PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS
INSTITUTO DE ECONOMÍA
TEORÍA MACROECONÓMICA 1, EAE320B-1.

Tarea 2.

Federico Sánchez
Oscar Herrera
Primer Semestre de 2024.

Pregunta 1.a.

El problema a resolver para esta pregunta está dado por:

$$\begin{aligned} \max_{\{K_{t+1}, I_t\}} \quad & p(K_t)F(K_t) - I_t(1+\phi(I_t)) + \beta\Pi(K_{t+1}) \\ \text{s.t.} \quad & p(K_t) = a - F(K_t) \\ & F(K_t) = AK_t^{\alpha} \\ & K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \\ & \phi(I_t) = \gamma I_t \\ & \gamma > 0 \end{aligned}$$

Entonces, el Lagrangeano correspondiente se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = p(K_t)F(K_t) - I_t(1+\phi(I_t)) + \beta\Pi(K_{t+1})$$

Por lo tanto, podemos derivar contra las 2 variables de control: I_t, y ademas K_{t+1}. Como resultado, obtenemos la derivada bajo lo primera variable de control I_t es la siguiente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} = -(1+\phi(I_t)) - I_t\phi'(I_t) + \beta\frac{\partial \Pi(K_{t+1})}{\partial K_{t+1}} = 0$$

Ahora, derivamos contra la variable de control restante: K_{t+1}.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = \beta \frac{\partial \Pi(K_{t+1})}{\partial K_{t+1}} = \beta p'(K_{t+1})F(K_{t+1})F'(K_{t+1}) = 0$$

Aca el truco estaria en entender la derivada de la Value Function de el periodo siguiente como la resolucion de el problema para el siguiente periodo. Por lo tanto se podria tener la siguiente analogia:

$$\Pi(K_{t+1}) = \max_{K_{t+2}, I_{t+1}} p(K_{t+1})F(K_{t+1}) - I_{t+1}(1+\phi(I_{t+1})) + \beta\Pi(K_{t+2})$$

Por lo tanro, de la expresion anterior podemos tomar la derivada. Ademas, podemos usar la siguiente ecuacion de progreso de capital:

$$K_{t+2} = (1-\delta)K_{t+1} + I_{t+1}$$

Y entonces se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\Pi(K_{t+1}) = \ p(K_{t+1})F(K_{t+1}) - (K_{t+2} - (1-\delta)K_{t+1})(1+\phi(I_{t+1})) + \beta\Pi(K_{t+2})$$

Entonces, si derivamos por K_{t+1}, vemos que hay muchos terminos que dependen de K_{t+2}, por lo tanto no estaran despues de la derivada. Y resultara la siguiente derivada:

$$\frac{\Pi(K_{t+1})}{\partial K_{t+1}} = p'(K_{t+1})F(K_{t+1})F'(K_{t+1}) + p(K_{t+1})F'(K_{t+1}) + (1-\delta)(1+\phi(I_{t+1}) + I_{t+1}\phi'(I_{t+1}))$$

Entonces ahora que tenemos ambas expresiones necesarias, solo nos faltaria juntar, con lo que quedaria la expresion que buscamos

$$1 + \phi(I_t) + I_t\phi'(I_t) = \beta\left[p'(K_{t+1})F(K_{t+1})F'(K_{t+1}) + p(K_{t+1})F'(K_{t+1}) + (1-\delta)(1+\phi(I_{t+1}) + I_{t+1}\phi'(I_{t+1}))\right]$$

Pregunta 1.b.

Ahora corresponde resolver el problema que de la firma utilizando el algoritmo de la grilla endogena. Para lo siguiennte creamos dos archivos de codigo. El archivo principal llamado `code.m`, y la funcion de la grilla endogena llamada `endo_infinite.m` Para mayor detalle de los codigos, revisarlos en el rar.

Pregunta 1.c.

