

Em causa estará, por um lado, a suposta *necessidade* da geometria euclidiana, por outro, a sua *legitimidade*, digamos, exclusiva, para descrever o espaço físico.

Quando se diz que dos três grandes reformadores da geometria no séc. XIX, a saber, Lobatchevski, Bolyai e Riemann, este último foi o mais profundo dos pensadores, eis o que se quer implicar: enquanto Lobatchevski e Bolyai reformaram a geometria porque “brincaram” com as regras da geometria euclidiana e concluíram que a brecha nessas regras, se desenvolvida, produzia outros sistemas, novos e paralelos – porém sempre dentro da esquadria de sistemas geométricos, quer do euclidiano, quer do novo – Riemann, por sua vez, interrogou a universalidade, o elemento comum, a qualquer sistema geométrico através de um desvio pelas considerações sobre a natureza da geometria tomada na máxima generalidade possível; ou, melhor ainda, pela definição das determinações de diferentes espaços geométricos que o Espaço poderia, matematicamente, admitir. Riemann parte para a lição tendo já abandonado o pressuposto da exclusividade euclidiana – ele próprio o dirá: «impõe-se a tarefa de descobrir os mais simples factos a partir dos quais as relações métricas do espaço se deixam determinar [...] pois talvez haja vários sistemas de factos, os quais são suficientes para determinar as relações métricas do espaço» (1854, *Plano da Investigação*). Claro que imediatamente acrescenta que o sistema de factos mais importante será sem dúvida o de Euclides (Riemann não podia deitar fora nem a história nem mesmo a praxis da geometria, que de resto é o referencial fundamental para compreender a sua investigação geométrica; além disso, em lado nenhum ele põe em causa uma maior «comodidade» – tomando aqui de empréstimo o termo de Poincaré – da geometria euclidiana). Porém, bem podemos procurar com afinco, na lição de 1854, as questões que Riemann lança à geometria euclidiana: não são nenhuma. O matemático não faz sentar Euclides no banco dos réus. Todas as suas questões são dirigidas aos problemas da métrica (das relações métricas) num espaço geométrico, interrogando que relações determinantes delas se podem extrair – em particular, do ponto de vista da *análise* (recolocando o problema de determinar a distância entre dois pontos infinitamente próximos) –, e contemplando as consequências que delas resultam, nomeadamente, os vários sistemas geométricos, ou, nas palavras de Riemann, os vários sistemas de «factos».

E afinal, de que se fala quando se fala de Espaço? Que Espaço é este que Riemann aprofunda? Sem dúvida que é um espaço matemático, diferente por exemplo do espaço da experiência. Mas esse espaço matemático não é o que resulta da manipulação dos elementos da geometria euclidiana? Para Riemann já não; ou melhor, não só. Se se atentar detidamente no espaço matemático, autonomamente, procurando sair para fora da esquadria euclidiana, verifica-se que o caso descrito por essa geometria talvez configure apenas um determinado comportamento dos elementos, baseado em duas pressuposições, ou «factos», ou «hipóteses» fundamentais: por um lado, que a superfície deste espaço não é *curva*, ou que pelo menos a sua curvatura é igual a zero; por outro lado, que ele se restringe a um regime *tridimensional*. Porém, se o Espaço for pensado abstractamente, nenhum facto parece tornar *necessário* que a sua curvatura seja zero, nem que possua apenas três dimensões.

