Université Laval	Examen final informatique
Faculté des Sciences et de Génie	Hiver 2017
École d'actuariat	Date: 23 avril 2017

Act-2001 Introduction à l'actuariat 2

Professeur: Etienne Marceau

Nom de famille de l'étudiant	**Prénom de l'étudiant**	**Matricule**

Instructions:

– L'examen contient 5 questions à développement.
– Le total des points est de **117 points**.
– La durée est de 180 minutes.
– Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.
– Veuillez écrire vos réponses dans le présent cahier seulement.
– Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.
– Veuillez retourner le présent cahier, les annexes et le papier brouillon à la fin de l'examen.

Questions	Points obtenus	Points
1		30
2		20
3		30
4		22
5		15
Total		117

1. **(30 points).** Les coûts pour les 3 lignes d'affaires d'un portefeuille d'une société d'assurance sont représentés par les v.a. indépendantes X_1, X_2 et X_3 avec

$$F_{X_1}(x) = \exp\left(-\left(\frac{x}{1000}\right)^{-2}\right) \quad , \quad F_{X_2}(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1000}\right)^{-2}} \quad \text{et} \quad F_{X_3}(x) = 1 + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2000}}\right)}{\ln 2} \quad , x \geq 0.$$

Les coûts pour le portefeuille sont définis par la v.a. S où

$$S = X_1 + X_2 + X_3.$$

On a recours au générateur par défaut de R pour produire $m = 100000$ (cent mille) réalisations de (U_1, U_2, U_3) où U_1, U_2, U_3 sont des v.a. i.i.d. de loi uniforme standard.
On fixe `set.seed(20160419)`.
On produit dans l'ordre $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, U_3^{(1)}\right)$, $\left(U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, U_3^{(2)}\right)$, ..., $\left(U_1^{(m)}, U_2^{(m)}, U_3^{(m)}\right)$:

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$U_3^{(j)}$
1	0.7401186	0.8075052	0.1863795
2	0.0482047	0.3257164	0.7577736
...			
m	0.4432184	0.3596678	0.2250111

Questions :

(a) **(9 points).** Développer l'expression de la fonction quantile de X_i, notée par $F_{X_i}^{-1}$, à partir de la fonction de répartition, pour $i = 1, 2, 3$.

   i. **(3 points).** Développer $F_{X_1}^{-1}$.

   ii. **(3 points).** Développer $F_{X_2}^{-1}$.

   iii. **(3 points).** Développer $F_{X_3}^{-1}$.

(b) **(4 points).** Utiliser la méthode inverse pour produire m réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$. On utilise $U_i^{(j)}$ pour calculer $X_i^{(j)}$ pour $j = 1, ..., m$ et $i = 1, 2, 3$.

   i. **(1 points).** Fournir l'expression de $X_i^{(j)}$ en fonction de $F_{X_i}^{-1}$ et $U_i^{(j)}$, $i = 1, 2, 3$.

   ii. **(3 points).** Indiquer la réalisation #3 de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$.

   Les valeurs de vérification sont les suivantes :

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$
1	1822.8736	2048.1564	296.7785
2	574.2671	695.0219	2348.0466
...			
m	1108.5870	749.4593	369.7366

(c) **(4 points).** Avec les résultats de l'item (1b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de

$$\varphi = \Pr(S > 20000).$$

(Vérification : $\Pr(S > 40000) \simeq 0.00163$)

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.
ii. Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.
iii. Calculer un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % pour l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

(d) **(3 points).** Avec les résultats de l'item (1b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de

$$\varphi = TVaR_{\kappa}(S)$$

pour $\kappa = 0$ et 0.9999.

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.
ii. Indiquer la valeur $\widetilde{\varphi}$ pour $\kappa = 0$ et 0.9999.

(e) **(4 points).** Avec les résultats de l'item (1b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}_i$ de la contribution φ_i pour X_i, $i = 1, 2, 3$, selon la méthode d'Euler à $TVaR_{\kappa}(S)$ pour $\kappa = 0.9999$.

- Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}_i$ de φ_i, $i = 1, 2, 3$.
- Indiquer les valeurs de $\widetilde{\varphi}_1$, $\widetilde{\varphi}_2$, $\widetilde{\varphi}_3$.