Ahora se nos pide graficar las policy function, tanto para capital como para inversion

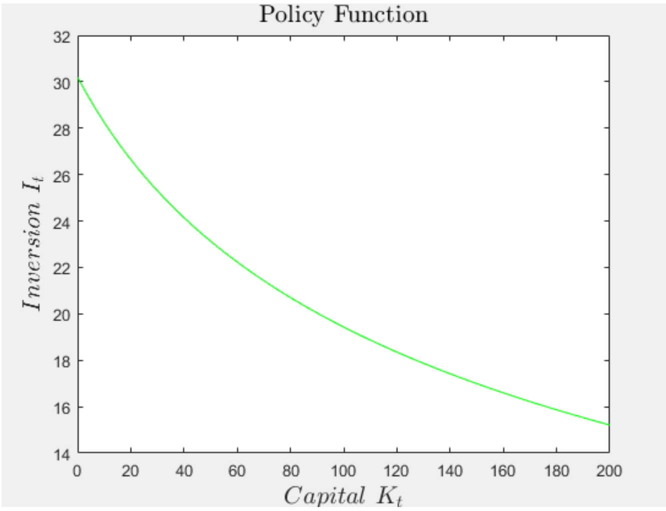


Figura 1: Policy Function Inversion

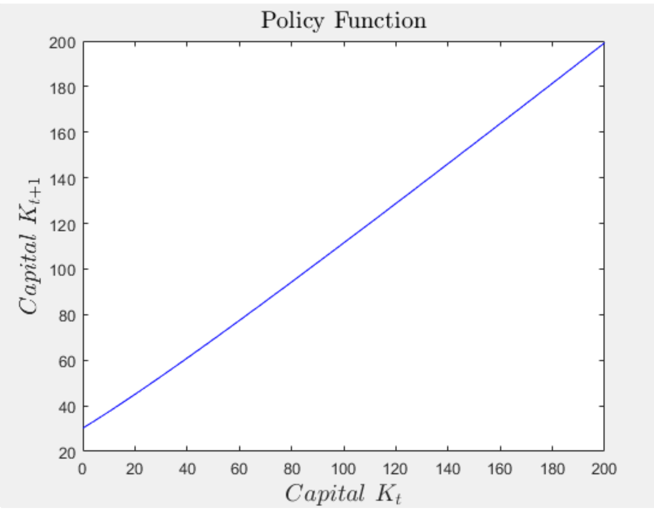


Figura 2: Policy Function Capital

Como se puede observar, las policy function de Inversion y Capital tienen formas estandar, y no hay mucho mas que comentar.

Pregunta 1.d.

Ahora tenemos que simular el progreso para diferentes capitales iniciales. Primero mostraremos para $K_0 = 0{,}05$

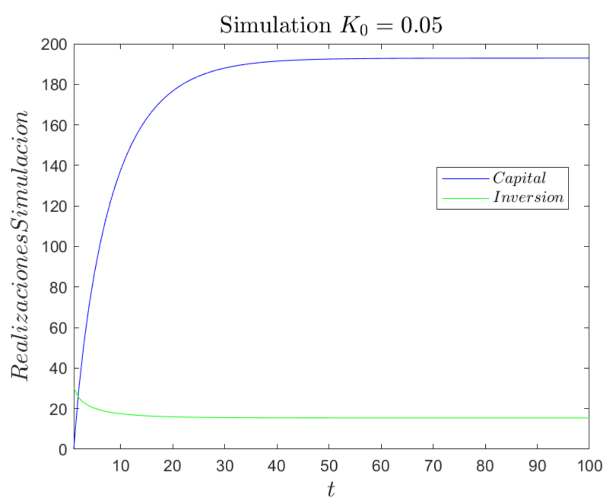


Figura 3: $K_0 = 0{,}05$

Se observa claramente que tanto el Capital como la Inversion llegan a estados estacionarios. El capital llega a una valor de final de $K_t = 192{,}9036$, mientras que la inversion llega a un valor final de $I_t = 15{,}4324$
Ahora, veamos las simulaciones para $K_0 = 90$

