Travail pratique 1 ACT-2001

Olivier Bourret

Numéro 1

a) Calculer la $VaR_{0.94}(X)$, la $TVaR_{0.94}(X)$ et la $CTE_{0.94}$

- $\underline{VaR_{0.94}(X)}$

Pour la *value at risk*, on doit trouver la plus petite valeur de x tel que la fonction de répartition est au moins 0.94. Alors,

$$VaR_{0.94}(X) = inf\{x \in I\!R | F_X(x) \geq 0.94\} = \mathbf{1\,000}$$

- $\underline{TVaR_{0.94}(X)}$

En utilisant le résultat précédent de la $VaR_{0.94}(X) = 1\,000$ et l'une des définitions de la $TVaR_p(X)$, le tout devient relativement simple à calculer.

$$\begin{aligned} TVaR_{0.94}(X) &= \frac{E\left[X \cdot 1_{\{x > VaR_{0.94}(X)\}}\right] + VaR_{0.94}(X)\big(F_X(VaR_{0.94}(X)) - 0.94\big)}{1 - 0.94} \\ &= \frac{5\,000(0.05) + 100\,000(0.01) + 1\,000(0.94 - 0.94)}{0.06} \\ &= \mathbf{20\,833.\overline{3}} \end{aligned}$$

- $\underline{CTE_{0.94}}$

Pour la $CTE_{0.94}$, le calcul est le même que celui de la $TVaR_{0.94}(X)$, car pour $p = 0.94$, on tombe directement sur une valeur possible, donc le résultat devrait être le même.

$$\begin{aligned} TVaR_{0.94}(X) &= \frac{E\left[X \cdot 1_{\{x > VaR_{0.94}(X)\}}\right]}{Pr(X > VaR_{0.94}(X))} \\ &= \frac{5\,000(0.05) + 100\,000(0.01)}{Pr(X > 1000)} \\ &= \frac{1250}{0.06} = \mathbf{20\,833.\overline{3}} \end{aligned}$$

b) Calculer la $VaR_{0.95}(X)$, la $TVaR_{0.95}(X)$ et la $CTE_{0.95}$

Ce numéro revient essentiellement à la même démarche, cependant la $TVaR_{0.95}(X)$ et la $CTE_{0.95}$ devraient être différentes dans ce cas-ci.

- $\underline{VaR_{0.94}(X)}$

$$VaR_{0.95}(X) = inf\left\{x \in IR | F_X(x) \geq 0.95\right\} = \mathbf{5\,000}$$

- $\underline{TVaR_{0.95}(X)}$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.95}(X) &= \frac{E\left[X \cdot 1_{\{x > VaR_{0.95}(X)\}}\right] + VaR_{0.95}(X)\big(F_X(VaR_{0.95}(X)) - 0.95\big)}{1 - 0.95} \\
&= \frac{100\,000(0.01) + 5\,000(0.99 - 0.95)}{0.05} \\
&= \mathbf{24\,000}
\end{aligned}$$

- $\underline{CTE_{0.95}}$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.95}(X) &= \frac{E\left[X \cdot 1_{\{x > VaR_{0.95}(X)\}}\right]}{Pr(X > VaR_{0.95}(X))} \\
&= \frac{100\,000(0.01)}{Pr(X > 5000)} \\
&= \frac{100\,000(0.01)}{0.01} = \mathbf{100\,000}
\end{aligned}$$

Numéro 2

Pour cette question, nous avons que,

- $X_1 \sim LN(\mu = 30, \sigma^2 = 16)$
- $X_2 \sim Weibull(\tau = 2, \beta = 10)$
- $X_3 \sim Burr(\alpha = 1, \lambda = 3, \tau = 0.5)$

On cherche à calculer la $VaR_{0.9}(X_1)$, la $VaR_{0.9}(2X_2)$ et la $VaR_{0.9}(2X_3 + 3)$

1. $VaR_{0.9}(X_1)$

On sait que $F_{X_1}(x) = \Phi\left(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$ et on veut trouver $F_{X_1}^{-1}(p)$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow p &= \Phi\left(\frac{ln(u)-\mu}{\sigma}\right) \\
\frac{ln(x)-\mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(p) \\
u &= e^{\sigma\Phi^{-1}(p)+\mu}
\end{aligned}
$$

