**ACT-2011**
**Hiver 2021**

**Chapitre 14**

**Options exotiques : I**

**Thomas Landry, M.Sc., ASA, AICA**
**École d'actuariat, Université Laval**

**Préface**

Une partie de ces notes de cours est reprise ou inspirée de celles de l'ancienne version du cours montée par Claire Bilodeau, et la propriété intellectuelle de ce document est donc grandement partagée avec elle.

Les options dites « classiques » sont les options d'achat et de vente, européennes et américaines. Dans ce chapitre, nous survolerons des options dites « asiatiques » ou encore de « deuxième génération ».

*Lecture complémentaire : chapitre 14 DM*

## 14.1. Introduction

À titre d'illustration, supposons une compagnie XYZ qui vend beaucoup de ses produits en Euros mais qui les produit en Amérique. Elle devra donc convertir des Euros en dollars tôt ou tard. Elle est ainsi exposée au risque de taux de change et pourrait vouloir se protéger.

La compagnie pourrait acheter une option de vente sur les Euros échéant dans un an. Cependant, ceci la protégera une seule journée, soit le jour de l'échéance. Elle pourrait autrement acheter plusieurs options avec des échéances différences, mais ça pourrait finir par couter cher et devenir complexe…

Ici, on pourrait vouloir cibler le ***taux de change moyen lors d'une période donnée***. Il faudrait ainsi concevoir une option venant à échéance dans un an mais dont le sous-jacent serait évalué en fonction du taux de change moyen pendant l'année…!

Il s'agirait d'une option asiatique, et donc pas une option dite classique. Ces options permettent de gérer des risques mais également de spéculer, au même titre que ce qui pouvait être fait avec les options classiques. Elles peuvent généralement être évaluées et couvertes de la même façon que les options classiques et sont courantes dans la pratique.

Au sujet des options asiatiques, quelques questions à se poser :

- Comment se comparent les valeurs à l'échéance?
- Est-ce qu'on peut approximer une option asiatique avec un portefeuille d'autres options?
- Est-ce qu'elle vaut plus ou moins qu'une option classique?
- Pourquoi les utiliser?
- Comment peut-on couvrir une option asiatique?

# 14.2. Les options asiatiques

## 14.2.1. Les grandes lignes

Les options asiatiques ont généralement une ***valeur à l'échéance qui dépendra du prix moyen du sous-jacent sur une certaine période de temps***. Ces options sont ainsi dépendantes du chemin suivi, contrairement aux options classiques, et la valeur à l'échéance dépendra de la trajectoire du prix du sous-jacent.

Remarques :

- On parle parfois d'option sur moyenne
- Une valeur à l'échéance qui dépend de la moyenne sert également à ***éviter l'impact de manipulations ponctuelles ou de mouvements brusques soudains***. Par exemple, le règlement des obligations convertibles se fait parfois sur la base du prix moyen sur un certain nombre de jours avant l'échéance.
- Un parallèle peut être fait avec le lissage d'actifs dans certaines méthodes d'évaluations actuarielles qui doivent être faites à une date donnée mais qui permettent de considérer l'actif financier moyen d'un portefeuille sur une certaine période de temps (par exemple pour un régime de retraite)

**Exemple : problème de couverture de XYZ**

On définit $x_i$ comme le taux de change au mois i pour convertir des Euros (€) en dollars ($). La compagnie XYZ a des entrées d'argent de 100M d'Euros (€) par mois. La valeur à la fin de l'année est de :

$$Valeur \text{ à } t = 1 = 100\,000\,000 \sum_{i=1}^{12} x_i\, e^{r(12-i)/12}$$

On présume que la conversion se fait à la fin du mois. Quelques possibilités de couverture :

- Série de contrats à terme gré-à-gré. Un par mois avec coût initial nul
- Swap d'euros pour des dollars (sujet du chapitre 8, pas abordé dans le présent cours)
- Série d'options de vente. Un par mois, coût initial non-nul

Les options ont un coût car elles offrent une protection sans limiter le gain potentiel. Ce qu'on voudrait vraiment protéger, c'est $\sum_{i=1}^{12} x_i$ sans se soucier du taux d'intérêt sans risque, pour simplifier.

