4 | Suites et séries

Dans les chapitres précédents, on s'est intéressé au calcul infinitésimal. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux suites et séries. On a utilisé les séries infinies dans le développement de Taylor (§2.7.4) et dans la somme de Riemann (§3.1.1). C'est un outil mathématique particulièrement important dans la finance. Dans ce chapitre, on s'intéresse à calculer leur valeur, et déterminer leur convergence.

4.1 | Suites

Définition 4.1.1 : Suites infinies

Une suite est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des entiers positifs. La suite peut être définie par le $n^{\text{ième}}$ terme a_n ou en listant les termes $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. L'entier n est l'index de a_n.

Une suite infinie est une fonction dont le domaine est l'ensemble des entiers positifs. Les notations suivantes sont équivalantes :

$$\{a_n\}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n\geq 1}.$$

Certaines suites sont récursives, c.-à-d. que le terme a_{n+1} dépend du terme a_n.

Exemple 4.1.1 : Trouver le $20^{\text{ième}}$ terme de la suite $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n \cdot n$.

Définition 4.1.2 : Convergences et divergence de suites

La suite a_n converge vers le numéro L si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $N > 0$ tel que

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{quand } n > N.$$

Quand un tel nombre L n'existe pas, on dit que la suite n'a pas de limite ou qu'elle diverge.

Si $\{a_n\}$ converge à L, on écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ou $a_n \to L$ et on appelle L la limite de la suite.

La suite $\{a_n\}$ diverge à l'infini si pour tout numéro M il existe un entier positif N tel que pour tout $n > M$, alors $a_n > M$. Si cette condition tient, on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ ou } a_n \to \infty.$$

De manière similaire, la suite $\{a_n\}$ diverge à moins l'infini si pour tout numéro m il existe un entier positif N tel que pour tout $n > m$, alors $a_n < m$. Si cette condition tient, on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ ou } a_n \to -\infty.$$

Exemple 4.1.2 : Montrer que $\lim_{n\to\infty} 1 + \left(-\frac{1}{1.2}\right)^n = 1.$

Soit $\varepsilon > 0$. On doit montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout n,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left|1 + \left(-\frac{1}{1.2}\right)^n - 1\right| < \varepsilon.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left|1+\left(-\frac{1}{1.2}\right)^n-1\right| &< \varepsilon\\
\left|\left(-\frac{1}{1.2}\right)^n\right| &< \varepsilon\\
\left|\frac{1}{1.2}\right|^n &< \varepsilon\\
n\ln\left(\frac{1}{1.2}\right) &< \ln\varepsilon\\
-n\ln(1.2) &< \ln\varepsilon\\
n &> -\frac{\ln\varepsilon}{\ln 1.2}.
\end{aligned}$$

Si N est un entier positif plus grand que $-\frac{\ln\varepsilon}{\ln 1.2}$, alors l'implication tient pour $n > N$. Pour $\varepsilon = 0.1$, on a $N = 12.63$ et on observe

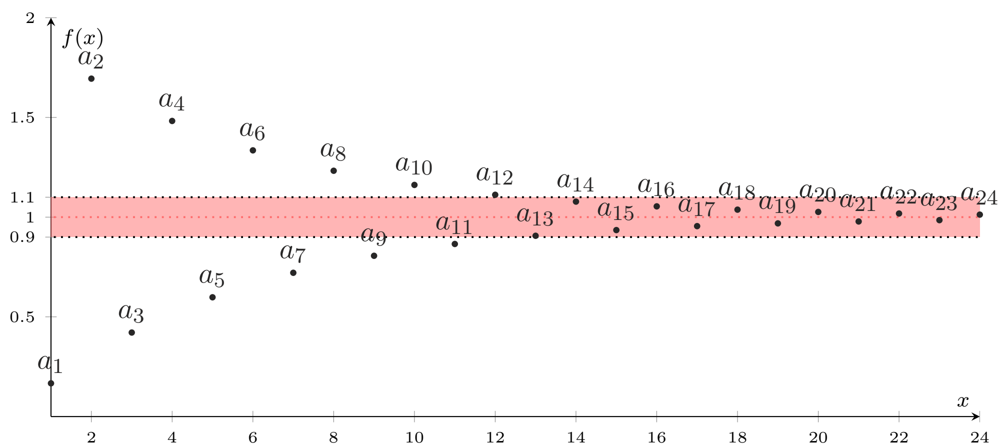


Tableau 4.1 : Règles de suites

Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$, des suites de nombres réels, et soient A et B des nombres réels. Alors, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, on a

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(kb_n) = kB$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, B \neq 0$

Théorème 4.1.3 : Théorème du sandwich pour les suites

Soient $\{a_n\}, \{b_n\}$ et $\{c_n\}$, des suites de nombres réels. Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout n plus grand qu'un index N, et si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Corrolaire 4.1.4

Si $|b_n| \leq c_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Théorème 4.1.5 : Fonctions continues et suites

Soit $\{a_n\}$, une suite de nombres réels et $a_n \to L$. Alors, si f est une fonction continue à L et définie pour toute la suite a_n, alors $f(a_n) \to f(L)$.