(f) **(3 points).** Avec les résultats de l'item (1b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de

$$\varphi = E\left[X_2 \times 1_{\{(X_1+X_3 \leq 1500)\, \cup\, (X_1+X_3 > 150000)\}}\right].$$

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.
ii. Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

Solution :

(a) **(9 points).** Développer l'expression de la fonction quantile de X_i, notée par $F_{X_i}^{-1}$, à partir de la fonction de répartition, pour $i = 1, 2, 3$.
Les fonctions de répartition sont continues. L'expression $F_{X_i}^{-1}$ est la solution de

$$F_{X_i}(x) = u$$

pour $u \in (0, 1)$.

i. **(3 points).** Développer $F_{X_1}^{-1}$.

$$F_{X_1}^{-1}(u) = 1000\left(-\ln\{u\}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ii. **(3 points).** Développer $F_{X_2}^{-1}$.

$$F_{X_2}^{-1}(u) = 1000\left(\frac{1}{u} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

iii. **(3 points).** Développer $F_{X_3}^{-1}$.

$$F_{X_1}^{-1}(u) = -2000 \ln\left\{2 \times \left(1 - \frac{1}{2^{1-u}}\right)\right\}$$

(b) **(4 points).** Utiliser la méthode inverse pour produire m réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$. On utilise $U_i^{(j)}$ pour calculer $X_i^{(j)}$ pour $j = 1, ..., m$ et $i = 1, 2, 3$.

i. **(1 points).** Fournir l'expression de $X_i^{(j)}$ en fonction de $F_{X_i}^{-1}$ et $U_i^{(j)}$, $i = 1, 2, 3$.

ii. **(3 points).** Indiquer la réalisation #3 de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$.
Rép: 793.4509; 1405.0905; 1596.6941

Les valeurs de vérification sont les suivantes :

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$
1	1822.8736	2048.1564	296.7785
2	574.2671	695.0219	2348.0466
...			
m	1108.5870	749.4593	369.7366

(c) **(4 points).** Avec les résultats de l'item (1b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de

$$\varphi = \Pr(S > 20000).$$

(Vérification : $\Pr(S > 40000) \simeq 0.00163$)

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} 1_{\left\{S^{(j)} > 20000\right\}}$$

ii. Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

$$\widetilde{\varphi} = 0.0077$$

iii. Calculer un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % pour l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

$$IC = (0.007158\ ;\ 0.008242)$$

(d) **(3 points).** Avec les résultats de l'item (1b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de

$$\varphi = TVaR_{\kappa}(S)$$

pour $\kappa = 0$ et 0.9999.

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

ii. Indiquer la valeur $\widetilde{\varphi}$ pour $\kappa = 0$ et 0.9999.

$$TVaR_0(S) = E[S] \simeq 5015.504$$

$$TVaR_{0.99}(S) \simeq 260216.9$$

(e) **(4 points).** Avec les résultats de l'item (1b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}_i$ de la contribution φ_i pour X_i, $i = 1, 2, 3$, selon la méthode d'Euler à $TVaR_{\kappa}(S)$ pour $\kappa =$ 0.9999.

- Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}_i$ de φ_i, $i = 1, 2, 3$.
- Indiquer les valeurs de $\widetilde{\varphi}_1$, $\widetilde{\varphi}_2$, $\widetilde{\varphi}_3$.

181070.961 ; 76581.968 ; 2563.929

(f) **(3 points).** Avec les résultats de l'item (1b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de

$$\varphi = E\left[X_2 \times 1_{\{(X_1+X_3 \leq 1500)\ \cup\ (X_1+X_3 > 150000)\}}\right].$$

