Kapitel 2
Mathematische Grundlagen

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders.
– Johann Wolfgang Goethe

Der Begriff *Informatik* ist so alltäglich geworden, dass kaum noch jemand darauf kommt, dass es sich ursprünglich um ein Kofferwort aus *Information* und *Mathematik* handelt. Rechenmaschinen – und später frei programmierbare Rechenautomaten (Computer) – wurden ursprünglich entwickelt, um Menschen die lästige Tätigkeit des Rechnens zu erleichtern, bevor allmählich andere Anwendungsgebiete hinzutraten.[1]

Umgekehrt ist Informatik auch angewandte Mathematik, denn zur Entwicklung von Computern und Software kommen mathematische Verfahren zum Einsatz, und zwar höhere als reines numerisches Rechnen (Arithmetik). Auch bei der Anwendung dieser Verfahren können Computer wiederum helfen. Dazu müssen diese Verfahren aber erst einmal verstanden werden.

In diesem Kapitel finden Sie aus diesen Gründen eine Einführung in die wichtigsten mathematischen Aspekte der Informatik, die später im Buch praktisch zum Einsatz kommen.

2.1 Logik und Mengenlehre

Die *Logik* ist eine gemeinsame Komponente von Philosophie, Mathematik und Informatik. Sowohl philosophische Gedankengebäude als auch mathematische Beweise basieren auf logischen *Schlussfolgerungen*, also auf der Erkenntnis, dass jedes Geschehen (in diesem Kontext *Wirkung* genannt) eine *Ursache* hat. Eine ununterbrochene Kette aus solchen logischen Schlussfolgerungen kann sowohl eine philosophische These untermauern als auch eine mathematische Theorie beweisen.

1 Im »IT-Handbuch für Fachinformatiker*innen« (10. Auflage, Bonn 2021, Rheinwerk Verlag) habe ich die Geschichte der Rechenmaschinen und Computer aufgeschrieben.

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya

Das Wort »Logik« ist vom griechischen Wort λόγος (lógos) abgeleitet, für das mehrere Übersetzungsmöglichkeiten existieren. Oft wird es mit »Wort« übersetzt (zum Beispiel »Im Anfang war das Wort« am Beginn des Johannes-Evangeliums), aber »Sinn« und »Verstand« sind ebenso plausibel.[2]

2.1.1 Aussagen

Die Grundelemente der Logik, die in Schlussfolgerungen auseinander folgen oder auf verschiedene Art und Weise miteinander verknüpft werden, sind *Aussagen*, auch *Propositionen* genannt. Eine Aussage im Sinne der Logik ist ein Satz, für den sich eindeutig entscheiden lässt, ob er stimmt (*wahre Aussage*) oder nicht (*falsche Aussage*). Hier sehen Sie einige Beispiele für sprachliche Aussagen:

- Der Mount Everest ist 8.848 Meter hoch.
- Ich bin 8.848 Meter hoch.
- Das Meer enthält Salzwasser.

Es ist trivial erkennbar, dass man bei allen drei Sätzen entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch sind – es handelt sich also tatsächlich um Aussagen. Welche von ihnen wahr und welche falsch sind, lässt sich ebenfalls leicht sagen:

- »Der Mount Everest ist 8.848 Meter hoch.« – Wahre Aussage gemäß allen gängigen geografischen Quellen.
- »Ich bin 8.848 Meter hoch.« – Falsche Aussage, denn kein uns bekanntes Lebewesen ist in der Lage, diesen Satz wahrheitsgemäß zu sagen.[3]
- »Das Meer enthält Salzwasser.« – Wahre Aussage, was Sie wahrscheinlich selbst wissen, wenn Sie je im Meer waren, oder zumindest aus glaubwürdiger Quelle erfahren haben dürften.

Die folgenden Sätze sind dagegen aus verschiedenen Gründen keine Aussagen:

- »Der Mount Everest ist majestätisch.« – Das Wort »majestätisch« ist nicht eindeutig definiert; es handelt sich um eine subjektive Meinungsäußerung, die keine Aussage ist.

2 In Goethes Drama »Faust I« macht sich die Titelfigur in der Anfangsszene »Studierzimmer« ausführliche Gedanken darüber.

3 Ob es auf der Erde ein einzelnes Lebewesen dieser Größe gibt, ist dagegen Definitionssache: Es gibt Pilze, deren unterirdische Rhizome sich über viele Quadratkilometer erstrecken. Aber sind diese ein Lebewesen oder ein Verbund aus vielen? Im Übrigen wären sie dann ja nicht im landläufigen Sinn über 8 km hoch, sondern so lang und/oder breit.

© Rheinwerk Verlag, Bonn 2024

- »Ist der Mount Everest 8.848 Meter hoch?« – Eine Frage ist keine Aussage; die Antwort auf diese spezielle Frage wird in der Regel jedoch eine sein.
- »Ist dieses Buch gut?« – Ebenfalls eine Frage. In diesem Fall kann auch die Antwort keine Aussage sein, sondern eine subjektive Meinungsäußerung.

Genau wie sprachliche Aussagen können auch *mathematische Aussagen* daraufhin überprüft werden, ob sie wahr oder falsch sind. Es handelt sich bei diesen um *Gleichungen* oder Ungleichungen, das heißt, zwei *mathematische Ausdrücke* (*Terme*) werden miteinander in Beziehung gesetzt. Hier sind einige Beispiele für Gleichungen:

- $2 + 2 = 4$
- $2 + 2 = 5$
- $5 \div 0 = 0$

Sind diese Gleichungen Aussagen? Und falls ja: Sind sie wahr oder falsch? Hier folgt die Überprüfung jeder einzelnen von ihnen:

- $2 + 2 = 4$ – intuitiv als wahre Aussage erkennbar.
- $2 + 2 = 5$ – muss falsch sein, da $2 + 2$ nicht gleichzeitig 4 und 5 ergeben kann.[4]
- $5 \div 0 = 0$ – ist keine gültige Gleichung, da die Division durch 0 nicht definiert ist. Insofern handelt es sich hier nicht um eine mathematische Aussage.

Die mathematischen Aussagen, die miteinander verknüpft werden, können von unterschiedlicher Komplexität sein, sodass mehr oder weniger Umrechnungsarbeit erforderlich ist, um zu überprüfen, ob sie wahr sind. Es geht darum, alle Ausdrücke gemäß den bekannten Regeln zu berechnen (Potenz- vor Punkt- vor Strichrechnung) und dann zu überprüfen, ob die Ergebnisse vor und hinter dem Gleichheitszeichen identisch sind. Beispiele:

- $3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$ – wahre Aussage: Zuerst wird die Potenz aufgelöst, sodass der Ausdruck vor dem Gleichheitszeichen zu $9 - 4 \cdot 3 + 3$ umgeformt wird. Als Nächstes kommt das Produkt an die Reihe. Der nächste Zwischenschritt lautet also $9 - 12 + 3 = 0$. Hier ist offensichtlich, dass die Aussage stimmt.
- $2 \cdot 3 + 5 = 2 \cdot (3 + 5)$ – falsche Aussage: $2 \cdot 3 + 5 = 6 + 5 = 11$ ist kleiner als $2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 8 = 16$.