Théorème 4.1.6

Soit f, une fonction définie pour tout $x \geq n_0$ et soit $\{a_n\}$, une suite de nombres réels tel que $a_n = f(n)$ pour $n \geq n_0$. Alors,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Le théorème 4.1.6 nous permet de faire le lien entre une fonction, et on peut utiliser la règle de l'Hopital.

Tableau 4.2 : Limites usuelles

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (x > 0)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \quad |x| < 1$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Fourni à l'examen

Définition 4.1.7 : Suite bornée

Une suite $\{a_n\}$ est bornée s'il existe des numéros m et M tel que

$$m \leq a_n \leq M \;\forall\; n.$$

Définition 4.1.8 : Suite monotone

- Une suite $\{a_n\}$ est monotone croissante si $a_{n+1} \geq a_n \; \forall \, n$;
- une suite $\{a_n\}$ est strictement monotone croissante si $a_{n+1} > a_n \; \forall \, n$;
- une suite $\{a_n\}$ est monotone décroissante si $a_{n+1} \leq a_n \; \forall \, n$;
- une suite $\{a_n\}$ est strictement monotone décroissante si $a_{n+1} < a_n \; \forall \, n$.

Théorème 4.1.9

Toute suite monotone et bornée est convergente.

4.2 | Séries

Définition 4.2.1 : Séries infinies

Une série partielle est une expression de la forme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. Il s'agit de la somme partielle d'une suite $\{a_n\}$.

Une série infinie est une expression de la forme $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots$. Il s'agit de la somme de la suite infinie $\{a_n\}$.

Remarque 4.2.2

$\{s_n\}$ est une suite et $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

4.2.1 | La série arithmétique

Le tableau 3.2 présentait des sommes remarquables, dont la somme arithmétique. Une preuve élégante de $s_n = \sum_{k=1}^{n} k$ séries est la suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
s_n & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\
s_n & = & n & + & n-1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2s_n & = & (n+1) & + & (n-1+2) & + & \ldots & + & (2+n-1) & + & (1+n) \\
 & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

Chaque terme en parenthèse est égal à $n+1$ et il y a n termes. Alors, on a

$$\begin{aligned} 2s_n &= n \cdot (n+1) \\ s_n &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

4.2.2 | Les séries géométriques

Les séries géométriques sont de la forme

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{n-1},$$

où a et r sont des réels et $a \neq 0$. La $n^{\text{ième}}$ somme partielle est $s_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$.

Afin de trouver la série partielle, on fixe $a = 1$, sans perte de généralité. On a

$$s_n = r^0 + r^1 + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}.$$

De plus,

$$r \cdot s_n = r \cdot r^0 + r \cdot r^1 + r \cdot r^2 + \cdots + r \cdot r^{n-2} + r \cdot r^{n-1} = r^1 + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n.$$

Alors, $s_n - rs_n$ est

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} s_n & = & 1 & + & r^1 & + & r^2 & + & \ldots & + & r^{n-2} & + & r^{n-1} & & \\ r \cdot s_n & = & & & r^1 & + & r^2 & + & & \ldots & r^{n-2} & + & r^{n-1} & + & r^n \\ \hline s_n - rs_n & = & 1 & + & r^1 - r^1 & + & r^2 - r^2 & + & \ldots & + & r^{n-2} - r^{n-2} & + & r^{n-1} - r^{n-1} & - & r^n \\ & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & 0 & - & r^n \\ & = & 1 & & & & & & & & & & & - & r^n \end{array}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} s_n - rs_n &= 1 - r^n \\ s_n(1-r) &= 1 - r^n \\ s_n &= \frac{1-r^n}{1-r}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| \leq 1 \qquad (4.1)}$$

La série de Riemann (p-series)

La série de Riemann est de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Dans le livre, elle est nommée *p-series*. Cette série converge si $p > 1$ et diverge pour $0 \leq p \leq 1$. On peut prouver leur convergence ou divergence avec le test de l'intégrale, présenté dans §4.3.2. Le cas $p = 1$ correspond à la série harmonique et elle diverge.

Les séries téléscopiques

Les séries téléscopies sont des séries où les termes consécutifs d'une suite s'annulent, alors il est parfois possible de calculer leur limite.

Exemple 4.2.1 : Étudier la série générée par la suite $\{a_n\} = \frac{1}{n(n+1)}$.

