Chapitre 1

Analyse combinatoire

Exemple 1.1 *Soit un groupe d'assurés en assurance auto pour lesquels on a observé leur expérience sur une période de 4 ans. Plus précisément, on considère des assurés qui ont eu à deux reprises* ***plus de*** *3 réclamations pendant une année. Leur police d'assurance auto stipule que 2 années* ***consécutives*** *de* ***plus de*** *3 réclamations entraîne l'annulation de leur protection. Quelles sont les chances que la police d'assurance d'un assuré de ce groupe soit annulée?*
Solution. *On désigne par 0 une année où l'assuré a 3 réclamations ou moins et par 1 une année de* ***plus de*** *3 réclamations. Il y a 6 possibilités d'expérience:*

Année 1	*Année 2*	*Année 3*	*Année 4*
0	***0***	***1***	***1***
0	*1*	*0*	*1*
0	***1***	***1***	***0***
1	***1***	***0***	***0***
1	*0*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*1*

On observe que dans 3 (lignes 1-3-4) des 6 cas possibles, la police d'un assuré serait annulée et donc la probabilité d'annulation serait de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. ■

Pour un contrat avec des modalités différentes, on devrait refaire le processus d'énumération des scénarios possibles. Il serait utile d'avoir une méthode efficace pour compter les différentes possibilités. **La théorie mathématique du comptage est appelée "analyse combinatoire".**

1.1 Principe de base de comptage

Proposition 1.2 ***(Principe de base de comptage)*** *Deux expériences sont effectuées. S'il y a m résultats possibles pour l'expérience 1 et que pour chacun de ces résultats il y a n résultats possibles pour l'expérience 2 alors ensemble il y a $m \times n$ résultats possibles pour les deux expériences.*

Preuve. Ce principe de base peut être démontré par l'énumération de tous les résultats possibles des deux expériences où le résultat *(i,j)* signifie que pour l'expérience 1 il s'est produit le $i$ième événement parmi les m possibles et pour l'expérience 2 il s'est produit le $j$ième événement parmi les n possibles:

(1,1)	*(1,2)*	...	*(1,n)*
(2,1)	*(2,2)*	...	*(2,n)*
$\downarrow$			
(m,1)	*(m,2)*	...	*(m,n)*

■

Exemple 1.3 *Un assureur protège chacun des 50 employés de 30 différentes compagnies. Combien de personnes peuvent faire des réclamations auprès de l'assureur?*

Proposition 1.4 ***(Généralisation du principe de base de comptage)*** *Si r expériences sont effectuées telles qu'il y a n_1 résultats possibles pour la 1ière expérience et que pour chacun de ces n_1 résultats il y a n_2 résultats possibles pour la 2ième expérience, et que pour chacun des résultats possibles des deux premières expériences il y a n_3 résultats possibles pour la 3ième expérience, et que ... alors il y a $n_1 \times n_2 \times ... \times n_r$ résultats possibles pour les r expériences.*

Exemple 1.5 *Dans une association étudiante, il y a 3 étudiants en Actuariat, 4 en Statistique, 5 en Génie et 2 en Mathématique. On veut créer un sous-comité pour les activités sportives où figure un étudiant de chaque département. Combien y a-t-il de sous-comités différents possibles?*

Exemple 1.6 *Combien y a-t-il de plaques d'immatriculation de voiture différentes possibles de 7 lettres/chiffres si les 3 premières places doivent être des lettres différentes et les 4 dernières des chiffres différents?*

1.2 Permutations

Exemple 1.7 *Combien d'arrangements ordonnés différents peut-on faire avec les lettres a, b, c?*

Solution. *Il y a deux approches possibles.* (1) Par énumération: on a : *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* et *cba*. Chaque arrangement est appelé une permutation. Il y a donc 6 permutations possibles pour un ensemble de 3 objets. (2) À l'aide de la Proposition 1.4 (Généralisation du principe de base de comptage), on a le choix de 3 lettres pour la 1ière expérience, de 2 lettres pour la 2ième et d'une lettre pour la 3ième donc $(3)(2)(1) = 6$ permutations possibles. ■

Proposition 1.8 *Pour n objets différents, il y a $n!$ permutations possibles de ces objets.*

Exemple 1.9 *Une classe d'actuariat est formée de 6 hommes et 4 femmes. On ordonne les étudiants selon leurs résultats à un examen en supposant que la même note ne peut être attribuée à deux étudiants. (a) Combien de classements ordonnés différents d'étudiants sont possibles? (b) Si l'on classe les hommes entre eux et les femmes entre elles, combien de classements différents sont possibles?*

Solution. (a) Chaque classement correspond à un arrangement ordonné de 10 personnes, donc il y a $10! = 3\ 628\ 800$ classements possibles. (b) Il y a $6!$ classements possibles pour les hommes et $4!$ possibles pour les femmes donc à l'aide de la Proposition 1.2 (expérience #1: classer les H, expérience #2: classer les F) il y a $(6!)(4!) = 17280$ classements possibles. ■

Remarque 1.10 *Supposons dans l'exemple précédent que l'on a 3 hommes ayant les résultats 50, 40, 30 et 2 femmes ayant les résultats 90 et 80. On a donc les possibilités suivantes:*

H1	*H2*	*H3*	*F1*	*F2*
50	*40*	*30*	*90*	*80*
50	*40*	*30*	*80*	*90*
50	*30*	*40*	*90*	*80*
50	*30*	*40*	*80*	*90*
40	*50*	*30*	*90*	*80*
40	*50*	*30*	*80*	*90*
40	*30*	*50*	*90*	*80*
40	*30*	*50*	*80*	*90*
$\vdots$				

Dans cet exemple, il y aurait donc $3! \times 2! = 12$ classements possibles. On a 3 blocs de 4 soit 12 lignes dans ce tableau. À noter que l'on ne doit pas multiplier par 2! (comme l'exercice dans Ross où l'on veut classer un groupe d'hommes et de femmes sur un banc) car il n'y a pas de début de rangée comme dans ce numéro.

