ACT-2011
Hiver 2021

Chapitre 10

Introduction au modèle binomial d'évaluation des options

Thomas Landry, M.Sc., ASA, AICA
École d'actuariat, Université Laval

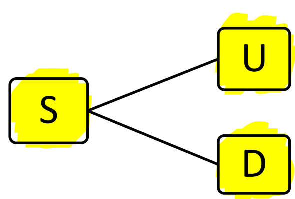
Préface

Le modèle binomial est parfois appelé modèle « Cox-Ross-Rubinstein » et sert d'approximation au modèle de Black-Scholes qui se voudra être une forme d'équivalent continu de l'arbre binomial avec une « infinité de branches ».

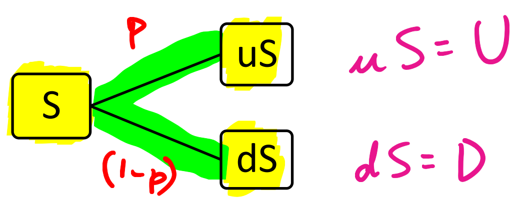
10.1. Arbre binomial à une période

10.1.1. Mesure d'évaluation et environnement neutre au risque

Pour commencer, on présume qu'un actif qui ne verse pas de dividende (par défaut, une action ou un titre financier quelconque) peut évoluer de deux façons par période, soit en augmentant à une valeur supérieure « U » ou en diminuant à une valeur inférieur « D ».



Dans les faits, pour établir un modèle qui s'appliquera pour l'évolution de n'importe quel titre de n'importe quel ordre de grandeur, on réécrira :



Avec $d < u$. On cherchera à établir un environnement dit « ***neutre au risque*** ». Ceci implique d'utiliser un taux d'intérêt sans risque r_f tel qu'introduit dans les chapitres précédents et de présumer que ***l'actif S évoluera en moyenne à ce taux r_f***.

Si la probabilité que l'actif S s'accumule pour atteindre uS est de p, alors la probabilité associée à l'autre valeur potentielle dS sera de (1-p). Pour être dans un environnement dit « neutre au risque » on devra avoir que :

$$\frac{u\cancel{S} * p + d\cancel{S} * (1-p)}{\cancel{S}} = up + d(1-p) = 1 + r_f$$

$$\boxed{p = \frac{(1+r_f) - d}{u-d} = \frac{e^r - d}{u-d}}$$

La probabilité p est dite la probabilité « neutre au risque » que l'actif augmentera de prix par un facteur « u ». La probabilité que l'actif évolue avec un facteur « d » (souvent une diminution mais pas toujours puisque dans certains cas, d peut être supérieur à 1) sera de 1-p.

Remarque : on présume ici une échéance de 1 an, ou autrement dit, on suppose que les branches de l'arbre binomial sont de durée d'un an. Pour un cas plus général, on aurait :

$$p = \frac{(1+r_f)^T - d}{u-d} = \frac{e^{rT} - d}{u-d}$$

Le livre de référence et le manuel ASM utilisent la notation :

$$\boxed{p = \frac{(1+r_f)^h - d}{u-d} = \frac{e^{rh} - d}{u-d}}$$

… pour des périodes de longueurs h. On conservera cette notation pour la suite. Par défaut, sauf si mention contraire, h = 1.

À propos des mesures de probabilités « neutres au risque »

Les mesures des probabilités dites « neutres au risques », ou encore les modèles d'évaluation traités dans un environnement « neutre au risque » (parfois libellée « Q **») servent principalement à définir le prix de différents produits dérivés et/ou d'en définir la valeur à certains moments.** ***Elles représentent un concept mathématique mais ne définissent pas les « véritables » probabilités associées à certains évènements spécifiques.***

Remarques :

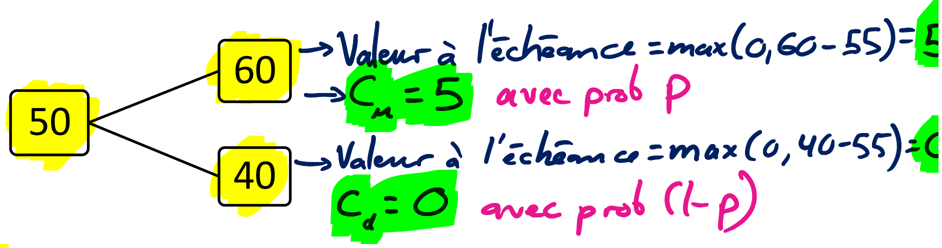
- On présume par défaut des périodes unitaires entre les mailles des branches.
- $d < e^{rh} < u$, autrement, il n'y aura pas de mesure neutre au risque possible

$0<p<1$

10.1.2. Implication pour des options

On attribuera des valeurs au modèle binomial pour illustrer un exemple sur l'évaluation d'options à partir des mesures neutres au risque pour ensuite généraliser la théorie et le modèle.

On prend comme exemple :



Ce qui revient à $u = 1.2$ et $d = 0.8$.

On présumera ici que la force d'intérêt sans risque est de 5% et h = 1. On a ainsi :

$$p = \frac{e^{rh} - d}{u - d} = \frac{e^{0,05} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 62.818\%$$

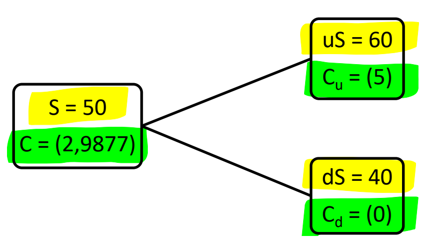
On définit ensuite une option d'achat avec prix d'exercice K = 55$ et échéance un an (période unitaire par défaut dans le modèle binomial). Deux options :

- L'action vaut 60$ (avec 62,818% de chance) après un an. La valeur à l'échéance de l'option d'achat est de C_u = 60 – 55 = 5$
- L'action vaut 40$ (avec 37,182% de chance) après un an. La valeur à l'échéance de l'option d'achat est de C_d = 0$ (l'option n'est pas exercée)

Ainsi, la valeur de l'option d'achat serait :

$$C(55,1) = (5\$ * \overbrace{62.818\%}^{p} + 0 * \overbrace{37.182\%}^{1-p})e^{-0.05} = 2.9877\$$$

Ainsi, on peut refaire l'arbre binomial avec la valeur du sous-jacent ET la valeur de l'option d'achat (entre parenthèses) :



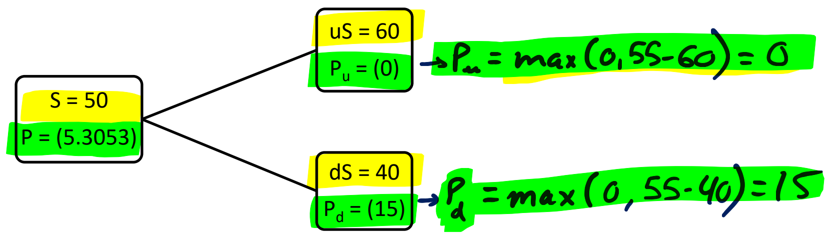
<u>Question</u> : qu'en est-il de la valeur d'une option de vente avec les mêmes caractéristiques ?

avec K = 55$

Solution : deux possibilités :

- L'action vaut 60$ (avec 62,818% de chance) après un an. La valeur à l'échéance de l'option est de 0$ (l'option n'est pas levée)
- L'action vaut 40$ (avec 37,182% de chance) après un an. La valeur à l'échéance de l'option est de 55 – 40 = 15$

$$P(55{,}1) = (0\$ * 62.818\% + 15 * 37.182\%)e^{-0.05} = 5.3053\$$$



Autre solution :

$$\underbrace{C(55,1)}_{2.9877} - P(55,1) = \underbrace{S_0}_{50} - \underbrace{Ke^{-r*1}}_{\substack{55e^{-0.05}\\ =52.3176}} \rightarrow P(55,1) = 5.3053\$$$

Remarque : l'équation de parité tient toujours dans un environnement dit neutre au risque

Pour un cas général, on aura que :

$$C(K,1) = (C_u * p + C_d * (1-p))e^{-r} = \left(C_u * \underbrace{\left(\frac{e^r - d}{u-d}\right)}_{p} + C_d * \underbrace{\left(\frac{u - e^r}{u-d}\right)}_{1-p}\right)e^{-r}$$

Ou encore pour un arbre de longueur/période h :

$$C(K,h) = (C_u * p + C_d * (1-p))e^{-rh} = \left(C_u * \left(\frac{e^{rh} - d}{u-d}\right) + C_d * \left(\frac{u - e^{rh}}{u-d}\right)\right)e^{-rh}$$

Avec C_u qui représente la valeur à l'échéance de la branche supérieure de l'arbre binomial et C_d qui représente la valeur à l'échéance de la branche inférieur de l'arbre binomial.

Remarque : la même formule est applicable également pour une option de vente, et les valeurs à l'échéance seront simplement différentes selon la branche (supérieure versus inférieure, u et d).

10.1.3. Réplication d'une option

Certains ouvrages présentent l'évaluation du prix d'une option en cherchant à répliquer une option d'achat en achetant/vendant une quantité du sous-jacent et en prêtant/empruntant au taux sans risque en même temps, tout comme on le faisait déjà dans des chapitres précédents. Cette méthode fonctionne également avec le modèle binomial. Bien que le résultat ait déjà été démontré, nous le représenterons de cette manière pour faire ressortir une mesure appelée le « delta » de l'option.