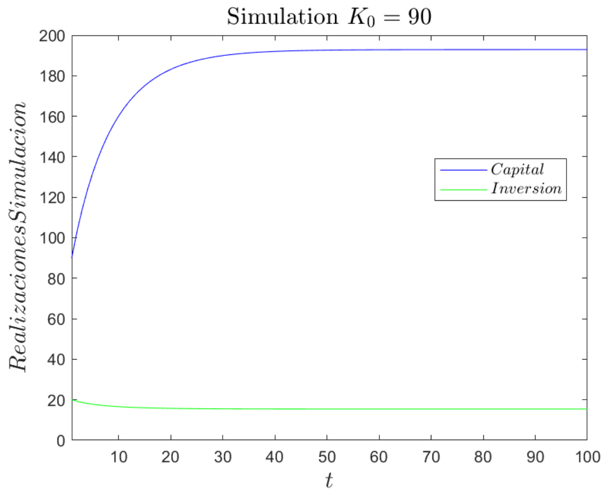


Figura 4: $K_0 = 90$

Se observa la misma dinamica. Tanto la inversion como el capital llegan a un estado estacionario con los siguientes valores: $K_t = 192{,}9041$ y $I_t = 15{,}4324$. Valores, que para el fin de el analisis, son casi identicos. Ambas simulaciones estan llegando a los mismos puntos estacionarios.
Ahora, por ultimo, veamos el progreso partiendo desde $K_0 = 190$

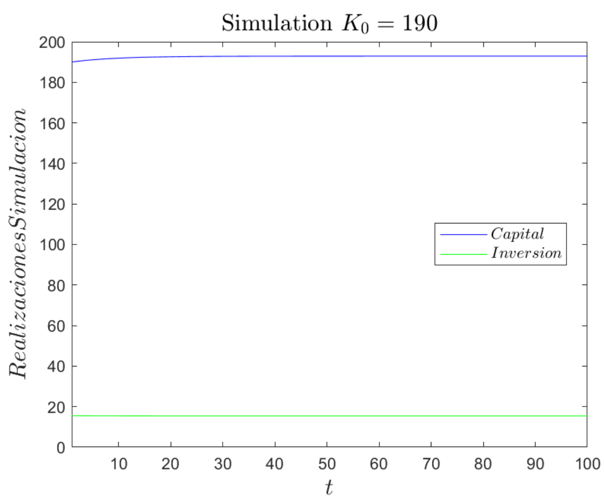


Figura 5: $K_0 = 190$

Por ultimo, tambien se observa la misma dinamica. Ambas simulaciones de capital e inversion llegan al mismo punto de convergencia. En este caso especifico los valores estacionarios son: $K_t = 192{,}9048$ y $I_t = 15{,}4324$
Ahora, veamos todos los valores resultantes en una tabla.

Capital Inicial	*Capital Final*	*Inversion Final*
0.0500	192.9036	15.4324
90.0000	192.9041	15.4324
190.0000	192.9048	15.4324

Ahora, comparando todos los valores, se puede notar que la *Inversion Final* es la misma para todos los casos, mientras que el *Capital Final* crece con cada punto particular, pero crece a pasos muy pequeños, por lo, para lo que concierne nuestro trabajo, se mantiene igual.

Pregunta 1.e.

Los niveles de inversion y capital estacionarios son: $K_t = 192{,}9048$ y $I_t = 15{,}4324$

Pregunta 2.a.

