MACROECONOMÍA II
Ayudantía 3.
Equilibrio Monetario en el Largo Plazo.

Ayudantes: Gianfranco Quequezana (gquequezana@uc.cl)
Oscar Herrera (olherrera@uc.cl)
Alex Nannig (anannig@uc.cl)

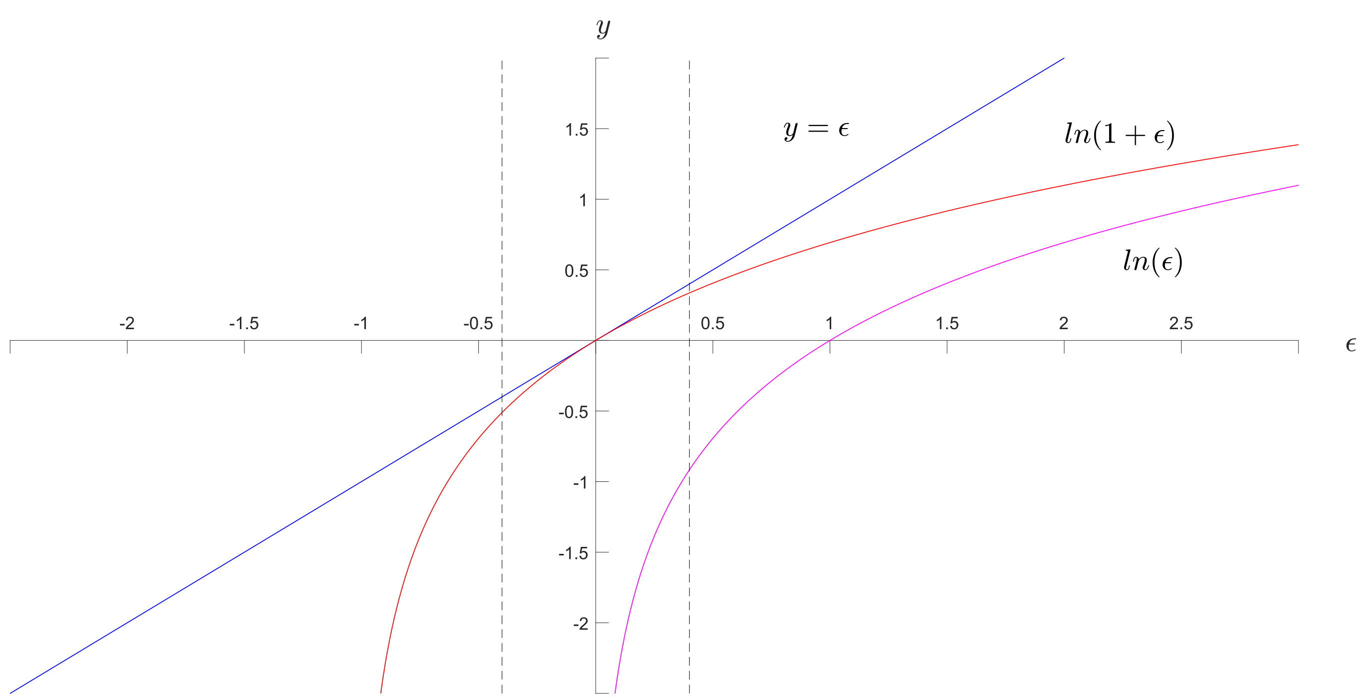
0. Repaso de aspectos a tener presente al trabajar con variables en logaritmos.

0.1. Aproximaciones para cambios porcentuales pequeños.

Sea ϵ un valor pequeño positivo o negativo. Entonces, el logaritmo natural de $1+\epsilon$ es aproximadamente ϵ.

$$ln(1+\epsilon) \approx \epsilon$$

Lo anterior se desprende fácilmente de un análisis gráfico.



Podemos observar que cuando ϵ toma valores muy pequeños, la función logarítmica toma valores casi idénticos a la recta de 45 grados denotada por $y = \epsilon$. Es decir, el logaritmo de $1+\epsilon$ toma valores muy cercanos a ϵ. Mientrás más grande sea ϵ en valor absoluto más imprecisa es la aproximación. En general, trabajaremos con valores pequeños, por lo tanto, usaremos esta aproximación.

0.2. Diferencia de logaritmos como el cambio porcentual.

Sea X una variable que sufre un cambio. Los valores iniciales y finales de esta variable se pueden denotar con la siguiente notación:

$$X_{final} \equiv X_f$$
$$X_{inicial} \equiv X_i$$

Ante un cambio en X, la diferencia entre el logaritmo del valor final y del valor inicial corresponde al cambio porcentual de la variable cuando el cambio porcentual es pequeño.

Demostración.

$$\begin{aligned} ln(X_f) - ln(X_i) &= ln\Big(\frac{X_f}{X_i}\Big) \\ &= ln\Big(\frac{X_f}{X_i} - 1 + 1\Big) \\ &= ln\Big(1 + \Big[\frac{X_f - X_i}{X_i}\Big]\Big) \\ &= ln\Big(1 + \underbrace{\frac{\Delta X}{X_i}}_{\epsilon}\Big) \\ &\approx \frac{\Delta X}{X_i} \end{aligned}$$

$$ln(X_f) - ln(X_i) \approx \frac{\Delta X}{X_i}$$

$$\Rightarrow ln(X_t) - ln(X_{t-1}) \approx \frac{\Delta X_t}{X_{t-1}}$$

0.3. Aplicaciones para la medida de inflación.

Se define la inflación como el cambio porcentual entre el nivel de precios absoluto (no en logaritmos):

$$\pi \equiv \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

La definición se puede reexpresar como:

$$1 + \pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Tomando logaritmos:

$$ln(1 + \pi_t) = ln(P_t) - ln(P_{t-1})$$

En general, definimos en minúsculas las variables en logaritmos:

$$p_t \equiv ln(P_t), \quad p_{t-1} \equiv ln(P_{t-1})$$

Por lo tanto, podemos reescribir la expresión logarítmica como:

$$ln(1 + \pi_t) = p_t - p_{t-1}$$

Notar que si estamos ante un caso donde la inflación es pequeña, es decir, analizamos una economía que no posee hiperinflación, entonces podemos expresar la ecuación anterior como:

$$\underbrace{ln(1 + \pi_t)}_{\approx \pi_t} = p_t - p_{t-1}$$

$$\pi_t = p_t - p_{t-1}$$

0.4. Distinción entre inflación y el cambio de la inflación.

La inflación es el cambio porcentual del nivel de precios, mientras que el cambio de la inflación corresponde a la evolución de este cambio porcentual a lo largo del tiempo. Conceptualmente, podemos pensar que el cambio en la inflación guarda una relación con el nivel de precios similar a la que tendría la "segunda derivada del nivel de precios", aunque no posee la misma relación exactamente, ya que la derivada se define como el cambio infinitesimal ante otro cambio infinitesimal. La inflación correspondería a un cambio porcentual (nos desviamos de la definición de derivada), y el cambio en la inflación correspondería a la variación absoluta de este cambio porcentual. Sin embargo, este esquema mental nos puede ayudar a diferenciar la relación que tiene de cada medida con el nivel de precios.

