| | |
|---|---|
| Université Laval | Examen partiel informatique |
| Faculté des Sciences et de Génie | Hiver 2016 |
| École d'actuariat | Date: 12 mars 2016 |

# Act-2001 Introduction à l'actuariat 2

Professeur: Etienne Marceau

| **Nom de famille de l'étudiant** | **Prénom de l'étudiant** | **Matricule** |
|---|---|---|
| | | |

## Instructions:

– L'examen contient 4 questions à développement.
– Le total des points est de **100 points**.
– La durée est de 120 minutes.
– Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.
– Veuillez écrire vos réponses dans le présent cahier seulement.
– Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.
– Veuillez retourner le présent cahier, les annexes et le papier brouillon à la fin de l'examen.

| Questions | Points obtenus | Points |
|---|---|---|
| 1 | | 30 |
| 2 | | 30 |
| 3 | | 20 |
| 4 | | 20 |
| Total | | 100 |

1. **(30 points).** Pour la prochaine année, le montant total des sinistres pour l'ensemble du portefeuille d'assurance maladie est représenté par la v.a.

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

où les v.a. $X_1$, ..., $X_n$ sont i.i.d. Les coûts pour le contrat $i$ sont définis par la v.a.

$$X_i \sim Gamma\,(\alpha = 0.5, \beta = 0.5)\,.$$

**Questions:**

(a) **(2 points).** Indiquer la loi de $S_n$.

(b) **(3 points).** Calculer $F_{S_n}(n)$, pour $n = 10$, 100,1000. (Pour vérification : $F_{S_{200}}(200) = 0.5132988$)

(c) **(1 points).** Calculer $E[X]$.

(d) **(24 points).** On définit la prime $\pi = (1+\eta)\,E[X]$ et la probabilité de ruine $\psi_n(u) = \Pr(S_n > u + n\pi)$, avec un surplus initial $u > 0$.

  i. **(8 points).** Calculer $\psi_n(20)$, pour $\pi_A = 1.1$ pour $n = 10$, 400, 1000 et 2000. Commenter et expliquer le comportment. Indiquer $\eta_A$.

  ii. **(8 points).** Calculer $\psi_n(20)$, pour $\pi_B = 0.9$ pour $n = 10$, 400, 1000 et 2000. Commenter et expliquer le comportment. Indiquer $\eta_B$.

  iii. **(8 points).** Calculer $\pi_C$ et $\eta_C$ de telle sorte que $\psi_{1000}(20) = 1\%$.

2. **(30 points).** Pour la prochaine année, on suppose que $n = 1000$ contrats d'assurance IARD seront vendus par une compagnie d'assurance IARD.
Les coûts pour un contrat (v.a. $X$) sont modélisés selon l'approche fréquence sévérité.
Le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson avec $\lambda = 0.006$.
Le montant d'un sinistre obéit à une loi gamma avec des paramètres $\alpha = 1.5$ et $\beta = \frac{1}{1500}$.
Le montant total des sinistres pour l'ensemble du portefeuille est représenté par la v.a.

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

où les v.a. $X_1$, ..., $X_n$ sont i.i.d. (convention: $X_i \sim X$ pour $i = 1, 2, ..., n$).
On définit $W_n = \frac{S_n}{n}$.
**Questions :**

(a) **(13 points).** Pour un contrat, ...
- ... écrire l'expression de $F_{X_1}(x)$ ;
- ... calculer $F_{X_1}(0)$ et $F_{X_1}(40)$ (**vérification**: $F_{X_1}(10) = 0.9940204$);
- ... expliquer comment obtenir la $VaR_{0.99}(X_1)$;
- ... calculer $VaR_{0.99}(X_1)$;
- ... donner l'expression de la $TVaR_{0.99}(X_1)$; et
- ... calculer $TVaR_{0.99}(X_1)$.

(b) **(12 points).** Pour un portefeuille de $n = 1000$ contrats, ...
- ... indiquer la loi de $S_n$ ;
- ... écrire l'expression de $F_{W_n}(x)$;
- ... calculer $F_{W_n}(0)$ et $F_{W_n}(40)$ (**vérification**: $F_{W_n}(10) = 0.3480221$);
- ... expliquer comment obtenir la $VaR_{0.99}(W_n)$;
- ... calculer $VaR_{0.99}(W_n)$;
- ... donner l'expression de la $TVaR_{0.99}(W_n)$; et
- ... calculer $TVaR_{0.99}(W_n)$.

