# Provisionnement en assurance IARD

V. Goulet F. Guillot M. Pigeon

# Provisionnement en assurance IARD

Vincent Goulet
École d'actuariat
Université Laval

Frédérick Guillot
Recherche et innovation
Co-operators

Mathieu Pigeon
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal

Édition 2020.0-1

**Code source**
Voir sur GitLab

**Couverture**
Écureuil gris (*Sciurus carolinensis*) photographié dans le comté d'Oxfordshire. Cette espèce d'écureuil originaire de l'est de l'Amérique du Nord a été introduite en Angleterre au début du vingtième siècle, où elle est maintenant considérée invasive.

# Table des matières

**Table des matières** vi

**Liste des tableaux** ix

**Liste des figures** xi

**1 Présentation générale** 1
- 1.1 Comparaison avec l'assurance vie 2
- 1.2 Développement des sinistres 3
- 1.3 Approches collectives et individuelles 7
- 1.4 Techniques intuitives 9
- 1.5 Triangles de développement 11
- 1.6 Exercices 14

**2 Modélisation déterministe des provisions** 17
- 2.1 Modèle Chain-Ladder 17
- 2.2 Bornhuetter-Ferguson 25
- 2.3 Méthode London Chain 29
- 2.4 Méthode des provisions constituées 33
- 2.5 Méthode des moindres carrés de DeVylder 36
- 2.6 Exercices 37

**3 Modélisation stochastique des réserves** 43
- 3.1 Modèle de Mack 43
- 3.2 Modèle de Poisson 50
- 3.3 Code informatique 55
- 3.4 Exercices 56

**A Solutions** 59
- Chapitre 1 59

Chapitre 2 60
Chapitre 3 71

**Bibliographie** **81**

# Liste des tableaux

1.1 Rythme de développement des sinistres pour différents types d'assurances de dommages 3
1.2 Exemple de triangle de développement 8
1.3 Primes acquises et montants de réclamations payés pour l'utilisation de la méthode de provisionnement du taux de sinistralité espéré 10
1.4 Présentation générale d'un triangle de développement cumulatif 11
1.5 Triangle de développement pour l'exemple 1.3 12
1.6 Triangle de développement cumulatif complété à partir de projections des montants de sinistres finaux sous la diagonale 13
1.7 Paiements réalisés par l'assureur YTR pour l'exercice 1.1 14
1.8 Primes acquises, montants payés et taux de sinistralité espérés pour l'exercice 1.2 15
1.9 Triangle de développement cumulatif de l'assureur GFR pour l'exercice 1.3 15

2.1 Triangle de développement pour l'exemple 2.1 18
2.2 Triangle de développement complété pour l'exemple 2.1 19
2.3 Tableau sommaire des résultats pour l'exemple 2.1 20
2.4 Triangle de paiements pour l'exemple 2.2 21
2.5 Triangle de paiements cumulatifs pour l'exemple 2.2 21
2.6 Données pour le calcul des facteurs de déroulement dans l'exemple 2.2 22
2.7 Triangle de de développement complété pour l'exemple 2.2 22
2.8 Triangle de paiements cumulatifs pour l'exemple 2.3 suite à l'ajout d'une année d'accident 23
2.9 Paiements prédits pour 2002 par la méthode Chain-Ladder pour les années d'accident 1997–2001 pour les données de l'exemple 2.3 et paiements réellement effectués 23

2.10 Provisions des années 1997–2001 calculées au terme de l'exercice 2001 et au terme de l'exercice 2002 par la méthode Chain-Ladder pour les données de l'exemple 2.3 24
2.11 Facteurs de déroulement $\hat{\lambda}_{i,j}$ pour les données du tableau 2.5 (haut) et divers choix possibles de facteurs $\hat{\lambda}_j$ (bas) 25
2.12 Paiements réalisés par l'assureur YTR 38

3.1 Paiements cumulatifs 56
3.2 Paiements cumulatifs 57

A.1 Triangle de développement cumulatif de l'assureur YTR pour l'exercice 1.1 59
A.2 Paiements réalisés par l'assureur YTR 60
A.3 Facteurs de développement individuels 61
A.4 Paiements réalisés et estimés par l'assureur YTR 62

# Liste des figures

1.1 Évolution d'un sinistre 4
1.2 Exemple de classification de 10 sinistres selon leur stade de développement 5
1.3 Évaluation par les experts 6
1.4 Évolution du développement du sinistre et des provisions dans l'exemple 1.1 7

2.1 Droite des moindres carrés pour le nuage de points entre les périodes 2 et 3 30

# 1 Présentation générale

Un rôle important et central de l'actuaire en assurances IARD est le calcul des provisions pour sinistres [1]. Il s'agit d'ailleurs de l'un des deux rôles exclusivement réservé à un actuaire Fellow de l'Institut canadien des actuaires (ICA). Les provisions ont pour objectif de permettre le règlement complet des engagements pris par l'assureur envers ses assurés. Elles sont liées au concept même d'assurance et leur constitution est généralement imposée par diverses réglementations — comme celles de l'Autorité des marchés financiers (AMF), au Québec — pour tenir compte du cycle de production inversé que comprend le marché des assurances. En effet, l'assureur ne peut évaluer les coûts réels que représente un assuré qu'après l'expiration du contrat et la fermeture de tous les dossiers liés. Or, le montant de la prime, quant à lui, doit être déterminé dès le début du contrat. À cause de cette inversion du cycle, un contrôle rigoureux de la solvabilité des compagnies est essentiel afin de protéger les assurés, les actionnaires ou l'État.

La législation des assurances impose aux compagnies d'assurances de conserver en réserve un montant suffisant afin de permettre le paiement de tous les sinistres encourus. Ces provisions représentent environ 75 % du passif des compagnies d'assurances IARD et plus de 90 % de celui des compagnies d'assurance vie. L'évaluation des provisions pour sinistres constitue donc un exercice crucial dans les opérations des assureurs. Si les provisions pour sinistres sont sous-évaluées, la santé financière de la compagnie est surévaluée, la compagnie s'expose au risque de défaut sur ses paiements futurs et, par conséquent, l'assureur s'expose à la ruine technique.

La situation inverse n'est pas préférable car, si les provisions sont surévaluées, alors les dépenses sont plus élevées, le profit diminue, les impôts diminuent, le surplus diminue et la valeur de la compagnie est moindre. Dans un tel contexte, vous pouvez imaginer la pression à laquelle doit faire face

1. Aussi appelées provisions techniques. Le terme « réserves », calqué de l'anglais, est considéré vieilli par l'Office québécois de la langue française.

l'actuaire d'évaluation : ses provisions doivent tout à la fois assurer la stabilité financière à long terme de l'institution et maximiser les surplus ou les profits.

L'évaluation des provisions en assurances IARD s'effectue habituellement par secteur d'activité : assurance automobile, habitation, bien commercial, responsabilité civile d'entreprise, etc.

## 1.1 Comparaison avec l'assurance vie

Au-delà du type de risque couvert, l'assurance IARD diffère passablement de l'assurance vie dans la nature même des opérations, différences qui induisent des méthodes de provisionnement complètement distinctes.

L'assurance vie se déroule sur le long terme, souvent des décennies. Le montant des prestations est généralement connu, mais le moment ou la durée pendant laquelle elles seront versées sont, en revanche inconnus. C'est d'ailleurs dans la modélisation de la valeur actuelle des prestations que réside une grande partie du travail actuariel dans ce type d'assurance. Autre particularité : à tout moment durant la période de validité d'un contrat d'assurance vie, il peut rester des primes à percevoir. La provision pour sinistre reliée à un contrat d'assurance vie correspond donc à la différence entre la valeur actuelle des prestations à verser et celle des primes à percevoir :

$$\begin{aligned}\text{provision} &= \text{valeur actuelle des prestations futures}\\ &\quad - \text{valeur actuelle des primes futures.}\end{aligned}$$

En assurance IARD, la durée des contrats est beaucoup plus courte qu'en assurance vie, généralement une seule année. Tant le montant que le nombre et le moment des prestations sont inconnus. L'assureur peut être appelé à verser des prestations même si le contrat d'assurance n'est plus en vigueur ; pensez, par exemple, à une assurance santé qui rembourserait des soins liés à une lésion professionnelle après la retraite d'un employé. La dynamique de développement des sinistres dépend beaucoup du secteur d'activité. À titre indicatif, le tableau 1.1, tiré de Denuit et Charpentier (2005), présente le rythme de développement des sinistres pour différents types d'assurances de dommages.

En établissant les provisions pour sinistres en fin d'année, l'actuaire doit donc tenir compte des montants de prestations que l'assureur pourrait devoir payer dans le futur pour :

TAB. 1.1 – Rythme de développement des sinistres pour différents types d'assurances de dommages

| | Proportion du développement à la fin de l'année (%) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Type d'assurance | Année 1 | Année 2 | Année 3 | Année 4 | Année 5 |
| Habitation tout risque | 55 | 90 | 94 | 95 | 96 |
| Automobile (matériel) | 55 | 79 | 84 | 89 | 90 |
| Automobile (corporel) | 13 | 38 | 50 | 65 | 72 |
| Responsabilité civile | 10 | 25 | 35 | 40 | 45 |

- les dossiers de sinistres déjà déclarés et dont le montant final peut encore évoluer ;
- les sinistres déjà survenus, mais non encore déclarés au moment de l'évaluation actuarielle.
- les dossiers fermés susceptibles de rouvrir ;
- les sinistres déclarés mais non encore enregistrés dans les livres de la compagnie.

En supposant qu'il ne reste plus de primes à percevoir pour un contrat au moment de l'évaluation des provisions, la provision correspondant à un contrat est la somme des provisions pour chacun des éléments ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\text{provision} &= \text{provision pour sinistres subis mais non réglés} \\
&\quad + \text{provision pour sinistres subis mais non déclarés} \\
&\quad + \text{provision pour sinistres réglés qui peuvent rouvrir} \\
&\quad + \text{provision pour sinistres subis mais non enregistrés} \\
&\quad - 0.
\end{aligned}$$

Le but principal du provisionnement en assurance IARD consiste à élaborer des techniques pour estimer le plus précisément possible le montant des provisions pour chacun des bilans financiers de l'assureur. Toute l'expertise des actuaires d'évaluation en réside donc dans la modélisation du développement des sinistres dans le temps.

## 1.2 Développement des sinistres

Le développement typique d'un sinistre est illustré à la figure 1.1. Le sinistre survient durant la période où la police d'assurance est en vigueur —

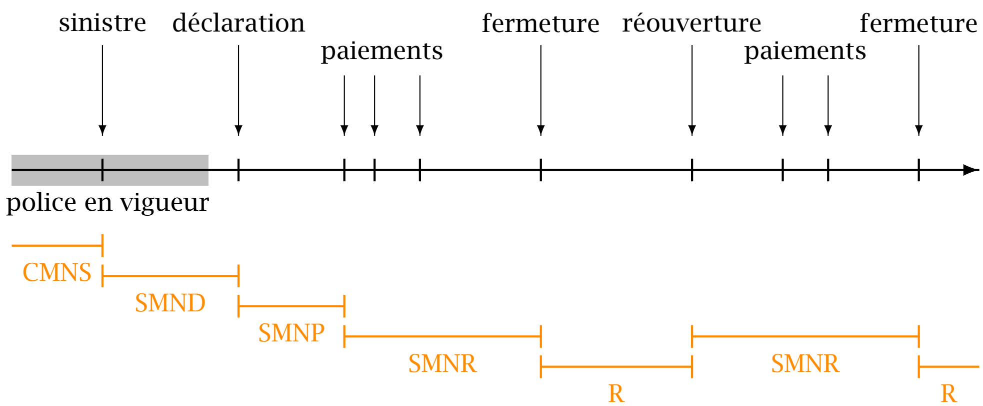


Fig. 1.1 – Évolution d'un sinistre

autrement il ne serait évidemment pas couvert. Dans plusieurs situations comme l'incendie ou les dommages matériels à une voiture, le sinistre est immédiatement déclaré à l'assureur. Dans l'assurance contre les dommages corporels ou la responsabilité civile, par exemple, une période de temps plus ou moins longue peut séparer la survenance du sinistre et sa déclaration. Celle-ci peut même parvenir à l'assureur hors de la période de couverture de la police. Il s'agit d'ailleurs de la situation représentée à la figure 1.1. Par la suite, l'assureur peut effectuer un ou plusieurs paiements d'indemnités avant de fermer le dossier. Des faits nouveaux peuvent aussi mener à la réouverture du dossier et à de nouveaux paiements.

À une certaine date d'évaluation (par exemple, le 31 décembre), les sinistres peuvent être séparés en plusieurs catégories en fonction du stade atteint par leur développement :

- si la date d'évaluation se trouve avant la date de survenance, alors le sinistre est considéré comme « couvert mais non subi » (CMNS) (*Covered But Not Incurred*, CBNI) ;
- si la date d'évaluation se trouve entre la date de survenance et la date de déclaration, le sinistre est considéré comme « subi mais non déclaré » (SMND) (*Incurred But Not Reported*, IBNR) ;
- si la date d'évaluation se trouve entre la date de déclaration et la date du premier paiement, le sinistre est considéré comme « subi mais non payé » (SMNP) (*Reported But Not Paid*, RBNP)[2] ;

2. Cette catégorie est parfois regroupée avec la catégorie suivante.

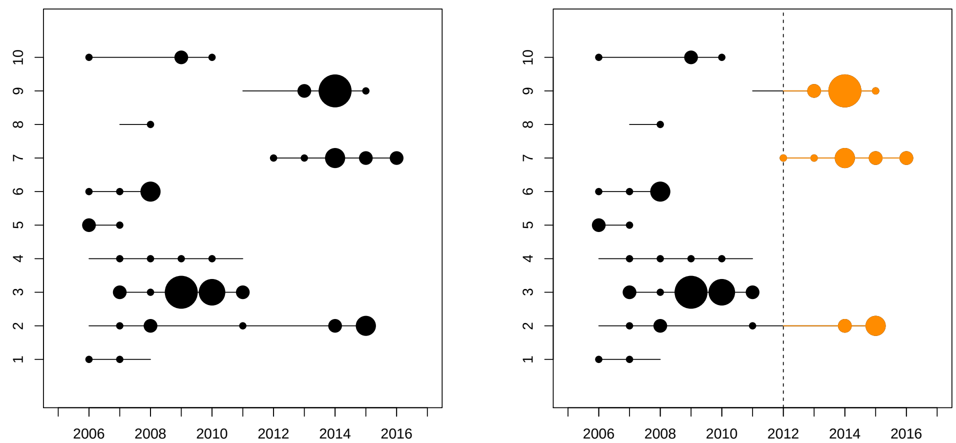


FIG. 1.2 – Exemple de classification de 10 sinistres selon leur stade de développement. Chaque graphique présente l'évolution des sinistres, les tailles des points étant proportionnelles aux montants payés. En supposant que l'évaluation a lieu le 1er janvier 2012, le graphique de droite présente la classification des sinistres : les sinistres 1, 3, 4, 5, 6, 8 et 10 sont réglés (R) ; le sinistre 2 est subi mais non réglé (SMNR) ; le sinistre 7 est subi mais non déclaré (SMND) ; le sinistre 9 est subi mais non payé (SMNP).

- si la date d'évaluation se trouve entre la date du premier paiement et la date de fermeture du dossier, le sinistre est considéré comme « subi mais non réglé » (SMNR) (*Reported But Not Settled*, RBNS) ;
- si la date d'évaluation se trouve après la date de fermeture du dossier, le sinistre est considéré comme « réglé » (R) (*Settled* ou *Closed*, S).

La figure 1.2 illustre cette classification pour une dizaine de sinistres.

Les compagnies d'assurances de dommages détiennent généralement une certaine expérience dans l'évaluation du développement des sinistres par le biais de leurs experts en sinistres. Ceux-ci pourront effectuer des prévisions du montant total d'un sinistre à différents moments entre la date de déclaration et la date de fermeture d'un dossier, tel qu'illustré à la figure 1.3. Il est à noter qu'un changement dans le montant de la provision n'accompagne pas nécessairement un paiement.

**Exemple 1.1.** Illustrons le cycle de développement d'un sinistre dans un contexte de responsabilité civile en assurance automobile (blessure corporelle). Au Québec, ce type d'assurance est couvert par la Société d'assurance

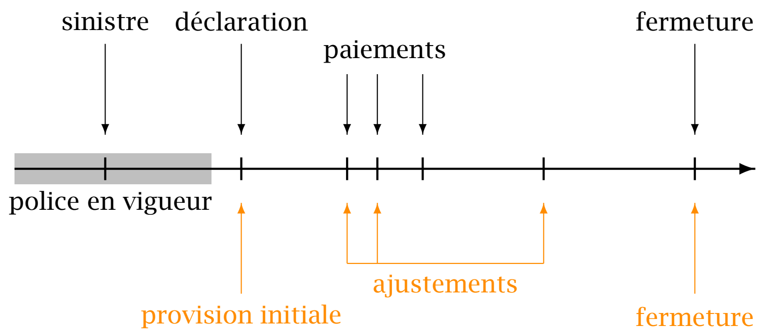


FIG. 1.3 – Évaluation par les experts

automobile du Québec (SAAQ) dans un régime sans égard à la faute. Le scénario ci-dessous relève donc de la fiction au Québec, mais pas dans plusieurs autres provinces du Canada ou dans d'autres pays.

- Le 15 novembre 2014, un assuré frappe un piéton avec sa voiture.
- Le 10 janvier 2015, le piéton commence à ressentir de violents maux de dos et de tête, conséquences de l'accident. Une poursuite est engagée contre le conducteur par le piéton.
- Le 22 janvier 2015, l'assuré contacte son assureur pour l'avertir de la réclamation et le service d'indemnisation de la compagnie d'assurance enregistre une provision de 20 000 $ pour le règlement de la réclamation.
- Le 1er mars 2015, des spécialistes de la compagnie d'assurance évaluent plutôt le montant de la réclamation à 200 000 $.
- Le 30 mars 2015, le piéton refuse l'offre de règlement d'un montant de 180 000 $ de la compagnie d'assurance et en appelle aux tribunaux.
- Le 30 juin 2015, la compagnie d'assurance paie des honoraires d'avocat de 15 000 $ pour cette cause.
- Le 30 mai 2016, la compagnie d'assurance paie de nouveau des honoraires d'avocat pour cette cause, cette fois au montant de 30 000 $.
- Le 6 octobre 2017, le tribunal condamne l'assuré à verser une indemnité de 250 000 $ au plaignant. Ce montant est versé par la compagnie d'assurance en vertu du chapitre de responsabilité civile de l'assurance automobile.

La figure 1.4 illustre sur une ligne de temps l'évolution du développement du sinistre et du montant des provisions.

Au 31 décembre 2014, la compagnie d'assurance se devait d'inscrire une provision pour sinistre subi mais non déclaré (SMND) pour l'accident du

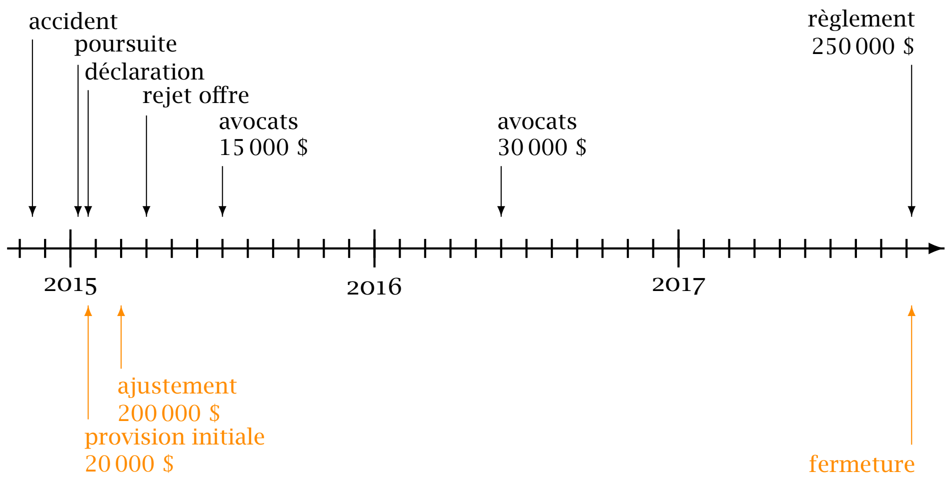


FIG. 1.4 – Évolution du développement du sinistre et des provisions dans l'exemple 1.1

15 novembre, même si aucune réclamation n'avait encore été soumise. La compagnie doit également inscrire des provisions pour sinistre subi mais non réglé (SMNR) les 31 décembre 2015 et 31 décembre 2016. À la fin de 2017, il subsiste un risque que le dossier de réclamation soit rouvert un jour. L'actuaire prudent souhaitera sans doute conserver en réserve un montant pour parer à cette éventualité. □

L'évaluation des provisions en assurance IARD s'effectue en dollars constants et *sans* actualiser les montants de sinistres, et ce, même si l'effet du facteur d'actualisation n'est pas négligeable pour certains types d'assurances à très long développement.

