ACT-2001 : Introduction à l'actuariat II

Radu Mitric

E-mail : ilie-radu.mitric@act.ulaval.ca

Hiver 2021
cours : mercredi 13h30-15h20 et jeudi 9h30-10h20, en ligne, sur Zoom
ateliers : mercredi 15h30-16h20 et jeudi 10h30-11h20, en ligne (Alec Van Rassel)

Sujets abordés

- Notions supplémentaires sur la théorie des probabilités
- Mesures de risque, notamment mesures de risque de type VaR
- Méthodes de simulation stochastique
- Modélisation des risques individuels en assurance IARD
- Mutualisation des risques
- Principes de calcul de la prime majorée
- Applications en assurance de personnes et IARD

Évaluation

- Examen I, en présentiel, 40% : mercredi - le 10 mars, de 13h30 à 16h20.
- Examen II, en présentiel, 45% : mercredi - le 28 avril, de 13h30 à 16h20.
- Deux travaux pratiques (7.5% chacun) : 26 février et 23 avril.

- Calculatrices : consulter le portail du cours.

Chapitre I : Notions supplémentaires sur la théorie des probabilités

- Soit une variable aléatoire (v.a.) X. Sa fonction de répartition est

$$F(x) = F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

- Une fonction de répartition possède les propriétés suivantes :
  - $0 \leq F(x) \leq 1$ pour chaque x.
  - $F(x)$ est non-décroissante.
  - $F(x)$ est continue à droite, i.e., $\lim\limits_{x \to a+} = F(a)$.
  - $F(-\infty) = 0$ et d $F(\infty) = 1$.
- Sa fonction de survie est $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}[X > x]$

Variable aléatoire discrète

- X est discrète si elle prend un nombre fini ou dénombrable des valeurs dans un ensemble de nombre réels $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$
  - On définie sa fonction de masse
    $$p_X(x) = \mathbb{P}[X = x],$$
    qui satisfait
    $$0 \leq p_X(x) \leq 1, \quad \sum_{x \in A} p_X(x) = 1.$$
- Sa fonction de répartition $F_X(x)$ est une fonction en escalier.
- $$E[X] = \sum x_i \mathbb{P}[X = x_i] = \sum x_i p_X(x_i)$$
  $$E[g(X)] = \sum g(x_i) \mathbb{P}[X = x_i] = \sum g(x_i) p_X(x_i)$$

Variable aléatoire continue

- Une v.a. X est continue si sa fonction de répartition est continue (et différentiable sauf un nombre fini ou dénombrable des points).
- Sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

  Alors,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- La fonction de densité satisfait :
  - $f(x) \geq 0, \forall x$
  - $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Remarques

- $$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x) dx.$$
- $f(x) \neq \mathbb{P}[X = x]$;
- for très petit ε,

$$\mathbb{P}[a - \frac{\varepsilon}{2} \leq X \leq a + \frac{\varepsilon}{2}] = \int_{a-\frac{\varepsilon}{2}}^{a+\frac{\varepsilon}{2}} f(t) dt \approx \varepsilon f(a).$$

  - ... ou $f(x)dx \approx \mathbb{P}[x < X \leq x + dx]$

Exemple 1.1
(à faire en classe)

Variable aléatoire mixte

- est une combinaison d'une v.a. continue et une v.a. discrète.
- est une variable aléatoire continue avec quelques points de masse.

Remarque 1.1

Si h est une fonction et X est une v.a. (continue, discrète ou mixte) avec fonction de répartition F_X, alors

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF_X(x).$$

en utilisant l'intégrale de Stiltjes (Riemann-Stiltjes)

L'intégrale de Stiltjes (Riemann-Stiltjes)

Définition 1.2

Soit une fonction g réelle bornée, dérivable sur la suite d'intervalles $(D_i)_{i\leq k}$ et discontinue aux points $(x_j)_{j\leq k}$. Soit f une fonction réelle. On définit «l'intégrale de Stiltjes » de f par rapport à g, sur l'ensemble $\mathcal{A} = \cup D_i \cup \{x_1, x_2, \dots x_m\}$, notée

$$\int_{\mathcal{A}} f(x)dg(x) = \sum_{j=1}^{k} \int_{D_j} f(x)g'(x)dx + \sum_{i=1}^{m} f(x_i)[g(x_i) - g(x_i^-)].$$

- L'intégrale de Stiltjes est une généralisation de l'intégrale de Riemann.
- L'intégrale de Stiltjes n'existe pas si f et g possèdent un point de discontinuité commun.

