D. Ghid MATLAB

Alegînd o grilă de frecvențe:

```
>> w = 0:pas:pi ;
```

unde, de exemplu, `pas=0.01`, TF a semnalului `x` cu suportul:

```
>> n = 0:M-1 ;
```

se poate calcula prin:

```
>> X = x * exp(-j*n'*w) ;
```

Observați cum se poate evita ciclul de tip `for` pentru a evalua produsul scalar a doi vectori. Un vector este chiar `x` (de tip linie) iar celălalt este orice coloană a matricii `n'*w` şi conține valori ale exponențialei complexe. De altfel, instrucțiunea de mai sus se bazează pe exprimarea matricială a definiției (2.1), în cazul în care pulsația normalizată este şi ea eşantionată uniform cu un anumit pas.

Amplitudinea TF (adică spectrul) se trasează cu:

```
>> plot(w,abs(X)) ;
```

iar faza cu:

```
>> plot(w,angle(X)) ;
```

O caracteristică importantă a spectrelor semnalelor uzuale reale (adică provenite de la fenomene naturale) sau chiar artificiale este aceea că energia spectrală se concentrează într-o vecinătate îngustă din jurul originii. Ținînd cont că rezoluția de reprezentare grafică este finită, amplitudinile mult mai mari ale liniilor spectrale din zona originii împiedică vizualizarea liniilor spectrale din zona frecvențelor medii şi înalte. Pentru a diminua acest efect, se obişnuieşte ca spectrul să fie reprezentat în *decibeli* (dB). Prin definiție:

$$\left|X(\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = 20\lg\left|X(\omega)\right| = 10\lg\left|X(\omega)\right|^2, \quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}. \qquad (2.14)$$

Reprezentarea în dB permite ca liniile spectrale de putere mai mică să poată fi de asemenea vizualizate. Aşa cum aminteam, de regulă, spectrul posedă un număr redus de linii spectrale *dominante* (adică mult mai înalte decît celelalte linii spectrale). Reprezentarea în scară liniară conduce la o rezoluție grafică slabă în zona liniilor spectrale de putere mică. Prin logaritmare, dominanța liniilor spectrale de mare putere se reduce, iar rezoluția de reprezentare se echilibrează. Liniile spectrale invizibile în scară liniară (din cauza rezoluției grafice scăzute) devin vizibile în scară semilogaritmică, aşa cum sugerează Figura 1.3.

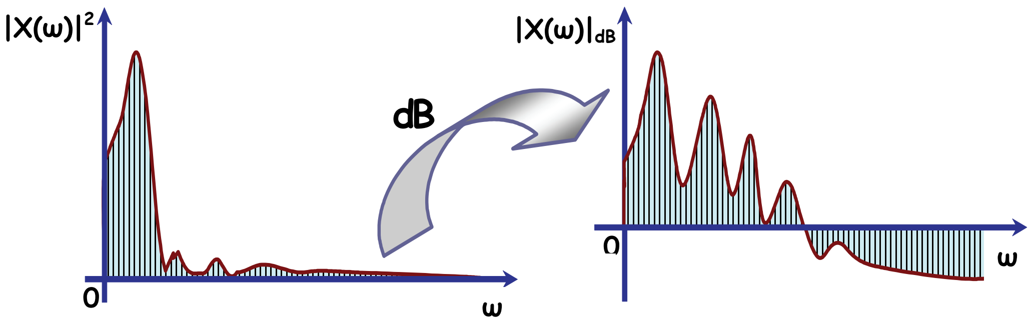

Figura 2.1. *Reprezentarea spectrului în dB.*

O altă variantă de calcul a TF presupune utilizarea funcției **`freqz`**, care va fi discutată într-o secțiune ulterioară. Pe scurt, TF a semnalului **`x`** se calculează pe grila de frecvențe **`w`** prin apelul:

```
>> X = freqz(x,1,w) ;
```

De asemenea, TF se poate calcula eficient (pe o anumită grilă de frecvențe), cu funcția **`fft`**. Unii dintre algoritmii care stau în spatele acestei funcții sunt descrişi în capitolul următor. De altfel, în acel capitol, va fi posibilă realizarea unei comparații între rezultatele acestor algoritmi (implementați de către cititor) şi cele ale funcției de firmă **`fft`** în termeni de precizie şi viteză de calcul.