Das zweite Beispiel zeigt: Klammern werden in der Mathematik eingesetzt, um bestimmte Teilausdrücke entgegen der Rangfolge ihrer Operatoren zuerst zu berech-

4 Eines der berühmtesten Werke der dystopischen Literatur, »1984« von George Orwell, demonstriert die Macht eines autoritären Regimes, den Unterdrückten einzureden, 2 + 2 sei 5. Dies wurde in der Popkultur vielfach aufgegriffen, beispielsweise in einer bekannten Episode von »Star Trek – The Next Generation« oder im Radiohead-Song »2 + 2 = 5 (The Lukewarm)«.

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya

nen. Das ist in Computerprogrammen auch der Fall, wie Sie im nächsten Kapitel sehen werden.

Ungleichungen verwenden nicht die Beziehung »=« zwischen zwei Ausdrücken, sondern einen der folgenden Operatoren:

- ≠ (ungleich) ist für alle Fälle wahr, in denen die beiden Operanden nicht gleich sind. Beispiele: $3 \neq 4$, $3 \neq 3{,}5$.
- < (kleiner als) ist wahr, wenn der linke Operand kleiner als der rechte ist. Beispiele: $1 < 2$, $-1 < 1$.
- > (größer als) ist wahr, wenn der linke Operand größer als der rechte ist. Beispiele: $2 > 1$, $1 > -1$.
- ≤ (kleiner oder gleich) ist wahr, wenn der linke Operand kleiner ist als der rechte oder wenn beide identisch sind. Beispiele: $1 \leq 2$, $1 \leq 1$.
- ≥ (größer oder gleich) ist wahr, wenn der rechte Operand größer ist als der linke oder wenn beide identisch sind. Beispiele: $2 \geq 1$, $2 \geq 2$.

Beachten Sie: Das Gegenteil von < ist nicht >, sondern ≥: Ein Wert ist immer dann *nicht* kleiner als ein anderer, wenn er entweder gleich dem anderen Wert oder größer als dieser ist. Ebenso ist ≤ das Gegenteil von >.

2.1.2 Mathematische Aussageformen

In der Mathematik begegnen Ihnen oft Aussagen mit Platzhaltern (*Variablen*), für die unterschiedliche Werte eingesetzt werden können. Denken Sie etwa an den Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Oder zum Beispiel an die binomischen Formeln:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Diese Konstrukte werden *Aussageformen* genannt und sind selbst keine Aussagen, da sich nicht entscheiden lässt, ob sie wahr oder falsch sind. Erst durch das Einsetzen sinnvoller Werte ist dies möglich.

Der Satz des Pythagoras bezieht sich auf die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck: *a* und *b* sind die beiden am rechten Winkel anliegenden Seiten (Katheten), *c* ist die ihm gegenüberliegende Seite (Hypotenuse). Eine Möglichkeit, eine wahre Aus-

© Rheinwerk Verlag, Bonn 2024

sage zu erhalten (die am häufigsten zur Illustration eingesetzt wird, weil alle drei Werte ganzzahlig sind), setzt $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$. Dass die Gleichung mit diesen Einsatzwerten stimmt, können Sie leicht überprüfen:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\Leftrightarrow 9 + 16 = 25$$

Eine ganze Klasse mathematischer Aufgaben besteht darin, Variablen so mit Werten zu füllen, dass sich eine wahre Aussage ergibt. In diesem Zusammenhang werden Variablen meist als *Unbekannte* bezeichnet. Diese wahre Aussage wird *Lösung* der entsprechenden Gleichung oder Ungleichung genannt. Je nach Art der Gleichung oder Ungleichung kann es eine Lösung, eine endliche Anzahl von Lösungen, eine unendliche Anzahl von Lösungen oder auch keine Lösung geben.

Es folgt ein einfaches Beispiel, die Lösung einer linearen Gleichung. Ziel muss es sein, die Unbekannte auf einer Seite der Gleichung zu isolieren. Dazu können Sie beliebige Rechenoperationen vornehmen, solange es auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselbe Operation ist (»auf beiden Seiten« wird in der Lösung durch einen senkrechten Strich | vor der Operation dargestellt). Zusätzlich wird durch den Äquivalenzpfeil ⇔ gezeigt, dass alle Umformungen denselben Wert haben.

$$2x - 10 = 0| + 10$$

$$\Leftrightarrow 2x = 10| \div 2$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Die Lösung dieser Gleichung ist also 5.

Bei einer Ungleichung sieht es ähnlich aus, allerdings muss die Lösungsmenge anders angegeben werden:

$$3x - 35 < 1| + 35$$

$$\Leftrightarrow 3x < 36| \div 3$$

$$\Leftrightarrow x < 12$$

Die Ungleichung bleibt wahr, solange Sie für x einen beliebigen Wert einsetzen, der kleiner als 12 ist. Das wird wie folgt ausgedrückt:

$$\mathbb{L} = \{x|x < 12\}$$

Gesprochen: Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist die Menge (dargestellt durch die Mengenklammern {}) aller x, für die gilt (das Zeichen |), dass x kleiner als 12 ist. In Abschnitt 2.1.4, »Mengen«, erfahren Sie mehr über Schreibweisen und Eigenschaften von Mengen.

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya

Bei Gleichungen oder Ungleichungen mit mehreren Unbekannten benötigen Sie normalerweise ebenso viele verschiedene Gleichungen beziehungsweise Ungleichungen wie Variablen. Die Gleichung

$$x + y = 0$$

hat beispielsweise unendlich viele Lösungen, etwa $x = 0$, $y = 0$ oder $x = -10$, $y = 10$.

