Travail pratique 2

ACT-2009 - Processus Stochastiques – Automne 2020

Le présent travail pratique doit être remis dans la boite de dépôt attitrée sur le site de cours avant le ***20 décembre 2020 à 23h59***. Un travail remis en retard se verra automatiquement accorder la note de 0. Le travail vaut pour 15% de la note finale. Un rapport complet doit être fait avec tableaux et/ou graphiques lorsque demandé dans l'énoncé du travail. Le code et/ou le programme utilisé doit être placé en annexe et en pièce jointe avec des indications claires pour pouvoir facilement identifier les sections de code ou du programme qui ont servis à produire les résultats. Il est nécessaire de pouvoir facilement reproduire vos résultats avec ces indications. Vous pouvez utiliser le langage de programmation de votre choix, bien que R ou Excel/VBA soient recommandés.

Le travail comporte deux questions pour un total de 100 points. 5 points bonus sont réservés pour la qualité de la présentation et la qualité du français dans le rapport. La note maximale est néanmoins de 100%.

Premier cas : modélisation d'un portefeuille (50 points)

Dans ce premier cas, on s'intéresse au processus de défaut pour un portefeuille de 100 produits dérivés. On suppose que le nombre de pertes pour chaque contrat suit un processus de Poisson conditionnel (mixte) avec $N_i(t) \sim Poisson(\Lambda_i)$ et $\Lambda_i \sim F$ (***voir annexe pour la loi de la variable*** $\boldsymbol{\Lambda}$). Le montant de la $k^{ème}$ perte du $i^{ème}$ contrat est donnée par :

$$B_{i,k} = M_i X_{i,k}$$

Avec M_i un montant associé au produit dérivé i et $X_{i,k}$ le pourcentage de la perte qu'on modélise avec une loi Beta(α_i, β_i). Les 100 produits dérivés sont indépendants et peuvent être classifiés en trois catégories i = 1, 2 et 3 dont les caractéristiques sont les suivantes (***voir annexe***) :

i	n_i	θ_i/a_i *	τ_i/b_i *	α_i	β_i	M_i
1						
2						
3						

** Les colonnes « θ_i/a_i » et « τ_i/b_i » représentent des paramètres qui sont différents d'une équipe à une autre.*

La perte totale actualisée du $i^{ème}$ contrat pour un intervalle allant de 0 à t est donnée par :

$$L_i(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_i(t)} e^{-\delta S_{i,k}} M_i X_{i,k} \; si \; N_i(t) > 0 \\ 0 \; si \; N_i(t) = 0 \end{cases}$$

Avec la force d'intérêt, ici de δ% (***voir annexe***), et $S_{i,k}$ le temps d'attente jusqu'à la survenance de la $k^{ème}$ perte au niveau du $i^{ème}$ contrat. On définit le processus de la perte totale actualisée du portefeuille comme suit à des fins de calcul de réserve :

$$L_{TOT}(t) = \sum_{i=1}^{100} L_i(t)$$

a) Évaluez la moyenne théorique de la perte totale actualisée pour une période de longueur t en présumant une force d'intérêt nulle (démarche complète exigée). ***(6 points)***
b) En simulant 1 000 scénarios, évaluez la distribution de la perte totale actualisée sur les 10 prochaines années (illustrez graphiquement). Avec cette simulation, approximez la moyenne et la variance de la perte totale. Donnez une approximation de la VaR(1-α) et de la TVaR(1-α) de la perte totale aux seuils α = 10%, 5% et 1% en fonction de votre simulation. ***(22 points)***
c) Refaites le b) en présumant dorénavant un processus de renouvellement avec $T_{i,k} \sim Gamma(\theta_i, \lambda_i)$ avec les nouveaux paramètres suivants (***voir annexe***) : ***(22 points)***

n_i	θ_i	λ_i	α_i	β_i	M_i

Deuxième cas : calcul d'options et temps d'attente (50 points)

On vous demande d'établir la valeur d'une option d'achat européenne sur une action de valeur initiale $S_0 = 100\$$ et dont l'évolution de la valeur suit un mouvement brownien géométrique tel que (***voir annexe***) :

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma Z(t)}$$

Ou encore, pour des sauts d'une période de temps d'une année :

$$S_t = S_{t-1}\, e^{\mu + \sigma \overbrace{(Z(t) - Z(t-1))}^{Z'(1)}}$$

Avec Z(t) qui suit un mouvement brownien standard.