Estas objecções, que agora – e hoje – se levantam tão expeditamente, constituíram para Riemann, *e com ele*, uma pequena revolução. Por um lado, porque são duas simples questões que, uma vez levantadas, imediatamente problematizam o estatuto da geometria euclidiana³; por outro lado porque, para serem férteis, é preciso operacionalizá-las, portanto, criar instrumentos de análise que permitam converter duas questões interessantes em ferramentas efectivas de investigação. Riemann conseguiu, na sua lição, dar conta dos dois aspectos: quanto ao estatuto da geometria euclidiana, surpreendendo-la, no final da lição, reposicionada ao nível de uma hipótese matemática essencialmente fundada nos hábitos da experiência humana, a qual, porém, talvez colapse quando se ultrapassam os limites dessa experiência, passando para o território do desmedidamente grande ou do desmedidamente pequeno – magnífico problema que Riemann apenas sugere; quanto aos instrumentos matemáticos de análise, Riemann vai inventá-los – é disso que se ocupa a segunda secção da lição – sendo certo que, dada a complexidade da tarefa, não é tratada em toda a sua extensão pelo matemático, apenas o suficiente para que as *hipóteses* de Riemann pudessem esboçar o programa *das geometrias*. É certo que o leitor encontrará Riemann sempre empenhado em edificar as hipóteses que lhe permitem construir uma geometria específica, a geometria da esfera a três dimensões. Mas, ao fazê-lo, Riemann está simultaneamente a dar a chave para edificar outras geometrias.

³ O estatuto, e não tanto a *consistência*. Ainda que seja efectivamente a *consistência* do sistema geométrico euclidiano que Riemann põe em causa logo no precioso parágrafo introdutório da Lição, pois quando menciona «os princípios fundamentais para construir no espaço» (Riemann, 1854 I.1), só pode estar a referir-se aos teoremas da geometria euclidiana. Ferreirós, num pequenino texto que só citarei aqui, afirma mesmo que «esta questão da consistência é, na história da matemática, posta por escrito pela primeira vez [neste parágrafo]» (Ferreirós, José, *The Magic Triangle: Mathematics, Physics and Philosophy in Riemann's Geometrical Work*, nota 8, p. 4:

(http://semioweb.msh-paris.fr/f2ds/docs/geo_2004/Jose_Ferreiro_2.pdf).

Aí jaz boa parte da profundidade da sua investigação, justamente, e como dissemos, por causa do método riemanniano.

Dando conta da nossa manifesta impotência para tratar a segunda secção da lição (de cariz matemático extremamente complexo e sobre a qual diversas gerações de matemáticos se debruçaram, a fim de inteiramente determinar o plano aludido por Riemann), enunciaremos apenas, numa espécie de elenco, o programa conceptual deste matemático. Reflectindo sobre o problema da construção matemática de um espaço, a sua estratégia heurística conduziu-o, por um lado, ao desenvolvimento da noção de *curvatura da superfície* que Gauss, seu mestre e orientador, tinha anos antes trabalhado, ainda que no quadro da geometria euclidiana; por outro lado, ao desenvolvimento de um dos conceitos mais poderosos da matemática, e que na prática viria mesmo a estruturar o desenvolvimento da topologia: o de *variedade*. Toda a dificuldade estava aqui: eram dores de parto, pois havia conceitos novos a forjar, cuja operatividade e consequências estavam ainda para descobrir. Quando, na primeira secção do texto, Riemann se desculpa pelas suas eventuais trapalhices enquanto matemático que, posto na posição de filósofo, se vê constrangido a construir novas ferramentas conceptuais, a sua dificuldade, mais do que filosófica (*definir* e *determinar*) é a de operacionalizar, de entregar à matemática as candeias que permitam iluminar o Espaço por onde ela procedia às escuras. Nomeadamente, pôr em mútuo acordo os conceitos de *medida de curvatura* e o de *grandezas de múltipla extensão*, da qual a *variedade* é a noção sumamente geral (nomeadamente, o problema de encontrar a expressão relacional geral que exprima a medida de curvatura em variedades extensivas a n -dimensões). A noção matemática de *variedade* vai permitir a Riemann conceber espaços geométricos com quantas dimensões se desejar, sendo aqui a variedade apresentada como o trajecto que um *ponto* inscrito nesse plano geométrico pode descrever, em função da curvatura da superfície dessa variedade e das transições que esse ponto pode efectuar entre diferentes extensões da variedade (por *extensão*, parece-nos que Riemann significa literalmente, *dimensão*), preservando as suas *determinações específicas*: o sistema das transições possíveis determina o número de dimensões da variedade. O projecto de Riemann é o de reduzir a determinação da posição do ponto a um número específico (finito) de determinações de grandeza (determinações métricas), as quais definem então, não só a posição do ponto, mas a própria variedade. Trata-se, portanto, como dirá ao início da secção II, de «investigar as relações métricas de que uma tal variedade é passível, e das condições suficientes para determiná-las» (adaptámos ligeiramente a citação). Isto, segundo Riemann, definirá qualquer espaço geométrico.