Eine Kombination aus mehreren Gleichungen wird als *Gleichungssystem* bezeichnet. Hier sehen Sie ein Beispiel für ein eindeutig lösbares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten:

$$I. x - y = 3$$

$$II. x + 2y = 9$$

Ein beliebtes Lösungsverfahren besteht darin, eine der Teilgleichungen so umzuformen, dass eine der Unbekannten allein auf einer Seite steht, also durch die andere Unbekannte definiert wird, und dieses Konstrukt dann statt der anderen Unbekannten in eine der Gleichungen einzusetzen. Deshalb wird das Verfahren auch als *Einsetzungsverfahren* bezeichnet. Hier der Lösungsweg für das obige Gleichungssystem:

$$I. x - y = 3 | + y$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + y$$

$$I\ in\ II. 3 + y + 2y = 9$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 | - 3$$

$$\Leftrightarrow 3y = 6 | \div 3$$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

Damit ist die Lösung für y gefunden. Diese kann nun wiederum in eine der Gleichungen eingesetzt werden, um x zu berechnen:

$$x - 2 = 3 | + 2$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Wenn Sie besonders gründlich arbeiten möchten, können Sie beide Werte nun in die andere Gleichung einsetzen, um zu überprüfen, ob diese aufgeht:

$$5 + 2 \cdot 2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 5 + 4 = 9$$

Wie Sie sehen, stimmt auch diese Gleichung, sodass die Lösung des Gleichungssystems $x = 5$, $y = 2$ lautet.

© Rheinwerk Verlag, Bonn 2024

Es gibt einen Sonderfall für Aussagen (und keine Aussageformen) mit Variablen. Dabei handelt es sich um die Verwendung der sogenannten *Quantoren* aus der *Prädikatenlogik* nach *Gottlob Frege*:

- $\exists$ wird *Existenz-Quantor* genannt und steht für »Es gibt (mindestens) ein ..., für das die folgende Aussage gilt«.
- $\forall$ ist der *All-Quantor* und bedeutet »Für alle ... gilt die folgende Aussage«.

Bei Sätzen, die diese Quantoren verwenden, lässt sich eindeutig entscheiden, ob sie wahr oder falsch sind, sofern *alle* vorkommenden Variablen mit Quantoren versehen werden; somit handelt es sich bei ihnen um Aussagen. Beispiele:

- $\exists x: x \div 2 = 7$ (gesprochen: »Es gibt mindestens ein x, für das $x \div 2 = 7$ gilt«) ist eine wahre Aussage: Umgeformt lautet die Gleichung $x = 7 \cdot 2 = 14$. Es gibt also in der Tat mindestens (beziehungsweise in diesem Fall *genau*) ein x, für das $x \div 2 = 7$ gilt.
- $\forall x: x < x + 1$ (gesprochen: »Für alle x gilt, dass x kleiner als $x + 1$ ist«). Das ist intuitiv ebenfalls eine wahre Aussage. Damit sie falsch würde, müsste es mindestens ein x geben, für das $x \geq x + 1$ wäre. Das ist jedoch nicht möglich, da der ursprüngliche Wert um 1 erhöht wird und somit (um 1) kleiner ist als der neue Wert.

In einer prädikatenlogischen Aussage können beliebig viele quantifizierte (mit Quantoren versehene) Variablen vorkommen. Hier folgt ein Beispiel einer wahren Aussage mit zwei quantifizierten Variablen:

$$\forall a: \exists b: a + b = 0$$

Für alle a existiert ein b, sodass $a + b = 0$ gilt. Sie werden kein Gegenbeispiel finden.

2.1.3 Logische Verknüpfungen

Sowohl sprachliche als auch mathematische Aussagen können auf unterschiedliche Weise miteinander verknüpft werden. In diesem Unterabschnitt lernen Sie die wichtigsten dieser Verknüpfungen, ihre Kombinationen und mathematischen Gesetze kennen. Das Rechnen mit Wahrheitswerten wird nach dem britischen Mathematiker *George Boole* als *boolesche Algebra* bezeichnet.

Schlussfolgerungen

Sowohl in der Philosophie als auch in der Mathematik wird beispielsweise die zu Beginn des Kapitels erwähnte *logische Schlussfolgerung* (*Implikation*) verwendet. Hier zum Einstieg ein sprachliches Beispiel:

»Wenn die Sonne untergeht, wird es dunkel.«

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya

Formal werden Schlussfolgerungen mit dem Symbol $\Rightarrow$ (»daraus folgt«) geschrieben, wobei besonders in der philosophischen Logik auch die Zeichen $\rightarrow$, $\vdash$ und $\supset$ zum Einsatz kommen; Letzteres ist für die Mathematik besonders ungünstig, weil $\supset$ hier auch für den Operator »Obermenge« (siehe Abschnitt 2.1.4, »Mengen«) eingesetzt wird. Es gibt subtile Bedeutungsunterschiede zwischen diesen Zeichen, die in der alltäglichen Mathematik und Informatik jedoch nicht von Belang sind. Die obige Wenn-dann-Beziehung lässt sich daher auch so schreiben:

Die Sonne geht unter. $\Rightarrow$ Es wird dunkel.

Es handelt sich also formal um einen Satz A, aus dem ein Satz B folgt:

$$A \Rightarrow B$$

Das bedeutet übrigens keineswegs, dass aus B auch A folgt, wie Sie anhand des obigen Satzes leicht überprüfen können. Schließlich braucht die Sonne nicht unterzugehen, damit es dunkel wird – wenn die Bewölkung bis zur massiven Gewitterfront zunimmt, wird es durchaus auch (relativ) dunkel.

Ein zulässiger *Umkehrschluss* (Fachbegriff: *Kontraposition*) zu $A \Rightarrow B$ ist dagegen, dass aus der Verneinung von B die Verneinung von A folgt. Dies wird wie folgt geschrieben:

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

oder so:

$$\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$$

(Im Folgenden wird die Schreibweise mit vorangestelltem $\neg$ verwendet.)

Ausgesprochen lautet der Satz: »Aus Nicht-B folgt Nicht-A.« Machen Sie sich dies anhand des sprachlichen Beispiels klar:

Wenn es *nicht* dunkel wird, geht die Sonne *nicht* unter.

Oder formaler: Es wird *nicht* dunkel. $\Rightarrow$ Die Sonne geht *nicht* unter.

Besonders in der philosophischen Logik hat die Tatsachenfeststellung dieser jeweiligen Beziehungen besondere Namen:

- *Modus ponens* (Lateinisch für »setzender Modus«):

  Gegeben: $A \Rightarrow B$.
  Feststellung: A ist wahr.
  Schluss: Also ist auch B wahr.

- *Modus tollens* (lateinisch für »wegnehmender Modus«):

  Gegeben: $A \Rightarrow B$.
  Feststellung: B ist nicht wahr.
  Schluss: Also ist auch A nicht wahr.

© Rheinwerk Verlag, Bonn 2024

In allen denkbaren Kontrapositionen werden nicht nur die Operanden vertauscht, sondern auch die Verneinungen:

- $A \Rightarrow B$ – Kontraposition: $\neg B \Rightarrow \neg A$
- $\neg A \Rightarrow B$ – Kontraposition: $\neg B \Rightarrow A$
- $A \Rightarrow \neg B$ – Kontraposition: $B \Rightarrow \neg A$
- $\neg A \Rightarrow \neg B$ – Kontraposition: $B \Rightarrow A$

Auch in der Mathematik wird mit Schlussfolgerungen gearbeitet, etwa zur Beweisführung. Beispiel:

16 ist durch 4 teilbar. ⇒ 16 ist durch 2 teilbar.

