Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas
Instituto de Economía
Teoría Macroeconómica 1, EAE320B-1.

Seguimiento 5.

Oscar Herrera
Primer Semestre de 2024.

Pregunta 1: Variables de control y variables de estado.

c es variable de control en todo momento ya que es la variable sobre la cual el agente tiene control para alcanzar su máxima utilidad. Sea a el stock de activos en un momento t y a' el stock de activos en el periodo siguiente. a es variable de estado en el momento t ya que resume la información de las decisiones pasadas y con la cual podemos describir el valor de la variable de control c, mientras que a' es variable de estado en $t+1$, pero variable de control en t. Escoger c' en t es equivalente a escoger a' y se pueden tomar decisiones en t para determinar a'. Sin embargo, en $t+1$ no es posible cambiar a', y a su vez, determina c'; por lo que podemos establecer que a' es variable de estado en $t+1$.

Pregunta 2: Ecuación de Euler.

Nuestro problema tiene asociado la siguiente restricción presupuestaria:

$$a' = Ra - c$$

En este caso, nuestro problema permite realizar sustitución. En este sentido, la ecuación de Bellman del problema está dada por:

$$\begin{aligned} V(a) &= max_c \; u(c) + \beta V(Ra - c) \\ &= max_c \; ln(c) - \beta V'(Ra - c) \end{aligned}$$

La CPO del problema es la siguiente:

$$u'(c) - \beta V'(Ra - c) = 0$$
$$\frac{1}{c} = \beta V'(Ra - c)$$

Por otro lado, en el óptimo, la ecuación de Bellman está dada por:

$$V(a) = u(c^*(a)) - \beta V(Ra - c^*(a))$$

Derivando respecto a a:

$$V'(a) = u'(c^*(a))c^{*\prime}(a) + \underbrace{\beta V'(Ra - c^*(a))}_{=u'(c)=\frac{1}{c} \text{ por CPO}}(R - c^{*\prime}(a))$$
$$V'(a) = u'(c^*(a))R = \frac{R}{c^*(a)}$$

Adicionalmente, para el siguiente periodo por analogía:

$$V'(Ra - c) = u'(Ra - c^*(a))R = \frac{R}{Ra - c^*(a)} = \frac{R}{c'}$$

Reemplazando el resoltado anterior en la CPO llegamos a que:

$$\underbrace{\frac{1}{c}}_{umg_c} = \beta R \underbrace{\frac{1}{c'}}_{umg_{c'}}$$

$$\iff \frac{c'}{c} = \beta R$$

Podemos deducir de la ecuación de Euler que en el óptimo la utilidad marginal de consumir una unidad extra hoy, debe ser igual al beneficio de consumir una unidad extra mañana, amplificada por el interés de ahorrar la unidad, y descontada por nuestro factor de paciencia temporal para comparar utilidades entre periodos. En el caso de la función logarítmica, podemos interpretar que el ratio de los consumos debe ser igual a la tasa que se ofrece por ahorrar en el mercado y el factor de paciencia de los agentes. En definitiva, conseguimos la misma ecuación e interpretación para el caso logarítmico de dos periodos.

Pregunta 3: Verify.

Reemplazando el *guess* en la ecuación de Bellman obtenemos:

$$\tilde{V}(a) = max_c \; ln(c) + \beta\big(A + Bln(Ra - c)\big)$$

Luego, la CPO está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} - \frac{\beta B}{Ra - c} &= 0 \\ \implies c &= \frac{Ra}{(1 + \beta B)} \end{aligned}$$

Reemplazando en $\tilde{V}(a)$:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(a) &= ln\Big(\frac{Ra}{1 + \beta B}\Big) + \beta A + \beta B ln\Big(\frac{Ra\beta B}{1 + \beta B}\Big) \\ &= \underbrace{ln\Big(\frac{R}{1 + \beta B}\Big) + \beta A + \beta B ln\Big(\frac{R\beta}{1 + \beta B}\Big)}_{A} + \underbrace{(1 + \beta B)}_{B} ln(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrada la estructura.

Pregunta 4: Solución para A y B.

El sistema para encontrar A y B es el siguiente:

$$B = 1 + \beta B \tag{1}$$

$$A = ln(R) - ln(1 + \beta B) + \beta A + \beta B ln\Big(\frac{R\beta B}{1 + \beta B}\Big) \tag{2}$$

De (2) es fácil ver que $B = \frac{1}{1-\beta}$. Luego, resolviendo pordemos establecer que:

$$A = \left(\frac{1}{1-\beta}\right)\Big(ln(R) - (1+\beta B)ln(1+\beta B) + \beta B ln(R\beta B)\Big)$$

Pregunta 5: Solución para A y B.

De la pregunta 3 sabemos que:

$$c(a,B) = \frac{Ra}{(1+\beta B)}$$

Reemplazando B en $c(a,B)$ obtenemos que la policy function del consumo está dada por:

$$c(a) = (1-\beta)Ra$$

Luego, la policy function de los activos al siguiente periodo, obtenida de reemplazar $c(a)$ en $a' = Ra - c$ está dada por:

$$a' = \beta Ra = \beta(1+r)a$$

Intuitivamente, el individuo tiene preferencia por el suavizamiento. Sabemos que $\beta \in (0,1)$. A mayor β, el término $(1-\beta)$ se hace menor y el consumo es menor para un nivel determinado de intereses y activos. El individuo sería más paciente, por lo que tiende a destinar parte de sus activos al ahorro. En cuanto a la trayectoria de los activos, una parte de los activos del periodo anterior siempre será consumida por lo que $\beta in(0,1)$ corrige la parte de a que es consumida por las preferencias del agente. El resultante es lo que puede el agente puede invertir a una tasa r que es materializada en el próximo periodo. Notar que en equilibrio, ambas trayectorias son constantes,