Chapitre 3

Probabilité conditionnelle

Dans ce chapitre, on introduit un concept très important en théorie des probabilités, soit la probabilité conditionnelle. Il y a deux raisons justifiant son importance. Dans un premier temps, on est souvent intéressé à calculer des probabilités lorsque de l'information partielle sur le résultat de l'expérience est connue. Dans ces cas, on cherche à évaluer des probabilités conditionnelles. Dans un deuxième temps, l'utilisation des probabilités conditionnelles peut faciliter le calcul de certaines probabilités où aucune information n'est détenue.

3.1 Définition

Exemple 3.1 *On lance 2 dés supposant que chaque résultat a une chance de $\frac{1}{36}$ de se réaliser. De plus, on suppose que le premier dé lancé est un 3. Sachant cette information, quelle est la probabilité que la somme des deux dés soit de 8?*

Proposition 3.2 *Soit les événements E_1 et E_2 et $\Pr(E_2) > 0$. Alors,*

$$\Pr\left(E_1 \left| E_2 \right.\right) = \frac{\Pr\left(E_1 \cap E_2\right)}{\Pr\left(E_2\right)},$$

où $\Pr\left(E_1 \left| E_2 \right.\right)$ correspond à la probabilité conditionnelle que l'événement E_1 se réalise sachant que l'événement E_2 s'est réalisé. Si l'événement E_2 se réalise, alors pour que E_1 se réalise, il est nécessaire que le résultat appartienne à E_1 et E_2, c'est-à-dire $E_1 \cap E_2$. De plus, étant donné que E_2 s'est réalisé le nouvel espace échantillonnal est maintenant E_2.

Si l'on reprend l'Exemple 3.1 avec

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\text{Somme des dés est de 8}\} \\ E_2 &= \{\text{Premier dé est un 3}\} \end{aligned}$$

et qu'on le refait à l'aide de la Proposition 3.2, on obtient

$$\Pr\left(E_1 \left| E_2 \right.\right) = \frac{\Pr\left(E_1 \cap E_2\right)}{\Pr\left(E_2\right)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}.$$

Remarque 3.3 *Lorsque les résultats sont équiprobables, on obtient*

$$\Pr\left(E_1 \left| E_2 \right.\right) = \frac{\Pr\left(E_1 \cap E_2\right)}{\Pr\left(E_2\right)} = \frac{\left(\frac{\#(E_1 \cap E_2)}{\#\Omega}\right)}{\left(\frac{\#E_2}{\#\Omega}\right)} = \frac{\#\left(E_1 \cap E_2\right)}{\#E_2},$$

où $\#\left(E\right)$ correspond au cardinal de l'ensemble E.

Remarque 3.4 *Relation importante:*

$$\begin{aligned}\Pr(E_2 | E_1) &= \frac{\Pr(E_2 \cap E_1)}{\Pr(E_1)} \\ &= \frac{\Pr(E_1 | E_2)\Pr(E_2)}{\Pr(E_1)}.\end{aligned}$$

Exemple 3.5 *Une compagnie d'assurance effectue une étude sur les jeunes conducteurs. Selon son expérience des 10 dernières années, elle a observé que:*

- 6% des jeunes conducteurs sont impliqués dans un accident responsable la 1ière année;
- 70% des jeunes conducteurs ont pris des cours de conduite;
- 10% des jeunes conducteurs portent des lunettes;
- Parmi les conducteurs qui ont pris des cours de conduite, 1 sur 14 porte des lunettes;
- Parmi les conducteurs qui ont eu un accident responsable la 1ière année, 1 sur 3 a pris des cours de conduite;
- 1 jeune conducteur sur 100 porte des lunettes et a eu un accident responsable la 1ière année.

(a) Trouver la probabilité qu'un jeune conducteur qui porte des lunettes ait un accident responsable la 1ière année.

(b) Trouver la probabilité qu'un jeune conducteur ayant pris des cours de conduite ait un accident responsable la 1ière année.

3.2 Règle de multiplication

Proposition 3.6 *Soit n événements $E_1, E_2, ..., E_n$.*

$$\Pr(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = \Pr(E_1)\Pr(E_2 | E_1)\Pr(E_3 | E_1 \cap E_2)...\Pr(E_n | E_1 \cap E_2 ... \cap E_{n-1}).$$

Exemple 3.7 *Une personne a 6 clés dont une seule peut débarrer la porte de sa maison. Si elle essaie chaque clé une seule fois au hasard (sans remise), quelle est la probabilité qu'elle trouve la bonne clé au 3ième essai?*

3.3 Loi des probabilités totales

Parfois, il s'avère impossible de calculer directement $\Pr(E_1)$ alors qu'il est possible d'évaluer $\Pr(E_1 | E_2)$ et $\Pr(E_1 | E_2^c)$ pour un événement donné E_2. Dans ces cas, on peut utiliser la loi des probabilités totales pour trouver $\Pr(E_1)$.

