Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Домашнее задание
по дисциплине «Методы оптимизации»

Вариант: 17

Преподаватель:
Селина Елена Георгиевна

Выполнил:
Гаврилин Олег Сергеевич
Группа: P3230

Санкт-Петербург, 2025

Задание №1

Постановка задачи

Пусть x_1 - количество Смеси 1 (в граммах), x_2 - количество Смеси 2 (в граммах). Необходимо минимизировать стоимость рациона Z.

- Цена Смеси 1: $c_1 = 0.1$ руб./г.
- Цена Смеси 2 (при $i = 17$): $c_2 = 0.015 \cdot (3 + |17 - 6|) = 0.015 \cdot (3 + 11) = 0.015 \cdot 14 = 0.21$ руб./г.
- Целевая функция: $Z = 0.1x_1 + 0.21x_2 \to \min$

Ограничения

1. **Витамин A:**
   - Содержание в Смеси 1: 0%
   - Содержание в Смеси 2: $0.1\% = 0.001$
   - Норма: 0.003 г.
   - $0 \cdot x_1 + 0.001x_2 \geq 0.003 \Rightarrow x_2 \geq 3$
2. **Витамин B:**
   - Содержание в Смеси 1: $0.3\% = 0.003$
   - Содержание в Смеси 2 (при $i = 17$): $(3 - \frac{17}{24}) \cdot 0.1\% = (\frac{72-17}{24}) \cdot 0.001 = \frac{55}{24} \cdot 0.001 = \frac{55}{24000}$
   - Норма: 0.027 г.
   - $0.003x_1 + \frac{55}{24000}x_2 \geq 0.027$
   - Умножим на 24000: $72x_1 + 55x_2 \geq 648$
3. **Витамин C:**
   - Содержание в Смеси 1: $0.1\% = 0.001$
   - Содержание в Смеси 2 (при $i = 17$): $(2 + \frac{17}{30}) \cdot 0.1\% = (\frac{60+17}{30}) \cdot 0.001 = \frac{77}{30} \cdot 0.001 = \frac{77}{30000}$
   - Норма (при $i = 17$): $(12 + \frac{17}{2}) \cdot 0.001 = (\frac{24+17}{2}) \cdot 0.001 = \frac{41}{2} \cdot 0.001 = \frac{41}{2000} = 0.0205$ г.
   - $0.001x_1 + \frac{77}{30000}x_2 \geq 0.0205$
   - Умножим на 30000: $30x_1 + 77x_2 \geq 615$
4. **Неотрицательность:**
   - $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Математическая модель

Минимизировать $Z = 0.1x_1 + 0.21x_2$ При ограничениях:

$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ 72x_1 + 55x_2 \geq 648 \\ 30x_1 + 77x_2 \geq 615 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Графический метод

1. **Построение прямых:** На плоскости (x_1, x_2) строим прямые, соответствующие ограничениям:

   - $L_1 : x_2 = 3$
   - $L_2 : 72x_1 + 55x_2 = 648$ (проходит через $(9, 0)$ и $(0, \approx 11.78)$)
   - $L_3 : 30x_1 + 77x_2 = 615$ (проходит через $(20.5, 0)$ и $(0, \approx 7.99)$)
   - $L_4 : x_1 = 0$ (ось x_2)
   - $L_5 : x_2 = 0$ (ось x_1)

2. **Определение полуплоскостей:** Для каждого неравенства определяем полуплоскость (область выше или правее каждой линии, в первом квадранте).

3. **Построение линии уровня:** Строим линию уровня целевой функции $0.1x_1 + 0.21x_2 = k$. Вектор-градиент $\vec{c} = (0.1, 0.21)$. Антиградиент $-\vec{c} = (-0.1, -0.21)$ указывает направление убывания.

