



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
 FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y
 ADMINISTRATIVAS
 INSTITUTO DE ECONOMÍA
 TEORÍA MACROECONÓMICA 1, EAE320B-1.

Tarea 1.

Federico Sánchez
 Oscar Herrera
 Primer Semestre de 2024.

Pregunta 1.1 y Pregunta 1.2.

El problema a resolver para esta pregunta está dado por:

$$\begin{aligned} \max_{\{I_t\}} \quad & V(K_t) = \max\{V^a(K_t), V^i(K_t)\} \\ \text{s.t.} \quad & V^a(K_t) = \max_{\{I_t\}} \left(AK_t^\alpha - p_I I_t - FK_t - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{I_t}{K_t} \right)^2 K_t + \beta V(K_{t+1}) \right) \\ & V^i(K_t) = AK_t^\alpha + \beta V(K_t(1 - \delta)) \\ & K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \end{aligned}$$

El problema de la firma con horizonte infinito tiene la caracterización anterior debido a que en cada momento del tiempo la firma podría realizar una inversión o no realizarla. En caso de no realizarse, por la última restricción, el capital del próximo periodo sería el capital actual depreciado: $\beta V(K_t(1 - \delta))$.

Luego, hemos definido los siguientes parámetros:

Parametrización

A	p^I	F	β	δ	α	k^{min}	k^{max}	N^k	$Tolerancia$	$Convergencia$	$N \max Iteraciones$
1.25	1	0.475	0.95	0.08	0.48	0.05	20	1000	0,000001		1000

Para resolver el problema hemos separado el problema en tres partes. En primer lugar, hemos resuelto el problema para $V^a(K_t)$, luego para $V^i(K_t)$ y finalmente, hemos encontrado la *Policy Function* considerando las dos alternativas para un nivel de capital inicial determinado.

Resolución de $V^a(K_t)$.

Despejando la variable de control en la última restricción, y reemplazando esta en $V^a(K_t)$ obtenemos:

$$V^a(K_t) = \left(AK_t^\alpha - p_I \cdot (K_{t+1} - K_t(1 - \delta)) - FK_t - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{K_{t+1} - (1 - \delta)K_t}{K_t} \right)^2 K_t + \beta V(K_{t+1}) \right)$$

Esta expresión nos permite generar una grilla de valores para $V^a(K_t, K_{t+1}) - \beta V(K_{t+1})$, producto de evaluar la ecuación con las distintas posibles combinaciones de capital en el periodo corriente y el próximo periodo: $K_t \times K_{t+1}$, con $K_i \in \text{linspace}(k_{\min}, k_{\max}, N_k)$. Luego, hemos censurado aquellas combinaciones que no se encuentran dentro de las posibilidades de la firma, y para un *guess inicial* (primera iteración) obtenemos los valores de la primera *Value Function*. De esta forma, dado un valor de capital inicial K_t , entonces podemos encontrar aquel K_{t+1} que maximiza la utilidad corriente.

Obtenemos el valor de la *Value Function* para un nivel de estado inicial y resolvemos recursivamente reemplazando nuevamente el valor obtenido de la *Value Function* en la ecuación de Bellman.

En la recursión hacemos uso del parámetro *Tolerancia Convergencia*, el cual define la tolerancia de la convergencia, es decir, nuestro umbral de diferencia entre *Value Functions* de dos iteraciones consecutivas para el cual consideraremos que el algoritmo ha convergido. En caso de no converger, el parámetro *N max Iteraciones* nos define el número máximo de iteraciones para el cual detener el algoritmo y evitar ejecutar *loops* indefinidos.

Luego de encontrar la *Value Function* a la cual se converge mediante *Value Function iteration*, podemos despejar la inversión en el primer periodo en función de la variable de estado con la última restricción del problema. Es decir, dado un K_{t+1}^* óptimo para cierto nivel de K_t , obtenemos la inversión usando la siguiente ecuación: $K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$.

El código asociado a la funcionalidad de resolución de $V^a(K_t)$ es el de la función `value_inversion()`:

```
1  % Funcion de iteracion Pl
2  function [Cti,kti,Vf,kp, iter] = value_inversion(beta, alpha, delta, A, max_iter, k
    , tol,pI,F,gamma)
3  e = 1; % Error inicial
4  iter = 0;
5  Vf = ones(length(k),1); %Guess inicial
6
7  while e > tol && iter < max_iter
8      %Preallocation
9      Vp = NaN(length(k),1);
10     kp = NaN(length(k),1);
11     Caux = A*k'.^alpha - pI*(k - (1-delta)*k') - F*k' - (gamma/2).*((k - (1-delta)*
        k')./k').^2.*k';
12     % k es un vector fila, al restar, los valor de k se restan en filas a
13     % varias columnas pegadas de k'.
14     Caux(Caux<=0) = NaN;
15     Vaux= Caux + beta*Vf';      % ecuacion de bellman
```

```

16     [Vp(:,1),kp(:,1)]= max(Vaux,[],2);
17     e = max(abs(Vf-Vp));
18     iter = iter + 1 ;
19     Vf = Vp;
20 end
21
22 Cti = A.* k.^alpha + (1- delta).*(k - k(kp'));%Consumption policy
23 kti = k(kp');%Assets policy
24 Vf = Vf';
25 kp = kp';
26 end

```

Resolución de $V^i(K_t)$.

De forma análoga, hemos resuelto la *Value Function* cuando el individuo no invierte con el siguiente reemplazo:

$$V^i(K_t) = AK_t^\alpha + \beta V(K_t(1 - \delta))$$

En este caso, hemos definido un *guess inicial* para el *value function continuation*, reemplazamos aquel valor en la ecuación de Bellman, se calcula el valor del *value function continuation* con el capital depreciado de forma determinística, se encuentra un nuevo *value function continuation* y se reemplaza nuevamente en la ecuación de Bellman. En el momento en que el valor de la ecuación de Bellman ha convergido, entonces se concluye que se ha encontrado el valor de $V^i(K_t) \quad \forall K_t$.

El código asociado a la funcionalidad de resolución de $V^i(K_t)$ es el de la función `value_function_sin_inversion()`:

```

1 function [Vf, policy_choice, iter] = value_function_sin_inversion(beta, alpha,
2     delta, A, max_iter, k_grid, tol)
3
4     % Inicializacion
5     e = 1; % Error Inicial
6     iter = 0; % Iteraciones
7     Vf = zeros(length(k_grid), 1); % Guess Inicial
8     policy_choice = zeros(length(k_grid), 1); % Eleccion Optima
9
10    % Make sure k_grid is a column vector
11    k_grid = k_grid(:);
12
13    % Precompute repeated values
14    k_grid_depreciated = k_grid * (1 - delta);
15
16    while e > tol && iter < max_iter
17        % Computar funcion de valor de interpolar

