MACROECONOMÍA II
Ayudantía 4.
Política Monetaria y Política Fiscal en el Largo Plazo.

Ayudantes: Gianfranco Quequezana (gquequezana@uc.cl)
Oscar Herrera (olherrera@uc.cl)
Alex Nannig (anannig@uc.cl)

1. Hiperinflación.

Típicamente, las hiperinflaciones son períodos donde el nivel de precios crece de forma muy rápida, continua y persistente.

I. Explique por qué muchas veces estos episodios se relacionan con problemas severos en la política fiscal. En su respuesta refiérase al llamado impuesto inflación.

Pauta.

Para hablar entre la relación entre política fiscal e hiperinflación, primero hay que referirse al señoreaje, El señoreaje suele ser definido como la cantidad de bienes y servicios que puede comprar el gobierno mediante una emisión monetaria.

$$S \equiv \frac{\Delta H}{P}$$

Una vez que el gobierno compra bienes, este distribuye el dinero en la economía. Suponiendo un mundo donde sólo existe y se usa circulante, tenemos que:

$$S = \frac{\Delta M}{P}$$

con $M = C$. En este mundo, al aumentar el señoreaje la política fiscal afectaría directamente el nivel de precios, lo que es fácil de explicar bajo nuestro modelo de equilibrio monetario de largo plazo (Ayudantía 3).

Volviendo al caso general, sea s el señoreaje en estado estacionario, entonces:

$$s = \frac{\pi}{1+\pi} h$$

En estado estacionario la inflación es constante y la tasa real también, ya que esta depende de parámetros estructurales de la economía (β). Como la velocidad del dinero depende de la tasa de interés y en estado estacionario la tasa de interés nominal es constante, entonces la inflación es igual a la tasa de crecimiento del dinero sin crecimiento real:

$$\pi^{ss} = \theta^{ss} \iff \pi = \theta$$

Esto implica que el señoreaje de estado estacionario se puede expresar como:

$$s = \frac{\theta}{1+\theta} h$$

Si θ es pequeño:

$$s \approx \theta h$$

Sin embargo, como fue visto en clases, la base monetaria de estado estacionario puede depender de θ ($h = \theta e^{-\alpha(\theta-\gamma)}$), por lo que una forma más precisa de denotar el señoreaje de estado estacionario sería la siguiente:

$$s \approx \theta \cdot h(\theta)$$

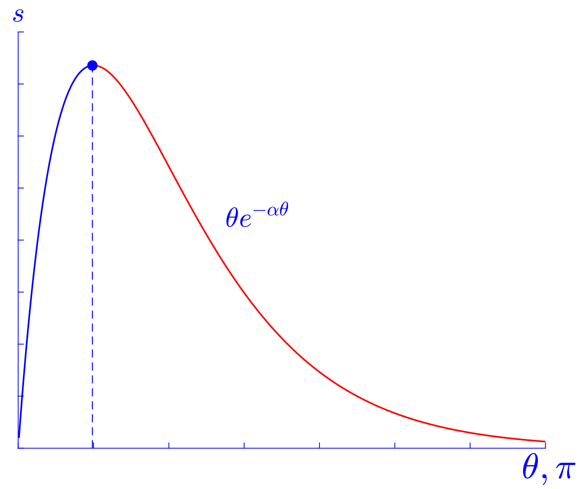
El crecimiento del dinero θ guarda una relación directa con la inflación de estado estacionario π. Al hacer crecer el dinero controlando θ, el fisco generaría ingresos por señoreaje. Los ingresos por este concepto suelen ser mayores que el impacto a la inflación en tramos bajos de crecimeinto monetario. Sin embargo, luego de determinado punto, el impacto sobre la inflación es mucho mayor que el de la recaudación fiscal y esta comienza a decrecer.

Por todo lo anterior, es común referirse al señoreaje como el *impuesto inflacionario*; porque al afectar la inflación el poder adquisitivo de las personas se ve reducido.

El concepto de *impuesto inflación* hace alusión a que **la inflación es un impuesto**, ya que deprecia el valor del dinero. La relación con la política fiscal es que la generación de inflación permite al gobierno disfrutar de la ganancia proveniente de los activos creados, mientras que distribuye las pérdidas y la devaluación a los tenedores del dinero previamente existente.

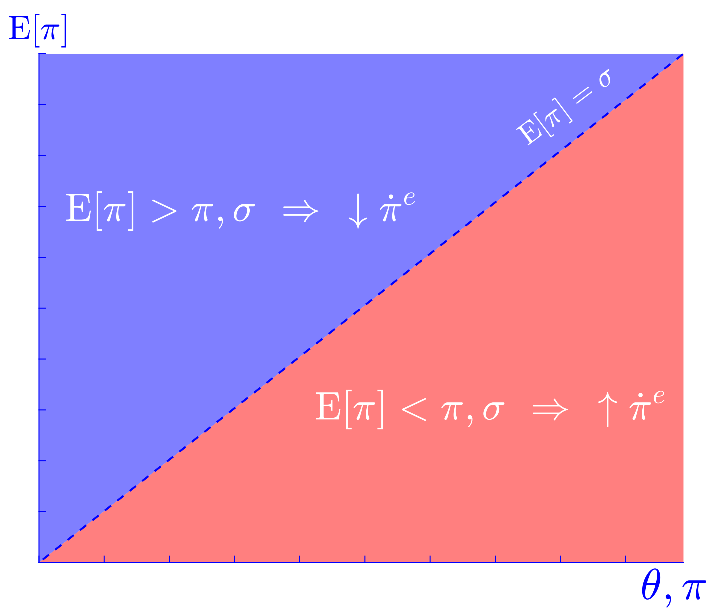
Cuando hablamos de hiperinflación nos referimos a episodios de inflación muy alta. El umbral para clasificar un episodio como hiperinflacionario varía entre trabajos empíricos (Cagan, 1956 versus Fischer, Sahay y Végh, 2002; por ejemplo). Empíricamente se observa que el aumento de la inflación es de carácter exponencial durante estos episodios, que la demanda por dinero se ve reducida abruptamente por previsiones de aumentos en la inflación futura y que a la vez se experimentan déficits fiscales (Fischer, Sahay y Végh, 2002).

Un gasto fiscal elevado financiado con señoreaje requiere de hacer crecer el dinero (θ). Esto en el largo plazo impacta la inflación (T.C.D. y supuestos de supernautralidad y precios flexibles). Si la inflación es alta cae la recaudación efectiva como se observa en el tramo rojo de la recaudación.

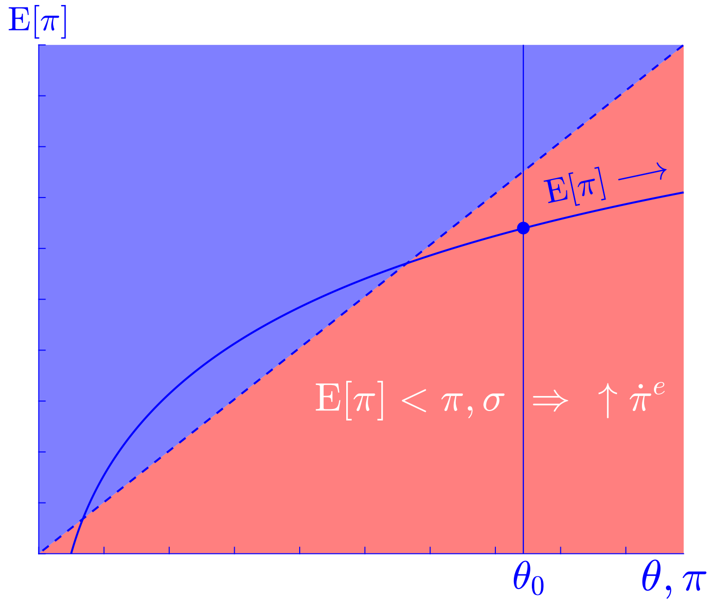


Si la recaudación cae el gobierno financia menos bienes en términos reales, lo que lleva a la necesidad de hacer crecer el dinero nuevamente. Esta es la razón por la cual la hiperinflación se suele asociar con problemas fiscales. Si el gasto es muy grande y la tasa del crecimiento del dinero aumenta hasta rangos muy altos, entonces la gente comienza a ajustar sus expectativas al alza. Esto afecta el nivel de precios en el presente, lo que a su vez lleva a requerir aumentar el dinero nuevamente.