Remarque 1.11 *Exemple similaire: On consière deux sacs contenant des billes. Le sac no.1 contient des billes numérotées de 1 à 6 alors que le 2ième sac contient des billes numérotées de 7 à 10. Pour trouver les classements possibles si l'on permute les billes uniquement à l'intérieur de chaque sac, on aura* $(6!)\,(4!)$ *possibilités.*

Exemple 1.12 *Vous détenez 10 livres que vous voulez classé dans votre bibliothèque. Parmi ceux-ci se trouve 4 romans, 3 polars, 2 biographies et 1 livre de poésie. Vous voulez les ranger de telle sorte que les livres d'un même type soient regroupés. Combien d'arrangements différents pouvez-vous faire?*

Exemple 1.13 *Un coach de soccer détient 8 chandails de couleurs différentes dont un gris. Il doit les distribuer à 5 joueurs dont Martin qui ne veut pas le chandail gris. On suppose qu'un seul chandail est donné à chaque joueur. De combien de façons différentes le coach peut-il répartir les chandails entre les joueurs?*

Exemple 1.14 *De combien de façons peut-on distribuer 3 jouets différents entre deux enfants?*

Solution. Regardons dans un premier temps toutes les possibilités:. (1) deux jouets à un enfant et un jouet à l'autre:

$(E1, J1, J2)\,,(E2, J3)$	$(E2, J1, J2)\,,(E1, J3)$
$(E1, J1, J3)\,,(E2, J2)$	$(E2, J1, J3)\,,(E1, J2)$
$(E1, J2, J3)\,,(E2, J1)$	$(E2, J2, J3)\,,(E1, J1)$

(2) tous les jouets à un seul enfant:

$$(E1, J1, J2, J3)$$
$$(E2, J1, J2, J3)\,.$$

Il y a donc au total 8 façons différentes, soit 2^3. ■

Exemple 1.15 *Dans la salle de jeu d'une garderie, 10 jouets différents, dont une poupée et un camion, peuvent être répartis parmis les 5 enfants présents. De combien de façons peut-on distribuer tous ces jouets si l'enfant A ne veut pas jouer avec la poupée?*

Solution. Est-ce que l'on aborde le problème en se disant que pour chaque enfant il y a 10 jouets possibles ou au contraire pour chaque jouet il y a 5 enfants possibles...

$$\underbrace{enfant\ \#1}_{10\ jouets}\quad \underbrace{enfant\ \#2}_{??}\quad \underbrace{enfant\ \#3}\quad \underbrace{enfant\ \#4}\quad \underbrace{enfant\ \#5}$$
$$ou$$
$$\underbrace{jouet\ \#1}_{5\ enfants}\quad \underbrace{jouet\ \#2}_{5\ enfants}\quad ...\underbrace{jouet\ \#10 - poupée}_{4\ enfants}$$

La deuxième façon est la bonne...Il y a donc $5^9 \times 4$ possibilités. ■

Exemple 1.16 *Quatre méritas sont octroyés à une classe de 20 élèves à la fin de l'année. De combien de façons différentes les méritas peuvent-ils être distribués si... (a) un élève peut gagner plus d'un méritas. (b) un élève peut gagner un seul méritas.*

Solution. (a)

$$\underbrace{méritas\ \#1}_{20\ élèves}\quad \underbrace{méritas\ \#2}_{20\ élèves}\quad \underbrace{méritas\ \#3}_{20\ élèves}\quad \underbrace{méritas\ \#4}_{20\ élèves}$$

Il y a donc 20^4 (et non 4^{20}) possibilités. (b)

$$\underbrace{méritas\ \#1}_{20\ élèves}\quad \underbrace{méritas\ \#2}_{19\ élèves}\quad \underbrace{méritas\ \#3}_{18\ élèves}\quad \underbrace{méritas\ \#4}_{17\ élèves}$$

Il y a donc $(20)\,(19)\,(18)\,(17) = 116280$ possibilités. ■

Remarque 1.17 *Le nombre $n!$ de permutations a été obtenu dans le cas où les objets sont tous différents. Que se passe-t-il si certains objets sont identiques?*

Exemple 1.18 *Combien d'arrangements ordonnés différents peut-on faire avec les lettres $LAVAL$?*