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(X_2^{(j)} \times 1_{\left\{\left(X_1^{(j)}+X_3^{(j)} \leq 1500\right)\ \cup\ \left(X_1^{(j)}+X_3^{(j)} > 150000\right)\right\}}\right).$$

ii. Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

$$\widetilde{\varphi} = 295.932$$

2. **(20 points).** On considère un individu d'âge x dont la durée de vie est définie par la v.a. T_x. La distribution de la durée de vie de l'individu est modélisée à partir de la loi de Makeham avec les paramètres

$$(\alpha = 0.001, \beta = 0.00004, \gamma = \ln(1.09)).$$

Un contrat d'assurance continue vie-entière avec une prestation de décès $b = 1000$ est émis à un assuré d'âge $x = 30$.
La valeur présente des coûts pour le contrat est définie par la v.a. Z où

$$Z = bv^{T_x},$$

où

$$v = \mathrm{e}^{-0.03}.$$

Soit les v.a. indépendantes

$$W \sim Exp(\alpha) \text{ (cause accidentelle)}$$

et

$$Y_x \sim Gompertz(\beta e^{\gamma x}, \gamma) \text{ (cause "biologique")}.$$

On a recours au générateur par défaut de R pour produire $m = 100000$ (cent mille) réalisations de (U_1, U_2) où U_1, U_2 sont des v.a. i.i.d. de loi uniforme standard.
La v.a. U_1 est utilisée pour simuler la v.a. W et la v.a. U_2 est utilisée pour simuler Y_x.
On fixe `set.seed(20160419)`.
On produit dans l'ordre $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$, $\left(U_1^{(2)}, U_2^{(2)}\right)$, ..., $\left(U_1^{(m)}, U_2^{(m)}\right)$:

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$
1	0.7401186	0.8075052
2	0.1863795	0.0482047
...		
m	0.8665470	0.46552745

Questions :

(a) **(3 points). Loi de Makeham.**

i. **(2 points).** Développer l'expression de la fonction de survie de $\min(W; Y_x)$ pour démontrer que

$$T_x = \min(W; Y_x) \sim Makeham(\alpha, \beta e^{\gamma x}, \gamma).$$

ii. **(1 point).** Utiliser cette représentation pour fournir une interprétation de la loi de Makeham.

(b) **(3 points).** Utiliser la méthode inverse pour produire m réalisations $\left(W^{(j)}, Y_x^{(j)}, T_x^{(j)}\right)$ de (W, Y_x, T_x).

   i. **(0.5 point).** Fournir l'expression de $W^{(j)}$ en fonction de F_W^{-1} et $U_1^{(j)}$.

   ii. **(0.5 point).** Fournir l'expression de $Y_x^{(j)}$ en fonction de $F_{Y_x}^{-1}$ et $U_2^{(j)}$.

   iii. **(2 points).** Indiquer la réalisation $\left(W^{(j)}, Y_x^{(j)}, T_x^{(j)}\right)$ pour $j = 3$ de (W, Y_x, T_x).

   Les valeurs de vérification sont les suivantes :

j	$W^{(j)}$	$Y_x^{(j)}$	$T_x^{(j)}$
1	1347.5299	64.90147	64.90147
2	206.2612	25.52550	25.52550
...			
m	2014.0058	53.75047	53.75047

(c) **(3 points).** Avec les résultats de l'item (2b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de l'espérance de vie future φ de l'assuré.

   i. **(0.5 point).** Indiquer l'expression de φ.

   ii. **(0.5 point).** Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

   iii. **(2 points).** Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

(d) **(4 points).** Avec les résultats de l'item (2b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de la probabilité φ que le décès de l'assuré soit de cause accidentelle.

   i. **(1 points).** Indiquer l'expression de φ.

   ii. **(1 points).** Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

   iii. **(2 points).** Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

(e) **(2 points).** Avec les résultats de l'item (2b), produire m réalisations $Z^{(j)}$ de Z :

   i. Indiquer la méthode pour y parvenir.

   ii. Indiquer la réalisation $Z^{(j)}$, pour $j = 1$.