Aus einer Teilbarkeit durch 2 folgt umgekehrt nicht automatisch eine Teilbarkeit durch 4 – beispielsweise ist 10 durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Deshalb muss hier der Folgepfeil statt des im Zusammenhang mit dem Lösen von Gleichungen gezeigten Äquivalenzpfeils ⇔ verwendet werden. Auch hier gilt jedoch die Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$, wie das folgende Beispiel zeigt:

15 ist *nicht* durch 2 teilbar. ⇒ 15 ist *nicht* durch 4 teilbar.

Die Ergebnisse logischer Verknüpfungen werden oft als sogenannte *Wahrheitstabellen* dargestellt, in der 0 für eine falsche und 1 für eine wahre Aussage steht. Tabelle 2.1 zeigt die Wahrheitstabelle der Implikation.

A	**B**	**A ⇒ B**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabelle 2.1 Wahrheitstabelle der Implikation (logischen Schlussfolgerung)

In den weiter unten folgenden Wahrheitstabellen anderer logischer Verknüpfungen werden die Operanden horizontal und vertikal geschrieben und über Kreuz kombiniert. Bei der logischen Schlussfolgerung ist dies nicht ratsam, weil sie anders als die anderen nicht kommutativ ist, ihre Operanden also nicht vertauscht werden dürfen.

Übrigens sind nicht alle Wenn-dann-Beziehungen gleich stark. Man unterscheidet folgende Bedingungen:

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya

- Eine Bedingung ist *hinreichend*, wenn ihr Vorliegen allein genügt, um eine bestimmte Folge eintreten zu lassen. Dies entspricht der Implikation $A \Rightarrow B$ für die Bedingung A und die Folge B. Die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl $n > 2$ durch 2 ist beispielsweise eine hinreichende Bedingung dafür, dass es sich nicht um eine Primzahl handelt. Ungerade Zahlen, die durch andere Zahlen teilbar sind, müssen aber auch keine Primzahlen sein.
- Eine Bedingung ist *notwendig*, wenn die Folge ohne sie nicht eintreten kann. Die Implikation ist also $\neg A \Rightarrow \neg B$. Dass alle vier Seiten eines Vierecks gleich lang sind, ist zum Beispiel eine notwendige Bedingung dafür, dass es sich um ein Quadrat handelt. Diese Bedingung allein genügt jedoch nicht – auch alle vier Winkel müssen identisch sein.

Wenn eine Bedingung *hinreichend und notwendig* ist, handelt es sich nicht mehr um eine Implikation, sondern um eine *Äquivalenz*, die durch das Symbol ⇔ gekennzeichnet wird. In der philosophischen Logik wird auch häufig die Abkürzung *gdw* verwendet (»genau dann, wenn«). Beispiel: Eine natürliche Zahl ist gerade, gdw sie ohne Rest durch 2 teilbar ist. Alternativ ausgedrückt:

Eine natürliche Zahl ist gerade. ⇔ Sie ist ohne Rest durch 2 teilbar.

In Tabelle 2.2 sehen Sie die Wahrheitstabelle der Äquivalenz.

⇔	0	1
0	1	0
1	0	1

Tabelle 2.2 Wahrheitstabelle der Äquivalenz

Wenn zwei Sachverhalte oder Aussagen zwar gehäuft zusammen auftreten, aber keine von ihnen eine hinreichende oder notwendige Bedingung der anderen ist, handelt es sich nicht um eine Implikation, sondern um eine *Korrelation*, die aus der Sicht der Logik uninteressant ist und nur in der Statistik eine Rolle spielt.

Und-Verknüpfungen, Oder-Verknüpfungen & Co.

Oft werden mehrere Aussagen auf unterschiedliche Arten miteinander verknüpft. Auch dies lässt sich besonders verständlich durch Schlussfolgerungen darstellen.

Bei der *Und-Verknüpfung* zweier Aussagen (auch *Konjunktion* genannt) ist die Gesamtaussage nur dann wahr, wenn *beide* Teilaussagen wahr sind. Beispiel:

© Rheinwerk Verlag, Bonn 2024

Wenn Sie einen Ausbildungsplatz finden *und* die Abschlussprüfung bestehen, werden Sie Fachinformatiker*in.

Formal wird die Und-Verknüpfung mithilfe des Zeichens ∧ dargestellt:

Sie finden einen Ausbildungsplatz ∧ Sie bestehen die Abschlussprüfung

⇒ Sie werden Fachinformatiker*in.

In Tabelle 2.3 sehen Sie die Wahrheitstabelle für die Und-Verknüpfung zweier Wahrheitswerte.

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabelle 2.3 Wahrheitstabelle der Und-Verknüpfung

Aus der Wahrheitstabelle ergeben sich die folgenden Beziehungen:

- $0 \wedge 0 = 0$
- $0 \wedge 1 = 0$
- $1 \wedge 0 = 0$
- $1 \wedge 1 = 1$

Ein mathematisches Beispiel:

12 ist durch 2 teilbar ∧ 12 ist durch 3 teilbar ⇒ 12 ist durch 6 teilbar.

Nur eine der beiden Voraussetzungen genügt nicht, wie die folgenden beiden Beispiele zeigen:

8 ist durch 2 teilbar ∧ 8 ist *nicht* durch 3 teilbar ⇒ 8 ist *nicht* durch 6 teilbar.

9 ist *nicht* durch 2 teilbar ∧ 9 ist durch 3 teilbar ⇒ 9 ist *nicht* durch 6 teilbar.

Die *Oder-Verknüpfung* oder *Disjunktion* zweier Aussagen ist wahr, wenn *mindestens eine* der Teilaussagen wahr ist. Ein anschauliches Beispiel:

Wenn Sie eine Radtour machen oder schwimmen gehen, tun Sie etwas für Ihre Gesundheit.

Die formale Schreibweise mithilfe des Oder-Zeichens ∨ lautet:

Sie machen eine Radtour ∨ Sie gehen schwimmen ⇒ Sie tun etwas für Ihre Gesundheit.

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya

Je nachdem, wie lange die Radtour und der Schwimmbadaufenthalt dauern, ist es kein Problem, am selben Tag beides zu machen. Aber auch, wenn Sie nur eine der beiden Aktivitäten schaffen, ist diese zweifellos förderlich für Ihre Gesundheit.[5]

Die Wahrheitstabelle für die Oder-Verknüpfung sehen Sie in Tabelle 2.4.

