1. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist ein fundamentales Konzept in der Statistik, das hilft, die Unsicherheit bei zufälligen Ereignissen zu quantifizieren. Dabei geht es darum, wie wahrscheinlich das Eintreten eines bestimmten Ereignisses ist.

1.1. Was sind Wahrscheinlichkeiten?

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gibt an, wie oft ein Ereignis in einer Vielzahl von Versuchen auftritt. Sie wird als Zahl zwischen 0 und 1 ausgedrückt:

- $P(A) = 0$ bedeutet, dass das Ereignis A unmöglich ist.
- $P(A) = 1$ bedeutet, dass das Ereignis A mit Sicherheit eintritt.
- $P(A) = 0.5$ bedeutet, dass das Ereignis A eine **50%-ige Wahrscheinlichkeit** hat.

1.2. Absolute und relative Häufigkeit

Die Häufigkeit eines Ereignisses beschreibt, wie oft ein bestimmtes Ergebnis in einer Reihe von Versuchen beobachtet wird:

- **Absolute Häufigkeit**: Die Anzahl der Male, die ein Ereignis tatsächlich eintritt. Beispiel: Bei 10-maligem Würfeln tritt die „6“ dreimal auf, also ist die absolute Häufigkeit der „6“ gleich 3.

- **Relative Häufigkeit**: Das Verhältnis der absoluten Häufigkeit zur Gesamtzahl der Versuche. Sie gibt an, wie oft das Ereignis im Verhältnis zur Gesamtzahl auftritt und berechnet sich als:

$$\text{Relative Häufigkeit} = \frac{\text{Absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl der Versuche}}$$

Zum Beispiel: Die relative Häufigkeit der „6“ bei 10 Würfen, wenn die „6“ dreimal auftritt, ist $\frac{3}{10} = 0{,}3$ oder 30 %.

Relative Häufigkeiten geben damit eine Schätzung für Wahrscheinlichkeiten, insbesondere wenn eine große Anzahl an Versuchen durchgeführt wird.

1.3. Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten

In einem zufälligen Experiment wird eine Menge von Ergebnissen (Teilmenge von Omega siehe unten), auch **Ereignis** genannt, betrachtet. Ein Ereignis besteht aus einem oder mehreren möglichen Ergebnissen eines Experiments.

- **Ereignis (A)**: Eine bestimmte Auswahl aus den möglichen Ergebnissen. Zum Beispiel: „Eine 6 beim Würfeln".
- **Komplementäres Ereignis ($\overline{A}$)**: Dies beschreibt das Gegenteil des Ereignisses A. Wenn A nicht eintritt, tritt $\overline{A}$ ein. Beispiel: „Keine 6 beim Würfeln".

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird durch die folgende Regel berechnet:
$P(A) = \frac{\text{Günstige Fälle}}{\text{Mögliche Fälle}}$
Beispiel: Beim Würfeln beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln: $P(6) = \frac{1}{6}$

1.4. Omega (Ω) als Ergebnismenge/Ereignisraum

Die Ergebnismenge Ω ist die Menge aller möglichen Ausgänge eines Experiments. Zum Beispiel:

- Beim Würfeln eines sechsseitigen Würfels ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Beim Würfeln von 2 sechsseitigen Würfels ist $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2,), ..., (6,5), (6,6)\}$.
- Beim Ziehen einer Karte aus einem normalen Kartenspiel ist Ω die Menge aller 52 Karten.

1.5. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Die Summe aller Teilwahrscheinlichkeiten muss 1 ergebenen:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Daraus folgt:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A bekannt ist, kann die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses $\overline{A}$ einfach durch folgende Regel berechnet werden: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Beispiel:

- Die Wahrscheinlichkeit, **keine** 6 zu würfeln, ist $P(\overline{6}) = 1 - P(6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
  .

Diese Regel hilft, wenn es einfacher ist, die Wahrscheinlichkeit des Gegenteils eines Ereignisses zu berechnen.

1.6 Laplace-Wahrscheinlichkeit

Die **Laplace-Wahrscheinlichkeit** beschreibt eine spezielle Art der Wahrscheinlichkeit, bei der alle möglichen Ergebnisse bereits bekannt sind und gleich wahrscheinlich sind. Diese Art von Wahrscheinlichkeit wird auch als **a priori Wahrscheinlichkeit** bezeichnet, weil sie nur auf den gegebenen Möglichkeiten und ohne vorherige Daten oder Beobachtungen basiert.