(f) **(5 points).** Avec les résultats de l'item (2e), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de $\varphi =$ espérance de Z, i.e. la prime pure du contrat.

   i. **(0.5 point).** Indiquer l'expression de φ.

   ii. **(0.5 point).** Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

   iii. **(2 points).** Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

   iv. **(2 points).** Calculer un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % pour l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

Questions :

(a) **(3 points). Loi de Makeham.**

   i. **(2 points).** Développer l'expression de la fonction de survie de $\min(W; Y_x)$ pour démontrer que

$$T_x = \min(W; Y_x) \sim Makeham\left(\alpha, \beta e^{\gamma x}, \gamma\right).$$

ii. **(1 point).** Utiliser cette représentation pour fournir une interprétation de la loi de Makeham.
Standard

(b) **(3 points).** Utiliser la méthode inverse pour produire m réalisations $\left(W^{(j)}, Y_x^{(j)}, T_x^{(j)}\right)$ de (W, Y_x, T_x).

i. **(0.5 point).** Fournir l'expression de $W^{(j)}$ en fonction de F_W^{-1} et $U_1^{(j)}$.
Standard

ii. **(0.5 point).** Fournir l'expression de $Y_x^{(j)}$ en fonction de $F_{Y_x}^{-1}$ et $U_2^{(j)}$.
Standard

iii. **(2 points).** Indiquer la réalisation $\left(W^{(j)}, Y_x^{(j)}, T_x^{(j)}\right)$ pour $j = 3$ de (W, Y_x, T_x).

394.10443 ; 63.16547 ; 63.16547

Les valeurs de vérification sont les suivantes :

j	$W^{(j)}$	$Y_x^{(j)}$	$T_x^{(j)}$
1	1347.5299	64.90147	64.90147
2	206.2612	25.52550	25.52550
...			
m	2014.0058	53.75047	53.75047

(c) **(3 points).** Avec les résultats de l'item (2b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de l'espérance de vie future φ de l'assuré.

i. **(0.5 point).** Indiquer l'expression de φ.

$$\varphi = E\left[T_x\right]$$

ii. **(0.5 point).** Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

$$\widetilde{\varphi} = \sum_{j=1}^{m} T_x^{(j)}$$

iii. **(2 points).** Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

54.18588

(d) **(4 points).** Avec les résultats de l'item (2b), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de la probabilité φ que le décès de l'assuré soit de cause accidentelle.

i. **(1 points).** Indiquer l'expression de φ.

$$\varphi = E\left[1_{\{W<Y_x\}}\right]$$

ii. **(1 points).** Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

$$\widetilde{\varphi} = \sum_{j=1}^{m} 1\left\{_{W^{(j)}<Y_x^{(j)}}\right\}$$

iii. **(2 points).** Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

$$\widetilde{\varphi} = 0.05103$$

(e) **(2 points).** Avec les résultats de l'item (2b), produire m réalisations $Z^{(j)}$ de Z :

i. Indiquer la méthode pour y parvenir.

ii. Indiquer la réalisation $Z^{(j)}$, pour $j = 1$.

$$Z^{(1)} = 142.6953$$

(f) **(5 points).** Avec les résultats de l'item (2e), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de $\varphi =$ espérance de Z, i.e. la prime pure du contrat.

i. **(0.5 point).** Indiquer l'expression de φ.

$$\varphi = E[Z] = E\left[bv^{T_x}\right]$$

ii. **(0.5 point).** Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Z^{(j)} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} bv^{T_x^{(j)}}$$

iii. **(2 points).** Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

$$\widetilde{\varphi} = 242.8877$$

iv. **(2 points).** Calculer un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % pour l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