### 14.2.2. Options sur la moyenne

Il existe 8 versions de base des options sur la moyenne :

- Option d'achat ou de vente
- Moyenne arithmétique ou géométrique
- Moyenne comme sous-jacent ou prix d'exercice (moyenne de $S_T$ ou de K)

**Définition de la moyenne :**

- Moyenne arithmétique : plus courante, option difficile à évaluer avec :

$$A(T) = \sum_{i=1}^{N} \frac{S_{ih}}{N}$$ avec $T$ = échéance, $h$ = temps entre les périodes et $N = \frac{T}{h}$

- Moyenne géométrique : moins courante, plus facile à évaluer avec :

$$G(T) = \prod_{i=1}^{N} (S_{ih})^{1/N}$$

Remarque : $G(T) \leq A(T)$

**Moyenne sur sous-jacent ou sur prix d'exercice :**

- Sur sous-jacent → option sur moyenne de cours

  **Si option d'achat :** $\max\left(0; \begin{Bmatrix} A(T) \\ G(T) \end{Bmatrix} - k\right)$

  **Si option de vente :** $\max\left(0, k - \begin{Bmatrix} A(T) \\ G(T) \end{Bmatrix}\right)$

- Sur prix d'exercice → option sur prix d'exercice moyen

  **Si option d'achat :** $\max\left(0; S_T - \begin{Bmatrix} A(T) \\ G(T) \end{Bmatrix}\right)$

  **Si option de vente :** $\max\left(0; \begin{Bmatrix} A(T) \\ G(T) \end{Bmatrix} - S_T\right)$

## 14.2.3. Comparaison des options asiatiques

↪ du S-J

Le fait de prendre une moyenne du prix a comme effet de réduire la volatilité par rapport au prix à l'échéance $S_T$ (bref, la loi des grands nombres). Ainsi, si le nombre d'observations N dans l'option asiatique augmente, le prix de l'option diminuera (si elle est sur moyenne de cours).

Pour les options sur prix d'exercice moyen, le prix augmentera quand N augmentera puisque ceci réduira la corrélation entre la moyenne et le prix d'échéance T. Voir tableau 14.1 p. 413 DM pour une illustration concrète.

Question : pourquoi le prix des options est de 0$ pour N = 1 avec la méthode du prix d'exercice moyen?

Réponse : parce qu'avec N = 1, on aura nécessairement que $S_T = A(T)$ ou $G(T)$ selon qu'on prenne la moyenne arithmétique ou géométrique (et donc pas vraiment intéressant).

Une option sur prix d'exercice moyen servira souvent à « protéger » la valeur à laquelle on peut vendre une position accumulée dans le temps.

## 14.2.4. Le cas de XYZ avec une option asiatique

Problème : Le risque pour XYZ est une baisse de la valeur de l'Euro par rapport au dollar. Autrement dit, les biens vaudront moins en dollars une fois la conversion faite si le taux de change varie dans cette direction.

Solution : une option de vente sur moyenne arithmétique de cours avec comme valeur à l'échéance :

$$Valeur\ à\ l'échéance = max\left(0; K - \frac{1}{12}\sum x_i\right)$$

↗ sur S-J/moyenne de cours

Et par rapport aux options classiques, on aura l'inégalité suivante pour les options de vente :

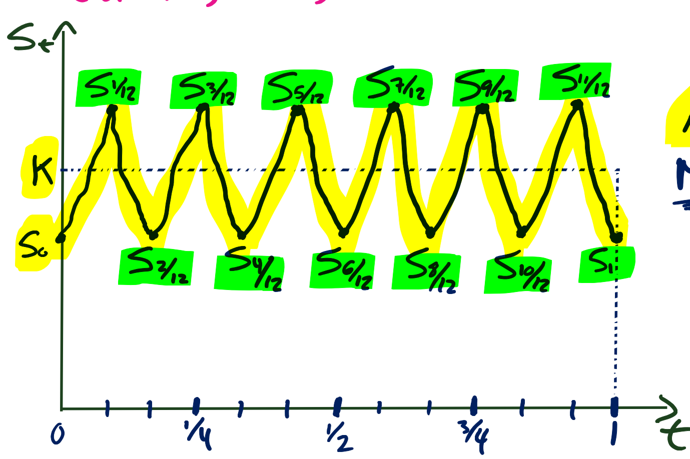
$$12 * P_A(K,1) \leq 12 * P_G(K,1) \leq \sum P\left(K, \frac{i}{12}\right) \leq 12 * P(K,1)$$

$$\underbrace{C_G(K,1) \overset{①}{\leq} C_A(K,1)}_{\text{Car } A(T) > G(T)} \overset{②}{\leq} \sum_{j=1}^{12} \frac{C(K,\frac{i}{12})}{12} \overset{③}{\leq} C(K,1)$$

① Car $G(T) < A(T)$ (pour $S_T \geq 0$)

② Voir illustration ⟹

③ Voir 9.3.4.




