Deuxième partie

Fonctions de plusieurs variables

5 | Fonctions, limites et continuité en dimension élevée

5.1 | Fonctions de plusieurs variables

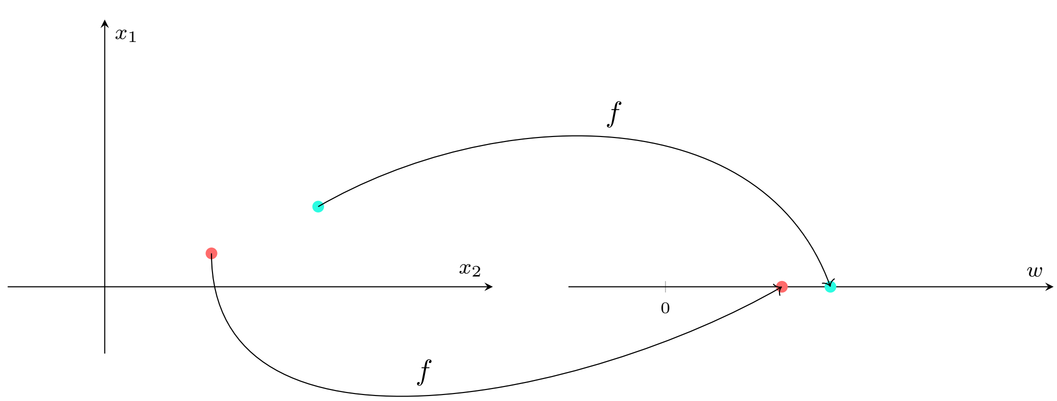
5.1.1 | Domaines et images

Définition 5.1.1 : Fonctions, domaines et images

Une fonction f d'un ensemble de n-tuples de départ D vers un ensemble d'arrivé F est une correspondance qui assigne à chaque élément $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de D exactement un élément w de F.

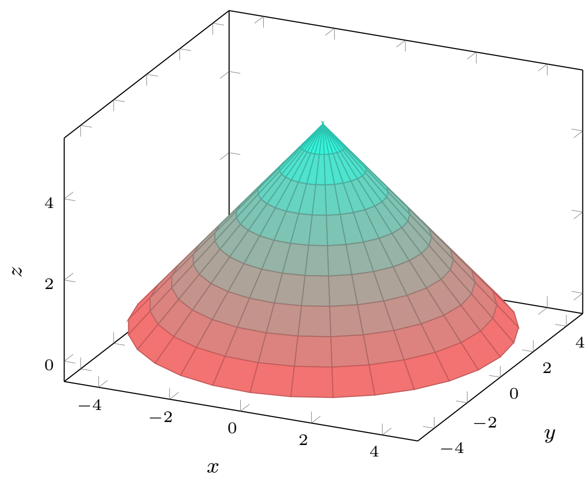
L'ensemble D est le domaine de définition de la fonction : $D = Dom(f)$.

L'image de $f, Ima(f)$, est le sous-ensemble de F constitué de toutes les valeurs possibles de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lorsque $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est dans D.

