Chapitre III : Contrats d'assurance et de rente sur plusieurs têtes

- On poursuit l'analyse effectuée dans les chapitres précédents mais en supposant des statuts composés de plusieurs individus.
- Le paiement de la prestation ou de la rente dépend des durées de vie des assurés (exemple : un couple) du contrat.
- Par exemple, on va déterminer la prime unique nette pour un contrat de rente émis à un couple de deux individus dont le montant de rente est versé jusqu'au premier (ou dernier) décès parmi les deux.

Lois conjointes pour deux variables aléatoires

- Soit T_x et T_y des variables aléatoires représentant respectivement les temps de vie futures d'individus d'âges (x) et (y).
- On définit respectivement la fonction de densité et la fonction de répartition du couple (x, y) par f_{T_x,T_y} et F_{T_x,T_y}.
- Alors,

$$\begin{aligned} F_{T_x,T_y}(t,s) &= P[T_x \leq t, T_y \leq s] \\ &= \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{s} f_{T_x,T_y}(u,v)dvdu \end{aligned}$$

- Si T_x et T_y sont indépendantes, puis

$$F_{T_x,T_y}(t,s) = P[T_x \leq t]P[T_y \leq s] = F_{T_x}(t)F_{T_y}(s).$$

- Donc,

$$f_{T_x,T_y}(s,t) = \frac{\partial^2 F_{T_x,T_y}(s,t)}{\partial s \partial t}.$$

  - Si T_x et T_y sont indépendantes, puis

$$f_{T_x,T_y}(t,s) = f_{T_x}(t) f_{T_y}(s).$$

- La fonction de survie du couple (x, y) est

$$S_{T_x,T_y}(t,s) = P[T_x > t, T_y > s].$$

  - Si T_x et T_y sont indépendantes, puis

$$S_{T_x,T_y}(t,s) = P[T_x > t]P[T_y > s] = S_{T_x}(t) S_{T_y}(s).$$

- La covariance entre le temps de vie futures des individus (x) et (y) est

$$Cov[T_x, T_y] = E[T_xT_y] - E[T_x]E[T_y],$$

- où

$$E[T_xT_y] = \int_{t=0}^{\infty}\int_{s=0}^{\infty} t\ s\, f_{T_x,T_y}(t,s)dsdt.$$

  - Alors, si T_x et T_y sont indépendantes, puis

$$Cov[T_x, T_y] = E[T_x]E[T_y] - E[T_x]E[T_y] = 0.$$

Exemple 3.1

Soit la fonction de densité du couple (x, y) définie par

$$f_{T_x,T_y}(t,s) = \frac{1}{64}(t+s), \quad 0 < t < 4, \ 0 < s < 4.$$

a) Démontrer que T_x et T_y ne sont pas indépendantes.
b) Calculer $Cov(T_x, T_y)$.
c) Calculer $P[T_x > T_y + 1]$.

Statut conjoint et dernier survivant

- Les contrats d'assurance ou de rentes d'un couple (x, y) sont souvent définis selon les deux statuts suivantes :
  - Statut conjoint (ou premier décès) ;
  - Statut dernier survivant (ou dernier décès) .

Statut conjoint

- On dénote le statut conjoint (ou plus communément appelé, le statut premier décès) par le symboles actuariels xy, (xy) ou $x : y$.
- Ce statut demeure actif tant que (x) et (y) sont vivants.
- En d'autre mots, le statut (xy) cesse au premier décès parmi (x) et (y).
- On note par la v. a. T_{xy} le temps de déchéance de ce statut qui correspond à

$$T_{xy} = min\{T_x, T_y\}.$$

- Donc, la fonction de survie de T_{xy} est

$${}_tp_{xy} = S_{T_{xy}}(t) = \mathbb{P}[min\{T_x, T_y\} > t] = \mathbb{P}[T_x > t, T_y > t].$$

- La fonction de répartition de T_{xy} est

$$_tq_{xy} = F_{T_{x,y}}(t) = 1 -_t p_{xy} = \mathbb{P}[min\{T_x, T_y\} \leq t].$$