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabelle 2.4 Wahrheitstabelle der Oder-Verknüpfung

Für Und- und Oder-Verknüpfungen gelten teils gleiche, teils ähnliche Gesetze wie für arithmetische Operationen. Hier sind die wichtigsten im Überblick:

- *Neutralitätsgesetze*: Genau wie Addition und Multiplikation haben sie jeweils ein neutrales Element: Bei der Und-Verknüpfung ist es 1 wie bei der Multiplikation, bei der Oder-Verknüpfung 0 wie bei der Addition. Das heißt: $a \wedge 1 = a$, $b \vee 0 = b$. Das lässt sich leicht überprüfen:
  - $0 \wedge 1 = 0$
  - $1 \wedge 1 = 1$
  - $0 \vee 0 = 0$
  - $1 \vee 0 = 1$

  Es ist übrigens kein Zufall, dass sich die Und-Verknüpfung in diesem Punkt wie die Multiplikation und die Oder-Verknüpfung wie die Addition verhält; diese Operationen haben auch sonst jeweils vieles gemeinsam, was man sich beim Design von Schaltkreisen zunutze macht.
- *Kommutativgesetze*:
  - $A \wedge B = B \wedge A$
  - $A \vee B = B \vee A$
- *Assoziativgesetze*:
  - $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
  - $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

5 Ich hoffe, dass die COVID-19-Pandemie zu dem Zeitpunkt, zu dem Sie dies lesen, so weit unter Kontrolle ist, dass die Schwimmbäder wieder geöffnet sind und man sie gefahrlos besuchen kann.

© Rheinwerk Verlag, Bonn 2024

- *Distributivgesetze*:
  - $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  - $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- *De Morgansche Gesetze*[6]:
  - $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
  - $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Außer den De Morganschen Gesetzen sollten Sie alle hier aufgeführten Regeln aus der Mathematik der Grundrechenarten kennen.

Eine weitere logische Verknüpfung ist in der Informatik wesentlich verbreiteter als in der Mathematik und besitzt daher kein eigenes mathematisches Symbol: Eine *Exklusiv-Oder-Verknüpfung* zweier Wahrheitswerte (nach dem englischen *»exclusive or«* abgekürzt als *XOR*), auch Entweder-Oder genannt, ist nur dann wahr, wenn *genau eine* Teilaussage wahr ist. Hier ist ein sprachlich-anschauliches Beispiel:

Wenn ich entweder frei habe oder Homeoffice mache, darf ich zu Hause bleiben.

Formal dargestellt:

Ich habe frei. XOR Ich mache Homeoffice. ⇒ Ich darf zu Hause bleiben.

Wenn ich Homeoffice mache, habe ich natürlich nicht frei, und wenn ich frei habe, brauche ich auch im Homeoffice nicht zu arbeiten. Es kann also nur eine der beiden Teilbedingungen erfüllt sein, aber in beiden Fällen habe ich – zumindest bezüglich meines Arbeitgebers – das Recht, zu Hause zu bleiben.

Exklusiv-Oder wird auch als *Antivalenz* bezeichnet, weil es sich um das Gegenteil der Äquivalenz handelt. Umgekehrt wird die Äquivalenz als Gegenteil von XOR auch mit der Abkürzung XNOR bezeichnet.

Die Wahrheitstabelle der Exklusiv-Oder-Verknüpfung wird in Tabelle 2.5 gezeigt.

XOR	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabelle 2.5 Wahrheitstabelle der Exklusiv-Oder-Verknüpfung

6 Benannt nach dem britischen Mathematiker *Augustus De Morgan*

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya

Wenn Sie mit einer Programmiersprache oder sonstiger Software arbeiten müssen, die keine Exklusiv-Oder-Verknüpfung enthält, können Sie die folgende Formel verwenden, um sie mithilfe »normaler« Und- und Oder-Operationen nachzubilden:

$$A\ XOR\ B \Leftrightarrow (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

Schaltalgebra

Boolesche Algebra wird auch als *Schaltalgebra* bezeichnet. Im engeren Sinne handelt es sich um die Anwendung der booleschen Algebra auf den Entwurf elektronischer Schaltkreise, die die kleinsten Einheiten der Computerhardware und speziellerer elektronischer Geräte ausmachen.

Wie Ihnen vermutlich bekannt ist, codiert der Zustand »Strom fließt« den Wert 1 oder »wahr«, der gegenteilige Zustand dagegen 0 oder »falsch«. Im Prinzip handelt es sich bei Eingabewerten für Schaltungen um Schalter, die ein- oder ausgeschaltet werden, damit Strom fließt oder nicht, während die Ausgabewerte entweder angezeigt werden (in sehr einfachen Fällen etwa durch das Leuchten oder Nichtleuchten von LEDs) oder aber als Eingabewerte für weitere Schalter dienen. Denn eine Besonderheit der hier verwendeten Schalter ist, dass sie keine mechanischen Teile besitzen, sondern wiederum durch Strom gesteuert werden: Es handelt sich um extrem miniaturisierte Versionen des 1947 erfundenen Transistors.

Die allerersten elektronischen Computer verwendeten die teureren, stromhungrigeren und störanfälligeren Elektronenröhren, und noch davor gab es elektromechanische Rechner von Pionieren wie Konrad Zuse, in denen elektromagnetische Relais zum Einsatz kamen – Schalter, die zwar ebenfalls durch Strom gesteuert, aber durch diesen Strom tatsächlich mechanisch ein- und ausgeschaltet werden.

Intuitiv können Sie sich das logische Oder als zwei parallel angeordnete Schalter vorstellen, während das logische Und eine Reihenschaltung wäre. Entsprechend genügt es beim Oder, wenn einer der beiden Schalter geschlossen ist, während beim Und beide geschlossen sein müssen. In der Praxis werden diese Schaltungen durch komplexere Kombinationen gebaut, deren Betrachtung hier zu weit führen würde.[7]

Für die Kombination zweier Eingabewerte, die jeweils 0 oder 1 sein können, sind Schaltungen denkbar, die alle in Tabelle 2.6 aufgelisteten Ergebnisse liefern können – und je nach konkretem Anwendungszweck in einem elektronischen Baustein werden viele davon auch tatsächlich benötigt.

7 Im IT-Handbuch finden Sie dagegen einen Abschnitt, in dem der Aufbau einiger wichtiger Schaltungen erläutert wird.

© Rheinwerk Verlag, Bonn 2024

a	b	f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabelle 2.6 Alle denkbaren Schaltfunktionen für zwei binäre Eingabewerte

Einige der Funktionen dürften Sie wiedererkennen: f6 ist XOR, f8 ist das logische Und, f14 das logische Oder, f9 die Äquivalenz/XNOR und f11 die Implikation.