Die Laplace-Formel lautet:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

wobei

- $n(A)$: Anzahl der günstigen Ereignisse,
- $n(\Omega)$: Anzahl aller möglichen Ereignisse im Ereignisraum.

2. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist ein grundlegendes Konzept in der Wahrscheinlichkeitstheorie, das beschreibt, wie die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses beeinflusst wird, wenn bereits Informationen über ein anderes Ereignis vorliegen.

2.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B wird als $P(A \mid B)$ ausgedrückt und ist definiert als:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Dies bedeutet, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung, dass B bereits eingetreten ist, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass sowohl A als auch B eintreten, geteilt durch die Wahrscheinlichkeit von B.

2.2. Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn das Eintreten des einen Ereignisses keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses hat. Mathematisch wird dies ausgedrückt als:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Wenn A und B unabhängig sind, gilt auch:

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

Beispiel: Das Werfen einer Münze und das Würfeln eines Würfels sind unabhängige Ereignisse. Das Ergebnis des Münzwurfs beeinflusst nicht das Ergebnis des Würfelwurfs.

2.3. Anwendungen der bedingten Wahrscheinlichkeit

- **Bayes' Theorem**: Das Bayes-Theorem beschreibt, wie sich die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese (A) ändert, wenn neue Beweise (B) berücksichtigt werden. Es wird häufig in der Statistik und maschinellem Lernen verwendet, um Hypothesen zu bewerten oder Wahrscheinlichkeiten basierend auf beobachteten Daten zu aktualisieren...

  $$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- **Datenanalyse**: Bei der Analyse von Datensätzen ist es oft wichtig zu verstehen, wie bestimmte Merkmale voneinander abhängen. Bedingte Wahrscheinlichkeiten helfen dabei, solche Beziehungen zu modellieren.
  Beispiel:
  Ein Unternehmen möchte verstehen, wie die Kaufwahrscheinlichkeit für ein Produkt von der Altersgruppe abhängt. Indem wir die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(Kauf|Altersgruppe)$ berechnen, können wir gezielte Marketingstrategien für unterschiedliche Altersgruppen entwickeln.

2.4. Der Zusammenhang zwischen bedingter Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse impliziert, dass ihre bedingte Wahrscheinlichkeit gleich der Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Ereignisses ist. Umgekehrt bedeutet eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die nicht gleich der marginalen Wahrscheinlichkeit ist, dass die Ereignisse nicht unabhängig sind.

Beispiel zur Unabhängigkeit: Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person eine bestimmte Krankheit hat, unabhängig davon ist, ob sie raucht oder nicht, dann beeinflusst das Rauchen nicht die Wahrscheinlichkeit der Krankheit.

2.5. Kombinierte Wahrscheinlichkeiten: Multiplikationsregel und Additionsregel

Um die Wahrscheinlichkeit mehrerer Ereignisse zu kombinieren, nutzt man häufig die Multiplikations- und Additionsregel:

Multiplikations-/Produktregel: Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Ereignisse A und B gleichzeitig eintreten, wird durch die bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Diese Regel lässt sich auf mehr als zwei Ereignisse erweitern und ist wichtig für die Modellierung komplexer Systeme.

Additionsregel: Die Wahrscheinlichkeit, dass entweder Ereignis A oder Ereignis B eintritt, ist:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Diese Regel ist nützlich, wenn man die Wahrscheinlichkeit berechnen möchte, dass mindestens eines von mehreren Ereignissen eintritt.

Warum subtrahieren wir $P(A \cap B)$?

Wenn wir einfach $P(A) + P(B)$ addieren, zählen wir die Fälle, in denen beide Ereignisse eintreten, **doppelt**: einmal in $P(A)$ und einmal in $P(B)$. Um diese Doppelerfassung zu korrigieren, müssen wir $P(A \cap B)$ einmal **subtrahieren**.

3. Urnenexperiment mit und ohne Zurücklegen

Das Urnenexperiment ist ein klassisches Beispiel in der Wahrscheinlichkeitstheorie, das zur Veranschaulichung verschiedener Konzepte der Wahrscheinlichkeit verwendet wird. In diesem Experiment ziehen wir Objekte (z. B. Kugeln) aus einer Urne, und je nachdem, ob wir die gezogenen Objekte zurücklegen oder nicht, ergeben sich unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten.