Statut dernier survivant

- On dénote le statut dernier survivant (ou le statut dernier décès) par le symboles actuariels $\overline{xy}$, $(\overline{xy})$ ou $\overline{x:y}$.
- On note par la v. a. $T_{\overline{xy}}$ le temps de déchéance de ce statut qui correspond à

$$T_{\overline{xy}} = max\{T_x, T_y\}$$

- Donc, la fonction de répartition de $T_{\overline{xy}}$ est

$$_tq_{\overline{xy}} = F_{T_{\overline{xy}}}(t) = \mathbb{P}[max\{T_x, T_y\} \leq t] = \mathbb{P}[T_x \leq t, T_y \leq t].$$

- La fonction de survie de $T_{\overline{xy}}$ est

$$_tp_{\overline{xy}} = S_{T_{\overline{xy}}}(t) = \mathbb{P}[max\{T_x, T_y\} > t] = 1 -_t q_{\overline{xy}}.$$

- Donc,

$$\begin{aligned} {}_tp_{xy} &= \mathbb{P}[T_x > t, T_y > t]; \\ {}_tq_{\overline{xy}} &= \mathbb{P}[T_x \leq t, T_y \leq t]. \end{aligned}$$

- Puis,

$$\begin{aligned} {}_tq_{xy} &= 1 -_t p_{xy} = \mathbb{P}[min\{T_x, T_y\} \leq t] \\ &= \mathbb{P}[T_x \leq t \cup T_y \leq t] \\ &= \mathbb{P}[T_x \leq t] + \mathbb{P}[T_y \leq t] - \mathbb{P}[T_x \leq t \cap T_y \leq t] \\ &= {}_tq_x +_t q_y -_t q_{\overline{xy}}, \end{aligned}$$

- et, d'une manière similaire,

$$ {}_tp_{\overline{xy}} =_t p_x +_t p_y -_t p_{xy}. $$

- Relations entre T_x et T_y :

$$T_{xy} + T_{\overline{xy}} = T_x + T_y;$$
$$T_{xy} \times T_{\overline{xy}} = T_x \times T_y;$$
$$a^{T_{xy}} + a^{T_{\overline{xy}}} = a^{T_x} + a^{T_y},$$

  pour chaque $a > 0$.
- (Pour chaque cas, T_{xy} est égale à T_x ou à T_y, et alors $T_{\overline{xy}}$ est égale à l'autre.)

- Alors,
- $T_{xy} + T_{\overline{xy}} = T_x + T_y.$
- ${}_tq_{xy} +_t q_{\overline{xy}} =_t q_x +_t q_y.$
- ${}_tp_{xy} +_t p_{\overline{xy}} =_t p_x +_t p_y.$
- $\mathring{e}_{xy} + \mathring{e}_{\overline{xy}} = \mathring{e}_x + \mathring{e}_y.$
- $\bar{A}_{xy} + \bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y.$
- $\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y.$

D'autres notations

- ${}_{u|t}q_{xy} = \mathbb{P}[u < T_{xy} \leq u + t] = \mathbb{P}[\ldots]$
- ${}_tq^1_{xy} = \mathbb{P}[T_x \leq t, T_x < T_y] = \mathbb{P}[\ldots]$
- ${}_tq^2_{xy} = \mathbb{P}[T_y < T_x \leq t] = \mathbb{P}[\ldots]$
- ${}_\infty q^1_{xy} = \mathbb{P}[T_x < T_y]$.

- La force des mortalité de T_{xy} et la force de mortalité de $T_{\overline{xy}}$:

$$\mu_{xy}(t) = \frac{f_{T_{xy}}(t)}{S_{T_{xy}}(t)} = -\frac{d}{dt}\ln({}_tp_{xy});$$

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{f_{T_{\overline{xy}}}(t)}{S_{T_{\overline{xy}}}(t)} = -\frac{d}{dt}\ln({}_tp_{\overline{xy}}).$$

Si T_x et T_y sont indépendantes, puis

- ${}_sp_{xy} = ({}_sp_x)({}_sp_y)$ et ${}_tq_{\overline{xy}} = ({}_sq_x)({}_sq_y)$;
- ${}_tq_{xy} = {}_tq_x + {}_tq_y - ({}_tq_x)({}_tq_y)$;
- $\mu_{xy}(t) = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}$.
- ${}_tq^1_{xy} = \int_0^t ({}_sp_x)({}_sp_y)\mu_{x+s}ds$;
- ${}_tq^2_{xy} = \int_0^t ({}_sp_x)({}_sq_y)\mu_{x+s}ds$;