Os momentos fundamentais do raciocínio são os seguintes: primeiro, que para determinações métricas, o *comprimento* de uma linha deve ser independente da

posição desta, e que portanto, uma linha é mensurável a partir de qualquer outra linha – o problema passa, então, por estabelecer a expressão matemática que dê conta do comprimento das linhas; em seguida, desenvolvendo a função que lhe permite obter essa determinação, Riemann descobre que o espaço geométrico euclidiano traduz um caso específico do comportamento dessa função, a saber, que a posição dos pontos é dada dentro de um sistema de coordenadas rectilíneas – este, diz, é o «caso mais simples», o do «Plano» e do «Espaço», ao qual chamará de *variedades «planas»* (II.1). Porém, eis que surge a grande dificuldade técnica do projecto geométrico de Riemann: «para que se conheçam todas as diferenças fundamentais com a forma representável pressuposta na variedade, é necessário *eliminar as dificuldades que emanam do modo como a representamos*» (*id.*). Riemann depara-se agora com um problema de expressão de um raciocínio novo e para o qual não há precedente na linguagem técnica da ciência matemática. A dificuldade está, em boa parte, em exprimir adequadamente e correctamente uma ideia geométrica, ou melhor, uma intuição geométrica, naquele sentido de um vislumbre iluminador. Assim, continuando, e porque Riemann está interessado em ir além do caso das variedades planas, interessa-lhe saber definir a medida da curvatura de uma variedade, operação que realiza, partindo dos estudos de Gauss, mas elevando-os à generalização da relação entre a determinação da direcção de uma linha à superfície e o seu desvio em relação à planura (Riemann desenvolve esta relação, que aqui apenas indicamos). É então que descobre que, no caso que lhe interessa, o caso da variedade a n -dimensões, se em cada ponto dessa linha for dada a medida da curvatura da superfície, então todas as relações métricas da variedade, em todas as suas dimensões, daí podem ser deduzidas, «de modo inteiramente independente da escolha da grandeza variável» (II.2). Ou seja, e para o caso da *geometria riemanniana* (esta geometria da qual Riemann está a dar um espécime, mas que, por ser concebida sempre na máxima generalidade admissível, é, no espírito da própria lição, um caso a partir do qual outros casos podem ser deduzidos), a superfície de uma variedade fica inteiramente determinada quando se estendem todas as linhas mais curtas possíveis nessa superfície (os seus geodésicos), numa direcção dada, conhecendo a medida da curvatura em cada ponto dessas linhas: «é através da curvatura que as relações métricas da variedade são completamente determinadas» (II.4). Riemann comprehende que o caso da superfície com curvatura positiva constante é o da esfera, e usa, em tom de prova, o facto de esta curvatura intrínseca permitir converter, ou não, diferentes superfícies num plano: o cilindro, desdobrando-se, pode ser convertido numa superfície plana; já a esfera só o permite se forem forçadas distensões.

Neste esforço de determinação, embora esteja claramente a construir a geometria esférica a três-dimensões, por não ter prescindido da máxima generalidade,

portanto, porque as suas concepções admitem outras *hipóteses* que não a desse caso específico, o matemático vai ao encontro de um *Espaço* que, agora pensado fora dos limites da esquadria euclidiana, é desdobrável num vasto sistema de espaços geométricos possíveis, aos quais a intuição está talvez vedada, mas onde a matemática pode penetrar, através da razão e da imaginação, liberta dos seus dois maiores antagonismos, inconsistência e contradição. Uma penetração matemática que deixa Riemann extasiado ao ponto de entrever nela as mais importantes consequências para a Física (as quais, como sabemos, a história viria a favorecer, através do desenvolvimento da Teoria da Relatividade), e para a compreensão da própria natureza do real. Dada, porém, a dificuldade do tema, e mesmo a dificuldade em pensar o quadro geral desse Espaço para o qual abriu uma porta muito larga, Riemann preferiu remeter-se à humildade própria de quem abre caminhos, antecipando apenas a hipótese de que um dia possam fazer parte de estradas mais compridas.