(c) **(5 points).** On définit les bénéfices de mutualisation par contrat selon la mesure VaR et la mesure TVaR par

$$\begin{aligned} B_{0.99,n}^{VaR} &= VaR_{0.99}(X) - VaR_{0.99}(W_n) \\ B_{0.99,n}^{TVaR} &= TVaR_{0.99}(X) - TVaR_{0.99}(W_n). \end{aligned}$$

Pour $n = 1000$, ...
- ... calculer les valeurs de $B_{0.99,n}^{VaR}$ et $B_{0.99,n}^{TVaR}$;
- ... commenter les valeurs obtenues de $B_{0.99,n}^{VaR}$ et $B_{0.99,n}^{TVaR}$.

3. **(20 points).** La proposition suivante est fournie.

**Proposition**. Soient $n$ v.a. indépendantes $X_i \sim Ga(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, ..., n$. On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors, on a

$$f_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k h(x; \alpha + k, \beta), \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned}
&\alpha = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \\
&\beta = \max(\beta_1; ...; \beta_n) \\
&\sigma = \textstyle\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^{\alpha_i} \\
&p_k = \sigma \xi_k, \ (k \in \mathbb{N}) \\
&\zeta_k = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{k} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta}\right)^k, \ \ (k \in \mathbb{N}^+) \\
&\xi_0 = 1, \\
&\xi_k = \textstyle\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i \zeta_i \xi_{k-i}, \ \ (k \in \mathbb{N}^+).
\end{aligned}$$

On considère les risques d'assurance et opérationnel d'un portefeuille.

Les coûts totaux en risque assurance IARD sont définis par la v.a. $W_1 \sim Gamma\left(4, \frac{1}{100}\right)$.

Les coûts totaux en risque opérationnel sont définis par la v.a. $W_2 = I \times B$ avec $I \sim Bern(q = 0.25)$ et $B \sim Gamma\left(2, \frac{1}{200}\right)$.

On définit les coûts totaux pour le portefeuille par la v.a. $T = W_1 + W_2$.

**Questions**

(a) **(3 points).** Calculer $E[T]$.

(b) **(5 points).** Utiliser la proposition pour développer l'expression de $F_T(x)$ dans les termes de fonction de répartition de loi gamma.

(c) **(12 points).** Dans (1), on somme les termes pour $k = 0, 1, ..., 100$ pour calculer $F_S(x)$, pour $x = 0$, 500 et 1000. (Vérification: $F_T(800) = 0.8588622$).

4. **(20 points).** On considère un portefeuille homogène de risques échangeables $X_1$, ..., $X_n$ où

$$X_i = I_i \times b_i$$

avec $b_i = 1000$ pour $i = 1, 2, ..., n$.
Soit la v.a. mélange $\Theta \sim Beta\,(\alpha = 1, \beta = 3)$.
On a

$$(I_i|\Theta = \theta) \sim Bern\,(\theta)$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
De plus, $(I_1|\Theta = \theta)$, ..., $(I_n|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes.
On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
On définit $N_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$.
Notation pour la fonction beta :

$$I\,(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}\,(1-u)^{\beta-1}\,du = \frac{\Gamma\,(\alpha)\,\Gamma\,(\beta)}{\Gamma\,(\alpha+\beta)}$$

**Questions (expliquer la démarche et indiquer clairement les valeurs demandées):**

(a) **(5 points).** Démontrer que

$$\Pr\,(I_i = 1) = E\,[\Theta] = \tau_1$$

et que

$$\Pr\,(I_i = 1, I_j = 1) = E\left[\Theta^2\right] = \tau_2.$$

(b) **(5 points).** Démontrer que

$$\Pr\,(N_n = k) = \binom{n}{k}\frac{I\,(a+k, b+n-k)}{I\,(a,b)}, \quad (k = 0, 1, ..., n)\,.$$

(c) **(4 points).** Calculer $\Pr\,(S_3 = 1000k)$, for $k = 0, 1, 2, 3$. (Pour vérifier: $\Pr\,(S_3 = 0) = 0.5$)

(d) **(2 points).** Calculer $E\,[\max\,(S_3 - 2000; 0)]$.