Exemple 3.2

Soit le couple, Marie âgée de 60 ans et Marcel âgée de 65 ans avec temps de survies indépendantes. On considère que le temps de survie pour chaque personne suit la distribution DeMoivre($\omega = 100$). La force d'intérêt est $\delta = 0.05$.

a) Trouver la fonction de survie du statut conjoint ${}_tp_{60:65}$ et sa force de mortalité $\mu_{60:65}(t)$.

b) Trouver la fonction de densité du statut conjoint $f_{T_{60:65}}(t)$.

c) Trouver $\mathring{e}_{60:65}$, $\bar{A}_{60:65}$ et $\bar{a}_{60:65}$.

d) Trouver la fonction de répartition du statut dernier survivant ${}_tq_{\overline{60:65}}$ et l'espérance du temps de dernier décès $\mathring{e}_{\overline{60:65}}$.

e) Calculer $\mathbb{P}[$Marcel décède avant Marie$]$.

f) Calculer $\mathbb{P}[$ Marcel décède avant temps 20 et après Marie$]$.

Exemple 3.3

Soit un couple (x, y) avec temps de survies indépendantes. On dispose de l'information suivante :

$\mu_{x+t} = 0.03,\ t > 0; \quad \mu_{y+t} = 0.02,\ t > 0;$
$\delta = 0.05$.

Calculer $\bar{a}_{xy:\overline{10}|}$ et $\bar{a}_{\overline{xy}:\overline{10}|}$.

Exemple 3.4

(SOA) Suppose (x) and (y) have independent lives, and exponential with (constant) rates $\mu_{x+t} = \mu_1$ and $\mu_{y+t} = \mu_2$, respectively.
a) Find the probability that (x) dies first.
b) Find the probability that (x) dies first and within 30 years.

Exemple 3.5

Sachant que ${}_{10}p_x = 0.9$, ${}_{10}p_y = 0.85$ et que T_x et T_y sont indépendentes, calculer :

a) La probabilité que le premier décès parmi (x) et (y) se produit après temps 10 ;

b) La probabilité que au plus un décès parmi (x) et (y) se produit après temps 10 ;

c) La probabilité que au moins un décès parmi (x) et (y) se produit après temps 10 ;

d) La probabilité que le second décès parmi (x) et (y) se produit après temps 10 ;

e) La probabilité que un seul décès parmi (x) et (y) se produit après temps 10.

Remarque 3.1

Soit un contrat d'assurance vie entière émis à (x,y). La prestation de décès, d'un montant de $1\$$, est versé au premier décès parmi (x) et (y). Selon le principe d'équivalence, la prime unique nette pour ce contrat est donnée par

$$PUN = \bar{A}_{xy} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t}({}_tp_{xy})(\mu_{x+t:y+t})dt$$

Si T_x et T_y sont indépendantes, on obtient

$$\bar{A}_{xy} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t}({}_tp_x)({}_tp_y)[\mu_x(t)+\mu_y(t)]dt.$$

- La force de mortalité de $T_{\overline{xy}}$:

$$\begin{aligned}
\mu_{\overline{xy}}(t) &= \frac{f_{T_{\overline{xy}}}(t)}{S_{T_{\overline{xy}}}(t)} \\
&= \frac{f_{T_x}(t) + f_{T_y}(t) - f_{T_{xy}}(t)}{{}_tp_{\overline{xy}}} \\
&= \frac{({}_tp_x)(\mu_{x+t}) + ({}_tp_y)(\mu_{y+t}) - ({}_tp_{xy})(\mu_{x+t:y+t})}{{}_tp_{\overline{xy}}}
\end{aligned}$$

- Alors, la densité de $T_{\overline{xy}}$ devient :

$$\begin{aligned}
f_{T_{\overline{xy}}}(t) &= f_{T_x}(t) + f_{T_y}(t) - f_{T_{xy}}(t) \\
&= ({}_tp_x)(\mu_{x+t}) + ({}_tp_y)(\mu_{y+t}) - ({}_tp_{xy})(\mu_{x+t:y+t}).
\end{aligned}$$