## 1.3 Approches collectives et individuelles

L'estimation des paramètres d'un modèle décrivant en détail le développement individuel des sinistres (tel qu'illustré à la figure 1.1) demande une base de données détaillée — dates exactes, montant de chacun des paiements, etc. — et fiable, de même qu'une importante puissance de calcul. De telles ressources n'étant seulement disponibles que depuis la fin des années 1990 environ, les actuaires ont développé plusieurs modèles pour représenter la dynamique collective des sinistres.

Tab. 1.2 – Exemple de triangle de développement

| Année | Développement (âge) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| accident | 12 mois | 24 mois | 36 mois | 48 mois | 60 mois |
| 2012 | 5 946 975 | 9 668 212 | 10 563 929 | 10 771 690 | 10 978 394 |
| 2013 | 6 346 756 | 9 593 162 | 10 316 383 | 10 468 180 | |
| 2014 | 6 269 090 | 9 245 313 | 10 092 366 | | |
| 2015 | 5 863 015 | 8 546 239 | | | |
| 2016 | 5 778 885 | | | | |

De nombreuses autres raisons peuvent motiver l'utilisation d'approches collectives, dont la simplicité et la robustesse des modèles collectifs ou le risque de surparamétrisation des approches individuelles. Jin et Frees (2014) offrent une bonne comparaison des approches collectives et individuelles.

### 1.3.1 Approches collectives

Les modèles collectifs pour les réserves sont étudiés principalement depuis le début des années 1980. Parmi ces modèles, la méthode *Chain-Ladder* (ou modèle de Mack (1993) dans sa version stochastique) occupe une place à part puisqu'elle se trouve à la base de la plupart des modèles utilisés en pratique. La méthode Chain-Ladder, de même que ses nombreuses extensions et variantes, est construite à partir d'une base de données regroupées par période de survenance et par période de développement (habituellement une année) en un tableau nommé *triangle de développement*. Le tableau 1.2 contient un exemple de triangle de développement. La section 1.5 introduit plus en détails les notions propres à cette structure de données.

Plusieurs modèles paramétriques reposent également sur les triangles de développement ou sur une version *incrémentale* de ceux-ci ; voir Hertig (1985) ; Renshaw et Verrall (1998) ; Verrall et England (2002) ; Taylor (2000). Ces modèles s'inscrivent plus ou moins directement dans la théorie des modèles linéaires généralisés (GLM) et des modèles linéaires généralisés mixtes (GLMM). Consultez Wüthrich et Merz (2008) et England et Verrall (2002) pour un historique plus complet des modèles collectifs.

### 1.3.2 Approches individuelles

Les modèles individuels ont commencé à faire leur apparition dans la littérature beaucoup plus récemment. Arjas (1989) et Norberg (1993, 1999) ont d'abord proposé une structure stochastique individuelle en temps continu pour les sinistres et l'évaluation des réserves. À partir de cette base, divers auteurs ont développé des modèles, par exemple Haastrup et Arjas (1996); Larsen (2007); Zhao et collab. (2009); Zhao et Zhou (2010); Antonio et Plat (2013). Chose intéressante à noter : il n'existe aucune mise en œuvre réaliste de ces modèles, à l'exception notable de celui de Antonio et Plat (2013). Dans une autre voie, Pigeon et collab. (2013) et Pigeon et collab. (2014) ont proposé des modèles individuels basés sur la structure Chain-Ladder. Enfin, Drieskens et collab. (2012) et Rosenlund (2012), notamment, ont proposé des modèles non-paramétriques. Nous ne traiteront pas plus avant des approches individuelles dans le présent ouvrage.

## 1.4 Techniques intuitives

Dans certaines situations où les paiements futurs s'avèrent très stables et très prévisibles, il est possible d'utiliser des méthodes simples pour l'estimation des provisions.

### 1.4.1 Méthode des réserves enregistrées

L'idée de la méthode des réserves enregistrées consiste à utiliser le total des estimations faites par les experts de la compagnie — les réserves enregistrées — et d'y ajouter un pourcentage arbitraire afin d'inclure l'incertitude quant à l'évolution possible des coûts futurs. Le problème majeur de cette méthode réside évidemment dans l'évaluation de ce pourcentage.

### 1.4.2 Méthode du taux de sinistralité espéré

Le taux de sinistralité (*loss ratio*, en anglais) est le rapport entre le montant des sinistres à dédommager et celui des primes encaissées. Sur la base de leur expérience, les assureurs peuvent établir un taux de sinistralité espéré pour une branche d'affaires. Il devient alors simple de baser une méthode de provisionnement sur la comparaison entre les montants de réclamation payés à ce jour et les montants espérés calculés à partir du taux de sinistralité.

TAB. 1.3 – Primes acquises et montants de réclamations payés pour l'utilisation de la méthode de provisionnement du taux de sinistralité espéré

| Année | Primes acquises | Montants payés |
|---|---|---|
| 2000 | 100 000 | 58 000 |
| 2001 | 105 000 | 50 000 |
| 2002 | 110 000 | 45 000 |
| 2003 | 112 500 | 40 000 |
| 2004 | 120 000 | 25 000 |
| 2005 | 115 000 | 12 000 |
| TOTAL | 662 500 | 230 000 |

Soit $\mathrm{ELR}_i$ le taux de sinistralité espéré de l'année $i$ pour un secteur d'activité quelconque, $Y_i$ le montant total des réclamations payées dans l'année $i$, $P_i$ le montant des primes acquises dans cette même année et, finalement, $R_i$ le montant des provisions pour sinistres. Selon la méthode du taux de sinistralité espéré :

$$R_i = \mathrm{ELR}_i \times P_i - Y_i \tag{1.1}$$

et

$$R^{\mathrm{TOT}} = \sum_i R_i = \sum_i \mathrm{ELR}_i \times P_i - \sum_i Y_i. \tag{1.2}$$

**Exemple 1.2.** Le exemple 1.2 contient les primes acquises et des montants de réclamations payés à la fin de 2005 pour les années d'accident de 2000 à 2005. Si le taux de sinistralité espéré est de 60 % pour toutes les années, alors, par une application directe de (1.2), la provision totale pour les années 2000 à 2005 est :

$$\begin{aligned} R^{\mathrm{TOT}} &= 0{,}60 \times 662\,500 - 230\,000 \\ &= 167\,500. \end{aligned}$$

□

La méthode du taux de sinistralité espéré souffre évidemment du problème qu'il est plus que probable que les pertes diffèrent des montants prévus (catastrophe, etc.).

TAB. 1.4 – Présentation générale d'un triangle de développement cumulatif

| Année | Développement (âge) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| accident | 1 | 2 | ⋯ | $j$ | ⋯ | $J-1$ | $J$ |
| 1 | $C_{1,1}$ | $C_{1,2}$ | ⋯ | $C_{1,j}$ | ⋯ | $C_{1,J-1}$ | $C_{1,J}$ |
| 2 | $C_{2,1}$ | $C_{2,2}$ | ⋯ | $C_{2,j}$ | ⋯ | $C_{2,J-1}$ | |
| ⋮ | | | | | | | |
| $i$ | $C_{i,1}$ | $C_{i,2}$ | ⋯ | $C_{i,j}$ | | | |
| ⋮ | | | | | | | |
| $I-1$ | $C_{I-1,1}$ | $C_{I-1,2}$ | | | | | |
| $I$ | $C_{I,1}$ | | | | | | |

## 1.5 Triangles de développement

Tel que mentionné à la section 1.3, l'étude de l'évolution des coûts dans le temps s'effectue généralement à l'aide de données structurées en triangle de développement. Celui-ci reflète la dynamique collective des sinistres.

Un triangle de développement tel que présenté au tableau 1.4 contient le montant *cumulatif* des sinistres encourus $C_{i,j}$ à l'âge de développement $j = 1, \dots, J$ pour l'année d'accident $i = 1, \dots, I$. Sans perte de généralité, nous allons supposer que $I = J$ dans la suite. Un triangle *incrémental* contient plutôt les valeurs $Y_{i,j}$ des montants des sinistres survenus à l'année $i$ et payés à l'année $j$. Un tel triangle est visuellement identique à un triangle cumulatif.

Vous obtiendrez des informations diverses selon la direction dans laquelle vous lisez un triangle de développement :

- la lecture par *ligne* permet de suivre le développement au fil du temps des sinistres survenus au cours de l'année $i$ ;
- la lecture par *colonne* permet de parcourir les années de calendrier pour un âge de développement $j$ et, par conséquent, de suivre d'éventuels changements dans les méthodes de souscription, dans la taille du portefeuille, etc. ;
- la lecture en *diagonale* (inversée) fournit les montants cumulatifs (ou incrémentaux) de sinistres au cours d'une année de calendrier donnée pour tous les âges de développement.

TAB. 1.5 – Triangle de développement pour l'exemple 1.3

| Année accident | Développement (âge) 12 mois | 24 mois | 36 mois | 48 mois | 60 mois |
|---|---|---|---|---|---|
| 1997 | 26 312 | 31 467 | 24 672 | 13 055 | 6 158 |
| 1998 | 30 470 | 35 012 | 25 491 | 12 589 | |
| 1999 | 49 756 | 51 831 | 35 267 | | |
| 2000 | 50 420 | 52 315 | | | |
| 2001 | 56 762 | | | | |

La notation des triangles de développement porte facilement à confusion. Parce qu'elles reviennent fréquemment dans la suite, habituez-vous rapidement aux deux conventions suivantes :

1. les observations de la diagonale du triangle de développement sont
$$C_{i,I-i+1}, \quad i = 1, \dots, I;$$
2. l'ensemble des observations dans la partie supérieure du triangle de développement (diagonale incluse) est
$$\mathscr{D}_I = \{C_{i,j}; i + j - 1 \leq I, j \leq J\}$$
et l'ensemble des observations sous la diagonale est le complément de l'ensemble précédent, $\mathscr{D}_I^\complement$.

**Exemple 1.3.** Le tableau 1.5 contient un triangle de développement incrémental pour des années d'accident de 1997 à 2001. Nous pouvons extraire les informations suivantes de ce tableau de données :

- en 1999, la compagnie d'assurance a payé un montant de 49 756 \$ pour les sinistres survenus durant cette même année ;
- toujours en 1999, la compagnie a aussi payé 24 672 \$ pour des sinistres survenus en 1997 ;
- à la fin de l'année 2000, le montant total (ou cumulatif) payé pour des sinistres survenus en 1998 s'élève à $30\,470 + 35\,012 + 25\,491 = 90\,973$ \$.

□

Le problème de provisionnement consiste à prévoir, ou à projeter, le montant final des sinistres afin de déterminer le montant que l'assureur doit

TAB. 1.6 – Triangle de développement cumulatif complété à partir de projections des montants de sinistres finaux sous la diagonale

| Année | Développement (âge) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| accident | 1 | 2 | $\cdots$ | $j$ | $\cdots$ | $J-1$ | $J$ |
| 1 | $C_{1,1}$ | $C_{1,2}$ | $\cdots$ | $C_{1,j}$ | $\cdots$ | $C_{1,J-1}$ | $C_{1,J}$ |
| 2 | $C_{2,1}$ | $C_{2,2}$ | $\cdots$ | $C_{2,j}$ | $\cdots$ | $C_{2,J-1}$ | $\hat{C}_{1,J}$ |
| $\vdots$ | | | | | | | |
| $i$ | $C_{i,1}$ | $C_{i,2}$ | $\cdots$ | $C_{i,j}$ | $\cdots$ | $\hat{C}_{i,J-1}$ | $\hat{C}_{i,J}$ |
| $\vdots$ | | | | | | | |
| $I-1$ | $C_{I-1,1}$ | $C_{I-1,2}$ | $\cdots$ | $\hat{C}_{I-1,j}$ | $\cdots$ | $\hat{C}_{I-1,J-1}$ | $\hat{C}_{I-1,J}$ |
| $I$ | $C_{I,1}$ | $\hat{C}_{I,2}$ | $\cdots$ | $\hat{C}_{I,j}$ | $\cdots$ | $\hat{C}_{I,J-1}$ | $\hat{C}_{I,J}$ |

conserver en réserve pour être en mesure de rencontrer ses obligations futures. Sous l'hypothèse que tous les sinistres seront réglés après $J$ années, cela revient à compléter le triangle de développement en remplissant sa partie inférieure, tel qu'illustré au tableau 1.6.

Avec les paiements futurs en main, le montant de la provision pour l'année d'accident $i$, $i = 1, \dots, I$, est alors donné par

$$\begin{aligned}\hat{R}_i &= \hat{C}_{i,J} - C_{i,J-i+1}\\ &= \hat{Y}_{i,I-i+2} + \hat{Y}_{i,I-i+3} + \cdots + \hat{Y}_{i,I}\end{aligned}$$

et le montant total des provisions est donné par

$$\begin{aligned}R &= \sum_{i=1}^{I} \hat{R}_i\\ &= \sum_{i=1}^{I} (\hat{C}_{i,J} - C_{i,J-i+1})\\ &= \sum_{\mathscr{D}_I^\complement} \hat{Y}_{i,j}.\end{aligned}$$

Puisque, par hypothèse, les sinistres de la première année sont tous réglés, alors $\hat{R}_1 = 0$.

Tab. 1.7 – Paiements réalisés par l'assureur YTR pour l'exercice 1.1

| Numéro dossier | Date du sinistre | Date du paiement | Montant ($) |
|---|---|---|---|
| 456 | 2000-03 | 2000-04 | 200 |
| 476 | 2000-08 | 2000-09 | 225 |
| 456 | 2000-03 | 2001-02 | 40 |
| 476 | 2000-08 | 2001-10 | 57 |
| 456 | 2000-03 | 2002-01 | 90 |
| 476 | 2000-08 | 2003-04 | 102 |
| 476 | 2000-08 | 2004-02 | 16 |
| 287 | 2001-10 | 2001-10 | 532 |
| 287 | 2001-10 | 2002-12 | 125 |
| 937 | 2001-03 | 2003-02 | 57 |
| 287 | 2001-10 | 2004-01 | 18 |
| 456 | 2002-03 | 2002-05 | 717 |
| 456 | 2002-03 | 2003-08 | 13 |
| 456 | 2002-03 | 2004-04 | 72 |
| 101 | 2003-07 | 2003-07 | 440 |
| 867 | 2003-03 | 2004-01 | 120 |
| 200 | 2004-02 | 2004-04 | 400 |
| 956 | 2004-08 | 2004-10 | 220 |

## 1.6 Exercices

**1.1** Le tableau 1.7 présente les différents paiements réalisés par l'assureur YTR.

a) Construire le triangle de développement cumulatif au 31 décembre 2004.

b) Après combien d'années le développement des sinistres est-il complété ?

**1.2** Le tableau 1.8 contient les primes acquises, les montants payés et les taux de sinistralité espérés pour les années 2000 à 2005. Estimer la réserve totale pour les années 2000 à 2005 par la méthode du taux de sinistralité espéré.

**1.3** L'actuaire de la compagnie GFR possède les informations du tableau 1.9 sur les montants cumulatifs d'indemnités payées en fonction de l'année de survenance du sinistre et des années de développement. Déterminer les quantités suivantes.

Tab. 1.8 – Primes acquises, montants payés et taux de sinistralité espérés pour l'exercice 1.2

| Année | Primes acquises | Montants payés | ELR (%) |
|---|---|---|---|
| 2000 | 200 000 | 158 000 | 85,0 |
| 2001 | 205 000 | 150 000 | 87,5 |
| 2002 | 210 000 | 145 000 | 85,0 |
| 2003 | 212 500 | 140 000 | 78,0 |
| 2004 | 220 000 | 125 000 | 80,0 |
| 2005 | 215 000 | 112 000 | 75,0 |

Tab. 1.9 – Triangle de développement cumulatif de l'assureur GFR pour l'exercice 1.3

| Année | Développement (âge) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| accident | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1993 | 1 780 | 2 673 | 2 874 | 3 094 | 3 157 | 3 166 | 3 166 |
| 1994 | 3 226 | 4 219 | 4 532 | 4 881 | 5 144 | 5 199 | |
| 1995 | 3 652 | 4 989 | 5 762 | 6 436 | 6 720 | | |
| 1996 | 2 723 | 4 301 | 5 526 | 6 231 | | | |
| 1997 | 2 923 | 4 666 | 5 349 | | | | |
| 1998 | 2 990 | 5 417 | | | | | |
| 1999 | 3 917 | | | | | | |

a) Le montant total payé pour les sinistres survenus en 1993.

b) Le montant total payé en 1997 pour les sinistres survenus en 1995.

c) Le montant total payé pour l'année de survenance 1998.

d) Le montant total payé en indemnités pendant l'année 1999.

e) Le montant total payé en indemnités pendant l'année 1994.

# 2 Modélisation déterministe des provisions

## 2.1 Modèle Chain-Ladder

Ce premier modèle et ses variantes sont considérés comme des méthodes **déterministes**, c'est-à-dire qu'elles n'utilisent pas de distribution ou de propriété statistique. Ils reposent sur l'hypothèse de stabilité du délai s'écoulant entre la survenance d'un sinistre et le règlement. Ainsi, sont exclus de la modélisation

- les effets de l'inflation ;
- les changements de structure du portefeuille ;
- les changements des contrats d'assurance ;
- les changement dans la gestion des sinistres.

Le modèle Chain-Ladder est simple et intuitif, ne considère que le triangle des coûts encourus et se base sur l'observation de l'évolution de l'encouru cumulatif d'une période de développement à l'autre : si l'encouru cumulatif augmente d'un certain pourcentage d'une période à la période suivante, on suppose que le même phénomène devrait se reproduire pour les années d'accident futures.

Les paramètres $\lambda_j$ représentant les pourcentages d'augmentation sont appelés *facteurs multiplicatifs*, ou bien *facteurs de déroulement*, ou encore *facteurs de développement*. L'indice $j$ représente le passage de la période $j$ à la période $j+1$, ou encore de la colonne $j$ à la colonne $j+1$ dans un triangle de développement. Le modèle sous-jacent est donc que : $C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j}$. Les coefficients $\lambda_j$, $j = 1, \dots, J-1$, sont estimés à partir des observations par une

Tab. 2.1 – Triangle de développement pour l'exemple 2.1

| | Développement (âge) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 100 | 150 | 175 | 180 | 200 |
| 2 | 110 | 168 | 192 | 205 | |
| 3 | 115 | 169 | 202 | | |
| 4 | 125 | 185 | | | |
| 5 | 150 | | | | |

moyenne pondérée des facteurs de développements par année d'accident :

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_j &= \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}} \\ &= \sum_{i=1}^{I-j} \frac{C_{i,j}}{C_{\Sigma,j}} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}, \quad C_{\Sigma,j} = \sum_{k=1}^{I-j} C_{k,j}.\end{aligned}$$

L'estimateur Chain-Ladder de $C_{i,j}$ pour $i + j - 1 > I$ (partie inférieure du triangle) est alors :

$$\hat{C}_{i,j}^{\text{CL}} = C_{i,I-j+1} \hat{\lambda}_{I-j+i} \cdots \hat{\lambda}_{j-1}.$$

Les provisions correspondent aux montants encore à payer pour les sinistres. La provision Chain-Ladder pour l'année d'accident $i$ est égale à la différence entre les sinistres ultimes et les sinistres payés en date d'évaluation :

$$\hat{R}_i^{\text{CL}} = \hat{C}_{i,J}^{\text{CL}} - C_{i,I-i+1}.$$

La provision totale, quant à elle, est simplement la somme des provisions par année d'accident :

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\text{CL}} &= \sum_{i=1}^{I} \hat{R}_i^{\text{CL}} \\ &= \sum_{i=1}^{I} (\hat{C}_{i,J}^{\text{CL}} - C_{i,I-i+1}).\end{aligned}$$

**Exemple 2.1.** Le tableau 2.1 contient les données d'un triangle de développement pour cinq années d'accident et autant d'années de développement.