Einige weitere Funktionen in der Tabelle sind die Umkehrungen der bereits bekannten Funktionen: f7 ist NAND, also $\neg(A \wedge B)$, f1 ist NOR, das heißt $\neg(A \vee B)$. Ein interessanter Fakt ist, dass Und-Gatter und Oder-Gatter in echten Schaltungen in der Regel als NAND beziehungsweise NOR mit verneinten Eingängen gebaut werden.

Beim Design von Schaltungen wird besonderes Augenmerk auf diejenigen Funktionen gelegt, bei denen genau eines der vier (beziehungsweise 2^n für n Eingangswerte) Ergebnisse 1 ist, sowie auf diejenigen Funktionen, bei denen genau ein Ergebnis 0 ist. Alle anderen denkbaren Schaltungen lassen sich aus Kombinationen daraus zusammensetzen. Funktionen mit genau einer 1 (f1, f2, f4 und f8) werden *Minterme* oder *Konjunktive Normalform* (*KNF*) genannt – Letzteres liegt daran, dass es sich um Varianten der Konjunktion (logisches Und) handelt. Funktionen mit nur einer 0 (f7, f11, f13, f14) heißen entsprechend *Maxterme* oder *Disjunktive Normalform* (*DNF*).

2.1.4 Mengen

Ein weiteres Teilgebiet der Mathematik, das besondere Bedeutung in der Informatik hat, ist die *Mengenlehre* – beispielsweise basieren relationale Datenbanken wie MySQL oder SQLite darauf, aber auch bei der Betrachtung diverser Datenstrukturen und Algorithmen werden Ihnen die Mengen und Operationen mit ihnen wiederbegegnen.

Mengendefinition

Eine *Menge* ist eine Ansammlung verschiedener Elemente. Als konkretes Beispiel werden in der Mathematik typischerweise Zahlen verwendet, aber im Prinzip gelten die Regeln der Mengenlehre für jede Gruppe von Objekten mit unterschiedlichen

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya

Eigenschaften. Als ich 1978 eingeschult wurde, gab es für den Mathematikunterricht beispielsweise einen Kasten kleiner Plastikplättchen mit verschiedenen Unterscheidungsmerkmalen wie Farbe, Form und Größe, an denen sich Mengenoperationen sehr anschaulich demonstrieren lassen.[8]

Eine Mengendefinition steht grundsätzlich zwischen geschweiften Klammern (in diesem Zusammenhang *Mengenklammern* genannt) und wird entweder als Liste aller ihrer Elemente oder durch einen Definitionsbereich angegeben. Im ersteren Fall ist die Menge stets endlich, hat also eine absolute Anzahl von Elementen. Beispiele:

$$M = \{1,2,3\}$$

$$N = \{3,4,5,6\}$$

Die Reihenfolge, in der die Elemente einer Menge angegeben werden, spielt keine Rolle. $\{1,2,3\}$, $\{3,2,1\}$ oder $\{2,1,3\}$ stellen jeweils dieselbe Menge dar.

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt *Kardinalität* oder *Mächtigkeit* dieser Menge und wird $|M|$ geschrieben. Für die obigen Beispiele gilt (wie Sie leicht durch Zählen herausfinden können):

$$|M| = 3$$

$$|N| = 4$$

Wird eine Menge dagegen durch einen Definitionsbereich angegeben, kann ihre Kardinalität je nach konkreter Definition endlich sein oder nicht. Betrachten Sie dazu die folgenden drei Beispiele:

$$P = \{x \mid x \in \mathbb{N} \land x > 1 \land x < 11\}$$

$$Q = \{x \mid x \in \mathbb{N} \land x > 1\}$$

$$R = \{x \mid x \in \mathbb{R} \land x \geq 0 \land x \leq 1\}$$

Hier sind zunächst einige Erläuterungen erforderlich. Die Schreibweise $\{x|\ldots\}$ wird als »Menge aller x, für die gilt: …« gelesen. Nach dem | folgt die Definition, im obigen Fall in Form von Verknüpfungen per logischem Und. Das heißt, jedes x muss alle genannten Bedingungen erfüllen. Das Zeichen $\in$ heißt »ist Element von« und bedeutet, dass

8 Den Mathematikunterricht mit Mengenlehre zu beginnen, war Teil der Initiative »Neue Mathematik«, die in den 1960er-Jahren begann und bis etwa Ende der 70er-Jahre dauerte. Statt in der Grundschule ausschließlich Arithmetik zu lehren, sollte logisches Denken gefördert werden. Der konservativer werdende Zeitgeist der 1980er verwarf solche Reformbemühungen zu großen Teilen wieder, bevor ausreichende Praxiserfahrungen mit ihren Vor- und Nachteilen gemacht werden konnten.

© Rheinwerk Verlag, Bonn 2024

der davorstehende Ausdruck ein Element der dahinterstehenden Menge ist. $\mathbb{N}$ ist dabei die Menge der natürlichen Zahlen, also $\{1,2,3,...\}$[9]. $\mathbb{R}$ dagegen ist die Menge der reellen Zahlen. Das ist die Gesamtheit aller abbrechenden, aller periodischen und aller nichtabbrechenden, nichtperiodischen Dezimalbrüche. Sowohl der Operator $\in$ als auch die Grundzahlenmengen der Mathematik werden noch näher erläutert.

Für die Kardinalitäten der obigen Mengen gilt:

$|P| = 9$, denn $P = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Die Kardinalität von Q und R ist dagegen jeweils unendlich, denn es gilt $Q = \{2,3,4,...\}$ bis in alle Ewigkeit, während R zwar nur einen begrenzten Ausschnitt von $\mathbb{R}$ repräsentiert (nämlich die reellen Zahlen von 0 bis 1, jeweils einschließlich), Sie jedoch zwischen zwei Elementen dieser Menge immer beliebig viele weitere Elemente finden.

Die Menge Q heißt *abzählbar unendlich*, weil die Elemente dieser Menge durchnummeriert werden können. Man spricht in diesem Fall auch von einer *Bijektion* oder *Eineindeutigkeit* zwischen der Menge $\mathbb{N}$ und der Menge Q, weil jeweils genau ein Element der einen Menge genau einem Element der anderen Menge zugeordnet werden kann.

Ein eigenes Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Eigenschaften abzählbar unendlicher Mengen befasst, heißt *Kombinatorik*. Ihre Regeln gelten zum Teil auch für endliche Teilmengen solcher Mengen. Ein noch allgemeinerer Oberbegriff für die Beschäftigung mit abzählbaren Mengen und ähnlichen Strukturen ist *diskrete Mathematik*, wobei »diskret« hier nicht etwa für »verschwiegen« (engl. *discreet*) steht, sondern für »individuell unterscheidbar« (engl. *discrete*).