On remarque premièrement que le terme $\frac{1}{n(n+1)}$ se décompose en fractions partielles $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Alors,

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+1}\right) \\
&\qquad + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\
&\qquad + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) \\
&\qquad + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

De plus,
$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

4.2.3 | Techniques de sommation

Ajouter ou retirer des termes

Parfois, les séries ne sont pas dans la forme (4.1). Ainsi, on peut soit additionnner / retirer des termes ou changer l'indice de sommation.

Un glissement d'indice s'applique comme suit : pour augmenter la valeur de départ par $j \in \mathbb{N}$, on remplace la fonction à sommer par $k - j$:

$$\sum_{k=i}^{n} a_k = \sum_{k=i+j}^{n+j} a_{k-j}.$$

Il est toujours judicieux de vérifier le glissement d'indice :

Exemple 4.2.2 : Valider que $\sum_{k=4}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{4} a_{k+3}$.

Exemple 4.2.3 : Évaluer $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{5^k}$.

Combiner des méthodes

Tableau 4.3 : Règles de suites

Soient $\sum a_n = A$ et $\sum b_n = B$, des suites convergentes. Alors,

1. $\sum(a_n + b_n) = A + B$
2. $\sum(a_n - b_n) = A - B$
3. $\sum(kb_n) = kB$

Corrolaire 4.2.3

- *Si* $\sum a_n$ *diverge, alors* $\sum k a_n$ *diverge aussi.*
- *Si* $\sum a_n$ *converge et* $\sum b_n$ *diverge, alors* $\sum (a_n \pm b_n)$ *diverge.*

Exemple 4.2.4 : Trouver $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!}$**.**

Exemple 4.2.5 : Évaluer $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ si $f(k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}, & k \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{\frac{k}{2}+1}(2\pi)^k}{k!}, & k \text{ est pair} \end{cases}$.

On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \sum_{k=0,2,4,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}+1}(2\pi)^k}{k!} + \sum_{k=1,3,5,\ldots} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}.$$

On évalue chaque somme séparément. À chaque étape, on tente de reformuler le sommand (l'opérande) de la somme telle que l'indice de sommation soit de zéro à l'infini. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0,2,4,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}+1}(2\pi)^k}{k!} &= \sum_{k=0,1,2,\ldots} \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{(2k)!} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2\pi)^{2k}}{(2k)!} \qquad (4.3) \\ &= -\cos(2\pi) = -1, \end{aligned}$$

car (4.3) est le développement de Taylor de $\cos(x)$ évalué au point $x = 2\pi$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,3,5,\ldots} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1} &= \sum_{k=0,2,4,\ldots} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0,2,4,\ldots} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0,1,2,\ldots} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0,1,2,\ldots} \left(\frac{1}{(\sqrt{2})^2}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} f(k) &= \sum_{k=0,2,4,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}+1}(2\pi)^k}{k!} + \sum_{k=1,3,5,\ldots} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1} \\ &= -1+1=0.\end{aligned}$$

4.3 | Tests de convergence

4.3.1 | Le test du $n^{\text{ième}}$ terme

On s'intéresse maintenant au premier test de convergence pour une série. On rappelle que $S = \lim_{n\to\infty} s_n$. Alors, si la série converge, s_n est proche de s_{n-1} pour n grand. De plus, on a $a_n = s_n - s_{n-1}$. On conclut que a_n doit être de plus en plus petit pour que la série converge.

Théorème 4.3.1

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Corrolaire 4.3.2 : Le test de divergence du $n^{\text{ième}}$ terme

La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ou n'existe pas.

N'est pas égal

Remarque 4.3.3

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors le test n'aboutit à aucune conclusion.

Corrolaire 4.3.4

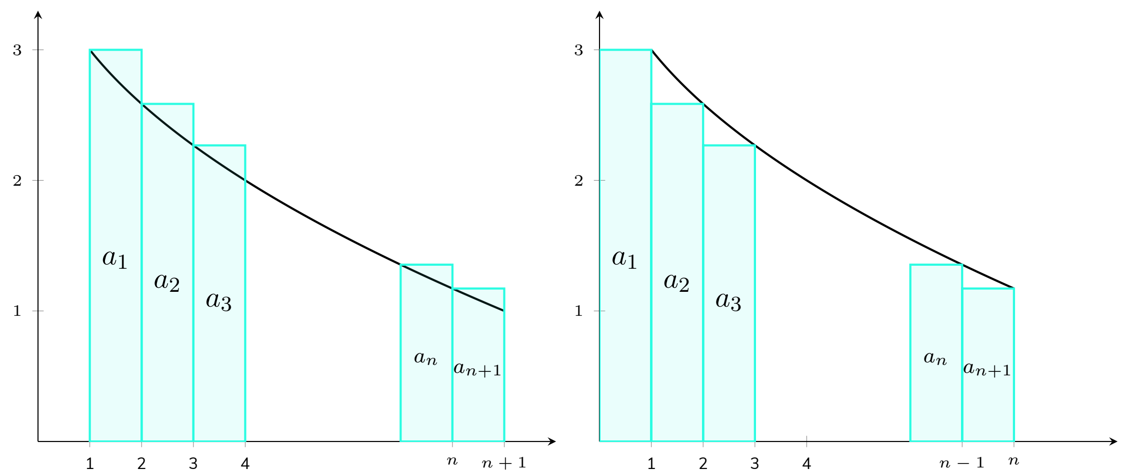
Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termes non-négatifs converge si et seulement si ses sommes partielles sont bornées par le haut.