Tab. 2.2 – Triangle de développement complété pour l'exemple 2.1

| | Développement (âge) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 100 | 150 | 175 | 180 | 200 |
| 2 | 110 | 168 | 192 | 205 | 227,78 |
| 3 | 115 | 169 | 202 | 211,91 | 235,45 |
| 4 | 125 | 185 | 216,15 | 226,75 | 251,95 |
| 5 | 150 | 224,00 | 261,72 | 274,55 | 305,06 |

Les estimateurs de la méthode Chain-Ladder des facteurs de développement sont :

$$\hat{\lambda}_4 = \frac{200}{180} = 1{,}111$$
$$\hat{\lambda}_3 = \frac{180 + 205}{175 + 192} = 1{,}049$$
$$\hat{\lambda}_2 = \frac{175 + 192 + 202}{150 + 168 + 169} = 1{,}168$$
$$\hat{\lambda}_1 = \frac{150 + 168 + 169 + 185}{100 + 110 + 115 + 125} = 1{,}493.$$

À partir de ces facteurs de développement, nous pouvons calculer les prévisions des montants cumulatifs sous la diagonale du triangle de développement. Voici quelques exemples de calcul :

$$\begin{aligned} \hat{C}^{\mathrm{CL}}_{2,5} &= C_{2,4}\hat{\lambda}_4 \\ &= 205(1{,}111) \\ &= 227{,}78 \\ \hat{C}^{\mathrm{CL}}_{3,5} &= \hat{C}^{\mathrm{CL}}_{3,4}\hat{\lambda}_4 = C_{3,3}\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_4 \\ &= 202(1{,}049)(1{,}111) \\ &= 235{,}45 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \hat{C}^{\mathrm{CL}}_{3,4} &= C_{3,3}\hat{\lambda}_3 \\ &= 202(1{,}049) \\ &= 211{,}91 \\ \hat{C}^{\mathrm{CL}}_{4,5} &= C_{4,2}\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_4 \\ &= 185(1{,}169)(1{,}049)(1{,}111) \\ &= 251{,}95. \end{aligned}$$

Les résultats complets se trouvent dans le tableau 2.2.

Nous pouvons maintenant calculer les provisions par année d'accident

TAB. 2.3 – Tableau sommaire des résultats pour l'exemple 2.1

| | Développement (âge) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Provision |
| 1 | 100 | 150 | 175 | 180 | 200 | 0,00 |
| 2 | 110 | 168 | 192 | 205 | 227,78 | 22,78 |
| 3 | 115 | 169 | 202 | 211,91 | 235,45 | 33,45 |
| 4 | 125 | 185 | 216,15 | 226,75 | 251,95 | 66,95 |
| 5 | 150 | 224,00 | 261,72 | 274,55 | 305,06 | 155,06 |
| $\hat{\lambda}_j$ | 1,493 | 1,168 | 1,049 | 1,111 | | |
| TOTAL | | | | | | 278,24 |

ainsi que la provision totale :

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_1^{\mathrm{CL}} &= C_{1,5} - C_{1,5} = 0 \\
\hat{R}_2^{\mathrm{CL}} &= \hat{C}_{2,5}^{\mathrm{CL}} - C_{2,4} = 22{,}78 \\
\hat{R}_3^{\mathrm{CL}} &= \hat{C}_{3,5}^{\mathrm{CL}} - C_{3,3} = 33{,}45 \\
\hat{R}_4^{\mathrm{CL}} &= \hat{C}_{4,5}^{\mathrm{CL}} - C_{4,2} = 66{,}95 \\
\hat{R}_5^{\mathrm{CL}} &= \hat{C}_{5,5}^{\mathrm{CL}} - C_{5,1} = 155{,}06
\end{aligned}
$$

et

$$
\hat{R}^{\mathrm{CL}} = 22{,}78 + 33{,}45 + 66{,}95 + 155{,}06 = 278{,}24.
$$

Nous pouvons regrouper l'ensemble des résultats ci-dessus comme dans le tableau 2.3. □

**Exemple 2.2.** Le tableau 2.4 contient les données d'un triangle de paiements pour les années d'accident 1997–2001. Nous devons calculer la provision totale de l'assureur à partir de ces données.

En premier lieu, il faut transformer le triangle des paiements en triangle cumulatif, comme l'exige la méthode Chain-Ladder. Le triangle cumulatif se trouve au tableau 2.5.

Afin de simplifier la notation des indices, nous allons supposer que 1997 est l'année 1. Nous avons donc $I = J = 5$. Voici un exemple de calcul de

Tab. 2.4 – Triangle de paiements pour l'exemple 2.2

| | Paiments | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Année | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 |
| 1997 | 26 312 | 31 467 | 24 672 | 13 055 | 6 158 |
| 1998 | 30 470 | 35 012 | 25 491 | 12 589 | |
| 1999 | 49 756 | 51 831 | 35 267 | | |
| 2000 | 50 420 | 52 315 | | | |
| 2001 | 56 762 | | | | |

Tab. 2.5 – Triangle de paiements cumulatifs pour l'exemple 2.2

| | Paiments cumulatifs (développement) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Année | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 |
| 1997 | 26 312 | 57 779 | 82 451 | 95 506 | 101 664 |
| 1998 | 30 470 | 65 482 | 90 973 | 103 562 | |
| 1999 | 49 756 | 101 587 | 136 854 | | |
| 2000 | 50 420 | 102 735 | | | |
| 2001 | 56 762 | | | | |

facteur de déroulement :

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{3} C_{i,3}}{\sum_{i=1}^{3} C_{i,2}} \\ &= \frac{C_{1,3} + C_{2,3} + C_{3,3}}{C_{1,2} + C_{2,2} + C_{3,2}} \\ &= \frac{82\,451 + 90\,973 + 136\,854}{57\,779 + 65\,482 + 101\,587} \\ &= 1{,}380.\end{aligned}$$

Ce résultat signifie que pour une année de survenance donnée, le total des règlements au bout de trois ans doit être 38 % supérieur à celui au bout de deux ans.

Le tableau 2.6 regroupe les facteurs de déroulement des quatre années de développement ainsi que les valeurs qui servent à les calculer. À partir de ces résultats, nous pouvons compléter la partie inférieure du triangle de développement ; les résultats se trouvent au tableau 2.7. Le montant total des provisions pour l'année 1999 est donc $167\,119 - 136\,854 = 30\,365$ $, alors que la provision totale s'élève à 250 520 $. □

TAB. 2.6 – Données pour le calcul des facteurs de déroulement dans l'exemple 2.2

| | $j$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| Quantité | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}$ | 327 583 | 310 278 | 199 068 | 101 664 |
| $\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}$ | 156 958 | 224 848 | 173 424 | 95 506 |
| $\hat{\lambda}_j$ | 2,087 | 1,380 | 1,148 | 1,064 |

TAB. 2.7 – Triangle de de développement complété pour l'exemple 2.2

| | Paiements cumulatifs (développement) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Année | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 |
| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1997 | 26 312 | 57 779 | 82 451 | 95 506 | 101 664 |
| 1998 | 30 470 | 65 482 | 90 973 | 103 562 | 110 239 |
| 1999 | 49 756 | 101 587 | 136 854 | 157 090 | 167 219 |
| 2000 | 50 420 | 102 735 | 141 769 | 162 732 | 173 224 |
| 2001 | 56 762 | 118 467 | 163 477 | 187 651 | 199 750 |

### 2.1.1 Mise à jour des estimations

Jusqu'à maintenant, nous avons effectué le calcul des provisions uniquement à la fin de la dernière année d'accident. En pratique, l'exercice sera répété à chaque bilan comptable, c'est-à-dire à la fin de chaque année d'accident. Cela permet d'effectuer annuellement une mise à jour des estimations.

**Exemple 2.3.** Reprenons le contexte de l' exemple 2.2 où la provision totale calculée par la méthodes Chain-Ladder s'élève à 250 520 \$. À la fin de l'année 2002, une nouvelle diagonale est ajoutée au triangle de développement du tableau 2.5. Le nouveau triangle de développement se trouve au tableau 2.8.

Le tableau 2.9 compare les paiements effectués dans l'année de calendrier 2002 à ceux prédits par la méthode Chain-Ladder. Nous avons donc sous-estimé les paiements par $135\,584 - 127\,652 = 7\,932$ \$.

Nous pouvons aussi calculer les provisions par année d'accident avec le nouveau triangle de développement et les comparer avec celles calculées précédemment. La tableau 2.10 dresse ce bilan. Le montant total de provisions nécessaires pour les années antérieures nécessite un apport de 21 102 \$, ce

TAB. 2.8 – Triangle de paiements cumulatifs pour l'exemple 2.3 suite à l'ajout d'une année d'accident

| | Développement (âge) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Année | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 |
| 1997 | 26 312 | 57 779 | 82 451 | 95 506 | 101 664 | 101 664 |
| 1998 | 30 470 | 65 482 | 90 973 | 103 562 | 113 455 | |
| 1999 | 49 756 | 101 587 | 136 854 | 160 233 | | |
| 2000 | 50 420 | 102 735 | 138 653 | | | |
| 2001 | 56 762 | 123 156 | | | | |
| 2002 | 61 262 | | | | | |

TAB. 2.9 – Paiements prédits pour 2002 par la méthode Chain-Ladder pour les années d'accident 1997–2001 pour les données de l'exemple 2.3 et paiements réellement effectués

| Année | Prédit | Réalisé |
|---|---|---|
| 1998 | 6 677 | 9 893 |
| 1999 | 20 236 | 23 379 |
| 2000 | 39 034 | 35 918 |
| 2001 | 61 705 | 66 394 |
| Total | 127 652 | 135 584 |

qui implique une correction de ce montant sur les exercices financiers antérieurs. □

### 2.1.2 Inconvénients de la méthode Chain-Ladder

Malgré le caractère intuitif et simple de la méthode, celle-ci comporte plusieurs défauts importants. En voici quelques uns.

- Le développement est identique pour toutes les années de survenance, ce qui n'est pas le cas en pratique s'il y a des changements dans la jurisprudence et/ou dans le management de la compagnie.
- Pour les années récentes, l'incertitude est très importante car l'évaluation de la provision correspondra au produit de plusieurs estimateurs.
- Il est impossible d'effectuer une évaluation de la précision de l'estimation puisque la méthode est déterministe. Il pourrait être intéressant (et plus

TAB. 2.10 – Provisions des années 1997–2001 calculées au terme de l'exercice 2001 et au terme de l'exercice 2002 par la méthode Chain-Ladder pour les données de l'exemple 2.3

| Année | Exercice 2001 | Exercice 2002 | Écart |
|---|---|---|---|
| 1997 | 101 664 | 101 664 | 0 |
| 1998 | 110 239 | 113 455 | −3 216 |
| 1999 | 167 219 | 173 153 | −5 934 |
| 2000 | 173 124 | 173 506 | −382 |
| 2001 | 199 632 | 211 202 | −11 570 |
| Total | | | −21 102 |

que souhaitable) que les méthodes utilisées indiquent des intervalles de confiance pour les provisions.

### 2.1.3 Variantes

Afin de solutionner certains problèmes connus de la méthode Chain-Ladder pure, il est fréquent que les praticiens utilisent une pondération des données lors de l'estimation des facteurs de déroulement. Quelques exemples de pondérations typiquement utilisées en pratique :

- plus de poids aux années récentes et moins aux années éloignées ;
- pondération en relation avec l'exposition au risque ;
- choix des données en excluant les valeurs extrêmes ;
- utilisation d'autres types de moyennes (géométrique, harmonique, etc.), chacune ayant ses avantages et ses inconvénients ;
- calcul de diverses statistiques pour évaluer les changements dans la jurisprudence et dans les méthodes de management.

Dans un contexte pratique, un actuaire utilisera souvent diverses pondérations et choisira des facteurs de déroulement selon son jugement.

Il est important de noter que lorsque les facteurs de déroulement $\lambda_j$ ne sont plus estimés par comme les moyennes pondérées

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,k}}, \quad j = 1, \dots, I-1,$$

alors on ne parle plus de la technique Chain-Ladder, mais bien de l'une de ses variantes. Formellement, la méthode appelée Chain-Ladder ne correspond qu'à l'équation ci-dessus.

TAB. 2.11 – Facteurs de déroulement $\hat{\lambda}_{i,j}$ pour les données du tableau 2.5 (haut) et divers choix possibles de facteurs $\hat{\lambda}_j$ (bas)

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1997 | 2,196 | 1,427 | 1,158 | 1,064 |
| 1998 | 2,149 | 1,389 | 1,138 | |
| 1999 | 2,042 | 1,347 | | |
| 2000 | 2,038 | | | |
| Moyenne arithmétique | 2,106 | 1,388 | 1,148 | 1,064 |
| Moyenne géométrique | 2,104 | 1,387 | 1,148 | 1,064 |
| Moyenne pondérée | 2,087 | 1,380 | 1,148 | 1,064 |
| Minimum | 2,038 | 1,347 | 1,138 | 1,064 |
| Maximum | 2,196 | 1,427 | 1,158 | 1,064 |

**Exemple 2.4.** À partir du tableau 2.5 de l'exemple 2.2, nous pouvons calculer les facteurs de déroulement $\hat{\lambda}_{i,j}$ pour passer, pour l'année d'accident $i = 1, \dots, I$, de l'âge de développement $j$ à l'âge $j+1$, $j = 1, \dots, I-i$. Le tableau 2.11 montre divers choix possibles pour calculer, à partir de ces statistiques, des facteurs de déroulement $\hat{\lambda}_j$ uniques par âge de développement. La moyenne pondérée correspond à la méthode Chain-Ladder.

La tendance actuelle de l'industrie privée consiste à laisser l'actuaire choisir d'instinct les facteurs de déroulement $\lambda_j$. □

## 2.2 Bornhuetter-Ferguson

La méthode de provisionnement de Bornhuetter-Ferguson est basée sur le célèbre article de Bornhuetter et Ferguson (1972). Le but de cette méthode est d'assurer une meilleure stabilité de l'estimation des provisions pour les jeunes années de survenance, celles qui dépendent beaucoup des premiers paiements. La méthode proposée se décompose en trois étapes :

1. déterminer les pertes ultimes espérées ;
2. calculer les taux de déroulement en utilisant la méthode Chain-Ladder ;
3. déterminer les proportions du montant ultime qu'il reste à payer.

Les pertes ultimes espérées peuvent être calculées selon le nombre de polices vendues, les primes reçues, ou bien établies directement à partir du jugement de l'actuaire. Dans tous les cas, l'information peut provenir d'une source extérieure aux données du triangle. De manière historique, les actuaires utilisent surtout la *méthode des rapports sinistres/primes espérés* pour trouver les pertes ultimes.

La méthode Bornhuetter-Ferguson utilise une procédure analogue à celle de la méthode Chain-Ladder pour le calcul des taux de déroulement. Ces taux de déroulement sont utilisés avec les pertes ultimes pour extrapoler les pertes dans le futur. Autrement dit, la structure des facteurs de déroulement est utilisée pour exprimer l'encouru cumulatif comme un pourcentage des pertes ultimes. On rappelle que pour la méthode Chain-Ladder, on avait

$$\hat{C}_{i,J}^{\text{CL}} = C_{i,j} \prod_{k=j}^{I-1} \lambda_k,$$

où $\prod_{k=j}^{I-1} \lambda_k$ représente le produit des facteurs de déroulement jusqu'à la période ultime, $C_{i,I}$ est l'encouru ultime et $C_{i,j}$ est l'encouru cumulatif de l'année de survenance $i$ à la période de déroulement $j$. La provision $R_i$ de l'année d'accident $i$ à partir de la période de développement $j$ de la méthode Chain-Ladder est, par définition, la différence entre l'encouru ultime et l'encouru à la période de déroulement $j$ :

$$R_i^{\text{CL}} = \hat{C}_{i,I}^{\text{CL}} - C_{i,j}.$$

En combinant ces deux dernières équations, on obtient

$$R_i^{\text{CL}} = \hat{C}_{i,I} \left(1 - \frac{1}{\prod_{k=j}^{I-1} \lambda_k}\right) = \hat{C}_{i,I}^{\text{CL}}(1 - \beta_j),$$

où $\beta_j = 1/\prod_{k=j}^{I-1} \lambda_k$ a été utilisé afin de simplifier la notation. La variable $\hat{C}_{i,n}$ correspond à la perte ultime espérée de l'année de survenance $i$. Alors que la méthode Chain-Ladder utilise les données du triangle et les $\lambda_k$ pour trouver la valeur de $\hat{C}_{i,I}$, la méthode Borhuetter-Ferguson se permet d'utiliser une source extérieure aux données du triangle pour son estimation.

Pour trouver les pertes incrémentales $Y_{i,j}$ prévues pour une année d'accident et une période donnée, on utilise la même logique. D'abord, on trouve les provisions à partir du début de la période jusqu'à la période ultime. Ensuite, on trouve les provisions à partir de la fin de la période ciblée jusqu'à la période ultime. La différence entre les deux provisions représente les pertes incrémentales prévues, notées $Y_{i,j}$.

**Exemple 2.5.** On suppose que les facteurs de développement suivants ont été estimés par la méthode Chain-Ladder :

| $1\to 2$ | $2\to 3$ | $3\to 4$ | $4\to 5$ | $5\to\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,41 | 1,22 | 1,16 | 1,08 | 1,04 |

et que

- pour l'année 1998, on estime le 31/12/1999 des paiements cumulatifs de 420 000 $ ;
- les primes acquises de 1998 sont de 1 000 000 $ ; et
- le rapport sinistres/primes espéré est de 0,600.

Estimer les provisions pour l'année d'accident 1998

1. en utilisant la méthode du rapport sinistres/primes espéré ;
2. en utilisant la méthode Chain-Ladder ; et
3. en utilisant la méthode Bornhuetter-Ferguson.

La première évaluation des provisions de l'année d'accident 1998 est le 31 décembre 1998. Ainsi, le 31 décembre 1999, on est à la deuxième évaluation.

1. Méthode du rapport sinistres/primes espéré :

$$\begin{aligned}\underbrace{\hat{C}_i^{LR}}_{\text{Pertes ultimes attendues selon LR}} &= \underbrace{E[LR]}_{\text{Rapport sinistres/primes espéré}} \times \text{Primes acquises}_i\\ &= 0{,}60 * 1\,000\,000 = 600\,000\\ \underbrace{R_i^{LR}}_{\text{Provisions selon la méthode du rapport sinistres/primes}} &= \hat{C}_i^{LR} - \underbrace{C_{i,2}}_{\text{Paiements cumulatifs à la deuxième évaluation}}\\ &= 600\,000 - 420\,000 = 180\,000.\end{aligned}$$

2. Méthode Chain-Ladder :

$$\begin{aligned}\underbrace{\hat{C}_i^{CL}}_{\text{Pertes ultimes attendues selon CL}} &= C_{i,2} \times (\prod_{k=2}^{\infty} \lambda_k)\\ &= 420\,000 \times 1{,}22 * 1{,}16 * 1{,}108 * 1{,}04\\ &= 420\,000 * 1{,}58955 = 667\,612\\ \underbrace{R_i^{CL}}_{\text{Provisions selon la méthode CL}} &= \hat{C}_i^{CL} - C_{i,2}\\ &= 667\,612 - 420\,000 = 247\,612.\end{aligned}$$

3. Méthode Bornhuetter-Ferguson :

$$\begin{aligned}R_i^{BF} &= \hat{C}_i^{LR} \times (1 - \frac{1}{\prod_{k=2}^{\infty} \lambda_k})\\ &= 600\,000(1 - \frac{1}{1{,}58955}) = 222\,535.\end{aligned}$$

On voit que le 222 535 \$ n'a pas été trouvé à l'aide de $C_{i,2} = 420\,000$ \$.