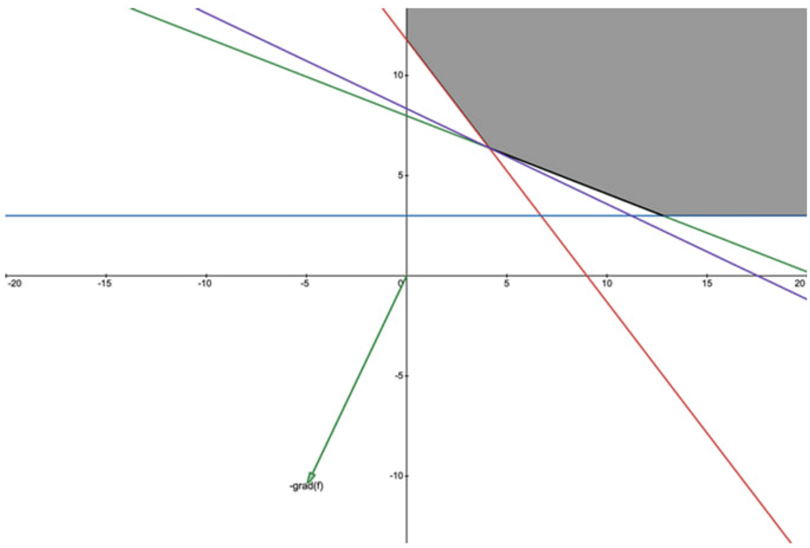

Рис. 1: Итоговый график

Ответ (графический метод): Оптимальный рацион: $x_1^* = \frac{5357}{1298} \approx 4.127$ г Смеси 1, $x_2^* = \frac{4140}{649} \approx 6.379$ г Смеси 2. Минимальная стоимость: $Z_{min} = \frac{2274.5}{1298} \approx 1.7523$ руб.

2. Симплекс-метод (с использованием искусственного базиса)

Задача: Минимизировать $Z = 0.1x_1 + 0.21x_2$. Эквивалентно: Максимизировать $Z' = -Z = -0.1x_1 - 0.21x_2$. Приводим к каноническому виду, вводя избыточные ($s_i \geq 0$) и искусственные ($a_i \geq 0$) переменные:

$$\begin{cases} x_2 - s_1 + a_1 = 3 \\ 72x_1 + 55x_2 - s_2 + a_2 = 648 \\ 30x_1 + 77x_2 - s_3 + a_3 = 615 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0 \end{cases}$$

Фаза 1: Максимизируем $W' = -a_1 - a_2 - a_3$. Выражаем W' через небазисные переменные: $W' = -1266 + 102x_1 + 133x_2 - s_1 - s_2 - s_3$ $W' - 102x_1 - 133x_2 + s_1 + s_2 + s_3 = -1266$

Начальная симплекс-таблица Фазы 1:

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	RHS	Отношение
a_1	0	**1**	-1	0	0	1	0	0	3	3/1=3 (*)
a_2	72	55	0	-1	0	0	1	0	648	$648/55 \approx 11.8$
a_3	30	77	0	0	-1	0	0	1	615	$615/77 \approx 7.99$
W'	-102	-133	1	1	1	0	0	0	-1266	

Вводим x_2, выводим a_1.

Таблица 2 (Базис x_2, a_2, a_3):

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	RHS	Отношение
x_2	0	1	-1	0	0	1	0	0	3	-
a_2	**72**	0	55	-1	0	-55	1	0	483	$483/72 \approx 6.7$ (*)
a_3	30	0	77	0	-1	-77	0	1	384	384/30=12.8
W'	-102	0	-132	1	1	133	0	0	-867	

Вводим x_1, выводим a_2.

Таблица 3 (Базис x_2, x_1, a_3):

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	RHS	Отношение
x_2	0	1	-1	0	0	1	0	0	3	-
x_1	1	0	$\frac{55}{72}$	$-\frac{1}{72}$	0	$-\frac{55}{72}$	$\frac{1}{72}$	0	$\frac{161}{24}$	-
a_3	0	0	$\frac{649}{12}$	$\frac{5}{12}$	-1	$-\frac{649}{12}$	$-\frac{5}{12}$	1	$\frac{731}{4}$	≈ 3.38 (*)
W'	0	0	$-\frac{649}{12}$	$-\frac{5}{12}$	1	$\frac{661}{12}$	$\frac{17}{12}$	0	$-\frac{731}{4}$	

Вводим s_1, выводим a_3.

