Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного»

Отчёт

Решение задач типовика №1

Выполнил:
Гаврилин Олег Сергеевич

Группа по ТФКП: 21.5

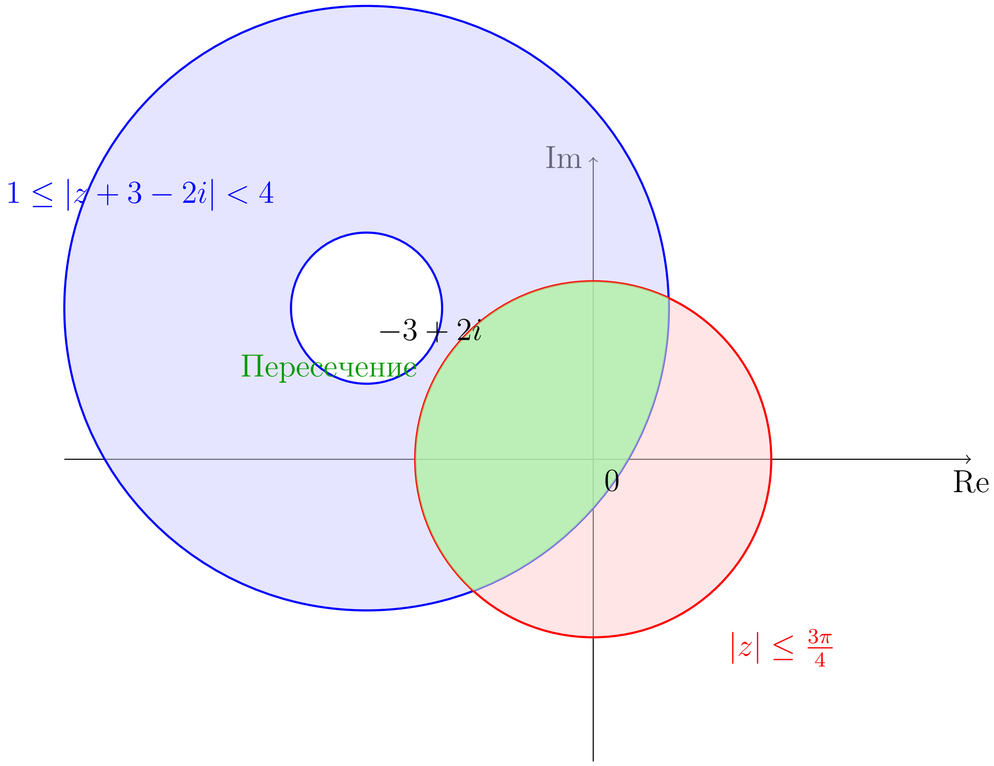
Преподаватель:
Шаврин Андрей Андреевич

Вариант: 5

Санкт-Петербург 2024г.

1. **Изобразить на комплексной плоскости множество D.**

$$D = \{z : 1 \leq |z + 3 - 2i| < 4,\ |z| \leq \frac{3\pi}{4}\}.$$



2. **Вычислить все значения функции в указанной точке:** 4^i

$$
\begin{aligned}
4^i &= e^{i\cdot\ln 4} & z = |z|e^{i\phi} \\
\ln z &= \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) \\
e^{i(\ln 4 + i(0+2\pi k))} &= e^{i\ln 4 - 2\pi k} \\
\frac{1}{e^{2\pi k}} \cdot e^{i\ln 4} &\Rightarrow 4^i = \frac{1}{e^{2\pi k}}(\cos\ln 4 + i\sin\ln 4)
\end{aligned}
$$

3. **Найти аналитическую функцию по известной ее действительной или мнимой части**

$$u(x, y) = \operatorname{ch}\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} - 2xy - 2x.$$

Функция аналитическая $\Rightarrow$ выполняется условие Коши-Римана:

$$\begin{aligned}
U'x &= V'y \\
U'y &= -V'x \\
U'x &= -\cosh\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} - 2y - 2 = V'y \\
U'y &= \sinh\left(\frac{y}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - 2x = -V'y \\
V'y &= -\sinh\left(\frac{y}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + 2x \\
V &= \int(-\cosh\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} - 2y - 2)dy = \\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\int -\cosh\frac{y}{2}dy - \int 2ydy - \int 2dy = \\
&= \sin\frac{x}{2}\cdot\sinh\frac{y}{2} - y^2 - 2y + g(x) \\
V &= \int(-\sinh\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + 2x)dx = \\
&= \cosh\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} + x^2 + g(y) \\
&\Rightarrow -\sinh\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} - y^2 - 2y + g(x) = \\
&= \cosh\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} + x^2 + g(y) \\
V &= \cosh\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} - y^2 - 2y + x^2 \\
f(z) &= \cosh\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} - 2xy - 2x + i(\cosh\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} - y^2 - 2y + x^2)
\end{aligned}$$

