ACT-2001 : Introduction à l'actuariat II

Radu Mitric

E-mail : ilie-radu.mitric@act.ulaval.ca

Hiver 2021
cours : mercredi 13h30-15h20 et jeudi 9h30-10h20, en ligne, sur Zoom
ateliers : mercredi 15h30-16h20 et jeudi 10h30-11h20, en ligne (Alec Van Rassel)

Sujets abordés

- Notions supplémentaires sur la théorie des probabilités
- Mesures de risque, notamment mesures de risque de type VaR
- Méthodes de simulation stochastique
- Modélisation des risques individuels en assurance IARD
- Mutualisation des risques
- Principes de calcul de la prime majorée
- Applications en assurance de personnes et IARD

Évaluation

- Examen I, en présentiel, 40% : mercredi - le 10 mars, de 13h30 à 16h20.
- Examen II, en présentiel, 45% : mercredi - le 28 avril, de 13h30 à 16h20.
- Deux travaux pratiques (7.5% chacun) : 26 février et 23 avril.

- Calculatrices : consulter le portail du cours.

Chapitre I : Notions supplémentaires sur la théorie des probabilités

- Soit une variable aléatoire (v.a.) X. Sa fonction de répartition est

$$F(x) = F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

- Une fonction de répartition possède les propriétés suivantes :
  - $0 \leq F(x) \leq 1$ pour chaque x.
  - $F(x)$ est non-décroissante.
  - $F(x)$ est continue à droite, i.e., $\lim\limits_{x \to a+} = F(a)$.
  - $F(-\infty) = 0$ et d $F(\infty) = 1$.
- Sa fonction de survie est $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}[X > x]$

Variable aléatoire discrète

- X est discrète si elle prend un nombre fini ou dénombrable des valeurs dans un ensemble de nombre réels $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$
  - On définie sa fonction de masse

$$p_X(x) = \mathbb{P}[X = x],$$

qui satisfait

$$0 \leq p_X(x) \leq 1, \quad \sum_{x \in A} p_X(x) = 1.$$

- Sa fonction de répartition $F_X(x)$ est une fonction en escalier.
-

$$E[X] = \sum x_i \mathbb{P}[X = x_i] = \sum x_i p_X(x_i)$$

$$E[g(X)] = \sum g(x_i) \mathbb{P}[X = x_i] = \sum g(x_i) p_X(x_i)$$

Variable aléatoire continue

- Une v.a. X est continue si sa fonction de répartition est continue (et différentiable sauf un nombre fini ou dénombrable des points).
- Sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Alors,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- La fonction de densité satisfait :
  - $f(x) \geq 0, \forall x$
  - $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Remarques

- $$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x) dx.$$
- $f(x) \neq \mathbb{P}[X = x]$;
- for très petit ε,

$$\mathbb{P}[a - \frac{\varepsilon}{2} \leq X \leq a + \frac{\varepsilon}{2}] = \int_{a-\frac{\varepsilon}{2}}^{a+\frac{\varepsilon}{2}} f(t)dt \approx \varepsilon f(a).$$

  - ... ou $f(x)dx \approx \mathbb{P}[x < X \leq x + dx]$

Exemple 1.1

(à faire en classe)

Variable aléatoire mixte

- est une combinaison d'une v.a. continue et une v.a. discrète.
- est une variable aléatoire continue avec quelques points de masse.

Remarque 1.1

Si h est une fonction et X est une v.a. (continue, discrète ou mixte) avec fonction de répartition F_X, alors

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF_X(x).$$

en utilisant l'intégrale de Stiltjes (Riemann-Stiltjes)

L'intégrale de Stiltjes (Riemann-Stiltjes)

Définition 1.2

Soit une fonction g réelle bornée, dérivable sur la suite d'intervalles $(D_i)_{i\leq k}$ et discontinue aux points $(x_j)_{j\leq k}$. Soit f une fonction réelle. On définit «l'intégrale de Stiltjes » de f par rapport à g, sur l'ensemble $\mathcal{A} = \cup D_i \cup \{x_1, x_2, \ldots x_m\}$, notée

$$\int_{\mathcal{A}} f(x)dg(x) = \sum_{j=1}^{k} \int_{D_j} f(x)g'(x)dx + \sum_{i=1}^{m} f(x_i)[g(x_i) - g(x_i^-)].$$

- L'intégrale de Stiltjes est une généralisation de l'intégrale de Riemann.
- L'intégrale de Stiltjes n'existe pas si f et g possèdent un point de discontinuité commun.

