Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Economía y Administración
Instituto de Economía
Profesor: Alexandre Janiak

Teoría Macroeconómica I - EAE320B

Leonardo Montoya (lalms@uc.cl) - Ignacio Rojas (irojasking@gmail.com)

Ayudantia 10 - Inversión

Pregunta 1

Considere una empresa que maximiza la suma descontada de su utilidad en un horizonte infinito de tiempo. La función de producción $f(k_t)$ de la empresa depende de su stock de capital k_t. La empresa tiene la posibilidad de invertir (o desinvertir) para aumentar (o disminuir) su stock de capital, pero para esto debe incurrir en un costo de ajuste. El capital sigue la dinámica:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

Donde i_t es la inversión realizada en el periodo t y δ es la depreciación. El precio de una unidad de inversión es $p = 1$.

Los costos de ajuste de la inversión vienen dados por la función $\phi(i_t, k_t)$ que depende del nivel de inversión. Esta función cumple las siguientes condiciones: $\phi_i(.) > 0$, $\phi_k(.) < 0$, $\phi(0, k) = 0$.

La firma resuelve:

$$V_0(k_t) = \max_{i_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} [f(k_t) - pi_t - \phi(i_t, k_t)]$$

sujeto a:

$$k_{t+1} = k_t(1-\delta) + i_t$$

a) Escriba la ecuación de Bellman asociada a este problema, identifique variables de estado y de control.

b) Encuentre las condiciones de primer orden e interprételas.

c) Explique las distintas interpretaciones para la Q de Tobin. Analice los casos cuando $Q > 1$ y $Q < 1$.

d) Muestre que si los costos de ajustes son de la forma $\phi(i_t, k_t) = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{i_t}{k_t}\right)^2 k_t$ y la función de producción presenta rendimientos constantes a escala, entonces la Q marginal es igual a la Q media.

Pregunta 2

Una empresa usa dos tipos de capital: un capital asociado a una tecnología vieja en cantidades K_o y un capital asociado a una tecnología nueva en cantidades K_n. Produce y vende cantidades reales $F\left(K_o, K_n\right)$ en cada periodo y enfrenta una función de costo $C\left(I_o, I_n, K_o, K_n\right)$ que depende de las inversiones en tecnologías viejas y nuevas I_o e I_n y de los stocks de capital ya instalados, lo que sugiere posibles costos de ajustes en la inversión. Esta empresa descuenta futuro por un factor $\beta \equiv \frac{1}{1+\rho}$, donde $\rho > 0$ es la tasa de descuento.

La ecuación de Bellman asociada al programa de la empresa es la siguiente:

$$\Pi\left(K_o, K_n\right) = \max_{I_o, I_n, K_o', K_n'} F\left(K_o, K_n\right) - C\left(I_o, I_n, K_o, K_n\right) + \beta\Pi\left(K_o', K_n'\right) \tag{1}$$

tal que:

$$K_j' = \left(1 - \delta_j\right) K_j + I_j, \quad \forall j = \{o, n\} \tag{2}$$

con $\delta \in (0, 1)$. Usaremos la notación μ_o y μ_n para referirnos a los multiplicadores de Lagrange de las dos restricciones que se incluyen en el programa de la empresa.

(a) Muestre que se cumplen las siguientes condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial C\left(I_o, I_n, K_o, K_n\right)}{\partial I_j} = \mu_j \tag{3}$$

$$\beta\frac{\partial \Pi\left(K_o', K_n'\right)}{\partial K_j'} = \mu_j \tag{4}$$

además de la siguiente ecuación usando el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial \Pi\left(K_o, K_n\right)}{\partial K_j} = \frac{\partial F\left(K_o, K_n\right)}{\partial K_j} - \frac{\partial C\left(I_o, I_n, K_o, K_n\right)}{\partial K_j} + \left(1 - \delta_j\right)\mu_j \tag{5}$$

(b) Usando las condiciones obtenidas anteriormente, muestre que se cumple:

$$\rho\mu_j + \delta_j\mu_j' - \Delta\mu_j' = \frac{\partial F\left(K_o', K_n'\right)}{\partial K_j'} - \frac{\partial C\left(I_o', I_n', K_o', K_n'\right)}{\partial K_j'} \tag{6}$$

Interprete económicamente esta ecuación usando el razonamiento que usamos en clase para el caso $\delta_j = 0$. ¿Cómo cambia su interpretación para $\delta_j > 0$?