También es posible distinguir estas medidas algebraicamente. Por un lado, el cambio absoluto de la inflación depende del nivel de precios de t, $t-1$ y $t-2$, mientras que la inflación sólo depende de t y $t-1$.

$$\Delta\pi_t = \pi_t - \pi_{t-1}$$
$$\Delta\pi_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} - \frac{P_{t-1} - P_{t-2}}{P_{t-2}}$$
$$\Delta\pi_t \approx (p_t - p_{t-1}) - (p_{t-1} - p_{t-2})$$

$$\Delta\pi_t \approx (p_t - p_{t-1}) - (p_{t-1} - p_{t-2}) \neq \pi_t \approx p_t - p_{t-1}$$

Adicionalmente, al graficar la evolución de la inflación no podremos inferir cambios porcentuales de la inflación directamente, ya que no trabajaremos con la inflación en logaritmos. Sea $\frac{\Delta\pi_t}{\pi_{t-1}}$ el cambio porcentual de la inflación, entonces este cambio porcentual se puede aproximar de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta\pi_t}{\pi_{t-1}} \approx ln(\pi_t) - ln(\pi_{t-1})$$

<u>Demostración.</u>

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\pi_t}{\pi_{t-1}} &= \frac{[(p_t - p_{t-1}) - (p_{t-1} - p_{t-2})]}{p_{t-1} - p_{t-2}} \\
\frac{\Delta\pi_t}{\pi_{t-1}} &= \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1} - p_{t-2}} - 1 \\
\frac{\Delta\pi_t}{\pi_{t-1}} &= \frac{\pi_t}{\pi_{t-1}} - 1 \\
1 + \frac{\Delta\pi_t}{\pi_{t-1}} &= \frac{\pi_t}{\pi_{t-1}}
\end{aligned}$$

Tomando logaritmos:

$$\begin{aligned}
ln\Big(1 + \frac{\Delta\pi_t}{\pi_{t-1}}\Big) &= ln(\pi_t) - ln(\pi_{t-1}) \\
\frac{\Delta\pi_t}{\pi_{t-1}} &\approx ln(\pi_t) - ln(\pi_{t-1})
\end{aligned}$$

Al graficar la "inflación no en logaritmos" no podemos inferir cambios porcentuales a partir de esta ilustración. Solo podemos interpretar cambios absolutos. En la ecuación anterior, los términos de la derecha son análogos a $ln(\epsilon)$ (curva rosada de la sección 0.1). En definitiva, no podremos deducir de forma directa el cambio porcentual de la inflación observando la evolución absoluta de esta.

0.5. Pendiente de una función logarítmica en una serie de tiempo y su relación con el cambio porcentual.

Se define la pendiente como:

$$slope \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sea $y = ln(x)$, entonces Δy_1 es el cambio porcentual de x en un punto x_1.

$$\Delta y_1 = ln(x_1) - ln(x_0) = \frac{\Delta x}{x_0}$$

Si en el eje x tenemos el tiempo, entonces $x = t \Rightarrow \Delta x = \Delta t$. Adicionalmente, Δt es igual a 1 cuando analizamos un cambio entre t y $t-1$, ya que el cambio es de solo un periodo. Por lo tanto, tenemos que:

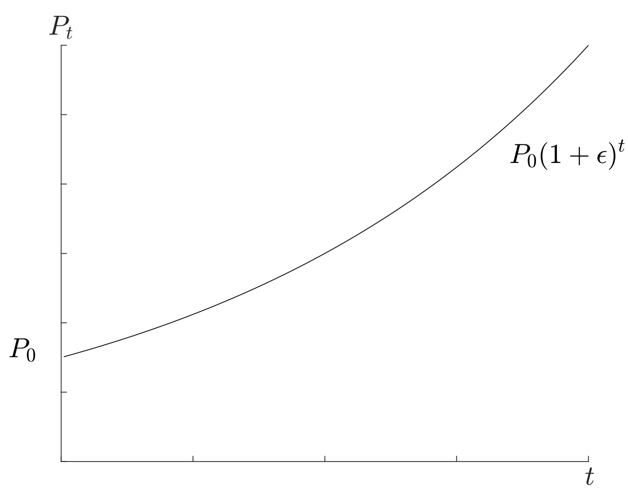
$$slope_{t,t-1} = \frac{\Delta y_t}{\Delta x_t} = \frac{ln(x_1) - ln(x_0)}{t - (t-1)} = \frac{\frac{\Delta x}{x_0}}{1} = \frac{\Delta x}{x_0}$$

$$slope_{t,t-1} = \frac{\Delta x}{x_0}$$

En síntesis, cuando una variable se encuentra en logaritmo, la diferencia entre dos puntos de esta función es el cambio porcentual de la variable original. Cuando el salto es de un periodo, la pendiente de la serie de tiempo en ese punto también corresponde al cambio porcentual de la variable original pero solo si el salto es de un solo periodo.

0.6. Ejemplo práctico.

Sea $P_t = P_0(1+\epsilon)^t$ una forma funcional para la evolución de precios. Esta forma funcional describe el nivel de precios en cada periodo.



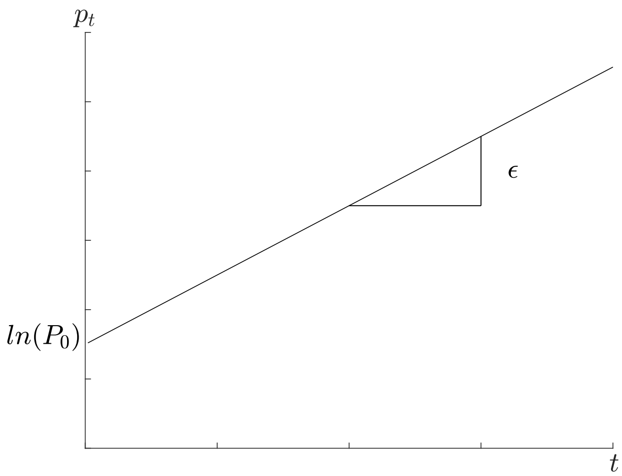
Podemos apreciar que los precios crecen a una tasa de ϵ en cada periodo.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} &= \frac{P_0(1+\epsilon)^t - P_0(1+\epsilon)^{t-1}}{P_0(1+\epsilon)^{t-1}} \\
1 + \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} &= \frac{P_0(1+\epsilon)^t}{P_0(1+\epsilon)^{t-1}} \\
1 + \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} &= (1+\epsilon)^{t-t+1} \\
1 + \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} &= (1+\epsilon) \\
\frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} &= \epsilon
\end{aligned}$$

La aproximación logarítmica también nos lleva al mismo resultado:

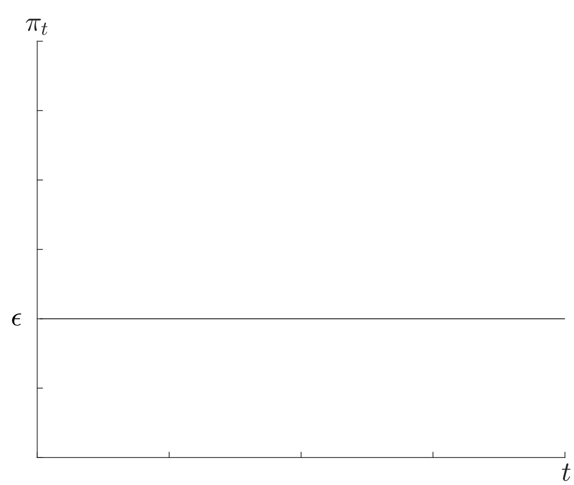
$$\begin{aligned}
1 + \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} &= \frac{P_0(1+\epsilon)^t}{P_0(1+\epsilon)^{t-1}} \\
ln\Big(1 + \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}\Big) &= ln(P_0(1+\epsilon)^t) - ln(P_0(1+\epsilon)^{t-1}) \\
\frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} &\approx ln(P_0) - ln(P_0) + ln(1+\epsilon)^t - ln(1+\epsilon)^{t-1} \\
\frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} &\approx t[\underbrace{ln(1+\epsilon)}_{\epsilon}] - (t-1)[\underbrace{ln(1+\epsilon)}_{\epsilon}] \\
\frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} &= (t-t+1)\cdot\epsilon \\
\frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} &= \epsilon
\end{aligned}$$

Gráficamente, ϵ es la pendiente del logaritmo del nivel de precios, por lo cual la pendiente corresponde a la tasa de cambio:

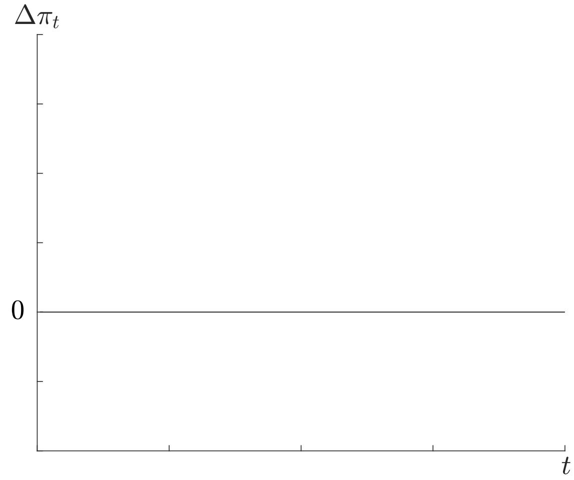


Como fue demostrado, la inflación se puede aproximar a la diferencia del logaritmo del nivel de precios:

$$\pi_t = p_t - p_{t-1} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}} = \epsilon \qquad \forall t.$$



Por último, gráficamente podemos observar que el cambio absoluto en la inflación es igual a cero.



0.7. Resumen.

- Al trabajar con logaritmos, la diferencia entre dos puntos corresponde al cambio porcentual de la variable original.
- Alternativamente, cuando analizamos el cambio porcentual en un solo periodo, la pendiente de la variable en logaritmos en aquel momento del tiempo también se puede interpretar como el cambio porcentual de la variable.
- Si cambia m_t podemos interpretar el diferencial de m en un momento del tiempo como el cambio porcentual de los saldos nominales M_t.
- Si cambia p_t en un periodo, podemos interpretar el diferencial como la inflación π_t en aquel periodo.
- Es difícil desprender conclusiones del cambio en la inflación $\Delta\pi_t$ observando el gráfico de la evolución del nivel de precios absoluto P_t.
- A menos que la evolución del logaritmo del nivel de precios sea lineal, es difícil desprender conclusiones del cambio absoluto de la inflación $\Delta\pi_t$.
- Tener en cuenta que los gráficos de π_t e i_t no estarán en logaritmos, por lo tanto, no podremos hacer fácilmente interpretaciones directas del cambio porcentual observando estos gráficos.

1. Aumento permanente no anticipado de la cantidad de dinero.

Existe una economía que se encuentra en equilibrio y en la cual la oferta de dinero no ha crecido desde hace muchos años, es decir, se ha mantenido constante. Un día cualquiera usted se despierta y lee una gran cantidad de tweets virales. Usted se da cuenta que durante la noche gran parte de la población de este país ha llamado a retirar el dinero de los bancos comerciales locales usando Twitter como medio de comunicación. Estos tweets generan una gran cantidad de corridas bancarias locales que hacen quebrar algunos de los bancos comerciales más reconocidos de este país.

Por distintos motivos, el Banco Central de dicha economía ha estimado conveniente realizar un aumento sorpresivo de la oferta de dinero de una vez y para siempre. Finalmente, este aumento es anunciado durante la mañana. El anuncio involucra un aumento en la oferta monetaria equivalente a un porcentaje κ en todos los periodos. Es decir:

$$M'_t = M'_{t+1} = M'_{t+2} = ... = M'_{t+S} = M_{t-1}(1+\kappa)$$

Preocupado por el efecto que pueda generar esta expansión monetaria, usted desea calcular el impacto sobre las variables nominales. Suponga que el impacto de las quiebras bancarias no era lo suficientemente grande como para afectar el producto (se mantiene igual en todos los periodos) y que por neutralidad del dinero, en equlibrio general el aumento de la oferta monetaria tampoco posee efecto sobre el producto real; este es exógeno.

Asuma la siguiente forma funcional para la demanda por saldos reales:

$$\frac{M_t^d}{P_t} = \frac{Y_t^\phi}{i_t^\eta}$$

Además suponga que la tasa de interés real r_t es cero en todos los periodos.

I. Exprese la condición de equilibrio monetario en términos logarítmicos.

Pauta.

$$ln\Big(\frac{M_t^d}{P_t}\Big) = ln\Big(\frac{Y_t^\phi}{i_t^\eta}\Big) \iff {m_t}^d - p_t = -\eta i_t + \phi y_t$$

Teniendo la forma funcional para la demanda en términos logarítmicos, sólo queda expresar la condición de equilibrio. En equilibrio, la oferta monetaria debe ser igual a la demanda por dinero.

$$m_t = m_t^d \;\; \Rightarrow \;\; m_t - p_t = -\eta i_t + \phi y_t$$

II. Exprese la forma funcional para el logaritmo del nivel de precios en función de parámetros exógenos.

Pauta.

Bajo el supuesto de que la tasa de interés real es cero en todos los periodos, llegamos a la siguiente forma funcional (derivación disponible en slides):

$$p_t = \frac{1}{1+\eta}\mathbb{E}_t\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k (m_{t+k} - \phi y_{t+k})\right]$$

Como la oferta monetaria está dada para los agentes y como suponemos que el producto es exógeno, podemos asegurar que la expresión anterior se encuentra en función de parámetros exógenos.

Definimos los determinantes fundamentales del nivel de precios como:

$$\varphi_{t+k} \equiv m_{t+k} - \phi y_{t+k}, \qquad \forall k$$

La expresión simplificada para el logaritmo del nivel de precios está dada por:

$$p_t = \frac{1}{1+\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right)^k \mathbb{E}_t[\varphi_{t+k}]$$

Notar que p_t está determinado por la expectativa que los agentes poseen en t sobre los fundamentales futuros. Esta expectativa se forma con toda la información pública disponible en t. En el siguiente periodo, cuando se determina p_{t+1}, se puede formar una nueva expectativa de los mismos fundamentales futuros si la información cambia. Lo que importa es la información disponible en cada periodo.

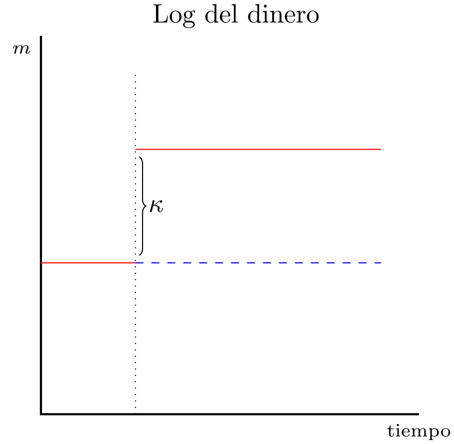
Para efectos de este ejercicio se asume que no habrá nueva información en los siguientes periodos,.

III. Grafique la trayectoria del logaritmo de los saldos reales m y el logaritmo del PIB real y a lo largo del tiempo bajo la sorpresa monetaria.

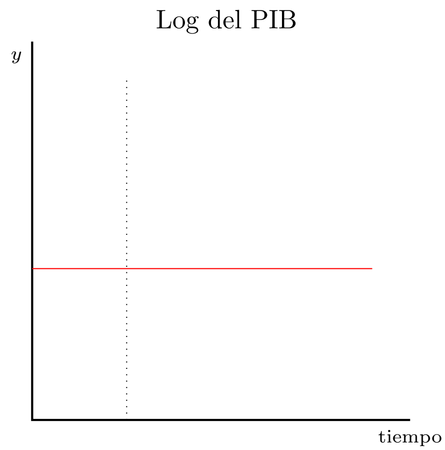
Pauta.

En el enunciado, se describe la trayectaria de m. Esta viene dada exógemente por una decisión sorpresiva del Banco Central. También se menciona que el producto es exógeno, que se mantuvo constante y se que mantendrá inalterado en el futuro.