$A(1) = K \rightarrow A(T) - K = 0$

Mais $S_{i/12} - K > 0$ pour i impair

# 14.3. Options à barrière

## 14.3.1. La théorie

Soit $T_a$ le temps auquel un mouvement Brownien standard atteint le niveau a pour la première fois. Alors,

$$Pr(T_a \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{|a|}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

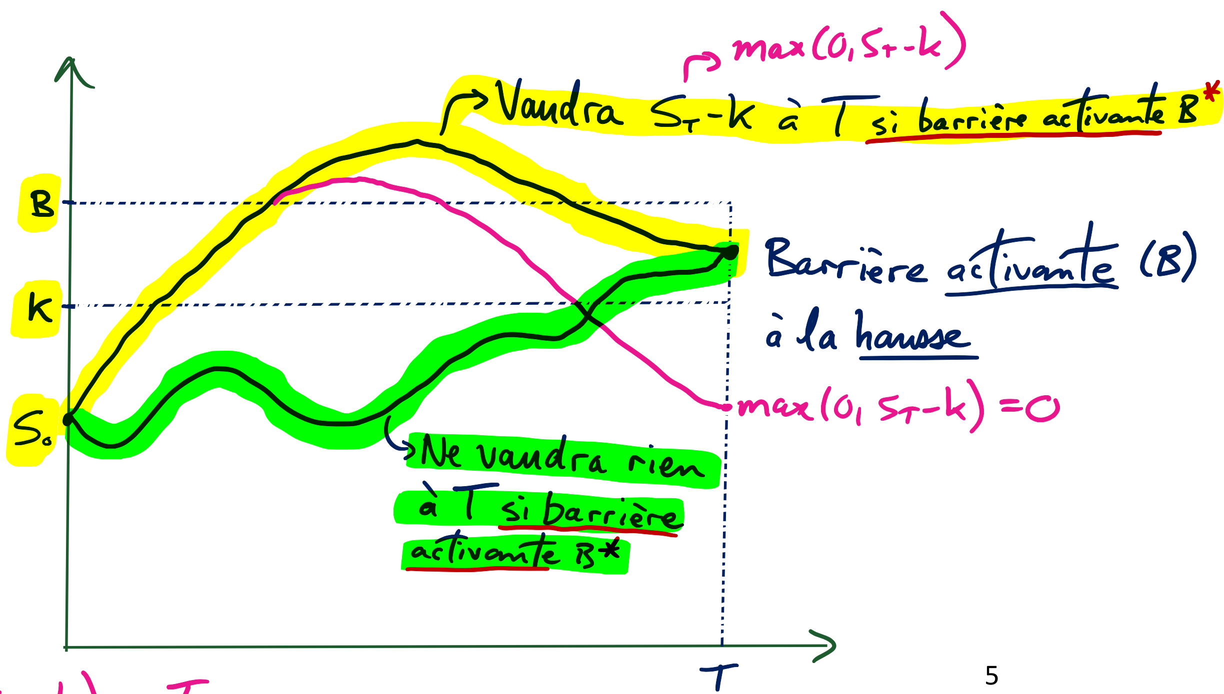
Il est ainsi possible de modéliser la probabilité qu'un processus quelconque (par exemple, la valeur d'un sous-jacent) monte ou descende au-delà ou en-dessous d'un certain niveau avant une période de temps donnée. En dérivant la probabilité précédente, on peut définir une fonction de densité liée à ce type d'évènement, et ainsi attribuer une distribution (et donc une espérance, une variance, etc) au temps auquel cet évènement se produira. Ceci aidera pour définir le prix d'une option à barrière.

Définition : une option à barrière a une valeur à l'échéance qui dépend du passage (ou non) de la trajectoire du prix du sous-jacent par une barrière d'ici l'échéance. Le fait de traverser la barrière pourra ainsi activer l'option ou non, selon les caractéristiques de l'option.

Par défaut, on présumera que la barrière est définie par un seul prix (donc, plus question de la moyenne du prix du sous-jacent ici).

