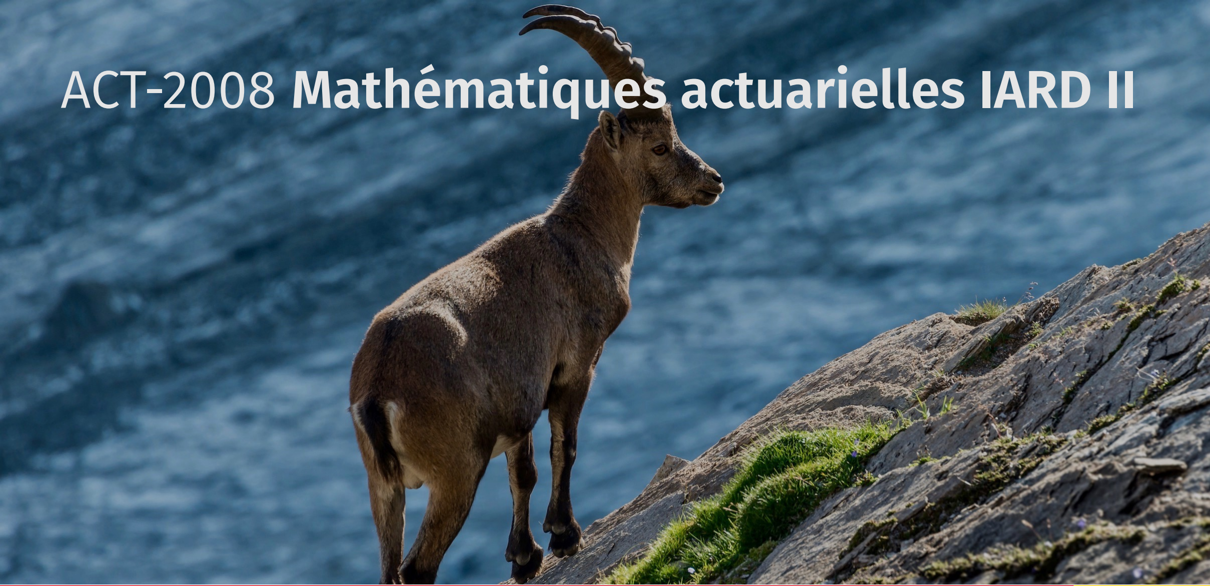
ACT-2008 **Mathématiques actuarielles IARD II**



UNIVERSITÉ LAVAL

ACT-2008 **Mathématiques actuarielles IARD II**

Vincent Goulet

Professeur titulaire
École d'actuariat, Université Laval

Version 2020.03-1

Sommaire

Partie I

Théorie de la crédibilité

Qu’est-ce qu’une probabilité ?

Probabilité d’obtenir ⚅ ⚅

vs

Probabilité que j’assiste au party ce soir

général	$\longrightarrow$	particulier
groupe	$\longrightarrow$	individu
probabilité mathématique	$\longrightarrow$	crédibilité degré de conviction

- Tout ceci est lié à l'émergence de l'approche bayésienne en statistique au cours des années 1950.
- Les actuaires ont été parmi les premiers à adopter cette approche, notamment pour développer la théorie de la crédibilité moderne.

Outre pour ces aspects philosophiques et historiques, ce cours est intéressant pour plusieurs raisons, dont :

- procédures actuarielles fondamentales en assurance IARD ;
- modélisation de l'hétérogénéité ;
- outils probabilistes et statistiques peu utilisés ailleurs.

Introduction à la tarification basée sur l’expérience

Contexte

- Portefeuille d’assurance composé de dix contrats
- Contrats à priori considérés équivalents
- Hypothèses :
  - au plus un sinistre par année
  - montant de ce sinistre est 1
  - prime collective de 0,20 : en moyenne deux assurés sur 10 ont un sinistre au cours d’une année

Situation après une année

	Contrat									
Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1									1	

- Montant de sinistre moyen par contrat = 1/10 = 0,10
- Prime collective peut-être trop élevée
- Trop peu de données pour tirer une conclusion

Situation après deux années

	Contrat									
Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1									1	
2	1	1							1	

- Montant de sinistre moyen par contrat = 4/20 = 0,20
- Prime collective adéquate
- Contrat 9 a déjà deux sinistres

Situation après dix années

	Contrat									
Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1									1	
2	1	1	1						1	
3	1								1	
4			1						1	
5									1	
6		1								
7	1	1		1	1					
8	1			1		1			1	
9	1				1					
10	1								1	
$\bar{S}_i$	0,6	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0	0	0,7	0
$\bar{S}$					0,23					

Situation après dix années

- Montant de sinistre moyen par contrat = 23/100 = 0,23
- Prime collective raisonnablement adéquate
- Contrat 9 plus risqué
- Contrats 7, 8 et 10 n’ont eu aucun sinistre

Conclusions

- Prime collective globalement adéquate, mais pas équitable
- Le portefeuille est hétérogène
- Besoin d'une technique de tarification basée sur l'expérience (*experience rating*) pour adéquatement distribuer les primes entre les assurés

Crédibilité est une technique
de tarification basée sur l’expérience.

Deux grandes branches de la théorie de la crédibilité

1. Credibilité de stabilité, ou américaine, *limited fluctuations*

   Assureur tient compte de l'expérience individuelle seulement si elle est stable dans le temps

2. Crédibilité de précision, ou européenne, *greatest accuracy*
   - Assureur tient compte de l'expérience individuelle de façon à obtenir la meilleure prime

Crédibilité de stabilité

Objectif

Répondre à la question de Mowbray (1914)

> *How Extensive a Payroll Exposure is Necessary to Give a Dependable Pure Premium ?*

Solution générale

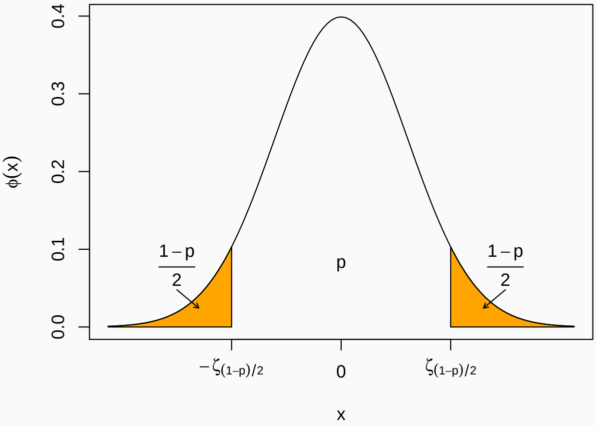
- Crédibilité complète d'ordre (k, p) est attribuée à l'expérience S d'un contrat si les paramètres de la distribution sont tels que

$$\Pr[(1 - k)E[S] \leq S \leq (1 + k)E[S]] \geq p$$

- L'inégalité est satisfaite dès lors que

$$E[S] \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k} \right) \sqrt{\mathrm{Var}[S]}$$

Notation : $\zeta_{0,05}$ est le 95^{e} centile d'une $N(0,1)$



Cas Poisson composée

- Expérience d'un contrat

$$S = X_1 + \cdots + X_N, \quad N \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

- Nous savons que

$$\begin{aligned} E[S] &= \lambda E[X] \\ \text{Var}[S] &= \lambda E[X^2] \end{aligned}$$

- Seuil de crédibilité complète en nombre de sinistres espéré

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k} \right)^2 \left(1 + \frac{\text{Var}[X]}{E[X]^2} \right) \\ &= \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k} \right)^2 (1 + \text{CV}(X)^2) \end{aligned}$$

Cas célèbres

- Si $k = 0,05$ et $p = 0,90$, alors $\zeta_{0,05} = 1,645$ et

$$\lambda \geq 1\,082,41 \left(1 + \frac{\mathrm{Var}[X]}{E[X]^2}\right)$$

- Si X est dégénérée (Poisson pure, pas de prise en compte de la sévérité des sinistres), $\mathrm{Var}[X] = 0$ et

$$\lambda \geq 1\,082,41$$

Des hypothèses sous-tendent le nombre 1082.
Avant de l’utiliser en pratique, demandez-vous si elles sont satisfaites.

Crédibilité complète en nombre d'années d'expérience

- Posons

$$W = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n}$$

- Nous avons

$$E[W] = E[S_t]$$
$$\mathrm{Var}[W] = \frac{\mathrm{Var}[S_t]}{n}$$

- Seuil de crédibilité complète en nombre d'années d'expérience

$$n \geq \left(\frac{\zeta_{\varepsilon/2}}{k}\right)^2 \frac{\mathrm{Var}[S_t]}{E[S_t]^2}$$

Crédibilité partielle

- Par un développement mathématique rigoureux (mais pour un cas spécifique), Whitney (1918) obtient une prime

$$\pi = zS + (1 - z)m, \quad z = \frac{n}{n+K}$$

- Plusieurs formules ad hoc pour le facteur de crédibilité deviennent populaires

$$z = \min\left\{\sqrt{\frac{n}{n_0}}, 1\right\} \qquad z = \min\left\{\left(\frac{n}{n_0}\right)^{2/3}, 1\right\} \qquad z = \frac{n}{n+K}$$

- Chasse au complément de crédibilité

Avertissements

- But de l'approche : incorporer dans la prime autant d'expérience individuelle que possible sans qu'elle ne fluctue trop d'une année à l'autre
- Distribution des primes basée uniquement sur la taille des assurés
- Rien n'assure que la tarification est précise ou équitable
- Aucune justification théorique de ce qu'est ou devrait être m
- Choix de k et de p demeure arbitraire

Tarification bayésienne

Mise en situation

- Trois risques (assurés, contrats, ...) à priori identiques
- Expérience dans l'année : sinistre ou non (0 ou 1)
- $S \sim \text{Bernoulli}(\theta)$
- But : estimer θ ou une fonction de θ

Mise en situation — Approche classique

- Estimateurs développés à partir d'un critère objectif (absence de biais, maximum de vraisemblance, etc.)

$$\hat{\theta}^{\mathrm{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} S_t$$

- Que faire la première année ?
- Laissons-nous de côté de l'information utile dans les données collatérales ?

Mise en situation — Approche bayésienne

- Opinion sur la valeur de θ prise en compte
- Incertitude sur la valeur de θ : paramètre est une réalisation d'une variable aléatoire Θ
- Nous allons poser

$$\Pr[\Theta = \theta] = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \theta = 0,2 \\ \frac{1}{3}, & \theta = 0,5 \\ \frac{1}{3}, & \theta = 0,8 \end{cases}$$

- Distribution à priori de θ révisée et améliorée à l'aide de la règle de Bayes lorsque l'information s'accumule

Démo

Modèle d'hétérogénéité

- Modèle classique de crédibilité de précision établi par Bühlmann (1967)
- Groupe (portefeuille) d'assurés hétérogène
- Chaque assuré a un niveau de risque inconnu et non observable représenté par θ_i, une réalisation de la variable Θ_i
- Hypothèses :
  1. sinistres de l'assuré i conditionnellement indépendants et identiquement distribués
  2. variables aléatoires $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ identiquement distribuées
  3. assurés indépendants

Retour à la mise en situation

Quelle prime charger ?