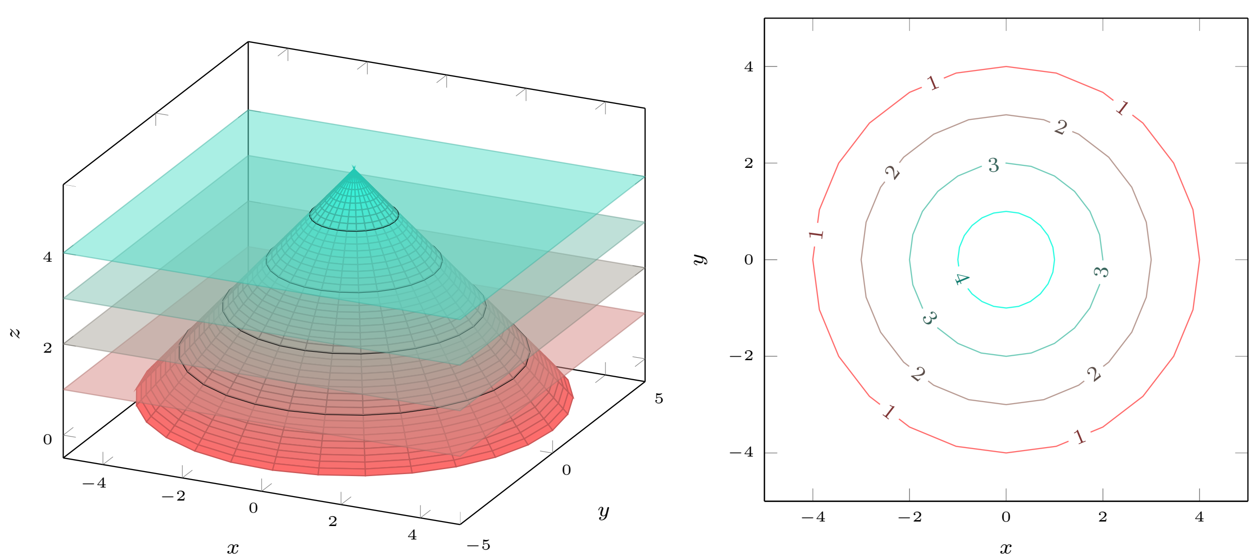


On peut visualiser les fonctions de plusieures variables de différentes manières. La première est de partir du domaine et de projeter vers l'image.

Une manière de montrer un graphique de deux variables est avec un graphique en trois dimensions. Les axes des variables indépendantes x et y sont des plans horizontaux et l'axe de z est la hauteur du graphique.

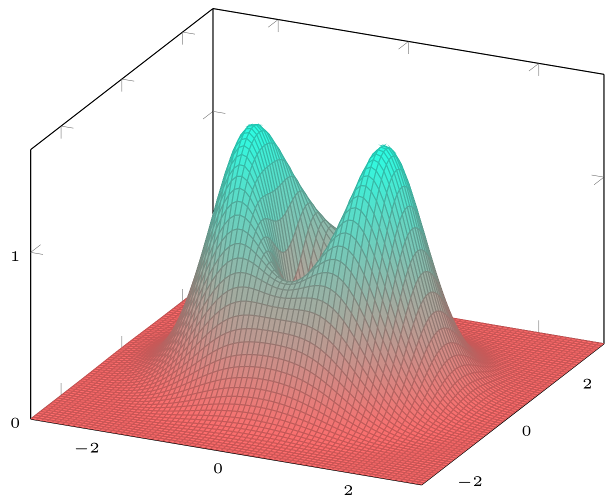


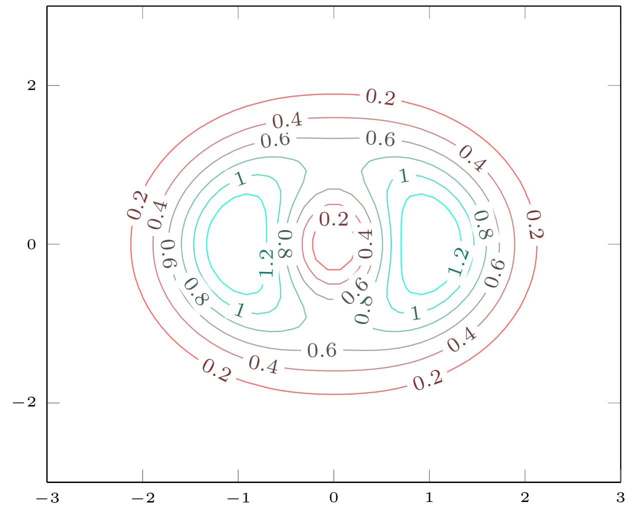
La dernière manière de présenter un graphique de deux variables est avec des courbes de niveaux. Les axes du graphique sont les variables indépendantes. Ensuite, chaque courbe de valeur c correspond à l'intersection du plan $z = c$ avec le graphique en trois dimensions. En d'autres mots, l'ensemble des points (x, y) qui satisfaient $f(x, y) = c$ génère une courbe de niveau de f. Ici, on montre les courbes de niveaux pour $c = 1, 2, 3, 4$.

