Teoría Econométrica

Problem Set 3
Profesor: Tatiana Rosá
Ayudante: Alejo Eyzaguirre

Septiembre 2021

1 Bootstrap paramétrico

Consideremos el modelos:

$$y_i = x_i'\beta + exp(x_i'\alpha)u_i \quad \text{i = 1...N},$$

donde las observaciones son iid y

$$u_i|x_i \sim N(0,1)$$

En los tres ejercicios x_i contiene $K-1$ regresores más una constante.

Sea $\hat{\beta}$ la estimación por OLS de β y sea $\hat{\alpha}$ un estimador consistente de α. Queremos aproximar la distribución de $\hat{\beta}$ en muestras finitas. Para eso vamos a usar el bootstrap paramétrico.

Primero simulamos B muestras, $(u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, u_3^{(s)}, ...u_N^{(s)})$ $s = 1...B$ mediante la extracción de variables aleatorias normales estándar independientes. Ahí computamos:

$$y_i^{(s)} = x_i\hat{\beta} + exp(x_i'\hat{\alpha})u_i^{(s)} \quad \text{i = 1...N},$$

para todos los $s = 1...B$. En cada muestra vamos a calcular $\hat{\beta}^{(s)}$. (Note que el $\hat{\beta}^{(s)}$ es el $\hat{\beta}^*$ de las notas de clase)

Se le pide:

1. Pruebe que:

$$\hat{\beta}^{(S)} = \hat{\beta} + (\sum_{i=1}^{i=N} x_i x_i')^{-1} \sum_{i=1}^{i=N} x_i exp(x_i'\hat{\alpha})u_i^{(S)}$$

2. Encuentre la distribución de $\hat{\beta}^{(S)}$ condicional en la muestra original $M = (y_1, x_1, y_2, x_2, ..., y_N, x_N)$. *Ayuda:* Note que condicionando en M también condiciona en $\hat{\beta}$ y $\hat{\alpha}$

3. Encuentre la distribución asintótica de $\hat{\beta}^{(S)} - \hat{\beta}$.

2 Bootstrap residual

Consideremos el modelos:

$$y_i = x_i'\beta + u_i \quad \text{i = 1...N},$$

donde las observaciones son iid y

$$u_i|x_i \sim N(0,1)$$

. Sea $\hat{\beta}$ la estimación por OLS de β .Queremos aproximar la distribución de $\hat{\beta}$ en muestras finitas. Para eso vamos a usar el residual bootstrap.

Primero estimamos $\hat{\beta}$ por OLS y calculamos $\hat{u}_i = y_i - x_i'\hat{\beta}$, para todo $i = 1...N$. Sacamos B muestras con reemplazo $(\hat{u}_1^{(s)}, \hat{u}_2^{(s)}, \hat{u}_3^{(s)}, ...\hat{u}_N^{(s)})$ con $s = 1...B$ y calculamos $y_i^{(s)} = x_i\hat{\beta} + \hat{u_i}^{(s)}$.

Finalmente calculamos $\hat{\beta^{(s)}}$ regresando $y_i^{(s)}$ sobre x_i por OLS en cada una de las B muestras.

1. Muestre que:
$$\hat{\beta}^{(s)} = \hat{\beta} + (\sum_{i=1}^{i=N} x_i x_i')^{-1} \sum_{i=1}^{i=N} x_i \hat{u_i}^{(s)}$$
2. Muestre que $\mathbb{E}(x_i \hat{u_i}^{(s)}) = 0$ *Ayuda:* Primero condicione en la muestra original y luego use ley de esperanzas iteradas
3. Muestre que $\hat{\beta}^{(s)}$ es consistente
4. Muestre que $\mathbb{E}(x_i x_i' (\hat{u_i}^{(s)})^2) = \mathbb{E}(x_i x_i' \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^{i=N} \hat{u_i}^2))$
5. Para una s dada, encuentre la distribución asintótica de :
$$\sqrt{N}(\hat{\beta^{(s)}} - \hat{\beta})$$

3 Bootstrap no paramétrico

Consideremos el modelos:
$$y_i = x_i'\beta + u_i \quad \text{i = 1...N},$$
donde las observaciones son iid y
$$u_i | x_i \sim N(0,1)$$

Sea $\hat{\beta}$ la estimación por OLS de β .Queremos aproximar la distribución de $\hat{\beta}$ en muestras finitas. Para eso vamos a usar el bootstrap no paramétrico.

Empezando con la muestra original $M = (y_1, x_1, y_2, x_2, ...y_N, x_N)$, sacamos B muestras con reemplazo $M(s) = (y_1^{(s)}, x_1^{(s)}, y_2^{(s)}, x_2^{(s)}, ...y_N^{(s)}, x_N^{(s)})$, con $s = 1...B$. En cada muestra estimamos $\hat{\beta^{(s)}}$ por OLS regresando $y_i^{(s)}$ sobre $x_i^{(s)}$

1. Muestre que:
$$\hat{\beta}^{(s)} = \hat{\beta} + (\sum_{i=1}^{i=N} x_i^{(s)} x_i^{(s)\prime})^{-1} \sum_{i=1}^{i=N} x_i^{(s)} \hat{u_i}^{(s)}$$
donde $\hat{u_i}^{(s)} = y_i^{(s)} - x_i^{(s)} \hat{\beta}$
2. Muestre que:
$$\mathbb{E}(x_i^{(s)} x_i^{(s)\prime} | M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} x_i x_i'$$
$$\mathbb{E}(x_i^{(s)} \hat{u}_i^{(s)} | M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} x_i y_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} x_i x_i' \hat{\beta} = 0$$
3. Muestre que $plimVar(x_i^{(s)} \hat{u}_i^{(s)}) = \mathbb{E}(u_i^2 x_i x_i')$. Alcanza con proveer la intuición.
4. Para una s dada, encuentre la distribución asintótica de :
$$\sqrt{N}(\hat{\beta^{(s)}} - \hat{\beta})$$
5. ¿Cómo estimaría en la práctica la distribución asintótica que encontro en el apartado anterior?

4 Comparando los tres bootstraps

Comente sobre los tres tipos de bootstrap, su robustez y los supuestos detrás de cada uno.