Ahora tenemos que encontrar la ecuacion de primer orden. Lo haremos de manera similar a como lo hicimos en la pregunta anterior. Entonces comenzemos. El Lagrangeano correspondiente sera el siguiente:

$$\mathcal{L} = p(K_t^i, K_t^j)F(K_t^i) - I_t^i(1 + \phi(I_t^i)) + \beta\Pi(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)$$

Entonces, al igual que el caso anterior. Tomaremos derivadas de las variables de control. En el caso de la firma i, las variables de control correspondientes son I_t^i y K_{t+1}^i. Por lo tanto las derivadas seran del siguiente estilo.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t^i} = -(1 + \phi(I_t^i)) - I_t^i\phi'(I_t^i) + \beta\frac{\partial \Pi(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)}{\partial K_{t+1}^i} = 0$$

Ahora tocaria la derivada contra la variable de control restante K_{t+1}^i

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}^i} = \beta\frac{\partial \Pi(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)}{\partial K_{t+1}^i} = 0$$

Entonces, ahora habria que buscar nuevamente las expresiones del periodo siguiente. El problema del siguiente periodo se veria asi:

$$\Pi(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j) = \max_{K_{t+2}^i, I_{t+1}^i} p(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)F(K_{t+1}^i) - I_{t+1}^i(1 + \phi(I_{t+1}^i)) + \beta\Pi(K_{t+2}^i, K_{t+2}^j)$$

Y podemos usar la ecuacion del progreso del capital

$$K_{t+2}^i = (1 - \delta^i)K_{t+1}^i + I_{t+1}^i$$

Entonces si uno usa esta expresion para reescribir lo anterior, queda lo siguiente.

$$\Pi(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j) = p(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)F(K_{t+1}^i) - (K_{t+2}^i - (1 - \delta^i)K_{t+1}^i)(1 + \phi(I_{t+1}^i)) + \beta\Pi(K_{t+2}^i, K_{t+2}^j)$$

Muchos terminos dependeran de variables del siguiente periodo, por lo que la derivada resultara:

$$\frac{d\Pi(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)}{dK_{t+1}^i} = \frac{\partial p(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)}{\partial K_{t+1}^i}F(K_{t+1}^i) + p(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)F'(K_{t+1}^i) - (1 - \delta^i)(1 + \phi(I_{t+1}^i + I_{t+1}^i\phi'(I_{t+1}^i))$$

Entonces ahora podemos juntar ambas expresiones, y lograr lo que conocemos como Euler.

$$(1 + \phi(I_t^i)) + I_t^i\phi'(I_t^i) = \frac{\partial p(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)}{\partial K_{t+1}^i}F(K_{t+1}^i) + p(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)F'(K_{t+1}^i) - (1 - \delta^i)(1 + \phi(I_{t+1}^i + I_{t+1}^i\phi'(I_{t+1}^i))$$

Entonces podemos ver que el optimo para la empresa i si depende de las decisiones de la empresa j. Esto, porque el precio de el mercado va a ser dependiente de la decision de la empresa j

$$\phi(I_t^i) + I_t^i\phi'(I_t^i) = \frac{\partial p(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)}{\partial K_{t+1}^i}F(K_{t+1}^i) + p(K_{t+1}^i, K_{t+1}^j)\Gamma'(K_{t+1}^i) - (1 - \delta^i)(1 + \phi(I_{t+1}^i) + I_{t+1}^i\phi'(I_{t+1}^i)) - 1$$

Pregunta 2.c.

Despues de correr el algoritmo, las policy function encontradas son las siguientes:

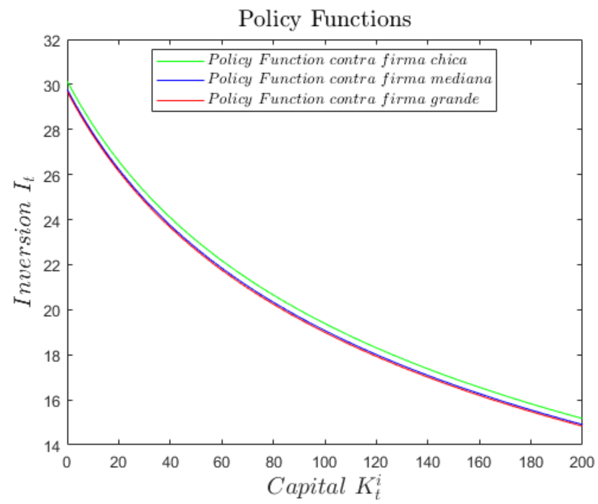


Figura 6: Policy Function de la Inversion

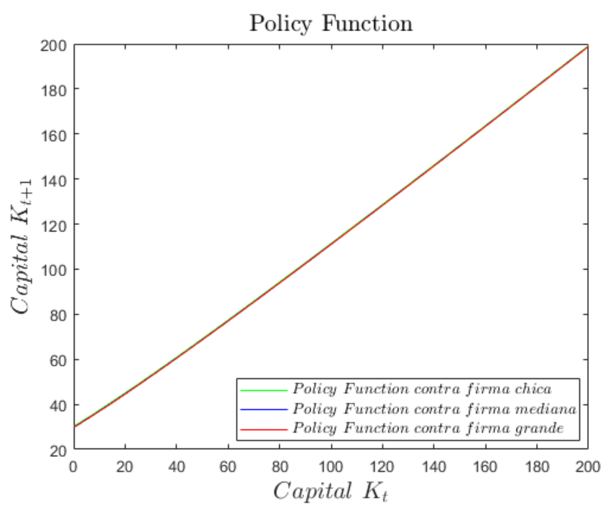


Figura 7: Policy Function de Capital

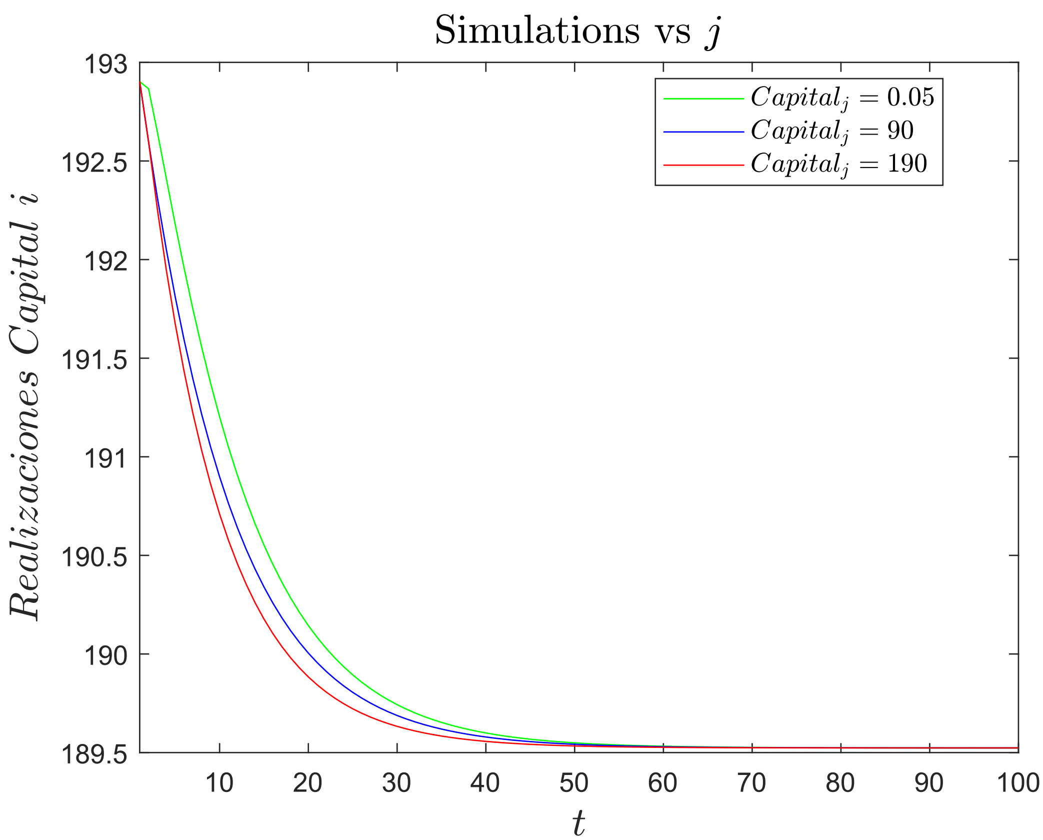
Como se puede observar, la diferencia de las decisiones en los 3 escenarios (chicas, medianas y grandes) son marginalmente diferentes. Eso no quiere decir aun, que el punto de estacionariedad sea el mismo, pero al menos la decision inmediata de periodo a periodo es parecida entre los diferentes casos.