3.1 Urnenexperiment ohne Zurücklegen

- **Beispiel:** Angenommen, wir haben eine Urne mit 3 roten und 2 blauen Kugeln. Wenn wir eine Kugel ziehen, notieren wir ihre Farbe und legen sie nicht zurück in die Urne.

- **Erster Zug:**

  - Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, beträgt $P(\mathrm{Rot}) = \frac{3}{5}$.
  - Die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel zu ziehen, beträgt $P(\mathrm{Blau}) = \frac{2}{5}$.

- **Zweiter Zug:** Angenommen, wir ziehen eine rote Kugel beim ersten Zug. Die Wahrscheinlichkeit, jetzt eine rote Kugel zu ziehen, hat sich geändert, da wir eine Kugel entfernt haben.

  - **Neue Wahrscheinlichkeiten:**
    - Jetzt gibt es nur noch 2 rote Kugeln und 2 blaue Kugeln. Die neuen Wahrscheinlichkeiten sind:
      - $P(\mathrm{Rot} \mid \mathrm{Rot}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
      - $P(\mathrm{Blau} \mid \mathrm{Rot}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich also, da wir die Anzahl der Kugeln in der Urne beeinflussen, indem wir eine Kugel ziehen und nicht zurücklegen.

3.2 Urnenexperiment mit Zurücklegen

- **Beispiel:** Nehmen wir wieder die gleiche Urne mit 3 roten und 2 blauen Kugeln. Diesmal legen wir die gezogene Kugel nach jedem Zug wieder zurück in die Urne.

- **Erster Zug:**

  - Die Wahrscheinlichkeit um eine Kugel zu ziehen sind: $P(\mathrm{Rot}) = \frac{3}{5}$ und $P(\mathrm{Blau}) = \frac{2}{5}$.
  - wir ziehen eine rote Kugel und legen sie wieder zurück

- **Zweiter Zug:** Da die Kugel zurückgelegt wurde, bleiben die Wahrscheinlichkeiten unverändert:

  - $P(\mathrm{Rot} \mid \mathrm{Rot}) = \frac{3}{5}$
  - $P(\mathrm{Blau} \mid \mathrm{Rot}) = \frac{2}{5}$

Hier bleibt die Wahrscheinlichkeit für jeden Zug konstant, da die Anzahl der Kugeln in der Urne gleich bleibt.

Beispiel für ein Urnenexperiment ohne zurücklegen:

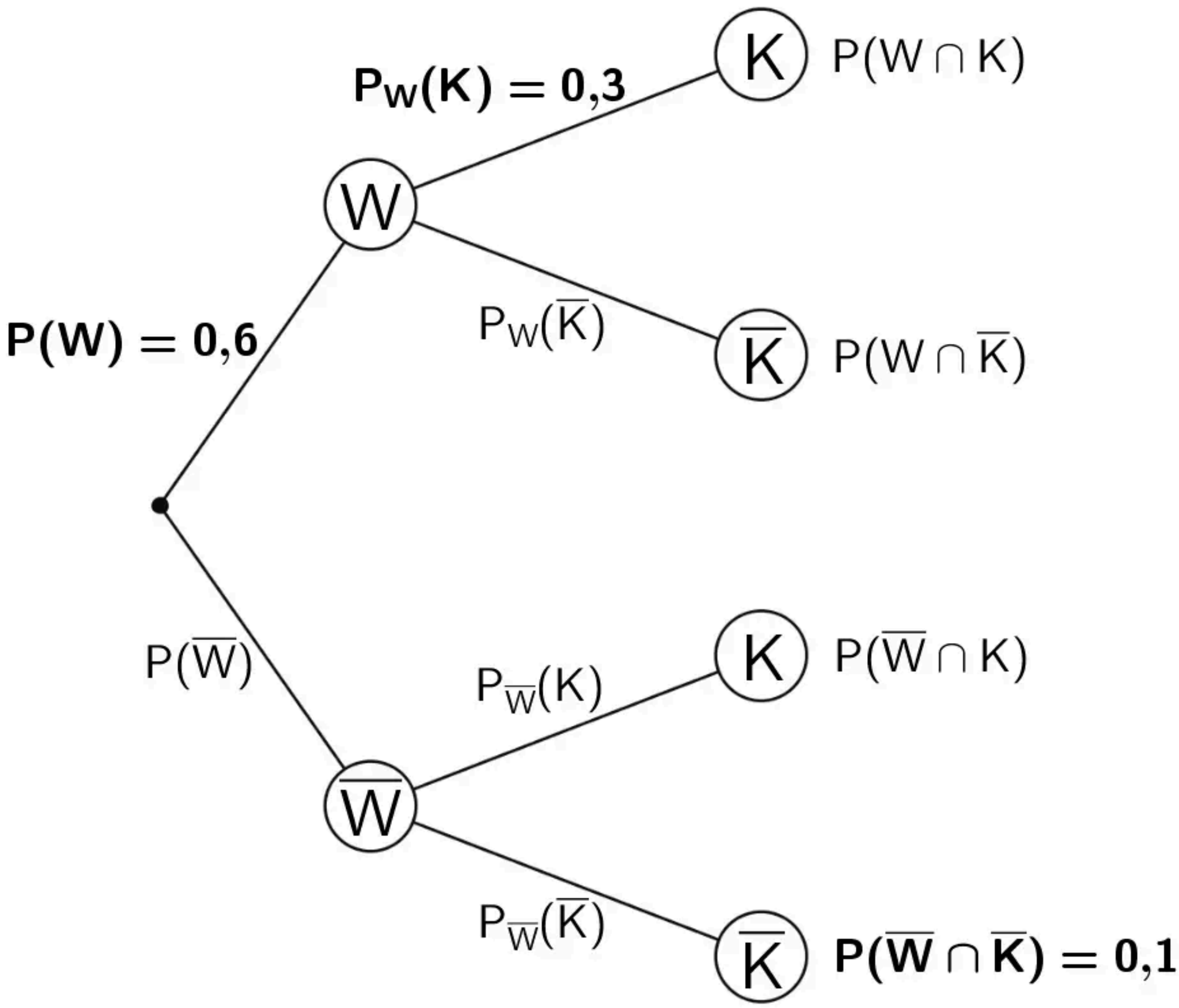
Auf Wunsch der Mitarbeiter veranstaltet eine Firma einen sportlichen Betriebsausflug. Alle Mitarbeiter nehmen daran teil. Die Mitarbeiter können zwischen einer Wanderung und einem Fahrradausflug wählen. Außerdem besteht die Möglichkeit, sich jeweils für eine kürzere oder eine längere Strecke zu entscheiden. 60 % der Mitarbeiter entscheiden sich für eine Wanderung. Davon wählen 30 % die kürzere Strecke. 10 % aller Mitarbeiter nehmen an dem Fahrradausflug teil und wählen die längere Strecke.

Fertigen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiger Mitarbeiter eine kürzere Strecke wählt.

Die Ereignisse können beispielsweise wie folgt festgelegt werden:

W: „Ein Mitarbeiter entscheidet sich für die Wanderung."
$\overline{W}$: „Ein Mitarbeiter entscheidet sich für den Fahrradausflug."
K: „Ein Mitarbeiter entscheidet sich für die kürzere Strecke."

Berechnung mit Hilfe eines Baumdiagramms:



Berechnung mit Hilfe eines Baumdiagramms:

Gegeben:

$P(W) = 0,6$

$P_W(K) = 0,3$

$P(\overline{W} \cap \overline{K}) = 0,1$

Additionsregel (für komplementäre Ereignisse):