Stratégie pour répliquer une option d'achat (sans dividendes)

On aura donc :

- Achat de Δ actions
- Prêt/emprunt de B

Deux résultats possibles :

- Si S_T vaut U, alors la valeur à l'échéance sera de $\Delta U + Be^{rh}$
- Si S_T vaut D, alors la valeur à l'échéance sera de $\Delta D + Be^{rh}$

Comme le but est de répliquer les mêmes valeurs à l'échéance qu'on aurait eues avec l'option d'achat, on s'arrangera pour que :

- $\Delta U + Be^{rh} = C_u$
- $\Delta D + Be^{rh} = C_d$

On a donc deux équations et deux inconnues (Δ et B).

La solution à ce système d'équations est :

$$\boxed{\Delta = \frac{C_u - C_d}{U - D} = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)}}$$

$$\boxed{B = e^{-rh}\left(\frac{U * C_d - D * C_u}{U - D}\right) = e^{-rh}\left(\frac{u * C_d - d * C_u}{(u-d)}\right)}$$

<u>Rappel de la loi du prix unique</u> : deux portefeuilles et/ou stratégies d'investissement qui procurent la même valeur à l'échéance doivent avoir le même prix.

Ainsi, le prix du portefeuille pour répliquer l'option d'achat sera :

$$\boxed{Prix\ pour\ répliquer\ l'option = C = \Delta S + B}$$

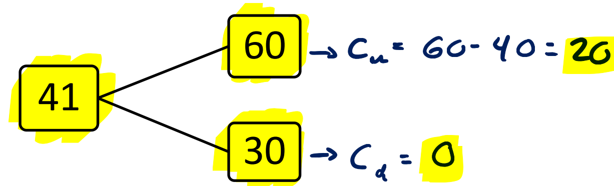
Ce portefeuille est appelé « portefeuille réplicatif » et **la quantité Δ s'appelle le delta de l'option**.

<u>Le delta représente non seulement le nombre d'actions à acheter (ou vendre) pour répliquer une option, mais il représente également la sensibilité du prix de l'option aux mouvements du prix de l'action (sous-jacent de l'option).</u>

Ainsi, pour une option d'achat tel qu'illustré dans cet exemple, on aura que $\Delta > 0$ et $B < 0$. L'inverse s'appliquera pour une option de vente.

Variable	Call	Put
Δ (delta)	> 0 (achat)	< 0 (vente découvert)
B (prêt/emprunt)	< 0 (emprunt)	> 0 (prêt)

<u>Exemple</u> : on a l'arbre suivant pour définir les prix potentiels d'une action dans un an.



On a une force d'intérêt sans risque r = 8% et on cherche à répliquer une option d'achat avec un prix d'exercice K = 40$.

<u>Solution</u> : $\Delta = \dfrac{C_u - C_d}{U - D} = \dfrac{20-0}{60-30} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ Achat de $\frac{2}{3}$ de S

$$B = e^{-rh}\left(\frac{U \cdot C_d - D \cdot C_u}{U - D}\right) = e^{-0,08}\left(\frac{60 \cdot 0 - 30 \cdot 20}{60 - 30}\right) = \underbrace{-18,46\$}_{\text{emprunt}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)41 - 18,46 = \text{coût initial} = C(K=40\$, T=1)$$

<u>10.1.4. Modèle binomial avec dividendes</u>

Au même titre que les ajustements qui étaient apportés aux formules de parité dans les chapitres précédents lorsqu'on rajoutait des dividendes payés en lien avec le sous-jacent, on aura :

$$\boxed{p = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}}$$

… avec δ qui représente le taux de dividende continu payé sur la période qui constitue l'arbre binomial (rappel : pour l'instant, on ne considère qu'une seule période). ***On suppose encore le réinvestissement des dividendes dans l'action par défaut***.

La logique est semblable à celle présentée dans le chapitre 5, i.e. que les dividendes ne sont pas payés avant l'exercice de l'option (si exercice il y a) et ceux-ci doivent donc être « enlevés » dans les calculs, d'où l'ajustement au taux sans risque dans la formule.

<u>Stratégie pour répliquer une option d'achat avec dividendes</u>

Pour répliquer une option d'achat en considérant maintenant les dividendes, on aura :

- Achat de Δ actions
- Prêt de B

Deux résultats possibles :

- Si S_T vaut U, alors la valeur à l'échéance sera de $\Delta e^{\delta h} U + Be^{rh}$
- Si S_T vaut D, alors la valeur à l'échéance sera de $\Delta e^{\delta h} D + Be^{rh}$

Comme le but est de répliquer les mêmes valeurs à l'échéance qu'on aurait eues avec l'option d'achat, on s'arrangera pour que :

- $\Delta e^{\delta h} U + Be^{rh} = C_u$
- $\Delta e^{\delta h} D + Be^{rh} = C_d$

On a donc encore deux équations et deux inconnues (Δ et B).

La solution à ce système d'équations est :

$$\Delta = \left(\frac{C_u - C_d}{U - D}\right) e^{-\delta h} = \left(\frac{C_u - C_d}{S(u - d)}\right) e^{-\delta h}$$

$$B = e^{-rh} \left(\frac{U * C_d - D * C_u}{U - D}\right) = e^{-rh} \left(\frac{u * C_d - d * C_u}{u - d}\right)$$

Le prix de réplication de l'option est encore défini avec la même formule :

$$Prix\ pour\ répliquer\ l'option = C = \Delta S + B$$

<u>Remarques</u> :

- Le delta s'ajuste en fonction des dividendes, mais pas le montant de prêt/emprunt B.
- On a maintenant comme contrainte $d < e^{(r-\delta)h} < u$

Si une option se transige à un prix différent de celui d'un portefeuille réplicatif, il y aura possibilité d'arbitrage.

10.1.5. Arbitrage d'une option

Règle générale :

- Si l'option est surévaluée, $\overbrace{\text{on la vend}}^{\text{court}}$ et on $\overbrace{\text{achète un portefeuille qui la réplique}}^{\text{long}}$ à coût moindre
- Si l'option est sous-évaluée, $\overbrace{\text{on l'achète}}^{\text{long}}$ et on $\overbrace{\text{vend un portefeuille qui la réplique}}^{\text{court}}$ à coût supérieur
- Dans les deux cas, les valeurs à l'échéance s'annuleront
- Dans les deux cas, on aura un coût initial négatif (on reçoit de l'argent), ce qui constituera ultimement un profit (puisque les valeurs à l'échéance sont globalement nulles)
- Dans les deux cas, il y aura arbitrage, et donc un profit certain, en théorie.
- En achetant ou en vendant un portefeuille réplicatif, on aura un Δ et un B de signes potentiellement négatifs. Ainsi :

  - Si $\Delta > 0$ (généralement avec une option d'achat), alors :

    - Si l'option est surévaluée, le fait d'acheter un portefeuille réplicatif impliquera d'acheter des actions (acheter $\Delta > 0 =$ acheter)
    - Si l'option est sous-évaluée, le fait de vendre un portefeuille réplicatif impliquera de vendre des actions (vendre $\Delta > 0 =$ vendre)

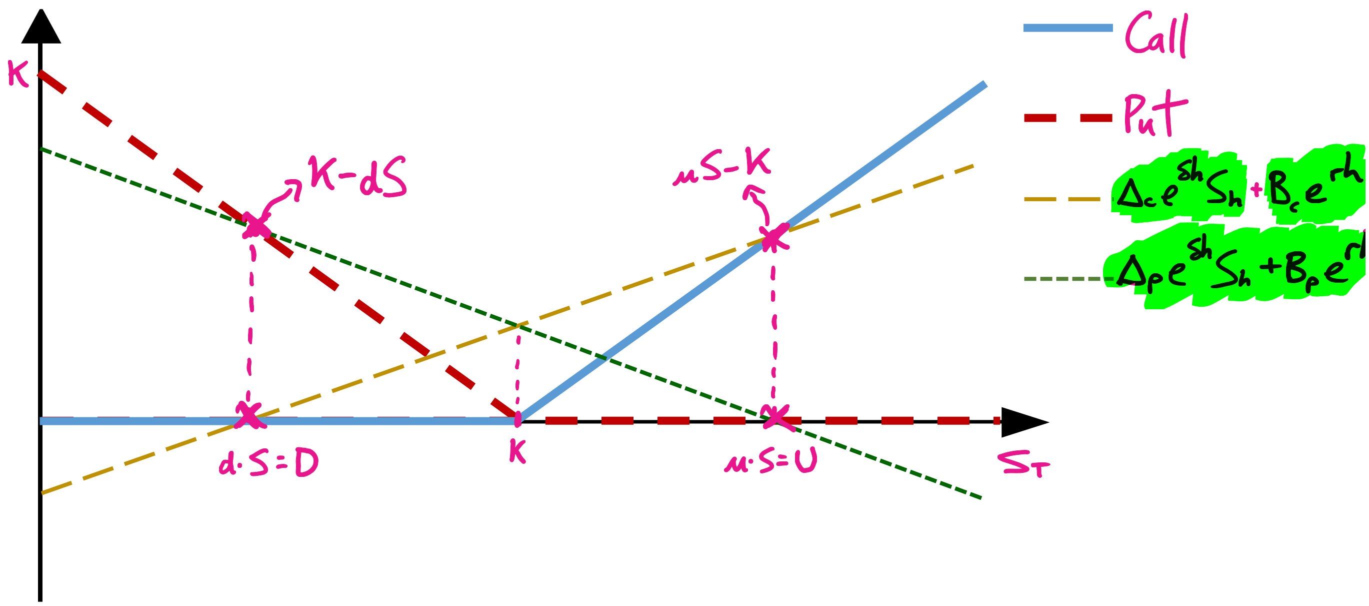
  - Si $\Delta < 0$ (généralement avec une option de vente), alors :

    - Si l'option est surévaluée, le fait d'acheter un portefeuille réplicatif impliquera de vendre des actions (acheter $\Delta < 0 =$ vendre)
    - Si l'option est sous-évaluée, le fait de vente un portefeuille réplicatif impliquera d'acheter des actions (vendre $\Delta < 0 =$ acheter)

  - Une logique semblable s'applique avec le B, soit :

    - Un $B\ < 0$ implique un emprunt. Ainsi, « acheter un $B\ < 0$ » impliquera un emprunt, et « vendre un $B\ < 0$ » impliquera un prêt
    - Un $B > 0$ implique un prêt. Ainsi, « acheter un $B > 0$ » impliquera un prêt, et « vendre un $B > 0$ » impliquera un emprunt

Interprétation graphique du portefeuille de réplication



10.2. Construction d’un arbre binomial

10.2.1. Rendement composés continument

On définit maintenant les paramètres des branches supérieure et inférieure comme suit :

$$\boxed{u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}}}$$

$$\boxed{d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}}$$

$\pm \sigma\sqrt{h}$ pour $\pm$ un écart type avec un processus qui rappelle le mvt brownien...!