Deux premières solutions

- Prime idéale : prime de risque

$$\mu(\theta) = E[S|\Theta = \theta]$$

  Problème : inconnue

- Solution pour la première année : prime collective

$$m = E[\mu(\Theta)] = \sum_{\theta} \mu(\theta) \Pr[\Theta = \theta]$$

  Problème : pas équitable à long terme, antisélection

Meilleure solution à long terme

- Indépendance des assurés : résultats d'un assuré sans impact sur la prime d'un autre (pour le moment !)
- Nous avons des observations x_1, x_2, x_n disponibles pour la prévision
- Nous cherchons la « meilleure » approximation de la prime de risque utilisant les données $x_1, \dots, x_n$ d'un assuré :

$$E[(\mu(\Theta) - g(x_1, \dots, x_n))^2] = \min!$$

- Fonction qui minimise l'espérance est la prime bayésienne

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= E[\mu(\Theta) | S_1 = x_1, \dots, S_n = x_n] \\ &= \sum_{\theta} \mu(\theta) \Pr[\Theta = \theta | S_1 = x_1, \dots, S_n = x_n] \end{aligned}$$

Mise en situation — Petit changement

- Nous posons maintenant $\Theta \sim$ Bêta(a, b) :

$$u(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}, \quad 0 < \theta < 1$$

- Prime de risque

$$\mu(\theta) = E[S|\Theta = \theta] = \theta$$

- Prime collective

$$m = E[\mu(\Theta)] = E[\Theta] = \frac{a}{a+b}$$

Calcul de la distribution à postériori

- Nous avons

$$f(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$
$$u(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}, \quad 0 < \theta < 1$$

- Par indépendance conditionnelle des sinistres

$$\begin{aligned} u(\theta|x_1, \ldots, x_n) &= \frac{u(\theta)\prod_{t=1}^{n} f(x_t|\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} u(\theta)\prod_{t=1}^{n} f(x_t|\theta)d\theta} \\ &\propto \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\prod_{t=1}^{n}\theta^{x_t}(1-\theta)^{1-x_t} \\ &= \theta^{a+\sum_{t=1}^{n} x_t-1}(1-\theta)^{b+n-\sum_{t=1}^{n} x_t-1} \end{aligned}$$

Prime bayésienne après n années

- La distribution à posteriori est

$$\Theta|S_1 = x_1, \dots, S_n = x_n \sim \text{Bêta}(\tilde{a} = a + \textstyle\sum_{t=1}^n x_t, \tilde{b} = b + n - \sum_{t=1}^n x_t)$$

- La prime bayésienne pour l'année $n+1$ est donc

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= E[\mu(\Theta)|S_1, \dots, S_n] \\ &= E[\Theta|S_1, \dots, S_n] \\ &= \frac{\tilde{a}}{\tilde{a} + \tilde{b}} \\ &= \frac{a + \sum_{t=1}^n S_t}{a + b + n} \end{aligned}$$

Crédibilité bayésienne linéaire (ou exacte)

Notre prime bayésienne peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= \frac{a + \sum_{t=1}^{n} S_t}{a+b+n} \\
&= \frac{n}{n+a+b}\bar{S} + \frac{a+b}{n+a+b}\frac{a}{a+b} \\
&= z\bar{S} + (1-z)m
\end{aligned}$$

avec

$$z = \frac{n}{n+K}, \quad K = a+b$$

Prime de crédibilité

- Une prime de la forme
$$\pi_{n+1} = z\bar{S} + (1 - z)m$$
est appelée prime de crédibilité
- $0 \leq z \leq 1$ est le facteur de crédibilité
- Whitney (1918) et Bailey (1950) les premiers à démontrer que la prime bayésienne est parfois une prime de crédibilité

Interprétation

- $z \longrightarrow 1$ quand $K = a + b \longrightarrow 0$
  - grande incertitude quant à la valeur de θ
  - se fier à l'expérience individuelle
- $z \longrightarrow 0$ quand $K = a + b \longrightarrow \infty$
  - niveau de risque presque connu avec certitude
  - prime « collective » adéquate
- $z \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow \infty$
  - fiabilité de l'expérience individuelle augmente avec le nombre d'années

Cinq cas principaux de prime bayésienne linéaire

1. $S|\Theta = \theta \sim$ Poisson(θ) et $\Theta \sim$ Gamma(α, λ)
2. $S|\Theta = \theta \sim$ Exponentielle(θ) et $\Theta \sim$ Gamma(α, λ)
3. $S|\Theta = \theta \sim$ Normale(θ, σ_2^2) et $\Theta \sim$ Normale(μ, σ_1^2)
4. $S|\Theta = \theta \sim$ Bernoulli(θ) et $\Theta \sim$ Bêta(a, b)
5. $S|\Theta = \theta \sim$ Géométrique(θ) et $\Theta \sim$ Bêta(a, b)

   $+$

   convolutions

   - Gamma/gamma
   - Binomiale/bêta
   - Binomiale négative/bêta

Conjuguée naturelle et famille exponentielle

- En analyse bayésienne,

$$u(\theta|x_1,\ldots,x_n) \text{ même famille que } u(\theta)$$
$$\Downarrow$$
$$u(\theta) \text{ et } f(x|\theta) \text{ sont des conjuguées naturelles}$$

- Poisson, exponentielle, normale, Bernoulli et géométrique appartiennent toutes à la famille exponentielle univariée, c'est-à-dire que leur f.d.p. (ou f.m.p.) peut s'écrire sous la forme

$$f(x|\theta) = \frac{p(x)e^{-\theta x}}{q(\theta)}$$

Modèle de Jewell

- Jewell (1974) démontre que

$f(x\|\theta)$ dans famille exponentielle	$+$	conjuguée naturelle	$\Rightarrow$	prime bayésienne linéaire

- Goel (1982) conjecture que ceci n'arrive qu'avec les membres de la famille exponentielle
  - il ne peut le prouver ;
  - il ne peut non plus donner de contre-exemple.

Modèle de Bühlmann

Problèmes avec l'approche bayesienne pure

1. Prime bayesienne linéaire dans certains cas seulement
2. Choix arbitraire des distributions pour Θ_i et $S_{it}|\Theta_i$

Idées de Bühlmann

1. Forcer la prime à être linéaire (Bühlmann, 1967), c'est-à-dire de la forme

$$c_0 + \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}$$

2. Utiliser une approche non paramétrique pour calculer la prime de crédibilité (Bühlmann, 1969)

Préambule

Théorème
Soit X, Y et Θ des variables aléatoires dont la densité conjointe existe. Alors

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta]) + E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)].$$

Corrolaire

$$\mathrm{Var}[X] = E[\mathrm{Var}[X|\Theta]] + \mathrm{Var}[E[X|\Theta]]$$

Préambule

Théorème
Soit X, Y et Θ des variables aléatoires dont la densité conjointe existe. Alors

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta]) + E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)].$$

Corrolaire

$$\mathrm{Var}[X] = E[\mathrm{Var}[X|\Theta]] + \mathrm{Var}[E[X|\Theta]]$$

Démonstration du théorème.

- Une espérance conditionnelle est une variable aléatoire
- $E[Y] = E[E[Y|\Theta]]$
- $E[Y - E[Y]] = 0$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= E[(X - E[X|\Theta] + E[X|\Theta] - E[X])\times \\
&\qquad (Y - E[Y|\Theta] + E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X - E[X|\Theta])(E[Y|\Theta] - E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta] - E[X])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta] - E[Y])E[X - E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])E[Y - E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)] + 0 + 0 + \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= E[(X - E[X|\Theta] + E[X|\Theta] - E[X]) \times \\
&\qquad (Y - E[Y|\Theta] + E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X - E[X|\Theta])(E[Y|\Theta] - E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta] - E[X])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta] - E[Y])E[X - E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])E[Y - E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)] + 0 + 0 + \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\
&= E[(X-E[X|\Theta]+E[X|\Theta]-E[X])\times \\
&\qquad (Y-E[Y|\Theta]+E[Y|\Theta]-E[Y])] \\
&= E[E[(X-E[X|\Theta])(Y-E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X-E[X|\Theta])(E[Y|\Theta]-E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta]-E[X])(Y-E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta]-E[X])(E[Y|\Theta]-E[Y])] \\
&= E[E[(X-E[X|\Theta])(Y-E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta]-E[Y])E[X-E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta]-E[X])E[Y-E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta]-E[X])(E[Y|\Theta]-E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X,Y|\Theta)] + 0 + 0 + \mathrm{Cov}(E[X|\Theta],E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= E[(X - E[X|\Theta] + E[X|\Theta] - E[X])\times \\
&\qquad (Y - E[Y|\Theta] + E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X - E[X|\Theta])(E[Y|\Theta] - E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta] - E[X])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta] - E[Y])E[X - E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])E[Y - E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)] + 0 + 0 + \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= E[(X - E[X|\Theta] + E[X|\Theta] - E[X])\times \\
&\qquad (Y - E[Y|\Theta] + E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X - E[X|\Theta])(E[Y|\Theta] - E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta] - E[X])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta] - E[Y])E[X - E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])E[Y - E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)] + 0 + 0 + \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= E[(X - E[X|\Theta] + E[X|\Theta] - E[X])\times \\
&\qquad (Y - E[Y|\Theta] + E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X - E[X|\Theta])(E[Y|\Theta] - E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta] - E[X])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta] - E[Y])E[X - E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])E[Y - E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)] + 0 + 0 + \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= E[(X - E[X|\Theta] + E[X|\Theta] - E[X]) \times \\
&\qquad (Y - E[Y|\Theta] + E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X - E[X|\Theta])(E[Y|\Theta] - E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta] - E[X])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta] - E[Y])E[X - E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])E[Y - E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)] + 0 + 0 + \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= E[(X - E[X|\Theta] + E[X|\Theta] - E[X]) \times \\
&\qquad (Y - E[Y|\Theta] + E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X - E[X|\Theta])(E[Y|\Theta] - E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta] - E[X])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta] - E[Y])E[X - E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])E[Y - E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)] + 0 + 0 + \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\
&= E[(X-E[X|\Theta]+E[X|\Theta]-E[X])\times \\
&\qquad (Y-E[Y|\Theta]+E[Y|\Theta]-E[Y])] \\
&= E[E[(X-E[X|\Theta])(Y-E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X-E[X|\Theta])(E[Y|\Theta]-E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta]-E[X])(Y-E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta]-E[X])(E[Y|\Theta]-E[Y])] \\
&= E[E[(X-E[X|\Theta])(Y-E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta]-E[Y])E[X-E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta]-E[X])E[Y-E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta]-E[X])(E[Y|\Theta]-E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X,Y|\Theta)]+0+0+\mathrm{Cov}(E[X|\Theta],E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= E[(X - E[X|\Theta] + E[X|\Theta] - E[X]) \times \\
&\qquad (Y - E[Y|\Theta] + E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X - E[X|\Theta])(E[Y|\Theta] - E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta] - E[X])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta] - E[Y])E[X - E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])E[Y - E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)] + 0 + 0 + \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= E[(X - E[X|\Theta] + E[X|\Theta] - E[X]) \times \\
&\qquad (Y - E[Y|\Theta] + E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X - E[X|\Theta])(E[Y|\Theta] - E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta] - E[X])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta] - E[Y])E[X - E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])E[Y - E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)] + 0 + 0 + \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= E[(X - E[X|\Theta] + E[X|\Theta] - E[X]) \times \\
&\qquad (Y - E[Y|\Theta] + E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(X - E[X|\Theta])(E[Y|\Theta] - E[Y])|\Theta]] \\
&\quad + E[E[(E[X|\Theta] - E[X])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[E[(X - E[X|\Theta])(Y - E[Y|\Theta])|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[Y|\Theta] - E[Y])E[X - E[X|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])E[Y - E[Y|\Theta]|\Theta]] \\
&\quad + E[(E[X|\Theta] - E[X])(E[Y|\Theta] - E[Y])] \\
&= E[\mathrm{Cov}(X, Y|\Theta)] + 0 + 0 + \mathrm{Cov}(E[X|\Theta], E[Y|\Theta])
\end{aligned}
$$

