Zusammenfassung: Aussagenlogik

Zahlmengen

natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$ oder $\mathbb{N} = \{1; 2; \ldots\}$

Es ist meistens egal, ob die Null zu den natürlichen Zahlen gerechnet wird oder nicht. Wenn es einmal wesentlich ist, schreibt man

$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; \ldots\} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{N}^* = \{1; 2; \ldots\}.$$

Summen und Produkte natürlicher Zahlen sind natürliche Zahlen.

ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\} = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots\}$

Summen, Produkte und Differenzen ganzer Zahlen sind ganze Zahlen.

rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

Summen, Produkte, Differenzen und Quotienten (außer Division durch 0) rationaler Zahlen sind rationale Zahlen.

reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Die reellen Zahlen, die keine rationalen Zahlen sind, heißen irrationale Zahlen.

Summen, Produkte, Differenzen und Quotienten (außer Division durch 0) reeller Zahlen sind reelle Zahlen.

Aussagen

Eine Aussage ist ein feststellender Satz, dem eindeutig einer der beiden Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch* zugeordnet werden kann.

Merke: Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Verknüpfung von Aussagen

Negation (Verneinung) einer Aussage A:

$$\neg A.$$

Lies: „ nicht A“

A	$\neg A$
w	f
f	w

Konjunktion (Und-Verknüpfung) zweier Aussagen A und B:

$$A \wedge B.$$

Lies: „ A und B“

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Disjunktion (Oder-Verknüpfung) zweier Aussagen A und B:

$$A \vee B.$$

Lies: „ A oder B“

Das Zeichen „$\vee$“ kommt vom lateinischen Wort vel.

Achtung: Gemeint ist das „einschließende Oder“, d. h. die Aussagen können auch beide wahr sein.

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

<u>Implikation</u> (Wenn-Dann-Verknüpfung) zweier Aussagen A und B:

$$A \Rightarrow B\ .$$

Lies: „ A impliziert B“ oder „aus A folgt B“
<u>Achtung:</u> Wenn A falsch ist, dann ist $A \Rightarrow B$ wahr, unabhängig vom Wahrheitswert von B.
<u>Merke:</u> $A \Rightarrow B$ ist immer wahr, außer wenn A wahr und B falsch ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

<u>Äquivalenz</u> zweier Aussagen A und B:

$$A \Leftrightarrow B\ .$$

Lies: „ A ist äquivalent zu B“

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

<u>Für Experten:</u> Weitere Verknüpfungen sind
XOR (Entweder-Oder-Verknüpfung; ausschließende Oder-Verknüpfung)
NOR (Nicht-Oder-Verknüpfung)
NAND (Nicht-Und-Verknüpfung)

Für die <u>Reihenfolge</u> bei Verknüpfungen von Aussagen gilt:

0. Klammern
1. $\neg$
2. $\wedge$ und $\vee$
3. $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$

Die folgenden <u>logische Äquivalenzen</u> kann man sich anschaulich überlegen oder mithilfe einer <u>Wahrheitstabelle</u> nachweisen:

$(A \Leftrightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
$(\mathrm{A} \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$
$\neg (A \wedge B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee \neg B$
$\neg (A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \wedge \neg B$

Die beiden letzten Äquivalenzen nennt man die <u>De-Morgan-Regeln</u>.

Quantoren

<u>Existenzquantor</u> $\exists$: „es gibt ein/e/n“
<u>Achtung:</u> Gemeint ist: „es gibt mindestens ein/e/n“
Das Zeichen „$\exists$“ soll an ein umgedrehtes „E“ erinnern.

Die Verneinung von „Es gibt … mit □“ ist „Für alle … gilt die Verneinung von □“.

<u>Allquantor</u> $\forall$: „für alle“
Das Zeichen „$\forall$“ soll an ein umgedrehtes „A“ erinnern.

Die Verneinung von „Für alle … gilt □“ ist „Es gibt ein/e/n …, für den/die/das die Verneinung von □ gilt“.