Il est maintenant possible de calculer la $VaR_{0.9}(X_1)$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow VaR_{0.9}(X_1) &= e^{4\cdot\Phi^{-1}(0.9)+30} \\
&= e^{4(1.281\,552)+30} \quad \longrightarrow \boldsymbol{\Phi^{-1}(0.9)} \text{ calculé avec la fonction R qnorm(0.9, 0, 1)} \\
&= \mathbf{1.799\,358 \times 10^{15}}
\end{aligned}
$$

2. $VaR_{0.9}(2X_2)$

Puisque la $VaR_p(X)$ est positivement homogène, on peut dire que $VaR_{0.9}(2X_2) = 2VaR_{0.9}(X_2)$, alors on a qu'à chercher la $VaR_{0.9}(X_2)$.

Tout d'abord, on sait que $FX_2(x) = 1 - e^{-(\beta x)^\tau}$, alors,

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow p &= 1 - e^{-(\beta u)^\tau} \\
1 - p &= e^{-(\beta u)^\tau} \\
u &= \frac{-ln(1-p)^{1/\tau}}{\beta}
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
VaR_p(X) &= \frac{-ln(1-p)^{1/\tau}}{\beta} \\
\Rightarrow VaR0.9(X_2) &= \frac{-ln(1-0.9)^{1/2}}{10} \\
&= 0.151\,742\,713
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow VaR_{0.9}(2X_2) = 2(0.151\,742\,713) = \mathbf{0.303\,485\,426}$$

3. $VaR_{0.9}(2X_3+3)$

Puisque la $VaR_p(X)$ est invarante par translation et positivement homogène, on a $VaR_{0.9}(2X_3+3)) = 2VaR_{0.9}(X_3)+3$. Il suffit de commencer par trouver la $VaR_{0.9}(X_3)$.

Puisqu'on connait la fonction de répartition d'un loi Burr qui est $F_X(x) = 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x^\tau}\right)^\alpha$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow p &= 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+u^\tau}\right)^\alpha \\
(1-p)^{1/\alpha} &= \frac{\lambda}{\lambda+u^\tau} \\
\lambda - u^\tau &= \frac{\lambda}{(1-p)^{1/\alpha}} \\
u &= \left(\frac{\lambda}{(1-p)^{1/\alpha}}-\lambda\right)^{1/\tau}
\end{aligned}
$$

En remplaçant p par 0.90, on obtient le résultat désiré.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow VaR_{0.9}(2X_3+3) &= 2VaR_{0.9}(X_3)+3 \\
&= 2\left[\left(\frac{\lambda}{(1-p)^{1/\alpha}}-\lambda\right)^{1/\tau}\right]+3 \\
&= 2\left[\left(\frac{(3)}{(1-(0.9))^{1/(1)}}-(3)\right)^{1/(0.5)}\right]+3 \\
&= \mathbf{1461}
\end{aligned}
$$

Numéro 3

a) Trouver la $VaR_p(X)$ et la $VaR_p(Y)$ en fonction de p.

1. $VaR_p(X)$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - e^{-\lambda x} \\ \Rightarrow p &= 1 - e^{-\lambda u} \\ 1 - p &= e^{-\lambda u} \\ u &= \frac{-ln(1-p)}{\lambda} = -ln(1-p) \quad \longrightarrow \boldsymbol{\lambda = 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow VaR_p(X) = \boldsymbol{-ln(1-p)}$$

2. $VaR_p(Y)$

Pour la $VaR_p(Y)$ cela est plus complexe, étant donné que $Y = max(0, X-3)$. Commençons par trouver la $VaR_p(X-3)$.

$$\begin{aligned} VaR_p(X-3) &= VaR_p(X) - 3 \quad \longrightarrow \text{Invariante par translation} \\ &= -ln(1-p) - 3 \end{aligned}$$

En trouvant la valeur de p pour laquelle $x = 3$, on pourra définir la $VaR_p(Y)$. On peut trouver que $F_X(3) = 1 - e^{-3}$, qui est la plus petite valeur de X pour appliquer la $VaR_p(X-3)$. On a alors,

$$VaR_p(Y) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } p \leq 1 - e^{-3} \\ -ln(1-p) - 3 & , \quad \text{si } p > 1 - e^{-3} \end{cases}$$

b) Calculer la $VaR_{0.9}(X)$ et la $VaR_{0.99}(X)$

Par la réponse en a), il suffit de remplacer p par 0.9 et 0.99 dans l'équation.