Modèle de Bühlmann

- Modèle similaire à celui utilisé en crédibilité bayesienne, avec hypothèses relâchées légèrement
- Schématiquement :

Variables non	Observations				
observables	1	$\dots$	t	$\dots$	n
Θ_1	S_{11}	$\dots$	S_{1t}	$\dots$	S_{1n}
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
Θ_i	S_{i1}	$\dots$	S_{it}	$\dots$	S_{in}
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
Θ_I	S_{I1}	$\dots$	S_{It}	$\dots$	S_{In}

Hypothèses

(B1) Contrats $(\Theta_i, \mathbf{S}_i)$ indépendants, variables aléatoires $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ identiquement distribuées, variables aléatoires S_{it} ont une variance finie

Hypothèses

(B1) Contrats $(\Theta_i, \mathbf{S}_i)$ indépendants, variables aléatoires $\Theta_1, \ldots, \Theta_I$ identiquement distribuées, variables aléatoires S_{it} ont une variance finie

$\longrightarrow$ indépendance inter contrats (*between*)

Hypothèses

(B1) Contrats $(\Theta_i, \mathbf{S}_i)$ indépendants, variables aléatoires $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ identiquement distribuées, variables aléatoires S_{it} ont une variance finie

$\rightarrow$ indépendance inter contrats (*between*)

(B2) Variables aléatoires S_{it} telles que

$$E[S_{it}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i) \qquad i = 1, \dots, I$$
$$\text{Cov}(S_{it}, S_{iu}|\Theta_i) = \delta_{tu}\sigma^2(\Theta_i), \qquad t, u = 1, \dots, n$$

Hypothèses

(B1) Contrats $(\Theta_i, \mathbf{S}_i)$ indépendants, variables aléatoires $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ identiquement distribuées, variables aléatoires S_{it} ont une variance finie

→ indépendance inter contrats (*between*)

(B2) Variables aléatoires S_{it} telles que

$$\begin{aligned} E[S_{it}|\Theta_i] &= \mu(\Theta_i) & i &= 1, \dots, I \\ \mathrm{Cov}(S_{it}, S_{iu}|\Theta_i) &= \delta_{tu}\sigma^2(\Theta_i), & t, u &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

→ homogénéité temporelle

→ « indépendance » intra contrats (*within*)

Prévision

La meilleure approximation linéaire non homogène de la prime de risque $\mu(\Theta_i)$ est

$$\pi^{\mathrm{B}}_{i,n+1} = z\bar{S}_i + (1 - z)m,$$

où

$$\bar{S}_i = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} S_{it}$$

$$z = \frac{n}{n + K}, \qquad K = \frac{s^2}{a}$$

et

$$\begin{aligned} s^2 &= E[\mathrm{Var}[S_{it}|\Theta_i]] \\ &= E[\sigma^2(\Theta_i)] \\ &= \text{EPV de la CAS} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &= \mathrm{Var}[E[S_{it}|\Theta_i]] \\ &= \mathrm{Var}[\mu(\Theta_i)] \\ &= \text{VHM de la CAS.} \end{aligned}$$

Éléments clés de la démonstration

1. Nous recherchons les constantes $c_0, c_1, \dots, c_n$ qui minimisent

$$E\left[\left(\mu(\Theta_i) - c_0 - \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}\right)^2\right]$$

2. Les équations normales sont

$$c_0 = E[\mu(\Theta_i)] - \sum_{t=1}^{n} c_t E[S_{it}]$$

$$\operatorname{Cov}(\mu(\Theta_i), S_{iu}) = \sum_{t=1}^{n} c_t \operatorname{Cov}(S_{it}, S_{iu})$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(S_{it}, S_{iu}) &= \operatorname{Var}[\mu(\Theta_i)] + \delta_{tu} E[\sigma^2(\Theta)] \\ &= a + \delta_{tu} s^2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\operatorname{Cov}(\mu(\Theta_i), S_{iu}) &= \operatorname{Var}[\mu(\Theta_i)] + 0 \\ &= a\end{aligned}$$

Éléments clés de la démonstration (suite)

4. La seconde équation normale devient

$$a = \sum_{t=1}^{n} c_t(a + \delta_{tu}s^2) = a\sum_{t=1}^{n} c_t + c_u s^2, \quad u = 1, \ldots, n$$

5. Par symétrie

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c = \frac{a}{an + s^2}$$

6. De la première équation normale :

$$c_0 = (1 - nc)m$$

7. Meilleure approximation :

$$c_0 + \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it} = \frac{an}{an + s^2}\sum_{t=1}^{n}\frac{S_{it}}{n} + \left(1 - \frac{an}{an + s^2}\right)m$$

Remarque

La prime de crédibilité peut aussi s'écrire sous la forme

$$\pi^{\mathrm{B}}_{i,n+1} = m + z(\bar{S}_i - m)$$

Lien entre prime de Bühlmann et prime bayésienne

Rappel : $B_{i,n+1} = E[\mu(\Theta_i)|\mathbf{S}_i]$.

Or,

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\mu(\Theta_i) - c_0 - \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}\right)^2\right] = {} & E\left[\left(\mu(\Theta_i) - B_{i,n+1}\right)^2\right] \\
& + 2E\left[\left(\mu(\Theta_i) - B_{i,n+1}\right)\left(B_{i,n+1} - c_0 - \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}\right)\right] \\
& + E\left[\left(B_{i,n+1} - c_0 - \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

Lien entre prime de Bühlmann et prime bayésienne

Rappel : $B_{i,n+1} = E[\mu(\Theta_i)|\mathbf{S}_i]$.

Or,

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\mu(\Theta_i) - c_0 - \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}\right)^2\right] = {} & E\left[\left(\mu(\Theta_i) - B_{i,n+1}\right)^2\right] \\
& + 2E\left[E\left[\left(\mu(\Theta_i) - B_{i,n+1}\right)\left(B_{i,n+1} - c_0 - \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}\right)\middle|\mathbf{S}_i\right]\right] \\
& + E\left[\left(B_{i,n+1} - c_0 - \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

Lien entre prime de Bühlmann et prime bayésienne

Rappel : $B_{i,n+1} = E[\mu(\Theta_i)|\mathbf{S}_i]$.

Or,

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\mu(\Theta_i) - c_0 - \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}\right)^2\right] &= E\left[\left(\mu(\Theta_i) - B_{i,n+1}\right)^2\right] \\
&\quad + 2E\left[E\left[\left(\mu(\Theta_i) - B_{i,n+1}\right)\left(B_{i,n+1} - c_0 - \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}\right)\middle|\mathbf{S}_i\right]\right] \\
&\quad + E\left[\left(B_{i,n+1} - c_0 - \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(B_{i,n+1} - c_0 - \sum_{t=1}^{n} c_t S_{it}\right)^2\right] + 0 + \text{constante}
\end{aligned}
$$

Approche paramétrique

Similaire à l’approche bayesienne.

- Exemple Bernoulli/uniforme
- Exemple Poisson/gamma
- Exemple Exponentielle/gamma
- Faire tous les autres cas de prime bayesienne linéaire

Approche non paramétrique

Issue de l'approche bayésienne empirique.

- Nous avons plusieurs réalisations de la variable aléatoire Θ
- $U(\theta)$ est la fonction de structure du portefeuille
- Homogénéité du portefeuille : à quel point les moyennes des contrats sont semblables
- Estimer les paramètres de structure du portefeuille :
    1. $m = E[\mu(\Theta)]$, moyenne du portefeuille
    2. $s^2 = E[\sigma^2(\Theta)]$, variabilité moyenne du portefeuille, homogénéité temporelle
    3. $a = \mathrm{Var}[\mu(\Theta)]$, variance entre les moyennes des contrats, homogénéité du portefeuille

Estimation des primes de crédibilité

- Estimateurs sans biais des paramètres de structure :

$$\hat{m} = \bar{S} = \frac{1}{In} \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{n} S_{it}$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{I(n-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{n} (S_{it} - \bar{S}_i)^2$$

$$\hat{a} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I} (\bar{S}_i - \bar{S})^2 - \frac{1}{n} \hat{s}^2$$

- Primes de crédibilité :

$$\hat{\pi}^{\mathrm{B}}_{i,n+1} = \hat{z}\bar{S}_i + (1 - \hat{z})\hat{m}$$

$$\hat{z} = \frac{n}{n + \hat{s}^2/\hat{a}}$$

Exemple numérique

Calculer les primes de crédibilité de Bühlmann pour les données ci-dessous.

	Années					
Contrat	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	1	2	0
2	3	4	2	1	4	4
3	3	3	2	1	2	1

Exemple numérique

Calculer les primes de crédibilité de Bühlmann pour les données ci-dessous.