Log del dinero



La sorpresa monetaria ocurre en donde se encuentra la línea vertical punteada. En ese momento, m salta $\kappa\,\%$. Como el gráfico se encuentra en logaritmos, la diferencia entre m_t y m_{t-1} corresponde al salto porcentual de M_t. La línea punteada azul corresponde a la trayectoria contrafactual de no haber ocurrido shock monetario sorpresivo.



IV. Sea p'_t el nuevo valor del nivel de precios p_t luego del shock monetario sorpresivo y sea $\Delta p_t \equiv p'_t - p_t$ el cambio de la variable en t producto de la sorpresa (notar que $\Delta p_t \neq p_t - p_{t-1}$). Calcule el cambio del nivel de precios Δp_t bajo el shock monetario no anticipado, es decir, calcule el imapcto de la sorpresa respecto al escenario sin shock.

Pauta.

Un aumento no anticipado de la cantidad de dinero en t implica que ocurrirán cambios o ajustes en ciertas variables macroeconómicas que no se habrían visto alteradas de la misma forma de haber sido prevista la sorpresa en $t-1$.

Δm_t es el cambio porcentual en la cantidad de dinero respecto al contrafactual (en esta pregunta se define Δ respecto al contrafactual, no como el cambio temporal). Por enunciado, $\Delta m_{t+k} = \kappa$ y $\Delta y_{t+k} = 0, \forall k \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, debido a que el cambio monetario es un cambio permanente y a que existe neutralidad del dinero, el cambio porcentual de los fundamentales está dado por:

$$\Delta \varphi_{t+k} = \Delta m_{t+k} - \phi \Delta y_{t+k} = \kappa, \qquad \forall k.$$

Como en t surge nueva información sobre la cantidad de dinero, hoy día se actualizan las expectativas sobre cada uno de los periodos futuros incorporando la nueva información disponible.

$$\Rightarrow \mathbb{E}_t[\Delta \varphi_{t+k}] = \kappa \qquad \forall k.$$

La expresión anterior se refiere a lo que los agentes creen en t que pasará con los fundamentales de $t+k$. No confundir "k" con "κ" (letra griega y cambio porcentual).

Conocemos la forma funcional para Δp_t, cuya derivación proveniente de la ecuación para p_t fue mostrada en clases. Remplazando, obtenemos que el cambio porcentual está dado por κ:

$$\Delta p_t = \frac{1}{1+\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right)^k \mathbb{E}_t[\Delta \varphi_{t+k}] = \frac{\kappa}{1+\eta} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right)^k}_{\sum_{s=0}^{\infty} r^s = \frac{1}{1-r}} = \frac{\kappa}{1+\eta}(1+\eta) = \kappa$$

Como en todos los periodos el cambio porcentual en la oferta dinero es el mismo, entonces el cambio porcentual de los fundamentales es el mismo. Intuitivamente, si el producto está fijo y la cantidad de dinero disponible en la economía aumenta, entonces los precios deben aumentar en el mismo porcentaje para asegurar que la cantidad de bienes transados sea la misma después del shock. El aumento del nivel de precios asegura el equilibrio en cada uno de los periodos incluyendo el periodo t.[1]

V. Grafique la trayectoria del logaritmo del nivel de precios p a lo largo del tiempo.

Pauta.

En el equilibrio sin sorpresas los fundamentales no cambiarían y el nivel de precios se mantendría constante. Luego de la sorpresa monetaria, periodo a periodo los agentes evalúan sus expectativas con la información disponible. Suponemos que no habrá nueva información en el futuro.

Si los agentes recibieran nueva información después de t tendrían la posibilidad de ajustar sus expectativas, afectando el nivel de precios. Es decir, el nivel de precios efectivo de $t+i$ se determina en $t+i$ y no antes. En cada periodo se forman expectativas futuras con la información disponible en aquel momento. Esto es lo que significa el subíndice del operador de esperanza.

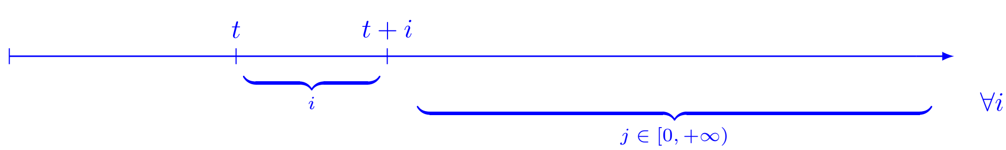
El cambio del nivel de precios después del shock es:

$$\Delta p_{t+i} = \frac{1}{1+\eta}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^j \mathbb{E}_{t+i}[\Delta\varphi_{t+j}] = \frac{\kappa}{1+\eta}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^j = \kappa, \quad \forall i, j.$$

j abarca el número de periodos a considerar en la proyección hacia el futuro e i determina el periodo en el cual se evalúa. En otras palabras, en t+10 el nivel de precios se determina con **la esperanza de t+11 en t+10**, p_{t+11} se determina con la creecia sobre t+12 en t+11, y así sucesivamente.

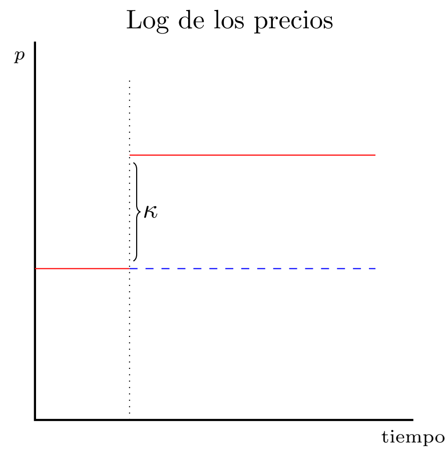
$$\mathbb{E}_{t+i}[\Delta\varphi_{t+j}] = \kappa, \quad \forall j$$

$$\downarrow$$



Sin noticias nuevas e incorporando el anuncio en t el nivel de precios resultante es el mismo en todos los periodos. Esto es consistente con la respuesta anterior; un cambio porcentual en la oferta dinero se traduce en un cambio porcentual equivalente en el nivel de precios en todos los periodos, ya que de esta forma se equilibra el exceso de liquidez con producto constante.

[1]Esto es lo que diferencia el equilibrio de largo plazo respecto al de corto plazo. Además de la neutralidad del dinero, estamos asumiendo que los precios poseen plena flexibilidad para ajustar de forma instantánea. Asuminos que junto al shock los precios ajustan lo suficiente como para asegurar el equilibrio inmediatamente, es decir, no existen rigideces de precios. En cuanto a la neutralidad del dinero, de no cumplirse en el corto plazo sería posible observar que un aumento en la cantidad de dinero lleve a una mayor demanda de bienes, afectando el PIB. Sin embargo, en el largo plazo después del aumento de precios disminuiría la demanda por efecto sustitución, se depreciarían los precios y el producto volvería a su valor inicial (no necesariamente se revierte al mismo nivel de precios inicial). Con neutralidad del dinero podríamos interpretar que el ajuste de este mecanismo de corto plazo ya ha ocurrido y que en el largo plazo nos encontramos en la parte final del proceso.



VI. Grafique la trayectoria de la inflación realizada y la inflación esperada $\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]$ a lo largo del tiempo, después de conocer la sorpresa monetaria.

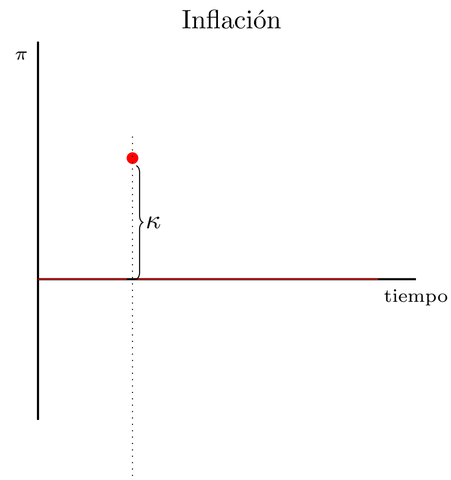
Pauta.