Propriétés :

- Si la fonction g et continue et différentiable sur $[a, b]$, alors
$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$$
- On a
$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x),$$
et l'existence d'une intégrale implique l'existence de l'autre.
- Si h est une fonction et X est une v.a. (continue, discrète ou mixte) avec fonction de répartition F_X, alors
$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dF_X(x).$$

Exemple 1.2

(à faire en classe)

L'espérance ; la variance

- L'espérance d'une variable aléatoire est linéaire :
  $\mathbb{E}[ag(X) + bh(X)] = a\mathbb{E}[g(X)] + b\mathbb{E}[h(X)]$
- Variance : $V[X] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]$.
- Conséquence :
  $V[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ et
- $V[aX + b] = a^2 V[X]$.

L'espérance d'une v.a. non-négative

- Si X est non-négative, continue et sa espérance existe, on a

$$E[X] = \int_{0}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

et aussi

$$E[X] = \int_{0}^{+\infty} \bar{F}_X(x) dx$$

L'espérance d'une v.a. non-négative

- Si X est non-négative, discrète (sur A=$\{0, 1, 2, \ldots\}$) et sa espérance existe, on a

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} j \, p_X(j)$$

et aussi

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_X(k)$$

Moment d'ordre n ; fonctions génératrices

- Le moment d'ordre n de la v.a. X est définie comme $E[X^n]$
- Le moment centré d'ordre n de la v.a. X est définie comme $E[(X - \mu_X)^n]$
- La fonction génératrice des moments (f.g.m.) de X est définie comme
$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$
- et la fonction génératrice des probabilités (f.g.p.) de X est définie comme
$$P_X(t) = \mathbb{E}[t^X],$$
pour tout t où l'espérance existe.
- D'habitude (mais pas toujours ! !), la f.g.m. est utilisée pour des v.a. continues et la f.g.p. est utilisée pour des v.a. discrètes.
- Pour certains v.a., le moment d'ordre n ou f.g.m. ou f.g.p. n'existent pas.

Propriétés

- Lien entre f.g.m et f.g.p.

$$M_X(t) = P_X(e^t) \quad \text{et} \quad P_X(t) = M_X(\ln t)$$

- Sachant la f.g.m. ou la f.g.p., on peut trouver les moments d'ordre n :

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)_{|t=0}$$

et

$$P_X'(1) = \mathbb{E}[X],\ P_X''(1) = \mathbb{E}[X(X-1)], P_X'''(1) = \mathbb{E}[X(X-1)(X-2)], \ldots$$

Exemple 1.3

(à faire en classe)

Fonction quantile. Définition de base

Définition 1.3

Soit un risque X et un niveau de probabilité $p \in (0,1)$. Alors nous définissons la fonction inverse F_X^{-1} de F_X par

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(p) &= \inf\{x \in R | F_X(x) \geq p\} \\ &= \sup\{x \in R | F_X(x) < p\} \end{aligned}$$

Illustration (à faire en classe) :

Propriétés

La fonction quantile satisfait les propriétés suivantes :

- F_X^{-1} est non-décroissante ;
- F_X^{-1} est continue à gauche ;
- $F_X^{-1}(F_X(x)) \leq x$;
- $F_X(F_X^{-1}(u)) \geq u$.

