Act-2001 Introduction à l'actuariat 2

Notions supplémentaires

Étienne Marceau

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

A2019: Série no1

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières I

Introduction

Introduction

Objectifs :

- définir l'espérance tronquée ;
- définir la fonction stop-loss ;
- définir la Transformée de Laplace-Stieltjes ;
- définir et appliquer les propriétés de la fonction quantile ;
- démontrer et appliquer le Théorème de la fonction quantile ;

Source principale : [Cossette and Marceau, 2019]

Espérances tronquées

Espérances tronquées

Définition 1

Soit une v.a. X *avec* $E[X] < \infty$*. Les espérances tronquées sont définies par*

$$E[X \times 1_{\{X>d\}}] = \int_d^{\infty} x \mathrm{d}F_X(x),$$

et

$$E[X \times 1_{\{X\leq d\}}] = \int_{-\infty}^{d} x \mathrm{d}F_X(x),$$

où $d \in \mathbb{R}$*.*

Relation :

$$E[X \times 1_{\{X>d\}}] + E[X \times 1_{\{X\leq d\}}] = E[X \times (1_{\{X>d\}} + 1_{\{X\leq d\}})] = E[X].$$

Espérance tronquées

Lorsque X est une v.a. continue, les expressions de $E[X \times 1_{\{X>d\}}]$ et $E[X \times 1_{\{X\leq d\}}]$ deviennent

$$E[X \times 1_{\{X>d\}}] = \int_d^\infty x f_X(x) \mathrm{d}x,$$

et

$$E[X \times 1_{\{X\leq d\}}] = \int_{-\infty}^d x f_X(x) \mathrm{d}x,$$

où $d \in \mathbb{R}$.

Exemple 1

Soit $X \sim Exp(\beta)$ *dont la fonction de densité est* $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

[En classe]

Exemple 2

Soit la v.a. continue positive $X \sim Ga(\alpha,\beta)$ *où*

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x},$$

pour $x \in \mathbb{R}^+$*.*
De plus,

$$F_X(x) = H(x;\alpha,\beta)$$

et

$$\overline{F}(x) = \overline{H}(x;\alpha,\beta),$$

pour $x \in \mathbb{R}^+$*. [En classe]*

Prime stop-loss

Prime *stop-loss*

La prime *stop-loss*, appélée aussi fonction *stop-loss*, est fréquemment utilisée en actuariat

Définition 2

Soit une v.a. X *avec* $E[X] < \infty$.
La fonction stop-loss $\pi_X(d)$ *correspond à*

$$\pi_X(d) = E[\max(X - d; 0)], \tag{1}$$

où $d \in \mathbb{R}$.

Prime *stop-loss*

Relation : Soit une v.a. positive X avec $E[X] < \infty$.

$$\pi_X(0) = E[X].$$

Prime stop-loss et espérance tronquée : Comme

$$\max(X - d; 0) = X \times 1_{\{X>d\}} - d \times 1_{\{X>d\}},$$

on déduit

$$\pi_X(d) = E[X \times 1_{\{X>d\}}] - d \times \overline{F}_X(d),$$

où $d \in \mathbb{R}$.

Prime *stop-loss*

Si la v.a. X obéit à une loi continue, (1) devient

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} (x - d) f_X(x) \, \mathrm{d}x. \tag{2}$$

De plus, si la v.a. X est continue positive, l'expression en (2) pour la fonction *stop-loss* devient

$$\pi_X(d) = \int_d^{\infty} \overline{F}_X(x) \, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Preuve de (3): [En classe]

Exemple 3

Soit la v.a. $X \sim Exp(\beta)$.

[En classe]

Exemple 4

Soit la v.a. $X \sim Ga\,(\alpha,\beta)$.

[En classe]

Prime *stop-loss*

Si la v.a. $X = Kh$ ($h \in \mathbb{R}^+$) où K obéit à une loi discrète dont le support est $\mathbb{N}$ et si $d = hk_0$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$, on a

$$\pi_X(d) = \sum_{k=0}^{\infty} \max(kh - k_0 h; 0) f_X(kh) = h \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \overline{F}_X(kh).$$

Fonction quantile

Fonction quantile

Les définitions de plusieurs mesures de risque reposent en grande partie sur la fonction quantile.

On débute avec la définition de base de la fonction quantile.

Définition 3

Soit la v.a. X avec fonction de répartition F_X. On définit la fonction inverse F_X^{-1} de F_X par

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\},$$

pour $u \in (0,1)$.
La fonction quantile de X correspond à la fonction inverse F_X^{-1}.

Fonction quantile

Si la v.a. X est continue, alors F_X^{-1} correspond à la seule valeur x_u telle que $F_X(x_u) = u$.

Pour certaines lois continues, il est possible d'obtenir une expression fermée pour la fonction quantile.

Autrement, on a recours à des méthodes d'optimisation numérique pour évaluer la valeur $F_X^{-1}(u)$ pour une valeur fixée $u \in (0,1)$.

Fonction quantile

Exemple 5

Soit la v.a. $X \sim Exp(\beta)$ *dont la fonction de répartition est* $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$, $x \geq 0$.

[En classe]

□

Exemple 6

Soit X une v.a. discrète.