Solution. On sait qu'il y a 5! permutations possibles des lettres $L_1A_1VA_2L_2$. Toutefois, si l'on change L_1 avec L_2 (ou A_1 avec A_2) dans une permutation, on obtient le même résultat, soit aucun changement. Prenons par exemple la permutation $VL_1A_1L_2A_2$. On a un résultat de la même forme que $VLALA$ en permutant L_1 avec L_2 (et/ou A_1 avec A_2)

$$VL_1A_1L_2A_2 \quad VL_2A_1L_1A_2 \quad VL_1A_2L_2A_1 \quad VL_2A_2L_1A_1.$$

Ces 4 résultats comptent pour **un seul** arrangement. Il faut donc enlever toutes les répétitions aux 5! du départ. Il y a 2! permutations des L et des A donc $(2!)(2!) = 4$ permutations identiques pour chaque résultat. Ainsi, un groupe de 4 permutations compte pour un seul arrangement. On doit donc déterminer combien y a-t-il de groupes de 4 parmi les 5! permutations possibles. On obtient donc $\frac{5!}{(2!)(2!)}$ arrangements différents. ■

Proposition 1.19 *Le nombre de permutations **distinctes** de n objets de k types différents dont n_1 sont identiques, n_2 sont identiques, ..., n_k sont identiques et $n = n_1 + ... + n_k$ est*

$$\frac{n!}{(n_1!)(n_2!)...(n_k!)}.$$

Exemple 1.20 *De combien de façons différentes peut-on peindre 11 bureaux de telle sorte que 4 soient verts, 3 jaunes, 2 blancs et les autres bleus?*

Exemple 1.21 *Neuf personnes prennent place autour d'une table ronde. (a) De combien de façons différentes peuvent-elles s'asseoir si les chaises ne sont pas numérotées? On ne tient compte que de la position relative des neuf personnes les unes par rapport aux autres. (b) Si les places sont numérotées? (c) Si les places ne sont pas numérotées et que dans le groupe de 9 personnes il y a un couple qui désire s'asseoir ensemble?*

1.3 Combinaisons

Contrairement aux permuations, l'ordre dans lequel les objets sont arrangés n'ont pas d'importance dans plusieurs types de problèmes d'analyse combinatoire.

Exemple 1.22 *Combien de groupes **différents** de 3 lettres peut-on former à partir des 5 lettres A, B, C, D, E?*

Solution. Il y a 5 possibilités pour la 1ière lettre, 4 possibilités pour la 2ième lettre et 3 possibilités pour la 3ième lettre. Donc au total il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités. Toutefois, chaque groupe de 3, sera compté $3! = 6$ fois (par exemple: $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$). Il y a donc

$$\frac{(5)(4)(3)}{(3)(2)(1)} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

groupes de 3 **différents** qui peuvent être formés. Ceci revient à dire que 6 piges différentes comptent pour une seule pige car ce sont les mêmes éléments qui ont été pigés seulement dans un ordre différent. ■

En général, $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1)$ représente le nombre de façons différentes de sélectionner un groupe de r objets parmi n lorsque l'ordre des objets est important. Étant donné que parmi ceux-ci chaque groupe de r objets sera compté $r!$ fois, le nombre de groupes **différents** de r objets pouvant être formés à partir d'un ensemble de n objets est

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} &= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}\frac{(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!}. \end{aligned}$$

Définition 1.23 *On définit un* ***coefficient binomial*** $\binom{n}{r}$*, pour* $r \leq n$*, par*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!},$$

où $\binom{n}{r}$ *représente le nombre possible de sous-ensembles* ***différents*** *de* r *éléments parmi* n *objets distincts (lorsque l'ordre n'a pas d'importance par exemple* $ABC = BCA$*).*

Remarque 1.24 *À noter que cela correspond mathématiquement à la même chose que permuter* n *objets parmi lesquels il y un groupe où* r *objets sont identiques et un autre groupe où* $(n-r)$ *sont identiques. Étant donné qu'ils sont identiques dans un même groupe, il n'y a plus d'ordre entre eux.*

Remarque 1.25 *Par convention,* $0! = 1$*. Donc* $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$*.*

Remarque 1.26 *On suppose aussi* $\binom{n}{r} = 0$ *si* $r < 0$ *ou* $r > n$*.*

Remarque 1.27 *Par définition,* $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$*.*

Exemple 1.28 *Pour un emploi d'été dans un restaurant, on doit choisir parmi un groupe de 12 étudiants, 3 cuisiniers et 4 plongeurs. De combien de façons différentes peut-on faire son choix si 5 des étudiants ne savent pas cuisiner?*

Exemple 1.29 *Dans un groupe de 5 femmes et 7 hommes, combien de comités différents composés de 2 femmes et 3 hommes peuvent être formés si 2 des hommes refusent de travailler ensemble?*

Exemple 1.30 *Refaire l'Exemple 1.13 avec des combinaisons.*

Exemple 1.31 *De combien de manières différentes peut-on offrir 4 jouets à 2 enfants du même âge si chacun reçoit 2 jouets?*

Solution. Afin d'énumérer les cas possibles, on note les jouets par les numéros 1,2,3,4 et les enfants par les lettres A et B. Voici les cas possibles:

A	B
$1,2$	$3,4$
$1,3$	$2,4$
$1,4$	$2,3$
$2,3$	$1,4$
$2,4$	$1,3$
$3,4$	$1,2$

Il y a donc $\underbrace{\binom{4}{2}}_{jouets}\underbrace{\binom{2}{2}}_{enfants} = \frac{4!}{2!2!}$ ou $\binom{4}{2,2} = 6$ combinaisons possibles. Si l'on interchange les enfants A et B, on n'a aucune combinaison supplémentaire. Alors, on n'obtient pas $\left(\frac{4!}{2!2!}\right)(2)$ ou $\left(\frac{4!}{2!2!}\right)(2!)$. On a plutôt $\left(\frac{4!}{2!2!}\right)\left(\frac{2!}{2!0!}\right)$. Pourquoi? ■

Exemple 1.32 *De combien de manière peut-on offrir 4 jouets à 3 enfants du même âge si un enfant reçoit 2 jouets et les deux autres reçoivent 1 jouet?*

Solution. Afin d'énumérer les cas possibles, on note les jouets par les numéros 1,2,3,4 et les enfants par les lettres A, B, C. Voici les cas possibles **si l'on choisit l'enfant A comme étant le chanceux** qui a 2 jouets:

A	B	C		A	B	C		A	B	C
$1,2$	3	4		$2,3$	1	4		$3,4$	1	2
$1,2$	4	3		$2,3$	4	1		$3,4$	2	1
$1,3$	2	4		$2,4$	1	3				
$1,3$	4	2		$2,4$	3	1				
$1,4$	2	3								
$1,4$	3	2								

Il y a donc $\underbrace{\binom{4}{2}}_{jouets/enfant\ A}\underbrace{\binom{2}{1}}_{jouet/enfant\ B}\underbrace{\binom{1}{1}}_{jouet/enfant\ C} = \left(\frac{4!}{2!2!}\right)\left(\frac{2!}{1!1!}\right) = \binom{4}{2,1,1} = 12$ combinaisons possibles.

Si l'on ne sait pas qui est l'enfant chanceux, alors on aura $\binom{3}{1}(12) = 36$ combinaisons possibles **et non pas** $\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = (3!)(12) = 72$. Pourquoi? Vérifions si chaque résultat de la table ci-dessus conduit à 3 ou 6 combinaisons différentes si l'on change l'ordre des enfants. Prenons par exemple les combinaisons $1, 2$ 3 4 et $1, 2$ 4 3 :

$1,2$	3	4		$1,2$	4	3
A	B	C		**A**	**B**	**C**
A	**C**	**B**	$\nearrow$	A	C	B
B	A	C		**B**	**A**	**C**
B	**C**	**A**	$\nearrow$	B	C	A
C	A	B		**C**	**A**	**B**
C	**B**	**A**	$\nearrow$	C	B	A

On voit que certaines combinaisons se répètent et qu'il n'y a donc que 3 arrangements différents pour chaque combinaison. Ceci est dû au fait que deux enfants ont le même nombre de jouets. En d'autres mots, un enfant est représenté par le nombre de jouets qu'il a d'où $\frac{3!}{2!1!}$. ■

Exemple 1.33 *De combien de manières différentes peut-on offrir 6 jouets à 3 enfants du même âge si les enfants reçoivent 3, 2 ou 1 jouet?*

Solution. $\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}\left(\frac{3!}{1!1!1!}\right) = \binom{3}{1}\binom{6}{3}\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{1}\binom{1}{1} = \binom{6}{3,2,1}(3!) = 360$ ■

Exemple 1.34 *De combien de manières différentes peut-on offrir 7 jouets à 3 enfants du même âge dont un reçoit 3 jouets et les deux autres enfants reçoivent 2 jouets?*

Solution.

$$\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\left(\frac{3!}{2!1!}\right) = \binom{3}{1}\binom{7}{3}\binom{2}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 630$$

On multiplie par 3 et non 3! car il y a 2 enfants qui ont le même nombre de jouets. ■

Théorème 1.35 ***(Règle de Pascal)***

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

■

Théorème 1.36 ***(Théorème du binôme)***

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},\ n \in \mathbb{N}.$$

Preuve. On utilise l'induction pour démontrer le théorème du binôme. Pour $n=0$, $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}$. On suppose que le théorème est vrai pour n et on le démontre pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= x\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{(k-1)+1} y^{n-(k-1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x^k y^{n-k+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1}, \text{ par règle de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

■

Exemple 1.37 *Développer* $(x+y)^3$.

Exemple 1.38 *Combien peut-on faire de sous-ensembles à partir d'un ensemble de* n *objets?*

1.4 Coefficient multinomial

Problème 1.39 *On veut classer* n *objets distincts dans* r *groupes différents où chacun des groupes comporte respectivement* $n_1, n_2, ..., n_r$ *objets où* $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$. *Combien existe-t-il de classements différents possibles?*

Solution. L'expérience #1 consiste à faire le classement pour le 1er groupe, l'expérience #2 consiste à faire le classement pour le 2ième groupe, ..., l'expérience #r consiste à faire le classement pour le rième groupe. Le nombre de choix possibles pour chaque expérience se détaille comme suit:

Expérience #1:	$\binom{n}{n_1}$ choix possibles pour le 1er groupe
Expérience #2:	$\binom{n-n_1}{n_2}$ choix possibles pour le 2ième groupe
$\vdots$	$\vdots$
Expérience #r:	$\binom{n-n_1-...-n_{r-1}}{n_r}$ choix possibles pour le rième groupe

