Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas
Instituto de Economía
Teoría Macroeconómica 1, EAE320B-1.

Seguimiento 6.

Oscar Herrera
Primer Semestre de 2024.

Condiciones de Blackwell.

Nuestro problema está dado por [1]:

$$
\begin{aligned}
\max_{s} \quad & U(h) = b - C(s) + \beta\Big(p(s)W(h) + (1-p(s))U(h')\Big) \\
\text{s.t.} \quad & W(h) = h(1-\tau) + \beta W(h')
\end{aligned}
$$

Reemplazando la restricción en $U(h)$:

$$
\max_{s} \quad U(h) = b - C(s) + \beta\Big(p(s)h(1-\tau) + \beta W(h') + (1-p(s))U(h')\Big)
$$

Las condiciones de Blackwell son un conjunto de condiciones que en caso de cumplirse, entonces un operador T es un mapeo contractante. A continuación, se demostrarán estas condiciones para nuestra especificación del problema.

Monotonicidad.

La variable h es la variable de estado del problema. Luego, sea $f : h \to \mathbb{R}$ una *continuation value function* acotada y sea T un operador definido en el espacio acotado de funciones tal que obtenga el valor que maximiza:

$$
(Tf)(h) = \max_{s} b - C(s) + \beta p(s)h(1-\tau) + \beta f(h, s, h')
$$

[1] Se asumió que las ecuaciones $U(h) = b - C(s) + \beta\Big(p(s)W(h) + (1-p(s))U(h)\Big)$ y $W(h) = h(1-\tau) + \beta W(h)$ contenían errores tipográficos, sino el problema sería uno tal cuya solución se obtiene con condiciones de primer orden.

Luego, podemos expresar lo anterior en función de las policy functions:

$$(Tf)(h) = b - C(s^*) + \beta p(s^*)h(1-\tau) + \beta f(h, s^*, h')$$

Sea $g(\cdot)$ una nueva function acotada que cumpla con $f(h, s^*, h') \leq g(h, s^*, h')$ y la siguiente desigualdad:

$$(Tf)(h) \leq b - C(s^*) + \beta p(s^*)h(1-\tau) + \beta g(h, s^*, h')$$

Definiendo $(Tg)(h)$ como:

$$(Tg)(h) = b - C(s^*) + \beta p(s^*)h(1-\tau) + \beta g(h, s^*, h')$$

etonces, podemos concluir que se cumple $(Tf)(h) \leq (Tg)(h)$ y que T satisface monotonicidad; primera condición de Blackwell. Tal cual como fue mostrado en clases, la función de utilidad maximizada nos garantiza que el valor que toma el resultado del operador esté acotado (i.e., el operador es un operador definido en un espacio de funciones acotadas).

Descuento.

Sea α un escalar, entonces $(T(f+\alpha))(h)$ está dado por:

$$\begin{aligned}
(T(f+\alpha))(h) &= \max_s b - C(s) + \beta p(s)h(1-\tau) + \beta\Big(f(h,s,h') + \alpha\Big) \\
&= \max_s b - C(s) + \beta p(s)h(1-\tau) + \beta f(h,s,h') + \beta\alpha \\
&= \underbrace{\Big(\max_s b - C(s) + \beta p(s)h(1-\tau) + \beta f(h,s,h')\Big)}_{(Tf)(h)} + \beta\alpha \\
(T(f+\alpha))(h) &= (Tf)(h) + \beta\alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto, fácilmente se puede comprobar que el operador T cumple con Descuento.