	Années					
Contrat	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	1	2	0
2	3	4	2	1	4	4
3	3	3	2	1	2	1

buhlmann.R

Interprétation des résultats

- Attardons-nous principalement au facteur de crédibilité

$$z = \frac{n}{n+K}, \quad K = \frac{s^2}{a} = \frac{E[\sigma^2(\Theta)]}{\mathrm{Var}[\mu(\Theta)]}$$

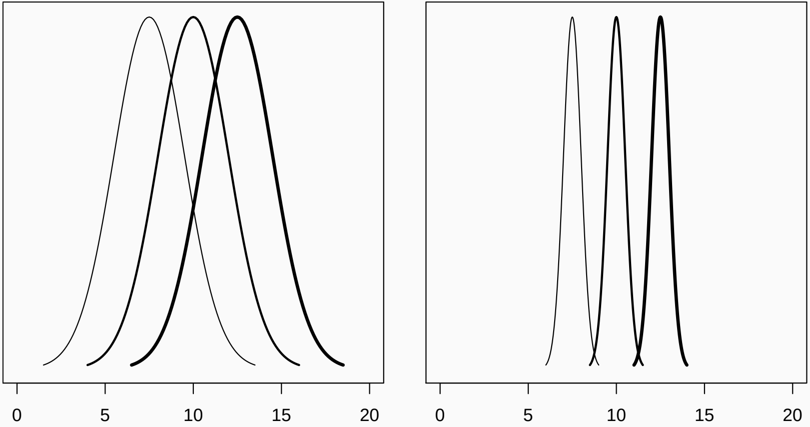
- Il augmente dans les situations suivantes

Quand $n \rightarrow \infty$

- À long terme, l'expérience d'un contrat représente exactement son niveau de risque
- Même situation qu'en crédibilité de stabilité, le niveau de crédibilité augmente avec le volume d'expérience

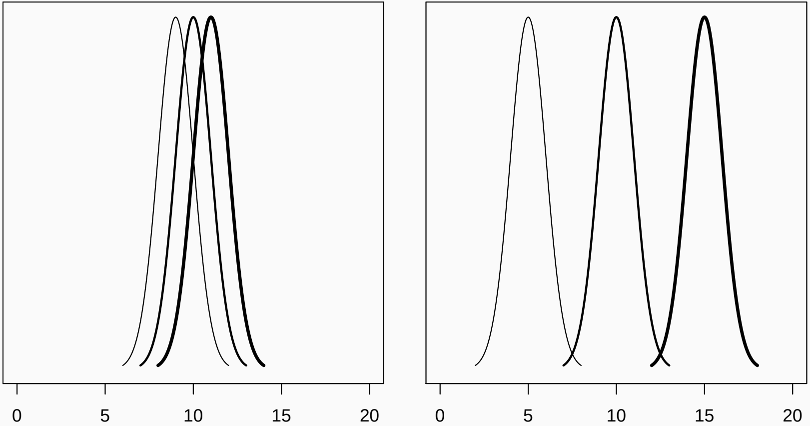
Quand $s^2 \longrightarrow 0$

- Expérience globalement stable dans le temps
- Moyennes $\bar{S}_i$ représentent bien les niveaux de risque des contrats



Quand $a \to \infty$

- Portefeuille hétérogène
- Moyennes individuelles meilleures approximations des primes de risque



Modèle de Bühlmann–Straub

Modèle pour exposition au risque variable

- Bühlmann et Straub (1970) associent un poids w_{it} à chaque donnée, qui sera maintenant notée X_{it}
- Schématiquement :

Niveau	Observations					Poids				
risque	1	$\dots$	t	$\dots$	n	1	$\dots$	t	$\dots$	n
Θ_1	X_{11}	$\dots$	X_{1t}	$\dots$	X_{1n}	w_{11}	$\dots$	w_{1t}	$\dots$	w_{1n}
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
Θ_i	X_{i1}	$\dots$	X_{it}	$\dots$	X_{in}	w_{i1}	$\dots$	w_{it}	$\dots$	w_{in}
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
Θ_I	X_{I1}	$\dots$	X_{It}	$\dots$	X_{In}	w_{I1}	$\dots$	w_{It}	$\dots$	w_{In}

Hypothèses

(BS1) Les contrats $(\Theta_i, \mathbf{X}_i)$, $i = 1, \dots, I$ sont indépendants, les variables aléatoires $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ sont identiquement distribuées et les variables aléatoires X_{it} ont une variance finie

(BS2) Les variables aléatoires X_{it}, sont telles que

$$E[X_{it}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i) \quad i = 1, \dots, I$$

$$\text{Cov}(X_{it}, X_{iu}|\Theta_i) = \delta_{tu}\frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{it}}, \quad t, u = 1, \dots, n$$

Remarques importantes

1. Nous avons
$$\mathrm{Var}[X_{it}|\Theta_i] = \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{it}}$$
2. Implique que les variables X_{it} doivent être des ratios
3. Souvent,
$$X_{it} = \frac{S_{it}}{w_{it}}$$
4. Nous avons toujours $s^2 = E[\sigma^2(\Theta)]$, mais $s^2 \neq E[\mathrm{Var}[X_{it}|\Theta]]$

Notation

Le modèle de Bühlmann-Straub fait appel à des moyennes pondérées.

$$X_{iw} = \sum_{t=1}^{n} \frac{w_{it}}{w_{i\Sigma}} X_{it} \qquad w_{i\Sigma} = \sum_{t=1}^{n} w_{it}$$

$$X_{ww} = \sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} X_{iw} \qquad w_{\Sigma\Sigma} = \sum_{t=1}^{n} w_{i\Sigma}$$

$$X_{zw} = \sum_{i=1}^{I} \frac{z_i}{z_\Sigma} X_{iw} \qquad z_\Sigma = \sum_{i=1}^{I} z_i$$

Relations de variance et de covariance

Le truc, c'est de les calculer dans cet ordre.

$$\mathrm{Cov}(X_{it}, X_{ju}) = \delta_{ij}\left(a + \delta_{tu}\frac{s^2}{w_{it}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{Cov}(X_{it}, X_{iw}) = \sum_{u=1}^{n} \frac{w_{iu}}{w_{i\Sigma}} \mathrm{Cov}(X_{it}, X_{iu})$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{ww}) = \sum_{j=1}^{I} \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{jw})$$

Relations de variance et de covariance

Le truc, c'est de les calculer dans cet ordre.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cov}(X_{it}, X_{ju}) = \delta_{ij}\left(a + \delta_{tu}\dfrac{s^2}{w_{it}}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Var}[X_{it}] = \mathrm{Cov}(X_{it}, X_{it}) \\
\downarrow & \swarrow & \\
\mathrm{Cov}(X_{it}, X_{iw}) = \displaystyle\sum_{u=1}^{n} \frac{w_{iu}}{w_{i\Sigma}} \mathrm{Cov}(X_{it}, X_{iu}) & \longrightarrow & \mathrm{Var}[X_{iw}] = \mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{iw}) = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{w_{it}}{w_{i\Sigma}} \mathrm{Cov}(X_{it}, X_{iw}) \\
\downarrow & \swarrow & \\
\mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{ww}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{I} \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{jw}) & \longrightarrow & \mathrm{Var}[X_{ww}] = \mathrm{Cov}(X_{ww}, X_{ww}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \mathrm{Cov}(X_{iw}, X_{ww})
\end{array}$$

Prévision

La meilleure approximation linéaire non homogène de la prime de risque $\mu(\Theta_i)$ — ou de $X_{i,n+1}$ — est

$$\pi^{\text{BS}}_{i,n+1} = z_i X_{iw} + (1 - z_i)m$$

où

$$z_i = \frac{w_{i\Sigma}}{w_{i\Sigma} + K}, \quad K = \frac{s^2}{a}.$$

Estimation de la moyenne collective

- Estimateur intuitif :

$$X_{ww} = \sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} X_{iw}.$$

Estimation de la moyenne collective

- Estimateur intuitif :

$$X_{ww} = \sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} X_{iw}.$$

- Meilleur choix (plus faible variance) :

$$\hat{m} = X_{zw} = \sum_{i=1}^{I} \frac{z_i}{z_\Sigma} X_{iw}$$

Estimation de la moyenne collective

- Estimateur intuitif :

$$X_{ww} = \sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} X_{iw}.$$

- Meilleur choix (plus faible variance) :

$$\hat{m} = X_{zw} = \sum_{i=1}^{I} \frac{z_i}{z_\Sigma} X_{iw}$$

- Calculer $\lim\limits_{z_i \to 0} X_{zw}$ pour savoir ce qu'il se passe si $z_i = 0$ pour tout i ($s^2 = \infty$ ou $a = 0$)

Estimation de la variance intra

Par analogie avec l'estimateur du modèle de Bühlmann, un estimateur sans biais de s^2 est

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{I(n-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{n} w_{it}(X_{it} - X_{iw})^2$$

Estimation de la variance inter

- Estimateur intuitif rendu sans biais :

$$\hat{a} = \frac{w_{\Sigma\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}^2 - \sum_{i=1}^{I} w_{i\Sigma}^2} \left(\sum_{i=1}^{I} w_{i\Sigma}(X_{iw} - X_{ww})^2 - (I-1)\hat{s}^2 \right)$$

Estimation de la variance inter

- Estimateur intuitif rendu sans biais :

$$\hat{a} = \frac{w_{\Sigma\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}^2 - \sum_{i=1}^{I} w_{i\Sigma}^2} \left(\sum_{i=1}^{I} w_{i\Sigma}(X_{iw} - X_{ww})^2 - (I-1)\hat{s}^2 \right)$$

- Problème : peut être négatif

Estimation de la variance inter

- Estimateur intuitif rendu sans biais :

$$\hat{a} = \frac{w_{\Sigma\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}^2 - \sum_{i=1}^I w_{i\Sigma}^2} \left(\sum_{i=1}^I w_{i\Sigma} (X_{iw} - X_{ww})^2 - (I-1)\hat{s}^2 \right)$$

- Problème : peut être négatif
- Pseudo-estimateur de Bichsel–Straub sans biais et toujours positif :

$$\tilde{a} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I z_i (X_{iw} - X_{zw})^2$$

Données manquantes

Fréquent en pratique.

- Nombre d'observations non identique d'un contrat à l'autre
- X_{it} pour $t = 1, \dots, n_i$
- Seule formule affectée :

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{I}(n_i - 1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{n} w_{it}(X_{it} - X_{iw})^2$$

Exemple numérique

- Données de Hachemeister (1975)
- X_{it} : montants de sinistres moyens, responsabilité civile en assurance automobile, juillet 1970–juin 1973 pour cinq états américains
- w_{it} : nombre total de sinistres dans chaque période pour chaque état
- $I = 5$ contrats et $n = 12$ périodes d'expérience

Exemple numérique

- Données de Hachemeister (1975)
- X_{it} : montants de sinistres moyens, responsabilité civile en assurance automobile, juillet 1970–juin 1973 pour cinq états américains
- w_{it} : nombre total de sinistres dans chaque période pour chaque état
- $I = 5$ contrats et $n = 12$ périodes d'expérience

`buhlmann-straub.R`

Partie II

Provisionnement en assurance IARD

Introduction au provisionnement en assurance IARD

Définition

L’Autorité des marchés financiers (AMF) définit ainsi les provisions et réserves en assurance IARD :

> *Processus d’évaluation du montant total nécessaire pour acquitter tous les paiements futurs associés aux sinistres déjà survenus en date d’évaluation (ex. au 31 décembre).*

Importance des provisions

Les provisions pour sinistres représentent environ 75 % du passif total des assureurs de dommages.