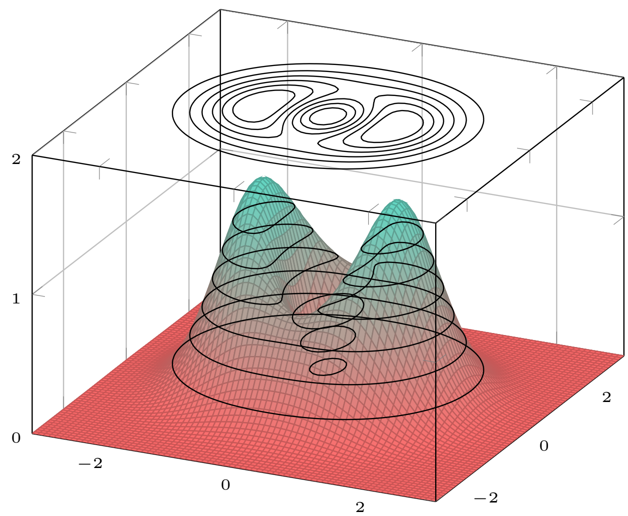


Ensuite, voici la fonction

$$f(x, y) = (4x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}.$$







Exemple 5.1.1 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$. Trouvez :

a) $Dom(f)$ **b)** $f(1,5)$ **c)** $f(-2,20)$ **d)** $Ima(f)$

a) La quantité dans la racine carrée doit être positive. Alors, on doit avoir

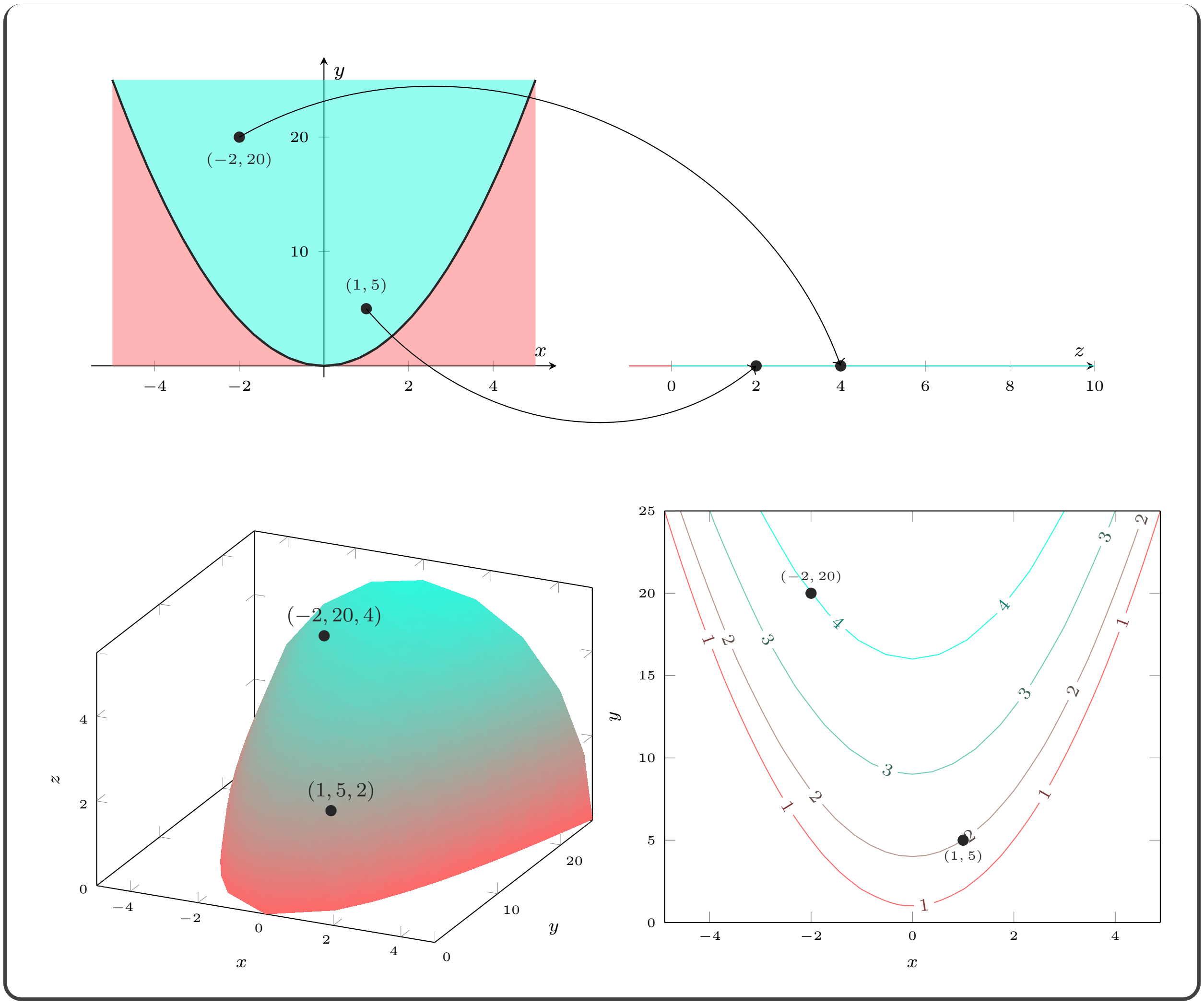
$$\begin{aligned} y - x^2 &\geq 0 \\ y &\geq x^2. \end{aligned}$$