A terceira secção é, se nos for permitido, de uma prodigiosa beleza, que rima com a sua incompletude: distinguindo entre *ilimitação* e *infinitude*, sem dúvida tomando partido das ideias sobre a superfície esférica (ilimitada, mas finita) e sobre a superfície plana (ilimitada e infinita), Riemann preocupa-se seriamente com a natureza real da geometria, quando aplicada ao espaço físico, pois do seu conhecimento depende também qualquer penetração no desmedidamente grande e no desmedidamente pequeno – fora da escala intuitiva da experiência humana. Só conhecendo, em profundidade, as relações métricas que a geometria admite é possível conhecer a estrutura mais íntima dos fenómenos infinitamente pequenos, dos quais depende o fundamental conhecimento da realidade.

Caso notável, onde o génio matemático se vê aliado a um profundo detalhe e detenção filosóficos, e a um raciocínio que, ainda que elíptico, vê os seus passos fundados numa atenção escrupulosa à matéria em estudo, à delicada construção e depuração de cada conceito. Uma reactualização da relação profunda entre a estrutura do *kosmos*, universo físico harmónico, e a estrutura do *logos*, da razão humana, que evoca, da maneira mais luminosa e feliz, os esforços comprehensivos das cosmogonias e indagações físicas dos primeiros argonautas do pensamento, os filósofos pré-socráticos.

Não cabe aqui adjetivar e enaltecer uma obra que, apesar da sua curta extensão, viu surgir em seu redor uma aura incomum. Cremos haver porém neste texto um interesse inquestionável para os estudiosos do Espaço e das geometrias, quer matemáticos, quer filósofos. Riemann não colocou a tónica numa aproximação filosófica ao problema do Espaço, problema mais a mais especificamente metafísico. Mas as suas considerações e aproximações matemáticas tiveram raiz num pensamento amplo, que não desconsiderou esse Espaço de difícil inteligibilidade, e que o

tornaram, mesmo como ideia, mais modelável. O sistema da pan-geometria pode não ter esclarecido os problemas metafísicos do Espaço, mas é inegável que o *concretizou* como ideia. E a ideia de Espaço cresceu, em extensão e profundidade, com Riemann.

Sobre este Dossier

O dossier que apresentamos nasce da convicção de que com ele se colmata a inexistência de uma tradução portuguesa, e parece-nos legitimado por amenizar talvez os obstáculos que naturalmente se levantam na leitura de um texto numa língua estrangeira, intensificados no presente caso pelo carácter particularmente difícil, por vezes mesmo obscuro, do escrito.

Justamente a fim de completar uma leitura para a qual, cremos, todo o auxílio é bem-vindo, pareceu desde logo útil reunir um conjunto de apêndices de leitura introdutória e complementar. Tivemos a felicidade de ver as nossas solicitações bem acolhidas junto de dois dos maiores especialistas contemporâneos no pensamento de Riemann, José Ferreirós e Erhard Scholz. A fim de homogeneizar o dossier, procurámos que todos os textos chegasse ao leitor português também na sua língua.

José Ferreirós editou as obras fundamentais de Riemann em castelhano⁴ (na verdade, uma edição bilingue) e ofereceu aí uma detalhada introdução crítica, cobrindo intensivamente os aspectos da biografia e percurso intelectual do matemático de que nos ocupamos. Dessa introdução, reproduzimos aqui dois capítulos que considerámos particularmente importantes, o capítulo 2, *Riemann Filósofo* (do qual foram suprimidas as secções 2.3 *Psicología, alma y materia*, e 2.4 *Finalidad*) e o capítulo 5, *Riemann Matemático: Topología y Geometría* (reproduzido na íntegra). O leitor encontrará aqui uma exposição muito detida da formação filosófica de Riemann, tanto no que respeita à sua dúvida para com a filosofia de Herbart e às consequências que o pensamento desse autor produziu na aproximação de Riemann ao problema da geometria, bem como a sua aproximação a outros pensadores – Kant e Leibniz, especialmente – e às principais correntes filosóficas e científicas do seu período. Por outro lado, reconstrói a epistemologia que Riemann deixou delineada em muitos escritos do espólio, fundamental para compreender o procedimento filosófico nas suas investigações matemáticas. No capítulo *Riemann Matemático*, o leitor encontrará uma introdução e análise dos principais aspectos matemáticos da lição de 1854.