- Provisions sous-évaluées
  - santé financière de la compagnie surévaluée
  - compagnie exposée au risque de défaut sur ses paiements futurs
  - assureur exposé à la ruine
- Provisions surévaluées
  - dépenses plus élevées
  - profit diminué
  - impôts diminués
  - surplus diminué
  - valeur moindre de la compagnie

Assurance vie

- Long terme
- Prestations connues
- Moment ou durée des prestations inconnus
- Primes à percevoir

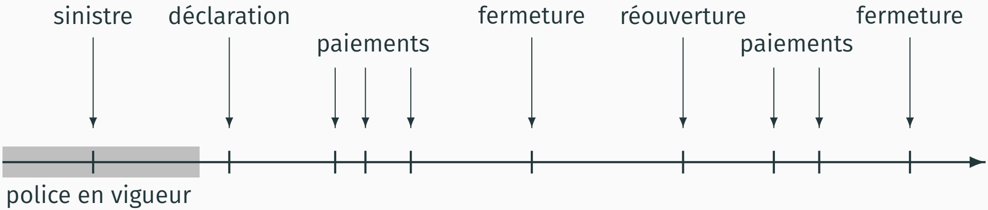
$$\text{provision} = \text{v.a. des prestations futures} - \text{v.a. des primes futures}$$

Assurance IARD

- Contrats de courte durée
- Prestations inconnues (montant et moment)
- Prestations même si police plus en vigueur

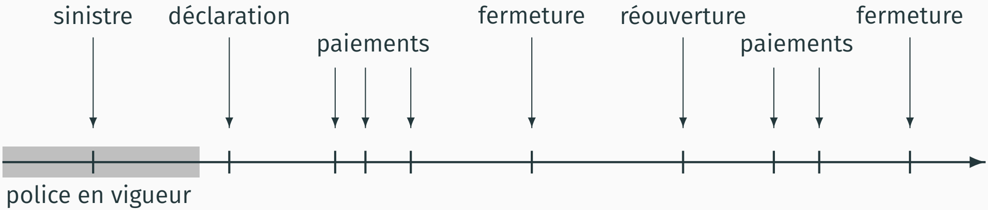
Assurance IARD (suite)

Exemple d'historique d'une police d'assurance IARD :



Assurance IARD (suite)

Exemple d'historique d'une police d'assurance IARD :



provision = provisions totales pour sinistres subis mais non déclarés (SMND) — 0

↓

Incurred But Not Reported (IBNR)

Facteur clé du calcul des provisions en assurance de dommages

Modélisation du développement des sinistres

Un peu de terminologie

- **Dossier de sinistre** (*Claim file*)
  Dossier ouvert par l'assureur dès qu'un sinistre est déclaré ; contient plusieurs informations sur la réclamation
  - date du sinistre
  - date de la réclamation
  - montant et date de chaque paiement
  - informations qualitatives

Un peu de terminologie (suite)

- **Provisions automatiques** (*Case reserves*)
  Estimation des coûts totaux associés à un dossier de sinistre
- **Sinistres subis mais non déclarés (SMND)** (*Incurred but not reported*, IBNR)
  Quatre composantes :
  1. provisions pour le développement des sinistres déjà ouverts
  2. provisions pour dossiers fermés pouvant rouvrir
  3. provisions pour sinistres encourus, mais non déclarés
  4. provisions pour les sinistres rapportés, mais non codifiés dans le système informatique
- **Provisions totales**
  Somme des provisions automatiques et des provisions SMND (IBNR)

Un peu de terminologie (suite)

- **Développement**
  Changement dans le temps de la somme des paiements faits par l'assureur pour tous ses assurés
- **Facteur de développement des sinistres** (*Loss development factor*)

$$\mathrm{LDF}_j = \lambda_j = \frac{\text{Paiements totaux effectués à } t = j + 1}{\text{Paiements totaux effectués à } t = j}$$

Données pour le provisionnement en assurance IARD

Au 31 décembre 2016.

Année	Développement (âge)				
accident	12 mois	24 mois	36 mois	48 mois	60 mois
2012	5 946 975	9 668 212	10 563 929	10 771 690	10 978 394
2013	6 346 756	9 593 162	10 316 383	10 468 180	
2014	6 269 090	9 245 313	10 092 366		
2015	5 863 015	8 546 239			
2016	5 778 885				

Problème de provisionnement

Projeter les valeurs dans la partie inférieure du triangle.

Année	Développement (âge)				
accident	12 mois	24 mois	36 mois	48 mois	60 mois
2012	5 946 975	9 668 212	10 563 929	10 771 690	10 978 394
2013	6 346 756	9 593 162	10 316 383	10 468 180	*
2014	6 269 090	9 245 313	10 092 366	*	*
2015	5 863 015	8 546 239	*	*	*
2016	5 778 885	*	*	*	*

Notation générale

$C_{i,j}$ est le montant cumulatif des sinistres encourus à l'âge $j = 1, \ldots, J$ pour l'année d'accident $i = 1, \ldots, I$.

Sans perte de généralité, nous allons supposer que $I = J$.

Année accident	Développement (âge) 1				
	1	$\cdots$	j	$\cdots$	J
1	$C_{1,1}$	$\cdots$	$C_{1,j}$	$\cdots$	$C_{1,J}$
$\vdots$					
i	$C_{i,1}$	$\cdots$	$C_{i,j}$		
$\vdots$					
I	$C_{I,1}$				

Avertissement

La notation porte facilement à confusion.

- Les observations de la diagonale du triangle de développement sont

$$C_{i,I-i+1}, \quad i = 1, \dots, I$$

- L'ensemble des observations dans la partie supérieure du triangle de développement est

$$\mathcal{D}_I = \{C_{i,j}; i + j - 1 \leq I, j \leq J\}$$

Méthode Chain-Ladder

Présentation

La méthode Chain-Ladder est la plus ancienne méthode de provisionnement.

- Toujours aussi la plus employée en pratique.
- Entièrement déterministe à l'origine
  - suffisant pour obtenir une estimation de la provision
- Possible de fournir un cadre stochastique (plusieurs façons !)
  - permet de mesurer le risque associé à la prévision
- Idée de base :

$$C_{i,j} = C_{i,j-1}\lambda_{j-1}$$

Hypothèses (approche non paramétrique)

Nous utilisons l'approche de Wüthrich et Merz (2008).

1. Les montants cumulatifs des sinistres encourus $C_{i,j}$ d'années d'accidents différentes sont indépendants.
2. Il existe des facteurs de déroulement $\lambda_1, \ldots, \lambda_{J-1} > 0$ tel que

$$E[C_{i,j}|C_{i,1}, \ldots, C_{i,j-1}] = E[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = \lambda_{j-1}C_{i,j-1}$$

   pour tout $i = 1, \ldots, I$ et $j = 2, \ldots, J$.

Conséquences des hypothèses

- Seules les observations de l'année d'accident i servent dans la projection de cette année :
$$E[C_{i,j}|\mathcal{D}_I] = E[C_{i,j}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j-1}]$$
- Seul le dernier montant cumulatif des sinistres disponible pour une année d'accident donnée est utilisé dans la projection (pensez chaine de Markov)
- Par récurrence, la projection à l'ultime ($j = J$) est :

$$\begin{aligned}
E[C_{i,J}|C_{i,1}, \dots, C_{i,I-i+1}] &= \lambda_{J-1} E[C_{i,J-1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,I-i+1}] \\
&= \lambda_{J-1}\lambda_{J-2} E[C_{i,J-2}|C_{i,1}, \dots, C_{i,I-i+1}] \\
&\vdots \\
&= \lambda_{J-1}\lambda_{J-2} \cdots \lambda_{I-i+1} E[C_{i,I-i+2}|C_{i,1}, \dots, C_{i,I-i+1}] \\
&= C_{i,I-i+1}\lambda_{I-i+1} \cdots \lambda_{J-1}
\end{aligned}$$

Estimateur Chain-Ladder

En pratique, les facteurs de déroulement $\lambda_1, \ldots, \lambda_{J-1}$ sont inconnus.

- Estimateur du facteur de déroulement λ_j, $j = 1, \ldots, J-1$:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}} = \sum_{i=1}^{I-j} \frac{C_{i,j}}{C_{\Sigma,j}} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}, \quad C_{\Sigma,j} = \sum_{k=1}^{I-j} C_{k,j}$$

  (Moyenne pondérée des facteurs de déroulement par année d'accident)

- Estimateur Chain-Ladder de $E[C_{i,j} | C_{i,1}, \ldots, C_{i,j-1}]$ pour $i + j - 1 > I$ (partie inférieure du triangle) :

$$\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{i,j} = \hat{E}[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = C_{i,I-j+1} \hat{\lambda}_{I-i} \cdots \hat{\lambda}_{j-1}.$$

Provisions

Les provisions correspondent aux montants encore à payer pour les sinistres.

- Provision Chain-Ladder pour l'année d'accident i est la différence entre les sinistres ultimes et les sinistres payés en date d'évaluation :

$$\hat{R}_i^{\text{CL}} = \hat{C}_{i,J}^{\text{CL}} - C_{i,J-i+1}.$$

- Provision totale est la somme des provisions par année d'accident :

$$\begin{aligned}\hat{R}^{\text{CL}} &= \sum_{i=1}^{I} \hat{R}_i^{\text{CL}} \\ &= \sum_{i=1}^{I} (\hat{C}_{i,J}^{\text{CL}} - C_{i,J-i+1}).\end{aligned}$$

Exemple

Données

	Développement (âge)				
Année	1	2	3	4	5
1	100	150	175	180	200
2	110	168	192	205	
3	115	169	202		
4	125	185			
5	150				

Estimateurs des facteurs de déroulement

$$\hat{\lambda}_4 = \frac{200}{180} = 1,111$$

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{180 + 205}{175 + 192} = 1,049$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{175 + 192 + 202}{150 + 168 + 169} = 1,168$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{150 + 168 + 169 + 185}{100 + 110 + 115 + 125} = 1,493$$

Exemple (suite)

$$
\begin{aligned}
\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{2,5} &= C_{2,4}\hat{\lambda}_4 \\
&= 205(1,111) \\
&= 227,78 \\
\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{3,4} &= C_{3,3}\hat{\lambda}_3 \\
&= 202(1,049) \\
&= 211,91 \\
\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{3,5} &= \hat{C}^{\mathrm{CL}}_{3,4}\hat{\lambda}_4 = C_{3,3}\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_4 \\
&= 202(1,049)(1,111) \\
&= 235,45 \\
\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{4,5} &= C_{4,2}\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_4 \\
&= 185(1,169)(1,049)(1,111) \\
&= 251,95
\end{aligned}
$$

	Développement (âge)				
Année	1	2	3	4	5
1	100	150	175	180	200
2	110	168	192	205	227,78
3	115	169	202	211,91	235,45
4	125	185	216,15	226,75	251,95
5	150	224,00	261,72	274,55	305,06

Exemple (suite)

- Provisions par année d'accident :

$$\begin{aligned}
\hat{R}_1^{\mathrm{CL}} &= C_{1,5} - C_{1,5} = 0 \\
\hat{R}_2^{\mathrm{CL}} &= \hat{C}_{2,5}^{\mathrm{CL}} - C_{2,4} = 22,78 \\
\hat{R}_3^{\mathrm{CL}} &= \hat{C}_{3,5}^{\mathrm{CL}} - C_{3,3} = 33,45 \\
\hat{R}_4^{\mathrm{CL}} &= \hat{C}_{4,5}^{\mathrm{CL}} - C_{4,2} = 66,95 \\
\hat{R}_5^{\mathrm{CL}} &= \hat{C}_{5,5}^{\mathrm{CL}} - C_{5,1} = 155,06
\end{aligned}$$

- Provision totale :

$$\hat{R}^{\mathrm{CL}} = 22,78 + 33,45 + 66,95 + 155,06 = 278,24.$$

Exemple (suite et fin)

Sommaire des résultats en un seul tableau.

