7 | Techniques et applications des dérivées partielles

7.1 | Dérivée en chaîne

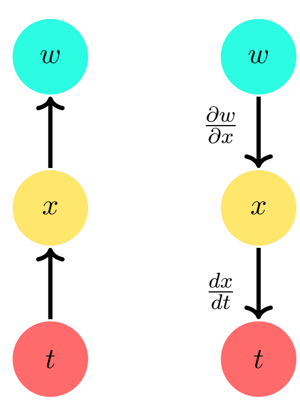
Parfois, une fonction dépend d'une seule variable indépendante, mais de plusieures variables intermédiaires. Par exemple, considérons la variable indépendante du temps t. Soit aussi un contrat d'assurance vie. Le paiement du contrat d'assurance vie est une fonction de la durée de vie d'un individu (noté $x = v(t)$) et du rendement aquis sur les primes (noté $y = r(t)$). Alors, la valeur du contrat d'assurance est une fonction composée $f(x, y)$, où les variables x et y dépendent de la variable indépendante t. Quel est l'impact de t sur $f(x, t)$? On peut répondre à cette question avec la version multivariée de la dérivée en chaîne.

Dans la section 2.4, on a présenté la version univariée de la dérivée en chaîne. Soit $w = f(x)$, où x est une fonction de t. Alors, f est une fonction composée de t et x est une variable intermédiaire. La formule pour la dérivée en chaîne est

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

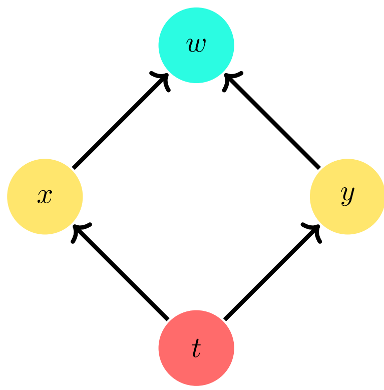
La dérivée de w par rapport à la variable intermédiaire t est le produit de

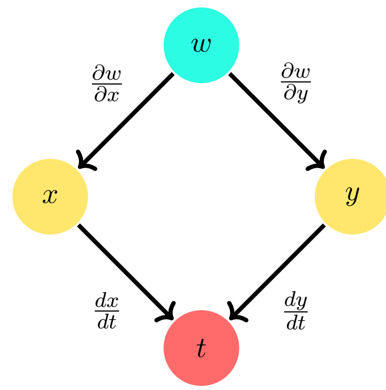
1. la dérivée de w par rapport à la variable intermédiaire x, et
2. la dérivée de la variable intermédiaire x par rapport à la variable indépendante t.



On peut visualiser cette idée avec un diagramme en branche. Dans le graphique de gauche, chaque flèche représente une composition. Pour trouver la dérivée de w par rapport à t, on descend dans le diagramme, en multipliant les dérivées à chaque nœud.

On peut aussi généraliser cette idée pour des fonctions de plusieures variables intermédiaires.





Le nœud en rouge est la variable indépendante, les variables en jaune sont les variables intermédiaires et la variable en bleu est la variable dépendante. La dérivée de w par rapport à la variable intermédiaire t est la somme du

1. produit de la dérivée de w par rapport à la variable intermédiaire x et la dérivée de la variable intermédiaire x par rapport à la variable indépendante t.

2. produit de la dérivée de w par rapport à la variable intermédiaire y et la dérivée de la variable intermédiaire y par rapport à la variable indépendante t.

Théorème 7.1.1 : Dérivée en chaîne pour fonctions d'une variable avec deux variables intermédiaires.

Soit $w = f(x, y)$, où x est une fonction de t et y est une fonction de t. Ainsi, on a

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

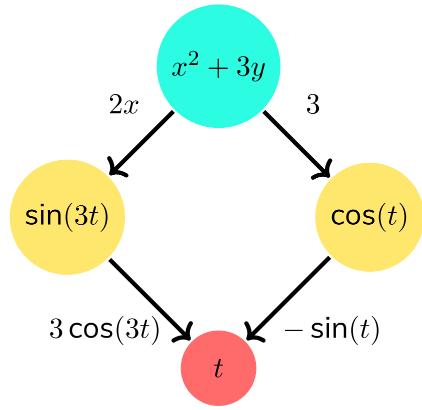
Exemple 7.1.1 : Soit $w = x^2 + 3y$, où $x = \sin(3t)$ et $y = \cos(t)$. Trouver $\frac{dw}{dt}$.