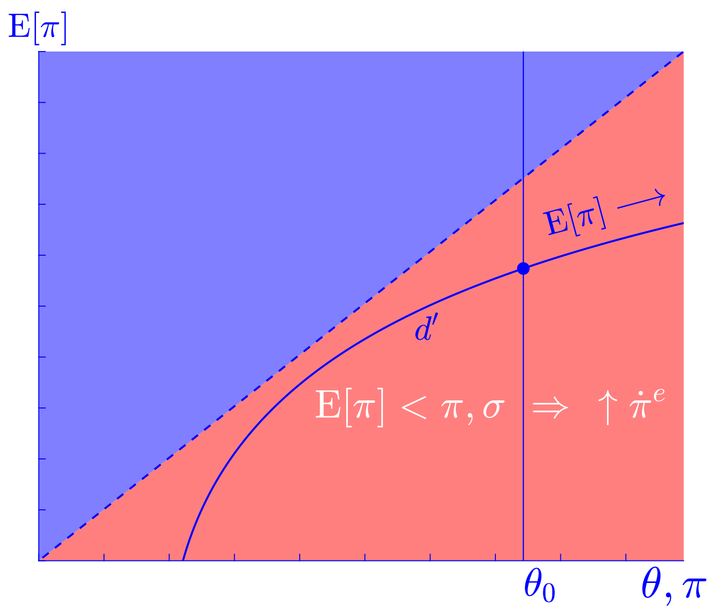
Para entender este último mecanismo de mejor forma realizaremos un análisis gráfico en el plano $\sigma, \mathbb{E}[\pi]$ suponiendo que no hay crecimiento. En puntos sobre la recta (área azúl) ocurre que $\mathbb{E}[\pi] > \pi$, lo que bajo el modelo de expectativas adaptativas lleva a una disminución en las expectativas de inflación ($\dot{\pi}^e = \eta(\pi - \pi^e)$). Puntos bajo la recta (área roja) conllevan un aumento en las expectativas de la inflación.

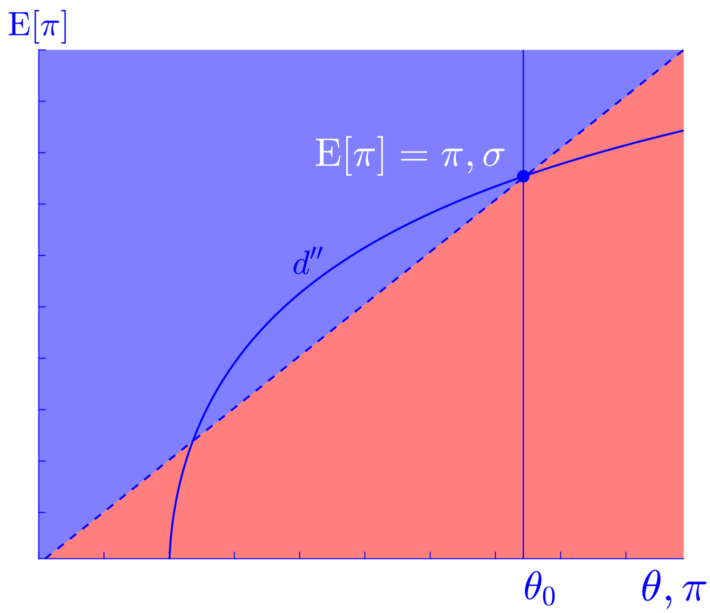


En el siguiente gráfico podemos apreciar la relación entre expectativa de inflación y crecimiento del dinero dado un nivel de déficit fiscal no tan alto pero que acompañado de una alta tasa de crecimiento del dinero se desencadena un aumento en las expectativas de inflación.



De la misma forma, un déficit alto con una tasa de crecimiento alta también lleva a un espiral de aumentos en las expectativas de inflación como se aprecia en el siguiente gráfico. Cuando este ciclo toma lugar entonces no existe un equilibrio estable alcanzable, a menos que el gasto fiscal se reduzca abruptamente como muestra el segundo gráfico a continuación.





En síntesis, la política fiscal y el señoreaje impacta los precios. En tramos de alto déficit y/o alta tasa de crecimiento del dinero se puede generar hiperinflación. Aumentos en la tasa de crecimiento del dinero generan perturbaciones en las expectativas que pueden llevar a a hacer crecer el dinero nuevamente y hacen más probable entrar en un espiral hiperinflacionario (sube la tasa en Fisher, cae la demanda nominal, aumentan los precios en equilibrio y crece el dinero nuevamente en búsqueda de recaudar más).

II. Explique qué es la Curva de Laffer. Muestre cómo se aplica al impuesto inflación. ¿Es compatible la curva de Laffer con su discusión de la pregunta anterior? ¿Qué rol juega la manera en qué se forman las expectativas, por ejemplo, expectativas racionales versus adaptativas?

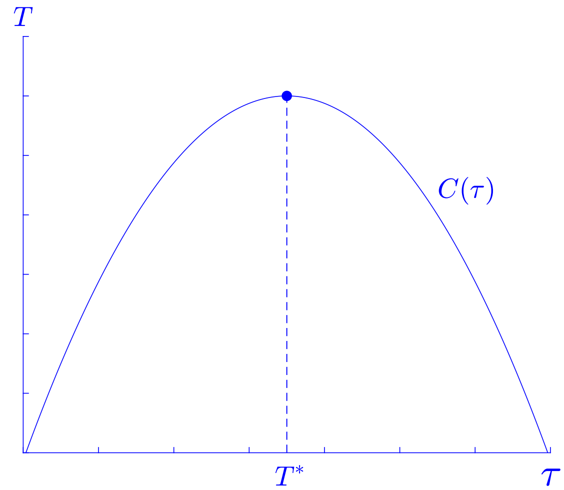
Pauta.

Comúnmente nos referimos a la Curva de Laffer cuando queremos mostrar la relación existente entre la tasa del impuesto al consumo y la recaudación del fisco. Suponiendo un impuesto que no es de suma alzada (es decir, que se aplica como una tasa al consumo) y sea τ la tasa de impuesto al consumo, entonces la recaudación total del fisco está dada por:

$$T = \tau \cdot C(\tau)$$

Derivando la expresión respecto a la tasa del impuesto para mostrar su relación con la recaudación obtenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \underbrace{C(\tau)}_{>0} + \underbrace{\tau \cdot C'(\tau)}_{<0}$$



Lo que muestra la Curva de Laffer es que existe un punto máximo de recaudación. En tramos bajos de tasa impositiva la recaudación aumenta, y en tramos altos disminuye. Esto es análogo al concepto de recaudación respecto a la inflación y al crecimiento del dinero visto en el inciso anterior. La forma funcional de la recaudación con impuestos T guarda una analogía directa con la forma funcional de recaudación vía señoreaje en el estado estacionario:

$$T = \tau \cdot C(\tau) \iff s = \theta \cdot h(\theta)$$

En cuanto al rol de las expectativas, si los agentes poseen expectativas racionales (calculan perfectamente la inflación futura con la información disponible), entonces dado un déficit sin presencia de shocks las expectativas no cambian a lo largo del tiempo, lo que a su vez no refuerza el impacto a los precios en el "presente". Como la recaudación efectiva no cambia por cambios en las expectativas, el señoreaje no tiene necesidad de hacer crecer el dinero más allá del propio impacto por el crecimeinto del dinero.