Таблица 4 (Базис x_2, x_1, s_1):

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3	RHS
x_2	0	1	0	$\frac{5}{649}$	$-\frac{12}{649}$	...	...	...	$\frac{4140}{649}$
x_1	1	0	0	$\frac{187}{2596}$	$-\frac{165}{1298}$	...	...	...	$\frac{5357}{1298}$
s_1	0	0	1	$\frac{5}{649}$	$-\frac{12}{649}$	...	...	...	$\frac{2193}{649}$
W'	0	0	0	0	0	M	M	M	0

$W' = 0$, Фаза 1 завершена. Получен допустимый базис x_1, x_2, s_1.

Фаза 2: Используем последнюю таблицу без столбцов a_i и строки W'. Добавляем строку для $Z' = -0.1x_1 - 0.21x_2$. Выражаем Z' через небазисные переменные s_2, s_3: $Z' + \frac{2274.5}{1298} - \frac{22.9}{2596}s_2 - \frac{21.54}{1298}s_3 = 0$

Таблица Фазы 2:

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
x_2	0	1	0	$\frac{5}{649}$	$-\frac{12}{649}$	$\frac{4140}{649}$
x_1	1	0	0	$\frac{187}{2596}$	$-\frac{165}{1298}$	$\frac{5357}{1298}$
s_1	0	0	1	$\frac{5}{649}$	$-\frac{12}{649}$	$\frac{2193}{649}$
Z'	0	0	0	$\frac{22.9}{2596}$	$-\frac{21.54}{1298}$	$-\frac{2274.5}{1298}$

Коэффициент при s_3 в строке Z' отрицательный. Все элементы в столбце s_3 для базисных переменных отрицательны. Это указывает на неограниченность задачи максимизации Z'.

Ответ (симплекс-метод): $x_1^* = \frac{5357}{1298} \approx 4.127$ г, $x_2^* = \frac{4140}{649} \approx 6.379$ г, $Z_{min} = \frac{2274.5}{1298} \approx 1.7523$ руб.

3. Через двойственную задачу

Введённые данные

Максимизировать: $F = 3x_1 + 648x_2 + 615x_3 \to \max$
При ограничениях:

$$0x_1 + 72x_2 + 30x_3 \leq \frac{1}{10}$$
$$1x_1 + 55x_2 + 77x_3 \leq \frac{21}{100}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Решение методом искусственного базиса

Для каждого ограничения с неравенством **добавляем дополнительные переменные** x_4 и x_5.

$$0x_1 + 72x_2 + 30x_3 + x_4 = \frac{1}{10}$$
$$1x_1 + 55x_2 + 77x_3 + x_5 = \frac{21}{100}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Ограничение 1 содержит неравенство, базисной будет добавленная дополнительная переменная x_4.
Ограничение 2 содержит неравенство, базисной будет добавленная дополнительная переменная x_5.

Так как были найдены все базисные переменные, то нет необходимости добавления искусственных переменных.

Начальная симплекс-таблица

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$\mathbf{x_4}$	0	72	30	1	0	$\frac{1}{10}$
$\mathbf{x_5}$	1	55	77	0	1	$\frac{21}{100}$

Вычисляем дельты: $\Delta_j = \sum_i C_{Bi} a_{ij} - C_j$ (Здесь $C_B = [0, 0]$, $C = [3, 648, 615, 0, 0]$)

Подробный расчёт дельт

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 3 = -3 \\
\Delta_2 &= (0 \cdot 72 + 0 \cdot 55) - 648 = -648 \\
\Delta_3 &= (0 \cdot 30 + 0 \cdot 77) - 615 = -615 \\
\Delta_4 &= (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0 \\
\Delta_5 &= (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0 \\
\Delta_b &= (0 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{21}{100}) = 0 \quad \text{(Значение F)}
\end{aligned}
$$

Симплекс-таблица с дельтами

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$\mathbf{x_4}$	0	72	30	1	0	$\frac{1}{10}$
$\mathbf{x_5}$	1	55	77	0	1	$\frac{21}{100}$
Δ	-3	-648	-615	0	0	0

Текущий план X: $[0, 0, 0, \frac{1}{10}, \frac{21}{100}]$
Целевая функция F: 0
Проверяем план на оптимальность: план **не оптимален**, так как есть отрицательные дельты.