Proposition 3.8 *Soit un événement E_2 tel que $\Pr(E_2) > 0$ et $\Pr(E_2^c) > 0$. Alors, pour tout événement E_1, on a*

$$\Pr(E_1) = \Pr(E_1 | E_2)\Pr(E_2) + \Pr(E_1 | E_2^c)\Pr(E_2^c).$$

Exemple 3.9 *Dans un portefeuille d'assurance auto, il y a deux catégories d'assurés, des bons et des mauvais. On détient les informations suivantes:*

Type d'assuré	*% du portefeuille*	$\Pr(\{$*Avoir un accident*$\})$
Bon	*70*	*0.05*
Mauvais	*30*	*0.25*

Quelle est la probabilité qu'un assuré du portefeuille ait un accident?

Théorème 3.10 ***(Loi des probabilités totales)*** *Soit* $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ *une partition de l'espace échantillonnal* Ω *et* $\Pr(F_i) > 0$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors pour tout événement* E *de* Ω, *on a*

$$\begin{aligned}\Pr(E) &= \Pr(E\,|F_1)\Pr(F_1) + \Pr(E\,|F_2)\Pr(F_2) + ... + \Pr(E\,|F_n)\Pr(F_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Pr(E\,|F_i)\Pr(F_i).\end{aligned}$$

3.4 Formule de Bayes

Théorème 3.11 ***(Théorème de Bayes)*** *Soit* $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ *une partition de l'espace échantillonnal* Ω *d'une expérience. Si pour* $i = 1, ..., n$, $\Pr(F_i) > 0$, *alors pour tout événement* E *de* Ω *avec* $\Pr(E) > 0$, *on a*

$$\Pr(F_i\,|E) = \frac{\Pr(E\,|F_i)\Pr(F_i)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(E\,|F_i)\Pr(F_i)}.$$

Remarque 3.12 *Si les événements* F_i *sont des hypothèses possibles reliées à une expérience, alors la formule de Bayes peut être interprétée comme une mise à jour des hypothèses de départ* F_i *suite à l'observation de l'événement* E *de l'expérience. Dans ce cas, on appelera* $\Pr(F_i)$ *une probabilité a priori et* $\Pr(F_i\,|E)$ *une probabilité a posteriori.*

Exemple 3.13 *Une compagnie d'assurance protège des assurés contre des réclamations en soins de santé. Celle-ci classifie ses assurés comme des gens ayant de très bonnes habitudes de vie, des habitudes de vie acceptables et de mauvaises habitudes de vie. De plus, des données antérieures suggèrent que les gens dans chacune de ces catégories ont respectivement 10%, 20% et 40% de chance d'avoir plus de 2000$ de réclamations en soins de santé au cours d'une année. La compagnie d'assurance croit également que son portefeuille est constitué de 30% de gens ayant de très bonnes habitudes de vie, 45% de gens ayant des habitudes de vie acceptables et 25% de gens ayant de mauvaises habitudes de vie. (a) Quelle est la probabilité qu'un assuré du portefeuille ait plus de 2000$ de réclamations en soins de santé au cours d'une année? (b) Un assuré a plus de 2000$ de réclamations au cours d'une année. Quelle est la probabilité que cet assuré ait été classé dans les gens ayant des habitudes de vie très bonnes, acceptables ou mauvaises?*

Exemple 3.14 *Supposons qu'on ait 4 commodes, chacune ayant 2 tiroirs. On sait que dans chaque tiroir se trouve les pièces suivantes:*

Commode	*Tiroir*	*Tiroir*
no.1	*Or*	*Argent*
no.2	*Or*	*Argent*
no.3	*Or*	*Or*
no.4	*Argent*	*Argent.*

On choisit au hasard une commode et on ouvre un tiroir où l'on y trouve une pièce d'or. (a) Trouver la probabilité que l'autre tiroir de cette commode contienne une pièce d'argent. (b) Trouver la probabilité que l'autre tiroir de cette commode contienne une pièce d'or.