Por otro lado, bajo el modelo de expectativas adaptativas, cualquier desviación genera que las expectativas se ajusten ($\dot{\pi}^e = \eta(\pi - \pi^e)$). Esto impacta en el nivel de precios e impacta en la necesidad de tener que volver a mover o no la tasa de crecimiento del dinero. Este es un mecanismo que bajo expectativas racionales no existía. La situación de equilibrio se alcanza sólo cuando el crecimiento del dinero es igual a las expectativas inflacionarias de los agentes:

$$\dot{\pi^e} = \frac{\eta(\theta - \pi^e)}{1 - \alpha\eta}$$

Siempre y cuando la economía no alcance este equilibrio, entonces las expectativas moverán la Curva de Laffer, sin presencia de shocks, y por motivos que no se relacionan con los fundamentales macros ($\Delta^f = \theta e^{-\alpha\pi^e}$). Esta perturbación a su vez pueden volver a generar movimientos en θ cuando el déficit es exógeno. Notar también que aparte de las dinámicas en la Curva de Laffer, la convergencia al equilibrio estable es distinta entre modelos.

2. Hiperinflación y política fiscal.

Basado en Bruno y Fischer (1990), considere la siguiente demanda por dinero:

$$\frac{M_t}{P_t} = y_t e^{-\alpha \mathbb{E}[\pi_{t+1}]} \tag{1}$$

donde M_t es la cantidad nominal de dinero, P_t el nivel de precios, y_t es el producto real que normalizaremos a 1, $\mathbb{E}[\pi_t]$ es la inflación esperada y α una constante positiva.

Suponga que se desea financiar un déficit fiscal real d por la vía de hacer crecer el dinero nominal en σ. El señoreaje es $\frac{\dot{M}_t}{P_t}$ (se puede omitir el subíndice t).

I. Escriba la restricción presupuestaria del gobierno como función de σ y $\mathbb{E}[\pi]$ y grafíquela en el plano: $(\sigma, \mathbb{E}[\pi])$. Usando la ecuación (1) (diferénciela), determine el estado estacionario y encuentre el valor máximo de d que se puede financiar en estado estacionario por la vía de señoreaje. Denótelo d_M. Suponga que $d < d_M$. ¿Cuántos estados estacionarios hay? Use el gráfico para mostrar su resultado.

Pauta.

La recta presupuestaria del fisco está dada por:

$$g_t + r_{t-1}b_t = t_t + \Delta b_t + \underbrace{s_t}_{\frac{\dot{M}}{P} \sim \frac{\Delta M}{P}}$$

$$\underbrace{g_t - t_t + r_{t-1}b_t}_{\text{déficit total: } d_t} = \Delta b_t + \frac{\dot{M}}{P}$$

Del enunciado podemos interpretar que el gobierno quiere financiar su déficit total **sólo con** crecimiento del dinero nominal, por lo que $\Delta b_t = 0$.

$$d_t = \frac{\dot{M}}{P} = s_t$$

Manipulando la expresión para el déficit (e ignorando los suscritos de tiempo) obtenemos:

$$d = \frac{\dot{M}}{M}\frac{M}{P}$$

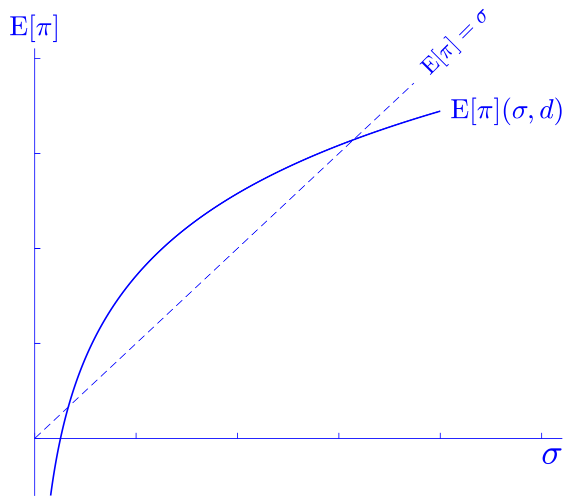
donde $\frac{\dot{M}}{M} = \sigma$. Remplazando con la forma funcional de la demanda por saldos reales con el producto normalizado a 1, obtenemos que la recta presupuestaria está dada por:

$$d = \sigma e^{-\alpha \mathbb{E}[\pi]}$$

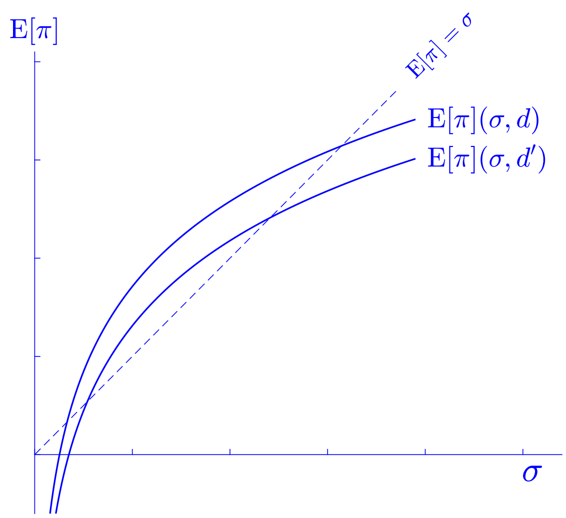
Finalmente, para graficar en el plano $(\sigma, \mathbb{E}[\pi])$ debemos despejar $\mathbb{E}[\pi]$ y asumir d como un parámetro arbitrario. Tomando logaritmos, podemos obtener:

$$\mathbb{E}[\pi] = \frac{ln(\sigma)}{\alpha} - \frac{ln(d)}{\alpha}$$

con $0 < \alpha < 1$.



La restricción presupuestaria dada por $d = \frac{\dot{M}}{P}$ se encuentra de forma implícita en el gráfico anterior. Podemos ver que para distintos niveles de déficit totales obtendremos distintas rectas presupuestarias, lo que se traduce en distintas curvas.



Notar en el gráfico anterior que $d > d'$.

Denotaremos a la demanda real como m, es decir, $m = \frac{M}{P}$. Diferenciando la ecuación (1) respecto a la expectativa de inflación con el producto normalizado a 1, obtenemos:

$$\dot{m} = \frac{\partial m}{\partial \pi^e}\dot{\pi}^e = \frac{\partial}{\partial \pi^e}\left(e^{-\alpha\pi^e}\right)\cdot\dot{\pi}^e = -\alpha e^{-\alpha\pi^e}\dot{\pi}^e$$

También podemos calcular el diferencial total:

$$\dot{m} = \frac{\partial m}{\partial M} dM + \frac{\partial m}{\partial M} dP$$

$$= \frac{1}{P} dM - \frac{M}{P} \frac{dP}{P}$$

$$= \frac{M}{P} \frac{\dot{M}}{M} - \frac{M}{P} \frac{dP}{P}$$

$$= m(\sigma - \pi)$$

Igualando los resultados obtenemos:

$$m(\sigma - \pi) = -\alpha e^{-\alpha \pi^e} \dot{\pi}^e$$

En estado estacionario $\dot{\pi}^e = 0$. Bajo expectativas adaptativas cualquier desviación moverá la tasa nominal por Fisher, la velocidad del dinero cambiará por su relación positiva con la tasa y dado σ, cambiará la inflación en la ecuación de la Teoría Cuantitativa del Dinero. Sin embargo, sabemos que en estado estacionario la inflación debe ser constante, por lo que $\dot{\pi}^e = 0$ es condición necesaria para el estado estacionario con expectativas adaptativas. Bajo expectativas racionales, dado que en estado estacionario la inflación es constante, los agentes son capaces de calcular esta tendencia invariante y, por ende, las expectativas será invariantes. En síntesis, en ambos casos en estado estacionario $\dot{\pi}^e = 0$.

$$m(\sigma - \pi) = -\alpha e^{-\alpha \pi^e} \cdot 0 \iff \sigma = \pi$$

Diferenciando la ecuación de la recta presupuestaria en tiempo continuo obtenemos:

$$\dot{d} = \frac{\partial d}{\partial \pi^e} \dot{\pi}^e = -\alpha \pi^e \sigma e^{-\alpha \pi^e} \dot{\pi}^e \;\; \Rightarrow \;\; \dot{d} = 0$$

Con este resultado podemos empezar a caracterizar el estado estacionario: sabemos que la inflación es igual a la tasa de crecimiento del dinero (notar que al diferenciar las ecuaciones demostramos esto sin la necesidad de establecer que el producto no crezca), que el déficit fiscal es invariante y que las expectativas de la inflación no cambian. Además, sabemos que la inflación de estado estacionario cumple con la condición $\sigma = \pi \Rightarrow \mathbb{E}[\pi] = \sigma$. Gráficamente esto se cumple en la intersección entre la línea de 45 grados y la curva de recta presupuestaria dada distintas tasas de crecimiento monetario.