```

```

17     Vi = A * k_grid.^alpha + beta * interp1(k_grid, Vf, k_grid_depreciated, '
18         linear', 'extrap');
19     % Elegir el maximo
20     [Vp, policy_indices] = max(Vi, [], 2);
21
22     % Computamos error y agregamos iteracion
23     e = max(abs(Vf - Vp));
24     iter = iter + 1;
25     Vf = Vp; % Actualizar value function
26     policy_choice = policy_indices; % Actualizar policy
27
28 end
end

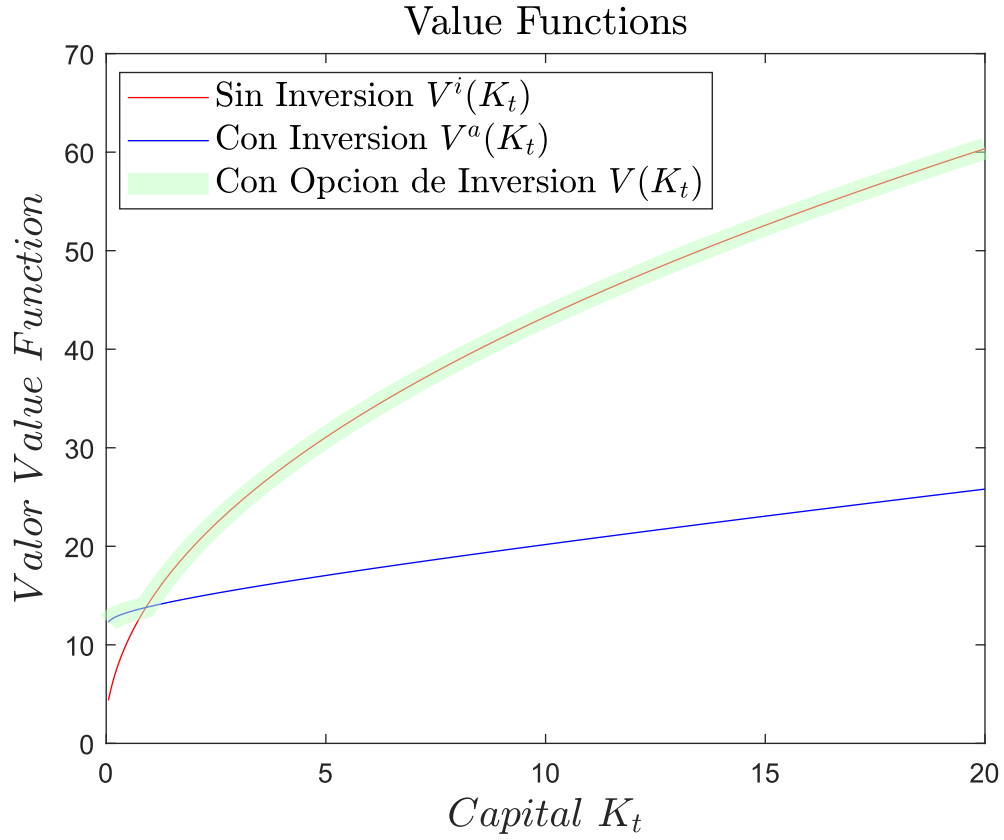
```

Resolución de $V^i(K_t)$.

Para esta *ValueFunction* el problema se vuelve más simple; hemos tomado el máximo para cada valor de capital inicial K_t y hemos determinado si el individuo invierte o no invierte, y qué valor tomará su *Value Function* maximizada conforme a esta decisión.

Gráfico de Value Functions.

El resultado de la sección anterior se traduce en el siguiente gráfico:



Pregunta 1.3.

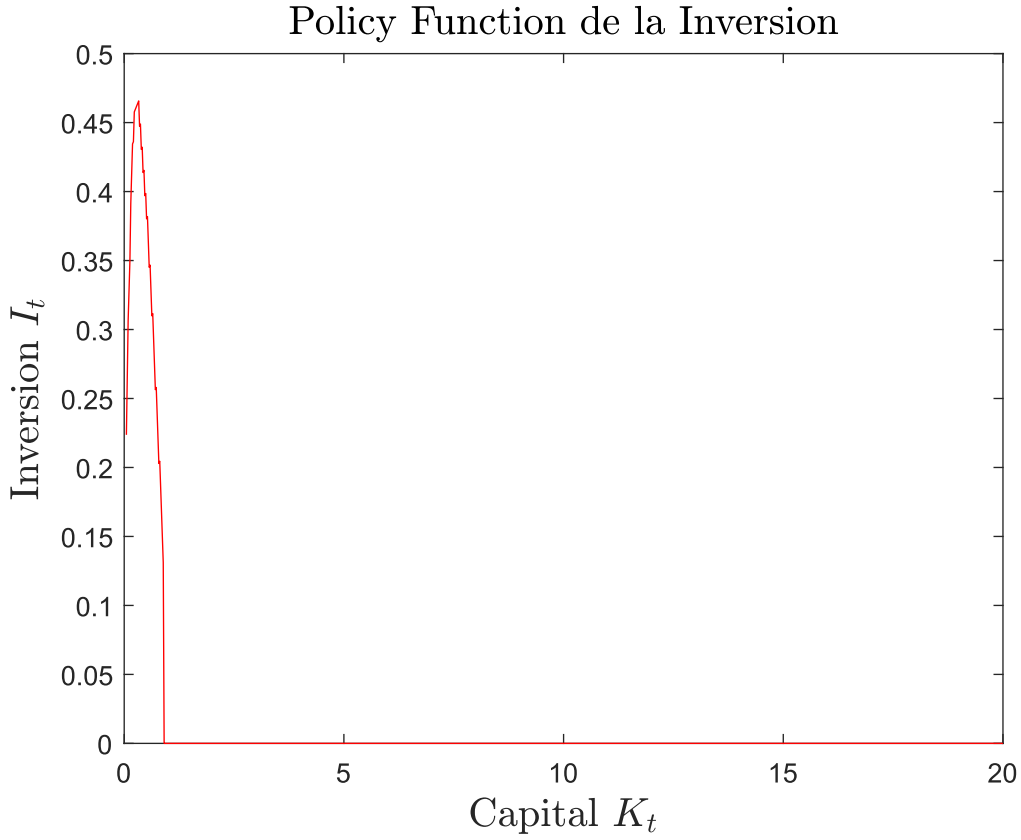
Gráfico de Policy Function.

De acuerdo a la decisión o no invertir, nuevamente hacemos uso de la restricción de K_{t+1} para encontrar la variable de decisión en función de la variable de estado:

$$I_t^*(K_t) = \begin{cases} K_{t+1}^* - (1 - \delta)\overline{K}_t & , \text{ si } V^a(K_t) > V^i(K_t) \\ 0 & , \text{ si } V^i(K_t) \geq V^a(K_t) \end{cases}$$

donde K_{t+1}^* es el capital futuro óptimo que maximiza la utilidad para un \overline{K}_t calculado numéricamente con el procedimiento descrito, y \overline{K}_t el capital inicial asociado.

El resultado es el siguiente:



Interpretaciones de la inversión óptima.

Se puede observar que la *Policy Function* del individuo se compone de tres tramos. En el primero, se observa una inversión en función del capital creciente. En el segundo tramo una inversión creciente, y por último, una inversión nula en el tercer tramo.

Intuitivamente, podríamos concluir que existe un nivel de capital óptimo, lo que es consistente con la teoría económica clásica. Cuando se invierte los costos aumentan, pero además es posible notar que en niveles de capital alto, para un mismo nivel de inversión, la firma observa un aumento de costos mucho mayor, debido a los términos que experimentan un el efecto expansivo del capital actual.

$$\downarrow V^a(K_t) = \left(AK_t^\alpha - p_I \bar{I}_t - \uparrow \uparrow FK_t - \uparrow \uparrow \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\bar{I}_t}{K_t} \right)^2 K_t + \beta V(K_{t+1}) \right)$$

Por lo tanto, para no generar un aumento de costos que consuman los potenciales beneficios, en aquellos tramos la firma prefiere no invertir. En consecuencia, se origina la forma observada del tercer tramo.

En contraste, en niveles de capital bajo, los costos de inversión son bajos, por lo que a la firma no le afecta de forma considerable generar nuevos costos, ya que es compensado por los potenciales beneficios de invertir, producir y vender más en periodos futuros.

$$\uparrow V^a(K_t) = \left(AK_t^\alpha - p_I \bar{I}_t - \uparrow FK_t - \uparrow \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\bar{I}_t}{K_t} \right)^2 K_t + \uparrow \uparrow \beta V(\uparrow \uparrow K_{t+1}) \right)$$

La firma se puede permitir experimentar costos crecientes, ya que estar lejos del capital óptimo es mucho más costoso. Cuando los costos comienzan a afectar, la firma es cuidadosa a la hora de invertir, generando así el tramo decreciente hasta el punto en el cual ya no le es rentable invertir y ha alcanzado un nivel de capital óptimo.