$$\text{IC} \quad = \quad (242.0085 \quad ; \quad 243.7668)$$

3. **(30 points).** Soit la v.a. $\Theta = Binom\,(5, 0.3)$ représentant les conditions environnementales. Ces dernières ont un impact sur les nombres de sinistres (v.a. M_1, ..., M_n) des contrats d'un portefeuille.
Sachant que $\Theta = \theta$, les v.a. $(M_1|\Theta = k)$, ..., $(M_n|\Theta = k)$ sont conditionnellement indépendantes avec
$$(M_i|\Theta = k) \sim Pois\,(0.1 \times (k+1)), \quad i = 1, 2, ..., n.$$
On définit
$$X_1 = 1000M_1 \quad ,..., \quad X_n = 1000M_n \quad \text{et} \quad W_n = \tfrac{1}{n}\,(X_1 + ... + X_n)\,.$$
Questions :
(a) **(6 points).** Calculer $E\,[X_1]$, $VaR_{0.9}\,(X_1)$ et $TVaR_{0.9}\,(X_1)$.
(b) **(6 points).** Calculer $E\,[W_n]$, $VaR_{0.9}\,(W_n)$ et $TVaR_{0.9}\,(W_n)$, pour $n = 100$.
(c) **(5 points).** Soit ρ_κ une mesure avec $\kappa \in (0, 1)$. Pour $\kappa \in (0, 1)$, l'Index du Bénéfice de Mutualisation est défini par
$$IBM_\kappa = 1 - \frac{\rho_\kappa\,(W_n) - E\,[W_n]}{\rho_\kappa\,(X_1) - E\,[X_1]} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$
i. Quelle propriété ρ_k doit-elle satisfaire pour que $\varphi_1 \geq 0$?
ii. Quelle propriété ρ_k doit-elle satisfaire pour que $IBM_\kappa \in [0, 1]$?
iii. Choisir la seule mesure parmi la VaR et la TVaR qui satisfait (i) et (ii) ; puis, calculer $IBM_{0.9}$ avec $n = 100$.
(d) **(13 points).** Comportement limite de la part allouée W_n.
i. **(1 point).** Est-ce que l'on peut appliquer la loi classique des grand nombres pour identifier le comportment limite de W_n ? Pourquoi ?
ii. **(5 points).** Utiliser les transformées de Laplace-Stieltjes pour démontrer que
$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n}\,(x) = F_Z\,(x) \tag{1}$$
où Z est une v.a. discrète prenant les valeurs $\{z_1, ..., z_m\}$.
iii. **(2 points).** Indiquer les valeurs $z_1 < ... < z_m$ (et la valeur de m) en mentionnant clairement leur signification.
iv. **(2 points).** Indiquer les valeurs de $\Pr\,(Z = z_j)$, $j = 1, 2, ..., m$, en mentionnant clairement à partir de la loi de quelle v.a. ces valeurs sont calculées.
v. **(2 points).** Calculer $VaR_{0.9}\,(Z)$ et comparer avec $VaR_{0.9}\,(W_n)$ pour $n = 100$.
vi. **(1 point).** Interpréter le résultat en (1).

Questions :

(a) **(6 points).** Calculer $E[X_1]$, $VaR_{0.9}(X_1)$ et $TVaR_{0.9}(X_1)$.
On a

$$\begin{aligned} E[X_1] &= 1000 \times E[M_1] \\ &= 1000 \times E[0.1 \times (\Theta + 1)] \\ &= 250 \end{aligned}$$

En raison de la propriété d'homogénéité de la VaR, on a

$$VaR_{0.9}(X_1) = 1000 \times VaR_{0.9}(M_1) \quad \text{et} \quad TVaR_{0.9}(X_1) = 1000 \times TVaR_{0.9}(M_1)$$

On a

$$F_M(x) = \sum_{j=0}^{5} \Pr(\Theta = j) \Pr(M_1 \leq x | \Theta = j)$$

On obtient

$$VaR_{0.9}(M_1) = 1$$

On a

$$TVaR_{0.9}(M_1) = \frac{E\left[M_1 \times 1_{\{M_1 > 1\}}\right] + 1 \times (F_{M_1}(1) - 0.9)}{1 - 0.9}$$

(b) **(6 points).** Calculer $E[W_n]$, $VaR_{0.9}(W_n)$ et $TVaR_{0.9}(W_n)$, pour $n = 100$.

$$E[W_n] = E[X_1] = 250$$

$$VaR_{0.9}(W_n) = 400$$

$$TVaR_{0.9}(W_n) = 470.0714$$

(c) **(5 points).** Soit ρ_κ une mesure avec $\kappa \in (0,1)$. Pour $\kappa \in (0,1)$, l'Index du Bénéfice de Mutualisation est défini par

$$IBM_\kappa = 1 - \frac{\rho_\kappa(W_n) - E[W_n]}{\rho_\kappa(X_1) - E[X_1]} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

i. Quelle propriété ρ_k doit-elle satisfaire pour que $\varphi_1 \geq 0$?

Propriété : ρ_k doit être supérieure à l'espérance

ii. Quelle propriété ρ_k doit-elle satisfaire pour que $IBM_\kappa \in [0,1]$?