⁴ Riemann, Bernhard, *Riemanniana Selecta*, edição bilingue e introdução de José Ferreirós, CSIC, Madrid, 2001.

Erhard Scholz, historiador das ciências matemáticas e físicas, debruçou-se sobre os trabalhos de Riemann e é um dos principais responsáveis pela edição e análise crítica do espólio deixado por este matemático. No texto que nos cedeu⁵, Scholz dá uma perspectiva da influência de Herbart sobre Riemann no que respeita à concepção do seu novo conceito de *variedade* e enuncia as principais contribuições do escrito de 1854 para a geometria diferencial. Analisa também o lugar da contribuição de Riemann no plano geral da revolução geométrica do séc. XIX, em particular na sua abertura para os sistemas geométricos não-euclidianos, na clara independência face aos escritos de Lobatchevski e Bolyai e às tentativas de demonstração do 5º postulado de Euclides. Finalmente, debruça-se sobre o papel do conceito de variedade no tratamento do espaço físico, e conclui com a orientação filosófica de Riemann no tratamento da matemática, retornando às principais dívidas deste para com Herbart.

Infelizmente não fomos capazes de obter uma contribuição que pudesse servir o leitor especificamente interessado no aspecto técnico da investigação geométrica de Riemann. Uma falha que temos a admitir e a lamentar. Resta porém, nesse domínio, tomar a liberdade de remeter para aquele que é um dos estudos mais completos, detalhados e acessíveis sobre geometria diferencial, a de Riemann em particular, a saber, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, de Michael Spivak, cap. IV, que tem a vantagem de oferecer uma tradução inglesa do texto, a qual não deve deixar de ser consultada.

Agradecimentos

Uma palavra final deve dar conta das dívidas de gratidão a que este dossier, e o trabalho que envolveu, não são alheios.

Aos Profs. Erhard Scholz e José Ferreirós devo agradecer a pronta disponibilidade para tomar parte no projecto, a forma prestável como logo cederam as suas contribuições, e o interesse com que acompanharam e auxiliaram o processo. Também ao CSIC, em particular a Isabel López Barrio, cabe um agradecimento.

Da parte dos Profs. Augusto Franco de Oliveira e Paulo Almeida pude contar com estímulos para este empreendimento. Espero que o resultado possa ir ao encontro das suas expectativas.

⁵ *Riemann's vision of a new approach to geometry*, in “1830-1930: A Century of Geometry, Lecture notes in Physics”, Springer, 1992, vol. 402, pp. 22-34.

Às minhas amigas Isabel Winter e Andrea Yehudit Richter devo o apoio na ultrapassagem de muitas dificuldades da tradução.

Aos meus colegas do CFCUL, e amigos, María da Paz Amerigo e Nuno Jerónimo tenho a deixar uma palavra de sentida gratidão pelo apoio e interesse com que acompanharam o projecto. Testemunho ainda a forma incansável como María da Paz pôs (e tem posto) ao meu alcance várias fontes bibliográficas e me colocou problemas que motivaram a reflexão e o aprofundamento nestas matérias. Também a Cristina Barez Gomez agradeço a simpática disponibilidade com que facilitou contactos.

Ao Centro de Filosofia das Ciências e aos directores da revista *Kairos* devo gratificar o pronto e entusiástico acolhimento do projecto deste dossier, que revestiu para mim uma oportunidade única no trabalho sobre Riemann; tenho também que dar conta da paciência e benevolência com que aguardaram as suas finalizações. Muito em particular, uma palavra de sentida gratidão, e mesmo de admiração, à Prof.^a Olga Pombo.