Pregunta 2.1.

El problema a resolver para esta pregunta está dado por:

$$\begin{aligned}
\max_{\{I_t\}} \quad & V(K_t) = \max\{\mathbb{E}_0[V^a(K_t)], \mathbb{E}_0[V^i(K_t)]\} \\
\text{s.t.} \quad & V^a(K_t) = \max_{\{I_t\}} \mathbb{E}_0\left[AK_t^\alpha - p_I I_t - FK_t - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2 K_t + \beta V(K_{t+1})\right] \\
& V^i(K_t) = \mathbb{E}_0\left[AK_t^\alpha + \beta V(K_t(1 - \delta))\right] \\
& K_{t+1} = \mathbb{E}_0[1 - \delta]K_t + I_t
\end{aligned}$$

Resolución de $V^a(K_t)$.

Despejando la variable de control en la última restricción, reemplazando esta en $V^a(K_t)$ y desarrollando el término de la esperanza, obtenemos que la ecuación de Bellman está dada por la siguiente forma funcional:

$$\begin{aligned}
V^a(K_t) = & p^{\delta^H} \cdot \left(AK_t^\alpha - p_I \cdot (K_{t+1} - K_t(1 - \delta^H)) - FK_t - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{K_{t+1} - (1 - \delta^H)K_t}{K_t} \right)^2 K_t \right) \\
& + p^{\delta^L} \cdot \left(AK_t^\alpha - p_I \cdot (K_{t+1} - K_t(1 - \delta^L)) - FK_t - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{K_{t+1} - (1 - \delta^L)K_t}{K_t} \right)^2 K_t \right) \\
& + \beta \mathbb{E}_0[V(K_{t+1})]
\end{aligned}$$

donde $\delta^H = 0,25$, $\delta^L = 0,08$, $p^{\delta^H} = 0,3$ y $p^{\delta^L} = 0,7$.

Luego de establecer esta forma funcional para $V^a(K_t)$, la resolución recursiva es similar al tema anterior. Comenzamos con un *guess inicial* para $V(K_{t+1})$ y encontramos el par (K_t, K_{t+1}) que maximiza la ecuación de Bellman establecida $\forall K_t \in \text{linspace}(\text{kmin}, \text{kmax}, \text{Nk})$. Esto genera un nuevo valor de la *Value Function* $\forall K_t \in \text{linspace}(\text{kmin}, \text{kmax}, \text{Nk})$. Reemplazamos estos valores maximizados en la *value function continuation* de la ecuación de Bellman asociada a un K_t dado, y volvemos a encontrar el (K_t, K_{t+1}) óptimo, re-iterando hasta converger. Notar que al realizar un reemplazo en la ecuación de Bellman con una solución que maximiza un valor esperado, entonces, desde la segunda iteración, nuestro algoritmo incorpora y resuelve una *value function continuation* en valor esperado.

En definitiva, en cada iteración resolvemos el valor esperado de la ecuación de Bellman con depreciaciones estocásticas, incorporando las decisiones que lo maximizarían. El resultado deductible es la elección de un K_{t+1} que para un K_t dado, maximiza la utilidad *forward looking*¹ en promedio, pase lo que pase. Luego, podemos deducir I_t^* .

¹Es decir, un agente que toma en consideración las posibles alternativas futuras.

El código asociado a la funcionalidad de resolución de $V^a(K_t)$ es el de la función `value_inversion()`:

```

1 function [Cti,kti,Vf,kp, iter] = value_inversion_estocastica(beta, alpha, delta1,
    delta2, A, max_iter, k, tol,pI,F,gamma, pdelta1,pdelta2)
2 e = 1; % Error inicial
3 iter = 0;
4 Vf = ones(length(k),1); %Guess inicial
5
6 while e > tol && iter < max_iter
7     %Preallocation
8     Vp = NaN(length(k),1);
9     kp = NaN(length(k),1);
10    Caux1 = A*k'.^alpha - pI*(k - (1-delta1)*k') - F*k' - (gamma/2).*((k - (1-
        delta1)*k')./k').^2.*k';
11    Caux2 = A*k'.^alpha - pI*(k - (1-delta2)*k') - F*k' - (gamma/2).*((k - (1-
        delta2)*k')./k').^2.*k';
12    Caux = pdelta1*Caux1 +pdelta2*Caux2;
13    % k es un vector fila, al restar, los valor de k se restan en filas a
14    % varias columnas pegas de k'.
15    Caux(Caux<=0) = NaN;
16    Vaux= Caux + beta*Vf'; % ecuación de bellman
17    [Vp(:,1),kp(:,1)] = max(Vaux,[],2);
18    e = max(abs(Vf-Vp));
19    iter = iter + 1 ;
20    Vf = Vp;
21 end
22
23 Cti = A.* k.^alpha + (1- delta1).*(k - k(kp')); %Consumption policy
24 kti = k(kp'); %Assets policy
25 Vf = Vf';
26 kp = kp';
27 end

```

Resolución de $V^i(K_t)$.

La solución de la *Value Function* para el caso sin inversión ha sido resuelta de forma numérica.

En primer lugar, hemos generado el valor esperado del capital depreciado en el próximo periodo para todo valor de capital presente:

$$\begin{aligned}
 K_{t+1} &= \mathbb{E}_0[1 - \delta]K_t + \underbrace{I_t}_{=0} \\
 &= p^{\delta^H} \cdot \left((1 - \delta^H)K_t\right) + p^{\delta^L} \cdot \left((1 - \delta^L)K_t\right)
 \end{aligned}$$

Luego, hemos asignado un valor de *value function continuation* en función del guess inicial $\forall \mathbb{E}_0[K_{t+1}]$. Teniendo nuestro valor del segundo término de la ecuación de Bellman, calculamos el valor final de la ecuación con ambos términos $\forall K_t$:

$$V^i(K_t) = \mathbb{E}_0 \left[AK_t^\alpha + \beta \tilde{V}(\mathbb{E}_0[K_t(1 - \delta)]) \right]$$

Obteniendo el valor de la ecuación con ambos términos, volvemos a reemplazar $\tilde{V}(\cdot)$ hasta converger.

El código asociado a la funcionalidad de resolución de $V^i(K_t)$ es el de la función `value_sin_inversion_estocastica()`:

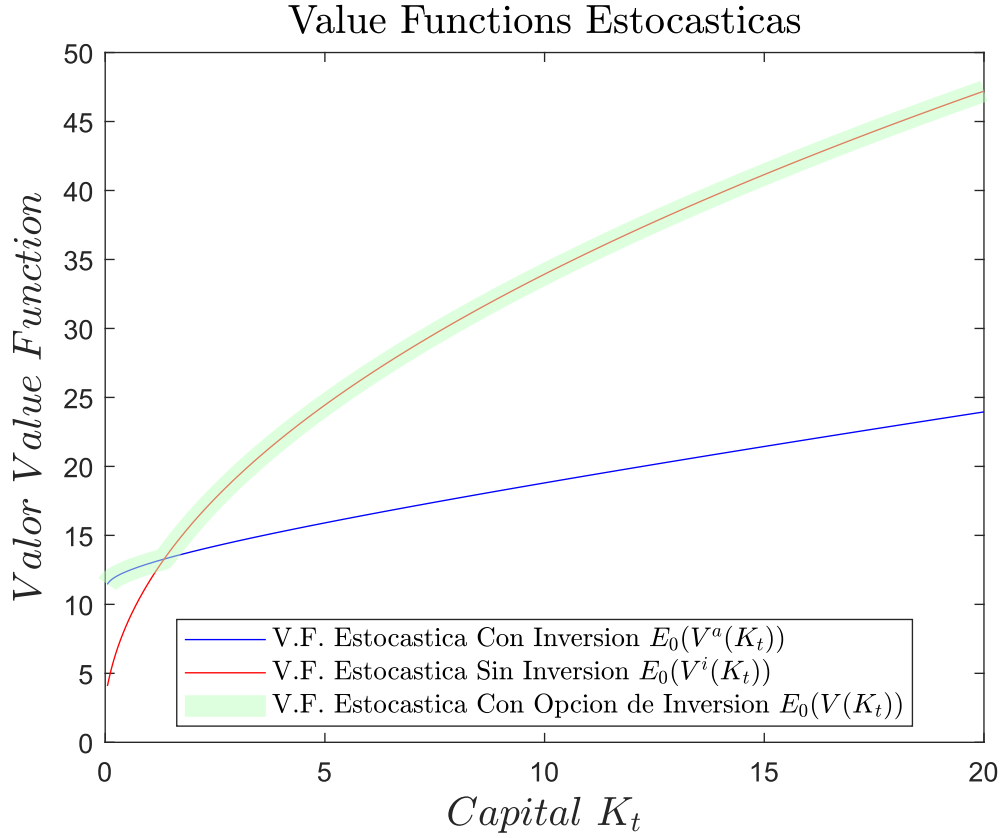
```

1 function [Vf, policy_choice, iter] = value_function_sin_inversion_estocastica(beta,
2     alpha, delta1,delta2,pdelta1,pdelta2, A, max_iter, k_grid, tol)
3
4     % Inicializacion
5     e = 1; % Error Inicial
6     iter = 0; % Iteraciones
7     Vf = zeros(length(k_grid), 1); % Guess Inicial
8     policy_choice = zeros(length(k_grid), 1); % Eleccion Optima
9
10    % Make sure k_grid is a column vector
11    k_grid = k_grid(:);
12
13    % Precompute repeated values
14    k_grid_depreciated = (k_grid * (1 - delta1))*pdelta1 + (k_grid * (1 - delta2))*
15        pdelta2;
16
17    while e > tol && iter < max_iter
18        % Computar funcion de valor de interpolar
19        Vi = A * k_grid.^alpha + beta * interp1(k_grid, Vf, k_grid_depreciated, '
20            linear', 'extrap');
21        % Elegir el maximo
22        [Vp, policy_indices] = max(Vi, [], 2);
23
24        % Computamos error y agregamos iteracion
25        e = max(abs(Vf - Vp));
26        iter = iter + 1;
27        Vf = Vp; % Actualizar value function
28        policy_choice = policy_indices; % Actualizar policy
29    end
30 end

```

Gráfico de Value Functions Estocásticas.

El resultado del procedimiento anterior se traduce en el siguiente gráfico:



Notar que las Value Functions resultantes en la Pregunta 1 se encontraban en un orden de magnitud entre valores que van del 0 al 60. En esta pregunta, encontramos un orden de magnitud que va desde el 0 al 45. Intuitivamente, en el caso determinístico el agente poseía total certidumbre del capital acumulado futuro en función del presente. En este caso, el agente debe tomar decisiones que consideren dos escenarios, en el cual, ninguna de las decisiones pasadas va haber sido óptima una vez realizado el capital futuro (no óptima para ese nivel de K_{t+1} en escenario determinístico), pero que sí lo era ex-ante en promedio. Por lo tanto, es razonable que las *Value Functions* sean menores.

Se profundiza más en este punto en el siguiente ítem.

Pregunta 2.2.

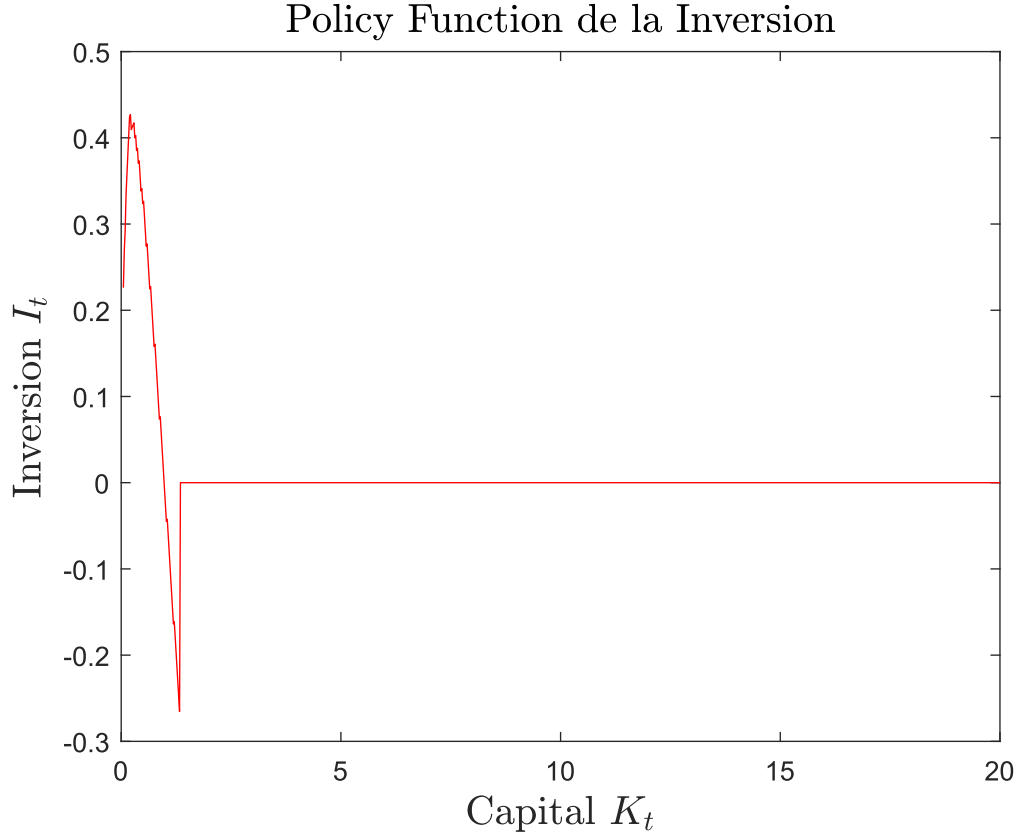
Gráfico de Policy Function.

