Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas
Instituto de Economía
Teoría Macroeconómica 1, EAE320B-1.

Seguimiento 11.

Oscar Herrera
Primer Semestre de 2024.

Pregunta f.

Haciendo uso del operador $f(y) = p(y)u'(c)$, la ecuación de Euler para activos riesgosos es:

$$f(y) = \beta\mathbb{E}\Big[f(y') + u'(y')\pi(y')\Big]$$

Reemplazando primas por suscritos de tiempo:

$$f(y_t) = \beta\mathbb{E}\Big[f(y_{t+1}) + u'(y_{t+1})\pi(y_{t+1})\Big]$$

Asimismo,

$$f(y_{t+1}) = \beta\mathbb{E}\Big[f(y_{t+2}) + u'(y_{t+2})\pi(y_{t+2})\Big]$$

Reemlazando $f(y_{t+1})$ en $f(y_t)$:

$$\begin{aligned} f(y_t) &= \beta\mathbb{E}\Big[\beta\mathbb{E}\Big[f(y_{t+2}) + u'(y_{t+2})\pi(y_{t+2})\Big] + u'(y_{t+1})\pi(y_{t+1})\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\beta^2 f(y_{t+2}) + \beta\big(u'(y_{t+1})\pi(y_{t+1})\big) + \beta^2\big(u'(y_{t+2})\pi(y_{t+2})\big)\Big] \end{aligned}$$

Iterando para T periodos:

$$f(y_t) = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\infty} \beta^i u'(y_{t+i})\pi(y_{t+i}) + \beta^T f(y_{t+T})\Big]$$

Reemplazando la forma funcional de $u'(\cdot)$ con $\sigma \neq 1$, $\pi(y_{t+i}) = y_{t+i}$ y shocks IID, se obtiene:

$$f(y_t) = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\infty} \beta^i {y_{t+i}}^{1-\sigma} + \beta^T f(y_{t+T})\Big]$$

Luego, dividiendo por $u'(y_t)$:

$$\frac{f(y_t)}{u'(yt)} = \frac{1}{y_t^{-\sigma}}\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\infty} \beta^i {y_{t+i}}^{1-\sigma} + \beta^T f(y_{t+T})\Big]$$

$$\begin{aligned}
p_t &= {y_t}^{\sigma}\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\infty} \beta^i {y_{t+i}}^{1-\sigma} + \beta^T f(y_{t+T})\Big] \\
&= {y_t}^{\sigma}\sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \mathbb{E}\Big[{y_{t+i}}^{1-\sigma}\Big] + \mathbb{E}\Big[\beta^T f(y_{t+T})\Big] \\
&= {y_t}^{\sigma}\frac{\beta}{1-\beta}\underbrace{\mathbb{E}\Big[{y_{t+i}}^{1-\sigma}\Big]}_{\equiv \mu} + \mathbb{E}\Big[\beta^T f(y_{t+T})\Big] \\
&= {y_t}^{\sigma}\frac{\beta}{1-\beta}\mu + \mathbb{E}\Big[\beta^T f(y_{t+T})\Big]
\end{aligned}$$

Reemplazando la forma funcional de $u'(\cdot)$ con $\sigma = 1$, se obtiene:

$$f(y_t) = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \frac{1}{y_{t+i}} y_{t+i} + \beta^T f(y_{t+T})\Big]$$

$$f(y_t) = \mathbb{E}\Big[\frac{\beta}{1-\beta} + \beta^T f(y_{t+T})\Big]$$

Luego, dividiendo por $u'(y_t)$:

$$\frac{f(y_t)}{u'(yt)} = \frac{1}{\frac{1}{y_t}}\mathbb{E}\Big[\frac{\beta}{1-\beta} + \beta^T f(y_{t+T})\Big]$$

$$\frac{f(y_t)}{u'(yt)} = y_t\frac{\beta}{1-\beta} + \beta^T\mathbb{E}\Big[f(y_{t+T})\Big]$$

Lo que implica que la expresión de precios de equilibrio esté dada por:

$$p_t = y_t \frac{\beta}{1-\beta} + \beta^T \mathbb{E}\Big[f(y_{t+T})\Big]$$

Para que $f(\cdot)$ sea constante se requiere que $y_{t+T+j} = y^*$, $\forall j \geq 1$.

Sabemos que lo anterior ocurrirá en algún punto porque en el inciso (e) se demuestra que la ecuación (2) define un mapeo contractante sobre f, dando origen a un solo punto fijo.

Ambos resultados son iguales a los resultados en (d), agregando el término f, el cual converge eventualmente.

Pregunta g.