Avec σ le paramètre de volatilité annualisée et h la longueur d’une période (longueur d’une branche).

On définit :

$$r_{t,t+h} = ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right) \leftrightarrow S_{t+h} = S_t e^{r_{t,t+h}}$$

Ainsi, pris sous forme logarithmique, on aura que les rendements sont additifs :

$$r_{t,t+nh} = \sum_{i=0}^{n-1} r_{t+ih,t+(i+1)h} \leftrightarrow S_{t+h} = S_t e^{\left(\sum_{i=0}^{n-1} r_{t+ih,t+(i+1)h}\right)}$$

Remarques :

- Les propriétés des logarithmes simplifient les calculs, et c'est pourquoi on privilégiera leur utilisation avec des modèles d'arbres binomiaux.
- $r_{t,t+h}$ n'est pas nécessairement sur base annuelle, mais parfois, on aura que h = 1 pour simplifier

10.2.2. Volatilité

Sous le forme actuelle de l'arbre binomial tel que défini en 10.2.1, le paramètre σ représente l'écart-type du rendement composé continument. Par défaut, σ représente la volatilité annualisée, et ainsi, on aura que $\sigma^2 h$ est la variance pour le rendement continu sur une période de longueur h, et ainsi, $\sigma\sqrt{h}$ représente l'écart-type pour une période de longueur h.

Remarque : on note également $\sigma\sqrt{h} = \sigma_h$

En reprenant la notation des chapitres précédents pour le prix *forward,* on définit maintenant :

$$F_{t,t+h} = S_t e^{(r-\delta)h}$$

Et ainsi :

$$\boxed{uS_t = \underbrace{F_{t,t+h}}_{S_t e^{(r-\delta)h}} e^{+\sigma\sqrt{h}}}$$

$$\boxed{dS_t = F_{t,t+h} e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

Modèle binomial "à terme"

Ceci explique pourquoi on parle parfois d'un « arbre *forward* » selon cette paramétrisation.

Pour estimer la volatilité si celle-ci est inconnue, on peut reprendre les formules ci-haut en présumant qu'on connaisse les valeurs supérieure et inférieure dans l'arbre binomial et on trouve :

$$\frac{u}{d} = e^{2\sigma\sqrt{h}} \leftrightarrow \sigma = \frac{ln\left(\frac{u}{d}\right)}{2h}$$

En réalité, il peut être complexe d'estimer la volatilité dans un tel modèle. Si on regarde les données du passé pour estimer le paramètre σ, on parlera de « volatilité historique ».

Remarque : pour estimer la volatilité historique, on exclura généralement les dividendes puisque ceux-ci sont réputés être anticipés (voire certains) et donc très peu volatiles. Le fait de les inclure peut même biaiser l'approximation de la volatilité et incorporer une forme de saisonnalité dans les séries de données (concept à revoir dans un cours de séries chronologiques).

Ainsi, on regardera l'évolution de la valeur d'un sous-jacent en isolant les rendements $r_{t,t+h} = ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)$. L'écart-type de la série des $r_{t,t+h}$ dans l'historique de référence utilisé sera notre estimateur de $\sigma\sqrt{h}$, et ainsi :

$$\frac{Stdev\left(ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)\right)}{\sqrt{h}} = \hat{\sigma}$$

<u>Remarque</u> : on devrait calculer l'écart-type sans biais, soit $\sqrt{S^2}$ qui implique un « n-1 » au dénominateur par défaut. Voir exemple du S&P 500, tableau 10.1 p.304 *DM*.

<u>Exemple</u> : vous avez l'historique de rendements (logarithmiques) hebdomadaires suivants :

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$r_{t,t+h}$	-3%	6%	-5%	1%	-4%	-1%	5%	3%

On regarde un modèle d'arbre binomial avec les informations suivantes :

- $h = \frac{1}{2}$ (pas nécessairement la même fréquence que les données historiques)
- $r = 8\%$ et $\delta = 2\%$
- $S_0 = 41$
- $u = 1.273962$ $(U = uS_0 = 52.232458)$
- $d = 0.833491$ $(D = dS_0 = 34.173143)$

Trouvez le prix d'une option d'achat avec prix d'exercice de 40$ et celui d'une option de vente avec prix d'exercice de 45$.

<u>Solution</u> : $Var[r_{t,t+h}] = \overbrace{0,00173571}^{\sum(x_i-\bar{x})^2/(n-1)} \Rightarrow \sqrt{52 \cdot Var[r_{t,t+h}]} \stackrel{\sim}{=} 0,3$

$uS = 52,23 \rightarrow C_u = 52,23 - 40 = 12,23$

$dS = 34,17 \rightarrow C_d = max(0, 34,17 - 40) = 0$

$C \begin{cases} C_u = 12,23 \\ C_d = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow C = e^{-0,08/2} \cdot (p C_u + \underbrace{(1-p) C_d}_{0}) = \underline{5,26\$}$

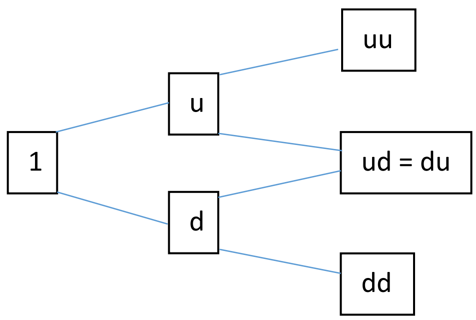
Option de vente à faire en exercice.

10.3. Modèle d’arbre binomial avec plusieurs périodes

On définit :

- n = nombre de périodes
- T = échéance (en années)
- $h = \frac{T}{n}$ = longueur par période

Pour un exemple unitaire (valeur initiale du sous-jacent de 1$) avec n = 2, T = 2 et h = 1, on aura :



<u>Remarque</u> : l’arbre est <u>*recombinant*</u>. Après n périodes, il y aura n+1 nœuds (versus 2^n nœuds sans recombinaisons).

Pour évaluer la valeur d’une option, on fonctionnera comme suit :

1. Bâtir l’arbre des prix de l’action de la gauche vers la droite
2. Bâtir l’arbre avec la valeur de l’option de la droite vers la gauche (en sens inverse), nœud par nœud

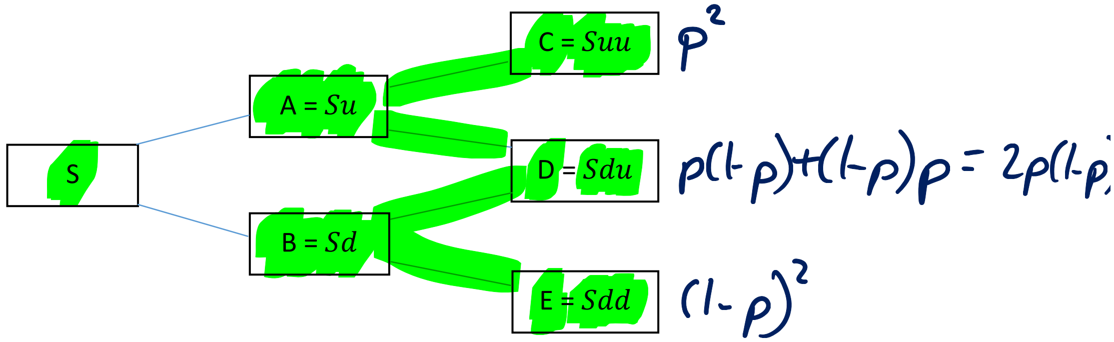
<u>Remarques</u> :

- L’évaluation est toujours « neutre au risque » pour tout l’arbre de décision (chaque branche, chaque nœud).
- Pour chaque nœud, on peut réévaluer la valeur de l’option. Ainsi, pour chaque nœud, on peut réévaluer un nouveau portefeuille réplicatif avec un nouveau Δ et un nouveau B.
- Les probabilités « neutres au risque » telles que décrites précédemment ne changent pas. Cependant, le portefeuille réplicatif évoluera dans l’arbre.

<u>Exemple avec arbre à deux périodes</u>

<u>Lecture complémentaire</u> : p.306-308 DM

On reprend l’exemple de la page 306 (figure 10.4) pour illustrer l’évaluation d’une option d’achat avec les caractéristiques suivantes :



On a T = 2 ans, n = 2, h = 1 an, aucun dividende ($\delta = 0$), r = 8%, $\sigma = 30\%$ et S = 41 000$.