De acuerdo a la decisión o no invertir, nuevamente hacemos uso de la restricción de K_{t+1} para encontrar la variable de decisión en función de la variable de estado:

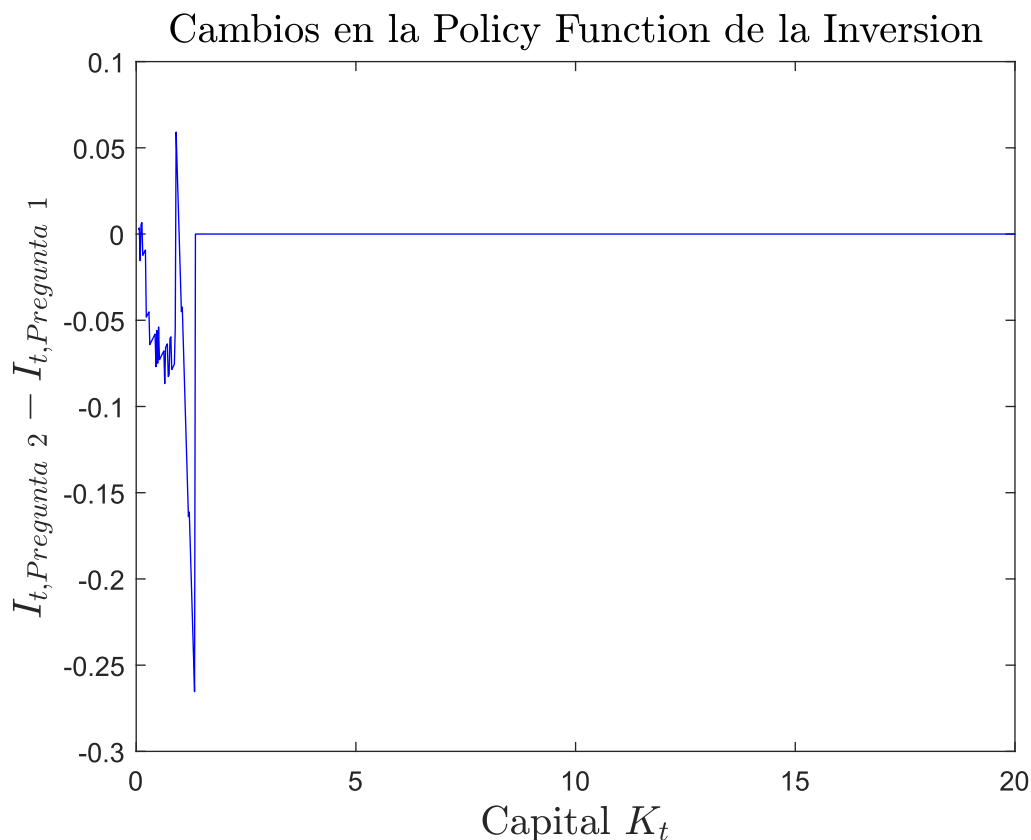
$$I_t^*(K_t) = \begin{cases} K_{t+1}^* - (1 - \delta)\overline{K}_t & , \text{ si } \mathbb{E}_0[V^a(K_t)] > \mathbb{E}_0[V^i(K_t)] \\ 0 & , \text{ si } \mathbb{E}_0[V^i(K_t)] \geq \mathbb{E}_0[V^a(K_t)] \end{cases}$$

donde K_{t+1}^* es el capital futuro óptimo que maximiza la utilidad para un \overline{K}_t calculado numéricamente con el procedimiento descrito, y \overline{K}_t el capital inicial asociado.

El resultado es el siguiente:



Nuevamente, para mayor interpretabilidad podemos comparar los resultados con la Pregunta 1. Para esto hemos graficado la diferencia entre inversiones para un capital determinado entre el caso determinístico y caso estocástico.



Como es posible notar, en el primer tramo, la inversión del caso estocástico es también positiva, pero es mayor en el caso determinístico. Recordar que en la pregunta 1 el valor de la depreciación era de 8 %. En esta pregunta se incorpora una depreciación mayor con cierta probabilidad: $\delta^H = 25\% \sim p = 30\%$. Como se mencionó en la pregunta 1, para niveles bajos de capital es conveniente realizar un aumento de la inversión, ya que *i*) los costos de invertir son bajos en este tramo, y *ii*) los beneficios de obtener mayores rentas con una producción mayor en periodos futuros, compensa los costos. En este nuevo escenario, la compensación futura es menor. También es posible notar que en el tramo donde la *Policy Function* de la Pregunta 1 alcanza su máximo, la inversión es mayor en comparación al caso determinístico.

Como mencionamos en la pregunta anterior, existe un nivel de capital vigente en el que es conveniente acelerar la inversión, ya que las rentas son lo suficiente grandes como para que los costos no consuman los beneficios y la firma se puede permitir intentar llegar más rápido a su capital óptimo. Además, la firma **desea** un nivel de capital mayor para producir y vender más en los próximos periodos. Incorporando una depreciación esperada que es mayor a la del caso determinístico, si bien las rentas del periodo vigente permiten cubrir cierta fracción del aumento de costos al momento de invertir con capital K_t cercano a 2, las rentas futuras de aumentar el capital ya no son tan atractivas, ya que es posible que de todas formas tengamos capital futuro menor en caso de realizarse la depreciación menor. Por lo tanto, la firma reduce la velocidad a la que se acerca a su nivel de capital óptimo con el objetivo de preservar las rentas presentes y no consumirlas, con la incertidumbre que conlleva que las rentas futuras no sean lo suficientemente grande.

En este sentido, podemos notar que el nivel de capital óptimo es más bajo que el caso anterior, ya que la inversión no garantiza mayores rentas futuras.

Luego, existe un tercer tramo donde la firma desinvierte.

Policy Functions con depreciación esperada más alta.

El valor esperado de la depreciación δ en la Pregunta 2.1 es de $\mathbb{E}[\delta] = 13,1\%$, mientras que en el caso donde donde $p^{\delta^H} = 0,99$ $p^{\delta^L} = 0,01$ es de $\mathbb{E}[\delta'] = 24,83\%$ y, por último, $p^{\delta^H} = 0,01$ $p^{\delta^L} = 0,99$ generan una esperanza de $\mathbb{E}[\delta''] = 8,17\%$

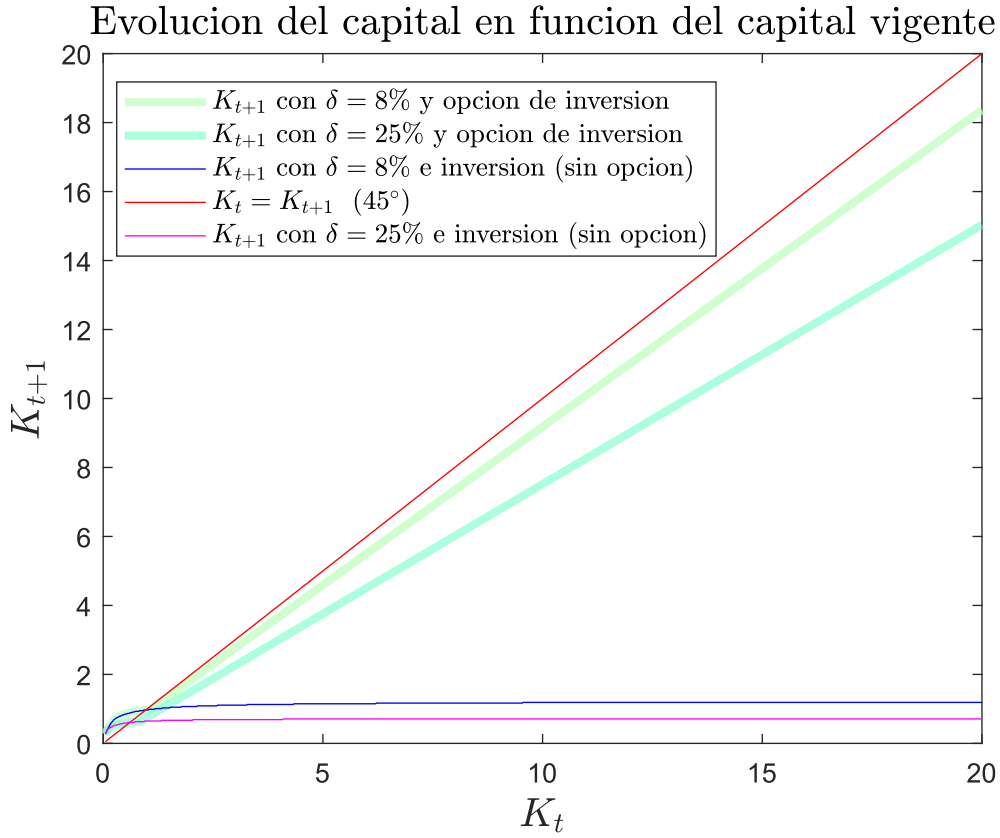
Bajo $\mathbb{E}[\delta'']$, si bien existe un escenario en el que se puede perder mucho capital, es bastante probable que el capital se deprecie poco. En este escenario, en esperanza, nos acercamos al caso de la Pregunta 1, donde la inversión es mayor y no se desinvierte. La razón reside en lo comentado en los incisos anteriores, existen beneficios futuros que compensan los costos.