Exemple - cas continu

Exemple 1.4

(à faire en classe)

Exemple - cas continu

Exemple 1.5

(à faire en classe)

Exemple - cas mixte

Exemple 1.6

(à faire en classe)

Propriétés

Théorème 1.4

Soit la v.a. X avec la fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1}. Soit une v.a. $U \sim U(0,1)$.
Alors, la fonction de répartition de la v.a. $F_X^{-1}(U)$ est F_X, c.-à-d., les v.a. $F_X^{-1}(U)$ et X sont égales en distribution ($F_X^{-1}(U) \sim X$).

Remarque 1.5

On utilise la théorème précédente pour simuler des valeurs d'une v.a. X, à partir des valeurs d'une v.a. $U(0,1)$.

Propriétés

Théorème 1.6

Soit la v.a. X avec la fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1}. Soit une v.a. $U \sim U(0,1)$.
Alors, la fonction de répartition de la v.a. $F_X(X)$ est F_U, c.-à-d., les v.a. $F_X(X)$ et U sont égales en distribution ($F_X(X) \sim U$).

Propriétés

Proposition 1.7

Soit une v.a. X avec $\mathbb{E}[X] < \infty$, fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1}. On a

$$\int_0^\infty F_X^{-1}(u)du = \mathbb{E}[X]$$

Deuxième (type) définition de la fonction quantile

Définition 1.8

Soit un risque X et un niveau de probabilité $p \in (0,1)$. Alors nous définissons une deuxième version de la fonction inverse F_X^{-1+} de F_X par

$$\begin{aligned} F_X^{-1+}(p) &= \inf\{x \in R | F_X(x) > p\} \\ &= \sup\{x \in R | F_X(x) \leq p\} \end{aligned}$$

Propriétés de la F_X^{-1+}

La fonction quantile satisfait les propriétés suivantes :

- F_X^{-1+} est non-décroissante ;
- F_X^{-1} est continue à droite ;
- Si X est continue, alors $F_X^{-1+}(u) = F_X^{-1}(u)$, pour chaque u.
- Si X est discrète ou si u corresponde à une partie horizontale de $F_X(x)$, alors
  - $F_X^{-1}(u)$ correspond à l'extrémité gauche de l'intervalle ;
  - $F_X^{-1+}(u)$ correspond à l'extrémité droite de l'intervalle

Exemple - cas continu

Exemple 1.7

(à faire en classe)

Exemple - cas mixte

Exemple 1.8

(à faire en classe)

Mesures de risque de type VaR

Définition 1.9

Une mesure de risque est une fonctionnelle ρ d'un risque X auquel nous associons un nombre non-négatif $\rho(X)$, nombre qui quantifie la « dangerosité » du risque en donnant une mesure du « capital de risque » nécessaire pour rendre ce risque « acceptable ».

Exemple 1.9

a) $\rho(X) = (1+\theta)\mathbb{E}[X], \theta > 0;$
b) $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \theta Var[X], \theta > 0;$
c) $\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \theta\sigma_X, \theta > 0;$
d) $\rho(X) = \mu_X + \theta\sigma_X;$
e) $\rho(X) = VaR[X;p] = F_X^{-1}(p) = \inf\{x|F_X(x) \geq p\}.$
f) $\rho(X) = TVaR[X;p] = \dots$
g) la probabilité de ruine associé à une perte X.

Propriétés désirables

- Aucune surcharge excessive (il serait inutile de mettre en réserve plus de capital que la perte maximale engendrée par le risque) :

$$\rho(X) \leq F_X^{-1}(1);$$

- Chargement non-négatif (le capital minimal doit excéder la perte moyenne) :

$$\rho(X) \geq \mathbb{E}[X];$$

- Invariance par translation (tout accroissement du risque par un montant déterministe devrait résulter dans le même accroissement du capital) :

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c;$$

- Constance (à une perte déterministe ne doit correspondre qu'un capital équivalent) :

$$\rho(c) = c, \quad c = constante;$$

- Sous-additivité (l'effet de diversification) :

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

  i.e., la fusion des risques ne dépasse pas la somme des risques individuels.
  - Nous définissons « l'effet de diversification » du regroupement des risques X et Y par $\rho(X)+\rho(Y)-\rho(X+Y)$, qui est non-négative si la mesure de risque est sous-additive.
- Si l'égalité est satisfaite, nous dirons que la mesure de risque est additive (Il n'y a pas d'effet de diversification).