	Développement (âge)					
Année	1	2	3	4	5	Provision
1	100	150	175	180	200	0,00
2	110	168	192	205	227,78	22,78
3	115	169	202	211,91	235,45	33,45
4	125	185	216,15	226,75	251,95	66,95
5	150	224,00	261,72	274,55	305,06	155,06
$\hat{\lambda}_j$	$1,493$	$1,168$	$1,049$	$1,111$		
TOTAL						278,24

Remarques

- La méthode Chain-Ladder suppose que l’âge des sinistres est la seule variable explicative du développement.
- La méthode Chain-Ladder suppose également que le facteur de déroulement n’est pas fonction de l’année d’accident, c’est-à-dire que $\lambda_{i,j} = \lambda_j$.
- La provision $\hat{R}_n$ de la plus récente année d’accident est sujette à une forte incertitude.

Le paquetage R **ChainLadder** (Gesmann et collab., 2017) permet de calculer des provisions en assurance IARD par différentes méthodes, dont Chain-Ladder.

`chain-ladder.R`

Méthode de Bornhuetter–Ferguson

Présentation

Méthode présentée dans le célèbre article de Bornhuetter et Ferguson (1972).

- Également entièrement déterministe au départ.
- Idée de base :
  1. montant ultime espéré supposé connu

$$E[C_{i,J}] = \mu_i$$

  2. provision pour l'année d'accident i correspond à la proportion du montant ultime qui « reste à venir »

$$R_i = (1 - \beta_{I-i})\mu_i$$

Hypothèses

Toujours tel que proposé par Wüthrich et Merz (2008).

1. Les montants cumulatifs des sinistres encourus $C_{i,j}$ d'années d'accidents différentes sont indépendants.
2. Il existe des paramètres $\mu_1, \ldots, \mu_I > 0$ et des facteurs $\beta_1, \ldots, \beta_J > 0$ avec $\beta_J = 1$ tel que

$$E[C_{i,1}] = \beta_1 \mu_i$$
$$E[C_{i,j+k} | C_{i,1}, \ldots, C_{i,j}] = C_{i,j} + (\beta_{j+k} - \beta_j)\mu_i$$

pour tout $i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J-1$ et $k = 1, \ldots, J-j$.

Conséquences des hypothèses

- On remarque que

$$\begin{aligned} E[C_{i,2}] &= E[E[C_{i,2}|C_{i,1}]] \\ &= E[C_{i,1} + (\beta_2 - \beta_1)\mu_i] \\ &= \beta_1\mu_i + (\beta_2 - \beta_1)\mu_i \\ &= \beta_2\mu_i, \end{aligned}$$

  d'où, par récurrence :

$$\begin{aligned} E[C_{i,j}] &= \beta_j\mu_i \\ E[C_{i,J}] &= \mu_i. \end{aligned}$$

- Montant cumulatif espéré dans une année est un pourcentage fixe (par année d'accident) du montant espéré ultime.

Conséquences des hypothèses (suite)

- Projection à l'ultime :

$$E[C_{i,J}|C_{i,1},\ldots,C_{i,I-i+1}] = C_{i,I-i+1} + (1-\beta_{I-i+1})\mu_i.$$

- Exprimé sous forme de provision :

$$\begin{aligned}
E[R_i|C_{i,1},\ldots,C_{i,I-i+1}] &= E[C_{i,J} - C_{i,I-i+1}|C_{i,1},\ldots,C_{i,I-i+1}] \\
&= E[C_{i,J}|C_{i,1},\ldots,C_{i,I-i+1}] - C_{i,I-i+1} \\
&= (1-\beta_{I-i+1})\mu_i.
\end{aligned}$$

Estimateur de Bornhuetter–Ferguson

- Estimateur de Bornhuetter–Ferguson de la projection des sinistres cumulatifs à l'ultime $E[C_{i,J}|C_{i,1},\dots,C_{i,I-i+1}]$ pour $i=1,\dots,I$:

$$\hat{C}_{i,J}^{\mathrm{BF}} = \hat{E}[C_{i,J}|C_{i,1},\dots,C_{i,I-i+1}] = C_{i,I-i+1} + (1-\hat{\beta}_{I-i+1})\hat{\mu}_i.$$

- Exprimé sous forme de provision :

$$\hat{R}_i^{\mathrm{BF}} = (1-\hat{\beta}_{I-i+1})\hat{\mu}_i.$$

Calcul en pratique

- Nous devons déterminer des estimateurs appropriés pour les paramètres de la structure de développement $\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_J$ et pour les sinistres ultimes espérés $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_I$.
- Nous pourrons réutiliser des idées de la méthode Chain-Ladder après avoir remarqué ceci :

$$\begin{aligned}
\hat{R}_i^{\text{CL}} &= \hat{C}_{i,J}^{\text{CL}} - C_{i,J-i+1} \\
&= \hat{C}_{i,J}^{\text{CL}} \left(1 - \frac{C_{i,J-i+1}}{\hat{C}_{i,J}^{\text{CL}}} \right) \\
&= \hat{C}_{i,J}^{\text{CL}} \left(1 - \frac{C_{i,J-i+1}}{C_{i,J-i+1} \hat{\lambda}_{J-i+1} \cdots \hat{\lambda}_{J-1}} \right) \\
&= \hat{C}_{i,J}^{\text{CL}} \left(1 - \frac{1}{\prod_{j=J-i+1}^{J-1} \hat{\lambda}_j} \right)
\end{aligned}$$

Nous allons utiliser

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{\prod_{k=j}^{J-1} \hat{\lambda}_k} = \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\hat{\lambda}_k}.$$

Estimateurs des sinistres ultimes espérés

- En principe, n'importe quelle bonne estimation d'expert $\hat{\mu}_i$ de μ_i serait appropriée.
- En pratique, les estimateurs sont calculés à partir des taux de sinistralité (*loss ratios*, LR), supposés connus, et des primes acquises (PA) de chaque année d'accident :
$$\hat{\mu}_i = \mathrm{LR}_i \times \mathrm{PA}_i.$$
- Les taux de sinistralité globaux sont généralement assez bien connus par ligne d'affaires.

Exemple

Données de l'exemple de Chain-Ladder, mais avec en plus les primes acquises et les taux de sinistralité par année d'accident.

			Développement (âge)				
Année	PA	LR	1	2	3	4	5
1	330	0, 60	100	150	175	180	200
2	350	0, 65	110	168	192	205	
3	365	0, 70	115	169	202		
4	385	0, 75	125	185			
5	400	0, 80	150				

Exemple (suite)

Estimateurs des paramètres du modèle.

$$\hat{\beta}_5 = 1 \qquad \hat{\mu}_1 = \mathrm{LR}_1\mathrm{PA}_1 = 198$$

$$\hat{\beta}_4 = \frac{1}{\hat{\lambda}_4} = 0,900 \qquad \hat{\mu}_2 = \mathrm{LR}_2\mathrm{PA}_2 = 227,50$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{1}{\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_4} = 0,858 \qquad \hat{\mu}_3 = \mathrm{LR}_3\mathrm{PA}_3 = 255,50$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_4} = 0,734 \qquad \hat{\mu}_4 = \mathrm{LR}_4\mathrm{PA}_4 = 288,75$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_4} = 0,492 \qquad \hat{\mu}_5 = \mathrm{LR}_5\mathrm{PA}_5 = 320$$

Exemple (suite)

Nous pouvons ensuite calculer directement les provisions (plus simple) ou encore les estimateurs de Bornhuetter–Ferguson des sinistres cumulatifs ultimes.

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_1 &= (1 - \hat{\beta}_5)\hat{\mu}_1 = 0 & \hat{C}^{BF}_{1,5} &= C_{1,5} = 200 \\
\hat{R}_2 &= (1 - \hat{\beta}_4)\hat{\mu}_2 = 22,75 & \hat{C}^{BF}_{2,5} &= C_{2,4} + (1 - \hat{\beta}_4)\hat{\mu}_2 = 227,75 \\
\hat{R}_3 &= (1 - \hat{\beta}_3)\hat{\mu}_3 = 36,30 & \hat{C}^{BF}_{3,5} &= C_{3,3} + (1 - \hat{\beta}_3)\hat{\mu}_3 = 238,30 \\
\hat{R}_4 &= (1 - \hat{\beta}_2)\hat{\mu}_4 = 76,73 & \hat{C}^{BF}_{4,5} &= C_{4,2} + (1 - \hat{\beta}_2)\hat{\mu}_4 = 261,73 \\
\hat{R}_5 &= (1 - \hat{\beta}_1)\hat{\mu}_5 = 162,65 & \hat{C}^{BF}_{5,5} &= C_{5,1} + (1 - \hat{\beta}_1)\hat{\mu}_5 = 312,65
\end{aligned}
$$

Exemple (suite et fin)

Sommaire des résultats en un seul tableau.

			Développement (âge)							
Année	PA	LR	1	2	3	4	5	$\hat{\mu}_i$	$1-\hat{\beta}_i$	Provision
1	330	$0,60$	100	150	175	180	200	198,00	0	0
2	350	$0,65$	110	168	192	205	227,75	227,50	0,100	22,75
3	365	$0,70$	115	169	202		238,30	255,50	0,142	36,30
4	385	$0,75$	125	185			261,73	288,75	0,266	76,73
5	400	$0,80$	150				312,65	320,00	0.508	162,65
$\hat{\lambda}_j$			$1,493$	$1,168$	$1,049$	$1,111$				
TOTAL										298,44

bornhuetter-ferguson.R

Méthode de Mack

Présentation

- Les méthodes Chain-Ladder et de Bornhuetter-Ferguson sont très efficaces pour estimer les réserves espérées, mais elles ne permettent pas d'en quantifier la variance et, donc, le risque associé aux estimations.
- Mack (1993) fut un des premiers à fournir un cadre stochastique (non paramétrique) à la méthode Chain-Ladder.
- Ce cadre stochastique permet d'estimer la variance des projections.
- Nous avons déjà fourni une partie du cadre stochastique dans le chapitre sur la méthode Chain-Ladder.

Hypothèses

1. Les montants cumulatifs des sinistres encourus $C_{i,j}$ d'années d'accidents différentes sont indépendants.
2. Il existe des facteurs de déroulement $\lambda_1, \ldots, \lambda_{J-1} > 0$ et des paramètres $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_{J-1}^2 > 0$ tel que

$$E[C_{i,j}|C_{i,1}, \ldots, C_{i,j-1}] = E[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = \lambda_{j-1}C_{i,j-1}$$
$$\mathrm{Var}[C_{i,j}|C_{i,1}, \ldots, C_{i,j-1}] = \mathrm{Var}[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = \sigma_{j-1}^2 C_{i,j-1}$$

pour tout $i = 1, \ldots, I$ et $j = 2, \ldots, J$.