Критерий оптимальности План оптимален, если в таблице отсутствуют отрицательные дельты.

Итерация 1 Определяем *разрешающий столбец*: 2 (x_2), $\Delta_2 = -648$.
Находим симплекс-отношения Q.
Определяем *разрешающую строку*: 1 (x_4), $Q_{min} = \frac{1}{720}$.
Разрешающий элемент: 72.
Вводим x_2, выводим x_4.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Q
x_4	0	**72**	30	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1/10}{72} = \frac{1}{720}$ (*)
x_5	1	55	77	0	1	$\frac{21}{100}$	$\frac{21/100}{55} = \frac{21}{5500}$
Δ	-3	-648	-615	0	0	0	

Делим строку 1 на 72. Из строки 2 вычитаем (новую) строку 1, умноженную на 55.
Вычисляем новые дельты: $\Delta_j = \sum_i C_{Bi} a_{ij} - C_j$ (Новый базис: x_2, x_5, $C_B = [648, 0]$)

Подробный расчёт дельт

$$\Delta_1 = (648 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 3 = -3$$
$$\Delta_2 = (648 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 648 = 0$$
$$\Delta_3 = (648 \cdot \frac{5}{12} + 0 \cdot \frac{649}{12}) - 615 = 270 - 615 = -345$$
$$\Delta_4 = (648 \cdot \frac{1}{72} + 0 \cdot (-\frac{55}{72})) - 0 = 9$$
$$\Delta_5 = (648 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0$$
$$\Delta_b = (648 \cdot \frac{1}{720} + 0 \cdot \frac{481}{3600}) = \frac{9}{10} \quad \text{(Значение F)}$$

Симплекс-таблица с обновлёнными дельтами

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Q
$\mathbf{x_2}$	0	1	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{72}$	0	$\frac{1}{720}$	$\frac{1/720}{5/12} = \frac{1}{300}$
$\mathbf{x_5}$	1	0	$\frac{649}{12}$	$-\frac{55}{72}$	1	$\frac{481}{3600}$	$\frac{481/3600}{649/12} = \frac{481}{194700}$ (*)
Δ	-3	0	-345	9	0	$\frac{9}{10}$	

Текущий план X: $[0, \frac{1}{720}, 0, 0, \frac{481}{3600}]$
Целевая функция F: $\frac{9}{10}$
Проверяем план на оптимальность: план **не оптимален**, так как есть отрицательные дельты.

Критерий оптимальности План оптимален, если в таблице отсутствуют отрицательные дельты.

Итерация 2 Определяем *разрешающий столбец*: 3 (x_3), $\Delta_3 = -345$.
Находим симплекс-отношения Q.
Определяем *разрешающую строку*: 2 (x_5), $Q_{min} = \frac{481}{194700}$.
Разрешающий элемент: $\frac{649}{12}$.
Вводим x_3, выводим x_5.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Q
x_2	0	1	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{72}$	0	$\frac{1}{720}$	$\frac{1/720}{5/12} = \frac{1}{300}$
x_5	1	0	$\frac{649}{12}$	$-\frac{55}{72}$	1	$\frac{481}{3600}$	$\frac{481/3600}{649/12} = \frac{481}{194700}$ (*)
Δ	-3	0	-345	9	0	$\frac{9}{10}$	

Делим строку 2 на $\frac{649}{12}$. Из строки 1 вычитаем (новую) строку 2, умноженную на $\frac{5}{12}$.
Вычисляем новые дельты: $\Delta_j = \sum_i C_{Bi} a_{ij} - C_j$ (Новый базис: x_2, x_3, $C_B = [648, 615]$)