(e) **(4 points).** Refaire (c) et (d) en supposant $S_3' = 1000N_3'$ où $N_3' \sim Binom\,(3, \tau_1)$. Comparer et commenter brièvement.

FIN

**Solutions à l'examen partiel informatique**

1. **Solution à la question #1 : (30 points)**
   (a) **2pts** Indiquer la loi de $S_n$.
   On sait que $X_i \sim Gamma\,(\alpha = 0.5, \beta = 0.5)$ donc $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma\,(\alpha \times n, \beta)$car les $X_i$ sont iid.
   (b) **3pts** Calculer $F_{S_n}(n)$, pour $n = 10$, 100,1000.
   On obtient

$$\begin{aligned} F_{S_n}(n) &= P\,(S_n \leq n) = H\,(n, n \times \alpha, \beta) \\ &= \begin{cases} 0.5595067 & , n = 10 \\ 0.5188083 & , n = 100 \\ 0.5059472 & , n = 1000 \end{cases} \end{aligned}$$

   (c) **1pts** Calculer $E[X]$.
   On a $E[X] = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{0.5}{0.5} = 1$
   (d) **24pts** On définit la prime $\pi = (1+\eta)\,E[X]$ et la probabilité de ruine $\psi_n(u) = \Pr(S_n > u + n\pi)$, avec un surplus initial $u > 0$.
      i. **8pts** Calculer $\psi_n(20)$, pour $\pi_A = 1.1$ pour $n = 10$, 400, 1000 et 2000. Commenter et expliquer le comportment. Indiquer $\eta_A$.
      Pour $\psi_n(20) = \Pr(S_n > n\pi + u) = 1 - F_{S_n}(n\pi + u)$, on obtient

$$\begin{aligned} \psi_n(20) &= P\,(S_n > 20 + n * \pi_A) \\ &= 1 - F_{S_n}(20 + n * \pi_A) \\ &= \begin{cases} 0.0005867255 & , n = 10 \\ 0.0203311433 & , n = 400 \\ 0.0046931660 & , n = 1000 \\ 0.0003771876 & , n = 2000 \end{cases} \end{aligned}$$

      Valeur de $\eta_A = 0.1$
      Commentaires :
      - On observe $\pi_A > E[X]$
      - Comme prévu, la probablité de ruine tend vers 0
      - Elle ne tend pas de façon monotone
      ii. **8pts** Calculer $\psi_n(20)$, pour $\pi_B = 0.9$ pour $n = 10$, 400, 1000 et 2000. Commenter et expliquer le comportment. Indiquer $\eta_B$.

On obtient

$$\begin{aligned}\psi_n(20) &= P(S_n > 20 + n \times \pi_A) = \\ &= 1 - F_{S_n}(20 + n \times \pi_A) \\ &= \begin{cases} 0.001246045 & , n = 10 \\ 0.756652573 & , n = 400 \\ 0.965616812 & , n = 1000 \\ 0.998280995 & , n = 2000 \end{cases}\end{aligned}$$

Valeur de $\eta_A = -0.1$
Commentaires :

- On observe $\pi_A < E[X]$
- Comme prévu, la probablité de ruine tend vers 1
- Elle tend de façon monotone

iii. **8pts** Calculer $\pi_C$ et $\eta_C$ de telle sorte que $\psi_{1000}(20) = 1\%$.
On a la relation suivante :

$$VaR_\kappa(S_n) = 1000\pi_C + 20$$

On déduit

$$\begin{aligned}\pi_C &= \frac{VaR_\kappa(S_n) - 20}{1000} \\ &= \frac{1106.969 - 20}{1000} \\ &= 1.086969\end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\eta_C = 8.6969\%$$

2. **Solution à la question #2 : (30 points)**

   (a) **13pts** Pour un contrat, ...