Le modèle est très proche de celui de Chain-Ladder. En effet, pour la provision totale, Bornhuetter-Ferguson applique le modèle Chain-Ladder en supposant un $C_{i,2} = 600\,000/1{,}58955 = 377\,465$ qui génèreraient un $C_i^{CL} = 600\,000$ avec les $\prod_{k=2}^{\infty} \lambda_k = 1{,}58955$, au lieu du $C_{i,2} = 420\,000$.

□

**Exemple 2.6.** Ventiler les provisions obtenues par année de développement et analyser les résultats.

Pour les trois méthodes :

1. La méthode du rapport sinistres/primes espéré :

   Cette méthode ne permet pas de ventiler les paiements et d'analyser son développement.

2. La méthode Chain-Ladder :

   Les $\lambda_k$ permettent de voir l'évolution des paiements :

| Date ($j$) | $\hat{C}_{i,j}^{CL}$ | $\hat{Y}_{i,j}^{CL}$ |
|---|---|---|
| Décembre 2000 | $420\,000 * 1{,}22 = 512\,400$ | 92 400 |
| Décembre 2001 | $420\,000 * 1{,}22 * 1{,}16 = 594\,384$ | 81 984 |
| Décembre 2002 | $420\,000 * 1{,}22 * 1{,}16 * 1{,}08 = 641\,935$ | 47 551 |
| Décembre 2003 | $420\,000 * 1{,}22 * 1{,}16 * 1{,}08 * 1{,}04 = 667\,612$ | 25 677 |

3. La méthode Bornhuetter-Ferguson :

   Les $\lambda_k$ permettent aussi de voir l'évolution des paiements. Pour la provision de l'année d'accident 1998, l'évolution des paiements est

   - du temps 2 au temps $\infty$, le facteur de développement est de $1{,}22 * 1{,}16 * 1{,}08 * 1{,}04 = 1{,}58955$ ;
   - du temps 3 au temps $\infty$, le facteur de développement est de $1{,}16 * 1{,}08 * 1{,}04 = 1{,}302912$ ;
   - du temps 4 au temps $\infty$, le facteur de développement est de $1{,}08 * 1{,}04 = 1{,}1232$ ; et
   - du temps 5 au temps $\infty$, le facteur de développement est de 1,04.

   Ainsi,

| Date ($j$) | $\hat{C}_{i,j}^{BF}$ | $\hat{Y}_{i,j}^{BF}$ |
|---|---|---|
| Décembre 2000 | $600\,000\left((1-\frac{1}{1{,}58955})-(1-\frac{1}{1{,}302912})\right)+420\,000=503\,039$ | 83 039 |
| Décembre 2001 | $600\,000\left((1-\frac{1}{1{,}302912})-(1-\frac{1}{1{,}1232})\right)+503\,039=576\,724$ | 73 685 |
| Décembre 2002 | $600\,000\left((1-\frac{1}{1{,}1232})-(1-\frac{1}{1{,}04})\right)+576\,724=619\,459$ | 42 735 |
| Décembre 2003 | $600\,000\left((1-\frac{1}{1{,}04})\right)+619\,459=642\,535$ | 23 077 |

Cette méthode permet de stabiliser l'évaluation de la provision, mais demande de trouver le rapport sinistres/primes estimé.

□

## 2.3 Méthode London Chain

Cette méthode se veut une généralisation de la méthode Chain-Ladder. On se rappelle que la méthode Chain-Ladder suppose la forme suivante :

$$C_{i,j+1}=\lambda_j C_{i,j}.$$

Dans le cas de la méthode London Chain, un autre paramètre est ajouté pour l'ajustement

$$C_{i,j+1}=\lambda_j C_{i,j}+\alpha_j.$$

Ainsi, en plus de considérer une tendance multiplicative entre les périodes (les facteurs $\lambda_j$), on suppose qu'il y a aussi une tendance additive (les facteurs $\alpha_j$). Si la tendance incrémentale est nulle, il est possible d'obtenir la méthode Chain-Ladder en choisissant une méthode d'estimation appropriée.

La figure 2.1 représente le nuage de points et la droite entre les périodes $j$ et $j+1$, ici la transition entre une période 2 et une période 3.

Pour déterminer les paramètres de la droite, on utilise les moindres carrés. Ainsi, on veut trouver les paramètres $\hat{\lambda}_j$ et $\hat{\alpha}_j$ qui minimisent :

$$Q=\sum_{i=1}^{n-k}(C_{i,k+1}-\alpha_k-\lambda_k C_{i,k})^2.$$

On a alors

$$\frac{\delta Q}{\delta \alpha_k}=\sum_{i=1}^{n-k}(C_{i,k+1}-\alpha_k-\lambda_k C_{i,k})=0$$

$$\frac{\delta Q}{\delta \lambda_k}=\sum_{i=1}^{n-k}C_{i,k}(C_{i,k+1}-\alpha_k-\lambda_k C_{i,k})=0.$$

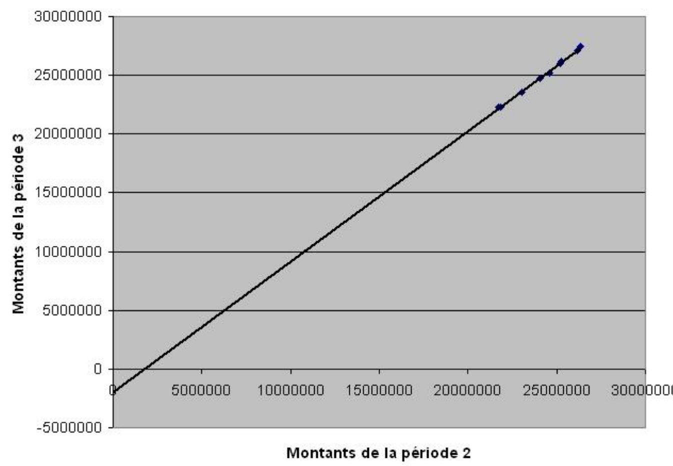


FIG. 2.1 – Droite des moindres carrés pour le nuage de points entre les périodes 2 et 3

$$\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1} - (n-k)\alpha_k - \lambda_k \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} = 0 \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}C_{i,k+1} - \alpha_k \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} - \lambda_k \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}^2 = 0. \tag{2.2}$$

En effectuant (2.2) - $\frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}}{n-k} \times$ (2.1), on obtient

$$\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}C_{i,k+1} - \overline{C}_{k+1}^{(k)}\overline{C}_k^{(k)} = \lambda_k \left(\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}^2 - \overline{C}_k^{(k)}\overline{C}_k^{(k)}\right)$$

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}C_{i,k+1} - \overline{C}_{k+1}^{(k)}\overline{C}_k^{(k)}}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}^2 - \overline{C}_k^{(k)2}}$$

avec

$$\overline{C}_k^{(k)} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}$$

$$\overline{C}_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}$$

alors que

$$\hat{\alpha}_k = \overline{C}_{k+1}^{(k)} - \hat{\lambda}_k \overline{C}_k^{(k)}.$$

On note que $\alpha_n$ ne peut être calculé car on cherche à la fois une tendance multiplicative et additive alors qu'il n'y a qu'un seul couple d'observations. La convention veut que l'on ne considère que l'effet multiplicatif pour cette dernière période de développement. Il est généralement préférable d'utiliser la méthode London Chain seulement s'il y a de bonnes raisons de croire qu'il y a un facteur additif en plus d'un facteur multiplicatif dans le modèle.

**Exemple 2.7.** Estimer les provisions avec la méthode London Chain

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1997 | 26 312 | 57 779 | 82 451 | 95 506 | 101 604 |
| 1998 | 30 470 | 65 482 | 90 973 | 103 562 | |
| 1999 | 49 756 | 101 587 | 136 854 | | |
| 2000 | 50 420 | 102 735 | | | |
| 2001 | 56 762 | | | | |

Évidemment, l'évaluation s'effectue beaucoup plus rapidement par ordinateur… On calcule $\alpha_1$ et $\lambda_1$ pour l'exemple :

$$\begin{aligned}
\overline{C}_1^{(1)} &= \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5-1} C_{i,1} \\
&= \frac{26\,312 + 30\,470 + 49\,756 + 50\,420}{4} = 39\,239{,}5 \\
\overline{C}_{1+1}^{(1)} &= \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5-1} C_{i,1+1} \\
&= \frac{57\,779 + 65\,482 + 101\,587 + 102\,735}{4} = 81\,895{,}75.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_1 &= \frac{\frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5-1} C_{i,1}C_{i,1+1} - \overline{C}_{1+1}^{(1)}\overline{C}_1^{(1)}}{\frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5-1} C_{i,1}^2 - \overline{C}_1^{(1)2}} \\
&= \frac{\frac{1}{4}(26\,312 * 57\,779 + 30\,470 * 65\,482 + 49\,756 * 101\,587 + 50\,420 * 102\,735) - 39\,239{,}5 *}{\frac{1}{4}(26\,312^2 + 30\,470^2 + 49\,756^2 + 50\,420^2) - 39\,239{,}5^2} \\
&= 1{,}86768.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_1 &= \overline{C}_{1+1}^{(1)} - \hat{\lambda}_1\overline{C}_1^{(1)} \\
&= 81\,895{,}75 - 1{,}86768 * 39\,239{,}5 \\
&= 8\,608{,}88.
\end{aligned}$$

Au final, on obtient les résultats suivants :

| k | $1 \to 2$ | $2 \to 3$ | $3 \to 4$ | $4 \to 5$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lambda_k$ | 1,86768 | 1,3533 | 1,1469 | 1,0638 |
| $\alpha_k$ | 8 608,92 | 1 495,52 | 42,21 | |

Donc, si on complète le triangle, la dernière ligne est

$$\begin{aligned}
\widehat{C}_{5,2} &= 8\,608{,}92 + 1{,}86768 * 53\,762 = 109\,019 \\
\widehat{C}_{5,3} &= 1\,495{,}52 + 1{,}3533 * 109\,019 = 14\,031 \\
&\dots
\end{aligned}$$

□

## 2.4 Méthode des provisions constituées

Pour cette méthode, deux facteurs de projection sont utilisés : un pour les paiements et un pour les provisions. La méthode Chain-Ladder classique sur l'encouru total (qui correspond aux provisions individuelles et aux paiements) suppose que les paiements et les provisions se développent de manière identique. La méthode des provisions constituées utilise davantage d'informations que le modèle Chain-Ladder classique et est utile pour les branches à développement très lentes, ou lorsque très peu de sinistres sont réglés la première année.

**Modèle pour les provisions** On note

- $Q_{i,j}$ est la provision pour les sinistres survenus au cours de l'année $i$, inscrite au passif du bilan en fin d'année $i+j-1$.

Le modèle est

$$Q_{i,j+1} = k_{j+1} Q_{ij} - Y_{i,j+1},$$

où $k_{j+1}$ mesure la variation entre les années $j$ et $j+1$ de la prévision faite sur le coût total de sinistres survenus à l'année $i$.

On estime $k_{j+1}$ :

$$\hat{k}_{j+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} \left(Y_{ij+1} + Q_{ij+1}\right)}{\sum_{i=1}^{n-j} Q_{ij}}.$$

**Modèle pour les paiements** Le montant $Y_{i,j+1}$ payé au cours de l'année de développement $j+1$ est une fraction de $Q_{ij}$ :

$$Y_{i,j+1} = h_{j+1} Q_{ij}.$$

On estime $h_{j+1}$

$$\hat{h}_{j+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} Y_{ij+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} Q_{ij}}$$

**Extrapolation des triangles** Le triangle des paiements et des provisions sont complétés simultanément, diagonale par diagonale, en utilisant le formules précédentes l'une après l'autre.

1. On commence par la première diagonale inconnue des paiements :

$$\hat{Y}_{i,n-i+2} = \hat{h}_{n-i+2} Q_{in-i+1} \text{ pour } i = 2, \dots, n.$$

2. On complète la première diagonale inconnue des provisions :

$$\hat{Q}_{i,n-i+2} = k_{n-i+2} Q_{in-i+1} - \hat{Y}_{i,n-i+2} \text{ pour } i = 2, \dots, n$$

3. On commence par l'autre diagonale inconnue des paiements.

4. ...

On peut combiner ce modèle avec le modèle classique Chain-Ladder. En combinant les équations des provisions et des paiements, on obtient

$$\begin{aligned}
Q_{i,j+1} &= k_{j+1} Q_{ij} - Y_{i,j+1} \\
&= k_{j+1} Q_{ij} - h_{j+1} Q_{ij} \\
&= (k_{j+1} - h_{j+1}) Q_{ij} \\
&= \left( \frac{\sum_{i=1}^{n-j} (Y_{ij+1} + Q_{ij+1})}{\sum_{i=1}^{n-j} Q_{ij}} - \frac{\sum_{i=1}^{n-j} Y_{ij+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} Q_{ij}} \right) Q_{ij} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-j} Q_{ij+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} Q_{ij}} Q_{ij},
\end{aligned}$$

ce qui revient à la méthode Chain-Ladder. Cette méthode utilise plus d'informations que la méthode Chain-Ladder, on peut donc choisir des facteurs de développements différents pour les paiements et les provisions (qui, elles, sont plus subjectives que les paiements - raison fiscales, politiques, etc.).

**Exemple 2.8.** Compléter les triangles de paiements et de provisions suivants :

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1997 | 15,40 | 4,90 | 7,77 | 7,19 | 4,3 |
| 1998 | 16,61 | 2,60 | 11,03 | 9,12 | |
| 1999 | 21,35 | 7,29 | 5,59 | | |
| 2000 | 24,52 | 8,49 | | | |
| 2001 | 30,47 | | | | |

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1997 | 20,0 | 17,39 | 11,06 | 4,50 | 0,60 |
| 1998 | 22,0 | 22,40 | 13,13 | 5,20 | |
| 1999 | 22,5 | 18,66 | 15,22 | | |
| 2000 | 25,0 | 20,32 | | | |
| 2001 | 25,0 | | | | |

On a

$$
\begin{aligned}
\hat{k}_{1+1} &= \frac{\sum_{i=1}^{5-1}(Y_{i1+1}+Q_{i1+1})}{\sum_{i=1}^{5-1}Q_{i1}} \\
&= \frac{17{,}39+4{,}90+22{,}4+2{,}6+18{,}66+7{,}29+20{,}32+8{,}49}{20{,}0+22{,}0+22{,}5+25{,}0} \\
&= 1{,}1402 \\
\hat{k}_3 &= 1{,}0915 \\
\hat{k}_4 &= 1{,}0752 \\
\hat{k}_5 &= 1{,}0889
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\hat{h}_{1+1} &= \frac{\sum_{i=1}^{5-1}Y_{i1+1}}{\sum_{i=1}^{5-1}Q_{i1}} \\
&= \frac{4{,}90+2{,}6+7{,}29+8{,}49}{20{,}0+22{,}0+22{,}5+25{,}0} \\
&= 0{,}2601 \\
\hat{h}_3 &= 0{,}4173 \\
\hat{h}_4 &= 0{,}6742 \\
\hat{h}_5 &= 0{,}9556.
\end{aligned}
$$

Et donc :

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1997 | 15,40 | 4,90 | 7,77 | 7,19 | 4,3 |
| 1998 | 16,61 | 2,60 | 11,03 | 9,12 | 4,97 |
| 1999 | 21,35 | 7,29 | 5,59 | 10,26 | 5,83 |
| 2000 | 24,52 | 8,49 | 8,48 | 9,24 | 5,25 |
| 2001 | 30,47 | 6,50 | 9,18 | 10,00 | 5,68 |

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1997 | 20,0 | 17,39 | 11,06 | 4,50 | 0,60 |
| 1998 | 22,0 | 22,40 | 13,13 | 5,20 | 0,69 |
| 1999 | 22,5 | 18,66 | 15,22 | 6,10 | 0,81 |
| 2000 | 25,0 | 20,32 | 13,70 | 5,49 | 0,73 |
| 2001 | 25,0 | 22,0 | 14,84 | 5,95 | 0,79 |

En sommant les provisions et les paiements, on obtient les encourus totaux.

□

## 2.5 Méthode des moindres carrés de DeVylder

Cette méthode est basée sur les incréments et non plus les montants cumulatifs. Elle repose sur l'équation :

$$Y_{i,j} = r_j p_i,$$

où

- $p_i$ est la charge ultime des sinistres survenus l'années $i$ ; et
- $r_j$ est la proportion du montant $p_i$ payé dans l'année de déroulement $j$.

Le triangle peut s'exprimer comme :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $r_1 p_1$ | $r_2 p_1$ | … | $r_{n-1} p_1$ | $r_n p_1$ |
| $r_1 p_2$ | $r_2 p_2$ | … | $r_{n-1} p_2$ | |
| … | … | … | | |
| $r_1 p_{n-1}$ | $r_2 p_{n-1}$ | | | |
| $r_1 p_n$ | | | | |

Afin d'obtenir des estimateurs pour les paramètres inconnus, on minimise la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées $Y_{ij}$ et leur forme théorique $r_j p_i$ :

$$\sum_{i+j \leq n} (Y_{i,j} - r_j p_i)^2$$

avec contrainte $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 1$. On obtient

$$\hat{p}_i = \frac{\sum_j \hat{r}_j Y_{ij}}{\sum_j \hat{r}_j^2}$$

$$\hat{r}_j = \frac{\sum_i \hat{p}_i Y_{ij}}{\sum_i \hat{p}_i^2}$$

qu'il faut résoudre numériquement de manière récursive. Afin de s'assurer que $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 1$, après chaque itération, on peut diviser chaque nouveau $\hat{r}_j$ par la somme des nouveaux $\hat{r}_j$.

**Exemple 2.9.** On considère le triangle de paiement suivant :

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 (1997) | 26 312 | 31 467 | 24 672 | 13 055 | 6 158 |
| 2 (1998) | 30 470 | 35 012 | 25 491 | 12 589 | |
| 3 (1999) | 49 756 | 51 831 | 35 267 | | |
| 4 (2000) | 50 420 | 52 315 | | | |
| 5 (2001) | 56 762 | | | | |

Trouver la provision totale, si on a estimé que les $\hat{r}_j$ (après convergence de l'algorithme) sont égaux à :

| $\hat{r}_1$ | $\hat{r}_2$ | $\hat{r}_3$ | $\hat{r}_4$ | $\hat{r}_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,2875 | 0,3086 | 0,2221 | 0,1210 | 0,0606 |

Les $\hat{r}_j$ correspondent aux proportions annuelles payées de l'encouru total.

$$\begin{aligned}
\hat{p}_1 &= \frac{\sum_j \hat{r}_j Y_{1j}}{\sum_j \hat{r}_j^2} \\
&= \frac{26\,312 * 0{,}2875 + 31\,467 * 0{,}3086 + 24\,672 * 0{,}2221 + 13\,055 * 0{,}1210 + 6\,158 * 0{,}0606}{0{,}2875^2 + 0{,}3086^2 + 0{,}2221^2 + 0{,}1210^2 + 0{,}0606^2} \\
&= 100\,603{,}22 \\
\hat{p}_2 &= 110\,585{,}90 \\
\hat{p}_3 &= 167\,806{,}52 \\
\hat{p}_4 &= 172\,235{,}48 \\
\hat{p}_5 &= 197\,480{,}59.
\end{aligned}$$

Donc, la provision revient à être $\hat{p}_j - C_{5-j+1,j}$ !

$$\begin{aligned}
\hat{p}_1 - C_{5,j} &= 101\,603{,}22 - 101\,604 \\
\hat{p}_2 - C_{4,j} &= 110\,585{,}90 - 103\,562 \\
\hat{p}_3 - C_{3,j} &= 167\,806{,}52 - 136\,854 \\
\hat{p}_4 - C_{2,j} &= 172\,235{,}48 - 102\,735 \\
\hat{p}_5 - C_{1,j} &= 197\,480{,}59 - 56\,762.
\end{aligned}$$

□

## 2.6 Exercices

**2.1** Le tableau 2.12 présente les différents paiements réalisés par l'assureur YTR.

a) Construire les triangles des paiements cumulés.

b) Calculer les différents facteurs de développement. Discuter.

c) Quel est le nombre de périodes nécessaires pour observer le développement complet des paiements ?

d) Déterminer le montant de provision nécessaire en utilisant la méthode Chain-Ladder.