Sin embargo, bajo $\mathbb{E}[\delta']$ la probabilidad de perder todo el capital es alta. Las inversiones realizadas probablemente se deprecien en gran parte y los costos del aumento de la inversión consuman todas las rentas en valor presente. En general, en este escenario la firma invertirá menos, pero **por el efecto que genera la función de costos de inversión convexos.**

En síntesis, en el tramo 1 las rentas de la empresa son bajas, los costos de invertir son bajos, pero el capital se puede depreciar rápidamente en el futuro de todas formas. En el tramo 2 de la curva azul, los costos de invertir son mucho más altos y el capital de todas formas se puede depreciar rápido. Puede que la inversión no sirva de mucho en el siguiente periodo. En el punto medio, la firma percibe los beneficios más altos a la inversión, por lo que es mayor al caso determinístico en este punto.

Pregunta 2.3.

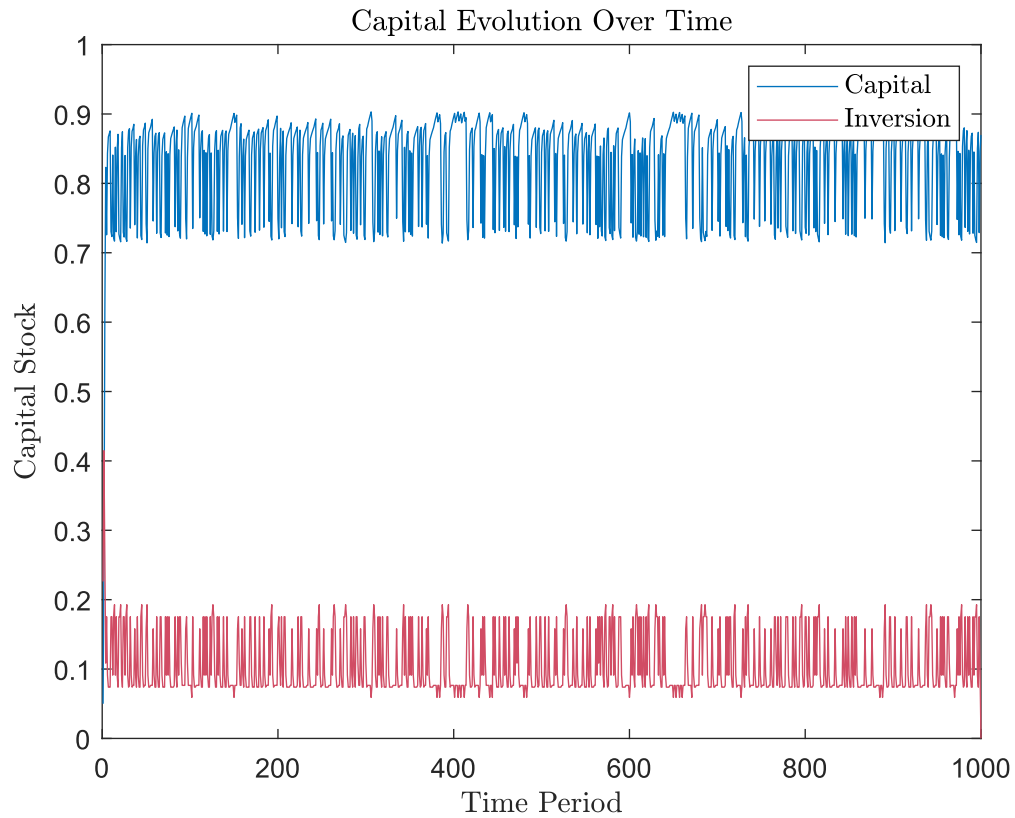
En esta pregunta se hizo uso de las funciones definidas en las preguntas anteriores y se repitió el procedimiento para encontrar las *Value Functions* con **opciones** de inversión con $\delta = 8\% \sim p = 100\%$ y $\delta = 25\% \sim p = 100\%$. El resultado se resume en la siguiente ilustración:



Notar que, como existe un nivel de capital óptimo, cuando el capital es alto y forzamos a que la firma realice algún tipo de decisión, la firma realiza desinversión. Esta desinversión tiene costos asociados mediante el término de costos convexos. En definitiva, debido a los costos de desinvertir la utilidad será menor, pero además el nivel de capital del siguiente periodo K_{t+1} será menor al nivel de capital cuando la firma no realiza inversión/desinversión. Es por esto que las curvas de capital futuro sin la *opción real* son menores a las que posee cuando tiene la opción de no ejercer desinversión, no asumir costos innecesarios, y luego producir más.

Pregunta 2.4.

En primer lugar, con el nivel de capital inicial se determina el nivel de inversión óptima para el primer periodo haciendo uso de la *Policy Function* calculada bajo el escenario estocástico. Después de generar una simulación de trayectoria para δ , se determinó el nivel de capital vigente en cada periodo según la realización, y de acuerdo a esto, la inversión óptima con la *Policy Function*. Al terminar este procedimiento, se graficó la evolución de ambas series donde se puede apreciar el comportamiento cíclico en cada una de estas.



Ya habiendo establecido que todo hace sugerir que existe un nivel de capital óptimo, intuitivamente, al partir con poco capital y poseer costos de inversión bajos, el individuo invierte considerablemente y converge rápidamente a este valor de capital óptimo. Luego, el capital oscila aleatoriamente de acuerdo a las realizaciones de la depreciación.

Para poder facilitar el entendimiento de la intuición, se extrajo muestras aleatorias de las trayectorias, las que se despliegan a continuación.

Muestra de primeras observaciones.

t	K_t	δ	I_t
1	0.05	25 %	0.22622
2	0.26372	25 %	0.41476
3	0.61255	8 %	0.25953
4	0.82307	25 %	0.10858
5	0.72588	8 %	0.17538
6	0.84319	8 %	0.091223
7	0.86695	8 %	0.073869
8	0.87147	8 %	0.073869
9	0.87562	25 %	0.073869
10	0.73058	25 %	0.17538
11	0.72331	8 %	0.17538
12	0.84082	25 %	0.091223
13	0.72184	25 %	0.17538
14	0.71676	8 %	0.19273
15	0.85215	25 %	0.091223
16	0.73033	8 %	0.17538
17	0.84728	8 %	0.091223
18	0.87072	25 %	0.073869
19	0.72691	25 %	0.17538
20	0.72056	25 %	0.17538

Notar la gran inversión y rápida convergencia hacia el “estado estacionario” en los primeros periodos. Luego, la magnitud de la depreciación estocástica nos asegura no observar grandes desviaciones.

A continuación, se despliega una segunda muestra que nos permite visualizar de mejor forma el proceso conjunto del capital y la inversión a lo largo del tiempo.

Muestra de observaciones desde $T = 100$.