Por el inciso II) conocemos Δpt bajo la sorpresa no anticipada. Tomando el diferencial entre los logaritmos del nivel de precios de t y $t-1$ (recordar que la inflación es un cambio porcentual), tenemos que la inflación efectiva en t después de la sorpresa (π'_t) está dada por:

$$\begin{aligned}
\pi'_t &= p'_t - p_{t-1} \\
&= [\Delta p_t + \underbrace{p_t}_{p_{t-1}}] - p_{t-1} \\
&= [\Delta p_t + p_{t-1}] - p_{t-1} \\
&= \Delta p_t \\
&= \kappa
\end{aligned}$$

La inflación efectiva bajo shock no anticipado para el resto de los periodos está dada por:

$$\begin{aligned}
\pi'_{t+i} &= p'_{t+i} - p'_{t+i-1} \\
&= [\Delta p_{t+i} + \underbrace{p_{t+i}}_{p_{t-1}}] - [\Delta p_{t+i-1} + \underbrace{p_{t+i-1}}_{p_{t-1}}] \\
&= [\kappa + p_{t-1}] - [\kappa + p_{t-1}] \\
&= 0
\end{aligned}$$



En cuanto a la inflación esperada, esta se define como:

$$\mathbb{E}_{t-1}[\pi_t] \equiv \mathbb{E}_{t-1}[p_t] - p_{t-1}$$

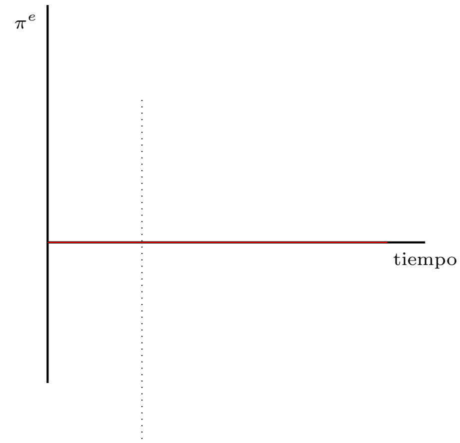
Sabemos que de no haber ocurrido una sorpresa monetaria la inflación del periodo t habría sido cero, ya que p_t habría sido igual a p_{t-1}. p_{t-1} era la creencia de los agentes. Cuando surge la sorpresa los agentes de la economía no alcanzaron a ajustar su expectativa de inflación en $t-1$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t-1}[\pi_t] &= \mathbb{E}_{t-1}[p_t] - p_{t-1} \\ &= \overline{\mathbb{E}_{t-1}[p_t]} - p_{t-1} \\ &= p_{t-1} - p_{t-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

Para el resto de los periodos los agentes pueden ajustar sus expectativas e incorporar la información del anuncio del Banco Central. Con agentes racionales, las expectativas futuras sin nuevas sorpresas son iguales a las inflaciones realizadas. Como la inflación es cero para el resto de periodos (el nivel de precios es constante), entonces la inflación esperada es cero para todos los periodos.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t+i-1}[\pi_{t+i}] &= \mathbb{E}_{t+i-1}[p_{t+i}] - \mathbb{E}_t[p_{t+i-1}] \\ &= p'_{t+i} - p'_{t-1+i} \\ &= 0\end{aligned}$$

Inflación esperada



VII. Grafique la evolución de la tasa de interés nominal bajo la sorpresa monetaria.

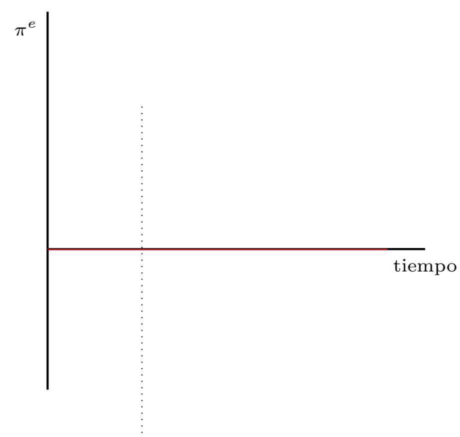
Pauta.

La ecuación de Fisher para todos los peridos está dada por:

$$i_{t+k} = r_{t+k} + \mathbb{E}_{t+k}[\pi_{t+k+1}] \qquad \forall k$$

Por enunciado sabemos que la tasa de interés real es cero en todos los periodos y por el inciso anterior sabemos que la inflación esperada será cero. Por lo tanto, la tasa de interés nominal será cero en todos los periodos.

Tasa de interés nominal



VIII. Grafique la oferta monetaria y la demanda por dinero en $t-1$ y en t.

Pauta.

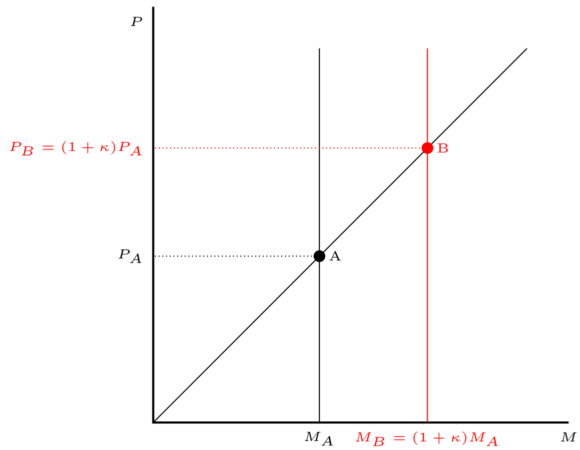
La demanda nominal en logaritmos está dada por:

$$m_t{}^d = -\eta i_t + \phi y_t + p_t$$

Sabemos que el producto y la tasa de interés será constante en todos los periodos. Por lo tanto, como el nivel de precios aumenta desde t en adelante, la demanda por dinero aumenta desde t.

$$\Delta m^d_{t+k} = \kappa \qquad \forall k \in \mathbf{N}$$

Graficando la demanda nominal absoluta con la cantidad nominal en el eje x y el nivel de precios en el eje y tenemos lo siguiente ilustración:



Note que la oferta nominal muestra un salto arbitrario por $\kappa\%$. M_A corresponde a la oferta monetaria antes del aumento y M_B corresponde a la oferta monetaria de t en adelante.

Al graficar el nivel de precios P en el eje y y M en el eje x, cambios de precios producen movimientos a lo largo de la curva de la demanda nominal. La demanda no se mueve porque para sufrir desplazamientos en este gráfico necesitamos un movimiento de la tasa de interés (que se podría mover si la inflación esperada cambia) o un movimiento del producto. En definitiva, el caso en esta pregunta representa un movimiento **a lo largo de la curva, y no un movimiento de la curva per se**.

2. Aumento permanente anticipado de la cantidad de dinero.

Finalmente, el Consejo del Banco Central de este país estimó que la medida anterior era muy agresiva en el corto plazo, ya que los costos sociales de los cambios bruscos eran muy altos. Sin embargo, durante la mañana, luego de su reunión de emergencia el Banco Central anuncia un aumento anticipado en la cantidad de dinero M por la misma tasa κ desde el periodo T en adelante.