4. **Вычислить интеграл оп заданной кривой в указанном направлении**

$$\int_C y\,dz, \quad C:\, |z-a| = R, \text{ обход контура в отрицательном направлении.}$$

$$\begin{aligned}
z &= x + iy \\
|z-a| &= R \Rightarrow |x + iy - a| = R \\
x(t) &= a + R\cos t \\
y(t) &= a + R\sin t \\
dy &= (a + R\sin t)'dt = R\cos t dt \\
z' &= (-R\sin t + R\cos t)dt - \oint_C y\,dz =
\end{aligned}$$

$$-\int_0^{2\pi} R\cos t(-R\sin t + R\cos t)dt = -\int_0^{2\pi}(-R^2\cos t\sin t + R^2\cos^2 t)dt =$$

$$-R^2(\frac{-\sin^2 t}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2})\Big|_0^{2\pi} = -R^2(\pi) = -\pi R$$

5. **Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать область, в которой ряд представляет данную функцию**

$$f(z) = \frac{z-1}{z+3}, \quad z_0 = -1$$

Функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 раскладывается по формуле:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

где $f^{(n)}(z_0)$ обозначает n-ю производную функции $f(z)$, взятую в точке z_0. Таким образом, согласно формуле получим:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(z+1)^n,$$

Упростим выражение $\frac{1}{z+3}$, представив z как $z = z_0 + (z - z_0)$. Подставим $z_0 = -1$:

$$z + 3 = (z_0 + 3) + (z - z_0) = 2 + (z + 1).$$

Таким образом, можно записать:

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2 + (z+1)}.$$

Используем формулу для геометрического ряда:

$$\frac{1}{2+(z+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z+1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z+1}{2}\right)^n,$$

где $\left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$.

Подставляем полученное разложение обратно в исходную функцию:

$$f(z) = (z-1) \cdot \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z+1}{2}\right)^n.$$

Раскрываем скобки:

$$f(z) = \frac{z-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z+1}{2}\right)^n.$$

Теперь раскрываем произведение:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n,$$

где a_n — коэффициенты, которые могут быть вычислены. Ряд Тейлора, полученный для функции $f(z) = \frac{z-1}{z+3}$ в окрестности точки $z_0 = -1$, сходится и представляет данную функцию в области:

$$|z+1| < 2,$$

тогда

$$-3 < z < 1$$

6. **Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в указанной области.**

$$f(z) = (z-1)\sin\frac{1}{z}, \quad 0 < |z| < \infty$$

Разложение синуса:

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-(2n+1)}}{(2n+1)!}.$$

Умножаем на $z-1$:

$$f(z) = (z-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-(2n+1)}}{(2n+1)!}.$$

Раскрываем скобки:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-(2n+1)+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-(2n+1)}}{(2n+1)!}.$$

Записываем отдельно:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-2n}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{-(2n+1)}}{(2n+1)!}.$$

Ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{z^{-2n}}{(2n+1)!} - (-1)^n\frac{z^{-(2n+1)}}{(2n+1)!}\right).$$

7. **Вычислить интеграл.**

$$\int_L \frac{\exp z - \sin z}{z^4}\,dz, \quad L = \{z : |z| = \frac{1}{3}\}$$

Числитель $e^z - \sin z$ разлагаем в ряды Тейлора:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Тогда:

$$e^z - \sin z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots.$$

После деления на z^4:

$$f(z) = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \frac{1}{z \cdot 3!} + \frac{1}{4!} + \dots.$$

Остаток функции $f(z)$ в точке $z = 0$ — это коэффициент при z^{-1} в разложении. В данном случае это:

$$\text{Коэффициент при } z^{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Интеграл по замкнутому контуру L равен:

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{6}.$$

$$I = \frac{\pi i}{3}.$$