On a

$$\begin{array}{rr} \frac{\partial w}{\partial x} = 2x & \frac{\partial w}{\partial y} = 3 \\ \frac{dx}{dt} = 3\cos(3t) & \frac{dy}{dt} = \sin(t). \end{array}$$

Le diagramme en branche est

-sin(t)



On obtient

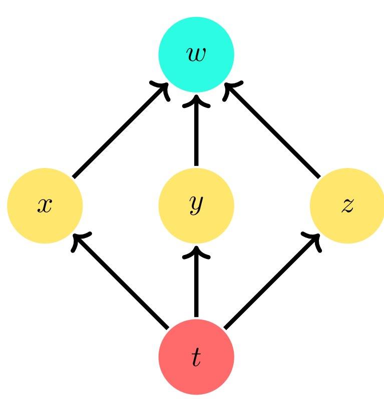
$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= 2x \cdot 3\cos(3t) - 3 \cdot \sin(t)\\ &= 6\sin(3t)\cos(3t) - 3\sin(t).\end{aligned}$$

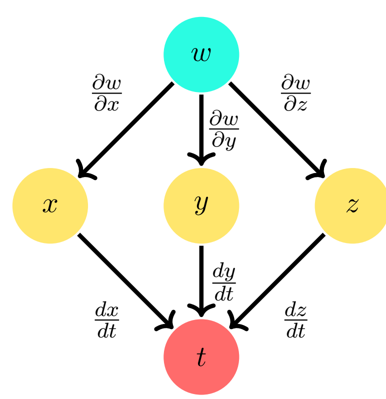
Théorème 7.1.2 : Dérivée en chaîne pour fonctions d'une variable avec trois variables intermédiaires.

Soit $w = f(x, y, z)$, où x, y et z sont des fonctions de t. Ainsi, on a

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Le diagramme en branche pour une variable dépendante et trois variables intermédiaires est





On peut généraliser les idées avec plusieures variables indépendantes.

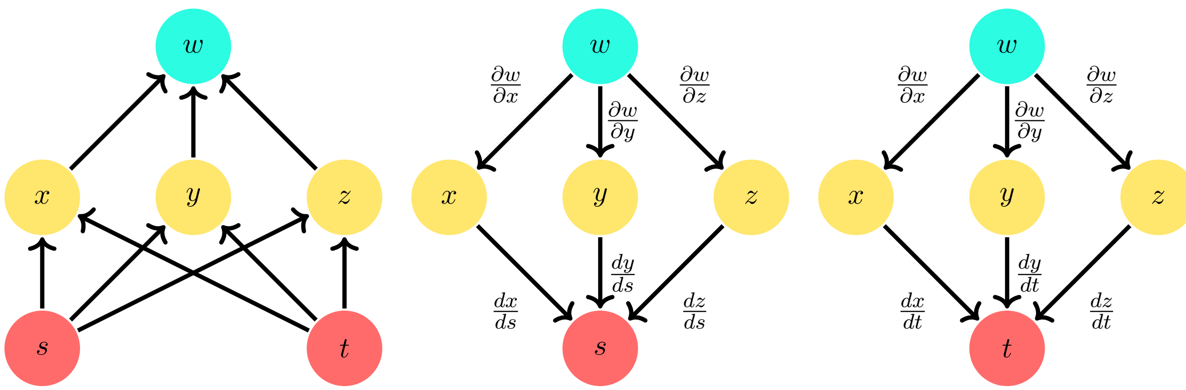
Théorème 7.1.3 : Dérivée en chaîne pour fonctions de deux variables avec trois variables intermédiaires.