Bajo supuesto $\pi^e = \pi^{ss}$ tenemos que el señoreaje de estado estacionario está dado por:

$$d^{ss} = \pi e^{-\alpha \pi}$$

Maximizando la expresión de la recta presupuestaria en estado estacionario:

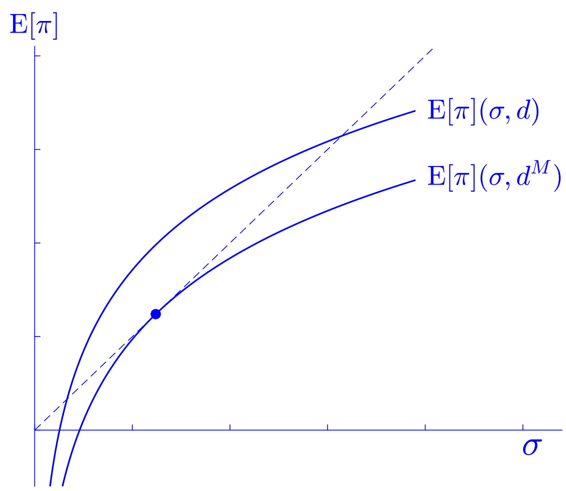
$$\frac{\partial^{ss} d}{\partial \pi} = e^{-\alpha\pi} - \alpha\pi e^{-\alpha\pi} = 0$$

$$\Longrightarrow \pi = \frac{1}{\alpha}$$

Reemplazando la condición que debe cumplir la inflación para la recaudación máxima en estado estacionario en la ecuación de d:

$$d^M = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha \frac{1}{\alpha}}$$

$$d^M = \frac{1}{e^{\alpha}}$$



Gráficamente podemos ver que si $d < d^M$ existirán dos estados estacionarios, mientras que en la curva con recaudación máxima sólo existe un punto que cumple con las condiciones de estado estacionario (equilibrio estable).

II. Suponga que las expectativas son adaptativas:

$$\dot{\pi^e} = \mathbb{E}[\dot{\pi}] = \beta(\pi - \mathbb{E}[\pi]) \tag{2}$$

Explique esta ecuación.

Pauta.

Esta ecuación señala que los agentes evalúan sus expectativas de inflación de forma adaptativa a lo largo del tiempo. Esto quiere decir que los agentes comparan la inflación realizada con las expectativas que tenían de esta el periodo anterior y ajustan su esperanza de acuerdo a la diferencia.

Si $\pi > \pi^e$ entonces los agentes esperan que la inflación aumente. Si $\pi < \pi^e$ los agentes ajustan sus expectativas a la baja.

En este modelo β opera como un parámetro de reacción (o sensibilidad) a la desviación entre lo esperado y lo realizado. Notar que las expectativas se moldean de forma autocorrelativa e independiente de la información sobre los fundamentales macroeconómicos futuros. Intuitivamente se puede pensar en este modelo como una especie de tanteo condicional a las desviaciones de las creencias.

Los ejercicios de la siguiente sección son propuestos.

III. Diferencie la ecuación (1) y usando (2) para reemplazar la inflación, muestre cuál es la dinámica de la inflación esperada en el gráfico y de los estados estacionarios. Muestre cuál es estable y cuál inestable (asuma que $\beta\alpha < 1$).

Pauta.

De los resultados de la diferenciación de $\frac{M_t}{P_t} = y_t e^{-\alpha \mathbb{E}[\pi_{t+1}]}$ obtenemos:

$$m(\sigma - \pi) = -\alpha \cdot \underbrace{e^{-\alpha\pi^e}}_{m_t(y_t\,=\,1)\,=\,m} \cdot \quad \dot{\pi}^e$$

$$\sigma - \pi = -\alpha\dot{\pi}^e$$

Despejando π en la expresión del modelo de expectativas adaptitativas:

$$\pi = \frac{\beta\pi^e + \dot{\pi^e}}{\beta}$$

Reemplazando en el resultado de la diferenciación de los saldos reales:

$$\sigma - [\frac{\beta\pi^e + \dot{\pi^e}}{\beta}] = -\alpha\dot{\pi}^e$$

Despejando π^e:

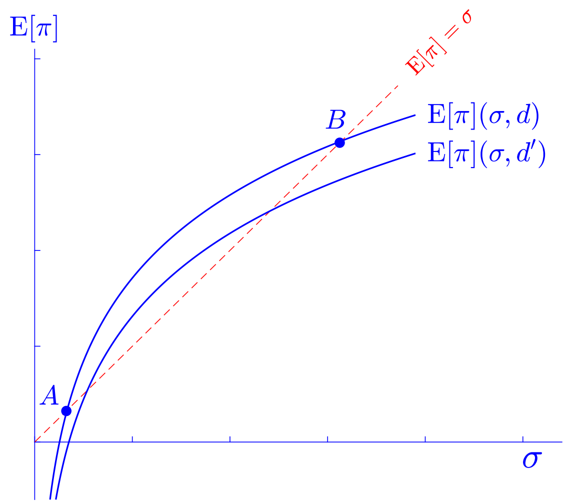
$$\dot{\pi^e} = \Big(\frac{\beta}{1-\alpha\beta}\Big)(\sigma - \pi^e)$$

El término anterior representa los cambios en las expectativas y, por tanto, la dinámica de la inflación esperada por parte de los agentes. El término $\frac{\beta}{1-\alpha\beta}$ representa una constante, por lo que para obtener un equilibrio estable necesariamente la inflación esperada debe ser exactamente igual la tasa de expansión monetaria. En este punto las variables no sufren movimientos.

IV. Suponga que hay un aumento del déficit de d a d', siendo ambos menores que d_M. Muestre la dinámica del ajuste (recuerde que σ puede saltar, pero $\mathbb{E}[\pi]$ se ajusta lento). Finalmente, suponga que d sube más allá de d_M y muestre que se produce una hiperinflación.

Pauta.

Este caso es equivalente al segundo gráfico usado en (I).



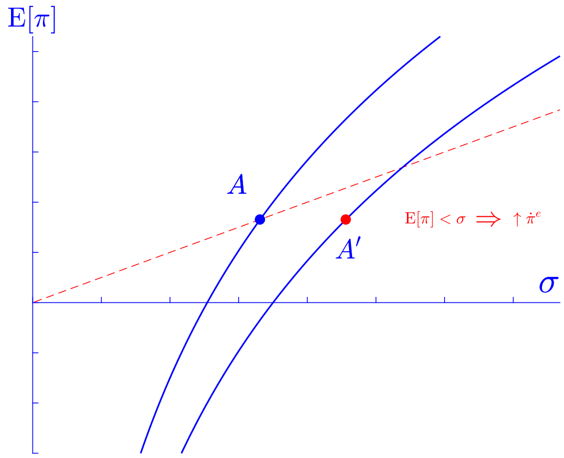
Un aumento del déficit fiscal d es equivalente y está acompañado de un aumento del dinero en este modelo (el déficit se financia con emisión monetaria). Por lo tanto, aumenta la magnitud de la tasa σ. El salto en el déficit genera un salto brusco en la tasa del dinero que gráficamente lo podemos ver reflejado en el hecho de que para todo nivel de $E[\pi]$ la tasa σ es mayor.