Mengenoperationen

Für die Beziehungen zwischen Mengen und ihren Elementen sowie zwischen mehreren Mengen sind zahlreiche mathematische Operationen definiert. Die einfachsten sind $\in$ (»ist Element von«) und $\notin$ (»ist nicht Element von«) – sie besagen ganz intuitiv, ob ein bestimmtes Element zu einer Menge gehört oder nicht.

Beispiele:

- Für die Menge $M = \{1,2,3\}$ gilt $1 \in M$, aber $4 \notin M$.
- Für die Menge $N = \{n|n > 2\}$ gilt $3 \in M$, aber $2 \notin M$.
- Für die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gilt $1 \in \mathbb{N}$, aber $-1 \notin \mathbb{N}$ und $1{,}5 \notin \mathbb{N}$.

Zwischen zwei Mengen gibt es zahlreiche weitere interessante Beziehungen.

9 Es gibt verschiedene Definitionen der natürlichen Zahlen, die sich nicht einig sind, ob die Null dazugehört oder nicht.

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya

Eine Menge M heißt *Teilmenge* einer Menge N, wenn für jedes $x \in M$ auch $x \in N$ gilt. Dies wird durch das Zeichen $\subseteq$ (Teilmenge oder gleich) dargestellt: $M \subseteq N$.

Im engeren Sinne ist M eine *echte Teilmenge* von N, wenn für jedes $x \in M$ auch $x \in N$ gilt, es aber mindestens ein $x \in N$ gibt, für das $x \notin M$ gilt. Für diese Beziehung wird meist das Zeichen $\subset$ verwendet: $M \subset N$. Manchmal wird sogar das spezielle Zeichen $\subsetneq$ (Teilmenge, aber nicht gleich) benutzt, um ganz besonders klar zu machen, dass es um eine echte Teilmenge geht.

Wenn die Menge M Teilmenge der Menge N ist, dann heißt N umgekehrt *Obermenge* von M. In diesem Fall wird $N \supseteq M$ (Obermenge oder gleich) geschrieben, wenn $M \subseteq N$ gilt. Für die *echte Obermenge* (nicht gleich) dienen die Schreibweisen $N \supset M$ oder strenger $N \supsetneq M$ (Obermenge, aber nicht gleich).

Dass $\subset$, $\subseteq$, $\supset$ und $\supseteq$ wie abgerundete Formen von $<$, $\leq$, $>$ beziehungsweise $\geq$ aussehen, ist Absicht, denn es handelt sich im Prinzip um deren Entsprechungen für Mengen.

Betrachten Sie die folgenden Mengen:

$$M = \{2,4,6\}$$

$$N = \{2,4,6\}$$

$$P = \{2,4,6,8\}$$

Es gelten unter anderem die folgenden Beziehungen:

$$M \subseteq N, M \subseteq P, M \subset P$$

$$N \supseteq M, P \supseteq M, P \supset M$$

Die in der Mathematik hauptsächlich verwendeten Zahlenmengen lassen sich als Abfolgen von Teil- beziehungsweise Obermengen schreiben:

- Den Anfang machen die *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$, intuitiv definiert als

  $$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\dots\}$$

  oder

  $$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\dots\}$$

  Ob die 0 zu den natürlichen Zahlen gehört oder nicht, ist nämlich umstritten. Traditionell wird $\mathbb{N}_0$ geschrieben, wenn die Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0 gemeint ist, aber gemäß der DIN-Norm 5473 gehört die 0 dazu, während die Menge ohne 0 als $\mathbb{N}^*$ geschrieben wird.

- Bei den *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ kommen die negativen Zahlen hinzu:

  $$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3,\dots\}$$

© Rheinwerk Verlag, Bonn 2024

- Die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ sind alle Brüche aus ganzen Zahlen (wobei der Nenner natürlich nicht 0 sein darf):

  $$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q} \wedge p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$$

  Werden rationale Zahlen in Dezimalzahlen umgerechnet, ergeben sich stets abbrechende oder periodische Dezimalbrüche. Das heißt, sie haben entweder endlich viele Nachkommastellen wie

  $$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

  oder eine sich endlos wiederholende Folge identischer Ziffern oder Zifferngruppen wie

  $$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 0{,}3333333...$$

  oder

  $$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857} = 0{,}14258714258714...$$

- Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ sind alle rationalen Zahlen sowie nichtabbrechende und nichtperiodische Dezimalbrüche. Sie können also unendlich viele Nachkommastellen haben, die sich wiederholen, so dass sie sich nicht als Brüche schreiben lassen. Prominente Beispiele sind die Kreiszahl $\pi = 3{,}1415926...$, die Eulersche Zahl $e = 2{,}718281828459...$ oder $\sqrt{2} = 1{,}414213562373...$

  Die einzige Gemeinsamkeit aller reellen Zahlen ist, dass ihr Quadrat niemals kleiner als 0 ist, sodass sie sich wie folgt definieren lassen:

  $$\mathbb{R} = \{x \mid x^2 \geq 0\}$$

- Die allgemeinste Zahlenmenge sind die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$. Sie überwinden die Einschränkung der reellen Zahlen, dass aus negativen Zahlen keine Wurzel gezogen werden kann (da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt). Jede komplexe Zahl wird als $a + b \cdot i$ definiert. Dabei ist i definiert als $i^2 = -1$, während a und b reelle Zahlen sind. Man bezeichnet a als *Realteil* und $b \cdot i$ als *Imaginärteil* der Zahl.

Wie die obigen Definitionen zeigen, bilden die mathematischen Zahlenmengen eine Kette von Teilmengen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

beziehungsweise Obermengen:

$$\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$$

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya

Weil dies vielleicht weniger einleuchtend ist als die anderen Teilmengeneigenschaften: Die reellen Zahlen sind diejenige Teilmenge der komplexen Zahlen $a + b \cdot i$, bei denen $b = 0$ ist.

Was die Kardinalität der offiziellen Zahlenmengen angeht, sind die natürlichen Zahlen selbst abzählbar unendlich, die ganzen Zahlen ebenfalls. Weniger intuitiv einleuchtend dürfte sein, dass auch die rationalen Zahlen abzählbar unendlich sind: Der Mathematiker *Georg Cantor* bewies, dass sich alle existierenden Brüche in eine abzählbare Reihenfolge bringen lassen.

Eine Menge kann nicht nur Zahlen enthalten, sondern auch andere Mengen; dies kann beliebig tief verschachtelt werden. Hier sehen Sie zum Beispiel die Menge aller Mengen natürlicher Zahlen (ohne 0), die kleiner als 3 sind:

$$\big\{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\}$$

Eine besondere Menge ist in diesem Zusammenhang die *Potenzmenge*. Es handelt sich um die Menge aller Teilmengen einer Menge. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(N)$ einer Menge N ist genauer gesagt die Menge aller Mengen M, für die $M \subseteq N$ gilt. Die Menge

$$N = \{1,2,3\}$$

hat beispielsweise die Potenzmenge:

$$\mathcal{P}(N) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Die Menge $\emptyset$, auch $\{\}$ geschrieben, ist die *leere Menge*. Sie enthält keine Elemente, hat also die Kardinalität 0.

