Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Economía y Administración
Instituto de Economía
Profesor: Alexandre Janiak

Teoría Macroeconómica I - EAE320B

Leonardo Montoya (lalms@uc.cl) - Ignacio Rojas (irojasking@gmail.com)

Ayudantia 8 - OLG y estabilidad

1. Modelo de Generaciones Traslapadas (OLG)

Considere un modelo de generaciones traslapadas. El tiempo es discreto y el horizonte de la economía es infinito. En cada uno de estos periodos nace una cierta cantidad de agentes que viven dos periodos, esto es, existen dos tipos de consumidores: jóvenes y viejos. Suponga que la población crece a una tasa η, es decir, en el periodo $t+1$, la población de jóvenes que nace es $N_{t+1} = (1+\eta)N_t$, con N_0 dado. Estos agentes nacen con riqueza igual a cero. La utilidad viene dada por:

$$U = u\left(c_t^j\right) + \beta u\left(c_{t+1}^v\right) \tag{1}$$

donde

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad \sigma > 1 \tag{2}$$

Los agentes sólo trabajan cuando son jóvenes, recibiendo un salario w_t. Los agentes pueden ahorrar a una tasa r_t cada periodo. Los precios w_t y r_t están determinado por la demanda de los factores de la firma representativa. La función de producción de la firma representativa es

$$F\left(K_t, N_t\right) = K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0,1) \tag{3}$$

(a) Plantee el problema del consumidor con sus restricciones y halle el ahorro para los jóvenes.

(b) ¿Qué pasa con la proporción del ingreso destinada al ahorro ante un cambio en r_t?

(c) ¿Cuál es el consumo en la vejez?

(d) Plantee el problema de la firma y expresiones para los precios w_t y r_t en función de capital per cápita.

(e) Halle una expresión para el movimiento de k_{t+1}. Explique la evolución de la economía, para un nivel per capital inicial que se encuentra por debajo del estado estacionario k^*. [Considere que $0 < k_0 < k^*$]

2. Estabilidad de la Deuda

En este problema conviven un gobierno y un consumidor que vive infinitamente en una economía con mercados perfectos. El consumidor resuelve el siguiente problema:

$$\max_{\{\mathbf{c}_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{4}$$

$$\text{s.a.}$$

$$c_t + b_{t+1} + \tau_t \leq y + (1 + r_t) b_t \tag{5}$$

$$b_0 \text{ dado,} \tag{6}$$

donde $\mathbf{x}_t$ denota las variables de control del agente en el periodo t, y una dotación fija de bienes de consumo, b_t los bonos del gobierno, r_t la tasa de interés pagada sobre los bonos y τ_t un impuesto de suma alzada fijado mediante una regla *ad-hoc*. Por último, $\beta \in (0, 1)$ refiere al factor de descuento subjetivo del agente.

El gobierno por su parte consume una cantidad de bienes g cada periodo. El gasto en bienes del gobierno es financiado según la siguiente restricción presupuestaria:

$$b_{t+1} + \tau_t \geq g + (1 + r_t) b_t \tag{7}$$

1. (a) Encuentre e interprete económicamente la condición de primer orden del problema del consumidor.
   (b) Usando la condición de vaciamiento del mercado de bienes, encuentre la trayectoria de consumo óptimo c_t.
   (c) Emplee las condiciones de equilibrio que encontró en sus respuestas anteriores para mostrar que la trayectoria de la deuda del gobierno es:

$$b_{t+1} = (g - \tau_t) + \beta^{-1} b_t \tag{8}$$

2. (a) A continuación, definiremos los impuestos como una función del nivel de endeudamiento de la forma:

$$\tau_t = h(b_t) = \overline{\tau} + \tau_1 (b_t - \overline{b})^3 \tag{9}$$

   donde $\tau_1 > 0$ y $\overline{\tau}$ y $\overline{b}$ son respectivamente los impuestos y la cantidad de bonos que emite el gobierno en estado estacionario. Utilizando las ecuaciones (8) y (9), encuentre una expresión de $\overline{b}$ como función de $\overline{\tau}$ y otros parámetros.
   (b) Considere un estado estacionario en que los impuestos y la cantidad de bonos son $\overline{\tau}$ y $\overline{b}$. Muestre que, a partir de las ecuaciones (8) y (9), aplicando una aproximación de Taylor de primer orden a la trayectoria de la deuda en torno a este estado estacionario podemos escribir:

$$b_{t+1} - \overline{b} = \beta^{-1} (b_t - \overline{b}) \tag{10}$$

   (c) Considere un estado estacionario en que los impuestos y la cantidad de bonos son $\overline{\tau}$ y $\overline{b}$. ¿Es este estado estacionario localmente estable? Justifique su respuesta.