TAB. 2.12 – Paiements réalisés par l'assureur YTR

| Date paiement | Numéro assuré | Date survenance | Montant |
|---|---|---|---|
| 04/2000 | 456 | 03/2000 | 200 |
| 09/2000 | 476 | 08/2000 | 225 |
| 02/2001 | 456 | 03/2000 | 40 |
| 10/2001 | 476 | 08/2000 | 57 |
| 01/2002 | 456 | 03/2000 | 90 |
| 04/2003 | 476 | 08/2000 | 102 |
| 02/2004 | 476 | 08/2000 | 16 |
| 10/2001 | 287 | 10/2001 | 532 |
| 12/2002 | 287 | 10/2001 | 125 |
| 02/2003 | 937 | 03/2001 | 57 |
| 01/2004 | 287 | 10/2001 | 18 |
| 05/2002 | 456 | 03/2002 | 717 |
| 08/2003 | 456 | 03/2002 | 13 |
| 04/2004 | 456 | 03/2002 | 72 |
| 07/2003 | 101 | 07/2003 | 440 |
| 01/2004 | 867 | 03/2003 | 120 |
| 04/2004 | 200 | 02/2004 | 400 |
| 10/2004 | 956 | 08/2004 | 220 |

e) Un facteur de développement peut-il être inférieur à 1 ?

**2.2** L'actuaire de la compagnie GFR possède les informations suivantes sur les montants payés cumulatifs, en fonction des années de développement et de l'année de survenance du sinistre :

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1993 | 1 780 | 2 673 | 2 874 | 3 094 | 3 157 | 3 166 | 3 166 |
| 1994 | 3 226 | 4 219 | 4 532 | 4 881 | 5 144 | 5 199 | |
| 1995 | 3 652 | 4 989 | 5 762 | 6 436 | 6 720 | | |
| 1996 | 2 723 | 4 301 | 5 526 | 6 231 | | | |
| 1997 | 2 923 | 4 666 | 5 349 | | | | |
| 1998 | 2 990 | 5 417 | | | | | |
| 1999 | 3 917 | | | | | | |

En utilisant diverses variantes de la méthode Chain-Ladder, estimer les provisions pour ces données,

a) si on estime les facteurs de déroulement par la méthode *Chain Ladder* usuelle ;

b) si on estime les facteurs de déroulement ($\lambda_j$) par une moyenne arithmétique ;

c) si on estime les facteurs de déroulement ($\lambda_j$) par une moyenne géométrique.

**2.3** L'actuaire de la compagnie *Dujardin et cie* a collecté les informations suivantes sur les montants payés par année $Y_{i,j}$, en fonction des années de développement et de l'année de survenance du sinistre

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1994 | 192 | 251 | 153 | 145 | 98 | 0 |
| 1995 | 205 | 280 | 195 | 150 | 102 | |
| 1996 | 230 | 345 | 230 | 212 | | |
| 1997 | 288 | 410 | 275 | | | |
| 1998 | 398 | 563 | | | | |
| 1999 | 530 | | | | | |

Estimer les provisions pour ces données si on estime les facteurs de déroulement par la méthode Chain-Ladder usuelle.

**2.4** Pour une certaine années d'accident, on a les informations suivantes :

- primes acquises : 1 000 \$ ;
- rapport Sinistres/Primes espéré : 0,650 ;
- $\prod_{k=2}^{ult} \lambda_k = 1{,}12$ ;
- sinistres encourus à ce jour : 600 \$ ; et
- sinistres payés à ce jour : 500 \$.

Calculer l'estimation des montants des provisions en utilisant la technique de Bornhuetter-Ferguson.

**2.5** On suppose qu'on a estimé les facteurs de développement par la méthode Chain-Ladder usuelle et qu'on a obtenu

| $1 \to 2$ | $2 \to 3$ | $3 \to 4$ | $4 \to 5$ | $5 \to \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,75 | 1,6 | 1,4 | 1,1 | 1,05 |

- Pour l'année 1998, on estime le 31/12/1999 des paiements cumulatifs de 320 000 \$ ;
- les primes acquises de 1998 sont de 1 000 000 \$ ; et

- le rapport sinistres/primes espéré de l'année 1998 est de 0,650.

Estimer les provisions pour l'année d'accident 1998 :

a) en utilisant la méthode du rapport sinistres/primes espéré ;

b) en utilisant la méthode Chain-Ladder ; et

c) en utilisant la méthode Bornhuetter-Ferguson.

**2.6** On suppose qu'on a estimé les facteurs de développement par la méthode Chain-Ladder

| $1 \to 2$ | $2 \to 3$ | $3 \to 4$ | $4 \to 5$ | $5 \to 6$ | $6 \to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,55 | 1,5 | 1,3 | 1,25 | 1,15 | 1,05 |

- Pour l'année 1999, on estime le 31/12/1999 des paiements cumulatifs de 120 000 $ ;
- les primes acquises de 1999 sont de 1 350 000 $ ; et
- le rapport sinistres/primes espéré de l'année 1999 est de 0,600.

Estimer les provisions pour l'année d'accident 1999 :

a) en utilisant la méthode du rapport sinistres/primes espéré ;

b) en utilisant la méthode Chain-Ladder ; et

c) en utilisant la méthode Bornhuetter Ferguson.

d) Le 31/12/2002, les paiements cumulatifs sont maintenant de 200 000 $. Pour les trois méthodes précédentes, calculer la différence entre la réalisation et la projection.

e) Quel est l'avantage d'utiliser la méthode de Bornhuetter-Ferguson par rapport à celle de Chain-Ladder ?

**2.7** En utilisant le triangle des paiements cumulatifs suivants

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1993 | 1 780 | 2 673 | 2 874 | 3 094 | 3 157 | 3 166 | 3 166 |
| 1994 | 3 226 | 4 219 | 4 532 | 4 881 | 5 144 | 5 199 | |
| 1995 | 3 652 | 4 989 | 5 762 | 6 436 | 6 720 | | |
| 1996 | 2 723 | 4 301 | 5 526 | 6 231 | | | |
| 1997 | 2 923 | 4 666 | 5 349 | | | | |
| 1998 | 2 990 | 5 417 | | | | | |
| 1999 | 3 917 | | | | | | |

répondre à la question suivante.

a) Déterminer la provision pour l'année d'accident 1998 par la méthode Chain-Ladder.

b) Déterminer la provision pour les années d'accident 1998 par la méthode London Chain.

c) Pourquoi peut-on dire que la méthode London Chain inclut la méthode Chain Ladder ?

# 3 Modélisation stochastique des réserves

Les modèles introduits dans le chapitre précédent ne comportaient pas d'élément aléatoire, ils étaient donc déterministes. À l'inverse, un modèle stochastique suppose que la variable à modéliser possède un élément aléatoire. La plupart du temps, on lui associe une loi de probabilité, ou bien sinon, une mesure de son caractère variable, par exemple sa variance. Les modèles stochastiques permettent de déterminer le degré d'incertitude de la réserve, ce qui peut s'avérer une information capitale pour les stratégies financières de la compagnie.

## 3.1 Modèle de Mack

Ce modèle non-paramétrique peut être vu comme la version stochastique de la méthode *Chain-Ladder*. Il permet d'estimer, en plus des valeurs prédites des réserves, les erreurs commises lors de l'évaluation de celles-ci.

Les hypothèses du modèle de Mack sont les suivantes.

(M1) Les montants cumulatifs des sinistres encourus $C_{i,j}$ d'années d'accidents différentes sont indépendants.

(M2) Il existe des facteurs de développement $f_1, \dots, f_{J-1} > 0$ et des paramètres $\sigma_1^2, \dots, \sigma_{J-1}^2 > 0$ tel que

$$E[C_{i,j}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j-1}] = E[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = f_{j-1}C_{i,j-1}$$
$$\mathrm{Var}[C_{i,j}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j-1}] = \mathrm{Var}[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = \sigma_{j-1}^2 C_{i,j-1}$$

pour tout $i = 1, \dots, I$ et $j = 2, \dots, J$.

Avec ces hypothèses, ce modèle stochastique fournit exactement les mêmes réserves que le modèle Chain-Ladder.

Sous les hypothèses (M1) et (M2), pour tout $k > I - i + 1$, on a

$$E[C_{i,j+1}|C_{i,1},...,C_{i,j}] = \lambda_{I-i+1}\lambda_{I-i+2}\ldots\lambda_{k-1}C_{i,I+1-i}.$$

Sous les hypothèses (M1) et (M2), les estimateurs standards de Chain-Ladder, c'est-à-dire

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}}, \quad j = 1, \ldots, I-1$$

sont sans biais et non-corrélés. La non-corrélation est essentielle dans le modèle puisqu'elle permet d'écrire

$$E[\hat{\lambda}_{I-i+1}\hat{\lambda}_{I-i+2}\ldots\hat{\lambda}_{k-1}] = \lambda_{I-i+1}\lambda_{I-i+2}\ldots\lambda_{k-1}$$

qui est utilisée dans l'estimation des réserves.

Une méthode stochastique a l'avantage de pouvoir estimer l'erreur d'une prévision.

### 3.1.1 Estimation de l'erreur

L'erreur quadratique moyenne de prévision de la provision de l'année d'accident $i$ est

$$\begin{aligned}\mathrm{MSEP}(\hat{R}_i) &= E[(\hat{R}_i - R_i)^2|\mathscr{D}_I]\\ &= \mathrm{Var}[R_i|\mathscr{D}_I] + (\hat{R}_i - E[R_i|\mathscr{D}_I])^2.\end{aligned}$$

Nous utilisons comme estimateur de cette erreur :

$$\widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_i) = (\hat{C}_{i,J}^{\mathrm{CL}})^2 \sum_{k=I-i+1}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}^{\mathrm{CL}}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}}\right)$$

pour $i = 2, \ldots, I$ et où $\hat{C}_{i,k}^{\mathrm{CL}} = C_{i,I-i+1}\hat{\lambda}_{I-i+1}\cdots\hat{\lambda}_{k-1}$, $k > I - i + 1$, sont les projections des valeurs futures des $C_{i,k}$, et $\hat{C}_{i,I-i+1}^{\mathrm{CL}} = C_{i,I-i+1}$.

Le choix de $\hat{\sigma}_{I-1}^2$ est effectué en extrapolant de telle sorte que :

$$\frac{\hat{\sigma}_{I-3}^2}{\hat{\sigma}_{I-2}^2} = \frac{\hat{\sigma}_{I-2}^2}{\hat{\sigma}_{I-1}^2}$$

tout en s'assurant que $\hat{\sigma}_{I-3}^2 > \hat{\sigma}_{I-2}^2$. Ainsi,

$$\hat{\sigma}_{I-1}^2 = \min\left\{\frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2}, \min\{\hat{\sigma}_{I-3}^2, \hat{\sigma}_{I-2}^2\}\right\}.$$

Nous disposons d'une estimation de la provision $R_i$, $\hat{R}_i$, et une estimation de l'erreur quadratique de prévision $\mathrm{MSEP}(\hat{R}_i)$, $\widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_i)$. Avec ces quantités nous pouvons construire des intervalles de confiance pour les provisions.

### 3.1.2 Intervalles de confiance

Si le volume de données est suffisant, on peut supposer une distribution normale pour la distribution de la provision. Ainsi, un intervalle de confiance (à 95 %) pourrait être donné par

$$\left(\hat{R}_i - 1{,}96\sqrt{\widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_i)}, \hat{R}_i + 1{,}96\sqrt{\widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_i)}\right).$$

Cependant, une telle approche peut conduire à des problèmes. Par exemple, il est théoriquement possible d'obtenir une borne inférieure négative et/ou la distribution réelle du montant de la réserve peut ne pas être symétrique, causant une approximation normale plus ou moins justifiée.

On pourrait alors plutôt considérer une approche basée sur une distribution log-normale. L'idée est de sélectionner les paramètres de la loi log-normale afin qu'ils correspondent à ceux que l'on a trouvés. Rappelons que si $X \sim \text{Log-normale}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\begin{aligned} E[X] &= e^{\mu+\sigma^2/2} \\ \mathrm{Var}[X] &= e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1) = E[X]^2(e^{\sigma^2} - 1), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu &= \ln(E[X]) - \frac{\sigma^2}{2} \\ \sigma^2 &= \ln\left(1 + \frac{\mathrm{Var}[X]}{E[X]^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, en supposant que

$$R_i \sim \text{Log-normale}(\mu_i, \sigma_i^2),$$

un intervalle de confiance (à 95 %) pour $R_i$ est

$$\left(e^{\mu_i - 1{,}96\sigma_i}, e^{\mu_i + 1{,}96\sigma_i}\right),$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_i &= \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2} \\ \sigma_i^2 &= \ln\left(1 + \frac{\widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i^2}\right). \end{aligned}$$

**Exemple 3.1.** On suppose le triangle des paiements cumulés suivant

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 35,40 | 37,69 | 39,13 | 39,76 | 40,16 |
| 2 | 38,61 | 41,61 | 43,37 | 44,56 | |
| 3 | 43,85 | 47,30 | 49,45 | | |
| 4 | 49,52 | 53,33 | | | |
| 5 | 55,47 | | | | |

Trouver la réserve et l'incertitude de celle-ci.

En utilisant les formules standards du modèle Chain-Ladder, on obtient

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_1 &= 1{,}0750\\
\hat{\lambda}_2 &= 1{,}0423\\
\hat{\lambda}_3 &= 1{,}0221\\
\hat{\lambda}_4 &= 1{,}0101.
\end{aligned}$$

On trouve maintenant les $\hat{\sigma}_k^2$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{5-1-1}\sum_{i=1}^{5-1} C_{i,1}\left(\frac{C_{i,1+1}}{C_{i,1}} - \hat{\lambda}_1\right)^2\\
&= \frac{1}{3}\Big[35{,}40\left(\frac{37{,}69}{35{,}40} - 1{,}0750\right)^2 + 38{,}61\left(\frac{41{,}61}{38{,}61} - 1{,}0750\right)^2\\
&+ 43{,}85\left(\frac{47{,}30}{43{,}85} - 1{,}0750\right)^2 + 49{,}52\left(\frac{53{,}33}{49{,}52} - 1{,}0750\right)^2\Big]\\
&= 1{,}6080 * 10^{-3}\\
\hat{\sigma}_2^2 &= 0{,}5510 * 10^{-3}\\
\hat{\sigma}_3^2 &= 2{,}6444 * 10^{-3}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_4^2 &= \min\left\{\frac{\hat{\sigma}_3^4}{\hat{\sigma}_2^2}, \min\{\hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_3^2\}\right\}\\
&= \min\left\{\frac{(2{,}6444 - 10^{-3})^2}{0{,}5510 - 10^{-3}}, \min\{0{,}5510 - 10^{-3}, 2{,}6444 - 10^{-3}\}\right\}\\
&= 0{,}5510 * 10^{-3}.
\end{aligned}$$

On peut alors projeter les paiements cumulatifs $\hat{C}_{i,5}$ et estimer les réserves $\hat{R}_i$

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\hat{R}_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 35,40 | 37,69 | 39,13 | 39,76 | 40,16 | **0** |
| 2 | 38,61 | 41,61 | 43,37 | 44,56 | **45,01** | **0,45** |
| 3 | 43,85 | 47,30 | 49,45 | **50,54** | **51,05** | **1,60** |
| 4 | 49,52 | 53,33 | **55,58** | **56,81** | **57,38** | **4,05** |
| 5 | 55,47 | **56,63** | **62,15** | **63,52** | **64,16** | **8,69** |

On peut alors estimer les variances

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}_2\right] &= \hat{C}_{2,5}^2 \sum_{k=5-2+1}^{5-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{2,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{5-k}\hat{C}_{j,k}}\right)\\
&= \hat{C}_{2,5}^2\left[\frac{\hat{\sigma}_4^2}{\hat{\lambda}_4^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{2,4}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{1}\hat{C}_{j,4}}\right)\right]\\
&= 45{,}01^2\left[\frac{0{,}5510 * 10^{-3}}{1{,}0101^2}\left(\frac{1}{44{,}56} + \frac{1}{39{,}76}\right)\right]\\
&= 0{,}0521
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}_3\right] &= \hat{C}_{3,5}^2 \sum_{k=5-3+1}^{5-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{3,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{5-k}\hat{C}_{j,k}}\right)\\
&= \hat{C}_{3,5}^2\left[\frac{\hat{\sigma}_3^2}{\hat{\lambda}_3^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{3,3}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{5-3}\hat{C}_{j,3}}\right) + \frac{\hat{\sigma}_4^2}{\hat{\lambda}_4^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{3,4}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{5-4}\hat{C}_{j,4}}\right)\right]\\
&= 51{,}05^2\left[\frac{2{,}6444 * 10^{-3}}{1{,}0221^2}\left(\frac{1}{49{,}45} + \frac{1}{39{,}13 + 43{,}37}\right) + \frac{0{,}5510 * 10^{-3}}{1{,}0101^2}\left(\frac{1}{50{,}54} + \frac{1}{39{,}76}\right)\right]\\
&= 0{,}2766\\
\widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}_4\right] &= 0{,}3715\\
\widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}_5\right] &= 0{,}5740.
\end{aligned}$$

L'intervalle de confiance à 95 %, sous l'hypothèse de la loi normale pour les réserves peut donc se calculer

$$\begin{aligned}
R_2 &\in [\hat{R}_2 - 2e\hat{-}t(\hat{R}_2); \hat{R}_2 + 2e\hat{-}t(\hat{R}_2)]\\
&\in [-0{,}01; 0{,}90]\\
R_3 &\in [0{,}55; 2{,}65]\\
R_4 &\in [2{,}83; 5{,}27]\\
R_5 &\in [7{,}17; 10{,}20].
\end{aligned}$$

Pour l'hypothèse de la loi lognormale, on trouve les paramètres $\Sigma_i$ :

$$
\begin{aligned}
\Sigma_2^2 &= \ln\left(1 + \left(\frac{e\,\hat{-}\,t(\hat{R}_2)}{\hat{R}_2}\right)^2\right) \\
&= \ln\left(1 + \left(\frac{\sqrt{0{,}0521}}{0{,}45}\right)^2\right) \\
&= 0{,}22895 \\
\Sigma_2^3 &= 0{,}10260 \\
\Sigma_2^4 &= 0{,}02296 \\
\Sigma_2^5 &= 0{,}00757.
\end{aligned}
$$

L'intervalle de confiance à 95 %, sous l'hypothèse de la loi Lognormale pour les réserves peut donc se calculer

$$R_i \in [\exp(\mu_i - 2\Sigma_i); \exp(\mu_i + 2\Sigma_i)] = \left[\hat{R}_i \exp(-\Sigma_i^2/2 - 2\Sigma_i); \hat{R}_i \exp(-\Sigma_i^2/2 + 2\Sigma_i)\right]$$

et

$$
\begin{aligned}
R_2 &\in \left[\hat{R}_i \exp(-\Sigma_i^2/2 - 2\Sigma_i); \hat{R}_i \exp(-\Sigma_i^2/2 + 2\Sigma_i)\right] \\
&\in [0{,}15; 1{,}04] \\
R_3 &\in [0{,}80; 2{,}88] \\
R_4 &\in [2{,}97; 5{,}40] \\
R_5 &\in [7{,}27; 10{,}30].
\end{aligned}
$$

□

> La fonction `MackChainLadder` du paquetage **ChainLadder** permet de calculer les réserves à l'aide du modèle de Mack. Étudiez et exécutez les lignes 18–55 du fichier de script `stochastique.R` reproduit à la section 3.3 et comparez les résultats avec ceux de l'exemple 3.1.