Il y a donc selon la Proposition 1.4 (Généralisation du principe de base de comptage)

$$\begin{aligned}\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}...\binom{n-n_1-...-n_{r-1}}{n_r} &= \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}...\frac{(n-n_1-n_2-...-n_{r-1})!}{0!n_r!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!} \text{ classements possibles.}\end{aligned}$$

■

Définition 1.40 *On définit un* ***coefficient multinomial*** $\binom{n}{n_1,n_2,...,n_r}$ *par*

$$\binom{n}{n_1,n_2,...,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!},$$

où $n = \sum_{i=1}^{r} n_i, n_i \in \mathbb{N} \forall i$ *et* $\binom{n}{n_1,n_2,...,n_r}$ *représente le nombre possible de classements différents de* n *objets distincts dans* r *groupes différents de taille* n_1, n_2, ..., n_r.

Remarque 1.41 *Le coefficient multinomial est une généralisation à* r *groupes du coefficient binomial qui lui ne comporte que 2 groupes (celui de* r *objets et celui de* $n-r$ *objets).*

Remarque 1.42 *Le coefficient multinomial nous indique le nombre de combinaisons possibles lorsque l'on ne fait pas de différence entre les groupes autre que le nombre d'éléments dans chacun.*

Remarque 1.43 *Si l'on différencie les groupes, alors le résultat sera*

$$coefficient\ multinomial \times \frac{n!}{n_1!n_2!...n_n!},$$

où n *correspond au nombre de* ***groupes*** *et* n_i *correspond au nombre de groupes dans lesquels* i *éléments ou objets ont été placés.*

Exemple 1.44 *On a 3 tiroirs où l'on met 1 objet, 2 objets et 3 objets. Le nombre de façons de classer les objets est*

$$\frac{6!}{1!2!3!}.$$

Ici, on ne sait pas toutefois dans quel tiroir il y aura 1, 2 ou 3 objets. On a les possibilités suivantes pour le classement du nombre d'objets entre les différents tiroirs:

Tiroir	*Tiroir*	*Tiroir*
1	*2*	*3*
1	*3*	*2*
2	*1*	*3*
2	*3*	*1*
3	*1*	*2*
3	*2*	*1*

Il y a donc $\frac{3!}{1!1!1!}$ *façons différents que l'on peut classer le nombre d'objets dans les tiroirs. Au total, si l'on différencie les tiroirs, il y a* $\left(\frac{6!}{1!2!3!}\right)\left(\frac{3!}{1!1!1!}\right)$.

Exemple 1.45 *Onze skieurs partent en excursion. Ils disposent d'une voiture à 2 places, d'une à 4 places et d'une à 5 places. De combien de façons peuvent-ils s'organiser pour le transport si le propriétaire de chacune des voitures conduit sa propre voiture? (L'ordre des autres places n'ayant pas d'importance).*

Solution. Selon la Proposition 1.4 (Généralisation du principe de base de comptage) et la Définition 1.23 (Coefficient binomial), le nombre de façons pour organiser le transport est égal à

$$\binom{8}{1}\binom{7}{3}\binom{4}{4} = \left(\frac{8!}{1!7!}\right)\left(\frac{7!}{3!4!}\right)\left(\frac{4!}{4!0!}\right)$$

qui est aussi équivalent à utiliser le coefficient multinomial avec $n = 8, n_1 = 1,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4$, soit

$$\binom{8}{1,3,4} = \frac{8!}{(1!)\,(3!)\,(4!)} = 280.$$

Même chose que la permutation de 8 objets dont 3 identiques et 4 autres identiques, c'est-à-dire $\frac{8!}{(1!)(3!)(4!)}$. On peut permuter les places restantes mais dont 3 sont "identiques" car les skieurs sont dans la même voiture à 4 places dans laquelle on ne différencie pas les places, 4 sont "identiques" car les skieurs sont dans la même voiture à 5 places et une dernière dans la voiture à 2 places. ■

Théorème 1.46 ***(Théorème multinomial)***

$$(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,...,n_r):\\ n_1+...+n_r=n}} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_r^{n_r}$$

La somme est sur tous les entiers non-négatifs $n_1,\ n_2, ..., n_r$ tels que $n_1+n_2+...+n_r = n$, c'est-à-dire toutes les façons possibles de classer n objets dans r groupes où le groupe#1 en comprend n_1, ..., le groupe #r en comprend n_r.

Preuve. Par induction. ■

Exemple 1.47 *Développer* $(x + y + z)^3$.

Solution.

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 &= \sum_{\substack{(n_1,n_2,n_3):\\ n_1+n_2+n_3=3}} \binom{3}{n_1, n_2, n_3} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} \\
&= \binom{3}{3,0,0} x^3y^0z^0 + \binom{3}{0,3,0} x^0y^3z^0 + \binom{3}{0,0,3} x^0y^0z^3 \\
&\quad + \binom{3}{2,1,0} x^2y^1z^0 + \binom{3}{2,0,1} x^2y^0z^1 + \binom{3}{1,2,0} x^1y^2z^0 \\
&\quad + \binom{3}{1,0,2} x^1y^0z^2 + \binom{3}{0,2,1} x^0y^2z^1 + \binom{3}{0,1,2} x^0y^1z^2 \\
&\quad + \binom{3}{1,1,1} x^1y^1z^1 \\
&= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2) + 6xyz.
\end{aligned}$$