- Additivité comonotone :

$$\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$$

si X et Y sont comonotones (même en fusionnant, un risque ne peut agir sur l'autre risque en l'augmentant ou en le diminuant, et donc le capital associé aux risques ne sera pas modifié par leur fusion) ;

- Homogénéité positive (le capital associé au risque est ajusté proportionnellement à l'unité monétaire) :

$$\rho(cX) = c\rho(X), \quad c > 0;$$

- Monotonicité :

$$P[X \leq Y] = 1 \implies \rho(X) \leq \rho(Y),$$

i.e. que si une perte est plus élevée qu'une autre, alors le capital associé ira dans le même sens.

- Invariance en loi :

$$X =_d Y \implies \rho(X) = \rho(Y),$$

c.a.d., le capital associé au risque ne dépend que de la distribution de ce risque, et donc la mesure de risque ne sera fiable que si la distribution du risque est bien estimé.

Remarque 1.10

Aucune mesure de risque ne peut capturer toutes les caractéristiques d'un risque, mais chacune d'elle retiendra plutôt une partie des ces aspects notamment par les propriétés qui seront privilégiées par les gestionnaires du risque.

Définition 1.11

Une mesure de risque est dite cohérente si elle satisfait aux quatre propriétés suivantes : l'invariance par translation, la positive homogénéité, la sous-additivité et la monotonicité.

Remarque 1.12

Cette classe de mesures de risque est une des plus répandues, mais elle n'est pas la seule. La classe des mesures de risque convexes est aussi souvent considérée.

Définition 1.13

Une mesure de risque est dite convexe si elle satisfait aux trois propriétés suivantes : l'invariance par translation, la monotonicité et la convexité, i.e. :

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \quad \lambda \in [0,1].$$

Remarque 1.14

La $VaR_p(X)$ n'est pas cohérente (n'est pas sous-additive).

La $TVaR_p(X)$ est une mesure de risque cohérente.

Mesures de risque de type « VaR »

« Value at risk » (VaR)

Définition 1.15

Soit un risque X et un niveau de probabilité (élevé) $p \in (0,1)$. Alors nous définissons la VaR par l'identité

$$\begin{aligned} VaR_p(X) &= F_X^{-1}(p) \\ &= \inf\{x \in R | F_X(x) \geq p\} \\ &= \sup\{x \in R | F_X(x) < p\} \end{aligned}$$

Remarque 1.16

Les valeurs de p habituellement considérées sont très élevées, au niveau $p \geq 0.95$.

Illustration (voir $F_X^{-1}(p)$) :

Remarque 1.17

Si la fonction φ est strictement croissante, alors

$$F_{\varphi(X)}^{-1}(p) = \varphi(F_X^{-1}(p)), \quad \forall p \in (0,1).$$

Propriétés de la VaR

La mesure de risque VaR :

- - ne dépasse pas la perte maximale : $VaR_p(X) \leq \max\{X\}$;
- - peut ne pas dépasser la moyenne de la perte (mais pour p très petite) :
  - si $p' = F_X(\mathbb{E}[X])$, puis $VaR_p(X) \leq \mathbb{E}[X]$ pour $p < p'$;
- - est invariante par translation : $VaR_p(X + c) = VaR_p(X) + c$;
- - est positivement homogène : $VaR_p(cX) = cVaR_p(X)$;
- - satisfait la constance : si $\mathbb{P}[X = k] = 1$, alors $VaR_p(X) = k$;
- -est monotone : si $\mathbb{P}[X \leq Y] = 1$, alors $VaR_p(X) \leq VaR_p(Y)$;
- - n'est pas nécessairement sous-additive (donc, VaR n'est pas cohérente) ;
- -est additive comonotone.

