

Teoría Econométrica

Problem Set 1

Profesor: Tatiana Rosá

Ayudante: Alejo Eyzaguirre

Agosto 2021

Calificación: Se calificará uno solo de los ejercicios del problem set y este representará un 80% de la nota final. El 20% restante dependerá de la completitud del pset. El ejercicio a calificar será determinado por la profesora y/o el ayudante.

1 Mixtura de Normales

La familia de mixtura de normales (normal mixtures) con 2 componentes tiene cdf =

$$F(x) = p_1 \Phi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right) + p_2 \Phi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

donde $p_1, p_2 \in [0, 1]$, $p_1 + p_2 = 1$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ y μ_1 y μ_2 son escalares. Φ es la cdf de una normal estándar. Se le pide:

- Compute la pdf de una V.A X que tiene como distribución una mixtura de normales de 2 componentes.
- Compute la esperanza y la varianza de X .
- En el resto del ejercicio imponemos $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $p_1 = p_2 = 0.5$, $y\mu_1 + \mu_2 = 0$. Es la densidad simétrica? Grafique el pdf para $\mu_1 = 0.5$, $\mu_1 = 1$, $\mu_1 = 1.5$. Comente.
- Opcional.* Usando la computadora, simule 10000 extracciones (draws) de Y_1 e Y_2 , donde $Y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$; independientes. Usando los draws de Y_1 e Y_2 , simule 10000 draws de la mixtura X usando como los 2 componentes Y_1 e Y_2 . Simule también 10000 draws de $S = p_1 Y_1 + p_2 Y_2$. Finalmente, usando los 10000 draws compute la media y la varianza muestral de X y S , y grafique sus respectivos histogramas. Repita el ejercicio para los parámetros de la parte c). Comente. [Hint: Puede extraer de una mixtura de normales en 2 etapas: en una primera etapa extraiga de una v.a Bernoulli para decidir de que distribución normal extraer en la segunda etapa]

2 Probabilidades, cdfs y pdfs

- Sea $X \sim N(0; 9)$. Compute $p(4 < X < 4)$ de forma exacta (función) y de forma aproximada usando la desigualdad de Chebychev
- Obtenga la función de distribución de $Y = X^2 + 7X + 10$ donde X es el resultado de tirar un dado.
- Sea X una variable aleatoria con cdf $F_X(s)$. Obtenga la distribución de $Y = \frac{X}{1+X}$
- Sea X una variable aleatoria con cdf $F(x)$ continua y estrictamente monotonica. sea Y la variable aleatoria definida por $Y = F(X)$ (i.e., la función que mapea x en y es la cdf de X). Cual es la cdf de Y ? Y la pdf? Grafique.

3 Media y varianza

Sea X una variable aleatoria con distribución $U(-1,4)$. Obtenga la media y varianza de:

1. $Y = X$

2. $Y = X^2$

3. $Y = \exp(X)$

4. $Y = \frac{X+1}{X+2}$