Soit $w = f(x, y, z)$, où x, y et z sont des fonctions de s et t. La dérivée partielle de w par rapport à s est

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

La dérivée partielle de w par rapport à t est

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$



Remarque 7.1.4 : Démarche pour trouver les dérivées en chaînes

1. Créer un diagramme en branche :
   (a) La variable dépendante va en haut;
   (b) Les variables intermédiaires vont au milieu;
   (c) Les variables indépendantes vont en bas.
2. Pour calculer la dérivée partielle de w par rapport à une variable indépendante (p.ex., t), on part de w et on déscend dans le diagramme, en multipliant les dérivées. Ensuite, la dérivée partielle est la somme des produits de chaque chemin.

Si w est une composition de n variables intermédiaires, la dérivée partielle de w par rapport à une variable indépendante sera la somme de n produits.

Exemple 7.1.2 : Trouver u_r si $u = 3x^y + 6y^2 \ln z$, $x = rst$, $y = r \ln t$ et $z = 3 + e^{rs}$.

7.2 | Applications des dérivées partielles

7.2.1 | La règle de Leibniz

Méthode préférée de Christopher, donc fort probablement à l'examen

Théorème 7.2.1 : La règle de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = f(x,b(x))\frac{d}{dx}b(x) - f(x,a(x))\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt.$$

Si $a(x) = a$ et $b(x) = b$, on a

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{b} f(x,t)dt\right) = \int_{a}^{b} \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt.$$

Preuve :

Exemple 7.2.1 : Trouver $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^4 \sin(x+2y)\,dy$.

Exemple 7.2.2 : Trouver $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{3x^4}$ sin$(x+2y)dy$.

Exemple 7.2.3 : Évaluer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$.

Exemple 7.2.4 : Évaluer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-x^2\right\} dx$. (optionnel)

On décompose le problème en plusieures étapes.

1. On a

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Mon ami Chris n'est pas capable de faire ça, donc pas à l'examen

De plus,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx &= -\int_{\infty}^{0} e^{-(-u)^2} du \quad \text{(avec } u = -x\text{)}\\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-u^2} du.\end{aligned}$$

Alors,

$$I = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

(Ceci est l'application d'un résultat connu sur les fonctions paires où $f(x) = f(-x) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. La fonction est symétrique par rapport à 0.)

2. Soit
$$f(t) =: \left(\int_0^t e^{-x^2} dx\right)^2.$$
Alors,
$$I = \lim_{t\to\infty} 2\sqrt{f(t)}.$$

3. On tente de simplifier f en étudiant sa dérivée. Avec la dérivée en chaîne et le théorème fondamental du calcul (partie 1), on a
$$\frac{df}{dt} = 2\left(\int_0^t e^{-x^2} dx\right)\left(\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-x^2} dx\right) = 2\left(\int_0^t e^{-x^2} dx\right) e^{-t^2} = 2\int_0^t e^{-(t^2+x^2)} dx.$$
On emploie ensuite la substitution $u = \frac{x}{t}, dx = t \cdot du, ut = x \Rightarrow x^2 = u^2t^2$ et x varie de 0 à 1. Alors, on obtient
$$\frac{df}{dt} = 2\int_0^1 te^{-(t^2+u^2t^2)} du = 2\int_0^1 te^{-t^2(1+u^2)} du. \tag{7.1}$$

4. On a
$$\begin{aligned}\int te^{-t^2(1+u^2)} dt &\overset{s=t^2}{=} \frac{1}{2}\int \exp^{-(1+u^2)s} ds\\ &= \frac{1}{2}\exp\left\{-\left(1+u^2\right)s\right\}\left(-\frac{1}{1+u^2}\right) + C\\ &= -\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{t^2(1+u^2)}{2}}}{1+u^2} + C,\end{aligned}$$
alors, on déduit que
$$te^{-t^2(1+u^2)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{e^{-t^2(1+u^2)}}{1+u^2}.$$
Alors, (7.1) devient
$$\frac{df}{dt} = 2\int_0^1 -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\frac{e^{-t^2(1+u^2)}}{1+u^2} du.$$
Avec la régle de Leibniz (à l'envers), on obtient
$$\frac{df}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+u^2)}}{1+u^2} du$$
et on déduit que
$$f(t) = -\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+u^2)}}{1+u^2} du + C.$$