Propriétés :

- Si la fonction g et continue et différentiable sur $[a,b]$, alors
$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$$
- On a
$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x),$$
et l'existence d'une intégrale implique l'existence de l'autre.
- Si h est une fonction et X est une v.a. (continue, discrète ou mixte) avec fonction de répartition F_X, alors
$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dF_X(x).$$

Exemple 1.2

(à faire en classe)

L'espérance ; la variance

- L'espérance d'une variable aléatoire est linéaire :
  $\mathbb{E}[ag(X) + bh(X)] = a\mathbb{E}[g(X)] + b\mathbb{E}[h(X)]$
- Variance : $V[X] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]$.
- Conséquence :
  $V[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ et
- $V[aX + b] = a^2V[X]$.

L'espérance d'une v.a. non-négative

- Si X est non-négative, continue et sa espérance existe, on a

$$E[X] = \int_0^{+\infty} x f_X(x) dx$$

et aussi

$$E[X] = \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(x) dx$$

L'espérance d'une v.a. non-négative

- Si X est non-négative, discrète (sur A=$\{0, 1, 2, \ldots\}$) et sa espérance existe, on a

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} j \, p_X(j)$$

et aussi

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_X(k)$$

Moment d'ordre n ; fonctions génératrices

- Le moment d'ordre n de la v.a. X est définie comme $E[X^n]$
- Le moment centré d'ordre n de la v.a. X est définie comme $E[(X - \mu_X)^n]$
- La fonction génératrice des moments (f.g.m.) de X est définie comme
$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$
- et la fonction génératrice des probabilités (f.g.p.) de X est définie comme
$$P_X(t) = \mathbb{E}[t^X],$$
pour tout t où l'espérance existe.
- D'habitude (mais pas toujours ! !), la f.g.m. est utilisée pour des v.a. continues et la f.g.p. est utilisée pour des v.a. discrètes.
- Pour certains v.a., le moment d'ordre n ou f.g.m. ou f.g.p. n'existent pas.

Propriétés

- Lien entre f.g.m et f.g.p.

$$M_X(t) = P_X(e^t) \quad \text{et} \quad P_X(t) = M_X(\ln t)$$

- Sachant la f.g.m. ou la f.g.p., on peut trouver les moments d'ordre n :

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)_{|t=0}$$

et

$$P'_X(1) = \mathbb{E}[X],\ P''_X(1) = \mathbb{E}[X(X-1)], P'''_X(1) = \mathbb{E}[X(X-1)(X-2)], \ldots$$

Exemple 1.3

(à faire en classe)

Fonction quantile. Définition de base

Définition 1.3

Soit un risque X et un niveau de probabilité $p \in (0,1)$. Alors nous définissons la fonction inverse F_X^{-1} de F_X par

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(p) &= \inf\{x \in R | F_X(x) \geq p\} \\ &= \sup\{x \in R | F_X(x) < p\} \end{aligned}$$

Illustration (à faire en classe) :

Propriétés

La fonction quantile satisfait les propriétés suivantes :

- F_X^{-1} est non-décroissante ;
- F_X^{-1} est continue à gauche ;
- $F_X^{-1}(F_X(x)) \leq x$;
- $F_X(F_X^{-1}(u)) \geq u$.

Exemple - cas continu

Exemple 1.4

(à faire en classe)

Exemple - cas continu

Exemple 1.5

(à faire en classe)

Exemple - cas mixte

Exemple 1.6

(à faire en classe)

Propriétés

Théorème 1.4

Soit la v.a. X avec la fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1}. Soit une v.a. $U \sim U(0,1)$.
Alors, la fonction de répartition de la v.a. $F_X^{-1}(U)$ est F_X, c.-à-d., les v.a. $F_X^{-1}(U)$ et X sont égales en distribution ($F_X^{-1}(U) \sim X$).