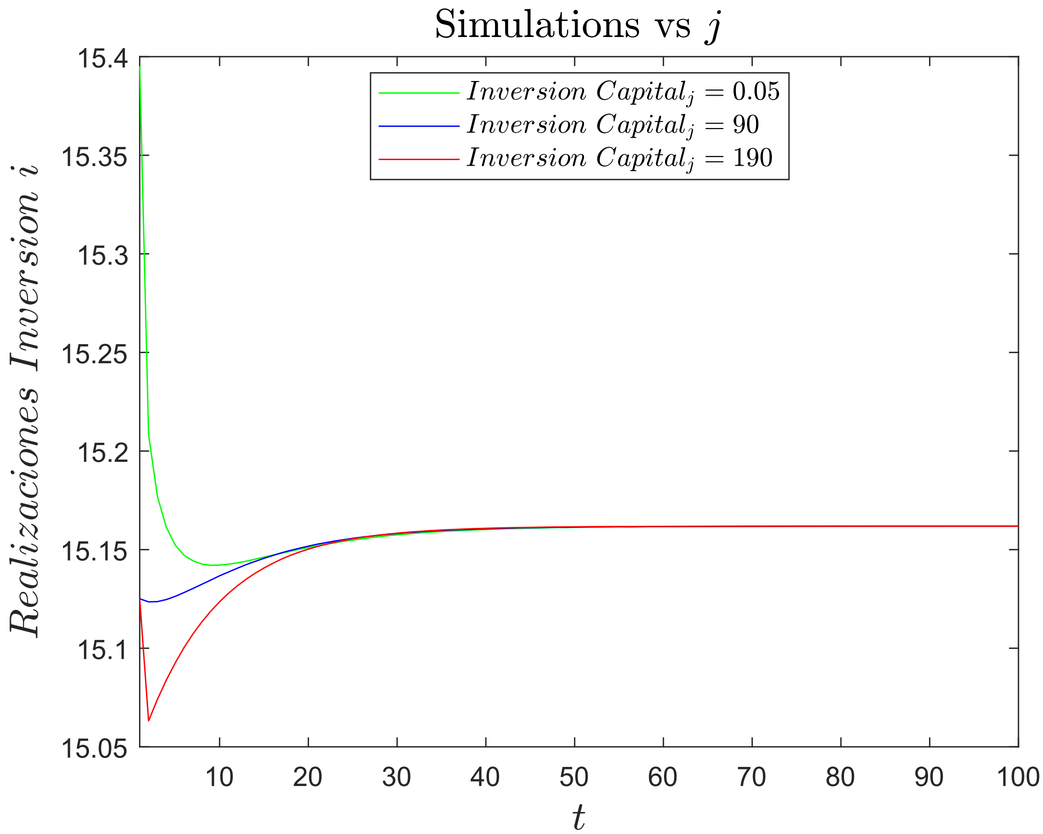
Pregunta 2.d.