5. On doit trouver la constante C. Avec le cas particulier $t = 0$, on a
$$f(0) = \int_0^0 e^{-x^2} dx = 0.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} f(0) &= -\int_0^1 \frac{e^{0(1+u^2)}}{1+u^2}du + C \\ 0 &= -\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du + C \\ 0 &= -\tan^{-1}(u)\Big|_0^1 + C \\ 0 &= -\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + C \\ C &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

6. On revient à l'étape 2. On a

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t\to\infty} 2\sqrt{f(t)} \\ &= \lim_{t\to\infty} 2\sqrt{-\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+u^2)}}{1+u^2}du + \frac{\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{-\lim_{t\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+u^2)}}{1+u^2}du + \frac{\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{-\int_0^1 \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t^2(1+u^2)}}{1+u^2}du + \frac{\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{-\int_0^1 \frac{0}{1+u^2}du + \frac{\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{0 + \frac{\pi}{4}} = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Le passage de la limite dans l'intégrale est fait avec le théorème de convergence dominée (pas à l'étude).

7.2.2 | Valeurs extrêmes et point-selle

Définition 7.2.2 : Point critique en plusieurs dimensions.

Un point dans le domaine d'une fonction f est un point critique si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

— $f_x(a,b) = 0$ et $f_y(a,b) = 0$;

— $f_x(a,b)$ ou $f_y(a,b)$ n'existe pas.

Théorème 7.2.3 : Premier d'extrêmes locaux.

Si $f(x, y)$ a une valeur minimale ou maximale à un point (a, b), alors (a, b) est un point critique.

Définition 7.2.4

Le déterminant de f est est donné par

$$D_f(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) \end{vmatrix}.$$

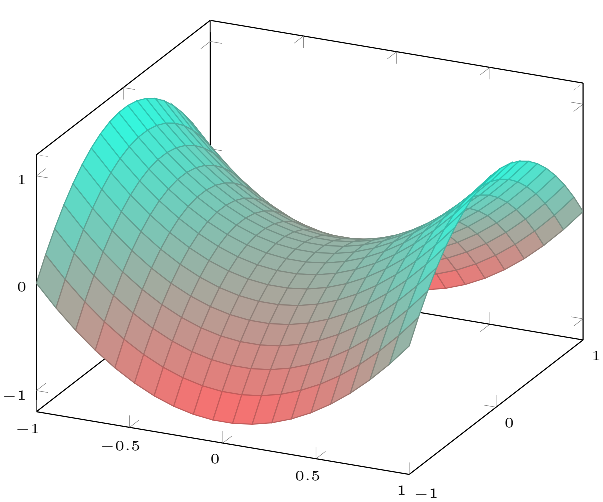
On le note aussi $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.

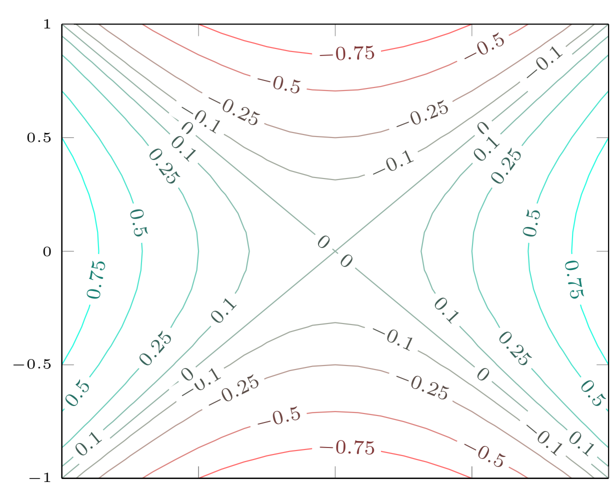
Théorème 7.2.5 : Deuxième test d'extrêmes locaux.