   - **3 pts**... écrire l'expression de $F_{X_1}(x)$;
     On a

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x) &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) \Pr(B_1 + ... + B_k \leq x) \\ &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) H(x; \alpha k, \beta) \end{aligned}$$

     avec $\alpha = 1.5$ et $\beta = \frac{1}{1500}$
   - **3 pts**... calculer $F_{X_1}(0)$ et $F_{X_1}(40)$ (**vérification**: $F_{X_1}(10)$ =0.9940204 );
     On obtient $F_{X_1}(0) = 0.994018$
     On obtient $F_{X_1}(40) = 0.9940372$
   - **1 pt**... expliquer comment obtenir la $VaR_{0.99}(X_1)$;
     On utilise `optimize` ou `uniroot` pour trouver la $VaR_{0.99}(X_1)$ numériquement.
     Mais avant, il est important de s'assurer que $\kappa > F_X(0)$
   - **2 pts**... calculer $VaR_{0.99}(X_1)$;
     On obtient : 0
   - **2 pts**... donner l'expression de la $TVaR_{0.99}(X_1)$; et
     On a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X_1) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X_1 \times 1_{\{X_1 > VaR_\kappa(X_1)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k > VaR_\kappa(X_1)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) \frac{k}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(X_1); \alpha k + 1, \beta) \end{aligned}$$

     Comme $VaR_\kappa(X_1) = 0$, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X_1) &= \frac{1}{1-\kappa} E[X_1] \\ &= \frac{1}{1-0.99} 0.006 \times 1.5 \times 1500 \\ &= 1350 \end{aligned}$$

   - **2 pts**... calculer $TVaR_{0.99}(X_1)$.

On obtient

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X_1) &= \frac{1}{1-0.99} 0.006 \times 1.5 \times 1500 \\ &= 1350 \end{aligned}$$

(b) **12pts**Pour un portefeuille de $n = 1000$ contrats,

- **2 pt**. indiquer la loi de $W_n$;
  On a $W_n = \frac{1}{n} S_n$ où $S_n \sim PoisComp(n\lambda, F_C)$ avec $C \sim B \sim Gamma(\alpha, \beta)$ avec $\alpha = 1.5$, $\beta = \frac{1}{1500}$ et $\lambda = 0.006$
- **2 pts**. écrire l'expression de $F_{W_n}(x)$;On a

$$F_{W_n}(x) = F_{S_n}(nx)$$

  où

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= f_{N_n}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{N_n}(k) \Pr(C_1 + ... + C_k \leq x) \\ &= f_{N_n}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{N_n}(k) H(x; k, \beta) \end{aligned}$$

  avec $N_n \sim Poisson(\lambda n)$
- **2pts**. calculer $F_{W_n}(0)$ et $F_{W_n}(40)$ (**vérification**: $F_{W_n}(10)$ =0.3480221 );
  On obtient $F_{W_n}(0) = 0.002478752$
  On obtient $F_{W_n}(10) = 0.9979932$
- **1pt**. expliquer comment obtenir la $VaR_{0.99}(W_n)$;
  On sait que $VaR_{0.99}(W_n) = \frac{1}{n} VaR_{\kappa}(S_n)$
  On utilise `optimize` ou `uniroot` pour trouver la $VaR_{0.99}(S_n)$ numériquement avec $F_{S_n}(x)$
  Mais avant, il est important de s'assurer que $\kappa > F_{S_n}(0)$
- **1pt**... calculer $VaR_{0.99}(W_n)$;
  On obtient $VaR_{0.99}(W_n) = 33.66647$
- **2pts**... donner l'expression de la $TVaR_{0.99}(W_n)$; et
  On a

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(S_n) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[S_n \times 1_{\{S_n > VaR_{\kappa}(S_n)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} f_{N_n}(k) E\left[(C_1 + ... + C_k) \times 1_{\{C_1 + ... + C_k > VaR_{\kappa}(S_n)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} f_{N_n}(k) \frac{k}{\beta} \overline{H}(VaR_{\kappa}(S_n); \alpha k + 1, \beta) \end{aligned}$$

- **2pts** calculer $TVaR_{0.99}(W_n)$.
  On obtient $TVaR_{0.99}(W_n) = 37.58425$

(c) **5pts** On définit les bénéfices de mutualisation par contrat selon la mesure VaR et la mesure TVaR par

$$\begin{aligned} B_{0.99,n}^{VaR} &= VaR_{0.99}(X) - VaR_{0.99}(W_n) \\ B_{0.99,n}^{TVaR} &= TVaR_{0.99}(X) - TVaR_{0.99}(W_n). \end{aligned}$$

Pour $n = 1000$, ...