L'erreur quadratique moyenne de prévision de la provision totale est

$$\mathrm{MSEP}(\hat{R}) = E\left[\sum_{i=2}^{I} (\hat{R}_i - R_i)^2 \middle| \mathcal{D}_I\right].$$

L'estimateur de cette erreur est :

$$\begin{aligned}\widehat{\text{MSEP}}(\hat{R}) &= \sum_{i=2}^{I} \widehat{\text{MSEP}}(\hat{R}_i) + 2 \sum_{2\le i<k\le I} \hat{C}_{i,J}^{\text{CL}} \hat{C}_{k,J}^{\text{CL}} \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2/\hat{\lambda}_j^2}{\sum_{n=1}^{I-j} C_{n,j}} \\ &= \sum_{i=2}^{I} \left\{ \widehat{\text{MSEP}}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,J}^{\text{CL}} \left( \sum_{k=i+1}^{I} \hat{C}_{k,J}^{\text{CL}} \right) \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2/\hat{\lambda}_j^2}{\sum_{n=1}^{I-j} C_{n,j}} \right\}.\end{aligned}$$

Il est laissé en exercice de dériver les formules des intervalles de confiance pour la provision totale.

**Exemple 3.2.** La réserve totale s'établit à

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \hat{R}_2 + \hat{R}_3 + \hat{R}_4 + \hat{R}_5 \\ &= 0{,}45 + 1{,}60 + 4{,}05 + 8{,}69 = 14{,}79\end{aligned}$$

Calculer la variance de la réserve totale.

On a

$$\widehat{\text{Var}}\left[\hat{R}\right] = \underbrace{\sum_{i=2}^{5} \left( \widehat{\text{Var}}\left[\hat{R}_i\right] + \hat{C}_{i,5} \left( \sum_{j=i+1}^{5} \hat{C}_{j,5} \right) \sum_{k=5-i+1}^{5-1} \frac{2\hat{\sigma}_k^2/\hat{\lambda}_k^2}{\sum_{j=1}^{5-k} C_{j,k}} \right)}_{\text{Somme de 4 éléments}}$$

et

$$\begin{aligned}(i=2) &= \widehat{\text{Var}}\left[\hat{R}_2\right] + \hat{C}_{2,5} \left( \sum_{j=3}^{5} \hat{C}_{j,5} \right) \sum_{k=4}^{4} \frac{2\hat{\sigma}_k^2/\hat{\lambda}_k^2}{\sum_{j=1}^{5-k} C_{j,k}} \\ &= 0{,}0521 + 45{,}01(51{,}05 + 57{,}38 + 64{,}16) \left( \frac{2 * 0{,}5510 * 10^{-3}/1{,}0101^2}{39{,}76} \right) \\ &= 0{,}2631\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(i=3) &= \widehat{\text{Var}}\left[\hat{R}_3\right] + \hat{C}_{3,5} \left( \sum_{j=4}^{5} \hat{C}_{j,5} \right) \sum_{k=3}^{4} \frac{2\hat{\sigma}_k^2/\hat{\lambda}_k^2}{\sum_{j=1}^{5-k} C_{j,k}} \\ &= 0{,}2766 + 51{,}05(57{,}38 + 64{,}16) \left( \frac{2 * 2{,}644 * 10^{-3}/1{,}0221^2}{39{,}13 + 43{,}37} + \frac{2 * 0{,}5510 * 10^{-3}/1{,}0101^2}{39{,}76} \right) \\ &= 0{,}8258\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(i=4) &= \widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}_4\right] + \hat{C}_{4,5}\left(\sum_{j=5}^{5}\hat{C}_{j,5}\right)\sum_{k=2}^{4}\frac{2\hat{\sigma}_k^2/\hat{\lambda}_k^2}{\sum_{j=1}^{5-k} C_{j,k}} \\
&= 0{,}3715 + 57{,}38(64{,}16) \\
&\times \left(\frac{2*0{,}5510*10^{-3}/1{,}0423^2}{37{,}69+41{,}61+47{,}30} + \frac{2*2{,}644*10^{-3}/1{,}0221^2}{39{,}13+43{,}37} + \frac{2*0{,}5510*10^{-3}/1{,}010}{39{,}76}\right. \\
&= 0{,}72688
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(i=5) &= \widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}_5\right] + \hat{C}_{5,5}\left(\sum_{j=6}^{5}\hat{C}_{j,5}\right)\sum_{k=1}^{4}\frac{2\hat{\sigma}_k^2/\hat{\lambda}_k^2}{\sum_{j=1}^{5-k} C_{j,k}} \\
&= 0{,}5740 + 64{,}16(0)\sum_{k=1}^{4}\frac{2\hat{\sigma}_k^2/\hat{\lambda}_k^2}{\sum_{j=1}^{5-k} C_{j,k}} \\
&= 0{,}5740.
\end{aligned}
$$

Ainsi $\widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}\right] = 2{,}3900$ et donc $e\,\hat{-}\,t(\hat{R}) = 1{,}5460$, soit 10 % de $\hat{R}$. □

> **!** Le modèle de Mack, version stochastique de la méthode Chain-Ladder, est basé sur les hypothèses (M1) et (M2). Il est important de vérifier que le triangle de données sur lequel on veut travailler satisfait bien à ces trois conditions avant de pouvoir appliquer le modèle de Mack.

## 3.2 Modèle de Poisson

Il est également possible d'utiliser le cadre théorique des modèles linéaires généralisés pour évaluer les réserves. Les modèles stochastiques de cette section supposent que les pertes incrémentales $Y_{i,j}$ sont une réalisation d'une loi de probabilité provenant de la famille exponentielle linéaire. On tentera donc de modéliser l'espérance $\mu_{i,j}$ de cette variable aléatoire.

### 3.2.1 Paramétrisation

La façon la plus élémentaire de paramétriser la moyenne $\mu_{i,j}$ de la variable aléatoire $Y_{i,j}$ est de supposer que l'effet de l'année d'accident est indépendant de l'effet de la période de développement.

On suppose ainsi que chaque année d'accident aura besoin d'un paramètre distinct pour représenter une réserve finale différente. Ensuite, dans la même logique, on suppose qu'à chaque période de développement, un pourcentage spécifique de la réserve finale sera réclamé, ainsi on aura besoin de paramètres différents selon la période de développement.

En ce qui concerne les triangles de développement, on utilise

$$\mu_{i,j} = g(\gamma + \alpha_i + \beta_j),$$

où $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ représente l'année d'accident et $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, l'année de développement. Ainsi, on voit rapidement la modélisation de la moyenne dans un modèle linéaire généralisé où $g()$ est une fonction de lien.

On observe ainsi que la moyenne de la variable aléatoire $Y_{i,j}$ est affectée par un paramètre correspondant à la ligne du triangle de développement, et à un paramètre correspondant à la colonne de ce même triangle. On remarque aussi $\gamma$ représentant les pertes incrémentales moyennes pour la cellule de référence, qui est définie comme étant la première année d'accident et la première année de développement. Pour fin d'identification des paramètres, on suppose $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

En fonction de $g(\gamma + \alpha_i + \beta_j)$, il est possible d'exprimer le triangle de développement de la manière suivante :

| Année | 1 | 2 | 3 | … | $n-1$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $g(\gamma)$ | $g(\gamma + \beta_2)$ | $g(\gamma + \beta_3)$ | … | $g(\gamma + \beta_{n-1})$ | $g(\gamma + \beta_n)$ |
| 2 | $g(\gamma + \alpha_2)$ | $g(\gamma + \alpha_2 + \beta_2)$ | $g(\gamma + \alpha_2 + \beta_3)$ | … | $g(\gamma + \alpha_2 + \beta_{n-1})$ | … |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $n-1$ | $g(\gamma + \alpha_{n-1})$ | $g(\gamma + \alpha_{n-1} + \beta_2)$ | … | … | … | … |
| $n$ | $g(\gamma + \alpha_n)$ | … | … | … | … | … |

**Exemple 3.3.** Transformer le triangle des $C_{i,j}$ suivant pour pouvoir ajuster un modèle de Poisson.

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 225 | 300 | 350 |
| 2 | 200 | 425 | 600 | |
| 3 | 325 | 660 | | |
| 4 | 350 | | | |

Dans le modèle, on suppose un $\mu$ commun à toutes les variables $Y_{i,j}$ et on a la contrainte $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. On doit modifier le triangle des $C_{i,j}$ en triangle des $Y_{i,j}$.

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 125 | 75 | 50 |
| 2 | 200 | 225 | 175 | |
| 3 | 325 | 335 | | |
| 4 | 350 | | | |

Ainsi,

| $Y_{i,j}$ | Valeur | Année (facteur) | Délai (facteur) |
|---|---|---|---|
| $Y_{11}$ | 100 | 1 | 1 |
| $Y_{12}$ | 125 | 1 | 2 |
| $Y_{13}$ | 75 | 1 | 3 |
| $Y_{14}$ | 50 | 1 | 4 |
| $Y_{21}$ | 200 | 2 | 1 |
| $Y_{22}$ | 225 | 2 | 2 |
| $Y_{22}$ | 175 | 2 | 3 |
| $Y_{31}$ | 325 | 3 | 1 |
| $Y_{32}$ | 335 | 3 | 2 |
| $Y_{41}$ | 350 | 4 | 1 |

□

Le modèle de Poisson suppose que les pertes incrémentales $Y_{i,j}$ sont une réalisation d'une loi de Poisson. Ainsi, lors de l'application d'un tel modèle, on utilise le triangle des pertes incrémentées $(Y_{ij})$ et on suppose que les $Y_{ij}$ sont positifs.

Le modèle suppose que pour tout $i,j$, les $Y_{ij} \sim \text{Poisson}(\mu_{ij})$ sont des variables aléatoires indépendantes. La distribution de Poisson étant membre de la famille exponentielle linéaire, elle peut être utilisée dans le cadre des modèles linéaires généralisés. Ainsi, il pourrait être intéressant de voir ce qu'on peut faire avec cette distribution, en utilisant diverses fonctions de liens

$$\mu_{ij} = g(\gamma + \alpha_i + \beta_j),$$

$$\Pr[Y_{ij} = y_{ij}] = \frac{\mu_{ij}^{y_{ij}} e^{-\mu_{ij}}}{y_{ij}!}.$$

### 3.2.2 Estimation

Puisqu'il s'agit d'un modèle que l'on connaît bien, on peut utiliser encore une fois l'estimation par maximum de vraisemblance (et la fonction `glm` de R).

Il peut sembler étrange d'utiliser une distribution de Poisson pour modéliser des variables aléatoires qui sont des coûts et non des nombres entiers. Pour être plus précis, l'estimation des paramètres dans une telle situation s'appelle de la pseudo-vraisemblance (ou quasi-vraisemblance).

**Exemple 3.4.** Calculer la réserve en supposant un modèle de Poisson avec fonction de lien canonique pour les données

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 125 | 75 | 50 |
| 2 | 200 | 225 | 175 | |
| 3 | 325 | 335 | | |
| 4 | 350 | | | |

Après convergence de l'algorithme, on obtient les estimations suivantes des paramètres

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma} &= 4{,}6383 \\
\hat{\beta}_2 &= 0{,}09167 \\
\hat{\beta}_3 &= -0{,}2155 \\
\hat{\beta}_4 &= -0{,}7263 \\
\hat{\alpha}_2 &= 0{,}6931 \\
\hat{\alpha}_3 &= 1{,}1139 \\
\hat{\alpha}_4 &= 1{,}2196.
\end{aligned}$$

On a alors

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 125 | 75 | 50 |
| 2 | 200 | 225 | 175 | $e^{4{,}6383+0{,}6931-0{,}7263}$ |
| 3 | 325 | 335 | $e^{4{,}6383+1{,}1139-0{,}2155}$ | $e^{4{,}6383+1{,}1139-0{,}7263}$ |
| 4 | 350 | $e^{4{,}6383+1{,}2196+0{,}09167}$ | $e^{4{,}6383+1{,}2196-0{,}2155}$ | $e^{4{,}6383+1{,}2196-0{,}7263}$ |

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 125 | 75 | 50 |
| 2 | 200 | 225 | 175 | 99,99 |
| 3 | 325 | 330 | 253,84 | 152,31 |
| 4 | 350 | 383,59 | 282,14 | 169,29 |

et donc un tableau des $C_{ij}$

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 225 | 300 | 350 |
| 2 | 200 | 425 | 600 | 699,99 |
| 3 | 325 | 660 | 913,84 | 1 066,15 |
| 4 | 350 | 733,59 | 1 015,73 | 1 185,02 |

Puisque la méthode Chain-Ladder est la base de toutes les méthodes, on compare les résultats des deux méthodes :

$$\lambda_1 = 2{,}096, \lambda_2 = 1{,}3846, \lambda_1 = 1{,}16666$$

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 225 | 300 | 350 |
| 2 | 200 | 425 | 600 | 699,99 |
| 3 | 325 | 660 | 913,84 | 1 066,15 |
| 4 | 350 | 733,59 | 1 015,73 | 1 185,02 |

On remarque que les deux méthodes produisent exactement les mêmes résultats. □

Étudiez et exécutez les lignes 58–80 du fichier de script `stochastique.R` reproduit à la section 3.3 et comparez les résultats avec ceux de l'exemple 3.4.

En comparaison avec les modèles déterministes, un modèle de Poisson (avec fonction de lien canonique) pour les réserves possède les avantages suivants :

1. les montants estimés sont similaires à ceux obtenus par la méthode Chain-Ladder , la méthode la plus fréquemment utilisée en pratique ;
2. on connaît la distribution des $Y_{i,j}$ ; et
3. on peut calculer la distribution des $C_{i,j}$
   - si $X$ et $Y$ sont indépendants et de distribution Poisson avec paramètres $\lambda_X$ et $\lambda_Y$, alors $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_X + \lambda_Y)$ ;
4. on peut calculer la variance de la réserve de $R_i$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[R_i] &= \text{Var}[C_{i,n} - C_{i,n+1-i}] \\
&= \text{Var}[Y_{i,n+2-i} + Y_{i,n+3-i} + \ldots + Y_{i,n}] \\
&= \text{Var}[Y_{i,n+2-i}] + \text{Var}[Y_{i,n+3-i}] + \ldots + \text{Var}[Y_{i,n}] \\
&= \mu_{i,n+2-i} + \mu_{i,n+3-i} + \ldots + \mu_{i,n}.
\end{aligned}$$

Par contre, il n'est pas possible d'évaluer l'erreur d'estimation.

## 3.3 Code informatique

Fichier d'accompagnement stochastique.R

```
## Charger le package ChainLadder dans la session de travail.
library(ChainLadder)

###
### MODÈLE DE MACK
###

## Triangle cumulatif des données
tri <- matrix(c(200, 210, 250, 230, 220, NA, 260, NA, NA), ncol = 3)

## Ajustement du modèle de Mack aux données
model1 <- MackChainLadder(tri)

## Sommaire des résultats
summary(model1)

## On peut aussi extraire les facteurs de développement...
model1$f

### ... les sigmas au carré
model1$sigma^2

### ... et le triangle complété
model1$FullTriangle

### Triangle des paiements cumulés
tri <- matrix(c(35,4,38,61,43,85,49,52,55,47,37,69,41,61,47,30,53,33,
                NA,39,13,43,37,49,45,NA,NA,39,76,44,56,NA,NA,NA,40,16,
                NA,NA,NA,NA),ncol = 5)

## Estimation des paramètres
model1 <-  MackChainLadder(tri)
summary(model1)

## Les facteurs de développement
model1$f

### les sigmas au carré
model1$sigma^2

## Écart-type de la réserve totale
```

```
model1$Total.Mack.S.E

###
### MODÈLE DE POISSON
###

## Création de la base de données
pmt <- c(100,200,325,350,125,225,335,75,175,50)
Year <- c(1,2,3,4,1,2,3,1,2,1)
Delay <- c(1,1,1,1,2,2,2,3,3,4)
dda <- data.frame(ptm = pmt, Year = Year, Delay = Delay)

### Ajustement du modèle quasi-Poisson
model2 <- glm(pmt ~ as.factor(Year) + as.factor(Delay),
              family = quasipoisson, data = dda)
summary(model2)

## Pour réaliser les prédictions de chacune des cellules
ddaNEW <- c(Year = c(1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4),
            Delay = c(1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4))

ddaNEW$pred <- predict(model2, newdata = ddaNEW, type =  "response")
ddaNEW

## Triangle incrémental complété
matrix(ddaNEW$pred, ncol = 4)
```

## 3.4 Exercices

**3.1** On considère un triangle des paiements cumulés tel que celui présenté dans le tableau 3.1.

TAB. 3.1 – Paiements cumulatifs

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2000 | 425 | 522 | 612 | 714 | 730 |
| 2001 | 532 | 657 | 714 | 732 | - |
| 2002 | 717 | 730 | 802 | - | - |
| 2003 | 440 | 560 | - | - | - |
| 2004 | 620 | - | - | - | - |

a) Calculer les estimateurs des facteurs de développement dans le modèle de Mack et déterminer le montant de la réserve totale à l'ultime.

b) Calculer les estimateurs des $\sigma_k^2$.

c) Déterminer les écarts-types des réserves par année de survenance et l'écart-type de la réserve totale.

d) Vérifier dans R les résultats à l'aide de la fonction `MackChainLadder` du paquetage **ChainLadder**.

**3.2** Pour les données du tableau 3.1, ajuster un modèle de Poisson.

a) Quelles sont les valeurs estimées des paramètres ?

b) Quelle est la valeur estimée de la réserve ?

c) Calculer la variance de la réserve pour chacune des années de survenance.

**3.3** Un assureur dispose des données présentés dans le tableau 3.2.

TAB. 3.2 – Paiements cumulatifs

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 120 | 310 | 320 | 360 | 370 | 370 |
| 2 | 240 | 410 | 420 | 450 | 460 | - |
| 3 | 230 | 400 | 430 | 480 | - | - |
| 4 | 260 | 450 | 460 | - | - | - |
| 5 | 270 | 460 | - | - | - | - |
| 6 | 280 | - | - | - | - | - |

a) Calculer les estimateurs des facteurs de développement dans le modèle de Mack et déterminer les réserves à l'ultime.

b) Calculer les estimateurs des $\sigma_k^2$.

c) Déterminer les écarts-types des réserves par année de survenance et l'écart-type de la réserve totale.

**3.4** Pour les données du tableau 3.2, ajuster un modèle de Poisson.

a) Quelles sont les valeurs estimées des paramètres ?

b) Quelle est la valeur estimée de la réserve ?

c) Calculer la variance de la réserve pour chacune des années de survenance.

# A Solutions

## Chapitre 1

**1.1** a) Le triangle de développement cumulatif se trouve au tableau A.1. Le montant en position $(i, j)$ dans le tableau correspond à la somme des montants des paiements pour les sinistres survenus pendant l'année $i$ et payés pendant les années $i$ à $j$, inclusivement. Par exemple,

$$C_{2,2} = 532 + 125 = 657.$$

b) Selon les données enregistrées par la compagnie, il est raisonnable de supposer que les paiements sont pratiquement complets après 5 périodes de développement. Idéalement, la consultation d'une base de données semblables plus mature permettrait de confirmer ou d'infirmer cette hypothèse. Enfin, connaitre le type de portefeuille — automobile (dommages matériels), automobile (dommages corporels), responsabilité professionnelle, etc. — permettrait d'avoir une meilleure idée du nombre de périodes de développement nécessaires.

TAB. A.1 – Triangle de développement cumulatif de l'assureur YTR pour l'exercice 1.1

| Année | Développement (âge) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| accident | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2000 | 425 | 522 | 612 | 714 | 730 |
| 2001 | 532 | 657 | 714 | 732 | |
| 2002 | 717 | 730 | 802 | | |
| 2003 | 440 | 560 | | | |
| 2004 | 620 | | | | |

**1.2** Par (1.2), nous avons

$$
\begin{aligned}
R^{\text{TOT}} &= \sum_i \text{ELR}_i \times P_i - \sum_i Y_i \\
&= [0{,}85(200\,000) + 0{,}875(205\,000) + 0{,}85(210\,000) \\
&\quad + 0{,}78(212\,500) + 0{,}80(220\,000) + 0{,}75(215\,000)] \\
&\quad - [158\,000 + 150\,000 + 145\,000 \\
&\quad + 140\,000125\,000112\,000] \\
&= 1\,030\,875 - 830\,000 \\
&= 200\,875.
\end{aligned}
$$

**1.3** a) Le dernier montant cumulatif disponible pour l'année de survenance 1993 est $C_{1993,7} = 3\,166$ \$.

b) Nous avons $Y_{1995,3} = C_{1995,3} - C_{1995,2} = 5\,762 - 4\,989 = 773$ \$.

c) Le dernier montant cumulatif disponible pour l'année de survenance 1998 est $C_{1993,2} = 5\,417$ \$.

d) Nous avons $\sum_{j=1}^{7} Y_{1999+j-1,j} = 3\,917 + (5\,417 - 2\,990) + (5\,349 - 4\,666) + (6\,231 - 5\,526) + (6\,720 - 6\,436) + (5\,199 - 5\,144) + 0 = 8\,071$ \$.

e) Nous avons $\sum_{j=1}^{2} Y_{1994+j-1,j} = 3\,226 + (2\,673 - 1\,780) = 4\,119$ \$.