Soit f, une fonction de deux variables dont les dérivées partielles sont continues sur un disque ouvert R contenant (a, b). Soit un point critique (a, b). Alors,

1. *Le point critique est un minimum local si $f_{xx}(a, b) > 0$ et $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0$ au point (a, b).*
2. *Le point critique est un maximum local si $f_{xx}(a, b) < 0$ et $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0$ au point (a, b).*
3. *Le point critique est un point de selle si $D_f(a, b) < 0$ au point (a, b).*
4. *Le test n'aboutit à aucune conclusion si $D_f(a, b) = 0$ au point (a, b).*

Un point de selle est un point qui est à la fois un maximum local et un minimum global.





Exemple 7.2.5 : Trouver les minimums locaux, les maximums locaux et les points de selles de $2x^2 - 4xy + 2y^3 - 2y$.

7.2.3 | Optimisation sous contraintes

On doit souvent optimiser une fonction sous certaines contraintes. Ainsi, on doit minimiser ou maximiser une fonction $f(x, y, z)$ où les variables x, y ou z ne sont pas indépendantes. Par exemple, on pourrait avoir une contrainte $g(x, y, z) = c$. On ne peut pas utiliser les points critiques de la sous-section précédente car ils ne respectent possiblement pas les contraintes indiquées.

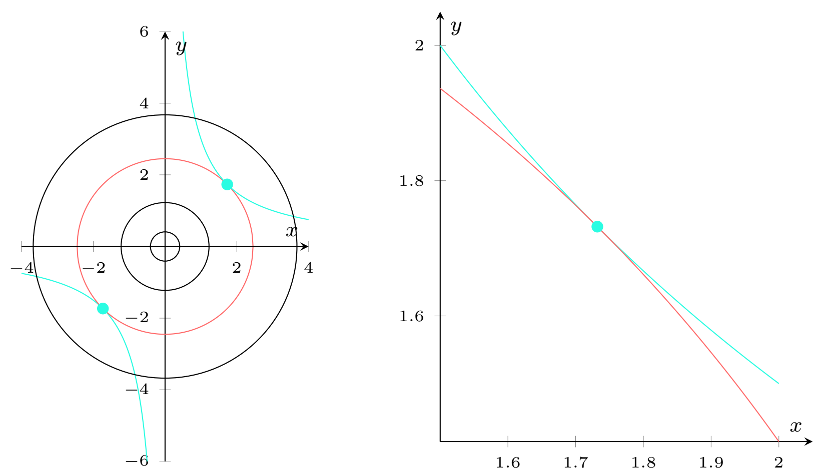
Parfois, la contrainte est suffisamment simple pour optimiser une fonction par substitution.

Exemple 7.2.6 : Trouver le point le plus proche entre la courbe $xy = 3$ et l'origine.

La deuxième technique est la méthode des multiplicateurs de Lagrange, qui permet d'ajouter des contraintes qui sont plus compliquées. On procède par un exemple.

Exemple 7.2.7 : Trouver le point le plus proche entre la courbe $g(x, y) = xy = 3$ et l'origine avec la méthode du multiplicateur de Lagrange.

Comme dans l'exemple précédent, on tente de minimiser $x^2 + y^2$ sous la contrainte que $g(x, y) = xy = 3$. On illustre la courbe de g en bleu dans le graphique de gauche, accompagné de la solution pour f en rouge ($x^2 + y^2 = \alpha$, où α est inconnu). D'autres courbes $x^2 + y^2 = c$, illustrées en noir, ne respectent pas la contrainte. Dans le graphique de droite, on examine de plus près ce qu'il se passe à une des solutions.