Подробный расчёт дельт

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= (648 \cdot (-\frac{5}{649}) + 615 \cdot \frac{12}{649}) - 3 = \frac{2193}{649} \\
\Delta_2 &= (648 \cdot 1 + 615 \cdot 0) - 648 = 0 \\
\Delta_3 &= (648 \cdot 0 + 615 \cdot 1) - 615 = 0 \\
\Delta_4 &= (648 \cdot \frac{7}{354} + 615 \cdot (-\frac{5}{354})) - 0 = \frac{487}{118} \\
\Delta_5 &= (648 \cdot (-\frac{5}{649}) + 615 \cdot \frac{12}{649}) - 0 = \frac{4140}{649} \\
\Delta_b &= (648 \cdot \frac{7}{19470} + 615 \cdot \frac{481}{194700}) = \frac{4549}{2596} \quad \text{(Значение F)}
\end{aligned}$$

Симплекс-таблица с обновлёнными дельтами

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$\mathbf{x_2}$	$-\frac{5}{649}$	1	0	$\frac{7}{354}$	$-\frac{5}{649}$	$\frac{7}{19470}$
$\mathbf{x_3}$	$\frac{12}{649}$	0	1	$-\frac{5}{354}$	$\frac{12}{649}$	$\frac{481}{194700}$
Δ	$\frac{2193}{649}$	0	0	$\frac{487}{118}$	$\frac{4140}{649}$	$\frac{4549}{2596}$

Текущий план X: $[0, \frac{7}{19470}, \frac{481}{194700}, 0, 0]$
Целевая функция F: $\frac{4549}{2596}$
Проверяем план на оптимальность: отрицательные дельты отсутствуют, следовательно **план оптимален**.

Критерий оптимальности План оптимален, если в таблице отсутствуют отрицательные дельты.

Ответ

$x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{19470}, x_3 = \frac{481}{194700}, F_{max} = \frac{4549}{2596} \approx 1.7523$

4. Дополнительный вопрос

При какой цене смеси 1 (c_1) её будет невыгодно (выгодно) использовать в рационе? Использовать Смесь 1 невыгодно, если $x_1^* = 0$. Оптимальное решение находится в вершине B, где $x_1^* > 0$. Это решение остается оптимальным, пока наклон линии уровня $k_Z = -c_1/0.21$ находится между наклонами активных ограничений L_2 ($k_2 = -72/55$) и L_3 ($k_3 = -30/77$). $k_2 \leq k_Z \leq k_3 \Rightarrow -72/55 \leq -c_1/0.21 \leq -30/77$ $30/77 \leq c_1/0.21 \leq 72/55$ $0.21 \cdot \frac{30}{77} \leq c_1 \leq 0.21 \cdot \frac{72}{55}$ $\frac{6.3}{77} \leq c_1 \leq \frac{15.12}{55}$ $0.0818 \leq c_1 \leq 0.2749$ (приблизительно)

Если c_1 в этом диапазоне, $x_1^* > 0$ (выгодно). Если $c_1 < 0.0818$, x_1^* будет еще больше (выгодно). Если $c_1 > 0.2749$, наклон k_Z станет круче k_2. Минимум сместится в сторону оси x_2. Ближайшая допустимая точка на оси x_2 - это $(0, 648/55)$. Следовательно, если $c_1 > 0.2749$, то $x_1^* = 0$ (невыгодно).

Ответ на доп. вопрос: Использовать Смесь 1 **выгодно** (т.е. $x_1^* > 0$), если её цена $c_1 \leq \frac{15.12}{55} \approx 0.2749$ руб./г. Использовать Смесь 1 **невыгодно** (т.е. $x_1^* = 0$), если её цена $c_1 > \frac{15.12}{55} \approx 0.2749$ руб./г.

Задание №2

Постановка задачи

Дана транспортная сеть из 7 вершин. Найти оптимальный (минимальной стоимости) грузопоток методом потенциалов. Параметр $i = 17$.