<u>Calcul de la valeur du sous-jacent aux différents nœuds et de la probabilité neutre au risque</u>

On déduit que :

$$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} = e^{0.08+0.3} = e^{0.38}$$

$$d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} = e^{0.08-0.3} = e^{-0.22}$$

Et ainsi :

$$p = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} = \frac{e^{0.08} - e^{-0.22}}{e^{0.38} - e^{-0.22}} = 42.5557\%$$

Calcul :

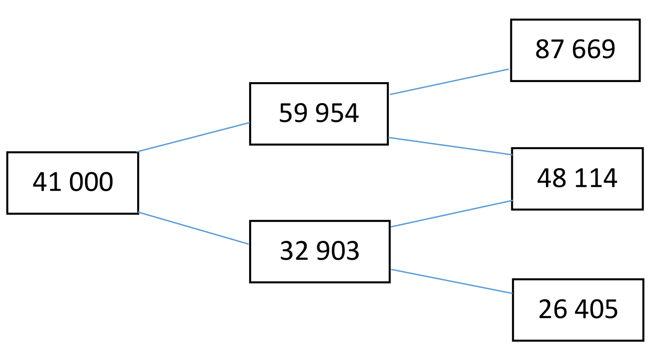
$$A = Su = 41\,000 * e^{0.38} = 59\,954$$

$$B = Sd = 41\,000 * e^{-0.22} = 32\,903$$

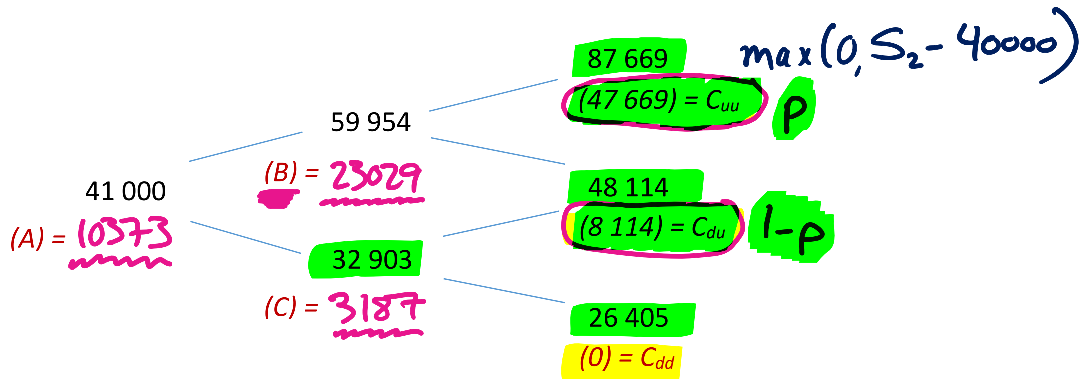
$$C = Suu = (Su)u = 59\,954\, e^{0.38} = 87\,669$$

$$D = Sud = (Su)d = Sdu(Sd)u = 59\,954\, e^{-0.22} = 32\,903 e^{0.38} = 48\,114$$

$$E = Sdd = (Sd)d = 32\,903\, e^{-0.22} = 26\,405$$



On cherche le prix d'une option d'achat d'échéance 2 ans avec prix d'exercice K = 40 000$. On réécrit l'arbre avec la valeur à l'échéance de l'option (en italique) selon la branche qui se matérialisera :



Rappel : $valeur\ à\ l'échéance\ d'un\ Call = \max(0, S_T - K)$ et ici, K = 40 000.

Question : comment calculer la valeur de l'option aux nœuds A, B et C ?

Réponse : chaque nœud devrait être la valeur actualisée de l'espérance des valeurs à l'échéance futures potentielles dans un environnement neutre au risque !

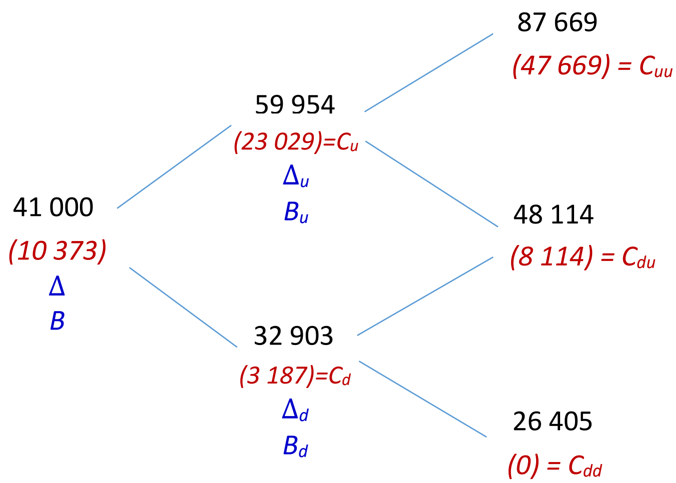
Dans un environnement neutre au risque, on a que $p = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} = \frac{e^{0.08} - e^{-0.22}}{e^{0.38} - e^{-0.22}} = 42.5557\%.$
Ainsi :

$$(B) = [pC_{uu} + (1-p)C_{du}]e^{-r} = [47\,669 * p + 8\,114 * (1-p)]e^{-0.08} = 23\,029 = C_u$$
$$(C) = [pC_{du} + (1-p)C_{dd}]e^{-r} = [8\,114 * p + 0 * (1-p)]e^{-0.08} = 3\,187 = C_d$$

Maintenant qu'on connait (B) et (C), on peut refaire le même calcul avec (A) :

$$(A) = [pC_u + (1-p)C_d]e^{-r} = [23\,029 * p + 3\,187 * (1-p)]e^{-0.08} = 10\,373 = C(40\,000{,}2)$$

S'il était possible de créer un portefeuille réplicatif avec un arbre sur une période, il sera encore possible de le faire avec un arbre sur plusieurs périodes. Ainsi :



$$\Delta = \left(\frac{C_u - C_d}{U - D}\right) e^{-\delta h} = \left(\frac{23\,029 - 3\,187}{59\,954 - 32\,903}\right) = 0.734$$

$$B = e^{-rh}\left(\frac{U * C_d - D * C_u}{U - D}\right) = e^{-0.08}\left(\frac{59\,954 * 3\,187 - 32\,903 * 23\,029}{59\,954 - 32\,903}\right) = -19\,337\$$$

$$\Delta_u = \left(\frac{C_{uu} - C_{ud}}{UU - UD}\right) e^{-\delta h} = \left(\frac{47\,669 - 8\,114}{87\,669 - 48\,114}\right) = 1.000$$

$$B_u = e^{-rh}\left(\frac{UU * C_{ud} - UD * C_{uu}}{UU - UD}\right) = e^{-0.08}\left(\frac{87\,669 * 8\,114 - 48\,114 * 47\,669}{87\,669 - 48\,114}\right) = -36\,925\$$$

À vérifier en exercice que $\Delta_d = 0.374$ et que $B_d = -9\,111\$$.

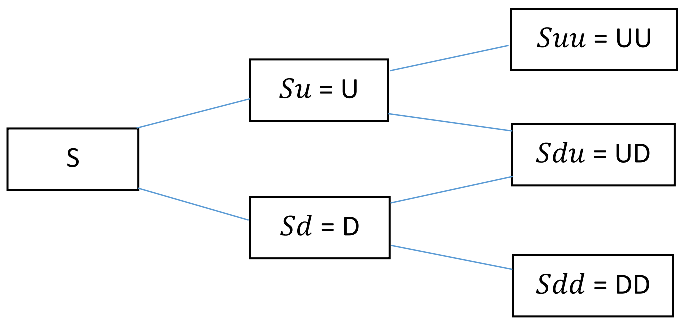
Remarques :

- Quand on avance dans le temps et qu'on passe d'un nœud à un autre, les mesures du taux sans risque et de la probabilité neutre au risque p ne changent pas, mais le Δ et le B changent puisqu'il y a *rééquilibrage* du portefeuille réplicatif, mais dans le même environnement (neutre au risque).
- Si on conserve la même échéance T mais qu'on augmente le nombre de périodes n, les longueurs des branches h seront de plus en plus petites et le modèle sera de plus en plus précis et sophistiqué pour répliquer la dynamique de l'évolution du prix d'une action, d'une option sur l'action en question ainsi que d'un portefeuille réplicatif de l'option. L'intérêt de l'arbre binomial est donc surtout au niveau de l'illustration et de la représentation du processus pour établir le prix d'une option ou d'une stratégie à base de produits dérivés.
- Lecture complémentaire : p.308-309 *DM* pour un exemple avec n = 3 périodes, tel qu'illustré dans l'illustration 10.5 à la page 309.