Notation

Nous avons défini en introduction l'ensemble des données disponibles dans le triangle de développement :

$$\mathcal{D}_I \equiv \mathcal{D}_J = \{C_{i,j}; i+j-1 \leq I, j \leq J\}.$$

Données $\mathcal{D}_5$

i \ j	1	2	3	4	5
1	100	150	175	180	200
2	110	168	192	205	
3	115	169	202		
4	125	185			
5	150				

Définissons maintenant l'ensemble des données dans le triangle tronqué à l'âge k :

$$\mathcal{D}_k = \{C_{i,j}; i+j-1 \leq I, j \leq k\}.$$

Données $\mathcal{D}_3$

i \ j	1	2	3	4	5
1	100	150	175	180	200
2	110	168	192	205	
3	115	169	202		
4	125	185			
5	150				

Estimateurs des facteurs de déroulement

- Nous utilisons l'estimateur Chain-Ladder pour estimer le facteur de déroulement $\lambda_j, j = 1, \dots, J-1$:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}}.$$

- On peut démontrer (Wüthrich et Merz, 2008, lemme 3.3) que $\hat{\lambda}_j$ est l'estimateur linéaire sans biais de f_j à variance minimale conditionnellement aux données $\mathcal{D}_j$.
- La variance conditionnelle de l'estimateur est

$$\mathrm{Var}[\hat{\lambda}_j|\mathcal{D}_j] = \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}}.$$

Quelques propriétés de l'estimateur (1/5)

$\hat{\lambda}_j$ est un estimateur conditionnellement sans biais de λ_j.

Quelques propriétés de l'estimateur (1/5)

$\hat{\lambda}_j$ est un estimateur conditionnellement sans biais de λ_j.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
E[\hat{\lambda}_j|\mathcal{D}_j] &= E\left[\left.\frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}}\right|\mathcal{D}_j\right] \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}} \sum_{i=1}^{I-j} E[C_{i,j+1}|\mathcal{D}_j] \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}} \sum_{i=1}^{I-j} \lambda_j C_{i,j} \\
&= \lambda_j
\end{aligned}
$$

$\square$

Quelques propriétés de l’estimateur (2/5)

$\hat{\lambda}_j$ est un estimateur sans biais de λ_j.

$\hat{\lambda}_j$ est un estimateur sans biais de λ_j.

Démonstration.
Découle directement de la propriété précédente :

$$\begin{aligned} E[\hat{\lambda}_j] &= E[E[\hat{\lambda}_j | \mathcal{D}_j]] \\ &= E[\lambda_j] \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

$\square$

Quelques propriétés de l'estimateur (3/5)

Les estimateurs d'âges différents sont non correlés.

Quelques propriétés de l'estimateur (3/5)

Les estimateurs d'âges différents sont non correlés.

Démonstration.
Pour $k < j$,

$$\begin{aligned} E[\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_j] &= E[E[\hat{\lambda}_k\hat{\lambda}_j|\mathcal{D}_j]] \\ &= E[\hat{\lambda}_k E[\hat{\lambda}_j|\mathcal{D}_j]] \\ &= E[\hat{\lambda}_k]\lambda_j \\ &= E[\hat{\lambda}_k]E[\hat{\lambda}_j]. \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient que

$$E[\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_j\cdots\hat{\lambda}_{J-1}] = \lambda_1\lambda_j\cdots\lambda_{J-1}.$$

□

Quelques propriétés de l'estimateur (4/5)

Sachant $C_{i,I-i+1}$, l'estimateur Chain-Ladder $\hat{C}_{i,J}^{CL}$ est un estimateur sans biais des sinistres cumulatifs espérés à l'ultime $E[C_{i,J}|\mathcal{D}_I] = E[C_{i,J}|C_{i,I-i+1}]$.

Quelques propriétés de l'estimateur (4/5)

Sachant $C_{i,I-i+1}$, l'estimateur Chain-Ladder $\hat{C}^{CL}_{i,J}$ est un estimateur sans biais des sinistres cumulatifs espérés à l'ultime $E[C_{i,J}|\mathcal{D}_I] = E[C_{i,J}|C_{i,I-i+1}]$.

Démonstration.
En premier lieu :

$$\begin{aligned} E[\hat{C}^{CL}_{i,J}|C_{i,I-i+1}] &= E[C_{i,I-i+1}\hat{\lambda}_{J-i}\cdots\hat{\lambda}_{J-2}\hat{\lambda}_{J-1}|C_{i,I-i+1}] \\ &= E[C_{i,I-i+1}\hat{\lambda}_{J-i}\cdots\hat{\lambda}_{J-2}E[\hat{\lambda}_{J-1}|\mathcal{D}_{J-1}]|C_{i,I-i+1}] \\ &= \lambda_{J-1}E[\hat{C}^{CL}_{i,J-1}|C_{i,I-i+1}] \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient que

$$E[\hat{C}^{CL}_{i,J}|C_{i,J-i+1}] = C_{i,I-i+1}\lambda_{I-i+1}\cdots\lambda_{J-1} = E[C_{i,J}|C_{i,J-i+1}].$$

□

Quelques propriétés de l'estimateur (5/5)

L'estimateur Chain-Ladder $\hat{C}^{CL}_{i,J}$ est (non conditionnellement) un estimateur sans biais des sinistres cumulatifs espérés à l'ultime $E[C_{i,J}]$.

L'estimateur Chain-Ladder $\hat{C}^{CL}_{i,J}$ est (non conditionnellement) un estimateur sans biais des sinistres cumulatifs espérés à l'ultime $E[C_{i,J}]$.

Démonstration.
Conséquence directe du résultat précédent. $\square$

Conséquence sur l'estimateur de la provision

L'estimateur Chain-Ladder $\hat{R}_i^{\mathrm{CL}}$ de la provision de l'année d'accident i est un estimateur sans biais de la provision R_i :

$$\begin{aligned} E[\hat{R}_i^{\mathrm{CL}}] &= E[\hat{C}_{i,J}^{\mathrm{CL}}] - C_{i,I-i+1} \\ &= E[C_{i,J}] - C_{i,I-i+1} \\ &= R_i. \end{aligned}$$

Nous avons démontré que nos estimateurs Chain-Ladder sont sans biais.

Nous ne connaissons toujours pas leur variance, élément essentiel pour établir le risque de ces estimations.

Estimateurs des paramètres de variance

- Rappel : nous avons posé

$$\mathrm{Var}[C_{i,j+1}|C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j}$$

ou, exprimé différemment,

$$\sigma_j^2 = C_{i,j}\,\mathrm{Var}\left[\left.\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}\right| C_{i,j}\right].$$

- Notre estimateur du paramètre de variance σ_j^2 est

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1}\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{\lambda}_j\right)^2.$$

Propriété de l’estimateur de variance

$\hat{\sigma}_j^2$ est un estimateur sans biais de σ_j^2.

Propriété de l'estimateur de variance

$\hat{\sigma}_j^2$ est un estimateur sans biais de σ_j^2.

Démonstration (début)
Nous allons démontrer l'absence de biais conditionnellement à $\mathcal{D}_j$:

$$E[\hat{\sigma}_j^2 | \mathcal{D}_j] = \sigma_j^2.$$

Le résultat

$$E[\hat{\sigma}_j^2] = \sigma_j^2.$$

est ensuite une conséquence directe.

Propriété de l'estimateur de variance

Démonstration (suite)
En premier lieu,

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{\lambda}_j\right)^2 \middle| \mathcal{D}_j\right] = E&\left[\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \lambda_j\right)^2 \middle| \mathcal{D}_j\right] \\
&- 2E\left[\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \lambda_j\right)(\hat{\lambda}_j - \lambda_j) \middle| \mathcal{D}_j\right] \\
&+ E[(\hat{\lambda}_j - \lambda_j)^2 | \mathcal{D}_j].
\end{aligned}
$$

Calculons maintenant chacun des termes du côté droit.

Propriété de l'estimateur de variance

Démonstration (suite)

1. On a

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \lambda_j\right)^2 \middle| \mathcal{D}_j\right] &= \mathrm{Var}\left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \middle| \mathcal{D}_j\right] \\
&= \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}.
\end{aligned}
$$

Démonstration (suite)

2. Par indépendance entre les années d'accident,

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \lambda_j\right)(\hat{\lambda}_j - \lambda_j)\middle|\, \mathcal{D}_j\right] &= \mathrm{Cov}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}, \hat{\lambda}_j \middle|\, \mathcal{D}_j\right) \\
&= \frac{C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}} \mathrm{Var}\left[\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}\middle|\, \mathcal{D}_j\right] \\
&= \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}}.
\end{aligned}
$$

Démonstration (suite et fin).

3. Par définition, le dernier terme est

$$\begin{aligned} E[(\hat{\lambda}_j - \lambda_j)^2 | \mathcal{D}_j] &= \mathrm{Var}[\hat{\lambda}_j | \mathcal{D}_j] \\ &= \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}}. \end{aligned}$$

Il est laissé en exercice d'assembler tous les morceaux pour compléter la démonstration. $\square$

Remarque

- Lorsque $j = J - 1$ et $I = J$, l'estimateur du dernier paramètre de variance est

$$\hat{\sigma}^2_{J-1} = \frac{1}{I-(J-1)-1} C_{1,J-1} \left(\frac{C_{1,J}}{C_{1,J-1}} - \hat{\lambda}_{J-1} \right)^2,$$

ce qui donne une division par 0.

- En pratique, on utilise alors

$$\hat{\sigma}^2_{J-1} = \min\left(\frac{\hat{\sigma}^4_{J-2}}{\hat{\sigma}^2_{J-3}}, \hat{\sigma}^2_{J-3}, \hat{\sigma}^2_{J-2} \right).$$

Erreur de prévision

L'erreur quadratique moyenne de prévision de la provision de l'année d'accident i est

$$\begin{aligned}\mathrm{MSEP}(\hat{R}_i) &= E[(\hat{R}_i - R_i)^2|\mathcal{D}_I] \\ &= \mathrm{Var}[R_i|\mathcal{D}_I] + (\hat{R}_i - E[R_i|\mathcal{D}_I])^2.\end{aligned}$$

(... *plusieurs* étapes ; voir Wüthrich et Merz, 2008, section 3.2...)

Nous utilisons comme estimateur de cette erreur :

$$\widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_i) = (\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{i,J})^2 \sum_{k=I-i+1}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k}} \right)$$

pour $i = 2, \ldots, I$ et où $\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{i,k} = C_{i,I-i+1}\hat{\lambda}_{I-i+1} \cdots \hat{\lambda}_{k-1}$, $k > I - i + 1$, sont les projections des valeurs futures des $C_{i,k}$, et $\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{i,I-i+1} = C_{i,I-i+1}$.

Examen de la formule de l'erreur de prévision (1/3)

Afin de mieux visualiser la formule, développons-la pour $i = 1, 2, 3$.