Remarque 3.2

Soit un contrat d'assurance vie entière émis au statut (x, y). La prestation de décès, d'un montant de $1\$$, est versée au moment du second décès parmi (x) et (y). Selon le principe d'équivalence, la prime unique nette pour ce contrat est donnée par

$$PUN = \bar{A}_{\overline{xy}} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t}({}_tp_{\overline{xy}})(\mu_{\overline{x+t:y+t}})dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_{\overline{xy}}}(t)dt.$$

Since $f_{T_{\overline{xy}}}(t) = f_{T_x}(t) + f_{T_y}(t) - f_{T_{xy}}(t)$ on obtient

$$\bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{xy}.$$

Remarque 3.3

Soit un contrat d'assurance vie temporaire n années émis à (x, y). La prestation de décès, d'un montant de $1\$$, est versée au moment du second décès parmi (x) et (y). Selon le principe d'équivalence, la prime unique nette pour ce contrat est donnée par

$$PUN = \ldots$$

Remarque 3.4

Soit un contrat de rente continue vie entière émis à (x, y). Une rente de $1\$$ est versée jusqu'au premier décès parmi (x) et (y). Selon le principe d'équivalence, la prime unique nette pour ce contrat est donnée par

$$PUN = \bar{a}_{xy} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_tp_{xy} dt.$$

Aussi,

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1 - \bar{A}_{xy}}{\delta}.$$

Remarque 3.5

Soit un contrat de rente continue vie entière émis à (x, y). Une rente de $1\$$ est versée jusqu'au second décès parmi (x) et (y). Selon le principe d'équivalence, la prime unique nette pour ce contrat est donnée par

$$\begin{aligned} PUN = \bar{a}_{\overline{xy}} &= \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_{\overline{xy}} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{x:y}) dt \\ &= \bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \frac{1 - \bar{A}_{\overline{xy}}}{\delta}.$$

Le cas discret

- La valeur présente des coûts d'un contrat d'assurance ou de rente émis à (xy) (à $(\overline{xy})$) peut se ramener à une fonction de $K(xy)$ (à $K(\overline{xy})$).
- Donc,

$$\begin{aligned} E[g(K(xy))] &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) P[K(xy) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \ {}_{k|}q_{xy}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[g(K(\overline{xy}))] &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) P[K(\overline{xy}) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \ {}_{k|}q_{\overline{xy}}. \end{aligned}$$

- **Remarque :**

$$\begin{aligned} {}_{k|}q_{xy} &= {}_{k+1}q_{xy} - {}_{k}q_{xy} \\ &= {}_{k}p_{xy} - {}_{k+1}p_{xy} \\ &= ({}_{k}p_{xy})(q_{x+k:y+k}) \end{aligned}$$

Attention :

$$\begin{aligned} {}_{k|}q_{\overline{xy}} &= {}_{k+1}q_{\overline{xy}} - {}_{k}q_{\overline{xy}} \\ &= {}_{k}p_{\overline{xy}} - {}_{k+1}p_{\overline{xy}} \\ &\neq ({}_{k}p_{\overline{xy}})(q_{\overline{x+k:y+k}}) \end{aligned}$$

- parce que :

$$ {}_{m+n}p_{xy} = \left({}_{m}p_{xy}\right)\left({}_{n}p_{x+m:y+m}\right), $$

mais

$$ {}_{m+n}p_{\overline{xy}} \neq \left({}_{m}p_{\overline{xy}}\right)\left({}_{n}p_{\overline{x+m:y+m}}\right). $$

Remarque 3.6

Soit un contrat d'assurance vie entière émis au statut (x, y). La prestation de décès, d'un montant de $1\$$, est versée à la fin de l'année du premier décès parmi (x) et (y). Selon le principe d'équivalence, la prime unique nette pour ce contrat est donnée par

$$\begin{aligned} PUN = E[v^{K(xy)+1}] = A_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P[K(xy) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_{k|}q_{xy} \end{aligned}$$

Remarque 3.7

Soit un contrat d'assurance vie entière émis au statut $(\overline{xy})$. La prestation de décès, d'un montant de $1\$$, est versée à la fin de l'année du second décès parmi (x) et (y). Selon le principe d'équivalence, la prime unique nette pour ce contrat est donnée par

$$\begin{aligned} E[v^{K(\overline{xy})+1}] = A_{\overline{xy}} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P[K(\overline{xy}) = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_{k|}q_{\overline{xy}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left({}_{k|}q_x + {}_{k|}q_y - {}_{k|}q_{xy}\right) \\ &= A_x + A_y - A_{xy}. \end{aligned}$$