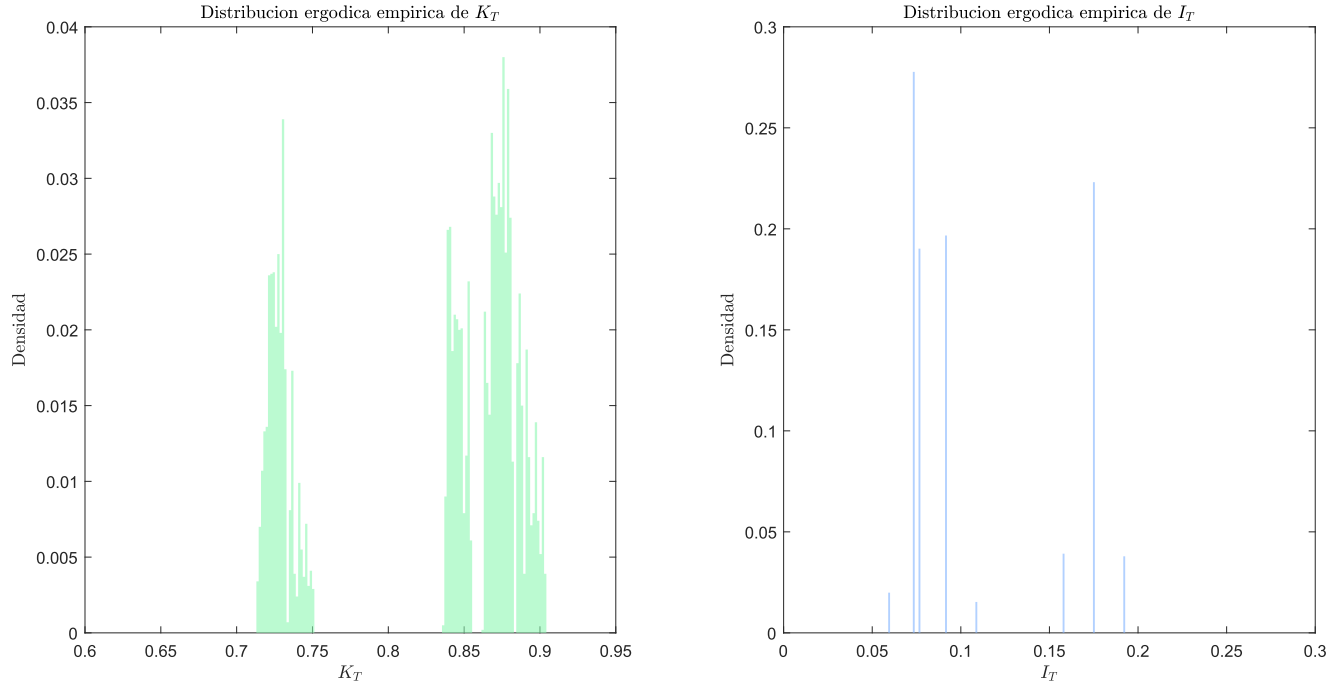
t	K_t	δ	I_t
100	0.89106	8 %	0.076485
101	0.89626	8 %	0.076485
102	0.90105	25 %	0.059131
103	0.73491	8 %	0.17538
104	0.8515	8 %	0.091223
105	0.8746	8 %	0.073869
106	0.8785	8 %	0.073869
107	0.88209	8 %	0.076485
108	0.88801	8 %	0.076485
109	0.89345	8 %	0.076485
110	0.89846	25 %	0.076485
111	0.75033	8 %	0.15802
112	0.84833	8 %	0.091223
113	0.87168	8 %	0.073869
114	0.87582	25 %	0.073869
115	0.73073	8 %	0.17538
116	0.84765	25 %	0.091223
117	0.72696	8 %	0.17538
118	0.84418	25 %	0.091223
119	0.72436	8 %	0.17538
120	0.84178	8 %	0.091223

Debido a que la depreciación baja $\delta = 8\%$ tiene asociada una probabilidad $p^{\delta^L} = 70\%$ mayor a la de depreciación baja, se puede observar que es altamente frecuente observar periodos consecutivos de depreciación baja, lo que explica que el capital se mantenga varias veces por sobre 0.75 por periodos extendidos. En el momento en que ocurre una realización de baja depreciación, enseguida la firma tiende a reinvertir para intentar revertir hacia su capital óptimo. Esto genera la reversión a la media altamente sensible a desviaciones a la baja.

Adicionalmente, cuando se realizan depreciaciones altas consecutivamente, la firma tiende a seguir reinvertiendo hasta que se realice una depreciación alta. Este comportamiento persistente y condicional al estado permite no seguir cayendo bajo un umbral de capital de 0.7. O bien la firma logra revertir hacia su capital óptimo, o bien logra evitar desviarse aún más hacia la baja. Sin embargo, es más probable que se realice una depreciación baja luego de una alta. Por último, también podemos notar que la reacción a la depreciación posee rezago.

Pregunta 3.1.

Luego de ejecutar *nested loops*, una para la simulación de la trayectoria del capital a lo largo del tiempo, y otro para los individuos, se graficó conjuntamente la densidad del capital y la inversión de cada individuo en el último periodo.



Se aprecia un comportamiento consistente con *normal mixture*, es decir, por lo menos dos *clusters*.

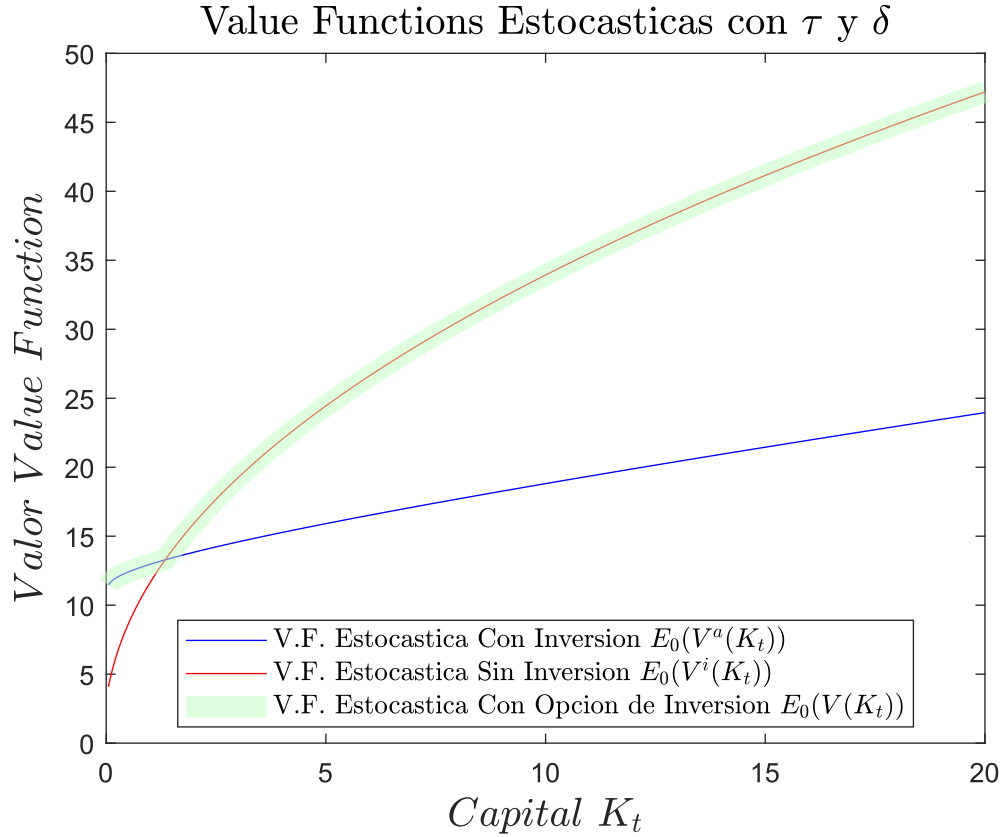
Las firmas tienden a converger rápidamente hacia su capital óptimo y oscilar cerca de este. Al observar el orden de magnitud del capital de los grupos podemos establecer que el grupo de izquierda es aquella proporción de firmas que han experimentado uno o más periodos de depreciación alta. Ahora bien, también podemos subdividir la proporción de firmas de la derecha.