Suponiendo que partimos de una situación en que el equilibrio era estable con el antiguo nivel de déficit, entonces este aumento de la tasa del dinero generará mayor inflación esperada.

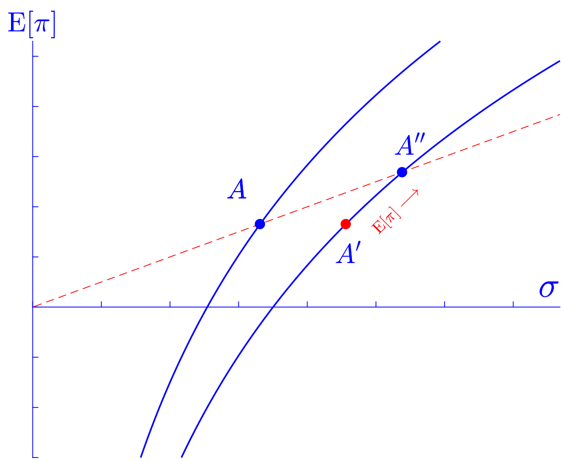
$$\uparrow \dot{\pi^e} = \left(\frac{\beta}{1-\alpha\beta}\right)(\uparrow \sigma - \pi^e)$$

Intuitivamente mayor expectativa de inflación genera perturbaciones en la ecuación de Fisher. Esto hace disminuir la demanda monetaria por mayor costo de oportunidad. Como la inflación esperada ajusta a una constante $\frac{\beta}{1-\alpha\beta}$ esta constante regula la velocidad de ajuste, generando que el ajuste final no se produzca de forma inmediata. Si la inflación no ajusta totalmente seguirá existiendo una diferencia $\sigma - \pi_t^e \ \forall t$ que seguirá generando nuevos ajustes. El proceso continúa hasta converger a un largo plazo con mayor inflación y mayor tasa de crecimiento del dinero es mayor. La convergencia y la visualización en el diagrama de fases depende del punto donde partamos.

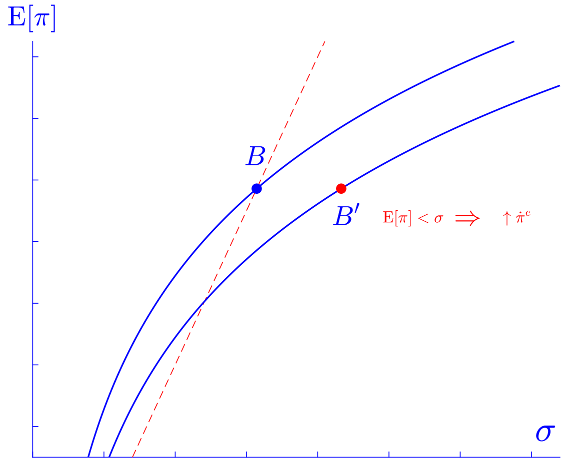
Haciendo zoom en A, es decir, desde el previo equilibrio estable con inflación más baja posible podemos ver que en primera instancia el cambio en la tasa de crecimiento del dinero genera un aumento en la expectativa de inflación.



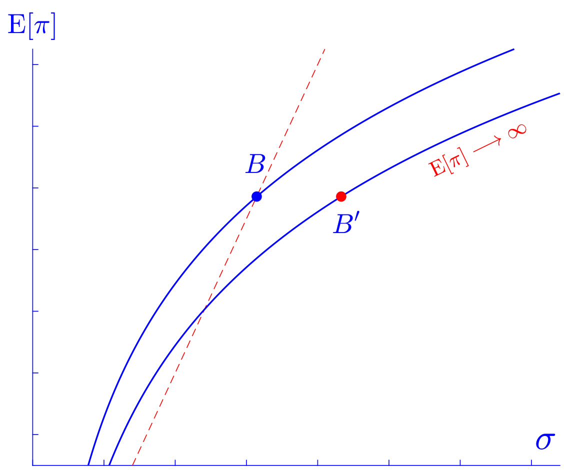
Debido al aumento en la expectativa de inflación, la demanda nominal baja y los precios aumentan para mantener el equilibrio. Esto disminuye la recaudación real del gobierno mediante señoreaje que junto a un nuevo aumento en la tasa de crecimiento también experimenta el ajuste de la inflación esperada.



En contraste, si el equilibrio estable inicial es B, al hacer zoom podemos ver que el primer aumento del déficit y el dinero también genera un aumento en el cambio de la inflación esperada.

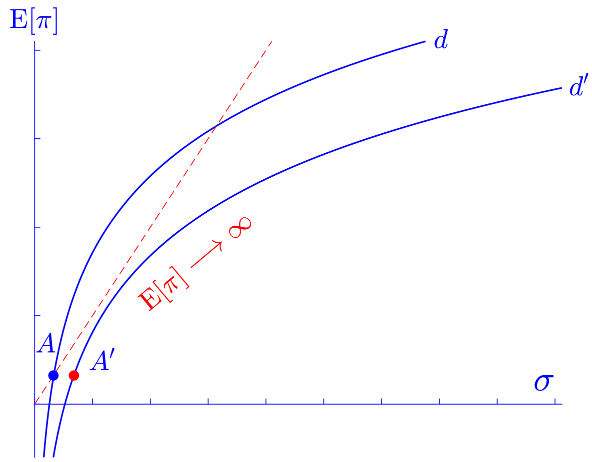


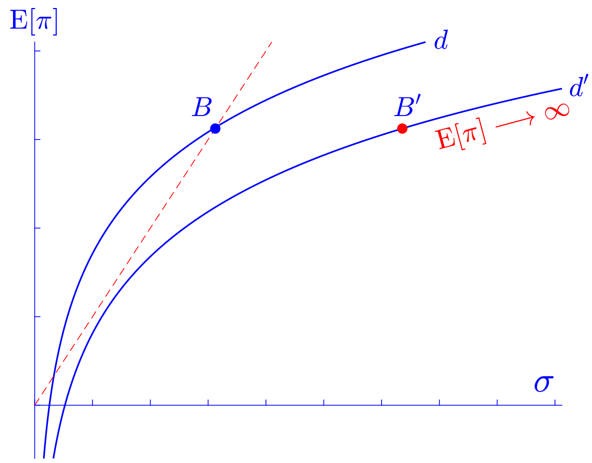
A diferencia del equilibrio estable inicial A la inflación esperada nunca aumentará lo suficiente para alcanzar un punto donde se cumpla $E[\pi] = \sigma$. La tasa del crecimiento va a ajustando poco a poco a lo largo del tiempo conforme a cómo va aumentando la inflación esperada, disminuyendo la demanda por saldos reales y aumentando el nivel de precios. Podemos ver que en este caso no se alcanza un equilibrio estable y se desencadena un espiral inflacionario.



Sea cual sea el equlibrio estable incial, en ambos casos en el largo plazo la inflación y la tasa del crecimiento del dinero son mayores.

Respecto al caso en el cual el déficit fiscal aumenta hasta un punto $d' > d_M$, el proceso es análogo al ciclo desencadenado partiendo desde el equilibrio estable B. En el largo plazo tampoco existirá equilibrio estable y la tasa de crecimiento del dinero así como la inflación comienzan a subir dando origen a un escenario hiperinflacionaria. La diferencia con el caso anterior es que no importa el punto de partida inicial, en todo los casos se desencadenará una inflación creciente que se ajusta lento conforme a los movimientos de σ. En síntesis, en el largo plazo el déficit se financia mediante un proceso explosivo de precios.