E. Teme de laborator

Tema 1 (TF a unei sinusoide complexe cu suport finit)

Fie $x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$, $\forall n \in \overline{0, N-1}$ o sinusoidă complexă de frecvență precizată, avînd suport finit. (Pentru teste, alegeți de exemplu $\omega_0 = \pi/8$ şi N suficient de mare pentru ca suportul să conțină cel puțin 5 perioade ale sinusoidei.)

a. Arătați că TF a sinusoidei are următoarea expresie:

$$X(\omega)=\frac{e^{-j(\omega-\omega_0)N/2}}{e^{-j(\omega-\omega_0)/2}}\frac{\sin\frac{(\omega-\omega_0)N}{2}}{\sin\frac{(\omega-\omega_0)}{2}},\quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Observînd că spectrul are următoarea expresie:

$$|X(\omega)|=\left|\frac{\sin\frac{(\omega-\omega_0)N}{2}}{\sin\frac{(\omega-\omega_0)}{2}}\right|,\quad \forall\,\omega\in\mathbb{R}, \tag{2.16}$$

determinați punctul de maxim al acestuia şi indicați valoarea maximă. Interpretați rezultatul obținut.

b. Trasați graficul spectrului (2.16) cu ajutorul funcției `freqz`, pe o grilă de frecvențe ce acoperă intervalul $[-\pi,+\pi]$. Observați că deşi graficul are un vîrf pronunțat, spectrul nu conține doar o linie, conform relației (2.9). Care credeți că este explicația pentru acest fenomen?

c. Se verifică grafic egalitatea $|X(\omega_0)|=N$? Dacă da, vi se pare o proprietate normală? Dacă nu, care credeți că este cauza?

Tema 2 (TF a unei sinusoide reale cu suport finit)

Considerați acum semnalul $x[n]=\cos(\omega_0 n+\varphi)$, $\forall\, n\in\overline{0,N-1}$, cu ω_0 ales ca mai sus şi $\varphi\in[0,2\pi]$.

a. Trasați graficul spectrului semnalului pe o grilă de frecvențe ce acoperă intervalul $[-\pi,+\pi]$. Observați că graficul acestuia este simetric față de axa verticală, aşa cum spun relațiile (2.7).

b. Justificați forma graficului ținînd seama de formula lui Euler:

$$\cos\alpha=\frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}. \tag{2.17}$$

c. Alegeți mai multe valori ale lui φ şi observați ce se schimbă în graficul spectrului. Oferiți toate explicațiile pentru acest fenomen.

Tema 3 (TF a două sinusoide reale cu suport finit, însumate)

Considerați suma a două sinusoide reale:

$$x[n] = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n), \quad \forall n \in \overline{0, N-1}, \qquad (2.18)$$

cu $\omega_1, \omega_2 \in [0, \pi]$ şi N suficient de mare astfel încît suportul să includă cel puțin 5 perioade ale semnalului. Alegeți ω_1 suficient de departe de ω_2, de exemplu $\omega_0 = \pi/8$ şi $\omega_0 = \pi/3$.

a. Trasați graficul semnalului x pe suportul desemnat. Care este perioada acestuia?

b. Trasați graficul spectrului semnalului, pe o grilă de frecvențe ce acoperă intervalul $[-\pi, +\pi]$. Ați obținut desenul pe care îl aşteptați? Justificați răspunsul.

c. Alegeți un semnal care exprimat ca o sumă de două sinusoide cu amplitudini diferite şi repetați operațiile de mai sus.

d. Alegeți frecvențele sinusoidelor foarte aproape una de alta, de exemplu, astfel încît diferența lor să fie: $\omega_1 - \omega_2 = 0.01$. Repetați operațiile de mai sus şi explicați fenomenele.

Tema 4 (TF şi detectarea periodicității unui semnal)

Din exemplele de mai sus ați observat că TF are valori mari în frecvențele corespunzătoare componentelor sinusoidale ale unui semnal. Aşadar, TF poate fi utilizată pentru analiza semnalelor (cvasi-) periodice.

a. Fişierul `sunspot.dat` conține numărul de pete solare înregistrate anual, timp de aproape 300 de ani. Cercetările din domeniu par a acredita ipoteza că activitatea solară are un ciclu de aproximativ 11 ani. Trasați graficul numărului de pete solare, apoi calculați TF a acestuia şi găsiți frecvența corespunzătoare celui mai înalt vîrf al ei (excluzînd $\omega = 0$, care dă componenta continuă). Calculați perioada corespunzătoare acestei frecvențe ($T = 2\pi/\omega$) şi verificați dacă are valoarea 11. Repetați aceste operații pentru durate mai scurte, de 50-100 de ani. Ce efect observabil are scăderea duratei semnalului?

b. Repetați aceleaşi operații pentru datele din fişierul `lynx.m`. Relația pradă-prădător este caracterizată de periodicitate (aici rîsul joacă rol de pradă în raport cu omul, deşi, prin natura sa, el este un prădător). (În pescuitul oceanic se petrec fenomene asemănătoare.) Perioada oscilațiilor este însă specifică fiecărui ecosistem.

c. Semnalul **`xilo`** este aproape periodic în partea lui finală. Extrageți eşantioanele de la 8.000 la 10.000 şi repetați operațiile de mai sus. (Cei care sunt dotați cu ureche perfectă pot confirma rezultatul.) Observați armonicele.