1. Параметры сети (при i=17)

- **Интенсивности источников/потребителей d_k:**
  - $d_1 = 2(17) + 1 = 35$ (Источник)
  - $d_2 = 17 + 11 = 28$ (Источник)
  - $d_3 = 0$ (Транзитный)
  - $d_4 = 0$ (Транзитный)
  - $d_5 = -17$ (Потребитель)
  - $d_6 = -(17 + 4) = -21$ (Потребитель)
  - $d_7 = -(17 + 8) = -25$ (Потребитель)
  - Проверка баланса: $35 + 28 + 0 + 0 - 17 - 21 - 25 = 63 - 63 = 0$. Сеть сбалансирована.
- **Дуги сети (по матрице G и формулам):** (1,2), (1,5), (2,3), (2,7), (3,4), (3,6), (4,2), (4,5), (4,7), (5,6), (6,7).
- **Стоимости перевозок $C_{kl} = \lfloor 6 + 5\cos(\frac{\pi}{15}(17 + 4k + l)) \rfloor$:**
  - $C_{12} = 6$
  - $C_{15} = 9$
  - $C_{23} = 10$
  - $C_{27} = 10$
  - $C_{34} = 10$
  - $C_{36} = 8$
  - $C_{42} = 8$
  - $C_{45} = 5$
  - $C_{47} = 3$
  - $C_{56} = 1$
  - $C_{67} = 1$

2. Нахождение начального базисного допустимого решения (БДР)

Используем эвристику, похожую на метод минимальной стоимости, для построения начального потока, удовлетворяющего балансу и образующего остовное дерево (6 дуг).

- $x_{47} = 25$ (удовлетворяем узел 7 по $C_{47} = 3$). Баланс 4: -25.

- $x_{56} = 21$ (удовлетворяем узел 6 по $C_{56} = 1$). Баланс 5: -21.
- Узел 5 требует 17, отдал 21, итого ему нужно 17+21 = 38. $x_{45} = 38$ (по $C_{45} = 5$). Баланс 4: $-25 - 38 = -63$.
- Узел 4 требует 63. $x_{34} = 63$ (по $C_{34} = 10$). Баланс 3: -63.
- Узел 3 требует 63. $x_{23} = 63$ (по $C_{23} = 10$). Баланс 2: $28 - 63 = -35$.
- Узел 2 требует 35. $x_{12} = 35$ (по $C_{12} = 6$). Баланс 1: $35 - 35 = 0$. Баланс 2: $-35 + 35 = 0$.

Начальный БДР X^0: $x_{12} = 35, x_{23} = 63, x_{34} = 63, x_{45} = 38, x_{47} = 25, x_{56} = 21$. Базисные дуги: (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (4,7), (5,6). Начальная стоимость: $Z_0 = 35(6) + 63(10) + 63(10) + 38(5) + 25(3) + 21(1) = 1756$.

3. Итерации метода потенциалов

Итерация 1

- **Потенциалы (π_k):** $\pi_1 = 0$. Из $\pi_k + C_{kl} = \pi_l$ для базисных дуг: $\pi_2 = 6, \pi_3 = 16, \pi_4 = 26, \pi_5 = 31, \pi_7 = 29, \pi_6 = 32$. $\pi = (0, 6, 16, 26, 31, 32, 29)$.
- **Оценки ($\Delta_{kl} = \pi_k + C_{kl} - \pi_l$ для небазисных дуг):** $\Delta_{15} = 0 + 9 - 31 = -22$ (*). $\Delta_{27} = 6 + 10 - 29 = -13$. $\Delta_{36} = 16 + 8 - 32 = -8$. $\Delta_{42} = 26 + 8 - 6 = 28$. $\Delta_{67} = 32 + 1 - 29 = 4$.
- **Улучшение:** Вводим (1,5). Цикл: 1->5<-4<-3<-2<-1. $\Theta = \min(x_{45} = 38, x_{34} = 63, x_{23} = 63, x_{12} = 35) = 35$. Выводим (1,2). Новый поток X^1: $x_{15} = 35, x_{23} = 28, x_{34} = 28, x_{45} = 3, x_{47} = 25, x_{56} = 21$. Новый базис: (1,5), (2,3), (3,4), (4,5), (4,7), (5,6). Новая стоимость: $Z_1 = 1756 + 35(-22) = 986$.