■

Exemple 1.48 *Évaluer*

$$\sum_{\substack{(n_1,n_2,n_3):\\ n_1+n_2+n_3=10}} \binom{10}{n_1, n_2, n_3} 3^{n_1} 4^{n_2} 5^{n_3}.$$

Solution. *En énumérant tous les termes de la sommation, on a*

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{(n_1,n_2,n_3):\\ n_1+n_2+n_3=10}} \binom{10}{n_1,n_2,n_3} 3^{n_1}4^{n_2}5^{n_3} &= \binom{10}{0,0,10}3^0 4^0 5^{10} + \binom{10}{0,10,0}3^0 4^{10} 5^0 + \binom{10}{10,0,0}3^{10}4^0 5^0 \\ &\quad + \binom{10}{0,1,9}3^0 4^1 5^9 + \binom{10}{0,9,1}3^0 4^9 5^1 + \binom{10}{9,0,1}3^9 4^0 5^1 + ... \\ &= \text{très très long quand } n \text{ est grand...}\end{aligned}$$

À l'aide du Théorème *1.46, on obtient rapidement*

$$\sum_{\substack{(n_1,n_2,n_3):\\ n_1+n_2+n_3=10}} \binom{10}{n_1,n_2,n_3} 3^{n_1}4^{n_2}5^{n_3} = (3+4+5)^{10} = 12^{10}.$$

■

Remarque 1.49 *Revenons à la Remarque 1.24 dans laquelle on fait le lien mathématique entre une permutation avec des objets identiques et le coefficient binomial. Par le biais d'un exemple, faisons ce lien pour le coefficient multinomial afin d'illustrer l'équivalence mathématique discutée à la Remarque 1.24. On tente d'aligner 9 ballons dont 3 rouges, 2 verts et 4 bleus. Combien de permutations ou d'arrangements différents peut-on faire? On sait que le nombre de permutations avec objets identiques est*

$$\frac{9!}{3!2!4!}.$$

Maintenant on détient les mêmes ballons et on veut les classer dans 3 tiroirs tel qu'un tiroir contienne 3 ballons, un 2ième tiroir contienne 2 ballons et le 3ième tiroir contienne 4 ballons. La couleur n'a plus d'importance alors c'est comme si on avait des objets distincts. On a donc $n = 9, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 4$ et on peut distribuer les ballons dans les tiroirs selon

$$\binom{9}{3,2,4} = \frac{9!}{3!2!4!} \text{ *façons différentes.*}$$

1.5 Nombre de solutions entières

Exemple 1.50 *Dans un contrat d'assurance auto, on suppose qu'une réclamation résulte d'un bris, d'une collision, d'un vol ou de vendalisme. Supposons que 10 réclamations surviennent et que celles-ci sont indissociables. Combien y a-t-il de résultats possibles?*

Solution. On tente ici de trouver le nombre de façons dont on peut distribuer 10 éléments **indissociables** dans un certain nombre de catégories. Soit le vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) représentant le résultat des 10 réclamations, où x_1 est le nombre de bris, x_2 est le nombre de collision, x_3 est le nombre de vol et x_4 est le nombre de vendalisme. Ainsi, le nombre de résultats possibles pour les 10 réclamations est le nombre de vecteurs entiers non-négatifs (x_1, x_2, x_3, x_4) tel que la somme des composantes est égale à 10. ■

Pour débuter, considérons le cas où $x_i > 0$. Pour ce faire, supposons que l'on place n zéros les uns à côté des autres comme suit

$$0\hat{}0\hat{}...\hat{}0.$$

Ainsi, on a donc $(n-1)$ espaces entre deux zéros. On cherche à séparer les n zéros en r groupes où

$$\begin{aligned} x_1 &: \text{nombre de zéros adjacents avant le 1er espace choisi} \\ x_2 &: \text{nombre de zéros adjacents avant le 2e espace choisi} \\ &\vdots \\ x_r &: \text{nombre de zéros adjacents après le dernier espace choisi.} \end{aligned}$$

Exemple 1.51 *Soit $n = 7$ zéros que l'on désire séparer en $r = 4$ groupes de zéros adjacents. Combien d'endroits différents peut-on placer les séparations pour faire les 4 groupes?*

Solution. On a

$$0\hat{}0\hat{}0\hat{}0\hat{}0\hat{}0\hat{}0$$

et donc on a 6 espaces libres entre les différents zéros. Si l'on veut 4 groupes, comme par exemple

$$\underbrace{0}_{x_1}/\underbrace{0\hat{}0}_{x_2}/\underbrace{0}_{x_3}/\underbrace{0\hat{}0\hat{}0}_{x_4},$$

on doit choisir 3 des 6 espaces libres pour faire les séparations. Ainsi, on a $\binom{6}{3}$ endroits différents où l'on peut placer les séparations et par conséquent on a $\binom{6}{3}$ solutions positives du vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) tel que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7.$$

Autre façon de le voir...pour être certain qu'il y ait un zéro dans chaque groupe, on doit nécessairement en placer 1 dans chaque groupe. Il me reste alors $(7 - 4) = 3$ zéros à placer. On a donc $(3 + 3) = 6$ éléments à permuter (i.e. les zéros et les séparateurs) dont 3 identiques et 3 identiques, soit

$$\frac{6!}{3!3!}.$$

■

Théorème 1.52 *Il y a $\binom{n-1}{r-1}$ solutions entières **positives** distinctes du vecteur $(x_1, ..., x_r)$ satisfaisant l'équation*

$$x_1 + ... + x_r = n, x_i > 0, i = 1, ..., r.$$

Dans certains cas, il est possible qu'il n'y ait aucun élément (indissociable) d'un des types possibles. Par exemple, dans un groupe de 8 réclamations du contrat d'assurance auto décrit plus haut, aucune est due à du vandalisme. Ceci correspond à avoir un élément x_i du vecteur $(x_1, ..., x_r)$ qui est nul.