- **2pts** ... calculer les valeurs de $B_{0.99,n}^{VaR}$ et $B_{0.99,n}^{TVaR}$;
  **1.pt** On obtient $B_{0.99,n}^{VaR}$ =-33.66647
  **1.pt** On obtient $B_{0.99,n}^{TVaR}$ =1312.416
- **3pts** ... commenter les valeurs obtenues de $B_{0.99,n}^{VaR}$ et $B_{0.99,n}^{TVaR}$.
  **1.5pt** Comme prévu, on met en évidence l'incohérence de la mesure VaR. Selon cette mesure, il n'y aurait pas de bénéfice à mutualiser 1000 risques.
  **1.5pt** On observe la cohérence de la mesure TVaR. Il est possible de quantifier le bénéfice (par contrat) à mutualiser 1000 risques.

3. **Solution à la question #3 : (20 points):**

(a) **(3 points).** Calculer $E[T]$.

On a

$$\begin{aligned} E[T] &= E[W_1] + E[W_2] \\ &= E[W] + E[I]\,E[B] \\ &= 400 + 0.25 \times 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

(b) **(5 points).** Utiliser la proposition pour développer l'expression de $F_T(x)$ dans les termes de fonction de répartition de loi gamma.

On a

$$F_T(x) = \Pr(I=0)\,F_{W_1}(x) + \Pr(I=1)\,F_{W_1+B}(x)$$

où

$$F_{W_1}(x) = H\left(x; 4, \frac{1}{100}\right)$$

et

$$F_{W_1+B}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x; \alpha+k, \beta)$$

et les valeurs sont calculées à l'aide des formules récusrives fournies dans la proposition.

(c) **(12 points).** Dans (1), on somme les termes pour $k = 0, 1, ..., 100$ pour calculer $F_S(x)$, pour $x = 0$, 500 et 1000. (Vérification: $F_T(800) = 0.8588622$).

On obtient

| $x$ | $F_S(x)$ |
|---:|---:|
| 100 | 0.0142840 |
| 500 | 0.5993054 |
| 800 | 0.8588622 |
| 1000 | 0.9311296 |

Note pour la correction (si les étudiants ont fourni ces valeurs, on attribue quelques points) : Les 5 premières valeurs de $p$ ($p_0$, ..., $p_4$) sont : 0.250000 0.250000 0.187500 0.125000 0.078125.

Pour la proposition, les valeurs $\alpha = 6$ , $\beta = 0.01$ , et $\sigma = 0.25$

4. **Solution à la question #4 : (20 points)(20 points).** On considère un portefeuille homogène de risques échangeables $X_1$, ..., $X_n$ où

$$X_i = I_i \times b_i$$

avec $b_i = 1000$ pour $i = 1, 2, ..., n$.
Soit la v.a. mélange $\Theta \sim Beta\left(\alpha = 1, \beta = 3\right)$.
On a

$$\left(I_i | \Theta = \theta\right) \sim Bern\left(\theta\right)$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
De plus, $\left(I_1 | \Theta = \theta\right)$, ..., $\left(I_n | \Theta = \theta\right)$ sont conditionnellement indépendantes.
On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
On définit $N_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$.
Notation pour la fonction beta :

$$I\left(\alpha, \beta\right) = \int_0^1 u^{\alpha-1}\left(1-u\right)^{\beta-1} du = \frac{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}$$

**Questions (expliquer la démarche et indiquer clairement les valeurs demandées):**

(a) **(5 points).** Démontrer que

$$\Pr\left(I_i = 1\right) = E\left[\Theta\right] = \tau_1$$

et que

$$\Pr\left(I_i = 1, I_j = 1\right) = E\left[\Theta^2\right] = \tau_2.$$

On sait que

$$\Pr\left(I_i = 1 | \Theta\right) = \Theta$$

et

$$\Pr\left(I_i = 1, I_j = 1 | \Theta\right) = \Theta^2.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \Pr\left(I_i = 1\right) &= E_\Theta\left[\Pr\left(I_1 = 1 | \Theta\right)\right] \\ &= E\left[\Theta\right] \\ &= \tau_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Pr\left(I_i = 1, I_j = 1\right) &= E_\Theta\left[\Pr\left(I_1 = 1, I_j = 1 | \Theta\right)\right] \\ &= E\left[\Theta^2\right] \\ &= \tau_1 \end{aligned}$$