3.5 Événements indépendants

Dans les exemples de la section précédente, on a observé que la probabilité conditionnelle $\Pr(E_1\,|E_2)$ n'était pas en général égale à la probabilité non-conditionnelle $\Pr(E_1)$. Dans l'Exemple 3.13, on avait $\Pr(A) = 0.3 \neq \Pr(A\,|E) = 0.1364$. La réalisation de l'événement E a donc un impact sur les chances de réalisation de l'événement A.

Définition 3.15 *On définit par événements indépendants, deux événements qui n'ont aucune incidence l'un sur l'autre. Le fait de connaître le résultat d'un événement n'affecte aucunement les chances de réalisation* *d'un autre événement. On déduit donc les relations suivantes:*

$$\begin{aligned}
\Pr(E_1 \,|E_2\,) &= \Pr(E_1) \\
\Pr(E_2 \,|E_1\,) &= \Pr(E_2).
\end{aligned}$$

Proposition 3.16 *Deux événements E_1 et E_2 sont dits indépendants* ***si et seulement si***

$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_1)\Pr(E_2).$$

Exemple 3.17 *On lance deux dés. Soit les événements suivants:*

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{\textit{La somme des dés égale } 6\}\,; \\
E_2 &= \{\textit{La somme des dés égale } 7\}\,; \\
F &= \{\textit{Le résultat du premier dé est } 4\}\,.
\end{aligned}$$

(a) Est-ce que les événements E_1 et F sont indépendants? (b) Est-ce que les événements E_2 et F sont indépendants?

Proposition 3.18 *Si les événements E_1 et E_2 sont indépendants, alors*

$$\begin{aligned}
&E_1 \textit{ et } E_2^c \textit{ sont indépendants;} \\
&E_1^c \textit{ et } E_2^c \textit{ sont indépendants.}
\end{aligned}$$

Preuve. (a) Supposons E_1 et E_2 des événements indépendants. Étant donné que $E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)$ et que $(E_1 \cap E_2)$ et $(E_1 \cap E_2^c)$ sont des événements mutuellement exclusifs, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(E_1) &= \Pr(E_1 \cap E_2) + \Pr(E_1 \cap E_2^c) \\
&= \Pr(E_1)\Pr(E_2) + \Pr(E_1 \cap E_2^c)
\end{aligned}$$

ou de façon équivalente

$$\begin{aligned}
\Pr(E_1 \cap E_2^c) &= \Pr(E_1) - \Pr(E_1)\Pr(E_2) \\
&= \Pr(E_1)\,(1 - \Pr(E_2)) \\
&= \Pr(E_1)\Pr(E_2^c).
\end{aligned}$$

(b) Supposons E_1 et E_2 des événements indépendants. Étant donné que $E_1^c = (E_1^c \cap E_2) \cup (E_1^c \cap E_2^c)$ et que $(E_1^c \cap E_2)$ et $(E_1^c \cap E_2^c)$ sont des événements mutuellement exclusifs, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(E_1^c) &= \Pr(E_1^c \cap E_2) + \Pr(E_1^c \cap E_2^c) \\
&= \Pr(E_1^c)\Pr(E_2) + \Pr(E_1^c \cap E_2^c)
\end{aligned}$$

car selon (a) E_1^c et E_2 sont indépendants si E_1 et E_2 sont indépendants. On a donc

$$\begin{aligned}
\Pr(E_1^c \cap E_2^c) &= \Pr(E_1^c) - \Pr(E_1^c)\Pr(E_2) \\
&= \Pr(E_1^c)\,(1 - \Pr(E_2)) \\
&= \Pr(E_1^c)\Pr(E_2^c).
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.19 *Si l'événement E_1 est indépendant de l'événement E_2, alors la connaissance de la réalisation ou de la non-réalisation de E_2 n'a aucun impact sur les chances de réalisation ou de non-réalisation de E_1, c'est-à-dire $\Pr(E_1 \,|E_2\,) = \Pr(E_1 \,|E_2^c\,) = \Pr(E_1)$, $\Pr(E_1^c \,|E_2\,) = \Pr(E_1^c \,|E_2^c\,) = \Pr(E_1^c))$ et vice-versa.*

Remarque 3.20 *Si E_1 et E_2 sont des événements mutuellements exclusifs et $\Pr(E_1) > 0$, $\Pr(E_2) > 0$, alors E_1 et E_2 sont des événements **dépendants** car si un des deux événements se produit, alors les chances que l'autre événement se produise sont nulles.*

