Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Economía y Administración
Instituto de Economía
Profesor: Alexandre Janiak

Teoría Macroeconómica I - EAE320B

Leonardo Montoya (lalms@uc.cl) - Ignacio Rojas (irojasking@gmail.com)

Ayudantia 11 - Mercado Financiero

Equilibrio general con dotación estocástica

Consideremos una economía cerrada que evoluciona en tiempo discreto. Usaremos la notación t para referirnos a un periodo particular. El agente representativo consume una cantidad c_t en cada periodo, de la cual obtiene un flujo de utilidad $u(c_t)$, donde u es una función de utilidad estrictamente creciente y cóncava. El factor de descuento del agente es $\beta \in (0,1)$. La economía tiene una empresa representativa que genera una dotación exógena de bienes y_t en cada periodo t, los cuales solo se usan para consumo. El precio de un bien es normalizado a 1 en cada periodo.

En esta economía existen dos mercados financieros. En el primer mercado, denominado mercado de riesgo alto, el agente representativo transa acciones s de la empresa representativa a un precio p. Esta acción paga dividendos igual a la producción $\pi_t = y_t$ cada periodo (los beneficios de la empresa). El precio de la acción depende de la dotación generada por la firma, la cual es estocástica y por lo tanto el agente no conoce con certidumbre el precio al cual podrá transar acciones en el futuro.

En el segundo mercado, el mercado de riesgo bajo, el agente puede ahorrar o endeudarse a una tasa libre de riesgo r. Esto es, si contrata deuda en t, conoce ex-ante la tasa r a la cual se repagará deuda en $t+1$. Denotaremos el ahorro del agente en activos libres de riesgo por medio de b_t, considerando $R \equiv 1 + r$ la tasa de interés bruta libre de riesgo.

El agente toma los precios como dado, los cuales son determinados en equilibrio general igualando oferta con demanda. Normalizaremos la cantidad de acciones s de la empresa a uno. Finalmente, supondremos que la utilidad del agente es una especificación CRRA:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} & \text{si } \sigma \neq 1 \\ \log(c) & \text{si } \sigma = 1 \end{cases}$$

(a) Escriba la ecuación de Bellman del agente, identificando sus variables de control y estado.

(b) Utilizando el teorema de la envolvente, muestre que las dos ecuaciones de Euler que caracterizan las decisiones óptimas del agente son:

$$(1)\ u'(c) = \beta R' \mathbb{E}[u'(c')] \quad \wedge \quad (2)\ u'(c) = \beta \mathbb{E}\left[u'(c')\frac{p' + \pi'}{p}\right]$$

(c) Definiendo el factor de descuento estocástico $m_{t,t+k} \equiv \beta^k \frac{u'(c_{t+k})}{u'(c_t)}$, muestre que en ausencia de burbujas especulativas el precio de la acción se puede escribir como:

$$p_t = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{t+i} m_{t,t+i}\right]$$

(d) Indique las condiciones de equilibrio general en esta economía y halle una expresión para el precio de equilibrio. Analice en particular los casos con $\sigma = 1$ y $\sigma > 1$ con un proceso para la producción IID.

(e) Definiendo $f(y) = p(y)u'(c)$, demuestre que en equilibrio la ecuación (2) define un mapeo contractante sobre f. ¿Qué implicancias tiene esto para simular el equilibrio general?

Seguimiento 11

(f) Utilizando el operador $f(y)$, obtenga una expresión para los precios de equilibrio. ¿Qué supuestos deben realizarse para que la solución de f sea constante? ¿Cómo se compara a la solución obtenida en el inciso (d)?

Suponga que la dotación y_t sigue una cadena de Markov de $K = 4$ estados, tomando valores de 0.9, 0.97, 1 y 1.03 en los estados 1, 2, 3 y 4, con la siguiente matriz de transición Π asociada:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}65 & 0{,}25 & 0{,}05 \\ 0{,}01 & 0{,}07 & 0{,}85 & 0{,}07 \\ 0{,}015 & 0{,}05 & 0{,}28 & 0{,}655 \end{bmatrix}$$

Considere $\beta = 0{,}96$ y $\sigma = 2$ en sus simulaciones y que el producto de la economía en $t = 0$ es $y = 1$.

(g) Obtenga los precios de equilibrio $p(y)$ resolviendo el sistema de ecuaciones definido por la ecuación de Euler (2).[1] A partir de la ecuación de Euler (1), obtenga las tasas libres de riesgo r en la economía.

(h) Compute la tasa de interés riesgosa definida por $1 + r_r = \frac{p' + \pi'}{p}$ y las primas por riesgo que implica.

(i) Simule una trayectoria de N periodos para el output y_t, consumo c_t, tasa de interés r_t y precios p_t.

[1] Cuando y es discreto, la ecuación (2) define un sistema lineal en p. Sea y el vector de estados posibles de productividad agregada. Los precios de equilibrio $p \equiv p(y)$ satisfacen entonces:

$$p_i = \sum_{k=1}^{K} \Pi_{i,k} M_{i,k}(p_k + y_k) \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, K\}$$

donde Π es la matriz de transición y M la matriz definida por el factor de descuento estocástico $m_{t,t+n} \equiv \beta^n \frac{u'(c_{t+n})}{u'(c_t)}$ para $n = 1$:

$$M = m_{t,t+1} = \beta \begin{bmatrix} \frac{u'(c(y_1))}{u'(c(y_1))} & \frac{u'(c(y_2))}{u'(c(y_1))} & \cdots & \frac{u'(c(y_K))}{u'(c(y_1))} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u'(c(y_1))}{u'(c(y_K))} & \frac{u'(c(y_2))}{u'(c(y_K))} & \cdots & \frac{u'(c(y_K))}{u'(c(y_K))} \end{bmatrix}$$