On note que D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

b) On a $f(1,5) = \sqrt{5-4} = \sqrt{4} = 2$. 1

c) On a $f(-2,20) = \sqrt{20 - (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$.

d) L'image de f est la même que l'image de $\sqrt{x}$, c.-à-d. $Ima(f) = \mathbb{R}^+$.

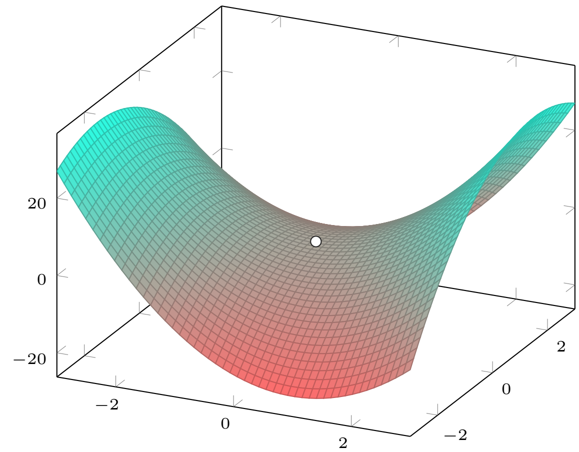


5.2 | Limites en dimension élevée

Pour les fonctions d'une seule dimension, la limite était la valeur de $f(x)$ lorsque x s'approchait de c. L'idée de *s'approcher* avait un sens car on peut approcher le point c de la gauche ou de la droite. En plusieures dimensions, on peut approcher le point (x_0, y_0) par plusieurs chemins. On dit que la limite si la limite est égale, peu importe le chemin emprunté par (x, y) vers (x_0, y_0).

Par exemple, la fonction suivante n'est pas définie à $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{3x^3 - x^2y - 4xy^2 + 2y^3}{x - y}.$$



On s'intéresse à sa limite lorsque (x, y) approche $(0, 0)$. Voici quatre chemins :

x de la gauche

x	y	$f(x)$
-0.1	0	0.03000000
-0.01	0	0.00030000
-0.001	0	0.00000300
-0.0001	0	0.00000003

x de la droite

x	y	$f(x)$
0.1	0	0.03000000
0.01	0	0.00030000
0.001	0	0.00000300
0.0001	0	0.00000003

y de la gauche

x	y	$f(x)$
0	-0.1	-0.02000000
0	-0.01	-0.00020000
0	-0.001	-0.00000200
0	-0.0001	-0.00000002

y de la droite

x	y	$f(x)$
0	0.1	-0.02000000
0	0.01	-0.00020000
0	0.001	-0.00000200
0	0.0001	-0.00000002

Il existe infini de ces chemins. Heureusement, on a souvent des formes déterminées et on peut évaluer la limite avec la substitution directe.