(b) **(5 points).** Démontrer que

$$\Pr\left(N_n = k\right) = \binom{n}{k} \frac{I\left(a+k, b+n-k\right)}{I\left(a,b\right)}, \quad \left(k = 0, 1, ..., n\right).$$

The conditional pmf of $N_m$ is

$$\Pr(N_m = k \mid \Theta = \theta) = \binom{m}{k} \theta^k \left(1-\theta\right)^{(m-k)},$$

which corresponds to the pmf of the binomial distribution.
The expression for the unconditional pmf of $N_m$ is given by

$$\begin{aligned} \Pr\left(N_m = k\right) &= \int_0^1 \Pr(N = k \mid \Theta = \theta) f_\Theta\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \binom{m}{k} \int_0^1 \theta^k \left(1-\theta\right)^{(m-k)} f_\Theta\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \binom{m}{k} \int_0^1 \theta^k \left(1-\theta\right)^{(m-k)} \times \frac{1}{I\left(\alpha,\beta\right)} \theta^{\alpha-1} \left(1-\theta\right)^{\beta-1} \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

which becomes

$$\Pr\left(N_m = k\right) = \binom{m}{k} \frac{I\left(\alpha+k, \beta+m-k\right)}{I\left(\alpha,\beta\right)},$$

where

$$\begin{aligned} I\left(\alpha,\beta\right) &= \int_0^1 \theta^{\alpha-1} \left(1-\theta\right)^{\beta-1} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)} \end{aligned}$$

(c) **(4 points).** Calculer $\Pr\left(S_3 = 1000k\right)$, for $k = 0, 1, 2, 3$. (Pour vérifier: $\Pr\left(S_3 = 0\right) = 0.5$)
On a

$$\Pr\left(S_3 = 1000k\right) = \Pr\left(N_3 = k\right)$$

For $k = 0$, on a

$$\Pr\left(N_3 = 0\right) = \binom{3}{0} \frac{\left(\frac{\Gamma(1+0)\Gamma(3+3-0)}{\Gamma(1+3+3)}\right)}{\left(\frac{\Gamma(1)\Gamma(3)}{\Gamma(1+3)}\right)} = 0.5$$

For $k = 1$, on a

$$\Pr(N_3 = 1) = \binom{3}{1} \frac{\left(\frac{\Gamma(1+1)\Gamma(3+3-1)}{\Gamma(1+3+3)}\right)}{\left(\frac{\Gamma(1)\Gamma(3)}{\Gamma(1+3)}\right)} = 0.3$$

For $k = 2$, on a

$$\Pr(N_3 = 2) = \binom{3}{2} \frac{\left(\frac{\Gamma(1+2)\Gamma(3+3-2)}{\Gamma(1+3+3)}\right)}{\left(\frac{\Gamma(1)\Gamma(3)}{\Gamma(1+3)}\right)} = 0.15$$

For $k = 3$, on a

$$\Pr(N_3 = 3) = \binom{3}{3} \frac{\left(\frac{\Gamma(1+3)\Gamma(3+3-3)}{\Gamma(1+3+3)}\right)}{\left(\frac{\Gamma(1)\Gamma(3)}{\Gamma(1+3)}\right)} = 0.05$$

(d) **(2 points).** Calculer $E[\max(S_3 - 2000; 0)]$.
On obtient

$$\begin{aligned} E[\max(S_3 - 2000; 0)] &= (3000 - 2000) \times 0.05 \\ &= 50 \end{aligned}$$

(e) **(4 points).** Refaire (c) et (d) en supposant $S_3' = 1000N_3'$ où $N_3' \sim Binom(3, \tau_1)$. Comparer et commenter brièvement.
Note: on sait que

$$\tau_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{1}{1+3} = 0.25$$

Les valeurs de

$$\Pr\left(S_3' = 1000N_3'\right)$$

sont : 0.421875 0.421875 0.140625 0.015625
On obtient

$$\begin{aligned} E[\max(S_3' - 2000; 0)] &= (3000 - 2000) \times 0.015625 \\ &= 15.625 \end{aligned}$$

**(1 pt pour le commentaire).** La relation de dépendance positive introduite entre les v.a. $I_1$, $I_2$, $I_3$ conduit à un risque global pour le portefeuille. On observe que la prime stop-loss est plus élevée pour le portefeuille homogène échangeable.