Théorème 1.53 *Il y a $\binom{n+r-1}{r-1}$ solutions entières **non-négatives** distinctes du vecteur $(x_1, ..., x_r)$ satisfaisant l'équation*

$$x_1 + ... + x_r = n,\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., r.$$

Preuve. Étant donné que $x_i \geq 0$, on pose $y_i = x_i + 1$ d'où $x_i = y_i - 1$ avec $y_i > 0$. On a donc

$$\begin{aligned}(y_1 - 1) + ... + (y_r - 1) &= n \\ y_1 + ... + y_r &= n + r, \text{ où } y_i > 0.\end{aligned}$$

On obtient le résultat désiré en appliquant le Théorème 1.52. ■

Remarque 1.54 *Dans l'Exemple 1.50, il y $\binom{10+4-1}{4-1}$ solutions possibles pour $(x_1, ..., x_4)$.*

Exemple 1.55 *Soit l'équation $x_1 + x_2 = 4$. (a) Trouver le nombre de solutions entières positives de cette équation. (b) Trouver le nombre de solutions entières non-négatives de cette équation.*

Solution. (a) Il y a $\binom{4-1}{2-1} = 3$ solutions entières positives, soit $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$. (b) Il y a $\binom{4+2-1}{2-1} = 5$ solutions entières non-négatives, soit $(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$. ■

Exemple 1.56 *Soit un sac contenant 18 piles AAA dont 6 piles sont défectueuses et 12 fonctionnent très bien. Les piles défectueuses sont indissociables entre elles et il en va de même pour celles qui fonctionnent très bien. Determiner le nombre de façons dont on peut disposer les piles sur une table telles que deux piles défectueuses ne soient jamais côte à côte.*

Solution. Il y a trois solutions possibles à ce problème. (1) Pour que deux piles défectueuses ne soient pas côte à côte, je dois les insérer parmi les 13 positions possibles

$$\underbrace{position}\,1/F\hat{\ }F\hat{\ }F\hat{\ }F\hat{\ }F\hat{\ }F\hat{\ }F\hat{\ }F\hat{\ }F\hat{\ }F\hat{\ }F\hat{\ }F/\underbrace{position}\,13.$$

Ainsi, il y a $\binom{13}{6}$ façons différentes de possibles. (2) Au lieu d'aligner les piles fonctionnelles, on peut aligner les piles défectueuses et insérer **au moins une** pile fonctionnelle entre chaque pile défectueuse (x_2 à x_6) et également mettre ou non des piles aux extrémités (x_1 et x_7):

$$\underbrace{\quad}_{x_1}D/\underbrace{\quad}_{x_2}/D/\underbrace{\quad}_{x_3}/D/\underbrace{\quad}_{x_4}/D/\underbrace{\quad}_{x_5}/D/\underbrace{\quad}_{x_6}/D/\underbrace{\quad}_{x_7}$$

On cherche donc le nombre de solutions distinctes entières $(x_1, ..., x_7)$ de l'équation

$$x_1 + ... + x_7 = 12,\; x_1 \geq 0, x_7 \geq 0, x_i > 0,\; i = 2, ..., 6.$$

Afin d'avoir les mêmes restrictions sur les éléments de l'équations, posons $y_1 = x_1+1$, $y_i = x_i, i = 2, ..., 6, y_7 = x_7 + 1$. Ainsi, on cherche maintenant les solutions distinctes entières et **positives** $(y_1, ..., y_7)$ de l'équation

$$\begin{aligned} y_1 - 1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 - 1 &= 12 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 &= 14,\; y_i > 0. \end{aligned}$$

Par le Théorème 1.52, on obtient $\binom{14-1}{7-1} = \binom{13}{6}$. (3) On propose ici une solution complètement différente.On a

$$D/\underbrace{\quad}_{x_2}/D/\underbrace{\quad}_{x_3}/D/\underbrace{\quad}_{x_4}/D/\underbrace{\quad}_{x_5}/D/\underbrace{\quad}_{x_6}/D/$$

et l'on doit nécessairement mettre une pile F entre deux piles D aux 5 positions 2 à 6. Il ne reste donc que $(12 - 5) = 7$ piles F à placer. On a donc $(7 + 6) = 13$ éléments à permuter donc 7 identiques (piles F) et 6 identiques (séparateurs), soit

$$\frac{13!}{6!7!}.$$

■

Exemple 1.57 *Un investisseur possède 20000\$ qu'il peut investir dans 4 titres. Les montants investits dans chaque titre doivent être des multiples de 1000\$. (a) Si le montant total est investi, combien y a-t-il de stratégies de placement différentes? (b) Si l'investisseur n'investit pas nécessairement tout son argent, combien y a-t-il de stratégies possibles?*