[En classe]

$\square$

Théorème de la fonction quantile

Théorème de la fonction quantile

Théorème 1

Théorème de la fonction quantile

Soit une v.a. X *avec fonction de répartition* F_X *et fonction quantile* F_X^{-1}*.*

Soit une v.a. $U \sim U(0,1)$*.*

Alors, la fonction de répartition de $F_X^{-1}(U)$ *est* F_X*, i.e.,* $F_X^{-1}(U) \sim X$*.*

Interprétation : [En classe]

Preuve : [En classe]

Théorème de la fonction quantile

On fait la preuve en deux étapes.

Étape no1 - v.a. continues

[En classe]

Étape no2 - cas général

[En classe]

Théorème de la fonction quantile - Représentation

Théorème de la fonction quantile - Représentation

Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F et une fonction quantile F^{-1}.

Soit une v.a. $U \sim Unif(0,1)$.

Selon ce théorème, on peut représenter la v.a. X comme suit :

$$X = F^{-1}(U). \tag{4}$$

La représentation en (4) est fort utile (p.ex. : simulation MC).

Théorème de la fonction quantile et espérance

Théorème de la fonction quantile et espérance

La proposition suivante découle du Théorème de la fonction quantile.

Proposition 1

Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F_X, fonction quantile F_X^{-1} et dont l'espérance existe.
Soit une v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$.
Alors, on a

$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = E\left[F_X^{-1}(U)\right] = E[X]. \tag{5}$$

Preuve : en classe.

Théorème de la fonction quantile et espérance

On établit une relation entre la fonction quantile et la fonction *stop-loss*.

Proposition 2

Soit une v.a. X *avec une fonction de répartition* F_X*, fonction quantile* F_X^{-1} *et dont l'espérance existe.*
Soit une v.a. $U \sim Unif(0,1)$*.*
Alors, on a

$$\int_{\kappa}^{1} F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = \pi_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right) + F_X^{-1}(\kappa)(1-\kappa), \tag{6}$$

pour $\kappa \in (0,1)$*.*

Preuve : en classe.

Théorème de la fonction quantile et espérance

On établit une relation entre la fonction quantile et l'espérance tronquée.

Proposition 3

Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F_X, une fonction quantile F_X^{-1} et dont l'espérance existe.
Alors, on a

$$\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = E\left[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(\kappa)\}}\right] + F_X^{-1}(\kappa)\left(F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right) - \kappa\right) \tag{7}$$

$$\int_0^\kappa F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = E\left[X \times 1_{\{X \leq F_X^{-1}(\kappa)\}}\right] + F_X^{-1}(\kappa)\left(\kappa - F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right)\right), \tag{8}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

Preuve : en classe.

Les deuxièmes termes en (7) et (8) permettent de tenir compte des sauts éventuels dans la distribution de X. Si la v.a. X est continue, on a le résultat suivant.

Corollary 4

Lorsque la v.a. X est continue, $F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right) = \kappa$ et (7) et (8) deviennent

$$\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = E\left[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(\kappa)\}}\right] \tag{9}$$

$$\int_0^\kappa F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = E\left[X \times 1_{\{X \le F_X^{-1}(\kappa)\}}\right], \tag{10}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

Preuve : en classe.

Transformée de Laplace-Stieltjes

Transformée de Laplace-Stieltjes

Soit une v.a. positive X. La transformée de Laplace-Stielltjes (TLS) d'une v.a. X est définie par

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right], \text{ pour } t > 0,$$

en supposant que l'espérance existe.

Puisque la v.a. X est positive et puisque $t > 0$, la TLS existe pour toutes les distributions dicrètes, continues ou mixtes à support de valeurs positives.

En effet, comme $\mathrm{e}^{-tX} \leq 1$, pour tout $t > 0$, alors

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] \leq 1, \text{ pour } t > 0.$$

Transformée de Laplace-Stieltjes

Si X est une v.a. discrète avec support fini ou dénombrable, l'expression de la TLS de X est

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{-tx_i} f_X(x_i)$$

ou

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx_i} f_X(x_i), \text{ pour } t > 0.$$

Transformée de Laplace-Stieltjes

Dans le cas d'une v.a. continue X, on a

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[e^{-tX}\right] = \int_0^\infty e^{-tx} f_X(x)\,dx, \text{ pour } t > 0,$$

si l'intégrale existe pour des valeurs de $t \neq 0$.

Transformée de Laplace-Stieltjes

Exemples : En classe.

Logiciel R

Logiciel R

Lois continues paramétriques et logiciel R :

- Loi uniforme : `dunif()`, `punif()`, `qunif()`, `runif()` ;
- Loi exponentielle : `dexp()`, `pexp()`, `qexp()`, `rexp()` ;
- Loi gamma : `dgamma()`, `pgamma()`, `qgamma()`, `rgamma()` ;
- Loi lognormale : `dlnorm()`, `plnorm()`, `qlnorm()`, `rlorm()`.

Lois discrètes paramétriques et logiciel R :

- Loi Poisson : `dpois()`, `ppois()`, `qpois()`, `rpois()` ;
- Loi binomiale négative : `dnbinom()`, `pnbinom()`, `qnbinom()`, `rnbinom()`.

Références

Références I

Cossette, H. and Marceau, E. (2019).
Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives.
Document de référence.