- $VaR_{0.9}(X) = -ln(1-0.9) = \mathbf{2.302\,585\,093}$
- $VaR_{0.99}(X) = -ln(1-0.99) = \mathbf{4.605\,170\,186}$

c) Calculer la $TVaR_{0.9}(X)$ et la $TVaR_{0.9}(Y)$

1. $TVaR_{0.9}(X)$

On peut commencer par trouver la $TVaR_p(X)$, en utilisant sa définition (va être utile pour la question en d).

$$
\begin{aligned}
TVaR_p(X) &= \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR_s(X)ds \\
&= \frac{1}{1-p}\int_p^1 -ln(1-s)ds \quad \longrightarrow \text{Posons } \boldsymbol{t=1-s} \\
&= \frac{1}{1-p}\int_0^{1-p} ln(t)dt \quad \longrightarrow \text{Intégration par partie} \\
&= \frac{-1}{1-p}\left[tln(t)|_0^{1-p} - \int_0^{1-p} 1dt\right] \\
&= \frac{-1}{1-p}\left[(1-p)ln(1-p) - (1-p)\right] \\
&= -ln(1-p) + 1
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow TVaR_{0.9}(X) = -ln(1-0.9) + 1 = \mathbf{3.302\,585\,093}
$$

2. $TVaR_{0.9}(Y)$

En utilisant encore une fois la définition, on peut trouver la $TVaR_p(Y)$, cependant on doit rester prudent, car la $VaR_p(Y)$ est définie par parties.

- **Si** $p > 1 - e^{-3}$

$$
\begin{aligned}
TVaR_p(Y) &= \frac{1}{1-p}\int_p^1 -ln(1-s) - 3ds \\
&= \frac{-1}{1-p}\left[\int_p^1 ln(1-s)ds + \int_p^1 3ds\right] \quad \longrightarrow \text{Posons } \boldsymbol{t=1-s} \\
&= \frac{-1}{1-p}\left[\int_0^{1-p} ln(t)dt + 3 - 3p\right] \quad \longrightarrow \text{Intégration par partie} \\
&= \frac{-1}{1-p}\left[tln(t)|_0^{1-p} - \int_0^{1-p} 1dt\right] - \frac{3(1-p)}{1-p} \\
&= \frac{-1}{1-p}\left[(1-p)ln(1-p) - (1-p)\right] - 3 \\
&= 1 - ln(1-p) - 3 = -ln(1-p) - 2
\end{aligned}
$$

- **Si** $p \leq 1 - e^{-3}$

$$
\begin{aligned}
TVaR_p(Y) &= \frac{1}{1-p}\left[\int_p^{1-e^{-3}} 0ds + \int_{1-e^{-3}}^1 -ln(1-s) - 3ds\right] \\
&= \frac{-1}{1-p}\left[\int_{1-e^{-3}}^1 ln(1-s)ds + \int_{1-e^{-3}}^1 3ds\right] \\
&= \frac{-1}{1-p}\left[(1-(1-e^{-3}))ln(1-(1-e^{-3})) - (1-(1-e^{-3})) + 3(1-(1-e^{-3}))\right] \\
&= \frac{-1}{1-p}\left[e^{-3}ln(e^{-3}) - e^{-3} + 3e^{-3}\right] \\
&= \frac{-1}{1-p}\left[-e^{-3}\right] = \frac{e^{-3}}{1-p}
\end{aligned}
$$

$$\text{Alors,} \quad VaR_p(Y) = \begin{cases} \frac{e--3}{1-p} & , \quad \text{si } p \leq 1-e^{-3} \\ -ln(1-p)-2 & , \quad \text{si } p > 1-e^{-3} \end{cases}$$

$$\text{Donc,} \quad TVaR_{0.9}(Y) = \frac{e^{-3}}{1-0.9} = \mathbf{0.497\,870\,684}$$

d) Calculer la $TVaR_{0.99}(X)$ et la $TVaR_{0.99}(Y)$

Par les résultats trouvés en c), il devient simple de remplacer par la valeur de p.