Puisque la valeur à l'échéance d'une option à barrière est comme celle d'une option classique si elle est activée à l'échéance, mais que leur « existence » dépend de la barrière, leur valeur est toujours inférieure ou égale à celle de l'option classique correspondante.

Illustration :




*Inverse si barrière désactivante B!

$\max(0, S_T - k) \times \underline{I_B}$

### 14.3.2. Types d'options à barrière

**Il y a trois types d'options à barrière :**

1. Option à barrière **désactivante** : traverser la barrière désactive l'option. Si le prix initial du sous-jacent est supérieur à la barrière, on parlera d'une option à barrière désactivante à la baisse, et vice-versa (barrière désactivante à la hausse autrement).
2. Option à barrière **activante** : traverser la barrière active l'option. Si le prix initial du sous-jacent est supérieur à la barrière, on parlera d'une option à barrière active à la baisse, et vice-versa (barrière activante à la hausse autrement).
3. Option à barrière **avec remise** : traverser la barrière déclenche le paiement, immédiat ou à l'échéance (on parle alors de remise différée d'un montant prédéterminé).

↳ Independant de $S_T$

Le calcul de la parité des options à barrière va comme suit :

$$Activante + Désactivante = Classique$$

### 14.3.3. Couverture du risque de change

Retour sur le cas de XYZ… Quelle option pourrait intéresser la compagnie?

- Désactivante à la baisse…? Non, c'est la baisse qu'on évite!
- Activante à la hausse? Non, ça ne couvre pas la protection désirée
- Activante à la baisse? Possiblement, sauf si la barrière est supérieure ou égale au prix d'exercice K, elle serait moins utile…
- Désactivante à la hausse : Possiblement, ça aurait le défaut de potentiellement enlever la protection, mais ça couterait moins cher…!
- Une option classique coûte plus cher MAIS est beaucoup plus simple…!

## 14.4. Option sur option (option composée)

### 14.4.1. Conception

Une option sur option, ou option composée, est ***une option d'achat ou de vente sur une option***. On dira que ***le sous-jacent de l'option composée est une autre option*** (d'achat ou de vente).

***Attention, ceci impliquera deux dates d'échéance et deux prix d'exercice!

À l'échéance de l'option composée, on choisit ou non d'exercer l'option composée afin de pouvoir acheter (option composée d'achat) ou de vendre (option composée de vente) l'option qui sert de sous-jacent.

Ensuite, si l'option a été achetée, on choisira de l'exercer ou non à sa date d'échéance. Si l'option a été vendue, c'est la personne avec la position inverse (à qui on a vendu l'option) qui choisira d'exercer ou non l'option.

<u>Quelques hypothèses :</u>

- Soit $T_1$ l'échéance de l'option composée.
- Soit $T_2 > T_1$ l'échéance de l'option sous-jacente.
- Soit $K_1$ le prix d'exercice de l'option composée.
- Soit $K_2$ le prix d'exercice de l'option sous-jacente.

Alors on aura comme valeur à l'échéance :

- Achat sur achat (Call on Call, CoC) = $\max\left(0; \overbrace{C(S_T, K_2, T_2 - T_1)}^{\text{Val. du Call à } T_1} - K_1\right)$
- Vente sur achat (Put on Call, PoC) = $\max\left(0; K_1 - C(S_T, K_2, T_2 - T_1)\right)$
- Achat sur vente (Call on Put, CoP) = $\max\left(0; P(S_T, K_2, T_2 - T_1) - K_1\right)$
- Vente sur vente (Put on Put, PoP) = $\max\left(0; K_1 - P(S_T, K_2, T_2 - T_1)\right)$

S-J

Le prix du sous-jacent de l'option composée ne suit pas une lognormale. Par contre, le prix du sous-jacent de l'option sous-jacente est réputé suivre approximativement une lognormale et c'est cette réalisation qui permet d'évaluer l'option sur option.

<u>Remarques</u> :

- Il est possible de trouver le prix $S^*$ tel que $C(S_{T_1} = S^*, K_2, T_2 - T_1) = K_1$. L'option « achat sur achat » sera levée si $S_{T_1} > S^*$ et l'option « vente sur achat » sera levée si $S_{T_1} < S^*$.
- Il est possible de trouver le prix $S^*$ tel que $P(S_{T_1} = S^*, K_2, T_2 - T_1) = K_1$. L'option « achat sur vente » sera levée si $S_{T_1} < S^*$ et l'option « vente du vente » sera levée si $S_{T_1} > S^*$.
- Les formules sont présentées en annexe du livre de référence. Mathématiquement, il faut regarder la distribution bivariée de $S_{T_1}$ et $S_{T_2}$.