Итерация 2

- **Потенциалы (π_k):** $\pi_1 = 0$. $\pi_5 = 9, \pi_6 = 10, \pi_4 = 4, \pi_7 = 7, \pi_3 = -6, \pi_2 = -16$. $\pi = (0, -16, -6, 4, 9, 10, 7)$.
- **Оценки (Δ_{kl}):** $\Delta_{12} = 0 + 6 - (-16) = 22$. $\Delta_{27} = -16 + 10 - 7 = -13$ (*). $\Delta_{36} = -6 + 8 - 10 = -8$. $\Delta_{42} = 4 + 8 - (-16) = 28$. $\Delta_{67} = 10 + 1 - 7 = 4$.
- **Улучшение:** Вводим (2,7). Цикл: 2->7<-4<-3<-2. $\Theta = \min(x_{47} = 25, x_{34} = 28, x_{23} = 28) = 25$. Выводим (4,7). Новый поток X^2: $x_{15} = 35, x_{23} = 3, x_{27} = 25, x_{34} = 3, x_{45} = 3, x_{56} = 21$. Новый базис: (1,5), (2,3), (2,7), (3,4), (4,5), (5,6). Новая стоимость: $Z_2 = 986 + 25(-13) = 661$.

Итерация 3

- **Потенциалы (π_k):** $\pi_1 = 0$. $\pi_5 = 9, \pi_6 = 10, \pi_4 = 4, \pi_3 = -6, \pi_2 = -16, \pi_7 = -6$. $\pi = (0, -16, -6, 4, 9, 10, -6)$.
- **Оценки (Δ_{kl}):** $\Delta_{12} = 0 + 6 - (-16) = 22$. $\Delta_{36} = -6 + 8 - 10 = -8$ (*). $\Delta_{42} = 4 + 8 - (-16) = 28$. $\Delta_{47} = 4 + 3 - (-6) = 13$. $\Delta_{67} = 10 + 1 - (-6) = 17$.

- **Улучшение:** Вводим (3,6). Цикл: 3->6<-5<-4<-3. $\Theta = \min(x_{56} = 21, x_{45} = 3, x_{34} = 3) = 3$. Выводим (3,4) (или (4,5)). Новый поток X^3: $x_{15} = 35, x_{23} = 3, x_{27} = 25, x_{36} = 3, x_{45} = 0, x_{56} = 18$. Новый базис: (1,5), (2,3), (2,7), (3,6), (4,5), (5,6). (Вырожденный базис). Новая стоимость: $Z_3 = 661 + 3(-8) = 637$.

Итерация 4

- **Потенциалы (π_k):** $\pi_1 = 0$. $\pi_5 = 9, \pi_6 = 10, \pi_3 = 2, \pi_2 = -8, \pi_7 = 2, \pi_4 = 4$. $\pi = (0, -8, 2, 4, 9, 10, 2)$.
- **Оценки (Δ_{kl}):** $\Delta_{12} = 0+6-(-8) = 14$. $\Delta_{34} = 2+10-4 = 8$. $\Delta_{42} = 4+8-(-8) = 20$. $\Delta_{47} = 4 + 3 - 2 = 5$. $\Delta_{67} = 10 + 1 - 2 = 9$.
- **Оптимальность:** Все $\Delta_{kl} \geq 0$. Текущее решение оптимально.

4. Оптимальный грузопоток

Оптимальный поток X^* (найден на итерации 3):

- $x^*_{15} = 35$
- $x^*_{23} = 3$
- $x^*_{27} = 25$
- $x^*_{36} = 3$
- $x^*_{45} = 0$
- $x^*_{56} = 18$
- Остальные потоки $x^*_{kl} = 0$.

Минимальная стоимость: $Z^* = 637$.