3. Señoreaje y equilibrio en economía plenamente flexible.

Suponga una economía con los precios completamente flexibles donde la demanda por dinero es:

$$\frac{M_t}{P_t} = AY_t e^{-\alpha i} \tag{3}$$

donde M_t es la cantidad nominal de dinero, P_t el nivel de precios, Y es el PIB (real) e i es la tasa de interés nominal.

Supuesto S1: sólo para las partes (I) y (II) asuma que la expresión $e^{-\alpha i}$ es igual a 1.

Suponga además que $\alpha = 1,2$, $A = 0,4$, que el crecimiento del producto es $3\,\%$ y la tasa de interés real de equilibrio es de $4\,\%$.

I. Suponga que hay un requerimiento de señoreaje de $2\,\%$ del PBI. Determine la cantidad de crecimiento de la cantidad de dinero (σ), la inflación (π) y la tasa de interés nominal de equilibrio.

Pauta.

Sea $d = \frac{\dot{M}}{M}\frac{M}{P}$ y $\frac{d}{y} = \frac{\dot{M}}{P}\frac{M}{P}\frac{1}{y}$, reemlazando llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{y} &= \sigma \frac{Ay}{y} \\ &= \sigma A \end{aligned}$$

$$0{,}02 = \sigma\ 0{,}4 \implies \sigma = 0{,}05$$

Por la Teoría Cuantitativa del Dinero y bajo supuesto de velocidad cosntante:

$$\begin{aligned} \sigma &= \pi + g \\ \pi &= \sigma - g \\ \pi &= 0{,}05 - 0{,}03 \\ \pi &= 0{,}02 \end{aligned}$$

Usando la ecuación de Fisher y suponiendo $\pi = \pi^e$:

$$\begin{aligned} i &= r + \pi \\ i &= 0{,}04 + 0{,}02 \\ i &= 0{,}06 \end{aligned}$$

II. Suponga ahora que el requerimiento de señoreaje sube a 3 % del PIB. En este equilibrio ¿cuáles son los valores de σ, π e i?

Pauta.

$$\frac{d}{y} = \sigma A \implies \sigma = \frac{0{,}03}{0{,}04} = 0{,}075$$
$$\pi = \sigma - g$$
$$\pi = 0{,}075 - 0{,}03$$
$$\pi = 0{,}045$$

Usando la ecuación de Fisher y suponiendo $\pi = \pi^e$:

$$\begin{aligned} i &= r + \pi \\ i &= 0{,}04 + 0{,}045 \end{aligned}$$

$$i = 0{,}085$$

Los ejercicios de la siguiente sección son propuestos.

III. De acuerdo a su resultado en esta parte y en la anterior, ¿es el supuesto **S1** razonable?

Pauta.

El supuesto es equivalente a normalizar la tasa de interés en una economía en equilibrio. Recordar que la ecuación de Fisher está dada por: $i = r + \mathbb{E}[\pi]$. Suponiendo que el requerimiento no tiene impacto en las expectativas, como la tasa real es constante, entonces al normalizar nos estamos abstrayendo de ambas variables, lo que es relativamente razonable si no es nuestro interés de análisis y queremos simplificar el problema.

IV. ¿Qué pasa con la cantidad de dinero como porcentaje del PIB en (I) y (II)? ¿Qué pasa con el nivel de precios en el momento del ajuste?

Pauta.

Desarrollando la expresión del requerimiento de señoreaje encontramos la expresión con de los saldos reales en función del PIB en función de datos que conocemos:

$$\frac{d}{y} = \frac{\dot{M}}{M} \cdot \frac{M}{P} \cdot \frac{1}{y}$$

$$0,02 = \sigma \cdot m \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{0,02}{\sigma} = \frac{m}{y}$$

En (I):

$$\frac{m}{y} = \frac{0,02}{0,05} = 0,4$$

En (II):

$$\frac{m}{y} = \frac{0,02}{0,075} = 0,267$$

Debido a que la inflación es positiva, en el momento del ajuste el nivel de precios aumenta.

4. Señoreaje, inflación y crecimiento.

Considere dos economías A y B donde la demanda por dinero está dada por la ecuación $\frac{M}{P} = \alpha - \beta i + \gamma y$ en la economía A y por $\frac{M}{P} = A y^{\gamma} i^{-\beta}$ en la economía B. Asuma que no hay crecimiento del producto y recuerde que $i = r + E[\pi]$.

I. Calcule el señoreaje (S) y discuta cómo se relaciona π con S. ¿Debe imponer alguna restricción sobre los parámetros? Asuma que las expectativas de inflación se ajustan a la inflación efectiva y que la tasa de interés real es constante.

Pauta.

$$S = \frac{\Delta M}{P} = \frac{\Delta M}{M}\frac{M}{P}$$

Por Teoría Cuantitativa sin crecimiento y velocidad constante:

$$\frac{\Delta M}{M} = \pi$$

Denotaremos como L_A y L_B a la demanda por saldos reales de las economías.

$$L_A \equiv \frac{M_A}{P_A} = \alpha - \beta i_A + \gamma y$$
$$L_B \equiv \frac{M_B}{P_B} = Ay^\gamma {i_B}^{-\beta}$$

El señoreaje de las economías está dado por:

$$S_A = \pi_A L_A$$
$$S_B = \pi_B L_B$$

$$S_A = \pi(\alpha\beta i + \gamma y)$$
$$S_B = \pi(Ay^\gamma i^{-\beta})$$

Como la tasa de real es constante, la normalizaremos a cero: $r_A = 0$, $r_B = 0$. Trabajando la expresión de los saldos reales de las respectivas economías, usando la ecuación de Fisher y bajo los supuestos $\pi_A = \mathbb{E}[\pi_A]$, $\pi_B = \mathbb{E}[\pi_B]$, $g_A = 0$ y $g_B = 0$:

$$\begin{aligned} L_A &= \alpha - \beta i_A + \gamma y \\ &= \alpha - \beta(r_A + \pi_A) + \gamma y \\ L_A(\pi_A) &= \alpha - \beta\pi_A + \gamma\overline{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_B &= Ay^\gamma {i_B}^{-\beta} \\ &= Ay^\gamma (r_B + \pi_B)^{-\beta} \\ L_B(\pi_B) &= A\overline{y}^\gamma {\pi_B}^{-\beta} \end{aligned}$$

Observando la forma funcional de la demanda por saldos reales podemos imponer ciertas restricciones a los parámetros: β debe ser positivo para ambas economías ya que funciona como parámetro de elasticidad a la tasa de interés nominal, γ debe ser positivo para que la elasticidad al producto sea positiva, α debe ser positivo porque de otra forma existiríann valores para los cuales existe necesidad de realizar transacciones ($\overline{y} > 0$) con demanda por dinero negativa y A debe ser mayor a cero porque de otra forma la demanda monetaria en lsería negativa $\forall \overline{y} > 0$.

Reemplazando en la ecuación del señoreaje:

$$S_A = \pi_A(\alpha - \beta\pi_A + \gamma\overline{y})$$
$$S_B = A\overline{y}^{\gamma}{\pi_B}^{1-\beta}$$

Para conocer la relación entre el señoreaje e inflación tomamos primera y segunda derivada respecto a la inflación.