## 14.4.2. Parité des options composées

<u>Quelques formules :</u>

Prix initial de l'option sous-jacente

$$CoC(S, K_2, K_1, \sigma, r, T_2, T_1, \delta) - PoC(S, K_2, K_1, \sigma, r, T_2, T_1, \delta) = \boxed{C(S, K_2, \sigma, r, T_2, \delta)} - K_1 e^{-rT_1}$$

$$CoP(S, K_2, K_1, \sigma, r, T_2, T_1, \delta) - PoP(S, K_2, K_1, \sigma, r, T_2, T_1, \delta) = \boxed{P(S, K_2, \sigma, r, T_2, \delta)} - K_1 e^{-rT_1}$$

## 14.5. Options avec écart (gap options, options avec discontinuité)

Généralement, le prix d'exercice détermine à la fois quand l'option est levée et combien elle vaut lorsqu'elle est levée. Il est possible de prévoir deux prix d'exercice différents, ce qui constitue une option avec écart (gap option, option avec discontinuité).

Ainsi, une option d'achat avec écart payera $S_t - K_1$ si $S_t > K_2$.

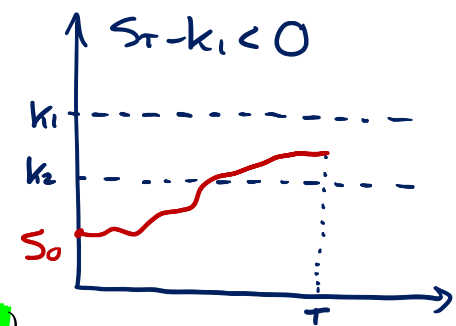
On aura ainsi :

$$C(S, K_1, K_2, \sigma, r, T, \delta) = Se^{-\delta T}N(d_1) - K_1 e^{-rT}N(d_2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{ln\left(S/_{K_2}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$




Également, une option de vente avec écart payera $K_1 - S_t$ si $S_t < K_2$.

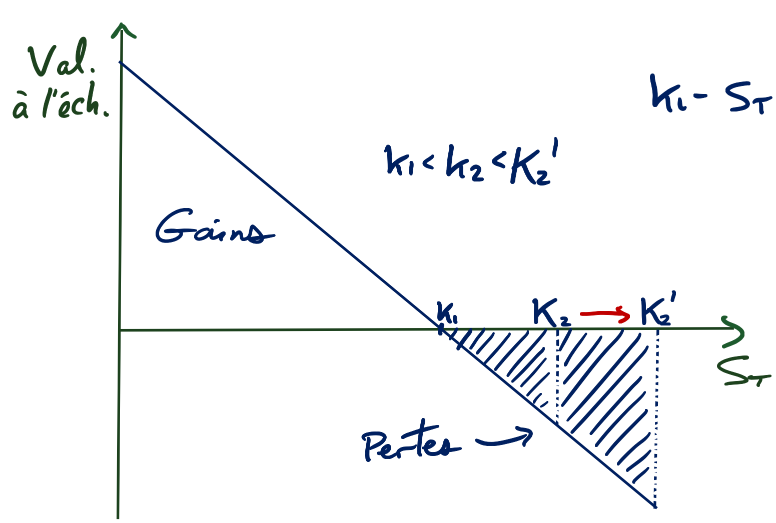
On aura ainsi :

$$P(S, K_1, K_2, \sigma, r, T, \delta) = K_1 e^{-rT}N(-d_2) - Se^{-\delta T}N(-d_1)$$

Avec les mêmes détails pour $d_1$ et $d_2$.

