Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №3

по дисциплине

«Методы оптимизации»:

Вариант 3
Выполнил:

Гаврилин О. С.
ГРУППА: P3230
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ: Селина Е. Г.

Санкт-Петербург,

2025

Задание:

Найти экстремум функции на отрезке методом квадратичной аппроксимации. Три итерации метода выполнить вручную + написать программу на одном из языков программирования. ε = 0.0001 у всех

Вариант 3

$$f(x) = 0{,}25x^4 + x^2 - 8x + 12, [a, b] = [0, 2], \ \ \varepsilon = 0.005$$

Метод квадратичной аппроксимации

Алгоритм метода:

1. Задание начальных условий:
   - Выбираем начальную точку x_1 и шаг $\Delta x > 0$.
   - Задаем два малых значения точности ε_1 и ε_2.
2. Вычисление второй точки:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

3. Вычисление значений функции в точках $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
4. Выбор третьей точки:
   - Если $f(x_1) > f(x_2)$, то $x_3 = x_1 + 2\Delta x$
   - Если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $x_3 = x_1 - \Delta x$
5. Вычисление значения функции в точке $f(x_3)$
6. Определение минимального значения функции:
   - $F_{min} = min\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$
   - Минимальная точка: x_{min} соответствует F_{min}.
7. Определение новой точки $\bar{\boldsymbol{x}}$ путем интерполяции параболой:
   - $\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3}$
   - Вычислить $f(\bar{x})$
   - Если знаменатель в формуле равен нулю, принимаем $x_1 = x_{min}$ и возвращаемся к шагу 2.
8. Проверка условий остановки:
   - Проверяем два условия:

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| < \varepsilon_1, \quad \left|\frac{x_{\min} - \bar{x}}{\bar{x}}\right| < \varepsilon_2$$

- Если оба выполняются, то минимум $x^* = \bar{x}$
- Если хотя бы одно не выполняется, но $\bar{x} \in [x_1, x_3]$, выбираем минимальное значение из x_{min} или $\bar{x}$ и две точки по обе стороны от нее, затем возвращаемся к шагу 6.
- Если $\bar{x} \notin [x_1, x_3]$, кладем $x_1 = \bar{x}$ и повторяем алгоритм с шага 2.

Решение вручную:

Итерация 1:

1. Выбираем начальные точки:
   - $x_1 = 1{,}0\ , \Delta x = 0{,}1$
   - $x_2 = x_1 + \Delta x = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$
   - $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}005$
2. Вычисляем значения функции
   - $f(x_1) = f(1{,}0) = -2$
   - $f(x_2) = f(1{,}1) = 4.776$
3. Определяем x_3
   - Так как $f(1.0) < f(1{,}1)$ выбираем $x_3 = x_1 - \Delta x = 0{,}9$
4. Вычисляем $f(0{,}9)$:
   - $f(0{,}9) \approx\ 5.774$
5. Определяем минимум среди f_1, f_2, f_3
   - $F_{min} = min\{-2.0, -1.9845, -1.985\} = -2.0$
   - $x_{min} = x_1 = 1{,}0$
6. Вычисляем $\bar{x}$ по формуле квадратичной аппроксимации
   - $\bar{x} = \frac{1}{2} * \frac{(1{,}1^2 - 0{,}9^2) * -2 + (0{,}9^2 - 1) * -1{,}9852 + (1 - 1{,}1^2) * -1{,}985}{(1{,}1 - 0{,}9) * -2 + (0{,}9 - 1) * -1{,}9852 + (1 - 1{,}1) * -1{,}985}$
   - $\bar{x} \approx 1.604$
   - Вычисляем $f(\bar{x}) \approx 3.435$
7. Проверка условий остановки:

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| < \varepsilon_1, \quad \left|\frac{x_{\min} - \bar{x}}{\bar{x}}\right| < \varepsilon_2$$

$$\left|\frac{-2\ -3.435}{3.435}\right| < 0{,}005\ , \quad \left|\frac{1 - (1.604)}{1.604}\right| < 0{,}005$$

Так как оба условия выполнения метода достигнуты, алгоритм завершает работу.

Код:

```
import numpy as np


# Исходная функция
def f(x):
    return (1/4)*x**4 + x**2 - 8*x + 12


# Реализация метода квадратичной аппроксимации
def quadratic_approximation(x1, x3, epsilon1=0.0001, epsilon2=0.0001):
    # Шаг 1: Задать начальные параметры
    delta_x = (x3 - x1) / 2  # Выбираем среднюю точку
    x2 = x1 + delta_x  # Шаг 2: вычисляем x2

    # Шаг 3: Вычисляем значения функции
    f1, f2 = f(x1), f(x2)

    # Шаг 4: Определяем x3 в зависимости от значений функции
    if f1 > f2:
        x3 = x1 + 2 * delta_x
    else:
        x3 = x1 - delta_x
    f3 = f(x3)  # Вычисляем f3

    iteration = 1
    while True:
        # Шаг 6: Определяем минимум функции
        F_min = min(f1, f2, f3)
```

```
        x_min = [x1, x2, x3][[f1, f2, f3].index(F_min)]  # x_min соответствует минимуму

        # Шаг 7: Квадратичная интерполяция
        numerator = ((x2**2 - x3**2) * f1 + (x3**2 - x1**2) * f2 + (x1**2 - x2**2) * f3)
        denominator = ((x2 - x3) * f1 + (x3 - x1) * f2 + (x1 - x2) * f3)

        if abs(denominator) < 1e-10:  # Проверка дел на ноль
            print("Ошибка: знаменатель слишком мал. Метод завершён.")
            return None

        x_bar = 0.5 * numerator / denominator
        f_bar = f(x_bar)

        # Шаг 8: Проверка условий завершения
        if abs(F_min - f_bar) / abs(f_bar) < epsilon1 and abs(x_min - x_bar) / abs(x_bar) < epsilon2:
            break

        # Определяем новые точки для следующей итерации
        if x_bar in [x1, x2, x3]:  # Если x¯ совпадает с одной из точек
            x1 = x_min  # Двигаем x1 в x_min
        else:
            if x_bar < x2:
                if f_bar < f2:
                    x3, f3 = x2, f2
```

```
                x2, f2 = x_bar, f_bar
            else:
                x1, f1 = x_bar, f_bar
        else:
            if f_bar < f2:
                x1, f1 = x2, f2
                x2, f2 = x_bar, f_bar
            else:
                x3, f3 = x_bar, f_bar
    iteration += 1

print("\nРезультат:")
print(f"x_min ≈ {x_bar:.5f}")
print(f"f(x_min) ≈ {f_bar:.5f}")
return x_bar


# Интервал поиска и вызов функции
a = 0.0  # Левая граница
b = 2.0  # Правая граница
quadratic_approximation(a, b)
```

Результаты:

x_min ≈ 1.67024

f(x_min) ≈ 3.37339

1.670241078666522

Вывод:

Метод квадратичной аппроксимации показал высокую эффективность в нахождении приближённого значения минимума функции.