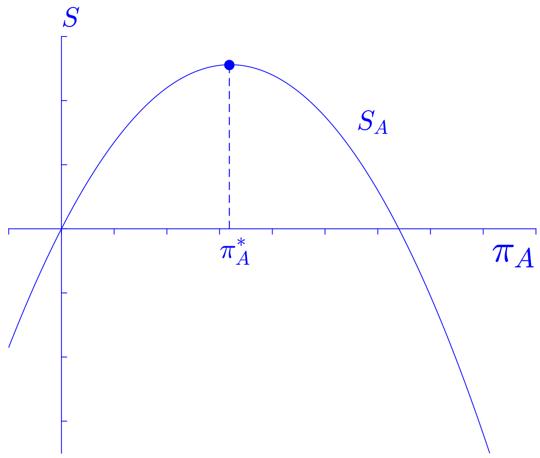
$$\begin{aligned} \frac{\partial S_A}{\partial \pi_A} &= L_A(\pi_A) + \pi_A L'_A(\pi_A) \\ &= \alpha - 2\beta\pi_A + \gamma\overline{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_A}{\partial \pi_A} > 0 \quad &\Rightarrow \quad \pi_A < \frac{\alpha + \gamma\overline{y}}{2\beta} \\ \frac{\partial S_A}{\partial \pi_A} < 0 \quad &\Rightarrow \quad \pi_A > \frac{\alpha + \gamma\overline{y}}{2\beta} \\ \frac{\partial S_A}{\partial \pi_A} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \pi_A = \frac{\alpha + \gamma\overline{y}}{2\beta} \end{aligned}$$

Existen valores de π_A en que la recaudación es máxima, otros en que la pendiente de la curva de señoreaje (recaudación) es positiva y otros en que la pendiente del señoreaje es negativa.

$$\frac{\partial^2 S_A}{\partial {\pi_A}^2} = -2\beta < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la curva de señoreaje es cóncava y podemos estar seguros de que existe un máximo. Por lo tanto, el señoreaje se comporta como una Curva de Laffer respecto a la inflación: a medida que aumenta la inflación aumenta la recaudación hasta un máximo, luego la recaudación disminuye.

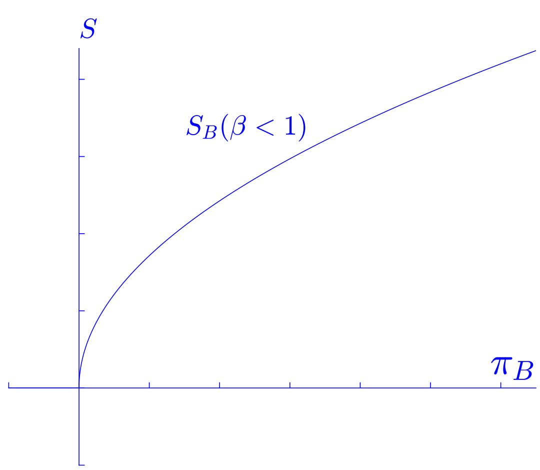


La derivada en la segunda economía es:

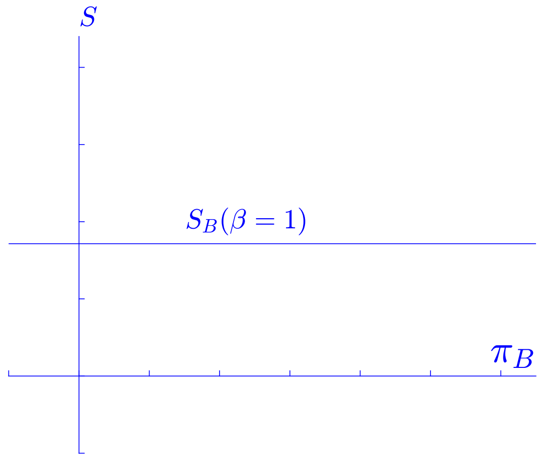
$$\begin{aligned}\frac{\partial S_B}{\partial \pi_B} &= L_B(\pi_B) + \pi_B L_B'(\pi_B) \\ &= (1-\beta)\frac{A\overline{y}^{\gamma}}{\pi_B}\end{aligned}$$

Notar que la primera derivada no es diferenciable en $\pi_B = 0$ porque la demanda por saldos reales y el señoreaje no puede admiten en sus argumentos $\pi_B = 0$ bajo la normalización realizada. π_B tampoco puede tomar valores negativos ya que de otra forma L_B y S_B no tendría soluciones en los reales sino que en los números complejos, lo que no tiene mucho sentido.

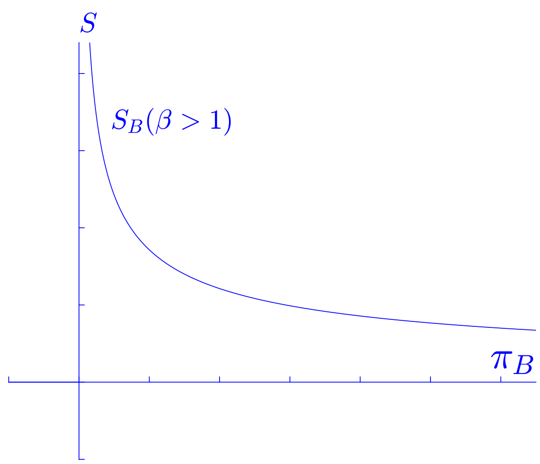
Sabemos que $\beta > 0$, pero si $\beta < 1$ entonces la recaudación siempre crece mientras más grande es la inflación.



Si $\beta = 1$ la recaudación es constante $\forall \pi_B$.



Sin embargo, sabemos teórica y empíricamente que el señoreaje impacta la inflación y que la recaudación es menor a mayor inflación, por lo tanto β debe ser mayor a 1. Esta es nuestra segunda restricción.



La segunda derivada en la economía B muestra que la recaudación posee forma convexa.

$$\frac{\partial^2 S_B}{\partial {\pi_B}^2} = -\underbrace{(1-\beta)}_{<0}\beta A\overline{y}^{\gamma}{\pi_B}^{-(1+\beta)} > 0$$

Los ejercicios de la siguiente sección son propuestos.

II. De existir, calcule la tasa de inflación que maximiza el señoreaje y su nivel dado π^*.

Pauta.

A partir de la concavidad establecida en el incisio (I) se desprende que la inflación que maximiza la recaudación en la economía A bajo normalización es:

$$\pi_A^* = \frac{\alpha + \gamma\overline{y}}{2\beta}$$

Sin normalización de la tasa de interés, la inflación que maximiza la recaudación en la economía A es:

$$\pi_A^* = \frac{\alpha + \gamma\overline{y} - \beta r_A}{2\beta}$$

En cuanto a la recaudación máxima en la economía B, para asegurar la existencia de un máximo necesitamos que la condición de segundo orden arroje una segunda derivada negativa. Debido a que la segunda derivada calculada en la economía B es positiva no podemos asegurar la existencia de un máximo. Esto implica que la maximización se traduce en una solución esquina, es decir, $\pi_B^* = 0$.

$$\frac{\partial^2 S_B}{\partial {\pi_B}^2} = -(1-\beta)\beta A\overline{y}^{\gamma}{\pi_B}^{-(1+\beta)} \not< 0$$

Sin embargo, en la economía B tenemos una forma funcional para la demanda de saldos reales la cual bajo las restricciones impuestas[1] la curva de recaudación es indefinida para $\pi_B = 0$. De todas formas sabemos que el óptimo sería buscar una inflación lo más cercana posible a cero, lo que es consistente con la elección de una solución esquina.

No obstante, la no diferenciabilidad e indefinición proviene de la normalización: $r_B = 0$. Para demostrar que esta es la razón de fondo y extender el modelo relajaremos el supuesto de normalización y veremos qué ocurre con el valor de la inflación óptima.

Volviendo a la definición general de la demanda por saldos reales de la economía B podemos establecer que i_B debe ser distinta de cero: $i_B = r_B + \pi_B \neq 0 \Longrightarrow r_B \neq -\pi_B$.[2]

$$L_B = Ay^{\gamma}(r_B + \pi_B)^{-\beta}$$

Bajo estas condiciones la curva de señoreaje y la primera derivada de la curva están dadas por:

$$S_B = Ay^{\gamma}\frac{\pi_B}{(r_B + \pi_B)^{\beta}}$$

$$\frac{\partial S_B}{\partial \pi_B} = Ay^{\gamma}\left[\frac{r_B + (1-\beta)\pi_B}{(r_B + \pi_B)^{1+\beta}}\right]$$

con $r_B \neq -\pi_B$.