Sabemos que $u'(c) = c^{-\sigma} = c^{-2}$ y que:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}97 \\ 1 \\ 1{,}03 \end{bmatrix}$$

Desarrollando la expresión $p_i = \sum_{k=1}^{K} \Pi_{i,k} \cdot M_{i,k} \cdot (p_k + y_k)$ para p_1 y reemplazando y=c y $M_{i,k} = \beta \frac{u'(c')}{u'(c)}$:

$$\begin{aligned}
p_1 = &\Big(\Pi_{1,1} \cdot M_{1,1} \cdot (p_1 + y_1)\Big) \\
&+ \Big(\Pi_{1,2} \cdot M_{1,2} \cdot (p_2 + y_2)\Big) \\
&+ \Big(\Pi_{1,3} \cdot M_{1,3} \cdot (p_3 + y_3)\Big) \\
&+ \Big(\Pi_{1,4} \cdot M_{1,4} \cdot (p_4 + y_4)\Big) \\
p_1 = &\left(\Pi_{1,1} \cdot \beta \left(\frac{y_1}{y_1}\right)^2 \cdot (p_1 + y_1)\right) \\
&+ \left(\Pi_{1,2} \cdot \beta \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 \cdot (p_2 + y_2)\right) \\
&+ \left(\Pi_{1,3} \cdot \beta \left(\frac{y_1}{y_3}\right)^2 \cdot (p_3 + y_3)\right) \\
&+ \left(\Pi_{1,4} \cdot \beta \left(\frac{y_1}{y_4}\right)^2 \cdot (p_4 + y_4)\right)
\end{aligned}$$

Podemos definir la siguiente expresión para p_1:

$$
\begin{aligned}
p_1 = &\Big(\alpha_1 \cdot (p_1 + \beta_1)\Big) \\
&+ \Big(\alpha_2 \cdot (p_2 + \beta_2)\Big) \\
&+ \Big(\alpha_3 \cdot (p_3 + \beta_3)\Big) \\
&+ \Big(\alpha_4 \cdot (p_4 + \beta_4)\Big)
\end{aligned}
$$

Los precios en los distintos estados satisfacen una expresión equivalente con distintos coeficientes. Luego se resuelve el sistema de ecuaciones mediante el siguiente código de matlab:

```
a1 = 0.6*0.96;
a2 = 0.15*0.96*(0.9/0.97)^2;
a3 = 0.15*0.96*(0.9/1)^2;
a4 = 0.1*0.96*(0.9/1.03)^2;
b1 = 0,9;
b2 = 0.97;
b3 = 1;
b4 = 1.03;

c1 = 0.05*0.96*(0.97/0.9)^2;
c2 = 0.65*0.96;
c3 = 0.25*0.96*(0.97)^2;
c4 = 0.05*0.96*(0.97/1.03)^2;
d1 = 0,9;
d2 = 0.97;
d3 = 1;
d4 = 1.03;

e1 = 0.01*0.96*(1/0.9)^2;
e2 = 0.07*0.96*(1/0.97)^2;
e3 = 0.085*0.96;
e4 = 0.07*0.96*(1.03/0.97)^2;
f1 = 0,9;
f2 = 0.97;
f3 = 1;
f4 = 1.03;

g1 = 0.015*0.96*(1.03/0.9)^2;
g2 = 0.05*0.96*(1.03/0.97)^2;
g3 = 0.28*0.96*(1.03)^2;
g4 = 0.655*0.96;
```

```
h1 = 0,9;
h2 = 0.97;
h3 = 1;
h4 = 1.03;

syms p1 p2 p3 p4
eqn1 = a1*(p1 + b1) + a2*(p1 + b2) + a3*(p1 + b3) + a4*(p1 + b4) == p1;
eqn2 = c1*(p2 + d1) + c2*(p2 + d2) + c3*(p2 + d3) + c4*(p2 + d4) == p2;
eqn3 = e1*(p3 + f1) + e2*(p3 + f2) + e3*(p3 + f3) + e4*(p3 + f4) == p3;
eqn4 = g1*(p4 + h1) + g2*(p4 + h2) + g3*(p4 + h3) + g4*(p4 + h4) == p4;

sol = solve([eqn1, eqn2, eqn3, eqn4], [p1, p2, p3, p4]);
p1 = double(sol.p1)
p2 = double(sol.p2)
p3 = double(sol.p3)
p4 = double(sol.p4)
```

Obteniendo los siguientes valores:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}8373 \\ 16{,}8725 \\ 0{,}3015 \\ 75{,}5169 \end{bmatrix}$$

Para la ecuación de la tasa de libre de riesgo, sabemos que $y = c$ y que la tasa no variará porque es libre de riesgo. Al ahorrar en este activo se cumple que el consumo será igual en todos los periodos, por lo tanto:

$$R = \beta^{-1}$$

$$r = 0{,}96^{-1} - 1 = 4{,}17\,\%$$