Sugestões Bibliográficas

Esta bibliografia não é nem exaustiva nem intensiva. Com ela pretende-se apenas sugerir ao leitor um conjunto de obras onde se vê discutido e analisado (de modo mais ou menos especializado) o conteúdo da lição de Bernhard Riemann e as suas implicações na Filosofia, na Matemática e na Física, complementando as indicações bibliográficas dadas já por Erhard Scholz e José Ferreirós no final dos seus estudos.

Alexandrov, Kolmogorov, Lavrent'ev, *Mathematics: Its Contents, Methods and Meaning*, vol. III, M.I.T. Press, Cambridge, 1963, trad. K. Hirsch.

Anglin, W. S., *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, Springer-Verlag, New York, 1994;

Behnke, Bachmann, Fladt, Kunle, *Fundamentals of Mathematics*, vol. II: *Geometry*, M.I.T. Press, Cambridge, 1986, trad. S. H. Gould.

Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, New York, 1991.

Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, 2^a Edição, The Macmillan Company, Londres, 1919. Deleuze, Gilles, Guattari, Félix, *Capitalisme et Schizophrénie II: Mille Plateaux*, Les Éditions de Minuit, Paris, 1980. (O cap. 14, “1440 – le lisse et le strié” apresenta uma aplicação extremamente singular, no campo filosófico, das principais concepções geométricas de Riemann no desenvolvimento das ideias sobre espaço *liso* e espaço *estriado*.)

Dunnington, G. Waldo, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, The Mathematical Association of America, Nova Iorque, 1955.

- Eves, Howard, *Great Moments in Mathematics: After 1650*, The Mathematical Association of America, USA, 1983.
- Ewald, William, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. II, Oxford University Press, New York, 1996.
- Grünbaum, Adolf, *Philosophical Problems of Space and Time*, Alfred A. Knopf, Nova Iorque, 1963.
- Harper, Charlie, *Introduction to Mathematical Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976. [em particular §§9.5 e 9.6]
- Hilbert, Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Company, New York, 1990, trad. P. Nemenyi.
- Kasner, Newman, *Mathematics and the Imagination*, G. Bell and Sons, London, 1950.
- Klein, Felix, *Elementary Mathematics (from an Advanced Standpoint): Geometry*, Dover Publications, New York, 2004, trad. E. R. Hedrick e C. A. Noble.
- Kline, Morris, *Mathematics and the search for Knowledge*, Oxford University Press, New York, 1985.
- Menzel, Donald H. (ed.), *Fundamental Formulas of Physics*, vol. I, Dover Publications, Nova Iorque, 1960. [em particular, §7]
- Nerlich, Graham, *The Shape of Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- Riemann, Bernhard, *Collected Papers* (ed. e trad. de R. Baker, C. Christenson and H. Orde), Kendrick Press, Londres, 2004. [incluir tradução inglesa do ensaio biográfico de Richard Dedekind sobre Riemann, *Bernhard Riemanns Lebenslauf*]
- Riemann, Bernhard, *Riemanniana Selecta*, (ed. bilingue e introdução de José Ferreirós), Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2001.
- Russell, Bertrand, *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1897.
- Scholz, Erhard, *Bernhard Riemanns Auseinandersetzung mit der Herbartschen Philosophie*, in A. Hoeschen; L. Schneider (eds.): "Herbarts Kultursystem; Perspektiven der Transdisziplinarität im 19. Jahrhundert", Würzburg, Königshausen und Neumann, 2001, 163–183.
- Scholz, Erhard, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser Basel-Boston-Stuttgart, 1980.
- Scholz, Erhard, *Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie*, Archive for the History of Exact Sciences, 27, 1982, 213–282.
- Scholz, Erhard, *The concept of manifold, 1850 – 1950*, in I.M. James (ed.), "History of Topology", Amsterdão, Elsevier, 1999, 25–64.
- Spivak, Michael, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Houston, 1999.
- Torretti, Roberto, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Kluwer, Dordrecht, 1984.
- Torretti, Roberto, *Relativity and Geometry*, Pergamon Press, Oxford, 1983.