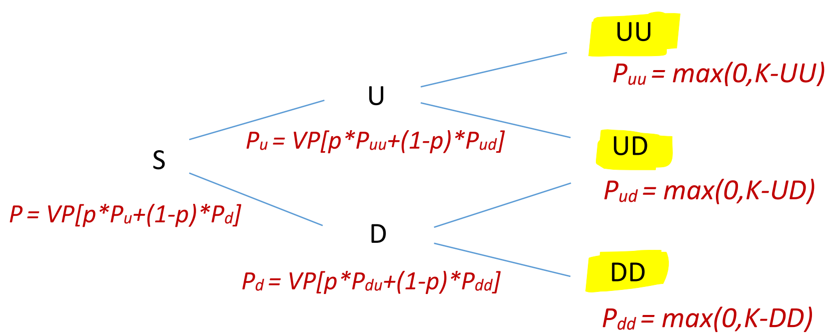
10.4. Options de vente

Jusqu'à présent, nous avons observé des options d'achat avec l'arbre binomial. La construction d'un arbre binomial se fera de la même façon avec une option de vente, avec la même procédure qui consistera à :

1. Construire un arbre pour l'évolution du sous-jacent



2. Établir les valeurs à l'échéance à la fin de la dernière période puis aux autres



3. Établir le portefeuille de réplication à chaque nœud en réutilisant la même méthode que celle avec les options d'achat, mais en remplaçant les prix des options d'achat (C_u, C_d, C_{uu}, C_{ud} et C_{dd}) par les prix des options de vente (P_u, P_d, P_{uu}, P_{ud} et P_{dd}). Voir illustration 10.6 p.310 *DM (à répliquer en exercice)*.

10.5. Options américaines

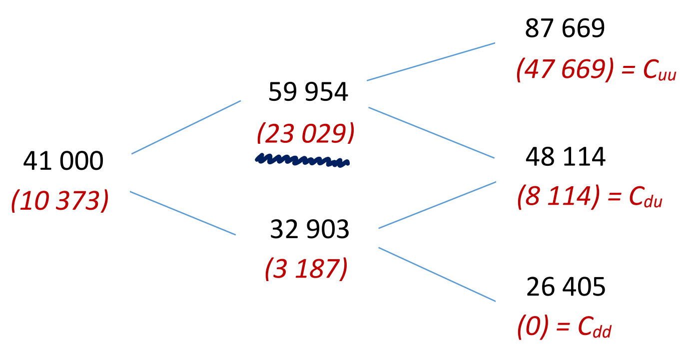
Avec le modèle de l'arbre binomial, on pourra également tester s'il est avantageux de lever une option avant l'échéance.
Le processus est le même, soit :

1. Construire un arbre pour l'évolution du sous-jacent (même schéma qu'à la section précédente)

2. Établir les valeurs à l'échéance à chacune des périodes en supposant qu'on exerce l'option à chacun des nœuds

3. Comparer les valeurs à l'échéance obtenues en 2 avec celles qu'on aurait eues avec la méthode pour une option européenne comme aux sections précédentes. Autrement dit, comparer à chaque nœud la valeur à l'échéance d'un exercice hâtif à la valeur actualisée des valeurs à l'échéance des nœuds suivants.

On reprend l'exemple avec l'option d'achat européenne et on présume maintenant que l'option est américaine. Les paramètres sont les mêmes qu'avant. $K = 40\,000$



Avec $S_u = U = 59\,954$, on a $C_u = 23\,029$ avec option européenne.

Avec option américaine $\Rightarrow \max(0, U-K) = \max(0, 59\,954 - 40000) = 19954$

$\Rightarrow \mathrm{Max}(\underbrace{19\,954}_{\text{Exercice hâtif}}, \underbrace{23\,029}_{\text{Attendre}}) = 23029 = \hat{m}$ valeur qu'avec option euro.

La procédure est la même avec une option de vente. Voir illustration 10.7 (Put américain) dans le DM et spécifiquement l'embranchement DD (p.311).

10.6. Options sur d'autres actifs

10.6.1. Option sur un indice boursier

<u>Lecture complémentaire</u> : p.312-318 (illustrations 10.8, 10.9 et 10.10)

Le modèle de l'arbre binomial s'applique de manière semblable pour un indice boursier versus une action. On présumera généralement un taux de dividende continu avec les mêmes formules.

10.6.2. Option sur devises

Comme c'était le cas dans les chapitres précédents, on exprimera l'option et son prix dans la devise dans laquelle l'option est libellée. Nous avions vu en 9.1.2 que :

$$F_{0,T} = x_0 \left(\frac{1 + r_D}{1 + r_É}\right)^T$$

L'équivalent avec des forces d'intérêt sans risque et pour une période de longueur h serait ainsi :

$$F_{0,T} = x_0 e^{(r'_D - r'_É)h}$$

En désignant le taux de change initial comme étant x, l'arbre binomial se construira ainsi avec :

$$U = ux = x\,\underbrace{e^{(r'_D - r'_É)h + \sigma\sqrt{h}}}_{u}$$
$$D = dx = x\,\underbrace{e^{(r'_D - r'_É)h - \sigma\sqrt{h}}}_{d}$$

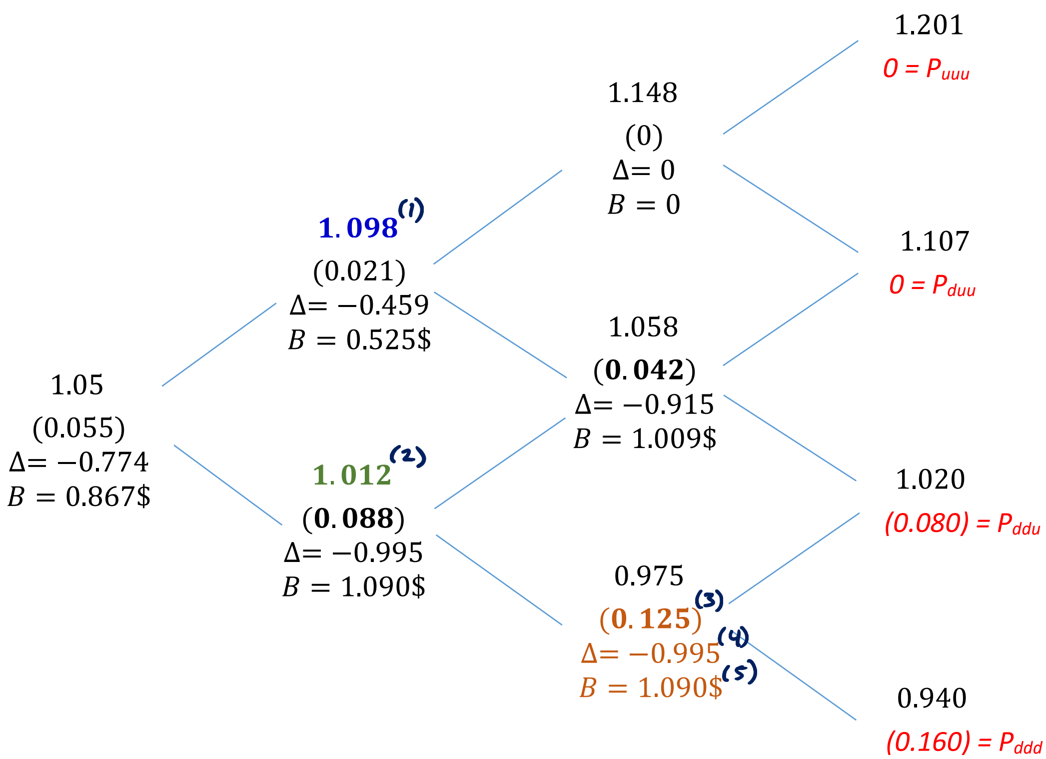
La subtilité dans un modèle d'arbre binomial avec option sur devise est que dans le portefeuille réplicatif, le Δ représentera la quantité de l'actif sous-jacent à acheter (ou vendre), mais comme il s'agit ici d'une devise étrangère, ceci reviendra à acheter une obligation zéro-coupon dans la devise étrangère (investir au taux sans risque étranger).

<u>Remarque</u> : il est possible de percevoir le taux d'intérêt sans risque étranger comme la composante du taux de dividende dans les formules précédentes, et les formules sont ainsi quasi-identiques et on aura :

$$p = \underbrace{\frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}}_{\text{Avec dividendes}} \leftrightarrow p = \underbrace{\frac{e^{(r'_D - r'_É)h} - d}{u - d} = \frac{e^{(r'_D - r'_É)h} - e^{(r'_D - r'_É)h - \sigma\sqrt{h}}}{e^{(r'_D - r'_É)h + \sigma\sqrt{h}} - e^{(r'_D - r'_É)h - \sigma\sqrt{h}}}}_{\text{Avec devise étrangère}}$$

Option de vente américaine sur devise

On reprend l'exemple de l'illustration 10.9 des notes de cours, avec une option de vente américaine sur l'euro avec le dollar américain comme devise locale (on dira simplement le « dollar » pour simplifier). Le taux de change initial est de 1,05\$/€, K = 1.10\$/€, σ = 0.10, $r'_D =$ 5.5%, $r'_{É} = 3.1\%$, $T = \frac{1}{2}$ et $n = 3$ (et donc $h = \frac{1}{6}$).