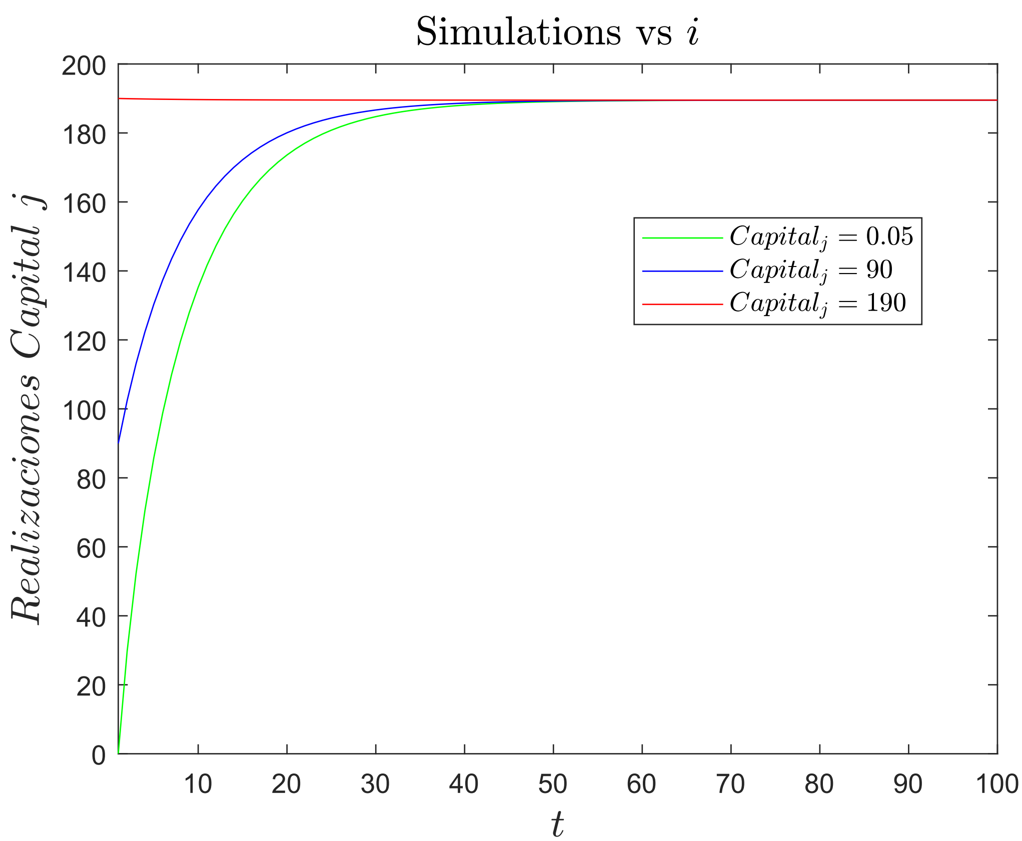
Ahora, tenemos que simular el progreso de el capital y la inversion para cada uno de los los casos. Se considera que siempre la firma i va a partir con el capital estacionario de la pregunta anterior, que en este caso sera $K_t^i \approx 193$, mientras que para la firma j se tendran 3 casos:

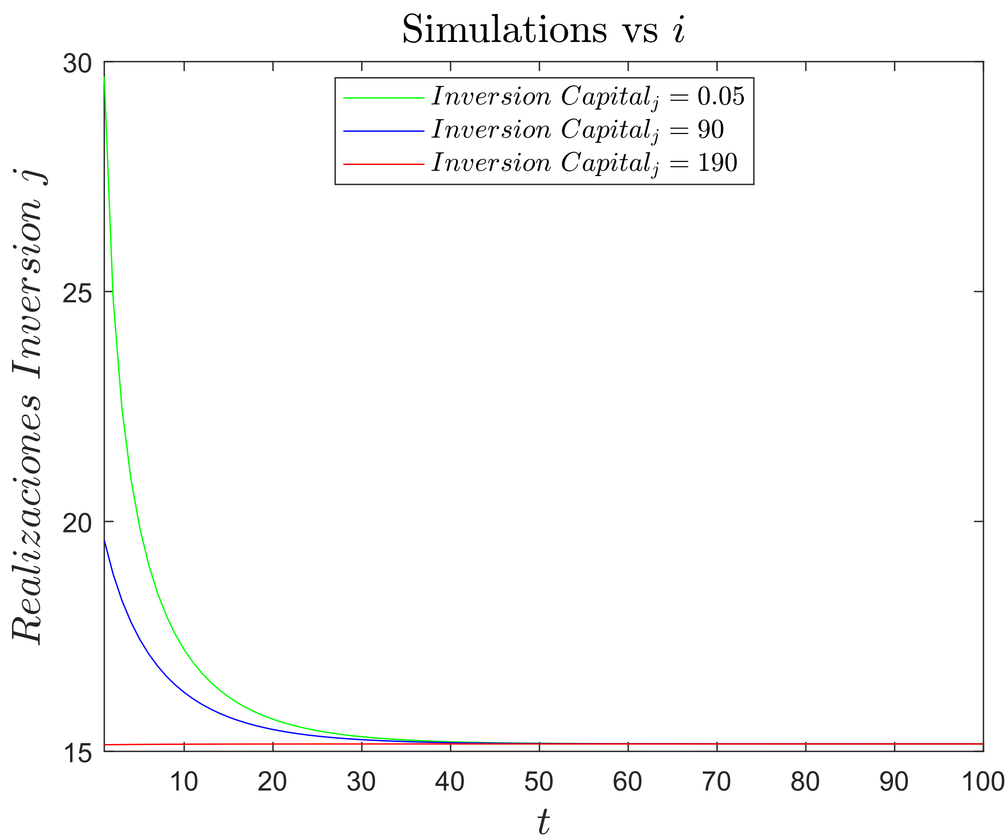
- $K_t^j = 0{,}05$
- $K_t^j = 90$
- $K_t^j = 180$

En cada iteración actualizamos el capital de la firma j conforme a su inversión del periodo anterior, mientras que la inversión del periodo anterior toma valores de acuerdo al capital de la firma i. De esta forma, hemos obtenido los siguientes resultados.




Simulations vs j
$Inversion\ Capital_j = 0.05$
$Inversion\ Capital_j = 90$
$Inversion\ Capital_j = 190$
$Realizaciones\ Inversion\ i$
15.4
15.35
15.3
15.25
15.2
15.15
15.1
15.05
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
t


Simulations vs i
$Capital_j = 0.05$
$Capital_j = 90$
$Capital_j = 190$
$Realizaciones\ Capital\ j$
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
t



Como se puede observar, la firma tiende a reducir su capital de estado estacionario desde el caso monopólico, al de estado estacionario en presencia de un competidor. El tamaño del competidor influencia qué tanto cambia el capital **durante** la convergencia. A menor tamaño del competidor, más capital posee la firma i **durante la convergencia**.

Por otra parte, la inversión tiende a mostrar un valor menor en los primeros periodos, hasta converger a una inversión para mantención del capital estacionario, como el capital estacionario es menor, la inversión también. Esta está asociada a el valor δ.

La firma j también posee un capital de estado estacionario, y la evolución simplemente muestra una tendencia convergente a su valor de acuerdo al capital de entrado. Análogamente, la inversión sigue la misma dinámica.

Pregunta 2.d.

Resultados Estado Estacionario.

K inicial de j	K estacionario monopolio	K estacionario de Cournot	Inv. est. monopolio	Inv. est. Cournot
0.05	192.9	189.52	15.432	15.162
90	192.9	189.52	15.432	15.162
190	192.9	189.52	15.432	15.162

Como se puede ver, porcentualmente, el cambio estacionario es pequeño, es igual para todos los tamaños iniciales del competidor, es igual para las dos firmas por funciones de producción simétricas, y la inversión también varía poco.

Este cambio es pequeño porque el capital convergente depende del número de competidores. A pesar de terminar con un capital e inversión menor pero similares, los beneficios si sufren considerablemente porque el aumento conjunto de producción por duplicación del capital del mercado, presiona a la baja el precio de equilibrio.