$P(W) + P(\overline{W}) = 1$

$P(\overline{W}) = P(W) - 1$

$P(\overline{W}) = 0,4$

$P_W(\overline{K}) + P_W(K) = 1$

$P_W(\overline{K}) = 1 - P_W(K) = 1 - 0,3$

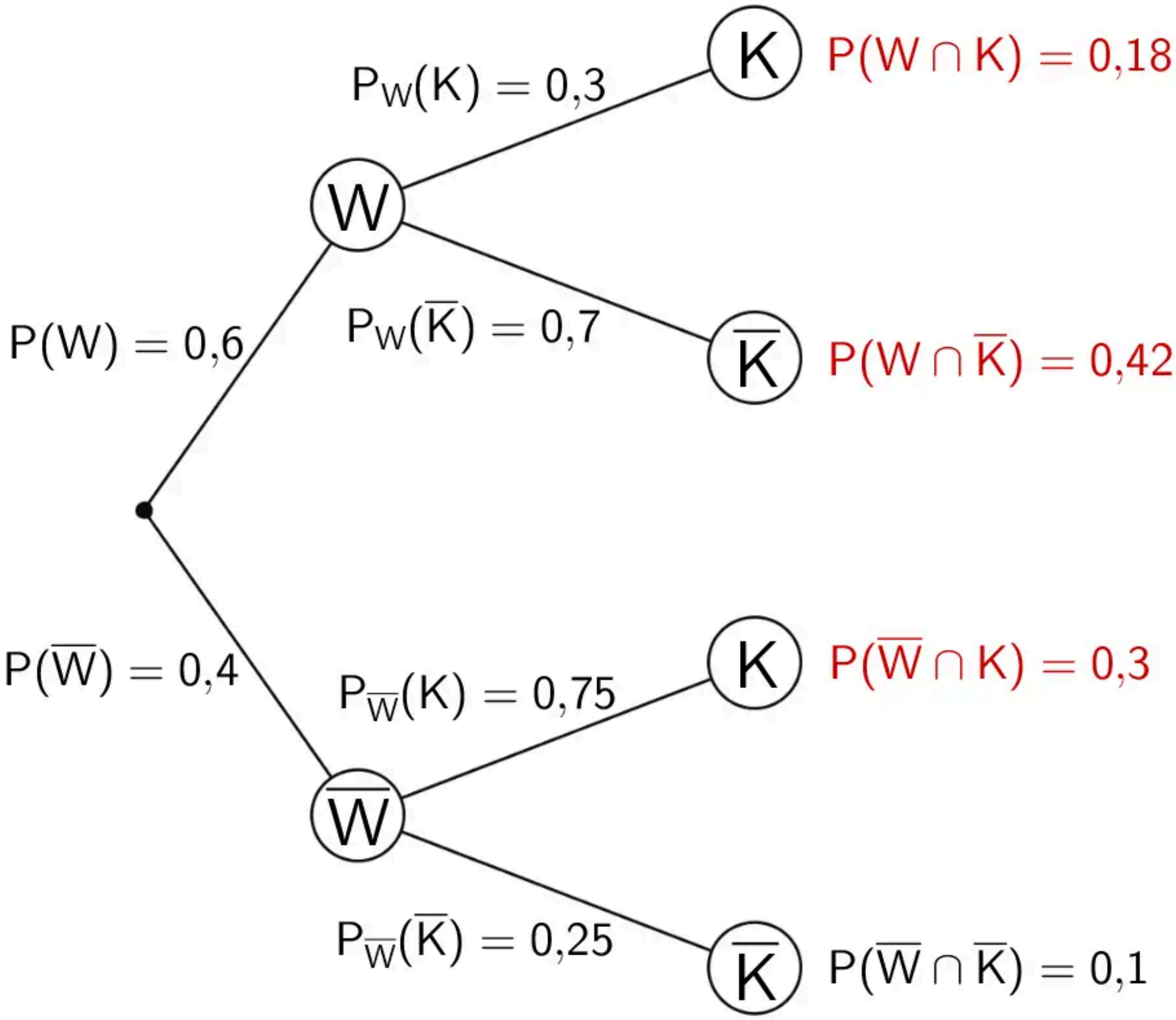
$P_W(\overline{K}) = 0,7$

Produktregel:

$P(\overline{W}) * P_{\overline{W}}(\overline{K}) = P(\overline{W} \cap \overline{K})$

$P_{\overline{W}}(\overline{K}) = \frac{P(\overline{W} \cap \overline{K})}{P(\overline{W})} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$

$P_{\overline{W}}(W) * P_{\overline{W}}(\overline{K}) = 1P(\overline{W} \cap \overline{K})$



K
$P(W \cap K) = 0{,}18$
$P_W(K) = 0{,}3$
W
$P(W) = 0{,}6$
$P_W(\overline{K}) = 0{,}7$
$\overline{K}$
$P(W \cap \overline{K}) = 0{,}42$
K
$P(\overline{W} \cap K) = 0{,}3$
$P(\overline{W}) = 0{,}4$
$P_{\overline{W}}(K) = 0{,}75$
$\overline{W}$
$P_{\overline{W}}(\overline{K}) = 0{,}25$
$\overline{K}$
$P(\overline{W} \cap \overline{K}) = 0{,}1$