PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS
INSTITUTO DE ECONOMÍA
TEORÍA MACROECONÓMICA 1, EAE320B-1.

Seguimiento 9.

Oscar Herrera
Primer Semestre de 2024.

Pregunta a).

Variables de control.

- Si bien los beneficios dependen del capital presente, la firma no tiene posibilidad de afectarlo, sólo de usarlo. Sin embargo, si puede afectar el capital del siguiente periodo, por lo tanto, k_{t+1} **es variable de control**.
- Consistente con lo mencionado en el punto anterior, i_t **constituye la segunda variable de control** por medio la cual controla el capital y los beneficios futuros.

Variables de control.

- El capital presente es un parámetro determinado. Por lo tanto k_t **es variable de control en t**.

FOC.

Reexpresando la restricción del capital futuro con $\delta = 0$, obtenemos:

$$k_{t+1} = k_t + i_t$$
$$k_{t+1} - i_t = k_t$$

De esta forma, el Lagrangeano del problema de la firma queda especificado de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^t} \Big[f(k_t) - i_t(1+\phi(i_t)) \Big] + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t (\underbrace{k_t + i_t - k_{t+1}}_{k_t - (-i_t + k_{t+1})})$$

Definiendo $q_t \equiv \lambda_t(1+\rho)^t$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^t}\Big[f(k_t) - i_t(1+\phi(i_t))\Big] + \sum_{t=0}^{\infty} \underbrace{\lambda_t(1+\rho)^t}_{q_t} \frac{1}{(1+\rho)^t}(k_t + i_t - k_{t+1}) \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^t}\left[f(k_t) - i_t(1+\phi(i_t)) + q_t \frac{1}{(1+\rho)^t}(k_t + i_t - k_{t+1})\right]
\end{aligned}$$

Notar que $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_t$ nos entrega el beneficio de aumentar exógenamente el capital actual en una unidad por medio del relajamiento de la restricción. Esto significa que gracias a la definición $q_t \equiv \lambda_t(1+\rho)^t$ podemos interpretar q_t como el valor futuro (valor en t) de aumentar exógenamente el capital en una unidad, por medio de la restricción.

Si bien i_t y k_{t+1} son variables de control, nos es de particular interés la CPO respecto a i_t, ya que decidir la variable i_t es equivalente a k_{t+1}. Tomando la CPO respecto a esta variable:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial i_t} = 0 \\
\Longrightarrow \frac{1}{(1+\rho)^t}\Big(-[1+\phi(i_t) + i_t \cdot \phi'(i_t)] + q_t\Big) = 0 \\
q_t = 1 + \phi(i_t) + i_t \cdot \phi'(i_t)
\end{gathered}$$

Tal cual como se mencionó en la interpretación de q_t, q_t representa el beneficio marginal de aumentar el capital. Notar que el costo unitario de la inversión (o el capital) está normalizado a 1, por lo tanto, la FOC nos entrega la información de que en el óptimo el beneficio marginal de aumentar el capital es igual al costo marginal de adquirirlo y ajustarlo.

Pregunta b).

$\frac{\partial V(k_t)}{\partial k_t}$ es el aumento marginal de las utilidades ante el aumento de una unidad de capital. Por Teorema de la Envolvente sabemos que $\frac{\partial V(k_t)}{\partial k_t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t}$.

A su vez, en el óptimo:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k_t} = 0 \\
\Longrightarrow \frac{1}{(1+\rho)^t}(f'(k_t) + q_t) - \frac{1}{(1+\rho)^{t-1}} q_{t-1} = 0
\end{gathered}$$

Multiplicando por $(1+\rho)^{t-1}$:

$$\frac{1}{(1+\rho)}(f'(k_t)+q_t)=q_{t-1}$$

Reordenando:

$$f'(k_t)=\rho q_{t-1}\underbrace{-q_t+q_{t-1}}_{\equiv -\Delta q_t}$$

Iterando para expresar en función de $f'(k_{t+1})$:

$$f'(k_{t+1})=\rho q_t\underbrace{-q_{t+1}+q_t}_{\equiv -\Delta q_{t+1}}$$
$$f'(k_{t+1})=\underbrace{\rho q_t}_{rq_t}-\Delta q_{t+1}$$

rq_t representa la venta de capital e inversión de esta liquidez en el mercado financiero, la que se ajusta por costos de variación del capital. En el óptimo, los recursos deben entregar el mismo rendimiento si se usan en el mercado financiero que si se usan para la producción real. De otra forma, el agente no se encuentra indiferente y tiene margen para aumentar su utilidad cambiando sus decisiones.

Pregunta c).

Reexpresando:

$$f'(k_{t+1})=(1+\rho)q_t-(q_{t+1}-q_t)$$
$$\implies q_t=\frac{1}{(1+\rho)}\Big(f'(k_{t+1})+q_{t+1}\Big)$$

Análogamente,

$$q_{t+1}=\frac{1}{(1+\rho)}\Big(f'(k_{t+2})+q_{t+2}\Big)$$

Reemplazando q_{t+1} en q_t:

$$q_t = \frac{1}{(1+\rho)}\Big(f'(k_{t+1}) + \frac{1}{(1+\rho)}\Big(f'(k_{t+2}) + q_{t+2}\Big)\Big)$$

Iterando, se obtiene:

$$q_t = \sum_{i=1}^{T} \frac{1}{(1+\rho)}\Big[f'(k_{t+i})\Big] + \frac{1}{(1+\rho)^T} q_{t+T}$$

Mediante $T \to \infty$, obtenemos:

$$q_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)}\Big[f'(k_{t+i})\Big] + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(1+\rho)^T} q_{t+T}$$

Bajo la Condición de Transversalidad:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{(1+\rho)^T} q_{t+T} = 0$$

se obtiene:

$$q_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)}\Big[f'(k_{t+i})\Big]$$

Se estableció que q_t es el valor en t del beneficio aumento del capital en una unidad exógenamente. Bajo la expresión anterior podemos notar que este aumento del beneficio marginal ocurre a través del aumento de la producción en los periodos siguientes, lo que se traduce en mayores ventas, pero estos aumentos marginales en las ventas (producción) se descuentan correspondientemente.

Pregunta d).

Recordar que por $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_t} = 0$ obteníamos:

$$q_t = 1 + \underbrace{\phi(i_t)}_{\text{creciente}} + i_t \cdot \underbrace{\phi'(i_t)}_{\text{creciente}}$$

$$q_t - 1 = \underbrace{\phi(i_t) + i_t\phi'(i_t)}_{\equiv h(i_t)}$$

Ambos términos son crecientes destacados son crecientes por los supuestos $\phi' > 0$ y $\phi'' > 0$ respectivamente. Por ende, $q_t - 1$ y $h(i_t)$ es creciente en i_t. Como la inversa es simétrica respecto a la recta $y = x$, entonces $h^{-1}(i_t)$ también es creciente en i_t y pasa por el origen ya que $h(0) = 0$.

Aplicando $h^{-1}(\cdot)$ a la igualdad para $q_t - 1$, se obtiene:

$$h^{-1}(q_t - 1) = i_t$$

La firma invertirá ($i_t > 0$) cuando $q_t - 1 > 0 \Rightarrow q_t > 1$. Intuitivamente, invierte cuando el beneficio del aumento de la unidad marginal de capital es superior a su precio de compra, normalizado a 1. No invierte en caso contrario.