## Chapitre 2

**2.1** a) Le triangle des paiements cumulés est présenté dans le tableau A.2. Pour la case $(i, j)$, il suffit de sommer les montants des paiements pour les sinistres survenus pendant l'année $i$ et payés pendant la $j^{\text{e}}$ période après la survenance.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2000 | 425 | 522 | 612 | 714 | 730 |
| 2001 | 532 | 657 | 714 | 732 | - |
| 2002 | 717 | 730 | 802 | - | - |
| 2003 | 440 | 560 | - | - | - |
| 2004 | 620 | - | - | - | - |

Tab. A.2 – Paiements réalisés par l'assureur YTR

b) On a

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{522 + 657 + 730 + 560}{425 + 532 + 717 + 440} \\
&= \frac{2\,469}{2\,114} \\
&= 1{,}167928 \\
\lambda_2 &= \frac{2\,128}{1\,909} \\
&= 1{,}114720 \\
\lambda_3 &= \frac{1\,446}{1\,326} \\
&= 1{,}090498 \\
\lambda_4 &= \frac{730}{714} \\
&= 1{,}022409.
\end{aligned}$$

Avant d'accepter aveuglément ces facteurs de développement, on peut analyser les facteurs de développement individuels (case par case) tels que présentés dans le tableau A.3. Normalement, on devrait observer une certaine stabilité pour une même période de développement ($j$) entre les différentes années de survenance ($i$), ce qui n'est pas toujours le cas ici. Par exemple, on remarque que le passage de la période 1 à la période 2 est relativement stable pour les années 2000, 2001 et 2003 (respectivement 1,23, 1,23 et 1,27), un certain ralentissement dans la cadence des paiements est observé pour l'année 2002 (1,02). Après analyse, l'actuaire devra déterminer si ce ralentissement peut s'expliquer par un changement dans la politique de la compagnie pour cette année de survenance (et alors peut-être retirer les données de 2002 pour le calcul des facteurs de développement).

| | $1-2$ | $2-3$ | $3-4$ | $4-5$ |
|---|---|---|---|---|
| 2000 | 1,23 | 1,17 | 1,17 | 1,02 |
| 2001 | 1,23 | 1,09 | 1,03 | - |
| 2002 | 1,02 | 1,10 | - | - |
| 2003 | 1,27 | - | - | - |
| 2004 | - | - | - | - |

Tab. A.3 – Facteurs de développement individuels

c) Selon les données enregistrées par la compagnie, on observe un facteur de 1,02 entre la 4$^e$ période et la 5$^e$ période de développement. Cette valeur étant très près de 1,00, il est raisonnable de supposer que les paiements sont pratiquement complets après 5 périodes de développement. Idéalement, le fait de pouvoir consulter une base de données semblables plus mature permettrait de confirmer ou d'infirmer cette hypothèse. Enfin, connaître le type de portefeuille (assurance automobile - dommage matériel, assurance automobile - dommage corporel, assurance responsabilité professionnelle, etc.) permettrait également d'avoir une idée du nombre de périodes de développement nécessaires.

d) Le triangle complété des paiements cumulés est présenté dans le tableau A.4. Par exemple,

$$\begin{aligned}(732)(1{,}022409) &= 748\\ (802)(1{,}090498) &= 875\\ (802)(1{,}090498)(1{,}022409) &= 894.\end{aligned}$$

Le montant total de la provision est donné par la différence entre

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2000 | 425 | 522 | 612 | 714 | 730 |
| 2001 | 532 | 657 | 714 | 732 | 748 |
| 2002 | 717 | 730 | 802 | 875 | 894 |
| 2003 | 440 | 560 | 624 | 681 | 696 |
| 2004 | 620 | 724 | 807 | 880 | 900 |

Tab. A.4 – Paiements réalisés et estimés par l'assureur YTR

le montant total des paiements ultimes et le montant total des paiements déjà réalisés :

$$\begin{aligned}730 + 748 + 894 + 696 + 900 &= 3\,968\\ 730 + 732 + 802 + 560 + 620 &= 3\,444\\ 3\,968 - 3\,444 &= 524.\end{aligned}$$

e) Oui, c'est possible. Cela indiquerait que l'assureur a reçu des remboursements (paiements en trop, recours judiciaires, etc.).

**2.2** a) On a

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2\,673 + 4\,219 + 4\,989 + 4\,301 + 4\,666 + 5\,417}{1\,780 + 3\,226 + 3\,652 + 2\,723 + 2\,923 + 2\,990}\\ &= \frac{26\,265}{17\,294}\\ &= 1{,}518735\\ \lambda_2 &= 1{,}153252\\ \lambda_3 &= 1{,}104205\\ \lambda_4 &= 1{,}042329\\ \lambda_5 &= 1{,}007710\\ \lambda_6 &= 1{,}000000.\end{aligned}$$

Le triangle complété est

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1993 | 1 780 | 2 673 | 2 874 | 3 094 | 3 157 | 3 166 | 3 166 |
| 1994 | 3 226 | 4 219 | 4 532 | 4 881 | 5 144 | 5 199 | 5 199 |
| 1995 | 3 652 | 4 989 | 5 762 | 6 436 | 6 720 | 6 772 | 6 772 |
| 1996 | 2 723 | 4 301 | 5 526 | 6 231 | 6 495 | 6 545 | 6 545 |
| 1997 | 2 923 | 4 666 | 5 349 | 5 906 | 6 156 | 6 204 | 6 204 |
| 1998 | 2 990 | 5 417 | 6 247 | 6 898 | 7 190 | 7 246 | 7 246 |
| 1999 | 3 917 | 5 949 | 6 861 | 7 575 | 7 896 | 7 957 | 7 957 |

Le montant ultime payé est la somme de la dernière colonne, 43 088, et le montant de la provision est la différence entre le montant ultime et le montant total payé (somme de la diagonale principale) : 43 088 − 35 999 = 7 089.

b) On calcule, pour chaque cellule, le facteur de développement

| Année | 1→ 2 | 2→ 3 | 3→ 4 | 4→ 5 | 5→ 6 | 6→ 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1993 | 1,501685 | 1,075196 | 1,076548 | 1,020362 | 1,002851 | 1 |
| 1994 | 1,307812 | 1,074188 | 1,077008 | 1,053882 | 1,010692 | |
| 1995 | 1,366101 | 1,154941 | 1,116973 | 1,044127 | | |
| 1996 | 1,579508 | 1,284817 | 1,127579 | | | |
| 1997 | 1,596305 | 1,146378 | | | | |
| 1998 | 1,811706 | | | | | |
| Moy. arith. | 1,527186 | 1,147104 | 1,099527 | 1,039457 | 1,006771 | 1 |

Le triangle complété est

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1993 | 1 780 | 2 673 | 2 874 | 3 094 | 3 157 | 3 166 | 3 166 |
| 1994 | 3 226 | 4 219 | 4 532 | 4 881 | 5 144 | 5 199 | 5 199 |
| 1995 | 3 652 | 4 989 | 5 762 | 6 436 | 6 720 | 6 766 | 6 766 |
| 1996 | 2 723 | 4 301 | 5 526 | 6 231 | 6 477 | 6 521 | 6 521 |
| 1997 | 2 923 | 4 666 | 5 349 | 5 881 | 6 113 | 6 155 | 6 155 |
| 1998 | 2 990 | 5 417 | 6 214 | 6 832 | 7 102 | 7 150 | 7 150 |
| 1999 | 3 917 | 5 982 | 6 862 | 7 545 | 7 843 | 7 896 | 7 896 |

Le montant ultime payé est la somme de la dernière colonne, 42 853, et le montant de la provision est la différence entre le montant ultime et le montant total payé (somme de la diagonale principale) : $42\,853 - 35\,999 = 6\,854$.

c) On calcule, pour chaque cellule, le facteur de développement

| Année | 1→ 2 | 2→ 3 | 3→ 4 | 4→ 5 | 5→ 6 | 6→ 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1993 | 1,501685 | 1,075196 | 1,076548 | 1,020362 | 1,002851 | 1 |
| 1994 | 1,307812 | 1,074188 | 1,077008 | 1,053882 | 1,010692 | |
| 1995 | 1,366101 | 1,154941 | 1,116973 | 1,044127 | | |
| 1996 | 1,579508 | 1,284817 | 1,127579 | | | |
| 1997 | 1,596305 | 1,146378 | | | | |
| 1998 | 1,811706 | | | | | |
| Moy. géo. | 1,518409 | 1,144615 | 1,099286 | 1,039361 | 1,006764 | 1 |

Le triangle complété est

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1993 | 1 780 | 2 673 | 2 874 | 3 094 | 3 157 | 3 166 | 3 166 |
| 1994 | 3 226 | 4 219 | 4 532 | 4 881 | 5 144 | 5 199 | 5 199 |
| 1995 | 3 652 | 4 989 | 5 762 | 6 436 | 6 720 | 6 765 | 6 765 |
| 1996 | 2 723 | 4 301 | 5 526 | 6 231 | 6 476 | 6 520 | 6 520 |
| 1997 | 2 923 | 4 666 | 5 349 | 5 880 | 6 112 | 6 153 | 6 153 |
| 1998 | 2 990 | 5 417 | 6 200 | 6 816 | 7 084 | 7 132 | 7 132 |
| 1999 | 3 917 | 5 948 | 6 808 | 7 484 | 7 778 | 7 831 | 7 831 |

Le montant ultime payé est la somme de la dernière colonne, 42 766, et le montant de la provision est la différence entre le montant ultime et le montant total payé (somme de la diagonale principale) : $42\,766 - 35\,999 = 6\,767$.

**2.3** On construit premièrement le triangle des valeurs cumulées

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1994 | 192 | 443 | 596 | 741 | 839 | 839 |
| 1995 | 205 | 485 | 680 | 830 | 932 | |
| 1996 | 230 | 575 | 805 | 1 017 | | |
| 1997 | 288 | 698 | 973 | | | |
| 1998 | 398 | 961 | | | | |
| 1999 | 530 | | | | | |

On a

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{443 + 485 + 575 + 698 + 961}{192 + 205 + 230 + 288 + 398} \\
&= \frac{3\,162}{1\,313} \\
&= 2{,}408225 \\
\lambda_2 &= 1{,}387551 \\
\lambda_3 &= 1{,}243633 \\
\lambda_4 &= 1{,}127307 \\
\lambda_5 &= 1{,}000000.
\end{aligned}$$

Le triangle complété est

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1994 | 192 | 443 | 596 | 741 | 839 | 839 |
| 1995 | 205 | 485 | 680 | 830 | 932 | 932 |
| 1996 | 230 | 575 | 805 | 1 017 | 1 146 | 1 146 |
| 1997 | 288 | 698 | 973 | 1 210 | 1 364 | 1 364 |
| 1998 | 398 | 961 | 1 333 | 1 658 | 1 869 | 1 869 |
| 1999 | 530 | 1 276 | 1 771 | 2 202 | 2 483 | 2 483 |

Le montant ultime payé est la somme de la dernière colonne, 8 634, et le montant de la provision est la différence entre le montant ultime et le montant total payé (somme de la diagonale principale) : $8\,634 - 5\,252 = 3\,382$.

**2.4**

$$\begin{aligned}
\hat{C}_i^{LR} &= E[LR] \times \text{Primes acquises}_i \\
&= 0{,}650 * 1\,000 = 650 \\
R_i^{BF} &= \hat{C}_i^{LR} \times \left(1 - \frac{1}{\prod_{k=2}^{\infty} \lambda_k}\right) \\
&= 650\left(1 - \frac{1}{1{,}12}\right) = 69{,}642\,86.
\end{aligned}$$

**2.5** La première évaluation des provisions de l'année d'accident 1998 est le 31 décembre 1998. Ainsi, le 31 décembre 1999, on est à la deuxième évaluation.

a) On a

$$\begin{aligned}
\underbrace{\hat{C}_i^{LR}}_{\text{Pertes ultimes attendues selon LR}} &= \underbrace{E[LR]}_{\text{Rapport sinistres/primes espéré}} \times \text{Primes acquises}_i \\
&= 0{,}650 * 1\,000\,000 = 650\,000 \\
\underbrace{R_i^{LR}}_{\text{Provisions selon la méthode du rapport sinistres/primes}} &= \hat{C}_i^{LR} - \underbrace{C_{i,2}}_{\text{Paiements cumulatifs à la deuxième évaluation}} \\
&= 650\,000 - 320\,000 = 330\,000.
\end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
\underbrace{\hat{C}_i^{CL}}_{\text{Pertes ultimes attendues selon CL}} &= C_{i,2} \times (\prod_{k=2}^{\infty} \lambda_k) \\
&= 320\,000 \times 1{,}60 * 1{,}40 * 1{,}10 * 1{,}05 \\
&= 320\,000 * 2{,}5872 = 827\,904 \\
\underbrace{R_i^{CL}}_{\text{Provisions selon la méthode CL}} &= \hat{C}_i^{CL} - C_{i,2} \\
&= 827\,904 - 320\,000 = 507\,904.
\end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned}
R_i^{BF} &= \hat{C}_i^{LR} \times \left(1 - \frac{1}{\prod_{k=2}^{\infty} \lambda_k}\right) \\
&= 650\,000\left(1 - \frac{1}{2{,}5872}\right) = 398\,763{,}1.
\end{aligned}$$

**2.6** a) On a

$$\begin{aligned}
\underbrace{\hat{C}_i^{LR}}_{\text{Pertes ultimes attendues selon LR}} &= \underbrace{E[LR]}_{\text{Rapport sinistres/primes espéré}} \times \text{Primes acquises}_i \\
&= 0{,}600 * 1\,350\,000 = 810\,000 \\
\underbrace{R_i^{LR}}_{\text{Provisions selon la méthode du rapport sinistres/primes}} &= \hat{C}_i^{LR} - \underbrace{C_{i,1}}_{\text{Paiements cumulatifs à la première évaluation}} \\
&= 810\,000 - 120\,000 = 690\,000.
\end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
\underbrace{\hat{C}_i^{CL}}_{\text{Pertes ultimes attendues selon CL}} &= C_{i,1} \times (\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k) \\
&= 120\,000 \times 1{,}55 * 1{,}50 * 1{,}30 * 1{,}25 * 1{,}05 \\
&= 120\,000 * 4{,}562086 = 547\,450{,}3 \\
\underbrace{R_i^{CL}}_{\text{Provisions selon la méthode CL}} &= \hat{C}_i^{CL} - C_{i,1} \\
&= 547\,450{,}3 - 120\,000 = 427\,450{,}3.
\end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned}
R_i^{BF} &= \hat{C}_i^{LR} \times (1 - \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k}) \\
&= 810\,000(1 - \frac{1}{4{,}562086}) = 632\,449{,}6.
\end{aligned}$$

d) Pour la première méthode, il n'est pas possible de ventiler les provisions. Pour la méthode Chain-Ladder, on a

$$\begin{aligned}
120\,000 \times 1{,}55 * 1{,}50 * 1{,}30 &= 362\,700 \\
\Delta &= 362\,700 - 200\,000 = 162\,700.
\end{aligned}$$

Pour la méthode BF, on a

- du temps 1 au temps $\infty$, le facteur de développement est de $1{,}55 * 1{,}50 * 1{,}30 * 1{,}25 * 1{,}15 * 1{,}05 = 4{,}562086$ ;
- du temps 2 au temps $\infty$, le facteur de développement est de $1{,}50 * 1{,}30 * 1{,}25 * 1{,}15 * 1{,}05 = 2{,}943281$ ;
- du temps 3 au temps $\infty$, le facteur de développement est de $1{,}30 * 1{,}25 * 1{,}15 * 1{,}05 = 1{,}962187$ ;
- du temps 4 au temps $\infty$, le facteur de développement est de $1{,}25 * 1{,}15 * 1{,}05 = 1{,}509375$ ;
- du temps 5 au temps $\infty$, le facteur de développement est de $1{,}15 * 1{,}05 = 1{,}207500$ ; et
- du temps 6 au temps $\infty$, le facteur de développement est de $1{,}05$.

Ainsi :

| Date ($j$) | $\hat{C}_{i,j}^{BF}$ | $\hat{Y}_{i,j}^{BF}$ |
|---|---|---|
| Décembre 2000 | 217 652,72 | 97 652,72 |
| Décembre 2001 | 355 254,3 | 137 601,6 |
| Décembre 2002 | 479 095,6 | 123 841,3 |

e) La méthode BF permet de stabiliser la provision par rapport à la méthode Chain-Ladder, en particulier pour les périodes récentes.

**2.7** a) On a

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{2\,673 + 4\,219 + 4\,989 + 4\,301 + 4\,666 + 5\,417}{1\,780 + 3\,226 + 3\,652 + 2\,723 + 2\,923 + 2\,990} \\
&= \frac{26\,265}{17\,294} \\
&= 1{,}518735 \\
\lambda_2 &= 1{,}153252 \\
\lambda_3 &= 1{,}104205 \\
\lambda_4 &= 1{,}042329 \\
\lambda_5 &= 1{,}007710 \\
\lambda_6 &= 1{,}000000.
\end{aligned}$$

Le triangle complété est

| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1993 | 1 780 | 2 673 | 2 874 | 3 094 | 3 157 | 3 166 | 3 166 |
| 1994 | 3 226 | 4 219 | 4 532 | 4 881 | 5 144 | 5 199 | 5 199 |
| 1995 | 3 652 | 4 989 | 5 762 | 6 436 | 6 720 | 6 772 | 6 772 |
| 1996 | 2 723 | 4 301 | 5 526 | 6 231 | 6 495 | 6 545 | 6 545 |
| 1997 | 2 923 | 4 666 | 5 349 | 5 906 | 6 156 | 6 204 | 6 204 |
| 1998 | 2 990 | 5 417 | 6 247 | 6 898 | 7 190 | 7 246 | 7 246 |
| 1999 | 3 917 | 5 949 | 6 861 | 7 575 | 7 896 | 7 957 | 7 957 |

Pour 1998, le montant ultime payé est 7 246, et le montant de la provision est la différence entre le montant ultime et le montant total payé : $7\,246 - 5\,417 = 1\,829$.

b) On a

$$\overline{C}_k^{(k)} = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}$$

$$\overline{C}_1^{(1)} = \frac{(1\,780 + 3\,226 + 3\,652 + 2\,723 + 2\,923 + 2\,990)}{7-1}$$

$$= 2\,882{,}33$$

$$\overline{C}_2^{(2)} = 4\,169{,}6$$

$$\overline{C}_3^{(3)} = 4\,673{,}5$$

$$\overline{C}_4^{(4)} = 4\,803{,}67$$

$$\overline{C}_5^{(5)} = 4\,150{,}5$$

$$\overline{C}_6^{(6)} = 3\,166$$

$$\overline{C}_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}$$

$$\overline{C}_2^{(1)} = \frac{(2\,673 + 4\,219 + 4\,989 + 4\,301 + 4\,666 + 5\,417)}{7-1}$$

$$= 4\,377{,}5$$

$$\overline{C}_3^{(2)} = 4\,808{,}6$$

$$\overline{C}_4^{(3)} = 5\,160{,}5$$

$$\overline{C}_5^{(4)} = 5\,007$$

$$\overline{C}_6^{(5)} = 4\,182{,}5$$

$$\overline{C}_7^{(6)} = 3\,166$$

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_1 &= \frac{\frac{1}{7-1}\sum_{i=1}^{7-1} C_{i,1}C_{i,2} - \overline{C}_2^{(1)}\overline{C}_1^{(1)}}{\frac{1}{7-1}\sum_{i=1}^{7-1} C_{i,1}^2 - \overline{C}_1^{(1)2}} \\
&= \frac{\frac{1}{6}(1\,780 * 2\,673 + 3\,226 * 4\,219 + \ldots + 2\,990 * 5\,417) - 2\,882{,}33 * 4\,377{,}5}{\frac{1}{6}(1\,780^2 + 3\,226^2 + 3\,652^2 + 2\,723^2 + 2\,923^2 + 2\,990^2) - 2\,882{,}33^2} \\
&= \frac{13\,022\,572 - 12\,617\,400}{8\,635\,223 - 7\,965\,547} \\
&= 0{,}6050274 \\
\hat{\lambda}_2 &= 1{,}266904 \\
\hat{\lambda}_3 &= 1{,}172035 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_1 &= \overline{C}_2^{(1)} - \hat{\lambda}_1\overline{C}_1^{(1)} \\
&= 4\,377{,}5 - (0{,}6050274)(2\,882{,}33) \\
&= 2\,633{,}611 \\
\hat{\alpha}_2 &= -473{,}882\,9 \\
\hat{\alpha}_3 &= -317{,}005\,6 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

On peut alors calculer la provision demandée :

$$\begin{aligned}
C_{6,3} &= \hat{\lambda}_2 C_{6,2} + \hat{\alpha}_2 \\
&= (1{,}266904)(5\,417) - 473{,}8829 \\
&= 6\,388{,}936 \\
C_{6,4} &= 7\,171{,}051 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

c) Si les termes $\alpha$ sont égaux à 0, on peut retrouver les résultats du modèle Chain-Ladder.