On remarque que la tangente de f partage la direction de la tangente de g, ce qui veut dire que le vecteur gradient de f est proportionnel au vecteur gradient de g :

$$\nabla f = \lambda \nabla g,$$

qui est équivalent à

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

La constante λ est présente car c'est la position et la direction qui est égale, pas nécessairement la magnitude. On a

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda y \\ 2y &= \lambda x. \end{aligned}$$

Il y a trois inconnus (x, y et λ) et deux équations. La dernière équation requise pour résoudre le système d'équations est la contrainte $xy = 3$. On a donc

$$\begin{aligned} 2x - \lambda y &= 0 \\ 2y - \lambda x &= 0 \\ xy &= 3. \end{aligned}$$

Premièrement, on résoud les deux premières équations.

$$\begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La solution triviale est $(x, y) = (0, 0)$, qui ne satisfait pas les contraintes. La solution arrive quand le déterminant est 0. On a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} &= 0 \\ (2)(-2) + \lambda^2 &= 0 \\ \lambda &= \pm 2. \end{aligned}$$

Si $\lambda = 2$, on a

$$\begin{aligned} 2x - 2y = 0 &\Rightarrow x = y \\ xy = 3 &\Rightarrow x^2 = 3. \end{aligned}$$

Les solutions possibles sont

$$(x, y) = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad (x, y) = \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right).$$

Si $\lambda = -2$, on a

$$\begin{aligned} 2x + 2y = 0 &\Rightarrow x = -y \\ xy = 3 &\Rightarrow -x^2 = 3, \end{aligned}$$

donc il n'y a pas des solutions réelles pour x avec $\lambda = -2$.

Définition 7.2.6 : La méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Supposons que $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont différentiables et $\nabla g \neq [0 \ \ 0]'$ lorsque $g(x, y) = 0$. Pour trouver un maximum ou minimum local de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ (si ils existent), on doit trouver les valeurs de x, y et λ telles que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad g(x, y) = 0.$$

Il est équivalent de trouver les valeurs de x, y et λ dans le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y); \\ f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y); \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Supposons que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont différentiables et $\nabla g \neq [0\ 0\ \cdots\ 0]'$ lorsque $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Pour trouver un maximum ou minimum local de f sous la contrainte $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ (si ils existent), on doit trouver les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et λ telles que

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{et} \quad g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{7.3}$$

Remarque 7.2.7

Une formulation équivalente de la méthode des multiplicateurs de Lagrange est d'optimiser

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sans contrainte. Il est parfois plus simple d'optimiser $\mathcal{L}$ (par exemple, numériquement) car il n'y a pas de contraintes sur $\mathcal{L}$.

Si l'on tente d'optimiser $\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)$ sans contrainte, on peut utiliser le théorème 7.2.3 pour trouver les minimums et les maximums locaux aux points critiques. Les dérivées partielles de $\mathcal{L}$ sont

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{7.4}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{7.5}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial}{\partial x_n}\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_n} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{7.6}$$
$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{7.7}$$

On cherche les solutions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et λ lorsque les dérivées partielles sont toutes égales à 0. De (7.4)-(7.6), on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\lambda \frac{\partial}{\partial x_i} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Lorsque toutes ces conditions sont satisfaites, on a

$$\nabla f = -\lambda \nabla g.$$

De plus, puisque λ est une constante, on peut écrire $\lambda^* = -\lambda$, i.e. la constante λ^* *absorbe* le signe négatif et n'affecte pas les solutions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On obtient

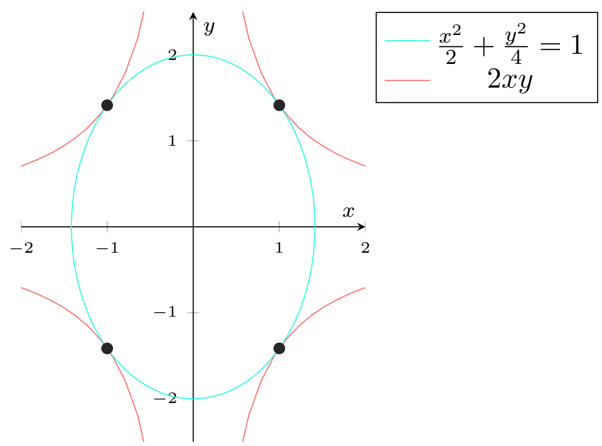
$$\nabla f = \lambda^* \nabla g. \tag{7.8}$$

Enfin, (7.7) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Les relations (7.8) et (7.9) sont les mêmes que dans (7.3), alors les techniques sont équivalentes.