Tema 5 (Zgomot alb)

Zgomotul alb a fost definit în secțiunea precedentă (**Definiția 1.12**). Dispersia λ^2 din relația (1.26) este asociată cu puterea zgomotului. Din definiția (2.10) rezultă că, teoretic, densitatea spectrală de putere zgomotului alb este constantă şi egală chiar cu λ^2. Folosind funcția **`randn`**, generați un pseudo-zgomot alb e de lungime N (de ordinul sutelor) şi estimați Φ_e cu relația (2.13). Observați că graficul densității spectrale de putere are un aspect tipic, care nu se modifică mărind N în cadrul aceleiaşi realizări. Totuşi, dacă se repetă operația pentru alte realizări ale zgomotului, se poate constata că nici o frecvență nu e favorizată. (Comentariu: cele de mai sus nu pun în discuție nici corectitudinea formulei $\Phi_e(\omega) = \lambda^2$, nici calitatea generatorului **`randn`**; explicația fundamentală rezidă în slaba calitate a periodogramei (2.13), ca estimator al densității spectrale de putere. Estimarea spectrală este un subcapitol al PS, care propune metode mult mai precise decît cea din spatele relației (2.13). O parte dintre cele mai importante şi eficiente metode de estimare spectrală se găsesc, de exemplu, în [PrMa96], [StMo05].)

Tema 6 (Sinusoidă scufundată în zgomot alb)

Considerați procesul:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) + e[n], \quad \forall n \in \overline{0, N-1}, \tag{2.19}$$

unde e desemnează un zgomot alb direct generat cu funcția **`randn`**. Ne propunem să determinăm pulsația ω_0 a sinusoidei, cu o anumită eroare. (Evident, se presupune că, în acest semnal, sinusoida este purtătoarea de informație, iar zgomotul o alterează.)

a. Generați o realizare a semnalului pentru N de ordinul sutelor. Trasați graficul semnalului şi observați că este greu de estimat vizual o periodicitate a semnalului. Aşadar, acest grafic oferă puțină informație referitoare la ω_0.

b. Calculați densitatea de putere spectrală ca în (2.13) şi trasați graficul acesteia. Observați maximul din ω_0. (Deoarece TF este o transformare liniară, în cazul semnalului (2.19), ea rezultă din suma TF ale celor două semnale componente. Deşi spectrul nu mai verifică această proprietate, termenul încrucişat care se adaugă sumei celor două spectre este proporțional cu partea reală a TF aferente sinusoidei. Aşadar, trebuie într-adevăr să existe un maxim în ω_0.)

c. Modificați semnalul adăugînd zgomotului alb o amplitudine variabilă nenulă ($a \in \mathbb{R}^*$):

$$x[n] = \cos\left(\omega_0 n\right) + a \cdot e[n], \quad \forall n \in \overline{0, N-1}. \tag{2.20}$$

Alegeți mai multe valori pentru a şi repetați operațiile de mai sus. Care ar fi valoarea maximă a amplitudinii a pentru care puteți determina ω_0 cu precizie suficientă? (Această valoare maximă poate fi justificată cu mijloace de statistică matematică de nivel superior cunoştințelor predate la cursul de PS.)

d. Punctele anterioare (în special **c.**) au pus în evidență faptul că anumite caracteristici ale semnalelor nu pot fi determinate dacă puterea zgomotului care le corupe depăşeşte o anumită valoare. În PS, există preocuparea de a determina raportul dintre puterea semnalului util distorsionat şi cea a zgomotului care îl distorsionează, chiar dacă nu se cunoaşte maniera de combinare a acestuia cu semnalul util. Acesta se numeşte *raport semnal-zgomot* SNR (*signal-to-noise ratio*) şi poate fi definit astfel:

$$\mathrm{SNR} \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{r_x[0]}{r_v[0]}\right|_{\mathrm{dB}}, \tag{2.21}$$

unde v este zgomotul, nu neapărat alb şi cel mai adesea necunoscut. Observați că SNR se exprimă în dB. În cazul semnalului (2.20), partea utilă pură este constituită de sinusoidă. Determinați SNR pentru rezultatul de la punctul **c.**