Remarque 3.8

Soit un contrat de rente discret vie entière émis à (x, y). Une rente de $1\$$ est versée jusqu'au premier décès parmi (x) et (y). Selon le principe d'équivalence, la prime unique nette pour ce contrat est donnée par

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{xy} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 - v^{k+1}}{d} \right) {}_{k|}q_{xy} \\
&= \frac{1 - A_{xy}}{d} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{xy}.
\end{aligned}
$$

Remarque 3.9

Soit un contrat de rente discret vie entière émis à (x, y). Une rente de $1\$$ est versée jusqu'au second décès parmi (x) et (y). Selon le principe d'équivalence, la prime unique nette pour ce contrat est donnée par

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{xy}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 - v^{k+1}}{d} \right) {}_{k|}q_{\overline{xy}} \\
&= \frac{1 - A_{\overline{xy}}}{d} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_{\overline{xy}} \\
&= \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.6

Future lifetime for independent lives (30) and (40) follows the Illustrative Life Table with $i = 0.06$.
Find the premium for a (discrete) whole life policy of $\$1,000$ based on the remaining life :
a) of the first death (joint life status) ;
b) of the second death (last survivor status).

Exemple 3.7

Future lifetime for independent lives (30) and (40) follows the Illustrative Life Table with $i = 0.06$.
a) Find the premium for a discrete 20-year temporary policy of $\$1,000$ based on the remaining life of the first death (joint life status) ;
b) Give the formulas for finding the premium for a discrete 20-year temporary policy of $\$1,000$ based on the second death (last survivor status) .

Facteurs actuariels $\bar{A}^{1}_{xy}$ et $\bar{A}^{\;2}_{xy}$

- Soit $\bar{A}^{1}_{xy}$ la prime unique nette d'un contrat d'assurance vie entière continue versant un dollar au décès de (x) s'il advient avant celui de (y). Selon le principe d'équivalence

$$\bar{A}^{1}_{xy} = E[v^{T_x} \times 1_{\{T_x < T_y\}}].$$

- Donc,

$$\bar{A}^{1}_{xy} = \int_{t=0}^{\infty} \int_{s=t}^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_x,T_y}(t,s) ds dt.$$

- Si les vies futures de (x) et (y) sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{\,1}_{xy} &= \int_{t=0}^{\infty}\int_{s=t}^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_x,T_y}(t,s)\,ds\,dt \\
&= \int_{t=0}^{\infty}\int_{s=t}^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_x}(t) f_{T_y}(s)\,ds\,dt \\
&= \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t}({}_tp_x)({}_tp_y)(\mu_{x+t})\,dt.
\end{aligned}$$

- Soit $\bar{A}_{xy}^{\,2}$ la prime unique nette d'un contrat d'assurance vie entière continue versant un dollar au décès de (y) s'il advient après celui de (x). Selon le principe d'équivalence

$$\bar{A}_{xy}^{\,2} = E[v^{T_y} \times 1_{\{T_x < T_y\}}].$$

- Donc,

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{xy}^{\,2} &= \int_{t=0}^{\infty} \int_{s=t}^{\infty} e^{-\delta s} f_{T_x,T_y}(t,s) ds dt \\
&= \int_{s=0}^{\infty} \int_{t=0}^{s} e^{-\delta s} f_{T_x,T_y}(t,s) dt ds
\end{aligned}$$

- Si les vies futures de (x) et (y) sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{\;2}_{xy} &= \int_{s=0}^{\infty}\int_{t=0}^{s} e^{-\delta s} f_{T_x,T_y}(t,s)\,dt\,ds \\
&= \int_{s=0}^{\infty}\int_{t=0}^{s} e^{-\delta s} f_{T_x}(t) f_{T_y}(s)\,dt\,ds \\
&= \int_{s=0}^{\infty} e^{-\delta s}({}_sq_x)({}_sp_y)(\mu_{y+s})\,ds.
\end{aligned}$$

