**ACT-2011**
**Hiver 2021**

**Chapitre 18**

**La distribution lognormale**

**Thomas Landry, M.Sc., ASA, AICA**
**École d'actuariat, Université Laval**

**Préface**

Une partie de ces notes de cours est reprise ou inspirée de celles de l'ancienne version du cours montée par Claire Bilodeau, et la propriété intellectuelle de ce document est donc grandement partagée avec elle.

On suppose que le prix $S_t$ suit une lognormale, ou encore que le rendement composé continûment suit une loi normale (i.e. une force de rendement).

*Lecture complémentaire : chapitre 18 DM*

# 18.1. La distribution normale

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_X(x) = \frac{e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,, x \in \mathbb{R}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dy\,, x \in \mathbb{R}$$

$$E[X] = \mu\,, Var[X] = \sigma^2$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\left(t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)}$$

Cas particulier : loi normale centrée réduite avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$

Transformation pour loi normale centrée réduite à partir d'une loi normale :

$$Z = \frac{(x-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1) \Leftrightarrow X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Notation : $\Pr\,[Z \leq d] = N(d)$

$$N(-d) = 1 - N(d)$$

$$\Pr[-d \leq Z \leq d] = 2N(d) - 1$$

$$\Pr[X \leq b] = \Pr\left[\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right] = N\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Pr[X > b] = 1 - \Pr[X \leq b] = 1 - N\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) = N\left(\frac{\mu-b}{\sigma}\right)$$

Somme de variables aléatoires normales :

$$E[X_i] = \mu_i$$

$$Var[X_i] = \sigma_i^2$$

$$Cov[X_i, X_j] = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i\omega_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

La loi normale est une loi dite « stable ». Comme pour les autres lois stables, la distribution d'une somme suit la même distribution que les composantes (mais pas avec les mêmes paramètres).

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i\,, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i\omega_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\right)$$

Cas particulier :

$$aX_1 + bX_2 \sim N(a\mu_1 + b\mu_2\,,\ a^2\sigma_1^2 + a^2\sigma_1^2 + 2ab\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)$$

Théorème central limite : une somme de variables aléatoires indépendantes avec variance finie a une distribution qui tend vers une loi normale. Ce théorème justifie l'idée que le rendement composé continûment soit normalement distribué.

## 18.2. Distribution lognormale

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)\,, \qquad Y = e^X \rightarrow Y \sim Lognormale(\mu, \sigma^2)$$

$$Y \sim Lognormale(\mu, \sigma^2)\,, \qquad X = \ln(Y) \rightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_Y(y) = \frac{e^{\left(-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\,, y \in \mathbb{R}^+$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^{\left(-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\, dy\,, y \in \mathbb{R}^+$$

$$E[Y] = E[e^X] = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}\,, E[Y^2] = E[e^{2X}] = e^{(2\mu+2\sigma^2)}$$

$$Var[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = e^{(2\mu+2\sigma^2)} - e^{(2\mu+\sigma^2)} = e^{(2\mu+\sigma^2)}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

$$Y_1Y_2 = e^{X_1}e^{X_2} = \overbrace{e^{X_1+X_2}}^{X_1+X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)} \sim Lognormale(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Soit $R(0,t) = \frac{\ln(S_t)}{\ln(S_0)}$ le rendement composé continument de 0 à t (pas annualisé). Si $R(0,t)$ suit une loi normale, alors $S_t = S_0 e^{R(0,t)}$ suit une loi lognormale, ce qui nous assure que $S_t > 0$.

Dans le modèle binomial, grâce au théorème central limite, $R(0,t)$ tend vers une loi normale quand $n \rightarrow \infty$ pour une période de temps (échéance) finie (ou encore quand $h \rightarrow 0$) et $S_t$ tend ainsi que une loi lognormale.

La loi lognormale a un coefficient d'asymétrie (skewness) positif et sa moyenne arithmétique est supérieure à sa moyenne géométrique car $E[Y] = E[e^X] = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)} \geq e^{E[X]} = e^{\mu}$.

## 18.3. Modèle binomial du prix d'une action

Soit $R(t_1, t_2)$ le rendement composé continument entre $t_1$ et $t_2$ pour un titre quelconque. Alors :

$$S_{t_1} = S_0 e^{R(0,t_1)}$$

$$S_{t_2} = S_{t_1} e^{R(t_1,t_2)} = S_0 e^{R(0,t_1)} e^{R(t_1,t_2)} = S_0 e^{R(0,t_1)+R(t_1,t_2)} = S_0 e^{R(0,t_2)}$$

On suppose que les rendements sont i.i.d. pour des intervalles de longueurs égales qui ne se touchent pas (i.e. $R\big((i-1)h, ih\big)$ avec $h = \frac{T}{n}$).