Exemple 1.10

(à faire en classe)

« Tail Value at risk » (TVaR)

Définition 1.18

Soit un risque X et un niveau de probabilité (élevé) $p \in (0,1)$. Alors nous définissons la TVaR par l'identité

$$TVaR_p(X) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_s(X)ds, \quad p \in (0,1).$$

Remarque 1.19

(i) La TVaR est donc la « valeur moyenne » des VaR sur $(p,1)$.
(ii) La VaR, à un niveau p, ne donne pas d'information sur l'épaisseur de la queue de la distribution. La TVaR vient corriger en partie ce manque en capturant plus d'informations à cet effet.

Proposition 1.20

Une expression alternative pour $TVaR$:

$$TVaR_p(X) = \frac{\mathbb{E}[X \times 1_{\{X > VaR_p(X)\}}] + VaR_p(X)(F_X(VaR_p(X)) - p)}{1-p}$$

« Conditional tail expectation » (CTE)

Définition 1.21

Soit un risque X et un niveau de probabilité (élevé) $p \in (0,1)$. Alors nous définissons la CTE par l'identité

$$CTE_p(X) = \mathbb{E}[X|X > VaR_p(X)], \quad p \in (0,1).$$

qui peut être écrite comme

$$CTE_p(X) = \frac{\mathbb{E}[X \times 1_{\{X > VaR_p(X)\}}]}{\mathbb{P}[X > VaR_p(X)]}$$

Remarque 1.22

Si X est continue, alors $TVaR_p(X) = CTE_p(X)$.
Ce n'est pas vrais en général (voir l'exemple suivant).

Remarque 1.23

La définition de TVaR dans ce cours (et dans les livre de É. Marceau ou le livre de Denuit et al.) est différente, pour des v.a. non-continues, que celle dans le livre Loss Models de Klugman, Panjer et Willmot !

Remarque 1.24

Dans le livre Loss Models, leur $TVaR$ est notre CTE !

Exemple 1.11

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs $0, 100, 200, 400, 500, 600, 800, 900, 1000$ avec probabilités $p_0 = 0.55, p_{100} = p_{200} = p_{400} = 0.11, p_{500} = p_{600} = p_{800} = 0.03, p_{900} = 0.02, p_{1000} = 0.01.$
Calculer $VaR_{0.95}(X)$ et $TVaR_{0.95}(X)$ et $CTE0.95(X)$.

Exemple 1.12

Soit $X \sim Exp(0.02)$. Trouver $VaR_p(X)$ et $TVaR_p(X)$, pour $0 < p < 1$.

Propriétés de la TVaR

La mesure de risque $TVaR_p(X)$:

- - ne dépasse pas la perte maximale : $TVaR_p(X) \leq \max\{X\}$;
- -est cohérente :
  - - est invariante par translation : $TVaR_p(X + c) = TVaR_p(X) + c$;
  - - est positivement homogène : $TVaR_p(cX) = cTVaR_p(X)$;
  - - est monotone : si $\mathbb{P}[X \leq Y] = 1$, alors $TVaR_p(X) \leq TVaR_p(Y)$;
  - - est sous-additive : $TVaR_p(X + Y) \leq TVaR_p(X) + TVaR_p(Y)$;
- - satisfait la constance : si $\mathbb{P}[X = k] = 1$, alors $TVaR_p(X) = k$;
- -est comonotone additive ;
- - induit un chargement non-négatif : $TVaR_p(X) \geq \mathbb{E}[X]$:
  - - $TVaR_0(X) = \mathbb{E}[X]$ et
  - -$TVaR_p(X)$ est une fonction non-décroissante de p

- La TVaR est une des mesures de risque les plus utilisées pour l'allocation de capital, dans un portefeuille à plusieurs lignes d'affaires (d'assurances).