4.3.2 | Le test de l'intégrale

Théorème 4.3.5 : Le test de l'intégrale

Si $a_n = f(n)$ où f est positive, continue et strictement décroissante pour $n > N$, alors la série $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ est convergente si et seulement si $\int_N^{\infty} f(x)dx$ est convergente.

L'idée de la preuve vient des graphiques suivants.



Dans le graphique de gauche, la série est plus élevée que l'intégrale entre 1 et $n+1$. Dans le graphique de droite, on a simplement appliqué une translation de vers la gauche. La série est plus petite que le premier terme a_1 et l'intégrale entre 1 et n. On a l'inégalité suivante :

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx.$$

Alors, si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, l'inégalité de droite mentionne que la série converge aussi. Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, l'inégalité de gauche mentionne que la série diverge aussi.

Exemple 4.3.1 : Trouver pour quelles valeurs de $p > 0$ la série de Riemann converge.

4.3.3 | Tests de comparaison directs

Théorème 4.3.6 : Le test de comparaison direct

Soient $\sum a_n, \sum c_n$ et $\sum d_n$, des séries avec termes non négatifs. Supposons que pour un entier N, $d_n \leq a_n \leq c_n \quad \forall \quad n > N$.

1. Si $\sum c_n$ converge, alors a_n converge aussi.
2. Si $\sum d_n$ diverge, alors a_n digerge aussi.

Théorème 4.3.7 : Le test de comparaison limite

Soient $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour $n > N$.

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ divergent ou convergent en même temps.
2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ et $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ et $\sum b_n$ diverge, alors $\sum a_n$ diverge.

Exemple 4.3.2 : Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$.

Théorème 4.3.8 : Le test d'Alembert (Ratio test)

Soit $\sum a_n$ tel que $a_n \geq 0 \; \forall \; n$ et supposons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

1. Si $L < 1$, alors $\sum a_n$ converge.
2. Si $L > 1$, alors $\sum a_n$ diverge.
3. Si $L = 1$, le test d'aboutit à aucune conclusion.

Mettre la limite en valeur absolue

Théorème 4.3.9 : Le test de Cauchy (Root test)

Soit $\sum a_n$ tel que $a_n \geq 0\ \forall\ n$ et supposons que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

1. Si $L < 1$, alors $\sum a_n$ converge.
2. Si $L > 1$, alors $\sum a_n$ diverge.
3. Si $L = 1$, le test d'aboutit à aucune conclusion.

Exemple 4.3.3 : Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$.

Soient $a_n = \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$ et $b_n = \frac{1}{2^n}$. De plus,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)} \frac{2^n}{1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n}{n^2+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \frac{3+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{3+0}{1+0} = 3.
\end{aligned}$$

Selon le test de comparaison limite, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent ou divergent en même temps. Alors, vu que $\sum b_n$ est une série géométrique convergente, $\sum a_n$ converge aussi.

Soit $a_n = \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$. De plus,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)^2+5(n+1)}{2^{n+1}((n+1)^2+1)} \frac{2^n(n^2+1)}{3n^2+5n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)^2+5(n+1)}{2((n+1)^2+1)} \frac{n^2+1}{3n^2+5n} \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)^2+5(n+1)}{(n+1)^2+1}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+5n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} \frac{3+\frac{5}{n+1}}{1+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{5}{n}}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3+0}{1+0} \cdot \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Alors, par le test d'Alembert, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ et la série converge.

Exemple 4.3.4 : Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Exemple 4.3.5 : Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, où cette série converge.

4.3.4 | Test de séries alternantes

Théorème 4.3.10 : Le test de convergence absolue

Une série $\sum a_n$ est absolument convergente si la série $\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \ldots$ est convergente.

Si une série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Exemple 4.3.6 : Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Théorème 4.3.11 : Critère de convergence de Leibniz (Alternating Series T

Une série de type

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots,$$

où tous les a_n sont positifs ou tous les a_n sont négatifs, est appelée série alternante.

La série converge si les critères de Leinbitz sont satisfaits :

1. *$|a_n|$ est décroissante ;*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.