Remarque 1.5

On utilise la théorème précédente pour simuler des valeurs d'une v.a. X, à partir des valeurs d'une v.a. $U(0,1)$.

Propriétés

Théorème 1.6

Soit la v.a. X avec la fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1}. Soit une v.a. $U \sim U(0,1)$.
Alors, la fonction de répartition de la v.a. $F_X(X)$ est F_U, c.-à-d., les v.a. $F_X(X)$ et U sont égales en distribution ($F_X(X) \sim U$).

Propriétés

Proposition 1.7

Soit une v.a. X avec $\mathbb{E}[X] < \infty$, fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1}. On a

$$\int_0^\infty F_X^{-1}(u)du = \mathbb{E}[X]$$

Deuxième (type) définition de la fonction quantile

Définition 1.8

Soit un risque X et un niveau de probabilité $p \in (0,1)$. Alors nous définissons une deuxième version de la fonction inverse F_X^{-1+} de F_X par

$$\begin{aligned} F_X^{-1+}(p) &= \inf\{x \in R | F_X(x) > p\} \\ &= \sup\{x \in R | F_X(x) \leq p\} \end{aligned}$$

Propriétés de la F_X^{-1+}

La fonction quantile satisfait les propriétés suivantes :

- F_X^{-1+} est non-décroissante ;
- F_X^{-1} est continue à droite ;
- Si X est continue, alors $F_X^{-1+}(u) = F_X^{-1}(u)$, pour chaque u.
- Si X est discrète ou si u corresponde à une partie horizontale de $F_X(x)$, alors
  - $F_X^{-1}(u)$ correspond à l'extrémité gauche de l'intervalle ;
  - $F_X^{-1+}(u)$ correspond à l'extrémité droite de l'intervalle

Exemple - cas continu

Exemple 1.7

(à faire en classe)

Exemple - cas mixte

Exemple 1.8

(à faire en classe)

Mesures de risque de type VaR

Définition 1.9

Une mesure de risque est une fonctionnelle ρ d'un risque X auquel nous associons un nombre non-négatif $\rho(X)$, nombre qui quantifie la « dangerosité » du risque en donnant une mesure du « capital de risque » nécessaire pour rendre ce risque « acceptable ».

Exemple 1.9

a) $\rho(X) = (1+\theta)\mathbb{E}[X], \theta > 0;$
b) $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \theta Var[X], \theta > 0;$
c) $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \theta\sigma_X, \theta > 0;$
d) $\rho(X) = \mu_X + \theta\sigma_X;$
e) $\rho(X) = VaR[X;p] = F_X^{-1}(p) = \inf\{x|F_X(x) \geq p\}.$
f) $\rho(X) = TVaR[X;p] = ...$
g) la probabilité de ruine associé à une perte X.

Propriétés désirables

- Aucune surcharge excessive (il serait inutile de mettre en réserve plus de capital que la perte maximale engendrée par le risque) :

$$\rho(X) \leq F_X^{-1}(1);$$

- Chargement non-négatif (le capital minimal doit excéder la perte moyenne) :

$$\rho(X) \geq \mathbb{E}[X];$$

- Invariance par translation (tout accroissement du risque par un montant déterministe devrait résulter dans le même accroissement du capital) :

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c;$$

- Constance (à une perte déterministe ne doit correspondre qu'un capital équivalent) :

$$\rho(c) = c, \quad c = constante;$$

- Sous-additivité (l'effet de diversification) :

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

  i.e., la fusion des risques ne dépasse pas la somme des risques individuels.
  - Nous définissons « l'effet de diversification » du regroupement des risques X et Y par $\rho(X) + \rho(Y) - \rho(X+Y)$, qui est non-négative si la mesure de risque est sous-additive.
- Si l'égalité est satisfaite, nous dirons que la mesure de risque est additive (Il n'y a pas d'effet de diversification).