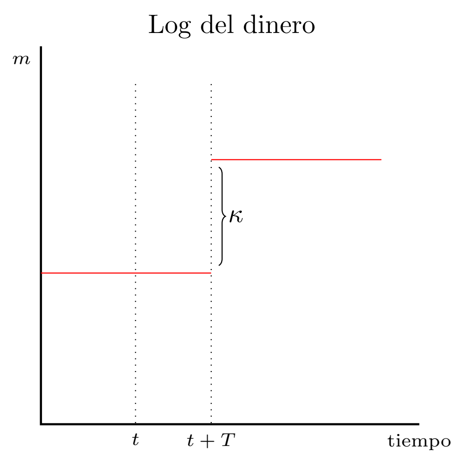
Mantenga los supuestos de la pregunta anterior. Es decir, producto exógeno y constante, tasa de interés real igual a cero, neutralidad del dinero y demanda por dinero real dada por:

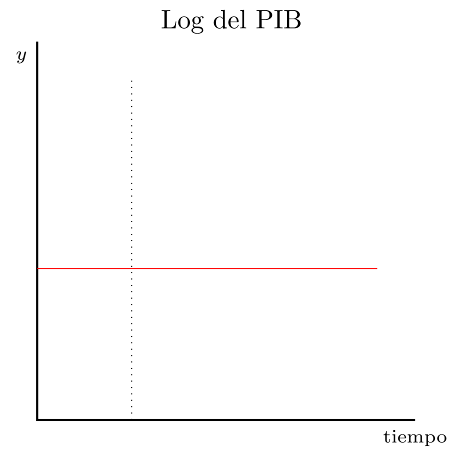
$$\frac{M_t^d}{P_t} = \frac{Y_t^{\phi}}{i_t^{\eta}}$$

I. Grafique la trayectoria del logaritmo de los saldos reales m y el logaritmo del PIB real y a lo largo del tiempo bajo la sorpresa monetaria.

Pauta.

Al igual que en la pregunta anterior, el enunciado nos brinda la trayectaria de m. A diferencia de la pregunta anterior, en t se conoce que saltará $\kappa\,\%$ de T en adelante. Seguimos asuminedo que el producto es exógeno, que se mantuvo constante y que se mantendrá constante.





II. Grafique la trayectoria del logaritmo del nivel de precios p a lo largo del tiempo.

Pauta.

Para conocer la trayectoria del nivel de precios debemos analizar lo que ocurre en t, entre t y T, desde T en adelante.

Conocemos la forma funcional para el cambio del logaritmo del nivel de precios en t:

$$\Delta p_t = \frac{1}{1+\eta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k \mathbb{E}_t[\Delta\varphi_{t+k}]$$

La expresión anterior nos genera un problema: la esperanza del cambio de los fundamentales no es igual para todos los periodos lo que nos dificulta la resolución de la sumatoria. Descomponemos la sumatoria de acuerdo al valor que toma la esperanza de los fundamentales:

$$\Delta p_t = \frac{1}{1+\eta}\Big[\sum_{k=0}^{T-1}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k \underbrace{\mathbb{E}_t[\Delta\varphi_{t+k}]}_{0} + \sum_{k=T}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k \underbrace{\mathbb{E}_t[\Delta\varphi_{t+k}]}_{\kappa}\Big]$$

$$\begin{aligned}\Delta p_t &= \frac{1}{1+\eta}\sum_{k=T}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k \mathbb{E}_t[\Delta\varphi_{t+k}] \\ &= \frac{\kappa}{1+\eta}\sum_{k=T}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k\end{aligned}$$

Ahora, la complicación es que solo tenemos fórmulas para resolver sumatoriaas desde 0 en adelante. Sin embargo, ya podemos resolver sumatorias que solo dependen de la razón y un exponente, por lo que realizamos la siguiente descomposición:

$$\Delta p_t = \frac{\kappa}{1+\eta}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k - \sum_{k=0}^{T-1}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k\right]$$

$\frac{\eta}{1+\eta} < 1$, implicando que podemos resolver las sumatorias usando identidades conocidas:

$$\Delta p_t = \frac{\kappa}{1+\eta}\Big[\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k}_{\sum_{s=0}^{\infty} r^s = \frac{1}{1-r}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{T-1}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k}_{\sum_{s=0}^{N} r^s = \frac{r^{N+1}-1}{r-1}}\Big]$$

$$= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[\frac{1}{\frac{1+\eta-\eta}{1+\eta}} - \frac{(\frac{\eta}{1+\eta})^{T-1+1} - 1}{\frac{\eta}{1+\eta} - 1}\right]$$

$$= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[1+\eta - \frac{(\frac{\eta}{1+\eta})^{T} - (\frac{1+\eta}{1+\eta})^{T}}{\frac{\eta}{1+\eta} - \frac{1+\eta}{1+\eta}}\right]$$

$$= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[1+\eta - \frac{\frac{\eta^T-(1+\eta)^T}{(1+\eta)^T}}{\frac{-1}{1+\eta}}\right]$$

$$= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[1+\eta + \frac{(\eta^T-(1+\eta)^T)(1+\eta)}{(1+\eta)^T}\right]$$

$$= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[1+\eta + \frac{(\eta^T-(1+\eta)^T)}{(1+\eta)^{T-1}}\right]$$

$$= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[\frac{(1+\eta)(1+\eta)^{T-1} + (\eta^T-(1+\eta)^T)}{(1+\eta)^{T-1}}\right]$$

$$= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[\frac{(1+\eta)^T + \eta^T - (1+\eta)^T}{(1+\eta)^{T-1}}\right]$$

$$= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[\frac{\eta^T}{(1+\eta)^{T-1}}\right]$$

$$= \kappa\Big(\frac{1}{1+\eta}\Big)^{1+T-1}\eta^T$$

$$= \kappa\Big(\frac{\eta}{1+\eta}\Big)^{T}$$

$\frac{\eta}{1+\eta} < 1$. Esta razón menor a 1 se eleva a un número positivo, por lo que este ponderador reduce κ. En conclusión, p_t experimenta un cambio positivo pero pequeño.

Cuando es de conocimiento público que en el futuro ocurrirá un aumento del dinero, con producto constante y expectativas racionales, aumentará la inflación y la inflación esperada futura. En los periodos anteriores al aumento del dinero los agentes comienzan a exigir mayor tasa nominal porque en periodos posteriores perderán poder adquisitivo. Aumentos de tasas nominales producirán aumentos en el nivel de precios en periodos anteriores. Se genera así un efecto en cadena, cuyo **efecto anticipado por el aumento del dinero se produce a través de Fisher**.

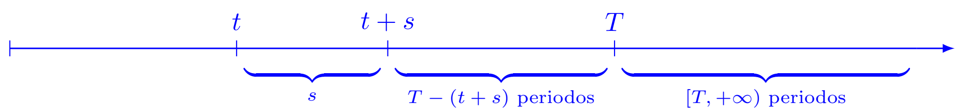
$$\uparrow p_{t+s} = m_t + \uparrow \eta i_{t+s} - \phi y_t$$

Para Δp_T tenemos un caso muy similar al de la pregunta anterior cuando el tiempo era mayor a t. Los agentes en T evalúan las expectativas de los fundamentales desde T hacia adelante con la información disponible **en** T. Suponiendo racionalidad y que no hay nueva información, el cambio en el logaritmo del nivel de precios a causa del shock estará dado por:

$$\Delta p_T = \frac{1}{1+\eta} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right)^j \mathbb{E}_T[\Delta\varphi_{t+j}] = \frac{\kappa}{1+\eta} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right)^j = \kappa \qquad \forall j.$$

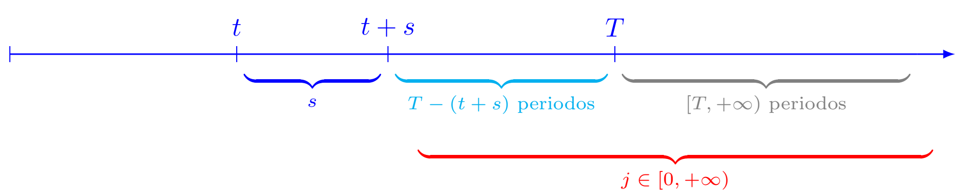
Desde T en adelante, todos los periodos sufren un cambio permanente en la cantidad de dinero por κ %. De la misma forma, el nivel de precios sufre un aumento por κ % luego de la sorpresa, permitiendo el equilibrio con producto fijo. Con este resultado sólo falta analizar lo que ocurre entre t y T.