Exemple 7.2.8 : Trouver la plus grande valeur et la plus petite valeur dont la fonction $f(x, y) = 2xy$ prend sur l'ellipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.

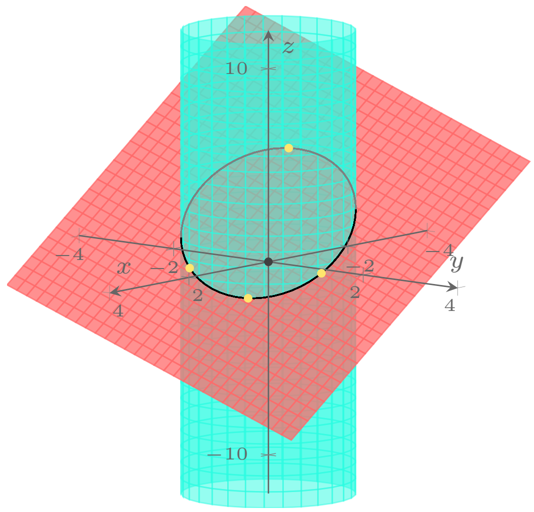


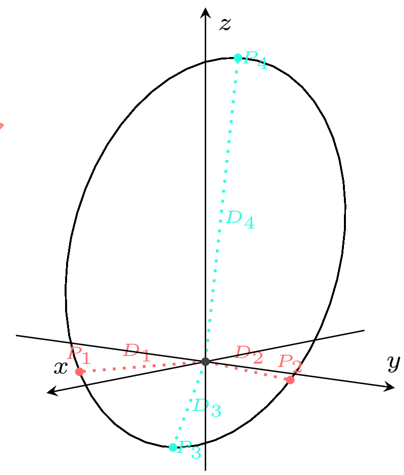
Définition 7.2.8 : La méthode des multiplicateurs de Lagrange (plusieurs contraintes).

Supposons que $f(x, y, z)$, $g_1(x, y, z)$ et $g_2(x, y, z)$ sont différentiables, $\nabla g_i \neq [0\ \ 0\ \ 0]'$ lorsque $g_i(x, y, z) = 0,\ i = 1, 2$. Pour trouver un maximum ou minimum local de f sous les contraintes $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$ (si ils existent), on doit trouver les valeurs de x, y, z et λ telles que

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \quad \text{et} \quad g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0.$$

Exemple 7.2.9 : Soit le plan $2x + y + z = 2$ et le cylindre $x^2 + y^2 = 2$. L'intersection du plan et du cylindre forme une ellipse. Trouver le point sur l'ellipse le plus près et le plus loin de l'origine.





Remarque 7.2.9

Il n'est pas nécessaire de calculer les multiplicateurs λ ou μ : ceuxi sont simplement des outils pour trouver nos extrêmes locaux.

Il n'y a pas de tests de deuxième dérivé pour vérifier si une solution s'optimisation avec contrainte est un maximum ou un minimum. On doit vérifier les résultats empiriquement avec des chiffres (en calculant les valeurs aux points critiques).

7.2.4 | Développement de Taylor

Théorème 7.2.10 : Série de Taylor (deux dimensions)

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ [f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] \\ &+ \frac{1}{3!}\left[f_{xxx}(a,b) + 3f_{xxy}(a,b)(a-x)^2(y-b)\right. \\ &\qquad \left. + 3f_{xyy}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + f_{yyy}(a,b)(y-b)^3\right] \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\{f_x + f_y\}^k, \end{aligned}$$

où

$$\{f_x + f_y\}^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^j}{\partial x^j \partial y^{k-j}} f(a,b)(x-a)^k(y-b)^{k-j}.$$

Exemple 7.2.10 : Trouver une approximation quadratique de $f(x,y) = e^x \cos y$ près du point $(0,0)$. Approximer $f(0.1, 0.1)$ avec ce polynôme.