Propriété : ρ_k doit être sous-additive

iii. Choisir la seule mesure parmi la VaR et la TVaR qui satisfait (i) et (ii) ; puis, calculer $IBM_{0.9}$ avec $n = 100$.
On choisit la TVaR car elle satisfait aux deux propriétés. La VaR ne satisfait pas aux deux propriétés.
On obtient

$$IBM_{0.9} = 0.7959365$$

(d) **(13 points).** Comportement limite de la part allouée W_n.

i. **(1 point).** Est-ce que l'on peut appliquer la loi classique des grand nombres pour identifier le comportment limite de W_n ? Pourquoi ?
Non

ii. **(5 points).** Utiliser les transformées de Laplace-Stieltjes pour démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n}(x) = F_Z(x)$$

où Z est une v.a. discrète prenant les valeurs $\{z_1, ..., z_m\}$.
Convention

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(t) &= \sum_{j=0}^{5} \Pr(\Theta = j)\, \mathcal{L}_{X|\Theta=j}(t) \\ &= \sum_{j=0}^{5} \Pr(\Theta = j)\, \mathcal{L}_{Y^{(j)}}(t)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Y^{(j)}}(t) &= E\left[\exp\left(-tY^{(j)}\right)\right] \\ &= E\left[\exp(-t \times X)\,|\Theta = j\right]\end{aligned}$$

On utilise l'approximation

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Y^{(j)}}(t) &\simeq \left(1 - t \times E\left[Y^{(j)}\right]\right) \\ &= (1 - t \times (100 \times (1 + j))) \\ &= (1 - t \times z_{j+1})\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{5} \Pr(\Theta = j)\, \mathcal{L}_{S_n|\Theta=j}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{5} \Pr(\Theta = j)\, \mathcal{L}_{X_1+\ldots+X_n|\Theta=j}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{5} \Pr(\Theta = j)\left(\mathcal{L}_{Y^{(j)}}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n
\end{aligned}$$

On applique l'approximation

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{5} \Pr(\Theta = j)\left(\mathcal{L}_{Y^{(j)}}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \\
&\simeq \sum_{j=0}^{5} \Pr(\Theta = j)\left(1 - \frac{t}{n} \times E\left[Y^{(j)}\right]\right)^n
\end{aligned}$$

Ensuite, on prend la limite et on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) &= \sum_{j=0}^{5} \Pr(\Theta = j) \exp\left(-t \times E\left[Y^{(j)}\right]\right) \\
&= \mathcal{L}_Z(t)
\end{aligned}$$

ce qui signifie que la v.a. Z est discrète prenant les valeurs dans l'ensemble

$$\{z_1, ..., z_m\}$$

iii. **(2 points).** Indiquer les valeurs $z_1 < ... < z_m$ (et la valeur de m) en mentionnant clairement leur signification.
On a

$$z_k = 100 \times k$$

pour $k = 1, 2, ..., 6$

iv. **(2 points).** Indiquer les valeurs de $\Pr(Z = z_j)$, $j = 1, 2, ..., m$, en mentionnant clairement à partir de la loi de quelle v.a. ces valeurs sont calculées.

0.167807	0.36015	0.30870	0.13230	0.02835	0.00243

v. **(2 points).** Calculer $VaR_{0.9}(Z)$ et comparer avec $VaR_{0.9}(W_n)$ pour $n = 100$.
On a

$$VaR_{0.9}(Z) = 400$$

vi. **(1 point).** Interpréter le résultat en (1).
On obtient des valeurs identiques, confirmant le résultat asymptotique.

4. **(22 points).** On considère un contrat de rente discrète temporaire $n = 35$ ans, émis à un individu d'âge $x = 45$.
La v.a. T_x représente la durée de vie de l'individu d'âge $x = 45$.
La distribution de v.a. T_x est modélisée à partir d'une table de mortalité où

$$\ln\left(\frac{q_y}{1-q_y}\right) = -9.9 + 0.09 \times y, \quad \text{pour les âges entiers } y = 40, 41, ..., 90 \quad . \tag{2}$$

La rente annuelle $g = 200$ est versée au début de l'année et elle cesse au décès s'il advient avant la durée n.
On utilise une force d'intérêt de 3% pour les calculs.
La v.a. discrète Z correspond à la valeur présente des coûts pour le contrat.
La v.a. Z peut être définie selon les deux approches équivalentes comme suit :

approche #1 : $Z = \sum_{k=0}^{n-1} gv^k \times 1_{\{T_x > k\}}$;

ou

approche #2 : $Z = g \times \ddot{a}_{\overline{\min([T_x]+1;n)|}} = \begin{cases} g \times \ddot{a}_{\overline{[T_x]+1|}} & , T_x \leq n \\ g \times \ddot{a}_{\overline{[T_x]+1|}} & , T_x > n \end{cases}$.