Sea s un número tal que $t < t+s < T$. En cualquier momento $t+s$ se espera que se realice un aumento de la cantidad de dinero en $T-(t+s)$ periodos más.

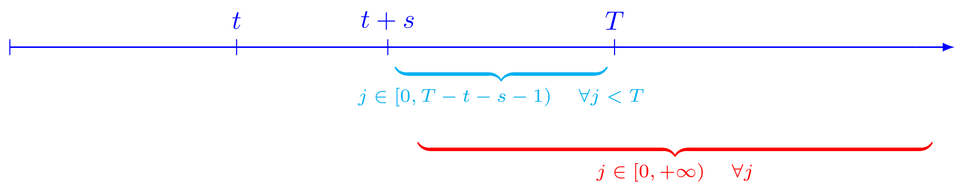


El cambio en el nivel de precios para todo periodo entre el anuncio y el aumento efectivo de la cantidad de dinero está dado por:

$$\begin{aligned} \Delta p_{t+s} &= \frac{1}{1+\eta} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right)^j \mathbb{E}_{t+s}[\Delta\varphi_{t+s+j}] \\ &= \frac{1}{1+\eta} \Big[\sum_{j=0}^{T-t-s-1} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right)^j \underbrace{\mathbb{E}_{t+s}[\Delta\varphi_{t+s+j}]}_{0} + \sum_{j=T-t-s}^{\infty} \left(\frac{\eta}{1+\eta} \right)^j \underbrace{\mathbb{E}_{t+s}[\Delta\varphi_{t+s+j}]}_{\kappa} \Big] \end{aligned}$$

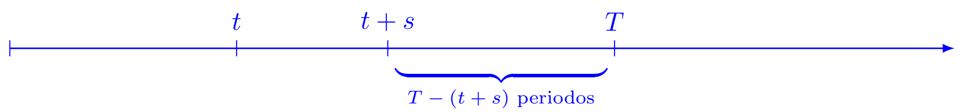


$$
\begin{aligned}
\Delta p_{t+s} &= \frac{\kappa}{1+\eta}\sum_{j=T-t-s}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{j} \\
&= \frac{\kappa}{1+\eta}\Big[\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{j}}_{\sum_{s=0}^{\infty} r^{s}=\frac{1}{1-r}} - \underbrace{\sum_{j=0}^{T-t-s-1}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{j}}_{\sum_{s=0}^{N} r^{s}=\frac{r^{N+1}-1}{r-1}}\Big]
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\Delta p_{t+s} &= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[\frac{1}{1-\frac{\eta}{1+\eta}} - \frac{\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s-1+1}-1}{\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)-1}\right] \\
&= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[1+\eta - \frac{\frac{(\eta)^{T-t-s}-(1+\eta)^{T-t-s}}{(1+\eta)^{T-t-s}}}{\frac{-1}{(1+\eta)}}\right] \\
&= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[1+\eta + \frac{(1+\eta)[\eta^{T-t-s}-(1+\eta)^{T-t-s}]}{(1+\eta)^{T-t-s-1}}\right] \\
&= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[\frac{\overbrace{(1+\eta)(1+\eta)^{T-t-s-1}}^{(1+\eta)^{T-t-s}} + \eta^{T-t-s}-(1+\eta)^{T-t-s}}{(1+\eta)^{T-t-s-1}}\right] \\
&= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[\frac{(1+\eta)^{T-t-s}+(\eta)^{T-t-s}-(1+\eta)^{T-t-s}}{(1+\eta)^{T-t-s-1}}\right] \\
&= \frac{\kappa}{1+\eta}\left[\frac{\eta^{T-t-s}}{(1+\eta)^{T-t-s-1}}\right] \\
&= \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s}
\end{aligned}
$$

$T-(t+s)$ es el número de periodos restantes antes del aumento permanente de la cantidad de dinero.



Mientras más cerca nos encontramos de T, más pequeño es el exponente de $\frac{\eta}{1+\eta}$. Como $\frac{\eta}{1+\eta} < 1$ el ponderador de κ aumenta al expandirse con el pasar del tiempo, ergo, el nivel de precios aumenta conforme pasa el tiempo.

En síntesis, al principio se experimenta un pequeño salto en la inflación. Luego los precios van aumentando poco a poco y la inflación toma valores positivos. Finalmente, el aumento final para todos los periodos posteriores a T respecto a su contrafactual es κ.

Algebraicamente:

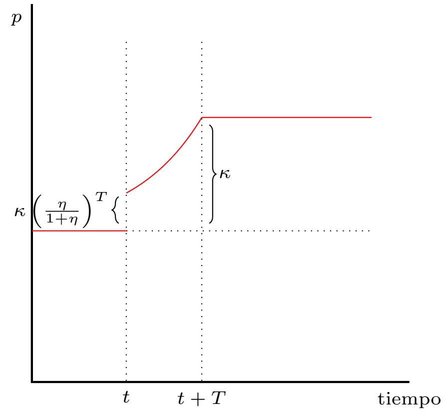
$$\pi_{t+s} = [\underbrace{p_{t+s}}_{0 \text{ (contrafactual)}} + \Delta p_{t+s}] - [\underbrace{p_{t+s-1}}_{0 \text{ (contrafactual)}} + \Delta p_{t+s-1}]$$

$$\begin{aligned}
\pi_{t+s} &= \Delta p_{t+s} - \Delta p_{t+s-1} \\
&= \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s} - \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-[s-1]} \\
&= \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s} - \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s+1} \\
&= \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s}\left[1 - \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)\right] \\
&= \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s}\left(\frac{1}{1+\eta}\right)
\end{aligned}$$

$$\pi_{t+s} = \frac{\kappa}{1+\eta}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s}$$
$$\pi_{t+s} > 0$$

Inflación positiva $\forall t+s$ implica que el nivel de precios es creciente a lo largo del tiempo.

Log de los precios



III. Grafique la oferta monetaria y la demanda por dinero de los distintos periodos en un mismo gráfico.

Pauta.

Para graficar la oferta y la demanda en el mismo gráfico, debemos determinar si existen movimientos en la inflación esperada. Con M en el eje x y P en el eje y, movimientos de precios son equivalentes a movimientos a lo largo de la curva de demanda. Desplazamientos de la curva de demanda en este gráfico dependen de movimientos de la tasa de interés y del producto.

$$m_t^d = p_t + \phi y_t - \eta i_t$$

Como ya sabemos, el producto es exógeno y constante. A diferencia del producto, la tasa de interés si presentará movimientos. Asumiendo que la tasa de interés real igual a cero, debemos determinar el movimiento de la inflación esperada. Lo último, se traduce en un movimiento de la curva de demanda por dinero.

En $t-1$, los agentes no alcanzan a ajustar sus expectativas por lo que la inflación esperada es cero.

$$\mathbb{E}_{t-1}[\pi_t] = \underbrace{\mathbb{E}_{t-1}[p_t]}_{0} - \underbrace{p_{t-1}}_{0}$$
$$\mathbb{E}_{t-1}[\pi_t] = 0$$

Asumiendo racionalidad de los agentes, la inflación esperada coincide con la efectiva sin nueva información en el futuro. Por lo tanto, debemos encontrar la evolución de la inflación.

$$\mathbb{E}_{t+j-1}[\pi_{t+j}] = \pi_{t+j} \qquad \forall j > t$$

Sabemos que antes de t y después de T el nivel de precios se mantiene constante, por lo tanto, la inflación será cero en estos tramos.