- Si les vies futures de (x) et (y) sont indépendantes,

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{xy}^{\;2} &= \int_{t=0}^{\infty}\int_{s=t}^{\infty} e^{-\delta s} f_{T_x,T_y}(t,s)\,ds\,dt \\
&= \int_{t=0}^{\infty}\int_{s=t}^{\infty} e^{-\delta s} f_{T_x}(t) f_{T_y}(s)\,ds\,dt \\
&= \int_{t=0}^{\infty} f_{T_x}(t) \int_{s=t}^{\infty} e^{-\delta s} f_{T_y}(s)\,ds\,dt \\
&= \int_{t=0}^{\infty} f_{T_x}(t)\, {}_tE_y \bar{A}_{y+t}\,dt \\
&= \int^{\infty} e^{-\delta t} \bar{A}_{y+t} ({}_tp_{x:y})(\mu_{x+t})\,dt
\end{aligned}
$$

- Relations générales entre les facteurs d'assurance :

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{xy} &= \bar{A}^{1}_{xy} + \bar{A}_{xy}^{\;\;1} \\
\bar{A}_{\overline{xy}} &= \bar{A}^{2}_{xy} + \bar{A}_{xy}^{\;\;2} \\
\bar{A}_{x} &= \bar{A}^{1}_{xy} + \bar{A}^{2}_{xy}.
\end{aligned}
$$

Exemple 3.8

Soit un contrat d'assurance vie entière émis à (x, y). On suppose que la prestation versées sont définies de la façon suivante :
- $100\$$ au décès de (x) si (x) décède avant (y) ;
- $50\$$ au décès de (x) si (x) décède après (y) ;
- $80\$$ au décès de (y) si (y) décède avant (x) ;
- $40\$$ au décès de (y) si (y) décède après (x).

Selon le principe d'équivalence, la prime unique nette pour ce contrat est donnée par (à faire en classe) :

Exemple 3.9

Soit un contrat d'assurance vie entière émis à (x, y). Les vies futures de (x) et (y) sont indépendantes et suit la distribution DeMoivre avec $\omega = 50$ et la force d'intérêt est $\delta = 5\%$.
(i) Considérons un contrat d'assurance vie entière continue versant un dollar au décès de (x) s'il advient avant celui de (y). Trouver la moyenne et la variance de la valeur présente de prestation au décès.
(ii) Considérons un contrat d'assurance vie entière continue versant un dollar au décès de (x) s'il advient avant celui de (y) et deux dollars s'il advient après celui de (y). Trouver la prime unique nette pour ce contrat.
(iii) Considérons un contrat d'assurance vie entière continue versant un dollar au décès de (x) s'il advient avant celui de (y) et deux dollars au décès de (y) s'il advient avant celui de (x). Trouver la prime unique nette pour ce contrat.

Pension de réversion -le cas continu

- en anglais « reversionary annuity » ;
- On définit par $\bar{a}_{y|x}$ la valeur présente actuarielle d'une « pension de réversion » où la rente est versée à un taux continue de $1\$$ au statut (x) à compter de la déchéance du statut (y).
- Donc,

$$\bar{a}_{y|x} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t}({}_tp_{x:y})(\mu_{y+t})\bar{a}_{x+t}dt.$$

- On peut démontrer que

$$\bar{a}_{y|x} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t}({}_tp_x)(1 - {}_tp_y)dt = \bar{a}_x - \bar{a}_{xy}.$$

Pension de réversion -le cas discret

- On définit par $a_{y|x}$ la valeur présente actuarielle d'une pension de réversion où la rente de $1\$$ est versée au début de chaque année au statut (x) à compter de la fin du l'année de déchéance du statut (y).
- La valeur présente actuarielle de cette rente est

$$a_{y|x} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k ({}_kp_x)(1 - {}_kp_y) = a_x - a_{xy}.$$

Exemple 3.10

Exercice 9.5 livre de Dickson et al.

Two lives aged 60 and 70 are independent with respect to mortaliy, and the Standard Ultimate Survival Model is applicable for each. On the basis of an effective rate of interest of 5% per year, calculate the EPV (expected present value) of

(a) an annuity of $\$20,000$ a year, payable in arreas as long as at least one of the lives is alive ;

(b) an annuity of $\$30,000$ a year, payable annualy in advance for at most 10 years, provided that both lives are alive ;

(c) a reversionary annuity of $\$25,000$ a year, payable annualy to (60) following the death of (70).