Ainsi :

$$R(0,t) = \sum_{i=1}^{n} R\big((i-1)h, ih\big)$$

Si on suppose que $R\big((i-1)h, ih\big) \sim N\big(\alpha_h, \sigma_h^2\big)$, alors :

$$E[R(0,t)] = n\alpha_h \,, Var[R(0,t)] = n\sigma_h^2$$

Soit $\delta$ la force de dividende (taux de dividende continu), $\alpha$ la force de rendement moyenne et $\sigma$ la volatilité (tous sur base annuelle). Alors on établit la dynamique du rendement comme suit :

$$R(0,t) = ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N\left(\left(\alpha - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \,, \sigma^2 t\right)$$

Remarque : si on met $\alpha_h$ et $\sigma_h$ sous base annuelle, alors on aura $\alpha = \frac{\alpha_h}{h}$ et $\sigma = \frac{\sigma_h}{\sqrt{h}}$. On peut ainsi réécrire :

$$E[R(0,t)] = t\alpha \,, Var[R(0,t)] = t\sigma^2$$

L'intérêt derrière une telle paramétrisation est de pouvoir réécrire :

$$E[S_t] = E\big[S_0 e^{R(0,t)}\big] = S_0 E\big[e^{R(0,t)}\big] = S_0 e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{1}{2}\sigma^2 t} = S_0 e^{(\alpha-\delta)t}$$

$$R(0,t) = ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(\alpha - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}\,Z \Leftrightarrow S_t = S_0 e^{R(0,t)} = S_0 e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}\,Z}$$

La médiane de $S_t$ est $S_0 e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)t} = E[S_t] e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} < E[S_t]$. Changer $\sigma$ affectera la médiane mais pas la moyenne avec la paramétrisation choisie pour le modèle.

±1 donc $\pm\sigma\sqrt{t}$

Pour un déplacement d'un écart-type, i.e. pour $Z = \pm 1$, on aura $S_t = S_0 e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)t \pm \sigma\sqrt{t}\,Z}$, ce qui ressemble au modèle de l'arbre binomiale.

## 18.4. Probabilités lognormales

### 18.4.1. Lien avec les options et le modèle de Black-Scholes

On cherchera $Pr[S_t \leq K]$ ou encore $Pr[S_t \geq K]$ en présumant que K est le prix d'exercice d'une option.

$Pr(S_T \geq k) = N(d_2)$

$$Pr[S_t \leq K] = Pr[ln(S_t) \leq ln(K)] = Pr[ln(S_t) - ln(S_0) \leq ln(K) - ln(S_0)]$$

$$= N\left(\frac{ln(K) - ln(S_0) - \left(\alpha - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) = N\left(-\left(\frac{ln(S_0) - ln(K) + (\alpha - \delta)t}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)\right)$$

$$= N(-\hat{d}_2)$$

… où $\hat{d}_2$ a la même forme que $d_2$ dans le modèle de Black-Scholes avec $\alpha$ au lieu du taux sans risque r.

À l'inverse, on peut démontrer que :

$$Pr[S_t \geq K] = \cdots = 1 - Pr[S_T \leq k]$$

$$= 1 - N(-\hat{d}_2) = N(\hat{d}_2)$$

<u>Remarque</u> : avec $\alpha = r$, on obtient une probabilité neutre au risque.

### 18.4.2. Intervalles de prédiction lognormaux

On suppose que veut trouver un intervalle symétrique en termes de probabilités tel que :

$$Pr\left[S_t^d \leq S_t \leq S_t^u\right] = 1 - p$$

Avec $Pr\left[S_t \leq S_t^d\right] = Pr[S_t^u \leq S_t] = \frac{p}{2}$. Il suffira de trouver $Z_{\frac{p}{2}} = N^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)$

On obtiendra :

$$S_t^d = S_0 e^{\left(\alpha - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma\sqrt{t}\, Z_{\frac{p}{2}}}$$

$$S_t^u = S_0 e^{\left(\alpha - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}\, Z_{\frac{p}{2}}}$$

Puisque $Pr\left[ln\left(\frac{S_t^d}{S_0}\right) \leq R(0,t) \leq ln\left(\frac{S_t^u}{S_0}\right)\right] = 1 - p$ est l'intervalle symétrique en termes de probabilités avec $Pr\left[R(0,t) \leq ln\left(\frac{S_t^d}{S_0}\right)\right] = \frac{p}{2}$ et $Pr\left[ln\left(\frac{S_t^u}{S_0}\right) \leq R(0,t)\right] = \frac{p}{2}$.

## 18.4.3. Espérance conditionnelle du prix

On cherchera les espérances conditionnelles $E[S_t|S_t \geq K]$ et $E[S_t|S_t \leq K]$ en présumant encore que K est le prix d'exercice d'une option.