Calcul des valeurs du sous-jacent x_t

Pour calculer les premières branches à t = $\frac{1}{6}$:

$$U = xu = x * e^{(r'_D - r'_{É})h + \sigma\sqrt{h}} = 1.05 * e^{\frac{(0.055-0.031)}{6} + 0.1\sqrt{\frac{1}{6}}} = 1.05 * \underbrace{1.04584464}_{u} = \mathbf{1.098} \text{ (1)}$$

$$D = xd = x * e^{(r'_D - r'_{É})h - \sigma\sqrt{h}} = 1.05 * e^{\frac{(0.055-0.031)}{6} - 0.1\sqrt{\frac{1}{6}}} = 1.05 * \underbrace{0.96384496}_{d} = \mathbf{1.012} \text{ (2)}$$

Calcul des valeurs à l'échéance et de la probabilité neutre au risque

Comme il s'agit d'une option de vente, c'est dans les nœuds inférieurs que la valeur à l'échéance sera la plus élevée. Par exemple, puisque $DDD = xddd = 0.94$, alors :

$$P_{ddd} = \max(0; k - DDD) = \max(0; k - xddd) = \max(0; 1.10 - 0.94) = 0.16$$

On a également que :

$$p = \frac{e^{(r'_D - r'_{\acute{E}})h} - d}{u - d} = \frac{e^{\frac{(0.055-0.031)}{6}} - 0.96384496}{1.04584464 - 0.96384496} = 48.979522\%$$

<u>**Calcul des valeurs de l'option à chaque noeud**</u>

Si on se concentre sur le nœud inférieur à t = $\frac{2}{6}$ avec un taux de change $DD = xdd = 0.975$, on calcule la valeur de l'option P_{dd} comme s'il s'agissait d'une option européenne en actualisant les valeurs potentielles des branches suivantes y étant rattachées, soit P_{ddu} et P_{ddd} et ainsi :

$$[pP_{ddu} + (1-p)P_{ddd}]e^{-\frac{0.055}{6}} = [0.08 * p + 0.16 * (1-p)]e^{-\frac{0.055}{6}} = 0.12 = P_{dd}$$

Donc, avec une option de vente européenne, on aura $P_{dd} = 0.12$. Cependant, c'est une option américaine alors il faut vérifier s'il ne serait pas avantageux de lever l'option de vente tout de suite. En effet, à tout moment, on doit avoir :

$$Val.\acute{e}ch.\,option\ am\acute{e}ricaine = max(Val.\acute{e}ch.\,option\ europ\acute{e}enne; exercice\ h\hat{a}tif)$$

Dans notre cas, comme on a une option de vente et qu'on regarde le nœud dd, on aura :

$$P_{dd}^{Amer} = max(P_{dd}^{Euro}; K - DD) = max\left(0.12; \underbrace{1.10 - 0.975}_{0.125}\right) = \mathbf{0.125} \quad (3)$$

<u>C'est pourquoi la valeur de l'option au nœud dd est de 0,125 et non de 0,12 dans le cas présent</u>. Les prix affichés en gras signifient qu'un exercice hâtif est avantageux et que la valeur de l'option est égale à la valeur à l'échéance qui en découle dans l'illustration de la page précédente.

<u>**Portefeuille réplicatif**</u>

Pour construire le portefeuille réplicatif, la même logique s'applique avec des options sur des devises comme on le faisait avec les options européennes.

À noter que pour un nœud qui implique un exercice hâtif avec une option américaine, le concept de « portefeuille réplicatif » est un peu abstrait puisque l'option prend fin au moment de l'exercice. Pour les nœuds impliquant un exercice hâtif, on choisit assurément de vendre le sous-jacent. Le taux d'intérêt sans risque étranger étant traité comme un taux de dividende dans les formules, on reprend la formule de 10.1.4 et on l'ajuste pour une option de vente américaine :

$$\Delta_{dd}^{Amer} = \left(\frac{P_{ddu} - P_{ddd}}{DDU - DDD}\right) e^{-r'_{É}h} \leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{0.08 - 0.16}{1.02 - 0.94}\right)}_{=1} e^{-\frac{0.031}{6}} = -0.995 \quad (4)$$

$$B_{dd}^{Amer} = e^{-r'_{D}h}\left(\frac{DDU * P_{ddd} - DDD * P_{ddu}}{DDU - DDD}\right) = e^{-\frac{0.055}{6}}\left(\frac{1.02 * 0.16 - 0.94 * 0.08}{1.02 - 0.94}\right) = 1.090 \quad (5)$$

Tous les calculs montrés précédemment s'appliquent de la même façon pour tous les nœuds de l'arbre. Les autres nœuds sont laissés à faire en exercices.

10.6.3. Option sur *futures*

L'idée d'émettre un produit dérivé sur un produit dérivé peut sembler abstraite. Ici, une option sur un *futures* implique donc d'obtenir le droit d'acheter ou de vendre un contrat futures avant son échéance. Il y aura ainsi l'échéance de l'option, et l'échéance du *futures*. L'échéance de l'option devra être inférieure à celle du *futures*.

Calcul des valeurs du sous-jacent $F_{t,T}$

On définit encore le prix *futures* comme étant le prix *forward* et on remplace le sous-jacent S_t par $F_{t,T}$. Si on reprend le modèle avec le prix du sous-jacent à la base de l'arbre binomial, on a :

$$Su = Se^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}}$$

$$F_{h,T} = Su * e^{(r-\delta)(T-h)} = \underbrace{S * e^{(r-\delta)T+\sigma\sqrt{h}}}_{F_0 \underbrace{e^{\sigma\sqrt{h}}}_{u_F}}$$

S

$$F_{0.T} = F = Se^{(r-\delta)T}$$

$$Sd = Se^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}$$

$$F_{h,T} = Sd * e^{(r-\delta)(T-h)} = \underbrace{S * e^{(r-\delta)T-\sigma\sqrt{h}}}_{F_0 \underbrace{e^{-\sigma\sqrt{h}}}_{d_F}}$$

Puisque le prix futures implique déjà l'accumulation du prix actuel du sous-jacent au taux d'intérêt sans risque, on aura ainsi :

$$u_F = e^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$d_F = e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

On simplifie ainsi l'arbre binomial pour un *futures* :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & F_0\,\underbrace{e^{\sigma\sqrt{h}}}_{u_F} \\
F \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
 & F_0\,\underbrace{e^{-\sigma\sqrt{h}}}_{d_F}
\end{tikzcd}$$

<u>Probabilité neutre au risque et portefeuille réplicatif</u>

Après une période, le prix du *futures* sera donc soit de Fu_F ou de Fd_F. Le cas échéant, comme une période de longueur h aura passé, on aura que $F_{h,T} = Fu$ avec une probabilité neutre au risque de p^{Fut} et $F_{h,T} = Fd$ avec probabilité $(1 - p^{Fut})$.

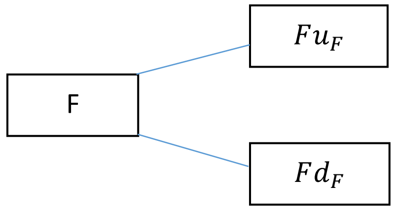
La probabilité neutre au risque devient :

$$p^{Fut} = \frac{1 - d}{u - d}$$

<u>Remarque</u> : cette mesure ainsi que le remplacement du prix du sous-jacent par le prix *futures* revient à conserver le sous-jacent S mais à établir un taux sans risque nul, ou encore un taux de dividende équivalent au taux sans risque.

L'option d'achat étant réputée être une position longue par rapport au sous-jacent, une option d'achat avec un *futures* sera l'option de prendre une position longue dans le *futures* en question. L'option de vente avec un *futures* sera l'option de prendre la position courte dans le *futures*. Le *futures* étant par définition à coût initialement nul, ceci revient à respectivement acheter ou vendre le *futures*.

En construisant un portefeuille réplicatif, on doit garder en tête qu'un *futures*, comme un *forward*, a un coût initial nul et que les changements dans le prix du futures sont payés (appels de marge) au fil du temps. Pour une option d'achat avec un modèle simple, on aura ainsi :



$$\Delta * (Fd_F - F) + e^{rh} * B = C_d^{Futures}$$

$$\Delta * (Fu_F - F) + e^{rh} * B = C_u^{Futures}$$

<u>Remarque</u> : la partie entre parenthèse représente le gain ou la perte liée à l'évolution du prix *futures*. Le même principe s'appliquerait avec un forward, avec des valeurs à l'échéance exprimées de la même façon qu'avec des options.

On aura ainsi :

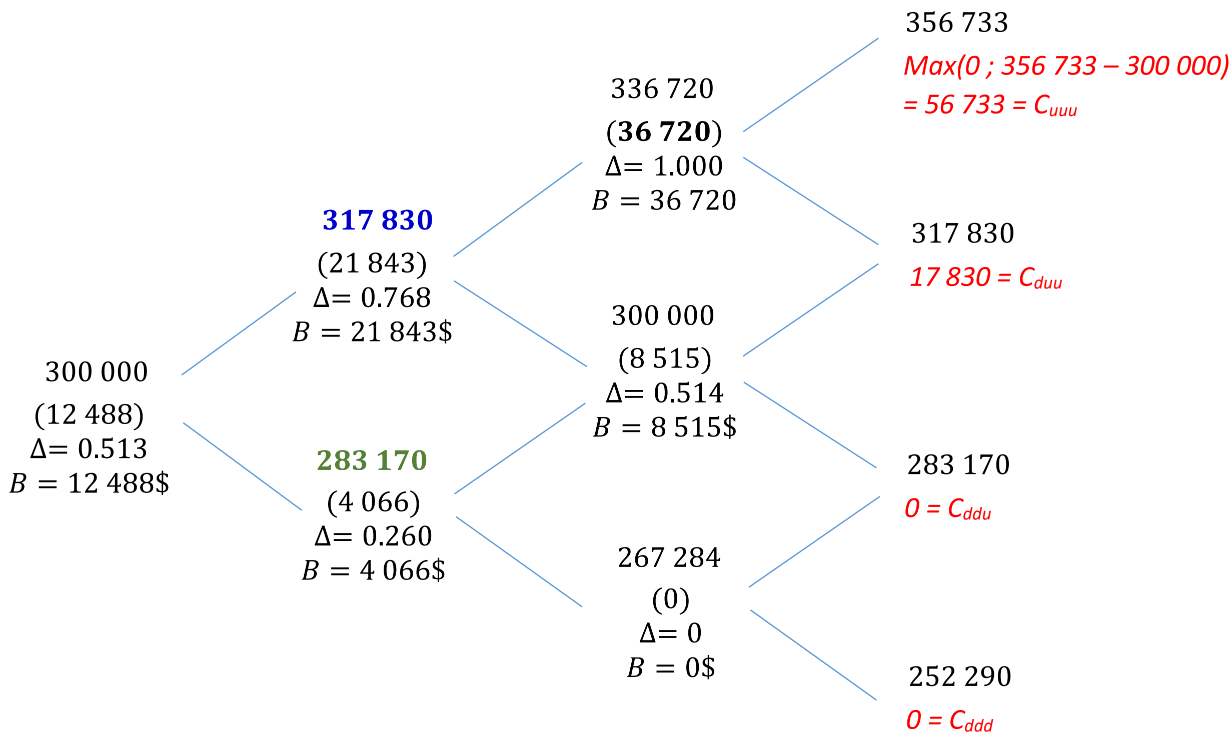
$$\Delta = \frac{C_u^{Futures} - C_d^{Futures}}{F(u-d)}$$

$$B = e^{-rh}\left(C_u^{Futures}\frac{1-d_F}{u_F-d_F} + C_d^{Futures}\frac{u_F-1}{u_F-d_F}\right)$$

Avec Δ qui représente le nombre de contrats *futures* à acheter/vendre pour se couvrir, ou encore pour répliquer l'option.