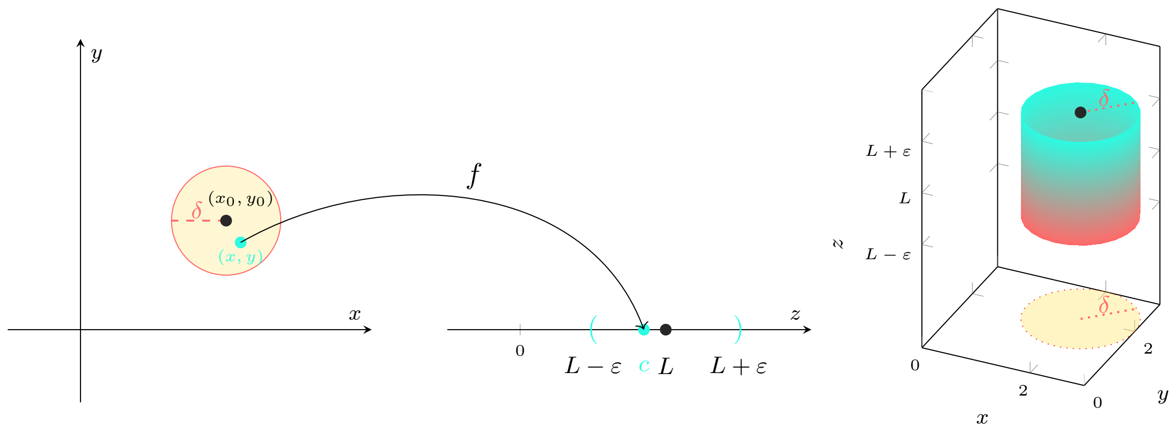
Définition 5.2.1 : Limite des fonctions de deux variables

Soit $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie partout dans D. On dit que la fonction $f(x, y)$ approche la limite L lorsque (x, y) approche (x_0, y_0) et on écrit

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

si, pour tout numéro $\varepsilon > 0$, il existe un numéro $\delta > 0$ tel que pour tout (x, y) dans le domaine de f,

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{lorsque} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$



Théorème 5.2.2

Les règles du tableau 1.2 s'appliquent pour les limites des fonctions de plusieures dimensions.

Exemple 5.2.1 : Calculer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Exemple 5.2.2 : Montrer que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Exemple 5.2.3 : Montrer que la limite suivante s'existe pas : $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Soit le chemin (x, tx). Si $x \to 0$, alors $y \to 0$. On a

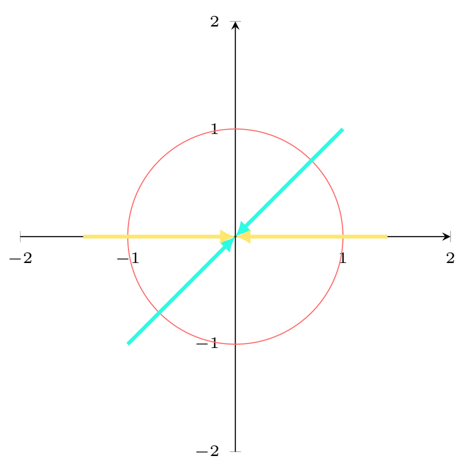
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^2-(tx)^2}{x^2+(tx)^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2-t^2x^2}{x^2+t^2x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-t^2)}{x^2(1-t^2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Alors, on conclut que la limite dépend du chemin emprunté pour approcher $(0,0)$ puisque la limite dépend de la variable t.
Par exemple, pour $t=1$ (chemins en bleu), on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{1-(-1)^2}{1+(-1)^2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Pour $t=0$ (chemins en jaune), on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{1-(0)^2}{1+(0)^2} = \frac{1}{1} = 1.$$



5.3 | Continuité en dimension élevée

Définition 5.3.1

Une fonction f de deux variables est continue au point (x_0, y_0) si les trois conditions sont respectées :

1. f est définie au point (x_0, y_0) ;
2. la limite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe ;
3. on a $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Exemple 5.3.1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-9y^2}{x-3y}, & \text{si } x \neq 3y \\ g(x), & \text{si } x = 3y \end{cases}$.
Identifier g en sorte que f soit continue.

Théorème 5.3.2 : Limites de fonctions continues (version deux dimensions)

Soit f, une fonction continue au point b et $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x) = b$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x)\right).$$