Au sujet de l'option d'achat européenne : une option d'achat européenne (aussi appelée *European Call option*) est un contrat qui permet au détenteur de l'option d'acheter le titre concerné par le contrat (qu'on appelle le ***sous-jacent***, dans le cas présent une action) à un prix fixé d'avance (prix d'exercice = $\boldsymbol{K}$) à une date d'échéance T peu importe la valeur marchande du titre sous-jacent une fois rendu à cette date. Le détenteur de l'option n'a pas l'obligation d'exercer son option et effectuera l'achat du sous-jacent au temps T uniquement s'il le désire, ou autrement dit uniquement si la transaction lui est profitable (si $S_T > K$). Le gain au temps T pour le détenteur de l'option est donc réputé être :

$$Gain\ au\ temps\ T = Max(0; S_T - K)$$

À noter que ce gain ne considère pas le prix payé initialement pour obtenir l'option, ni un quelconque facteur d'actualisation à t = 0 ; il s'agit uniquement du gain de l'option selon qu'elle soit exercée ou non au moment T. Le prix d'une option (de tout genre) est la valeur espérée du gain au temps T actualisé au temps 0 (au moment de l'achat de l'option) avec une force d'intérêt dite « sans risque » δ.

Une option d'achat exotique est également considérée. Cette option a la particularité de calculer le gain en fonction d'une combinaison du prix du sous-jacent à deux dates différentes tel que :

$$Gain\ au\ temps\ T_2 = Max\big(0; S_{T_1} - K_1\big) + Max\big(0; S_{T_2} - K_2\big), T_1 < T_2$$

À noter que le gain est établi au temps T_2 bien que la valeur de l'action au temps T_1 influence le calcul du gain effectué. Encore une fois, le prix de l'option n'est pas considéré dans ce calcul de gain et aucun facteur d'actualisation ou d'accumulation n'est appliqué.

a) À l'aide de 1000 simulations, approximez le prix de l'option européenne avec des prix d'exercice de K_1 et K_2 (***voir annexe***) et des temps T_1 et T_2 (***voir annexe***, et donc 4 prix au total). Pour l'option exotique, on présumera deux prix différents de K_1 et K_2 et avec des dates d'échéance de T_1 et T_2 (mêmes paramètres qu'avec l'option européenne, mais pour un seul prix ici). ***(15 points)***

b) Toujours avec les simulations effectuées en a), calculez la VaR(95) ainsi que la VaR(5) du profit lié à la première option européenne (avec K_1 t T_1) et avec l'option exotique avec la définition suivante :

$$Profit = (valeur\ actualisée\ \text{à}\ t = 0\ du\ Gain\ au\ temps\ T) - (prix\ d'achat)$$

**On utilise la force d'intérêt sans risque δ pour actualiser le gain dans l'équation précédente.*

Présentez les mesures de VaR demandées dans les histogrammes des distributions de chaque simulation en plus de la moyenne de chaque simulation. Vous pouvez vous inspirer de la page 146 de l'annexe VI de l'évaluation actuarielle du Régime de rentes du Québec disponible avec le lien suivant : ***(10 points)***

https://www.rrq.gouv.qc.ca/SiteCollectionDocuments/www.rrq.gouv.qc/Francais/publications/regime_rentes/1004f-evaluation-actuarielle-rrq-2018.pdf

On présume dorénavant un modèle semblable pour l'évolution de la valeur de l'action mais en incorporant un processus de choc tel que :

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma Z(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} X_i} \leftrightarrow S_t = S_{t-1} e^{\mu + \sigma \overbrace{(Z(t) - Z(t-1))}^{Z'(1)} + \sum_{i=N(t-1)}^{N(t)} X_i}$$

Avec $N(t)$ qui suit un processus de Poisson homogène de paramètre λ, $X_1, \dots, X_{N(t)} \sim Unif(0, \alpha)$ qui sont i.i.d. et $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i = 0$ si $N(t) = 0$ (***voir annexe***). L'idée est de conserver le même modèle en temps continu pour l'évolution du prix de l'action mais en incorporant des chocs qui viennent ponctuellement altérer la valeur de l'action. À noter que si le paramètre α est négatif, alors $X_i \sim Unif(\alpha, 0)$, ce qui serait le cas pour incorporer des chocs négatifs.

c) Trouvez la valeur théorique du paramètre α de manière que le processus de la valeur de l'action suive une Martingale. ***(5 points)***

d) Trouvez la valeur théorique du paramètre α de manière que le processus de la valeur de l'action suive une sous-Martingale avec un rendement annuel espéré de $e^{\mu} - 1$, ou en d'autres termes, de manière que : ***(5 points)***

$$E[S_t | S_{t-1}] = S_{t-1} e^{\mu}$$

e) Avec le résultat et le paramètre α trouvé en d), effectuez une simulation de 1000 scénarios du temps nécessaire avant que l'action augmente de β% de valeur (***voir annexe***). Illustrez graphiquement avec un histogramme la distribution issue de cette simulation en précisant la moyenne, l'écart-type ainsi que les 1^{er}, $5^{ème}$, $10^{ème}$, $90^{ème}$, $95^{ème}$ et $99^{ème}$ percentiles de la distribution du temps requis. ***(15 points)***