[1] $A > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 1$.
[2] Para este caso también existen otras restricciones a las que no prestaremos atención ya que no son de interés.

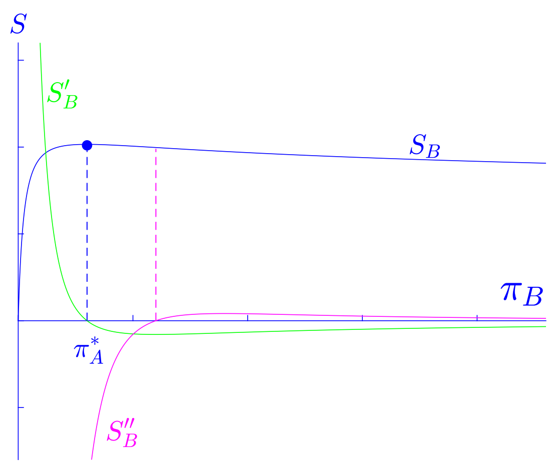
Dado que $\beta > 1$ para que el señoreaje disminuya con la inflación si es que se llegara a realizar una tasa $r_B = 0$, entonces la inflación que maximiza la recaudación real será positiva relajando la normalización:

$$\pi_B^* = \frac{r_B}{\beta - 1} > 0$$

Al relajar la normalización para evitar puntos de indefinición y no diferenciabilidad, la inflación que maximiza el señoreaje final es mayor a la del caso anterior.

Por último, es posible comprobar que π_B^* pertenece a un tramo del dominio de la segunda derivada $\frac{\partial^2 S_B}{\partial \pi_B^2}$ donde se cumple la condición de segundo orden. Esta validación es posible comprobarla de forma gráfica en el plano que se despliega a continuación.

$$\frac{\partial^2 S_B}{\partial \pi_B^2} = Ay^{\gamma}\left[\frac{(1-\beta)(r_B+\pi_B) - (1+\beta)(r_B + (1-\beta)\pi_B)}{(r_B+\pi_B)^{2+\beta}}\right]$$



III. Suponga ahora que en estas economías el producto crece a una tasa anual igual a g. Escriba el señoreaje como función de: los parámetros α, β y γ, y, la tasa de crecimiento del producto g, la inflación π y de la tasa de interés. Haga uso de la ecuación de Fisher para la relación entre i y π.

Pauta.

Para incorporar crecimiento económico buscaremos una expresión para el señoreaje que relacione el nivel inicial de la demanda nominal de dinero con las tasas de cambios de los parámetros exógenos. Esto lo podemos conseguir agregando las elasticidades a la expresión: el señoreaje final corresponde al nivel inicial de saldos reales añadiendo el cambio de las variables de las que depende, ajustado por cómo reacciona la demanda nominal ante los respectivos cambios de variables exógenas.

Recordar que el señoreaje se puede expresar como:

$$S = \frac{\Delta M}{M}\frac{M}{P}$$

Para encontrar la expresión que deseamos desarrolleramos el término para el diferencial total de la demanda nominal. La demanda nominal se puede expresar como:

$$M = P \cdot L(i, y) = P \cdot L(r + \pi, y)$$

Para enfocarnos en el efecto del crecimiento solamente volveremos a normalizar a cero la tasa de interés real de la economía:

$$M = P \cdot L(\pi, y)$$

Tomando el diferencial total de la demanda por dinero en tiempo discreto:

$$\Delta M = L(\pi, y)\Delta P + P \left[\frac{\partial L}{\partial \pi} \Delta \pi + \frac{\partial L}{\partial y} \Delta y \right]$$

Dividiendo por la demanda nominal previo a la emisión monetaria para acercarnos a la expresión de señoreaje:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta M}{M_0} &= \frac{L(\pi, y)}{L(\pi_0, y_0)} \cdot \frac{\Delta P}{P_0} + \frac{P}{P_0} \cdot \frac{\partial L}{\partial \pi} \cdot \frac{\Delta \pi}{L(\pi_0, y_0)} + \frac{P}{P_0} \cdot \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{L(\pi_0, y_0)} \\
&= \frac{L(\pi, y)}{L(\pi_0, y_0)} \cdot \pi + (1 + \pi) \cdot \frac{\partial L}{\partial \pi} \cdot \frac{\Delta \pi}{L(\pi_0, y_0)} + (1 + \pi) \cdot \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{L(\pi_0, y_0)}
\end{aligned}$$

Multiplicando por un uno conveniente el segundo y el tercer término podemos expresar la ecuación en función de elasticidades:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta M}{M_0} &= \frac{L(\pi, y)}{L(\pi_0, y_0)} \cdot \pi + (1 + \pi) \cdot \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \pi} \cdot \frac{\pi_0}{L(\pi_0, y_0)}}_{\epsilon_{L,\pi}} \cdot \frac{\Delta \pi}{\pi_0} + (1 + \pi) \cdot \underbrace{\frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{y_0}{L(\pi_0, y_0)}}_{\epsilon_{L,y}} \cdot \frac{\Delta y}{y_0} \\
&= \frac{L(\pi, y)}{L(\pi_0, y_0)} \cdot \pi + (1 + \pi) \cdot \epsilon_{L,\pi} \cdot \frac{\Delta \pi}{\pi_0} + (1 + \pi) \cdot \epsilon_{L,y} \cdot \frac{\Delta y}{y_0}
\end{aligned}$$

con $\epsilon_{L,y}$: la elasticidad de la demanda por saldos reales respecto al producto y $\epsilon_{L,\pi}$: la elasticidad de la demanda por saldos reales respecto a la inflación.

En estado estacionario (largo plazo) la inflación será constante. Además, si bien en este horizonte la demanda nominal será constante, la demanda por saldos reales no lo será. Bajo $\Delta \pi = 0$ y $L(\pi, y) = L(\pi_0, y_0)$:

$$\frac{\Delta M}{M_0} = \pi + (1+\pi)\cdot \epsilon_{L,y} \cdot \underbrace{\frac{\Delta y}{y_0}}_{g}$$

$$\frac{\Delta M}{M_0} = \pi + (1+\pi)\cdot \epsilon_{L,y} \cdot g$$

Notar que sin crecimiento obtendríamos que la tasa de crecimiento del dinero sería igual a la inflación, resultado que hemos usado a lo largo de todo el semestre.

Reemplazando en la expresión de señoreaje:

$$S = \frac{\Delta M}{M}\frac{M}{P} = \left[\pi + (1+\pi)\cdot \epsilon_{L,y}\cdot g\right] m$$

Antes de evaluar conla demanda por saldos reales debemos encontrar la expresión para las elasticidades.

$$\epsilon^{A}_{L,y} = \frac{\partial L_A}{\partial y}\cdot \frac{y}{L_A(\pi_A, y)}$$

$$= \frac{\gamma y}{\alpha - \beta\pi_A + \gamma y}$$

$$\epsilon^{B}_{L,y} = \frac{\partial L_B}{\partial y}\cdot \frac{y}{L_B(\pi_B, y)}$$

$$= \gamma A y^{\gamma-1} {\pi_B}^{-\beta} \cdot \frac{y}{A y^{\gamma} {\pi_B}^{-\beta}}$$

$$= \gamma \cdot \frac{A y^{\gamma-1} {\pi_B}^{-\beta}}{A y^{\gamma-1} {\pi_B}^{-\beta}}$$

$$= \gamma$$

Usando la expresión general del señoreaje encontrar para el de las respectivas economías:

$$S_A = \left[\pi_A + (1+\pi_A)\cdot \frac{\gamma y}{\alpha - \beta\pi_A + \gamma y}\cdot g\right] m_A$$

$$S_B = \left[\pi_B + (1 + \pi_B) \cdot \gamma \cdot g \right] m_B$$