Die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen hat die Kardinalität 2^n; bei der obigen Menge N mit drei Elementen also beispielsweise $2^3 = 8$.

Eine weitere Beziehung zwischen zwei Mengen ist die *Vereinigungsmenge*. Die Vereinigungsmenge zweier Mengen M und N, geschrieben $M \cup N$, ist die Menge aller Werte, die Element von M oder Element von N sind. Formal geschrieben:

$$M \cup N \coloneqq \{x | x \in M \vee x \in N\}$$

Das Zeichen $\cup$ sieht wie ein abgerundetes logisches Oder aus, weil es sich um die Mengenentsprechung dieser Operation handelt. Die Schreibweise := heißt »ist definiert als« und bedeutet, dass die Formulierung davor durch den Ausdruck dahinter definiert wird.

© Rheinwerk Verlag, Bonn 2024

Beispiel:

$M = \{1,2,3,4\}$

$N = \{3,4,5,6\}$

$M \cup N = \{1,2,3,4,5,6\}$

Die *Schnittmenge* zweier Mengen M und N ist dagegen die Menge aller Werte, die sowohl Element von M als auch Element von N sind:

$M \cap N \coloneqq \{x|x \in M \land x \in N\}$

Dies entspricht der Anwendung des logischen Und auf Mengen, worauf die Ähnlichkeit der Symbole basiert.

Auch für die Schnittmenge sehen Sie hier ein Beispiel:

$M = \{1,2,3,4\}$

$N = \{3,4,5,6\}$

$M \cap N = \{3,4\}$

Wie für die arithmetischen und die logischen Operationen gelten auch für die Vereinigungs- und Schnittmengenoperationen grundlegende mathematische Gesetze:

- *Neutralitätsgesetze*:
  - $M \cup \emptyset = M$
  - $M \cap G = M$

  Die spezielle Menge G als neutrales Element der Schnittmenge ist die *Grundmenge*, als deren Teilmenge M definiert ist – bei einfachen endlichen Mengen natürlicher Zahlen beispielsweise die Menge aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.
- *Kommutativgesetze*:
  - $M \cup N = N \cup M$
  - $M \cap N = N \cap M$
- *Assoziativgesetze*:
  - $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$
  - $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$
- *Distributivgesetze*:
  - $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$
  - $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya

Eine weitere Mengenoperation ist die *Differenzmenge*, auch *Komplement*, *Komplementärmenge* oder *Restmenge* genannt: $M \setminus N$ (M ohne N) ist die Menge aller Elemente von M, die nicht gleichzeitig Element von N sind, also:

$$M \setminus N \coloneqq \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$$

Beispiel:

$$M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$N = \{2,4,6,8,10\}$$

$$M \setminus N = \{1,3,5,7,9\}$$

Grundsätzlich immer gilt:

$$M \setminus M = \emptyset$$

$$M \setminus \emptyset = M$$

Als letzte Mengenoperation sollten Sie noch das *kartesische Produkt*[10] kennen. Es wird auch als *Kreuzprodukt* bezeichnet, was jedoch aufgrund der Verwechslungsgefahr mit der gleichnamigen Vektoroperation (siehe Abschnitt 2.2.2, »Vektoren«) nicht ideal ist. Beim kartesischen Produkt wird jedes Element einer Menge mit jedem Element einer zweiten Menge verknüpft, wobei die Ergebnisse jedoch keine Menge von Mengen sind, sondern eine Menge *geordneter Paare*, bei denen die Reihenfolge der Elemente anders als in einer Menge eine Rolle spielt und in denen es auch gleiche Elemente geben kann. Die Operation wird mit dem Zeichen × geschrieben.

Hier sehen Sie ein Beispiel:

$$M = \{1,2,3\}$$

$$N = \{3,4,5\}$$

$$M \times N = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}$$

Allgemein wird jedes Element eines kartesischen Produkts aus n Mengen als *n-Tupel* bezeichnet. Hier sind beispielsweise 3-Tupel als Ergebnis aus dem kartesischen Produkt dreier Mengen:

$$M = \{1,2\}$$

$$N = \{2,3\}$$

10 Der Mode seiner Zeit folgend, latinisierte der französische Mathematiker und Philosoph René Descartes seinen Namen zu Renatus Cartesius, wonach einige von ihm eingeführte oder bekannt gemachte mathematische Konzepte als »kartesisch« bezeichnet werden.

© Rheinwerk Verlag, Bonn 2024

$$P = \{3,4\}$$

$$M \times N \times P = \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,3), (1,3,4), (2,2,3), (2,2,4), (2,3,3), (2,3,4)\}$$

Die Kardinalität eines kartesischen Produkts, das heißt die Anzahl der n-Tupel, entspricht dem Produkt der Kardinalitäten aller multiplizierten Mengen. Im ersten Beispiel oben also $3 \cdot 3 = 9$, im zweiten $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

2.1.5 Folgen und Reihen

Verwandt mit den Mengen, aber nicht dasselbe sind die sogenannten *Folgen*. Eine Folge ist eine abzählbare (aber nicht notwendigerweise endliche) Abfolge von Zahlen. Das heißt, dass jede Zahl einer Folge mit einer natürlichen Zahl durchnummeriert werden kann. Dies wird zum Beispiel als

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

geschrieben. Die tiefgestellte natürliche Zahl neben jedem Element wird dabei als *Index* bezeichnet.

Die einfachste Folge sind die natürlichen Zahlen selbst, die durch folgende Vorschrift definiert werden:

$$a_n = n$$

Andere Folgen werden durch eine arithmetische Operation auf dem Index definiert. Beispiel:

$$b_n = 2n$$

Die Folge enthält also die Zahlen $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 6$ und so weiter.

Bei wieder anderen Folgen geht ein Element aus einem oder mehreren Vorgängern hervor, wie etwa:

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 1$$

$$c_n = c_{n-2} + c_{n-1} \text{ für } n > 2$$

Der Anfang dieser Folge ist 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... Es handelt sich um die berühmte *Fibonacci-Folge*, die unter anderem natürliche Wachstumsvorgänge beschreibt.[11] Das

11 Leonardo Fibonacci, ein italienischer Mathematiker, nach dem die Folge benannt ist (obwohl sie bereits in der Antike bekannt war), nutzte sie im 13. Jahrhundert, um das Wachstum einer Kaninchenpopulation zu beschreiben.

Persönliches Exemplar für Ramazan Sarikaya