- $TVaR_{0.99}(X) = -ln(1-0.99)+1 = \mathbf{5.605\,170\,186}$
- $TVaR_{0.99}(Y) = -ln(1-0.99)-2 = \mathbf{2.605\,170\,186}$

e)

Il n'y a rien à faire dans cette section.

f) Calculer la $VaR_{0.9}(Z)$ et la $VaR_{0.99}(Z)$

Pour que $Y > 10 \Rightarrow X - 3 > 10 \Rightarrow X > 13$.

Alors, $F_X(13) = 1 - e^{-13} \approx 0.999\,997\,74$

Donc, on aura que

$$VaR_p(Z) = \begin{cases} VaR_p(Y) & , \quad \text{si } p < 1-e^{-13} \\ 10 & , \quad \text{si } p \geq 1-e^{-13} \end{cases}$$

- $VaR_{0.9}(Z) = VaR_{0.9}(Y) = \mathbf{0}$
- $VaR_{0.99}(Z) = VaR_{0.99}(Y) = -ln(1-0.99)-3 = \mathbf{1.605\,170\,186}$

g) Calculer la $VaR_{0.9}(Y_{max})$ et la $VaR_{0.9}(Y)$

Puisque $Y_{max} = max\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ et que Y_1, Y_2, Y_3 sont i.i.d., on va trouver $F_{Y_{max}}(y)$.

$$\begin{aligned} F_{Y_{max}}(y) &= Pr(Y_{max} \leq y) \\ &= Pr(max\{Y_1, Y_2, Y_3\} \leq y) \\ &= Pr(Y_1 \leq y \cap Y_2 \leq y \cap Y_3 \cap y) \\ &= Pr(Y \leq y)^3 \quad \longrightarrow \text{car les } \boldsymbol{Y_i} \text{ sont i.i.d.} \end{aligned}$$

En trouvant l'inverse de la fonction de répartition en fonction de p, on pourra trouver facilement la $VaR_p(Y_{max})$. Trouvons d'abord pour $Y > 0$.

$$\begin{aligned} Pr(Y \leq y)^3 &= Pr(X - 3 \leq y)^3 \\ &= Pr(X \leq y + 3)^3 \\ &= (1 - e^{-(y+3)})^3 \\ \Rightarrow p &= (1 - e^{-(u+3)})^3 \\ 1 - p^{1/3} &= e - -(u + 3) \\ \Rightarrow u &= -ln(1 - p^{1/3}) - 3 \end{aligned}$$

En remplaçant p par 0.9, on obtient $VaR_{0.9}(Y_{max}) = -ln(1 - 0.9^{1/3}) - 3 = 0.366\,488\,31$. Étant donné que la valeur est plus grande que 0, on n'a pas besoin de vérifier pour $Y \leq 0$. De plus, on avait déjà calculé la $VaR_p(Y)$ un peu plus haut et lorsque $p \leq 1 - e^{-3} \approx 0.95 \Rightarrow VaR_p(Y) = 0$. Alors, puisque $p = 0.9 < 1 - e^{-3} \Rightarrow VaR_{0.9}(Y) = 0$, on peut obtenir les résultats souhaités.

- $VaR_{0.9}(Y_{max}) =$ **0.366 488 31**
- $VaR_{0.9}(Y) =$ **0**

Numéro 4

On demande dans ce numéro de calculer la $VaR_p(M)$ et la $TVaR_p(M)$ provenant d'une simulation de 10 000 réalisations de M, où $M \sim Geom(q = 0.1)$. Générer les 10 000 valeurs est la tâche la plus simple dans ce numéro, puisque la fonction R rgeom permet la simulation du nombre de réalisations désirées avec le paramètre de probabilité que l'on connait. Pour simplifier, j'ai trié les valeurs en ordre croissant immédiatement.