La v.a. $(X-d)_+$. Fonction stop-loss

- En anglais : « Left censored and shifted random variable » définie par

$$(X-d)_+ = \max\{X-d;0\} = \begin{cases} 0 & , \quad X \leq d \\ X-d & , \quad X > d. \end{cases}$$

- Alors.

$$\mathbb{E}[(X-d)_+^k] = \begin{cases} \int_d^\infty (x-d)^k f(x)dx & \text{si } X \text{ continue} \\ \sum_{x_j>d} (x_j-d)^k p(x_j) & \text{si } X \text{ discrète.} \end{cases}$$

Définition 1.25

La « fonction stop-loss » $\pi_X(d)$ corresponde à l'espérance de $(X-d)_+$:

$$\pi_X(d) = \mathbb{E}[(X-d)_+]$$

Alors,

$$\pi_X(d) = \begin{cases} \int\limits_d^{\infty} (x-d)f(x)dx & \text{si } X \text{ continue} \\ \sum\limits_{x_j > d} (x_j - d)p(x_j) & \text{si } X \text{ discrète.} \end{cases}$$

- Si X est continue et non-négative, alors

$$\pi_X(d) = \int\limits_d^{\infty} \bar{F}(x)dx.$$

La v.a. $X \wedge u$. L'espérance limitée

- En anglais : « Limited loss random variable » définie par

$$X \wedge u = \min\{X; u\} = \begin{cases} X & , \quad X \leq u \\ u & , \quad X > u. \end{cases}$$

- Alors.

$$\mathbb{E}[(X \wedge u)^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{u} x^k f(x) dx + u^k \bar{F}(u) & \text{si } X \text{ continue,} \\ \sum_{x_j \leq u} x_j^k p(x_j) + u^k \bar{F}(u) & \text{si } X \text{ discrète.} \end{cases}$$

Définition 1.26

« L'espérance limitée » $\mathbb{E}[X \wedge u]$ corresponde à

$$\mathbb{E}[X \wedge u] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{u} x f(x) dx + u\bar{F}(u) & \text{si } X \text{ continue,} \\ \sum_{x_j \leq u} x_j p(x_j) + u\bar{F}(u) & \text{si } X \text{ discrète.} \end{cases}$$

Remarque 1.27

$$(X-d)_+ + X \wedge d = X$$

- $$\mathbb{E}[X \wedge d] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{d} (x-d)f(x)dx & \text{si } X \text{ continue} \\ \sum_{x_j \leq d} (x_j - d)p(x_j) & \text{si } X \text{ discrète.} \end{cases}$$
- Si X est continue et non-négative, alors

$$\mathbb{E}[X \wedge d] = \int_0^d \bar{F}(x)dx$$

La v.a. $\{X - d | X > d\}$. Fonction d'excès-moyen

- En anglais : « Excess loss random variable » définie par

$$\{X - d|X > d\} = \begin{cases} \text{n'est pas définie} & , \quad X \leq d \\ X - d & , \quad X > d. \end{cases}$$

- Alors, le moment d'ordre k

$$e_X^k(d) = \mathbb{E}[(X - d)^k | X > d] = \begin{cases} \dfrac{\int_d^\infty (x-d)^k f(x) dx}{\overline{F}(d)} & \text{si } X \text{ est continue,} \\ \dfrac{\sum_{x_j > d} (x_j - d)^k p(x_j)}{\overline{F}(d)} & \text{si } X \text{ est discrète.} \end{cases}$$

Définition 1.28

La « fonction d'excès-moyen » $e_X(d)$ corresponde à l'espérance de $\{X - d|X > d\}$:

$$e_X(d) = \mathbb{E}[\{X - d|X > d\}]$$

Alors,

$$e_X(d) = \begin{cases} \dfrac{\int_d^\infty (x-d)f(x)dx}{\overline{F}(d)} & \text{si } X \text{ est continue,} \\ \dfrac{\sum_{x_j > d} (x_j - d)p(x_j)}{\overline{F}(d)} & \text{si } X \text{ est discrète.} \end{cases}$$