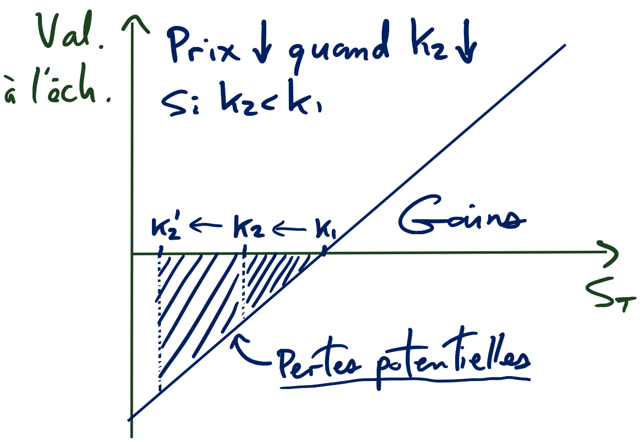
<u>Remarques</u> :

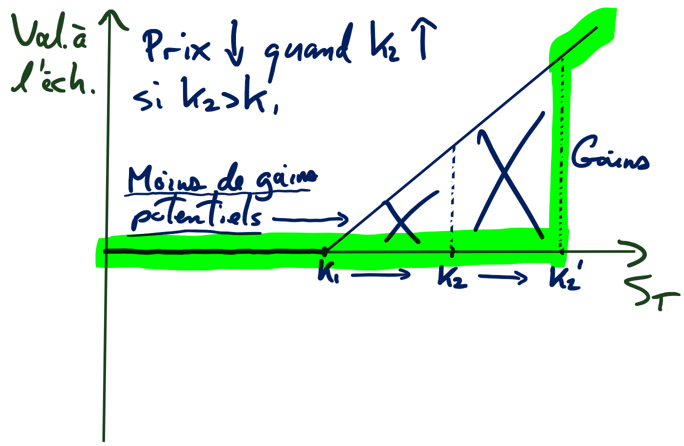
- Si $K_1 = K_2$, ceci revient à une option classique.
- Il est toujours possible, connaissant le prix « déclencheur » $K_2$, de trouver le prix d'exercice $K_1$ pour créer une option à coût nul.
- Augmenter $K_2$ revient à réduire le prix d'une option de vente lorsque $K_1 < K_2$



- Autrement, si $K_1 > K_2$, augmenter $K_2$ fera augmenter le prix de l'option de vente


- Un constat semblable (à l'inverse) peut être fait pour l'option d'achat.




## 14.6. Options d'échange (exchange option)

Une option d'échange, ou option sur différence de rendement, a comme valeur à l'échéance $max(0; S_T - K_T)$ avec $K_T$ qui est le prix d'un autre titre risqué, $S_T$ étant le sous-jacent risqué, tel que vu dans un chapitre précédent (avec une notation différente pour $K_T$, on avait plutôt utilisé $Q_T$ de manière équivalente, mais on gardera ici la notation du livre de référence).

**<u>Option d'échange européenne</u>**

Soit $S_t$ le prix du premier titre risqué avec force de dividende $\delta_S$ et écart-type $\sigma_S$, et $K_t$ le prix du premier titre risqué avec force de dividende $\delta_K$ et écart-type $\sigma_K$. On définit le coefficient de corrélation linéaire entre les prix des deux titres comme étant $\rho$.

On considère une option d'échange qui permet d'obtenir un titre S en échange d'un titre K à l'échéance. La généralisation de l'équation de Black-Scholes impliquera :

$$C(S, K, \boldsymbol{\sigma}, r, T, \delta_S, \delta_K) = Se^{-\delta_S T}N(d_1) - K\ e^{-\delta_K T}N(d_2)$$

$$Var[S-K] = Var[S] + Var[K] \underbrace{- 2\,cov(S,K)}_{-2\rho\sigma_S\sigma_K}$$

Avec :

$$d_1 = \frac{ln(S/_K) + \left(\delta_K - \delta_S + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$* \lim_{\sigma \to 0} d_2 = d_1$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_K^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_K}$$

Remarques :

- Pour la variance, la formule provient de :

$$\sigma = \sqrt{Var\left[ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) - ln\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)\right]} = \sqrt{Var[R_S - R_K]}$$

- Pour l'option de vente correspondante, on peut simplement réécrire l'équation de l'option d'achat ci-haut, mais en inversant les deux titres $S_t$ et $K_t$ . En effet, on aura que :

$$P(S, K, \boldsymbol{\sigma}, r, T, \delta_S, \delta_K) = Ke^{-\delta_K T}N(-d_2) - Se^{-\delta_S T}N(-d_1) = C(K, S, \boldsymbol{\sigma}, r, T, \delta_K, \delta_S)$$

*Voir exemple 14.3. p. 425 DM.*

Lecture complémentaire : DM sections 18.1 et 18.2