Pour la $VaR_p(M)$, j'ai pris la valeur à la position de p^e percentile. Puisqu'on a 10 000 réalisations, on tombe directement sur la valeur empirique de la $VaR_p(M)$

Pour la $TVaR_p(M)$, j'ai tout simplement calculer la moyenne des valeurs dont la position était plus grande à celle de la $VaR_p(M)$. En d'autres mots, j'ai fait la moyenne des valeurs des positions $[p * 10\,000 + 1; 10\,000]$.

Le code est très simple et voici ce que j'ai programmé pour obtenir les résultats que l'on demandait.

```r
# Simulation et tri des 10 000 réalisations de M

simul <- sort(rgeom(10000, prob = 0.1))

# Calcul de la VaR_p(M) pour p = {0.9, 0.99}

VaR90 <- simul[9000]
VaR99 <- simul[9900]

# Calcul de la TVaR_p(M) pour p = {0.9, 0.99}

TVaR90 <- mean(simul[9001:10000])
TVaR99 <- mean(simul[9901:10000])
```

Voici les résultats obtenus.

Table 1: Résultats de la VaR et la TVaR

p	$VaR_p(M)$	$TVaR_p(M)$
0.90	21	30.782
0.99	42	53.100

Numéro 5

Dans ce numéro on doit calculer différentes espérances à l'aide de données empiriques. Puisque $Z = X + Y$, et que X et Y sont variables aléatoires indépendantes, pour chaque variable aléatoire de Z, on pouvait simuler une valeur de X que l'on additionnait à une valeur de Y. Pour la variable aléatoire $X \sim Erl(n = 3, \beta = 0.05)$ cela revient à une loi gamma avec $alpha = 3$. On prend donc la fonction R rgamma, mais en prenant dans le paramètre "rate" au lieu de "scale" pour la valeur de β. Pour Y, on prend la fonction R rweibull.

Voici le code pour la simulation et les calculs demandés. Les calculs d'espérances seront expliqués plus loin, soit avant de donner le résultat.

```
# Simulation des 10 000 valeurs de Z
X <- rgamma(10000, shape = 3, rate = 0.05)
Y <- rweibull(10000,shape = 3,scale = 1/0.1)
Z <- X+Y

# Espérance de Z

Es_Z <- mean(Z)

# Espérance de la fonction stop loss pour d = 20

EsSL_Z <- mean(pmax(Z-20,0))

# Espérance de l'excès moyen pour d = 20

EsEM_Z <- sum(pmax(Z-20,0))/sum((Z-20)>0)

# Espérance limitée à u = 100

EsLim_Z <- mean(pmin(Z,100))
```

a) Caluler $E[Z]$

Pour $E[Z]$, on fait seulement la moyenne des valeurs de Z.

$$E[Z] = \mathbf{69.5410941}$$

b) Calculer $\pi_Z(20)$

Ici, on cherche l'espérance de la fonction stop-loss avec un déductible de 20. Cela revient à calculer $E[max(0, Z - 20)]$. pour ce faire, j'ai pris la valeur la plus grande entre 0 et $Z - 20$ pour chacun des Z et j'ai fait la moyenne de ces nouvelles valeurs.

$$\pi_Z(20) = \mathbf{49.6209558}$$

c) Calculer $e_Z(20)$

$e_Z(20)$ est l'espérance de l'excès moyen avec un déductible de 20. L'espérance de l'excès moyen est un moyenne des valeurs plus grandes que le déductible, donc la prestation moyenne que verse l'assureur en cas de réclamation. Pour le calculer, on fait la moyenne des valeurs de $Z - 20 > 0$.

$$e_Z(20) = \mathbf{50.6801714}$$

d) Calculer $E[Z \wedge 100]$

Il est demandé de calculer $E[Z \wedge 100]$, qui est l'espérance limitée à 100. Cela représente que toute réclamation au delà de 100$ sera remboursée à concurrence maximale de 100$. On veut donc calculer $E[min(Z, 100)]$.

$$E[Z \wedge 100] = \mathbf{64.7376311}$$