Solution. (a) Soit x_i, $i = 1, ..., 4$ le nombre de tranches de 1000\$ investies dans le titre i. Alors, le nombre de stratégies d'investissement possibles correspond au nombre de solutions distinctes entières et non-négatives de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20,\; x_i \geq 0.$$

Par le Théorème 1.53, on obtient $\binom{20+4-1}{4-1} = \binom{23}{3} = 1771$. Une autre façon de voir ce problème est d'aligner 20 tranches de 1000\$ et d'insérer des séparateurs. Étant donné que l'on a 4 titres et que l'on n'est pas obligé d'investir dans tous les titres, on a $(20 + 3) = 23$ objets alignés dont 20 identiques (titres financiers) et 3 identiques (séparateurs). Le nombre de permutations est $\frac{23!}{20!3!}$. (b) Soit x_5 le montant gardé en réserve par l'investisseur. On cherche maintenant les solutions entières non-négatives de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20,\; x_i \geq 0.$$

Par le Théorème 1.53, on obtient $\binom{20+5-1}{5-1} = \binom{24}{4} = 10626$. Une autre façon de voir ce problème est d'aligner 20 tranches de 1000\$ et d'insérer des séparateurs. Étant donné que l'on a 4 titres plus une réserve et que l'on n'est pas obligé d'investir dans tous les titres, on a $(20 + 4) = 24$ objets alignés dont 20 identiques (titres financiers) et 4 identiques (séparateurs). Le nombre de permutations est $\frac{24!}{20!4!}$. ■

Exemple 1.58 *(Suite de l'Exemple 1.56) Trouver le nombre de résultats possibles si les piles défectueuses sont séparées par au moins 2 piles qui fonctionnent très bien.*

Solution. On cherche le nombre de solutions distinctes entières $(x_1, ..., x_7)$ de l'équation

$$x_1 + ... + x_7 = 12,\ x_1 \geq 0, x_7 \geq 0, x_i \geq 2, i = 2, ..., 6.$$

Afin d'avoir les mêmes restrictions sur les éléments de l'équations, posons $y_1 = x_1+1$, $y_i = x_i-1$, $i = 2, ..., 6$, $y_7 = x_7+1$. Ainsi, on cherche maintenant les solutions distinctes entières et **positives** $(y_1, ..., y_7)$ de l'équation

$$\begin{aligned} y_1 - 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 + y_6 + 1 + y_7 - 1 &= 12 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 &= 9,\ y_i > 0. \end{aligned}$$

Par le Théorème 1.52, on obtient $\binom{9-1}{7-1} = \binom{8}{6}$. (2) On propose ici une solution complètement différente. On a

$$D/\underbrace{\quad}_{x_2}/D/\underbrace{\quad}_{x_3}/D/\underbrace{\quad}_{x_4}/D/\underbrace{\quad}_{x_5}/D/\underbrace{\quad}_{x_6}/D/$$

et l'on doit nécessairement mettre deux piles F entre deux piles D aux 5 positions 2 à 6. Il ne reste donc que $(12 - 10) = 2$ piles F à placer. On a donc $(2 + 6) = 8$ éléments à permuter dont 2 identiques (piles F) et 6 identiques (séparateurs), soit

$$\frac{8!}{6!2!}.$$

■

Exemple 1.59 *Soit 24 billes indissociables que l'on tente de répartir dans 3 sacs différents. De combien de façons peut-on partager les billes entre les sacs si l'on désire qu'il y ait au moins 3 billes dans chaque sac mais au plus 16 billes dans un sac?*

Solution. On cherche le nombre de vecteurs entiers non-négatifs (x_1, x_2, x_3) tel que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 24,$$

où $3 \leq x_i \leq 16$ pour $i = 1, 2, 3$. Ceci est équivalent à chercher le nombre de vecteurs entiers non-négatifs (x_1, x_2, x_3) tel que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15,$$

où $0 \leq x_i \leq 13$ pour $i = 1, 2, 3$. Sans tenir compte du maximum imposé, on a

$$\binom{15 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{17}{2} = 136$$

solutions possibles. On peut aussi l'évaluer comme la permuation de $(15 + 2)$ éléments dont 2 identiques (séparateurs) et 15 identiques (billes), soit

$$\frac{17!}{15!2!}.$$

À toutes ces solutions, on soustrait les cas où un des sacs contient 14 billes et les cas où un des sacs contient 15 billes. Si $x_1 = 14$, on peut avoir $(x_2 = 1, x_3 = 0)$ et $(x_2 = 0, x_3 = 1)$. Il se pourrait que ce soit le 2e ou 3e sac qui contienne 14 billes. On a donc $\binom{3}{1} \times 2 = 6$ possibilités. Si $x_1 = 15$, on peut avoir $(x_2 = 0, x_3 = 0)$. Il se pourrait que ce soit le 2e ou 3e sac qui contienne 15 billes. On a donc $\binom{3}{1} \times 1 = 3$ possibilités. En conclusion, on a

$$136 - 6 - 3 = 127$$

solutions possibles pour répartir les billes en respectant les restrictions imposées. ■