- Additivité comonotone :

$$\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$$

si X et Y sont comonotones (même en fusionnant, un risque ne peut agir sur l'autre risque en l'augmentant ou en le diminuant, et donc le capital associé aux risques ne sera pas modifié par leur fusion) ;

- Homogénéité positive (le capital associé au risque est ajusté proportionnellement à l'unité monétaire) :

$$\rho(cX) = c\rho(X), \quad c > 0;$$

- Monotonicité :

$$P[X \leq Y] = 1 \implies \rho(X) \leq \rho(Y),$$

i.e. que si une perte est plus élevée qu'une autre, alors le capital associé ira dans le même sens.

- Invariance en loi :

$$X =_d Y \implies \rho(X) = \rho(Y),$$

c.a.d., le capital associé au risque ne dépend que de la distribution de ce risque, et donc la mesure de risque ne sera fiable que si la distribution du risque est bien estimé.

Remarque 1.10

Aucune mesure de risque ne peut capturer toutes les caractéristiques d'un risque, mais chacune d'elle retiendra plutôt une partie des ces aspects notamment par les propriétés qui seront privilégiées par les gestionnaires du risque.

Définition 1.11
Une mesure de risque est dite cohérente si elle satisfait aux quatre propriétés suivantes : l'invariance par translation, la positive homogénéité, la sous-additivité et la monotonicité.

Remarque 1.12
Cette classe de mesures de risque est une des plus répandues, mais elle n'est pas la seule. La classe des mesures de risque convexes est aussi souvent considérée.

Définition 1.13
Une mesure de risque est dite convexe si elle satisfait aux trois propriétés suivantes : l'invariance par translation, la monotonicité et la convexité, i.e. :

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \quad \lambda \in [0,1].$$

Remarque 1.14

La $VaR_p(X)$ n'est pas cohérente (n'est pas sous-additive).

La $TVaR_p(X)$ est une mesure de risque cohérente.

Mesures de risque de type « VaR »

« Value at risk » (VaR)

Définition 1.15

Soit un risque X et un niveau de probabilité (élevé) $p \in (0,1)$. Alors nous définissons la VaR par l'identité

$$\begin{aligned} VaR_p(X) &= F_X^{-1}(p) \\ &= \inf\{x \in R | F_X(x) \geq p\} \\ &= \sup\{x \in R | F_X(x) < p\} \end{aligned}$$

Remarque 1.16

Les valeurs de p habituellement considérées sont très élevées, au niveau $p \geq 0.95$.

Illustration (à faire en classe) :

Exemple 1.10

(à faire en classe)

Propriétés de la VaR

La mesure de risque VaR :

- \- ne dépasse pas la perte maximale : $VaR_p(X) \leq \max\{X\}$;
- \- peut ne pas dépasser la moyenne de la perte (mais pour p très petite) :
  - si $p' = F_X(\mathbb{E}[X])$, puis $VaR_p(X) \leq \mathbb{E}[X]$ pour $p < p'$;
- \- est invariante par translation : $VaR_p(X+c) = VaR_p(X) + c$;
- \- est positivement homogène : $VaR_p(cX) = cVaR_p(X)$;
- \- satisfait la constance : si $\mathbb{P}[X = k] = 1$, alors $VaR_p(X) = k$;
- -est monotone : si $\mathbb{P}[X \leq Y] = 1$, alors $VaR_p(X) \leq VaR_p(Y)$;
- \- n'est pas nécessairement sous-additive (donc, VaR n'est pas cohérente) ;
- -est additive comonotone.

Exemple 1.11

(à faire en classe)

« Tail Value at risk » (TVaR)

Définition 1.17

Soit un risque X et un niveau de probabilité (élevé) $p \in (0,1)$. Alors nous définissons la TVaR par l'identité

$$TVaR_p(X) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_s(X)ds, \quad p \in (0,1).$$

Remarque 1.18

(i) La TVaR est donc la « valeur moyenne » des VaR sur $(p,1)$.
(ii) La VaR, à un niveau p, ne donne pas d'information sur l'épaisseur de la queue de la distribution. La TVaR vient corriger en partie ce manque en capturant plus d'informations à cet effet.

Remarque 1.19

Cette définition est différente (pour des v.a. non-continues) que celle dans le livre Loss Models de Klugman, Panjer et Willmot.

Exemple 1.12

(à faire en classe)