<u>Évaluation du prix et de la valeur de l'option à chaque noeud</u>

Pour évaluer la valeur d'une option sur un *futures* dans chacun des nœuds de l'arbre binomial, on peut soit regarder le prix du portefeuille réplicatif obtenu, ou simplement calculer les valeurs à l'échéance à la fin de l'arbre binomial et effectuer la même procédure pour calculer la valeur actualisée espérée à chaque nœud précédent avec les probabilités neutres au risque et le taux sans risque applicable. On reprend ici l'illustration 10.10 (*DM*) avec une option d'achat américaine avec T = 1, n = 3, $S = 300\ 000$, $r = \delta = 5\%$ et ainsi $F_{0,T} = 300\ 000$, $\sigma = 10\%$.



La valeur du sous-jacent au premier nœud supérieur est de $Fu_F = 300\,000 * e^{0.1\sqrt{\frac{1}{3}}} = 317\,830\$$ et celle au premier nœud inférieur est de $Fd_F = 300\,000 * e^{-0.1\sqrt{\frac{1}{3}}} = 283\,170\$$. On applique la même méthode pour les nœuds successifs et on peut ensuite calculer les valeurs à l'échéance des derniers nœuds à droite de l'illustration, comme on le faisait avec les arbres des sections précédentes.

La probabilité neutre au risque est de :

$$p^{Fut} = \frac{1-d}{u-d} = \frac{1 - e^{-0.1\sqrt{\frac{1}{3}}}}{e^{+0.1\sqrt{\frac{1}{3}}} - e^{-0.1\sqrt{\frac{1}{3}}}} = 48.557025\%$$

Pour calculer la valeur de l'option aux nœuds précédents, on reprendra la même méthode en commençant par l'évaluation comme avec une option européenne, en actualisant la valeur espérée des nœuds suivants. Pour le nœud supérieur de la 2ème période, soit celui avec une valeur à du prix *futures* de 336 720, on aurait ainsi :

$$C_{uu}^{Amer} = max\left(C_{uu}^{Eur};\ \underbrace{Val.\acute{E}ch.exercice\ h\hat{a}tif}_{Fuu-K=336\,720-300\,000=36\,720}\right)$$

$$C_{uu}^{Amer} = max\left(e^{-\frac{0.05}{3}}\left[p^{Fut} * \underbrace{C_{uuu}}_{56\,733} + (1-p^{Fut}) * \underbrace{C_{uud}}_{17\,830}\right]; 36\,720\right)$$

$$= max(36\,113\,;\ 36\,720) = 36\,720$$

Dans cet exemple, il s'agit du seul nœud où un exercice hâtif serait potentiellement optimal.

Remarque : peu importe le moment de l'achat, un futures est réputé être à coût nul. C'est pourquoi on a que le prix de l'option à chaque nœud est égal au B du portefeuille de réplication (le prix du sous-jacent est nul peu importe la quantité Δ).

Lectures complémentaires : options sur commodités et options sur obligations, p.315-317 DM

10.7. Exercices supplémentaires

Exercices repris du manuel de l'ASM

Modèles à une seule branche :

1. Quiz 20-2 : une option de vente européenne sur une action qui ne paye aucun dividende a un prix d'exercice de 50$. On a que S_0 = 50$ et les prix après un an seront soit de 60$ ou 40$ et la force d'intérêt sans risque est de 5%. Déterminez les composantes du portefeuille réplicatif.

2. Quiz 20-3 : reprenez les mêmes informations qu'au quiz précédent, mais avec un taux de dividende de 2% et un prix d'exercice de 55$. Déterminez le portefeuille réplicatif, le prix de l'option et démontrez que le résultat est cohérent avec une option d'achat avec des caractéristiques similaires et dont le prix est de 2,7402$ en utilisant l'équation de parité.

3. 20.14 : une option d'achat d'échéance un an avec prix d'exercice de 50$ coute 5$. Le taux de dividende de l'action sous-jacente est de 2% et la force d'intérêt sans risque est de 6%. Le sous-jacent peut prendre les valeurs de 65$ et de 40$. Déterminez s'il y a possibilité d'arbitrage et, le cas échéant, comment vous pouvez tirer avantage de cette situation avec un portefeuille qui implique l'achat ou la vente à découvert du sous-jacent ainsi que l'emprunt ou le prêt d'argent au taux sans risque afin d'obtenir un gain de 10$ sans prise de risque.

4. 20.23 : la branche d'un arbre binomial est de longueur ½ année. Le prix initial est de S_0. Les prix futurs sont soit de S_0u ou de S_0d avec u = 0,8 et d = 1,2. Déterminez la volatilité de l'action sous-jacente.

Modèle à plusieurs branches :

5. Quiz 21.1 : Une option d'achat américaine pour une action dont la valeur initiale est de 52$ et qui paye des dividendes à un taux continu de 10% a un prix d'exercice de 53$ dans 6 mois. La force d'intérêt sans risque est de 3% et l'arbre est composé sur deux périodes avec u = 1,3 et d = 0,8. Déterminez le prix de l'option d'achat au temps t = 0.

6. Exemple 21.B : le taux de change est actuellement de 1,15$/€. Une option d'achat américaine d'échéance 6 mois permet l'achat d'un euro pour 1,25$ (K = 1,25$/€). Les taux sans risque continus sont de 5% ($) et de 4$ (€). La volatilité du taux de change est de 10% par année. Un modèle binomial à deux périodes est utilisé. Déterminez le prix de l'option d'achat.

7. Exemple 21.D : une option d'achat américaine sur un *futures* est modélisée avec un arbre binomial à 3 périodes avec une force d'intérêt sans risque de 5%, un prix d'exercice de 60$, un prix *futures* actuel de 60$ et une volatilité annuelle de 30%. Déterminez le prix de l'option d'achat à t = 0. Déterminez les Δ pour chaque nœud de l'arbre.

10.8. Solutions aux exercices supplémentaires

1.

20-2. Now the range of ending stock prices is still 20 but the difference between the corresponding put payoffs, 0 and 10, is −10. So $\Delta = \frac{-10}{20} = -0.5$. Then we solve for B:

$$\begin{aligned}60\Delta + e^{0.05}B &= 0\\ -30 + e^{0.05}B &= 0\\ B &= 30e^{-0.05} = 28.5369\end{aligned}$$

The put premium is then $-0.5(50) + 28.5369 = 3.5369$, the same as in the solution to Quiz 20-1.

2.

20-3.

1. The difference between high node and low node stock price is still 20 and we still need $e^{-0.02}$ shares to end up with 1 share at the end. The put is worth 0 if the stock price is 60 and 15 if it is 40, or a difference of −15. So $\Delta = -\frac{15}{20}e^{-0.02} = -0.73515$. We solve for B:

$$\begin{aligned}\Delta(60)e^{0.02} + Be^{0.05} &= 0\\ (-0.73515)(60)e^{0.02} + Be^{0.05} &= 0\\ B = (0.73515)(60)e^{-0.03} &= 42.80532\end{aligned}$$

The put premium is $-0.73515(50) + 42.80532 = \boxed{6.0479}$.

2. By put-call parity,

$$\begin{aligned}C(S,55,1) - P(S,55,1) &= Se^{-\delta} - Ke^{-r}\\ 2.7402 - P(55,1) &= 50e^{-0.02} - 55e^{-0.05}\\ &= 49.0099 - 52.3176 = -3.3077\\ P(S,55,1) &= 2.7402 + 3.3077 = \boxed{6.0479}\end{aligned}$$

3.

20.14. For one call option,

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{C_u - C_d}{S(u-d)}\right)e^{-\delta} = \left(\frac{15}{25}\right)e^{-0.02} = 0.588119\\ B &= e^{-r}\left(\frac{uC_d - dC_u}{u-d}\right) = e^{-0.06}\left(\frac{1.3(0) - 0.8(15)}{1.3 - 0.8}\right) = -22.60235\\ C &= \Delta S + B = (0.588119)(50) - 22.60235 = 6.8036\end{aligned}$$

The call is underpriced at 5.00; if you buy one call for 5.00 and sell it for its true price, you make $6.8036 - 5 = 1.8036$ profit. So to make 10.00, you must replicate $\frac{10}{1.8036} = 5.5444$ calls. You buy 5.5444 calls (since they're underpriced), and sell the replicating portfolio for 5.54444 calls. In other words, you sell short $5.5444(0.588119) = 3.2608$ shares of stock, and *lend* $5.544432(22.60235) = \boxed{125.317}$. The cost of the calls is $5.5444(5) = 27.722$, so the total cash flow out is $125.317 + 27.722 = 153.04$. The proceeds from selling stock short are $3.2608(50) = 163.04$. You have made 10 profit.