Questions :

(a) **(1 point).** Isoler l'expression de q_y, pour $y = 40, 41, ..., 90$.
On a

$$q_y = \frac{\exp(-9.9 + 0.09 \times y)}{1 + \exp(-9.9 + 0.09 \times y)}$$

(b) **(2 points)**. À partir de (2), calculer les valeurs de $\overline{F}_{T_x}(k)$, pour $k = 10$ et 20. (Vérification : $\overline{F}_{T_x}(5) = 0.9833238$; $\overline{F}_{T_x}(15) = 0.9210745$).

0.9564423 et 0.8575481

(c) **(4 points)**. Calculer $E[Z]$.

i. **(2 points)**. Développer l'expression de $E[Z]$.
Approche #1 :

$$E\left[Z^2\right] = \sum_{k=0}^{n-1} gv^k \left(1 - F_{T_x}(k)\right).$$

Approche #2 :

$$\begin{aligned} EZ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(g\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right)\left(F_{T_x}(k+1) - F_{T_x}(k)\right) \\ &\quad + \left(g\ddot{a}_{\overline{n|}}\right)\left(1 - F_{T_x}(n)\right). \end{aligned}$$

ii. **(2 points)**. Indiquer la valeur de $E[Z]$.

$$3906.751$$

(d) **(4 points)**. Calculer $\sqrt{Var(Z)}$.

i. **(2 points)**. Développer l'expression de $E[Z^2]$.
Approche #2 :

$$\begin{aligned} E\left[Z^2\right] &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(g\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right)^2 \left(F_{T_x}(k+1) - F_{T_x}(k)\right) \\ &\quad + \left(g\ddot{a}_{\overline{n|}}\right)^2 \left(1 - F_{T_x}(n)\right). \end{aligned}$$

ii. **(2 points)**. Indiquer les valeurs de $E[Z^2]$ et de $\sqrt{Var(Z)}$.

$$15965775 \quad \text{et} \quad 838.4953$$

(e) **(9pts).** La v.a. discrète Z prend des valeurs dans l'ensemble fini

$$\{z_1, ..., z_m\}$$

où

$$0 < z_1 < ... < z_m.$$

i. **(2 points)**. Indiquer les valeurs de m, z_1, z_{10}, z_m.

$$\begin{aligned} m &= 35 \\ z_1 &= g &= 200 \\ z_{10} &= g\ddot{a}_{\overline{10|}} &= 1753.926 \\ z_{35} &= g\ddot{a}_{\overline{35|}} &= 4399.08 \end{aligned}$$

ii. **(1 point)**. Le montant z_j représente la valeur présente de combien de paiements de rente g ?

$$j \text{ paiements}$$

iii. **(1 point)**. Calculer $\Pr(Z = z_{10})$.

$$... = \left(F_{T_x}(10) - F_{T_x}(9)\right) = 0.0061917$$

iv. **(1 point)**. Calculer la probabilité que le titulaire reçoive tous les paiements de rentes en vertu du contrat.

$$... = \Pr(T_x > n) = 0.5107199$$

v. **(2 points)**. Calculer la probabilité que la valeur présente des paiements versés au titulaire du contrat excèdent la prime pure payée par ce titulaire

$$... = \Pr(Z > 3906.751) = \Pr\left(Z > g\ddot{a}_{\overline{28|}}\right) = \Pr(Z > z_{28}) = 0.6828492$$

vi. **(2 points)**. Calculer le mode de la distribution de Z.

$$\text{mode} = z_{35} = 4399.08$$

(f) **(2 points)**. Calculer $VaR_{\kappa}(Z)$ pour $\kappa = 0.95$.

