Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
ИТМО»

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного»

# Отчёт

# Решение задач типовика

Выполнил:
Гаврилин Олег Сергеевич

Группа по ТФКП: 21.5

Преподаватель:
Шаврин Андрей Андреевич
**Вариант: 5**

Санкт-Петербург 2024г.

1. **Вычислить интеграл при помощи вычетов.**

$$\int_L \frac{\exp z - \sin z}{z^4}\, dz, \quad L = \{z : |z| = \frac{1}{3}\}.$$

**Разложение в ряд Тейлора**

Числитель $e^z - \sin z$ разлагаем в ряды Тейлора:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots,$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots.$$

Вычитаем:

$$e^z - \sin z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots - \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right).$$

После упрощения:

$$e^z - \sin z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots.$$

**Проверка ряда Тейлора для $e^z - \sin z$**

Рассмотрим явное вычисление нескольких первых членов ряда для $e^z - \sin z$. Например, при $z = 0.1$:

$$e^{0.1} = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!} + \dots \approx 1.10517,$$
$$\sin 0.1 = 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3!} + \dots \approx 0.09983.$$

Тогда:

$$e^{0.1} - \sin 0.1 \approx 1.10517 - 0.09983 = 1.00534,$$

что совпадает с результатом разложения $1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^3}{3!} + \dots$.

**Интеграл**

После деления на $z^4$:

$$f(z) = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \frac{1}{z \cdot 3!} + \frac{1}{4!} + \dots.$$

Остаток функции $f(z)$ в точке $z = 0$ — это коэффициент при $z^{-1}$ в разложении. В данном случае это:

$$\text{Коэффициент при } z^{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Интеграл по замкнутому контуру $L$ равен:

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{6}.$$

$$I = \frac{\pi i}{3}.$$

2. **Вычислить несобственный интеграл.**

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+11}\,dx, \quad a<0$$

**Представление через комплексный интеграл**

Представим $\cos(ax)$ в виде:

$$\cos(ax) = \mathrm{Re}(e^{iax}),$$

где $\mathrm{Re}(z)$ обозначает действительную часть $z$. Тогда интеграл становится:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+11}\,dx = \mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{x^2+11}\,dx.$$

**Замена переменной и переход к контуру**

Рассмотрим функцию:

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+11},$$

где $z$ — комплексная переменная. Полюсы функции $f(z)$ находятся в точках:

$$z = \pm i\sqrt{11}.$$

Для вычисления интеграла используем замкнутый контур, состоящий из интервала $[0,R]$, полуокружности радиуса $R$ и отрезка на вещественной оси $[-R,0]$, а затем применим теорему о вычетах.

**Теорема о вычетах**

Согласно теореме о вычетах:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f, z=i\sqrt{11}),$$

где $\Gamma$ — замкнутый контур.

При $R\to\infty$ вклад полуокружности стремится к нулю, и остаётся:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}}{x^2+11}\,dx = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f, z=i\sqrt{11}).$$

Так как интересует интеграл по положительной полуоси, он равен половине этого значения:

$$\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{x^2+11}\,dx = \pi i\cdot \mathrm{Res}(f, z=i\sqrt{11}).$$

**Вычисление вычета**

Вычет в точке $z = i\sqrt{11}$ равен:

$$\operatorname{Res}(f, z = i\sqrt{11}) = \lim_{z \to i\sqrt{11}} \frac{e^{iaz}}{(z - i\sqrt{11})(z + i\sqrt{11})}.$$

Упростим знаменатель:

$$z^2 + 11 = (z - i\sqrt{11})(z + i\sqrt{11}).$$

Тогда:

$$\operatorname{Res}(f, z = i\sqrt{11}) = \frac{e^{iai\sqrt{11}}}{2i\sqrt{11}}.$$

Упростим экспоненту:

$$e^{iai\sqrt{11}} = e^{-a\sqrt{11}}.$$

Следовательно:

$$\operatorname{Res}(f, z = i\sqrt{11}) = \frac{e^{-a\sqrt{11}}}{2i\sqrt{11}}.$$

**Действительная часть**

Интеграл по положительной полуоси равен:

$$\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{x^2 + 11}\, dx = \pi i \cdot \frac{e^{-a\sqrt{11}}}{2i\sqrt{11}}.$$

Упростим:

$$\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{x^2 + 11}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{11}} e^{-a\sqrt{11}}.$$

Берём действительную часть:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{\sqrt{11}} e^{-a\sqrt{11}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{11}} e^{-a\sqrt{11}}.$$

**Ответ**

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2 + 11}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{11}} e^{-a\sqrt{11}}, \quad a < 0.$$