Le développement de l'espérance conditionnelle avec la loi normale et/ou la loi lognormale est long et implique dans un premier temps de trouver l'espérance dite « partielle » ou encore « tronquée » de $S_t$, soit $E[S_t\ I_{S_t \geq K}]$ et/ou $E[S_t\ I_{S_t \leq K}]$, pour finalement obtenir :

max(0; $S_T$ - k)

$$E\left[S_t\ I_{S_t \leq K}\right] = S_0 e^{(\alpha-\delta)t} N\left(-\frac{ln(S_0) - ln(K) + (\alpha-\delta)t}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) = \boldsymbol{S_0 e^{(\alpha-\delta)t} N(-\hat{d}_1)}$$

$$E\left[S_t\ I_{S_t \geq K}\right] = E[S_t\ ] - E\left[S_t\ I_{S_t \leq K}\right] = E[S_t\ ] - S_0 e^{(\alpha-\delta)t} N\left(-\hat{d}_1\right) = S_0 e^{(\alpha-\delta)t}\left[1 - N\left(-\hat{d}_1\right)\right]$$
$$= \boldsymbol{S_0 e^{(\alpha-\delta)t} N(\hat{d}_1)}$$

… où $\hat{d}_1$ a la même forme que $d_1$ dans le modèle de Black-Scholes avec $\alpha$ au lieu du taux sans risque r.

Ainsi, on aura :

$$E[S_t|S_t \leq K] = \frac{E\left[S_t\ I_{S_t \leq K}\right]}{Pr[S_t \leq K]} = \frac{\boldsymbol{S_0 e^{(\alpha-\delta)t} N(-\hat{d}_1)}}{\boldsymbol{N(-\hat{d}_2)}}$$

$$E[S_t|S_t \geq K] = \frac{E\left[S_t\ I_{S_t \geq K}\right]}{Pr[S_t \geq K]} = \frac{\boldsymbol{S_0 e^{(\alpha-\delta)t} N(\hat{d}_1)}}{\boldsymbol{N(\hat{d}_2)}}$$

<u>Remarque</u> : avec $\alpha = r$, on obtient des espérances neutres au risque. Pour distinguer ces probabilités et ces espérances versus celles dans un environnement dit neutre au risque, on réécrira (pour des mesures « réelles », et donc ***pas*** neutres au risque) :

$Pr^*[S_t \leq K]$, $Pr^*[S_t \geq K]$, $E^*\left[S_t\ I_{S_t \leq K}\right]$, $E^*\left[S_t\ I_{S_t \geq K}\right]$, $E^*[S_t|S_t \leq K]$, $E^*[S_t|S_t \geq K]$, etc.

### 18.4.4. La formule de Black-Scholes

En présumant un environnement neutre au risque, et en reprenant les formules précédentes avec $\alpha = r$, on pourra dériver la formule de Black-Scholes pour une option d'achat ou une option de vente. On aura :

$$C(S_0, K, r, \delta, T, \sigma) = E^*[e^{-rT} max(0, S_T - K)] = e^{-rT} E^*\left[(S_T - K)\, I_{S_t \geq K}\right]$$

$$= e^{-rT}\left[E^*\left[S_T\, I_{S_t \geq K}\right] - K * \underbrace{E^*\left[\, I_{S_t \geq K}\right]}_{Pr\left[\, I_{S_t \geq K}\right]}\right] = e^{-rT}\left[S_0 e^{\,(r-\delta)t} N(d_1) - K * N(d_2)\right]$$

$$= \boldsymbol{S_0 e^{\,-\delta t} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)}$$

En exercice, vérifier que $P(S_0, K, r, \delta, T, \sigma) = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{\,-\delta t} N(-d_1)$ avec le même type de raisonnement.

## 18.5. Estimation des paramètres de la loi lognormale

On suppose qu'on observe des prix d'un titre à intervalles réguliers de longueurs h. Soit $S_0, S_h, S_{2h} \dots, S_{nh}$ les prix observés et $r_i = ln\left(\frac{S_{ih}}{S_{(i-1)h}}\right)$ le rendement composé continument pendant la i$^{ème}$ période.

$$r_i = ln\left(\frac{S_{ih}}{S_{(i-1)h}}\right) \sim N\left(\left(\alpha - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)h\,,\ \sigma^2 h\right)$$

En présumant le taux de dividende connu, on voudra estimer $\alpha$ et $\sigma$.

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n}, \qquad S_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2}{n-1}$$

Avec les données empiriques, on obtient les statistiques de $\bar{r}$ et $S_r^2$ et avec deux équations, deux inconnues :

$$S_r^2 = \hat{\sigma}^2 h \Longrightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{S_r^2}{h}}$$

$$\bar{r} = \left(\hat{\alpha} - \delta - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)h = \left(\hat{\alpha} - \delta - \frac{\left(\frac{S_r^2}{h}\right)}{2}\right)h \Longrightarrow \hat{\alpha} = \frac{\bar{r}}{h} + \delta + \frac{\left(\frac{S_r^2}{h}\right)}{2}$$

Remarques :

- $\bar{r}$ ne dépend que du prix initial et du prix final
- $\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{S_{ih}}{S_{(i-1)h}}\right)}{n} = \frac{ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{S_{ih}}{S_{(i-1)h}}\right)\right)}{n} = \frac{ln\left(\frac{S_{nh}}{S_0}\right)}{n}$