Le diagramme sur la droite représente un triangle de développement complété. Les points $\bullet$ sont des données connues et les astérisques $\ast$ sont des données projetées par la méthode Chain-Ladder.

$$\widehat{\text{MSEP}}(\hat{R}_2) = (\hat{C}^{\text{CL}}_{2,J})^2 \frac{\hat{\sigma}^2_{J-1}}{\hat{\lambda}^2_{J-1}} \left(\frac{1}{C_{2,J-1}} + \frac{1}{C_{1,J-1}} \right)$$

$$\begin{array}{ccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \ast \\
\bullet & \bullet & \bullet & \ast & \ast \\
\bullet & \bullet & \ast & \ast & \ast \\
\bullet & \ast & \ast & \ast & \ast
\end{array}$$

Examen de la formule de l’erreur de prévision (2/3)

$$
\widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_3) = (\hat{C}_{3,J}^{\mathrm{CL}})^2 \left[\frac{\hat{\sigma}_{J-2}^2}{\hat{\lambda}_{J-2}^2} \left(\frac{1}{C_{3,J-2}} + \frac{1}{C_{1,J-2} + C_{2,J-2}} \right) \right.
$$

$$
\left. + \frac{\hat{\sigma}_{J-1}^2}{\hat{\lambda}_{J-1}^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{3,J-1}^{\mathrm{CL}}} + \frac{1}{C_{1,J-1}} \right) \right]
$$

•	•	•	•	•
•	•	•	•	*
•	•	•	*	*
•	•	*	*	*
•	*	*	*	*

Examen de la formule de l'erreur de prévision (3/3)

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_4) = (\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{4,J})^2 \Bigg[& \frac{\hat{\sigma}^2_{J-3}}{\hat{\lambda}^2_{J-3}} \left(\frac{1}{C_{4,J-3}} + \frac{1}{C_{1,J-3} + C_{2,J-3} + C_{3,J-3}} \right) \\
& + \frac{\hat{\sigma}^2_{J-2}}{\hat{\lambda}^2_{J-2}} \left(\frac{1}{\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{4,J-2}} + \frac{1}{C_{1,J-2} + C_{2,J-2}} \right) \\
& + \frac{\hat{\sigma}^2_{J-1}}{\hat{\lambda}^2_{J-1}} \left(\frac{1}{\hat{C}^{\mathrm{CL}}_{4,J-1}} + \frac{1}{C_{1,J-1}} \right) \Bigg]
\end{aligned}
$$

●	●	●	●	●
●	●	●	●	*
●	●	●	*	*
●	●	*	*	*
●	*	*	*	*

Intervalle de confiance pour la provision

Deux options.

1. On suppose que
$$R_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$
de sorte qu'un intervalle de confiance pour R_i est
$$\left(\hat{R}_i - \zeta_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_i)}, \hat{R}_i + \zeta_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_i)}\right).$$
Problème : la borne inférieure peut être négative.

Intervalle de confiance pour la provision

2. On suppose que
$$R_i \sim \text{Log-normale}(\mu_i, \sigma_i^2).$$
de sorte qu'un intervalle de confiance pour R_i est
$$\left(e^{\mu_i - \zeta_{\alpha/2}\sigma_i}, e^{\mu_i + \zeta_{\alpha/2}\sigma_i}\right),$$
avec
$$\mu_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2}$$
$$\sigma_i^2 = \ln\left(1 + \frac{\widehat{\text{MSEP}}(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i^2}\right).$$
(Voir diapositive suivante.)

Apparté

Si $X \sim \text{Log-normale}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\begin{aligned} E[X] &= e^{\mu+\sigma^2/2} \\ \mathrm{Var}[X] &= e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1) = E[X]^2(e^{\sigma^2}-1), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu &= \ln(E[X]) - \frac{\sigma^2}{2} \\ \sigma^2 &= \ln\left(1 + \frac{\mathrm{Var}[X]}{E[X]^2}\right). \end{aligned}$$

Dernière étape : erreur de prévision de la provision totale

L'erreur quadratique moyenne de prévision de la provision totale est

$$\mathrm{MSEP}(\hat{R}) = E\left[\sum_{i=2}^{I}(\hat{R}_i - R_i)^2 \middle| \mathcal{D}_I\right].$$

L'estimateur de cette erreur est :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}) &= \sum_{i=2}^{I} \widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_i) + 2 \sum_{2 \leq i < k \leq I} \hat{C}_{i,J}^{\mathrm{CL}} \hat{C}_{k,J}^{\mathrm{CL}} \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{\lambda}_j^2}{\sum_{n=1}^{I-j} C_{n,j}} \\
&= \sum_{i=2}^{I} \left\{ \widehat{\mathrm{MSEP}}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,J}^{\mathrm{CL}} \left(\sum_{k=i+1}^{I} \hat{C}_{k,J}^{\mathrm{CL}} \right) \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2 / \hat{\lambda}_j^2}{\sum_{n=1}^{I-j} C_{n,j}} \right\}.
\end{aligned}$$

Il est laissé en exercice de dériver les formules des intervalles de confiance pour la provision totale.

Exemple

Résultats pour le triangle de développement utilisé dans les chapitres précédents.

	Développement (âge)						
Année	1	2	3	4	5	Provision	Écart type
1	100	150	175	180	200	0,00	—
2	110	168	192	205	227,78	22,78	7,13
3	115	169	202	211,91	235,45	33,45	10,38
4	125	185	216,15	226,75	251,95	66,95	12,62
5	150	224,00	261,72	274,55	305,06	155,06	15,38
$\hat{\lambda}_j$	$1,493$	$1,168$	$1,049$	$1,111$			
$\hat{s}_j^2$	$0,073$	$0,116$	$0,140$	$0,116$			
TOTAL						278,24	33,64

mack.R

Lien avec la régression linéaire

Modèle de Mack sous un autre jour

- Dans le modèle de Mack (et donc Chain-Ladder), nous avons posé

$$E[C_{i,j+1}|C_{i,j}] = f_j C_{i,j}$$
$$\text{Var}[C_{i,j+1}|C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j}.$$

- Réécrivons le modèle ainsi :

$$C_{i,j+1} = f_j C_{i,j} + \varepsilon_j$$

avec

$$E[\varepsilon_j|C_{i,j}] = 0$$
$$\text{Var}[\varepsilon_j|C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j}.$$

Moindres carrés pondérés

- Nous avons un modèle analogue (mêmes moments) que le modèle de régression passant par l'origine utilisant les moindres carrés pondérés :

$$Y_j = \beta X_j + \varepsilon_j \quad \varepsilon_j \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{w_j}\right).$$

- Les estimateurs des paramètres sont bien connus :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j X_j Y_j}{\sum_{j=1}^{n} w_j X_j^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} w_j (Y_j - \hat{Y}_j)^2.$$

Passage d'un modèle à l'autre

Avec les substitutions

$$\begin{aligned} Y_j &\to C_{i,j+1} & \qquad \beta &\to f_j \\ X_j &\to C_{i,j} & \sigma^2 &\to \sigma_j^2 \\ w_j &\to \frac{1}{C_{i,j}} & n &\to I-j \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{j=1}^{I-j} C_{i,j}} = \hat{f}_j$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{I-j-1} \sum_{j=1}^{I-j} \frac{1}{C_{i,j}} (C_{i,j+1} - C_{i,j}\hat{f}_j)^2 \\ &= \frac{1}{I-j-1} \sum_{j=1}^{I-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2 = \hat{\sigma}_j^2. \end{aligned}$$

Conséquence

Il est donc possible d'utiliser les outils numériques standards de régression pour calculer les estimateurs des facteurs de déroulement et des paramètres de variance.

regression.R

Exercices

Méthode Chain-Ladder

Le fichier `exercice-chain-ladder.csv` contient un triangle de paiements cumulés pour les années d'accident 2000 à 2005, inclusivement, et pour des périodes de développement allant de 12 à 72 mois.

Calculer la réserve de chaque année d'accident ainsi que le montant de la réserve totale à l'aide de la méthode Chain-Ladder.

Méthode Bornhuetter–Ferguson

Le fichier `exercice-bornhuetter-ferguson.csv` contient un triangle de paiements cumulés (en millions $) pour les années d'accident 2005 à 2008, inclusivement.

On vous dit que l'actuaire de la compagnie a calculé un montant de réserve de 1 300 000 $ en utilisant la méthode de Bornhuetter–Ferguson.

Les primes acquises des années d'accident sous examen se trouvent dans le tableau ci-dessous.

Année d'accident	2005	2006	2007	2008
Primes acquises (000 $)	1 200	1 400	1 500	2 000

En considérant que les sinistres sont complètement développés après 48 mois, calculez le ratio de perte utilisé par l'actuaire en supposant que celui-ci est identique pour toutes les années d'accident.

Méthode de Mack (1/2)

Le fichier `exercice-mack-1.csv` contient un triangle de développement pour cinq années et autant de périodes de développement.

À l'aide de la méthode de Mack, calculer

a) La réserve et l'erreur quadratique moyenne pour toutes les années d'accident.
b) Les intervalles de confiance sous l'hypothèse normale.
c) Les intervalles des confiance sous l'hypothèse log-normale.

Méthode de Mack (2/2)

Le fichier `exercice-mack-2.csv` contient un triangle de développement pour les années 2000 à 2013, inclusivement et pour quatorze périodes de développement.

Effectuer les calculs suivants à l'aide de la méthode de Mack.

a) Déterminer les provisions pour toutes les années d'accident.
b) Déterminer les erreurs quadratiques moyennes des montants de provisions pour toutes les années d'accident.
c) En supposant une distribution log-normale pour les provisions, calculer les intervalles de confiance à 90 % pour toutes les années d'accident pour les montants de provisions estimés.
d) Déterminer le montant total de la provision.
e) Déterminer l'erreur quadratique moyenne du montant total de la provision.

Travail pratique

Atelier 1

Trois questions auxquelles vous devriez répondre.

1. Comment utiliser les données fournies ?
2. Comment adapter les concepts de tarification bayésienne à notre contexte ?
3. Comment mesurer la qualité de notre modèle ?

Atelier 2

1. Utiliser un modèle de crédibilité est une contrainte
2. Transposer les données n’est pas une bonne idée
3. Construire sur votre modèle bayésien (si possible)
4. Rapport d’étape : on se concentre sur la seconde étape
5. Critères de correction

Bibliographie

Bornhuetter, R. L. et R. E. Ferguson. 1972, «The actuary and IBNR», *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 59, p. 181–195.

Bühlmann, H. 1967, «Experience rating and credibility», *ASTIN Bulletin*, vol. 4, p. 199–207.

Bühlmann, H. 1969, «Experience rating and credibility», *ASTIN Bulletin*, vol. 5, p. 157–165.

Bühlmann, H. et E. Straub. 1970, « Glaubgwürdigkeit für Schadensätze », *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, vol. 70, p. 111–133.

Gesmann, M., D. Murphy, W. Zhang, A. Carrato, M. Wüthrich et F. Concina. 2017, *ChainLadder: Statistical Methods and Models for Claims Reserving in General Insurance*. URL `https://CRAN.R-project.org/package=ChainLadder`, R package version 0.2.5.

Goel, P. K. 1982, «On implications of credible means being exact bayesian», *Scandinavian Actuarial Journal*, p. 41–46.

Jewell, W. S. 1974, «Credible means are exact bayesian for exponential families», *ASTIN Bulletin*, vol. 8, p. 77–90.

Mack, T. 1993, «Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates», *ASTIN Bulletin*, vol. 23, nº 2, p. 213–225.

Mowbray, A. H. 1914, «How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure premium?», *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 1, p. 25–30.

Whitney, A. W. 1918, «The theory of experience rating», *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 4, p. 275–293.

Wüthrich, M. V. et M. Merz. 2008, *Stochastic claims reserving methods in insurance*, Wiley, ISBN 978-0-4707234-6-3.

Ce document a été produit par le système de mise en page XƎLaTeX avec la classe **beamer** et le thème Metropolis. Les titres et le texte sont composées en Fira Sans, les mathématiques en Arev Math et le code informatique en Fira Mono. Les icônes proviennent de la police Font Awesome. Les graphiques ont été réalisés avec R.