(c) Usando subíndices de tiempo t, muestre que para $j \in \{o, n\}$

$$\frac{\partial C\left(I_{o_t}, I_{n_t}, K_{o_t}, K_{n_t}\right)}{\partial I_{j_t}} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(1 - \delta_j\right)^{i-1}\beta^i\left[\frac{\partial F\left(K_{o_{t+i}}, K_{n_{t+i}}\right)}{\partial K_{j_{t+i}}} - \frac{\partial C\left(I_{o_{t+i}}, I_{n_{t+i}}, K_{o_{t+i}}, K_{n_{t+i}}\right)}{\partial K_{j_{t+i}}}\right] + \lim_{T\to\infty}\left(1 - \delta_j\right)^T\beta^T\mu_{jT} \tag{7}$$

Seguimiento 10

Este seguimiento se dividirá en dos partes.

Parte 1 - continuación de la pregunta 2 de la ayudantía

Resuelva los siguientes dos incisos:

1. Considere las siguientes condiciones de transversalidad:

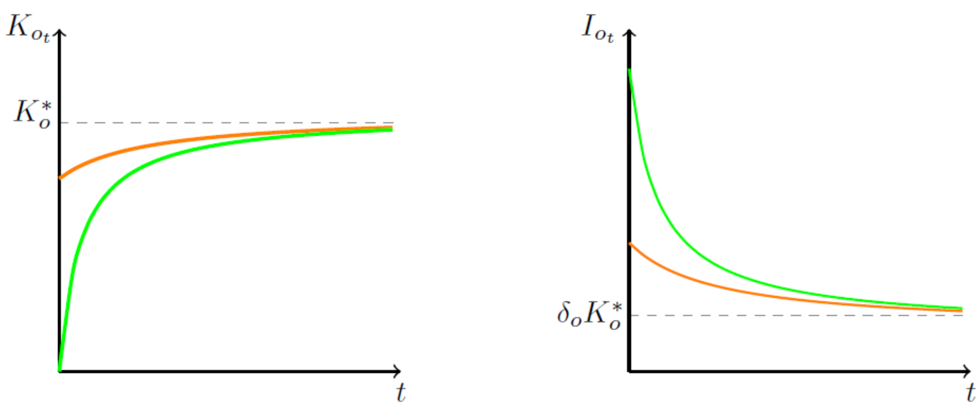
$$\lim_{t\to\infty} (1-\delta_j)^T \beta^t \mu_{jt} K_{jt} = 0, \quad \forall j = \{o, n\} \tag{8}$$

¿Por qué se usan condiciones de transversalidad? Muestre que implican para $j \in \{o, n\}$

$$\frac{\partial C\left(I_{o_t}, I_{n_t}, K_{o_t}, K_{n_t}\right)}{\partial I_{j_t}} = \sum_{i=1}^{\infty} (1-\delta_j)^{i-1} \beta^i \left[\frac{\partial F\left(K_{o_{t+i}}, K_{n_{t+i}}\right)}{\partial K_{j_{t+i}}} - \frac{\partial C\left(I_{o_{t+i}}, I_{n_{t+i}}, K_{o_{t+i}}, K_{n_{t+i}}\right)}{\partial K_{j_{t+i}}}\right] \tag{9}$$

2. Supongamos que $C\left(I_{o_t}, I_{n_t}, K_{o_t}, K_{n_t}\right) = \sum_{j=\{o,n\}} p_j I_j + K_o I_n$ y $F\left(K_o, K_n\right) = K_o^{\alpha} + K_n^{1-\alpha}$, con $\alpha \in (0, 1)$.

Asumiendo estabilidad del estado estacionario, dibuje gráficamente las dinámicas del capital e inversión asociadas a la tecnología nueva, considerando como condiciones iniciales K_n igual a cero en el primer periodo y K_o igual a $\underline{K} = 0$ o $\bar{K} > 0$. Consideren las condiciones de primer orden que obtuvo junto con las ecuaciones que describen dinámicas del capital y además las trayectorias para K_{o_t} e I_{o_t} presentadas a continuación:



Dibuje gráficamente las trayectorias de K_{n_t} e I_{n_t}. Explique económicamente las diferencias entre las curvas de los gráficos.

Parte 2

Comente si las siguientes afirmaciones en negrita son verdaderas o falsas. Justifique intuitivamente su respuesta detallando el mecanismo económico cuando sea relevante. Respuestas que carecen de justificación adecuada no recibirán puntaje.

1. El modelo del artículo de Gourinchas y Parker puede generar una evolución del consumo a lo largo del ciclo de vida en forma de U invertida. La parte decreciente se debe a que el factor de descuento es demasiado bajo en comparación con la tasa de interés.

2. Según el artículo de Cooper y Haltiwanger visto en clase, el modelo de inversión con costos de ajuste cuadráticos genera una autocorrelación de la tasa de inversión de las empresas demasiado alta en comparación con los datos.

3. Según el artículo de Cooper y Haltiwanger visto en clase, la autocorrelación de la tasa de inversión en un modelo neoclásico de inversión es ligeramente negativa.