4.

20.23. By definition of volatility, the price at the upper node $S_u = S_d e^{2\sigma\sqrt{h}}$, where S_d is the price at the lower node. Therefore

$$\begin{aligned} 1.2 &= 0.8e^{2\sigma\sqrt{0.5}} \\ 2\sigma\sqrt{0.5} &= \ln 1.5 \\ \sigma &= \frac{\ln 1.5}{2\sqrt{0.5}} = \boxed{0.2867} \end{aligned}$$

5.

21-1. The projected nodes for the stock price are

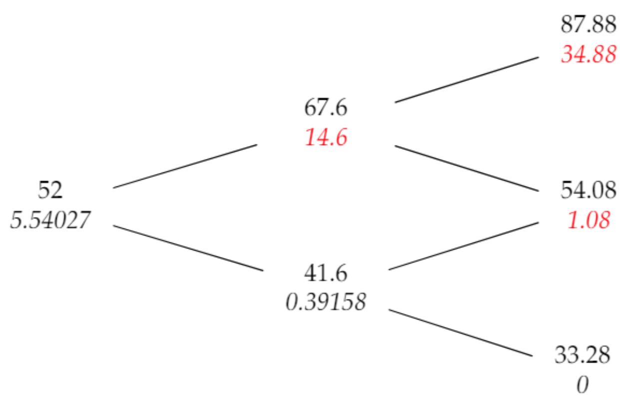
$$\begin{aligned} S_{uu} &= 52(1.3^2) = 87.88 \\ S_{ud} &= 52(1.3)(0.8) = 54.08 \\ S_{dd} &= 52(0.8^2) = 33.28 \end{aligned}$$

The payoff from the call is $C_{uu} = 87.88 - 53 = 34.88$, $C_{ud} = 54.08 - 53 = 1.08$, $C_{dd} = 0$. The risk-neutral probability is

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d} = \frac{e^{(0.03-0.10)(0.25)} - 0.8}{1.3 - 0.8} = \frac{e^{-0.0175} - 0.8}{0.5} = 0.365304$$

Pulling back to nodes u and d, we get tentative values of

$$\begin{aligned} C_u^{\text{tentative}} &= e^{-0.25(0.03)}\big(0.365304(34.88) + 0.634696(1.08)\big) = 13.32696 \\ C_d^{\text{tentative}} &= e^{-0.25(0.03)}\big(0.365304(1.08) + 0.634696(0)\big) = 0.39158 \end{aligned}$$



Exercise is optimal at the u node, since it pays $67.6 - 53 = 14.6$. The call premium is

$$C_0 = e^{-0.0075}\big(0.365304(14.6) + 0.634696(0.39158)\big) = \boxed{5.54027}$$

6.

Solution: We first calculate the risk-neutral probability. r_f will denote the foreign risk-free rate. h is one period, or $1/4$ of a year.

$$
\begin{aligned}
u &= e^{(r-r_f)h+\sigma\sqrt{h}} \\
&= e^{(0.05-0.04)(1/4)+0.1\sqrt{1/4}} \\
&= e^{0.0025+0.05} = e^{0.0525} = 1.053903 \\
d &= e^{0.0025-0.1\sqrt{1/4}} = e^{-0.0475} = 0.95361 \\
p^* &= \frac{e^{0.0025} - 0.95361}{1.053903 - 0.95361} = 0.48750
\end{aligned}
$$

The exchange rates at the ending nodes are

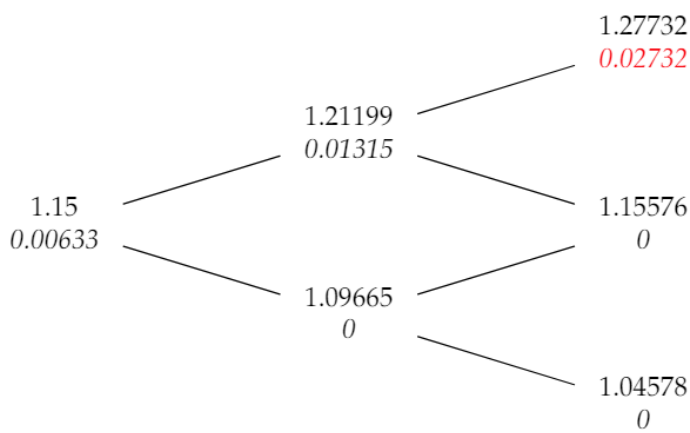
$$
\begin{aligned}
x_{uu} &= 1.15u^2 = 1.15(1.053903^2) = 1.27732 \\
x_{ud} &= 1.15ud = 1.15(1.053903)(0.95361) = 1.15576 \\
x_{dd} &= 1.15d^2 = 1.15(0.95361^2) = 1.04578
\end{aligned}
$$

The call pays off only at the uu node, where it pays $1.27732 - 1.25 = 0.02732$. Thus $C_d = 0$.

$$C_u = e^{-0.05(0.25)}(0.48750)(0.02732) = 0.01315$$

The exchange rate at this node is $1.15u = 1.15(1.053903) = 1.21199 < 1.25$, so early exercise is not optimal. The call premium is

$$C_0 = e^{-0.05(0.25)}(0.48750)(0.01315) = \boxed{0.00633}$$



7.

Solution: The upper and lower nodes, and the risk-neutral probability, are

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\sigma\sqrt{h}} = e^{0.3\sqrt{1/12}} = 1.090463 \\
d &= e^{-0.3\sqrt{1/12}} = 0.917042 \\
p^* &= \frac{1 - 0.917042}{1.090463 - 0.917042} = 0.478363
\end{aligned}
$$

We then calculate the nodes of the tree recursively, with $F_u = 60u = 60(1.090463) = 65.42779$, $F_d = 60d = 60(0.917042) = 55.02249$, etc., as shown in Figure 21.4. The call values at the ending nodes are $\max(0, F_t - 60)$, so that $C_{uuu} = 17.80084$, $C_{uud} = 5.42779$, and the other two are 0. Pulling back to C_{uu} the tentative value is

$$e^{-0.05/12}\big(0.478363(17.80084) + 0.521637(5.42779)\big) = 11.29942$$

However, exercising the option is worth $71.3466 - 60 = 11.3466$ which is higher and therefore optimal. At C_{ud}:

$$C_{ud} = e^{-0.05/12}(0.478363)(5.42779) = 2.58566$$

$C_{dd} = 0$. Then we pull back to C_u and C_d:

$$C_u = e^{-0.05/12}\big(0.478363(11.3466) + 0.521637(2.58566)\big) = 6.74839$$
$$C_d = e^{-0.05/12}(0.478363)(2.58566) = 1.23174$$
$$C_0 = e^{-0.05/12}\big(0.478363(6.74839) + 0.521637(1.23174)\big) = \boxed{\mathbf{3.85461}}$$

Figure 21.4 shows these results.

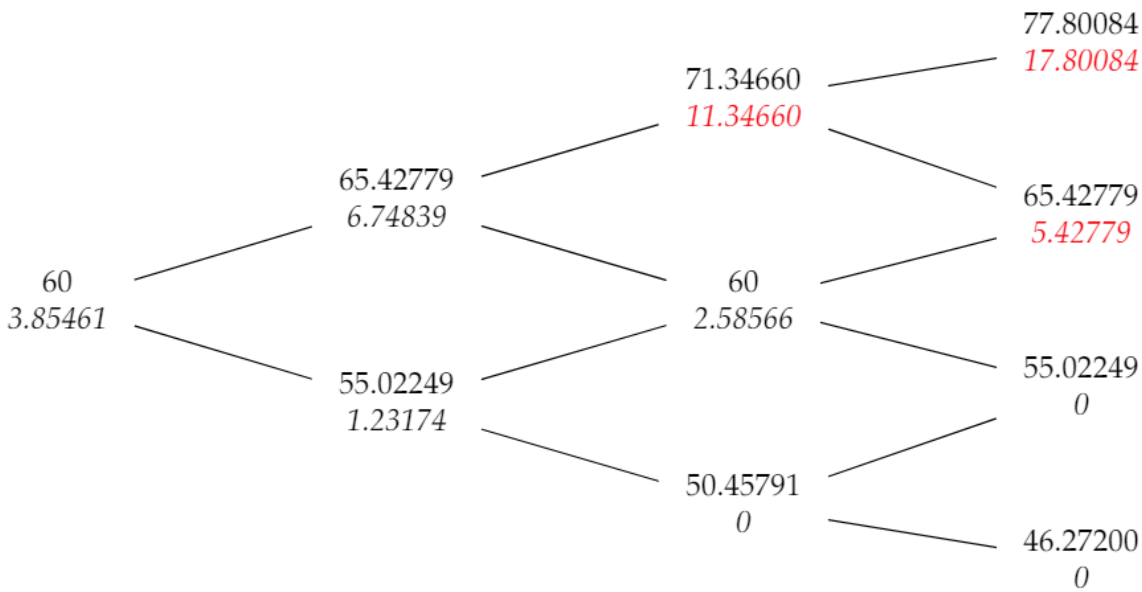


Figure 21.4: Binomial tree for call option on futures contract, Example 21D