En la pregunta anterior calculamos la forma funcional para la inflación $\forall s$ tal que $t < s < T$.

$$\pi_{t+s} = \frac{\kappa}{1+\eta}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s} > 0$$

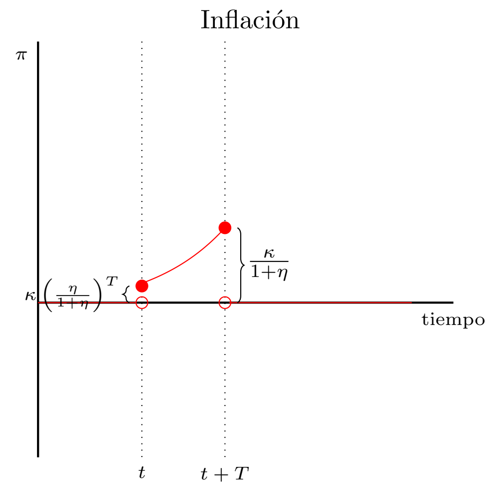
Ahora debemos determinar si la inflación crece o decrece entre t y T.

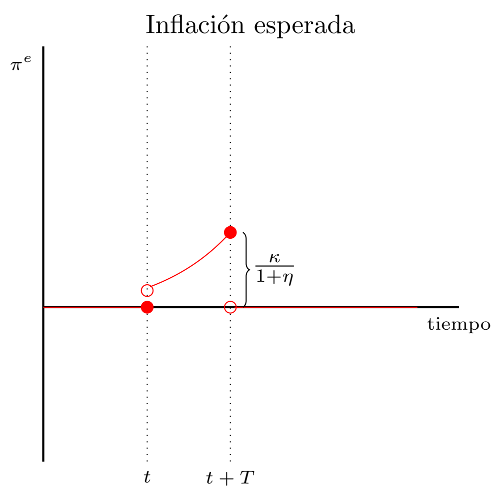
$$\begin{aligned}
\pi_{t+s-1} &= \Delta p_{t+s-1} - \Delta p_{t+s-2} \\
&= \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-[s-1]} - \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-[s-2]} \\
&= \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s+1} - \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s+2} \\
&= \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s+1}\left[1 - \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)\right] \\
&= \kappa\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s+1}\left(\frac{1}{1+\eta}\right)
\end{aligned}$$

$$\pi_{t+s} = \frac{\kappa}{1+\eta}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s+1}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{t+s} - \pi_{t+s-1} &= \frac{\kappa}{1+\eta}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s} - \frac{\kappa}{1+\eta}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s+1} \\
&= \frac{\kappa}{1+\eta}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s}\left[1 - \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)\right] \\
&= \underbrace{\frac{\kappa}{1+\eta}}_{>0}\underbrace{\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{T-t-s}}_{>0}\underbrace{\left(\frac{1}{1+\eta}\right)}_{>0}
\end{aligned}$$

La inflación es creciente. Además, sabemos que en t la inflación experimentará un salto pequeño equivalente al salto en el nivel de precios, a diferencia de la inflación esperada.





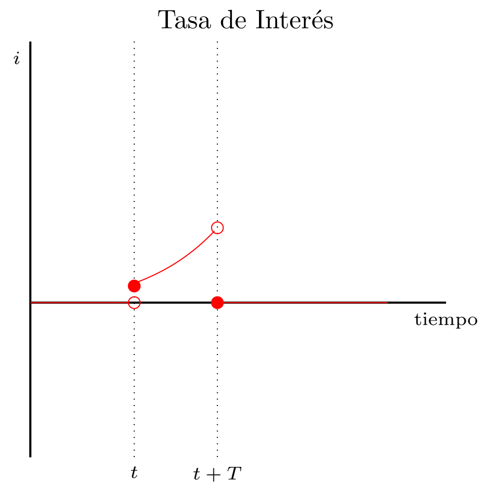
Conociendo la inflación esperada podemos calcular la tasa de interés nominal.

$$i_{t-1} = \underbrace{r_{t-1}}_{0} + \underbrace{\mathbb{E}_{t-1}[\pi_t]}_{0} = 0$$

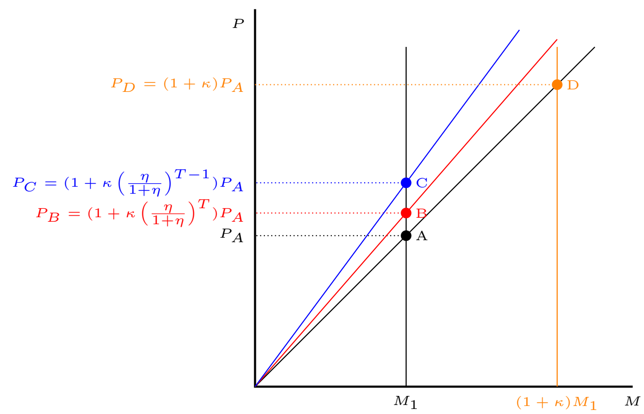
$$i_t = \underbrace{r_t}_{0} + \underbrace{\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]}_{>0} = \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]$$

$$i_{t+s} = \underbrace{r_{t+s}}_{0} + \underbrace{\mathbb{E}_{t+s}[\pi_{t+s+1}]}_{>0} = \mathbb{E}_{t+s}[\pi_{t+s+1}]$$

$$i_T = \underbrace{r_T}_{0} + \underbrace{\mathbb{E}_T[\pi_{T+1}]}_{0} = 0$$



Como la tasa de interés aumenta en t la demanda disminuye en t (para un mismo precio los agentes están dispuestos a demandar menos dinero). Lo mismo para los siguientes periodos.



Cada desplazamiento de curva representa una tasa de interés distinta. Estos movimientos generan un aumento progresivo de precios.

En T, la demanda vuelve a ser la misma que antes de la noticia ya que cae la tasa de interés. Debido a que se hace efectivo el anuncio, el nivel de precios final es mayor que todos los realizados en periodos anteriores.

Suponiendo que el aumento en la cantidad de dinero se proudce en $t+10$ y que los precios ajustan de forma totalmente flexible, el fenómeno se puede resumir en el siguiente esquema:

$$\frac{\uparrow M_{10}}{P_{10}} \neq L(i,Y) \Rightarrow \frac{\uparrow M_{10}}{\uparrow P_{10}} = L(i,Y) \Rightarrow \ i_9 \neq r_9 + \uparrow \mathbb{E}_9[\pi_{10}] \Rightarrow \uparrow i_9 = r_9 + \uparrow \mathbb{E}_9[\pi_{10}] \Rightarrow \frac{M_9}{P_9} \neq \underbrace{L(\uparrow i_9, Y)}_{\downarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{M_9}{\uparrow P_9} = \underbrace{L(\uparrow i_9, Y)}_{\downarrow} \Rightarrow \ i_8 \neq r_8 + \uparrow \mathbb{E}_8[\pi_9] \Rightarrow \uparrow i_8 = r_8 + \uparrow \mathbb{E}_8[\pi_9] \Rightarrow \frac{M_8}{P_8} \neq \underbrace{L(\uparrow i_8, Y)}_{\downarrow} \Rightarrow \frac{M_8}{\uparrow P_8} = \underbrace{L(\uparrow i_8, Y)}_{\downarrow} \Rightarrow ...$$

$$\text{con} \uparrow P_{10} > \uparrow P_9 > \uparrow P_8 > ...$$

Gracias al parámetro de elasticidad, la demanda por saldos reales L_{t+s} no responde linealmente ante los cambios de la tasa de interés. Como la disminución de L_{t+s} es un poco menor a la de L_{t+s+1}, el aumento P_{t+s} es menor al de P_{t+s+1}, lo que se vuelve a traducir en un aumento mucho menor de L_{t+s-1} en $t+s-1$.

En otras palabras, **la forma funcional de la demanda por saldos reales** y la forma en que reacciona ante cambios en la tasa de interés **permite que el aumento** anticipado de los precios en equilibrio general sea **progresivo**.