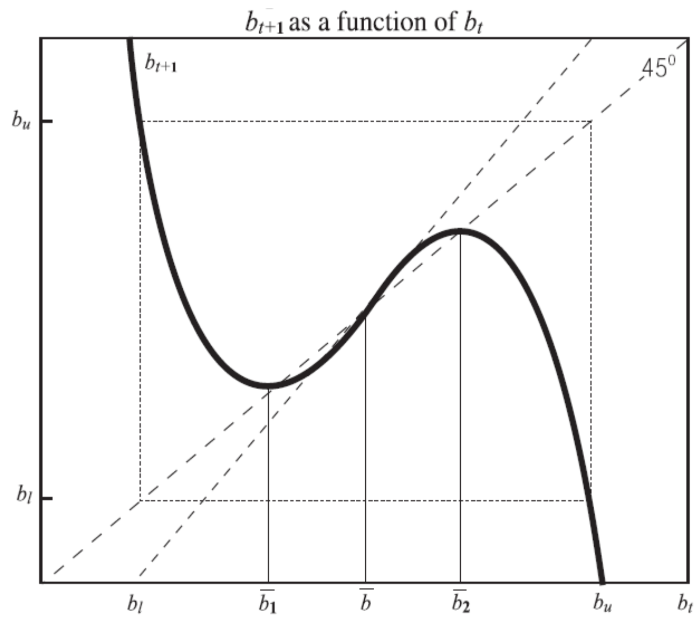

Figura 1: Estabilidad Global

(d) Basándose en el análisis local que ha hecho en las preguntas anteriores, ¿qué deberíamos esperar con la evolución de la deuda del gobierno si $b_0 > \overline{b}$? Explique la intuición económica detrás de esta dinámica.

(e) Observe en la figura 1 un análisis de estabilidad global de la trayectoria de endeudamiento. La línea continua gruesa representa la trayectoria de b_{t+1} de acuerdo con (8) y (9), y la linea cortada representa la aproximación lineal en (10). Además, se ha graficado la recta de 45 grados así indicada en el gráfico. Discuta cuáles son los estados estacionarios y su estabilidad respectiva para el caso global.

Seguimiento 8

(a) Ahora definiremos los impuestos como una función del nivel de endeudamiento de la forma:

$$\tau_t = h(b_t) = -(b_t - a)(b_t - \overline{b})(b_t - c) + b_t \tag{11}$$

Usando las ecuaciones (8) y (11), encuentre una aproximación lineal de primer orden para la cantidad de bonos que emite el gobierno, determinando una expresión para en (12):

$$b_{t+1} - \overline{b} = \gamma(b_t - \overline{b}) \tag{12}$$

Discuta la estabilidad local del estado estacionario para valores de los parámetros tales que $\gamma = 0$.

(b) Supongamos que los valores de los parámetros son tales que $\gamma = 0$. Utilice la figura 2, que considera la relacion entre b_{t+1} y b_t según las ecuaciones (8) y (11) (linea gruesa) y según su versión linealizada en (12) (linea cortada), para encontrar los estados estacionarios y discutir su respectiva estabilidad.

(c) Considere que la deuda inicial $b_0 \in (\overline{b}_1, \overline{b})$. Explique como difiere su conclusión sobre la velocidad de convergencia al estado estacionario según si considera la versión linealizada del modelo (dada

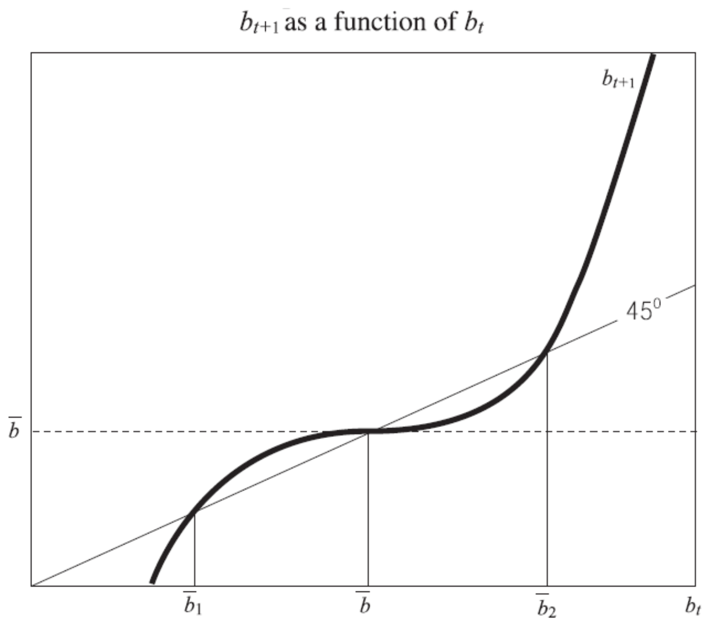

Figura 2: Estabilidad Global

por la ecuación (12)) o la versión no aproximada (dada por las ecuaciones (8) y (11)). Deduzca una ventaja del análisis global sobre el análisis local para esta segunda versión del modelo.