# Chapitre 3

**3.1** a) On a

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{522 + 657 + 730 + 560}{425 + 532 + 717 + 440} \\
&= \frac{2\,469}{2\,114} \\
&= 1{,}167928 \\
\lambda_2 &= \frac{2\,128}{1\,909} \\
&= 1{,}114720 \\
\lambda_3 &= \frac{1\,446}{1\,326} \\
&= 1{,}090498 \\
\lambda_4 &= \frac{730}{714} \\
&= 1{,}022409.
\end{aligned}$$

Le montant total de la réserve est donné par la différence entre le montant total des paiements ultimes et le montant total des paiements déjà réalisés :

$$\begin{aligned}
730 + 748 + 894 + 696 + 900 &= 3\,968 \\
730 + 732 + 802 + 560 + 620 &= 3\,444 \\
3\,968 - 3\,444 &= 524.
\end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{5-1-1}\left((425)\left(\frac{522}{425} - 1{,}167928\right)^2 + (532)\left(\frac{657}{532} - 1{,}167928\right)^2\right.\\
&\quad \left. +(717)\left(\frac{730}{717} - 1{,}167928\right)^2 + (440)\left(\frac{560}{440} - 1{,}167928\right)^2\right)\\
&= 8{,}285875\\
\hat{\sigma}_2^2 &= \frac{1}{5-2-1}\left((522)\left(\frac{612}{522} - 1{,}114720\right)^2 + (657)\left(\frac{714}{657} - 1{,}114720\right)^2\right.\\
&\quad \left. +(730)\left(\frac{802}{730} - 1{,}114720\right)^2\right)\\
&= 1{,}220096\\
\hat{\sigma}_3^2 &= \frac{1}{5-3-1}\left((612)\left(\frac{714}{612} - 1{,}0905\right)^2 + (714)\left(\frac{732}{714} - 1{,}0905\right)^2\right)\\
&= 6{,}594053\\
\hat{\sigma}_4^2 &= \min\left(\frac{6{,}594053^2}{1{,}220096}, \min\left(6{,}594053, 1{,}220096\right)\right)\\
&= 1{,}220096.
\end{aligned}$$

c) Le triangle complété est La variance de la réserve de la première an-

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2000 | 425 | 522 | 612 | 714 | 730 |
| 2001 | 532 | 657 | 714 | 732 | 748 |
| 2002 | 717 | 730 | 802 | 875 | 894 |
| 2003 | 440 | 560 | 624 | 681 | 696 |
| 2004 | 620 | 724 | 807 | 880 | 900 |

nées de survenance est nulle. Pour les autres, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}_2\right] &= \hat{C}_{2,5}^2 \sum_{k=5-2+1}^{5-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2} \left( \frac{1}{\hat{C}_{2,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{5-k} \hat{C}_{j,k}} \right) \\
&= \hat{C}_{2,5}^2 \left[ \frac{\hat{\sigma}_4^2}{\hat{\lambda}_4^2} \left( \frac{1}{\hat{C}_{2,4}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{1} \hat{C}_{j,4}} \right) \right] \\
&= 748^2 \left[ \frac{1{,}220096}{1{,}022409^2} \left( \frac{1}{732} + \frac{1}{714} \right) \right] \\
&= 1\,806{,}787
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}_3\right] &= \hat{C}_{3,5}^2 \sum_{k=5-3+1}^{5-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2} \left( \frac{1}{\hat{C}_{3,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{5-k} \hat{C}_{j,k}} \right) \\
&= \hat{C}_{3,5}^2 \left[ \frac{\hat{\sigma}_3^2}{\hat{\lambda}_3^2} \left( \frac{1}{\hat{C}_{3,3}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{5-3} \hat{C}_{j,3}} \right) + \frac{\hat{\sigma}_4^2}{\hat{\lambda}_4^2} \left( \frac{1}{\hat{C}_{3,4}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{5-4} \hat{C}_{j,4}} \right) \right] \\
&= 894^2 \left[ \frac{6{,}594053}{1{,}090498^2} \left( \frac{1}{802} + \frac{1}{612 + 714} \right) + \frac{1{,}220096}{1{,}022409^2} \left( \frac{1}{875} + \frac{1}{714} \right) \right] \\
&= 11\,240{,}79 \\
\widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}_4\right] &= 9\,044{,}01 \\
\widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}_5\right] &= 23\,134{,}41.
\end{aligned}$$

La variance de $\hat{R} = 524$ est estimée par

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}\right] &= \sum_{i=2}^{n} \left( \widehat{\mathrm{Var}}\left[\hat{R}_i\right] + \hat{C}_{i,n} \left( \sum_{j=i+1}^{n} \hat{C}_{j,n} \right) \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_k^2/\hat{\lambda}_k^2}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \right) \\
&= \dots \\
&= 75\,856{,}18.
\end{aligned}$$

d) Le code permettant de vérifier les résultats est

```
> tri <- matrix(c(425,532,717,440,620,522,657,730,560,NA,612,714,802,
+                 NA,NA,714,732,NA,NA,NA,730,NA,NA,NA,NA), ncol = 5)
> model1 <- MackChainLadder(tri)
> summary(model1)
$ByOrigin
  Latest Dev.To.Date Ultimate      IBNR  Mack.S.E
```

```
1    730   1.0000000 730.0000   0.00000   0.00000
2    732   0.9780822 748.4034  16.40336  42.52923
3    802   0.8969135 894.1776  92.17760 106.04608
4    560   0.8046090 695.9902 135.99022  95.12843
5    620   0.6889200 899.9594 279.95938 152.07268
   CV(IBNR)
1       NaN
2 2.5927146
3 1.1504540
4 0.6995241
5 0.5431955

$Totals
                 Totals
Latest:    3444.0000000
Dev:          0.8678275
Ultimate:  3968.5305662
IBNR:       524.5305662
Mack S.E.:  275.4176323
CV(IBNR):     0.5250745
> model1$f
[1] 1.167928 1.114720 1.090498 1.022409 1.000000
> model1$sigma^2
[1] 8.285875 1.220096 6.594053 1.220096
> model1$Total.Mack.S.E
       5
275.4176
```

**3.2** a) Le code permettant d'obtenir les estimations est

```
> triINC <- cum2incr(tri)
> pmt <- c(425, 532, 717, 440, 620, 97,125, 13, 120, 90,
+           57, 72, 102, 18, 16)
> Year <- as.factor(c(1,2,3,4,5,1,2,3,4,1,2,3,1,2,1))
> Delay <- as.factor(c(1,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,4,4,5))
> dda <- data.frame(pmt = pmt, Year = Year, Delay = Delay)
> model2 <- glm(pmt ~ Year + Delay, family = quasipoisson, data = dda)
> summary(model2)
Call:
```

```
glm(formula = pmt ~ Year + Delay, family = quasipoisson, data = dda)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.268   -1.664    0.000    3.244    5.031

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  6.22041    0.24202  25.702 2.29e-07
Year2        0.02490    0.31974   0.078  0.94047
Year3        0.20286    0.31645   0.641  0.54519
Year4       -0.04771    0.34935  -0.137  0.89584
Year5        0.20931    0.34376   0.609  0.56494
Delay2      -1.78422    0.34867  -5.117  0.00218
Delay3      -2.01003    0.43658  -4.604  0.00368
Delay4      -2.13860    0.58336  -3.666  0.01050
Delay5      -3.44783    1.53887  -2.240  0.06630

(Intercept) ***
Year2
Year3
Year4
Year5
Delay2      **
Delay3      **
Delay4      *
Delay5      .
---
Signif. codes:
0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for quasipoisson family taken to be 36.95286)

    Null deviance: 3468.24  on 14  degrees of freedom
Residual deviance:  270.37  on  6  degrees of freedom
AIC: NA

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

b) Le code permettant d’obtenir la réserve est

```
> ddaNEW <- data.frame(Year = as.factor(c(1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,
+           4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5)), Delay = as.factor(c(1,1,1,1,1,
+           2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5)))
> ddaNEW$pred <- predict(model2, newdata = ddaNEW, type =  "response")
> matrix(ddaNEW$pred, ncol = 5)
         [,1]      [,2]     [,3]     [,4]     [,5]
[1,] 502.9116  84.45299 67.38232 59.25311 16.00000
[2,] 515.5900  86.58205 69.08103 60.74689 16.40336
[3,] 616.0168 103.44653 82.53665 72.57919 19.59841
[4,] 479.4816  80.51843 64.24306 56.49258 15.25458
[5,] 620.0000 104.11542 83.07034 73.04849 19.72514
```

Il suffit maintenant de sommer la partie inférieure droite du triangle pour obtenir la réserve totale

$$\begin{aligned}\hat{R} &= 104{,}11542 + 83{,}07034 + 73{,}04849 + 19{,}72514 + 64{,}24306 + 56{,}49258 + 15{,}25458 \\ &\quad + 72{,}57919 + 19{,}59841 + 16{,}40336 \\ &= 524{,}5306.\end{aligned}$$

c) Les variances des réserves sont données par

$$\widehat{\mathrm{Var}}[R_1] = 0$$
$$\widehat{\mathrm{Var}}[R_2] = 16{,}40$$
$$\widehat{\mathrm{Var}}[R_3] = 72{,}57919 + 19{,}59841 = 92{,}1776$$
$$\widehat{\mathrm{Var}}[R_4] = 64{,}24306 + 56{,}49258 + 15{,}25458 = 135{,}9902$$
$$\widehat{\mathrm{Var}}[R_5] = 104{,}11542 + 83{,}07034 + 73{,}04849 + 19{,}72514 = 279{,}9594.$$

**3.3** Les démarches sont identiques à celles de l'exercice 3.1. Nous fournissons ci-dessous les résultats calculés avec `MackChainLadder`.

```
> tri <- matrix(c(120, 310, 320, 360, 370, 370,
+                 240, 410, 420, 450, 460, NA,
+                 230, 400, 430, 480, NA,  NA,
+                 260, 450, 460, NA,  NA,  NA,
+                 270, 460, NA,  NA,  NA,  NA,
+                 280, NA,  NA,  NA,  NA,  NA),
+ nrow = 6, byrow = TRUE)
> model1 <- MackChainLadder(tri)
> summary(model1)
```

```
$ByOrigin
  Latest Dev.To.Date Ultimate      IBNR    Mack.S.E
1    370   1.0000000 370.0000   0.00000   0.0000000
2    460   1.0000000 460.0000   0.00000   0.3480608
3    480   0.9759036 491.8519  11.85185   2.2030204
4    460   0.8851219 519.7024  59.70244  14.9543037
5    460   0.8525407 539.5637  79.56368  20.5770606
6    280   0.4703673 595.2795 315.27949 100.5983235
   CV(IBNR)
1       NaN
2       Inf
3 0.1858798
4 0.2504806
5 0.2586238
6 0.3190766

$Totals
                 Totals
Latest:    2510.0000000
Dev:          0.8433014
Ultimate:  2976.3974581
IBNR:       466.3974581
Mack S.E.:  106.3433585
CV(IBNR):     0.2280102
> model1$f
[1] 1.812500 1.038217 1.102564 1.024691 1.000000
[6] 1.000000
> model1$sigma^2
[1] 2.001926e+01 2.485706e-01 3.245592e-01
[4] 6.172840e-03 1.174022e-04
> model1$Total.Mack.S.E
       6
106.3434
```

**3.4** a) Le code permettant d'obtenir les résultats est

```
> triINC <- cum2incr(tri)
> pmt <- c(120,240,230,260,270,280,190,170,170,190,190,
```

```
+          10,10,30,10,40,30,50,10,10,0)
> Year <- c(1,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,1,2,3,4,1,2,3,1,2,1)
> Delay <- c(1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,5,5,6)
> dda <- data.frame(pmt = pmt, Year = as.factor(Year),
+                   Delay = as.factor(Delay))
> model2 <- glm(pmt ~ Year + Delay, family = quasipoisson, data = dda)
> summary(model2)
Call:
glm(formula = pmt ~ Year + Delay, family = quasipoisson, data = dda)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.3413  -1.1439  -0.0889   0.9842   3.8809

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    5.1593     0.1440  35.825 6.82e-12
Year2          0.2177     0.1768   1.231 0.246319
Year3          0.2847     0.1757   1.620 0.136236
Year4          0.3398     0.1788   1.901 0.086548
Year5          0.3773     0.1792   2.105 0.061519
Year6          0.4755     0.2089   2.277 0.046056
Delay2        -0.2076     0.1130  -1.838 0.095961
Delay3        -2.6698     0.3369  -7.925 1.28e-05
Delay4        -1.6451     0.2482  -6.628 5.87e-05
Delay5        -2.9715     0.5759  -5.160 0.000425
Delay6       -21.4618  5325.1782  -0.004 0.996864

(Intercept) ***
Year2
Year3
Year4       .
Year5       .
Year6       *
Delay2      .
Delay3      ***
Delay4      ***
Delay5      ***
Delay6
```

```
---
Signif. codes:
0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for quasipoisson family taken to be 6.409734)

    Null deviance: 2136.823  on 20  degrees of freedom
Residual deviance:   62.987  on 10  degrees of freedom
AIC: NA

Number of Fisher Scoring iterations: 14
```

b) Le code permettant d'obtenir la réserve est

```
> ddaNEW <- data.frame(Year = as.factor(c(1,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,
+            6,1,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,6)),
+            Delay = as.factor(c(1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,
+            3,3,4,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6)))
> ddaNEW$pred <- predict(model2, newdata = ddaNEW, type =  "response")
> matrix(ddaNEW$pred, ncol = 6)
         [,1]     [,2]     [,3]     [,4]      [,5]
[1,] 174.0359 141.4042 12.05503 33.58924  8.915663
[2,] 216.3690 175.7998 14.98734 41.75960 11.084337
[3,] 231.3510 187.9727 16.02511 44.65116 11.851852
[4,] 244.4510 198.6165 16.93252 47.17949 12.522950
[5,] 253.7931 206.2069 17.57962 48.98252 13.001534
[6,] 280.0000 227.5000 19.39490 54.04050 14.344084
             [,6]
[1,] 8.315287e-08
[2,] 1.033792e-07
[3,] 1.105376e-07
[4,] 1.167966e-07
[5,] 1.212602e-07
[6,] 1.337816e-07
```

Il suffit maintenant de sommer la partie inférieure droite du triangle pour obtenir la réserve totale 466.

c) Les variances des réserves sont données par

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{Var}}[R_1] &= 0 \\
\widehat{\mathrm{Var}}[R_2] &= 0 \\
\widehat{\mathrm{Var}}[R_3] &= 11{,}8519 \\
\widehat{\mathrm{Var}}[R_4] &= 59{,}7024 \\
\widehat{\mathrm{Var}}[R_5] &= 79{,}5637 \\
\widehat{\mathrm{Var}}[R_5] &= 315{,}2795.
\end{aligned}$$

# Bibliographie


Antonio, K. et R. Plat. 2013, « Micro–level stochastic loss reserving for general insurance », *Scandinavian Actuarial Journal, in press.*

Arjas, E. 1989, « The claims reserving problem in non–life insurance : some structural ideas. », *ASTIN Bulletin*, vol. 19, nº 2, p. 139–152.

Bornhuetter, R. et R. Ferguson. 1972, « The actuary and IBNR », *Proceedings CAS*, vol. 59, p. 181–195.

Denuit, M. et A. Charpentier. 2005, *Mathématiques de l'assurance non-vie, Tome 2 : Tarification et provisionnement*, Economica.

Drieskens, D., M. Henry, J.-F. Walhin et J. Wielandts. 2012, « Stochastic projection for large individual losses », *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2012, nº 1, p. 1–39.

England, P. et R. Verrall. 2002, « Stochastic claims reserving in general insurance », *British Actuarial Journal*, vol. 8, nº 3, p. 443–544.

Haastrup, S. et E. Arjas. 1996, « Claims reserving in continuous time : a nonparametric Bayesian approach », *ASTIN Bulletin*, vol. 26, nº 2, p. 139–164.

Hertig, J. 1985, « A statistical approach to the ibnr–reserves in marine insurance », *ASTIN Bulletin*, vol. 15, nº 2, p. 171–183.

Jin, X. et E. Frees. 2014, « Comparing micro- and macro-level loss reserving models », *Under revision for resubmission.*

Larsen, C. 2007, « An individual claims reserving model », *ASTIN Bulletin : The Journal of the International Actuarial Association*, vol. 37, p. 113–132.

Mack, T. 1993, « Distribution–free calculation of the standard error of chain–ladder reserve estimates », *ASTIN Bulletin*, vol. 23, nº 2, p. 213–225.

Norberg, R. 1993, « Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance », *ASTIN Bulletin*, vol. 23, nº 1, p. 95–115.

Norberg, R. 1999, « Prediction of outstanding liabilities II. Model variations and extensions. », *ASTIN Bulletin*, vol. 29, nº 1, p. 5–25.

Pigeon, M., K. Antonio et M. Denuit. 2013, « Individual loss reserving with the multivariate skew normal framework », *ASTIN Bulletin : The Journal of the International Actuarial Association*, vol. 43, nº 3, p. 399–428.

Pigeon, M., K. Antonio et M. Denuit. 2014, « Individual loss reserving using paid–incurred data », *In revision for Insurance : Mathematics and Economics*.

Renshaw, A. E. et R. Verrall. 1998, « A stochastic model underlying the chain–ladder technique », *British Actuarial Journal*, vol. 4, nº 4, p. 903–923.

Rosenlund, S. 2012, « Bootstrapping individual claim histories », *ASTIN Bulletin*, vol. 42, nº 1, p. 291–324.

Taylor, G. 2000, *Loss Reserving : an Actuarial Perspective*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Verrall, R. J. et P. England. 2002, « Stochastic claims reserving in general insurance », *British Actuarial Journal*, vol. 8, nº 3, p. 443–518.

Wüthrich, M. V. et M. Merz. 2008, *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*, Wiley Finance.

Zhao, X., X. Zhou et J. Wang. 2009, « Semiparametric model for prediction of individual claim loss reserving », *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 45, nº 1, p. 1–8.

Zhao, X. B. et X. Zhou. 2010, « Applying copula models to individual claim loss reserving methods », *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 46, nº 2, p. 290–299.

Ce document a été produit avec le système de mise en page XƎLaTeX. Le texte principal est composé en Lucida Bright OT 11 points, les mathématiques en Lucida Bright Math OT, le code informatique en Lucida Grande Mono DK et les titres en Fira Sans. Des icônes proviennent de la police Font Awesome. Les graphiques ont été réalisés avec R.