Proposition 3.21 ***(Généralisation de la Proposition 3.16)*** *Les événements $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ sont mutuellement indépendants si, pour toute combinaison $1 \leq i < j < k < ... < n$, les relations suivantes sont vérifiées*

$$\begin{aligned}
\Pr(E_i \cap E_j) &= \Pr(E_i)\Pr(E_j); \\
\Pr(E_i \cap E_j \cap E_k) &= \Pr(E_i)\Pr(E_j)\Pr(E_k); \\
&\downarrow \\
\Pr(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) &= \Pr(E_1)\Pr(E_2)...\Pr(E_n).
\end{aligned}$$

En d'autres mots, $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ sont des événements mutuellement indépendants si tous les sous-ensembles de $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ sont des événements mutuellement indépendants. Pour le cas particulier $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(E_1 \cap E_2 \cap E_3) &= \Pr(E_1)\Pr(E_2)\Pr(E_3); \\
\Pr(E_1 \cap E_2) &= \Pr(E_1)\Pr(E_2); \\
\Pr(E_1 \cap E_3) &= \Pr(E_1)\Pr(E_3); \\
\Pr(E_2 \cap E_3) &= \Pr(E_2)\Pr(E_3).
\end{aligned}$$

Remarque 3.22 *Si E_1, E_2,..., E_n sont des événements indépendants alors chaque événement E_i ($i = 1, ..., n$) est indépendant de tout événement formé à partir d'un sous-ensemble des événements $E_1, E_2, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n$. Par exemple, l'événement E_1 est indépendant de l'événement $\bigcup\limits_{i=2}^{n} E_i$.*

Remarque 3.23 $\Pr\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \Pr(E_i)$ *n'implique pas nécessairement que les événements E_i ($i = 1, ..., n$) sont mutuellement indépendants.*

Remarque 3.24 $\Pr(E_i \cap E_j) = \Pr(E_i)\Pr(E_j)$, $\forall(i, j)$ *où $i \neq j$ n'implique pas nécessairement que les événements E_i ($i = 1, ..., n$) sont mutuellement indépendants.*

Les deux prochains exemples illustrent bien ces deux dernières remarques.

Exemple 3.25 *On lance un dé régulier et on note le nombre obtenu. Soit les événements suivants:*

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{\textit{Obtenir un nombre pair}\}; \\
E_2 &: \{\textit{Obtenir un nombre impair}\}; \\
E_3 &: \{\textit{Obtenir un nombre supérieur à } 6\}.
\end{aligned}$$

Est-ce que ces événements sont mutuellement indépendants?

Exemple 3.26 *On lance deux dés réguliers et on note les résultats obtenus. Soit les événements suivants:*

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{\textit{Obtenir un nombre impair sur le 1er dé}\}; \\
E_2 &= \{\textit{Obtenir un nombre impair sur le 2ième dé}\}; \\
E_3 &= \{\textit{Obtenir un nombre impair pour la somme des 2 résultats}\}.
\end{aligned}$$

Est-ce que ces événements sont mutuellement indépendants?

Solution.

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,1),(3,2),(3,3), \\ (3,4),(3,5),(3,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \end{array} \right\}; \\
E_2 &= \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3), \\ (1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5), \end{array} \right\}; \\
E_3 &= \left\{ \begin{array}{c} (1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6), \\ (4,1),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5) \end{array} \right\}; \\
(E_1 \cap E_2) &= \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}; \\
(E_1 \cap E_3) &= \{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}; \\
(E_2 \cap E_3) &= \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(E_1 \cap E_2) &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ et } \Pr(E_1)\Pr(E_2) = \left(\frac{18}{36}\right)\left(\frac{18}{36}\right) = \frac{1}{4}; \\
\Pr(E_1 \cap E_3) &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ et } \Pr(E_1)\Pr(E_3) = \left(\frac{18}{36}\right)\left(\frac{18}{36}\right) = \frac{1}{4}; \\
\Pr(E_2 \cap E_3) &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ et } \Pr(E_2)\Pr(E_3) = \left(\frac{18}{36}\right)\left(\frac{18}{36}\right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Toutefois, on a

$$
\begin{aligned}
\Pr(E_1 \cap E_2 \cap E_3) &= \Pr(\varnothing) = 0 \\
\Pr(E_1)\Pr(E_2)\Pr(E_3) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \\
&\Longrightarrow \Pr(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \neq \Pr(E_1)\Pr(E_2)\Pr(E_3).
\end{aligned}
$$

Les événements E_1, E_2 et E_3 ne sont donc pas mutuellement indépendants. ∎