Consistente con lo observado en la segunda muestra para la simulación de un individuo, existe una proporción de firmas del grupo de la derecha que experimentaron una depreciación alta, por lo menos, hace un periodo atrás; y el grupo de la derecha del *cluster* derecho correspondería firmas que llevan uno o más periodos experimentando depreciación alta. Es decir, aquel grupo no se encuentra en proceso de reversión.

Consistentemente con la probabilidad de experimentar una depreciación baja, la mayoría de firmas invierten poco, ya que la mayoría de firmas se encuentran cerca del capital óptimo.

Pregunta 3.2.

Haciendo uso de las funciones usadas en la Pregunta 2, hemos encontrado las *Value Functions* de las firmas con los nuevos delta efectivos.

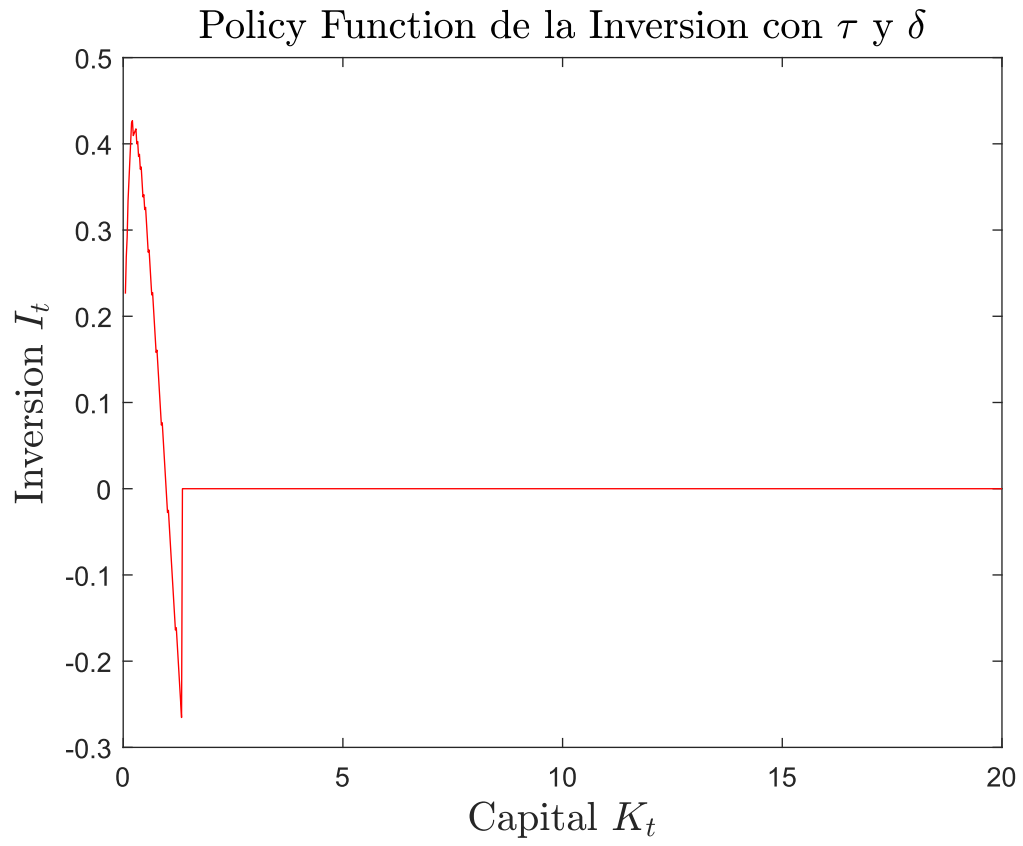


Las Value Functions resultantes son bastantes similares en forma y magnitud a las de la Pregunta 2. Notar que las depreciaciones efectivas son las siguientes:

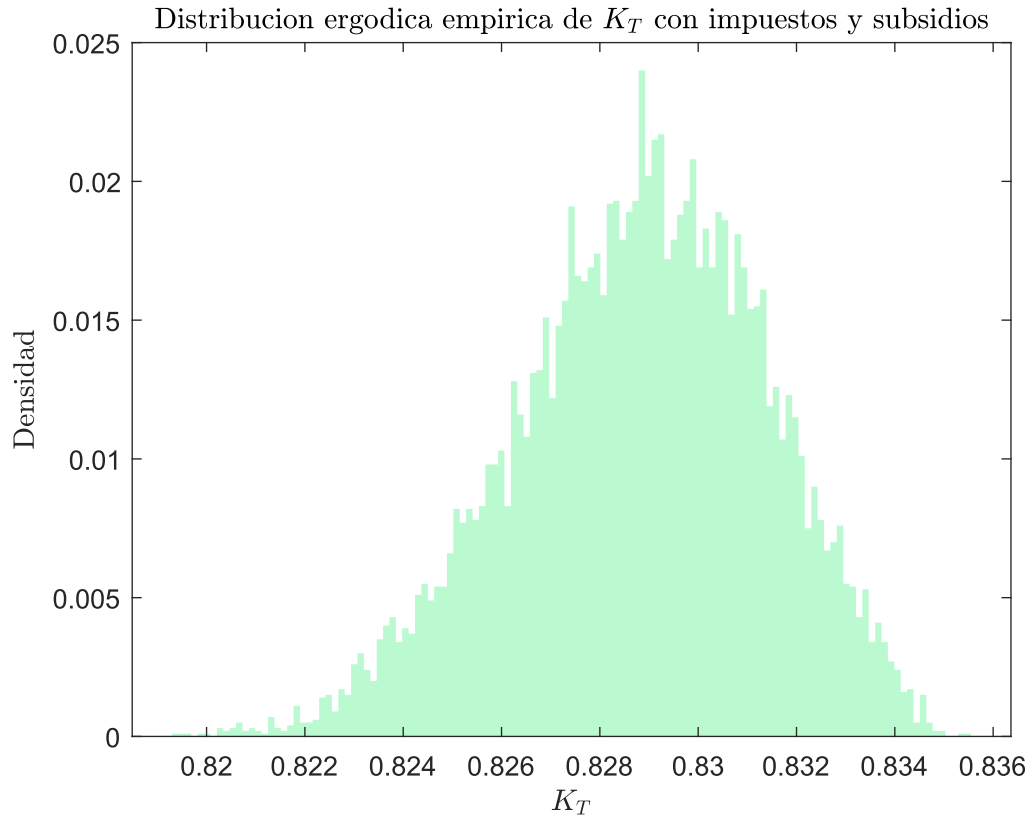
$$\delta^L + \tau = 13\%$$

$$\delta^H + \frac{7}{3}\tau = 13,33\%$$

Como el valor esperado es similar al de la Pregunta 2, entonces el valor de las *Value Functions* y *Policy Function* es similar. Las interpretaciones se heredan; menor inversión por menores beneficios comparados con el caso determinístico y tramos en el que desinvierte.



Finalmente, hemos graficado la distribución ergódica del capital a lo largo de las firmas. Podemos ver que los *clusters* desaparecen, y que la distribución resultante posee mayor *skewness*. Lo anterior se aprecia en el orden de magnitud del *eje X* de nuestro histograma.



Intuitivamente, los impuestos y los subsidios generan una concentración de depreciaciones realizadas mucho más cercana al caso determinístico. Las depreciaciones bajas son compensadas con subsidios, y las depreciaciones altas con impuestos. En promedio, el capital nunca se desvía considerablemente del valor estacionario para cada una de las firmas, por lo que obtenemos la distribución concentrada en el promedio.