$$VaR_{0.95}(Z) = g\ddot{a}_{\overline{n|}} = z_{35} = 4399.08$$

5. **(10 points).** Soit le couple de v.a. discrètes (M_1, M_2) dont les valeurs de $\Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2)$ sont fournies ci-dessous :

Hypothèse A			
$m_1 \mid m_2$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0

Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) avec

$$X_1 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_1} B_{1,k} & , M_1 > 0 \\ 0 & , M_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_2} B_{2,k} & , M_2 > 0 \\ 0 & , M_2 = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{array}{lllll} (1) & B_{1,1} \sim Gamma\left(1.5, \frac{1}{100}\right) & B_{1,2} \sim Gamma\left(1.5, \frac{1}{100}\right) & \text{sont des v.a. indépendantes} \\ (2) & B_{2,1} \sim Gamma\left(1.5, \frac{1}{100}\right) & B_{2,2} \sim Gamma\left(1.5, \frac{1}{100}\right) & \text{sont des v.a. indépendantes} \end{array}.$$

De plus, $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$ et (M_1, M_2) sont indépendants.
On définit

$$S = X_1 + X_2.$$

Questions :

(a) **(2 points).** Développer l'expression de F_S.
(b) **(3 points).** Calculer $VaR_{0.9}(S)$. Expliquer la démarche et fournir la valeur.
(c) **(2 points).** Développer l'expression de $TVaR_{0.9}(S)$.
(d) **(3 points).** Calculer $TVaR_{0.9}(S)$.

Solution :

(a) **(2 points).** Développer l'expression de F_S.

On a

$$
\begin{aligned}
F_S(x) &= \Pr(X_1+X_2 \leq x) \\
&= \Pr(M_1=0, M_2=0) + \Pr(M_1=0, M_2=1)\, H\left(x; 1.5, \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + \Pr(M_1=0, M_2=2)\, H\left(x; 3, \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + \Pr(M_1=1, M_2=0)\, H\left(x; 1.5, \frac{1}{100}\right) + \Pr(M_1=1, M_2=1)\, H\left(x; 3, \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + \Pr(M_1=1, M_2=2)\, H\left(x; 4.5, \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + \Pr(M_1=2, M_2=0)\, H\left(x; 3, \frac{1}{100}\right) + \Pr(M_1=2, M_2=1)\, H\left(x; 4.5, \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + \Pr(M_1=2, M_2=2)\, H\left(x; 6, \frac{1}{100}\right)
\end{aligned}
$$

qui devient

$$
\begin{aligned}
F_S(x) &= \Pr(X_1+X_2 \leq x) \\
&= \frac{2}{4} H\left(x; 1.5, \frac{1}{100}\right) + \frac{2}{4} H\left(x; 4.5, \frac{1}{100}\right)
\end{aligned}
$$

(b) **(3 points).** Calculer $VaR_{0.9}(S)$. Expliquer la démarche et fournir la valeur.

$$VaR_{0.9}(S) = 618.0117$$

(c) **(2 points).** Développer l'expression de $TVaR_{0.9}(S)$.

$$
\begin{aligned}
F_S(x) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq x) \\
&= \Pr(M_1 = 0, M_2 = 0) + \Pr(M_1 = 0, M_2 = 1)\, H\left(x; 1.5, \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + \Pr(M_1 = 0, M_2 = 2)\, H\left(x; 3, \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + \Pr(M_1 = 1, M_2 = 0)\, H\left(x; 1.5, \frac{1}{100}\right) + \Pr(M_1 = 1, M_2 = 1)\, H\left(x; 3, \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + \Pr(M_1 = 1, M_2 = 2)\, H\left(x; 4.5, \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + \Pr(M_1 = 2, M_2 = 0)\, H\left(x; 3, \frac{1}{100}\right) + \Pr(M_1 = 2, M_2 = 1)\, H\left(x; 4.5, \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + \Pr(M_1 = 2, M_2 = 2)\, H\left(x; 6, \frac{1}{100}\right)
\end{aligned}
$$

(d) **(3 points).** Calculer $TVaR_{0.9}(S)$.

$$TVaR_{0.9}(S) = 781.2916$$