- Si X est continue et non-négative, alors

$$e_X(d) = \frac{\int_d^\infty \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(d)}$$

Remarque 1.29

Alors,

$$e_X(d) = \frac{\pi_X(d)}{\overline{F}(d)}$$

Remarque 1.30

En Mathématiques actuarielles vie, si X est la durée de vie d'un nouveau-né, alors $T_x = \{X - x|X > x\}$ est la durée de vie d'une personne (en vie maintenant) âgée de x ans et $e_X(x) = \mathbb{E}[T_x]$ est sa durée de vie résiduelle.

Exemple 1.13

(à faire en classe)

Exemple 1.14

(à faire en classe)

Exemple 1.15

(à faire en classe)

Distribution empirique. Évaluation de VaR et TVaR - méthode Monte Carlo

Distribution empirique

- Soit X une v.a. dont on a m réalisations : $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$.
- La distribution empirique associée à X, avec la fonction de répartition $F^{(m)}$, est la distribution discrète obtenue par donner la poids de $\frac{1}{m}$ à chaque observation/réalisation $x^{(j)}$
- Alors,

$$F^{(m)}(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} 1_{\{x^{(j)} \leq x\}}$$

- Remarque : Alors, a distrbution empirique associée est toujours discrète, même si X est continue ou mixte !
- On estime des quantités reliés à X comme les moments, probabilités, VaR, TVaR, en utilisant la fonction de répartition de la distribution emtirique

Alors,

$$VaR_p(X) \approx [F^{(m)}]^{-1}(p) = \inf\{x^{(j)}; F^{(m)}(x^{(j)}) \geq p\}$$

et, pour j_0 fixé tel que $[F^{(m)}]^{-1}(p) = j_0$,

$$\begin{aligned} TVaR_p(X) &\approx \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x^{(j)} \times 1_{\{x^{(j)} > [F^{(m)}]^{-1}(p)\}}\right) \\ &+ \frac{1}{1-p}\{[F^{(m)}]^{-1}(p)[F^{(m)}([F^{(m)}]^{-1}(p)) - p]\} \\ &= \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=j_0+1}^{m} x^{(j)} + x^{(j_0)}[F^{(m)}(x^{(j_0)}) - p]\right) \end{aligned}$$

Supposons que $m \times p$ est entier. Alors, $F^{(m)}(x^{(j_0)}) = p$, ce qui implique

$$
\begin{aligned}
TVaR_p(X) &\approx \frac{1}{m(1-p)} \sum_{j=1}^{m} x^{(j)} \times 1_{\{x^{(j)} > x^{(j_0)}\}} \\
&= \frac{1}{m-j_0} \sum_{j=j_0+1}^{m} x^{(j)} \\
&= CTE_p(\tilde{X})
\end{aligned}
$$

- Pour un p fixé, on peut

Exemple 1.16

Suppossons que les réalisation de la v.a. X sont :

$$3, 1, 7, 3, 1$$

Trouver la fonction de répartition, la VaR et la $TVaR$ de la fonction empirique

Construction de distributions avec mélange

- Soit une v.a. X avec un paramètre Θ qui est lui-même une variable aléatoire (continue ou discrète), avec une distribution connue $\Theta \sim f_\Theta$.
- On appelle Θ variable aléatoire de mélange.
- On dit que X est une variable aléatoire avec mélange si sa fonction de répartition est
  - pour Θ continue

$$F_X(x) = \int_0^\infty F_{X|\Theta=\theta}(x) f_\Theta(\theta) d\theta$$

  - et, pour Θ discrète

$$F_X(x) = \sum_\theta F_{X|\Theta=\theta}(x) p_\Theta(\theta)$$

Exemple 1.17

$X|\Theta \sim Exp(\Theta)$, où $\Theta \sim Gamma(\alpha, \beta)$. Trouver la fonction de distribution de X.

Exemple 1.18

An insurer has two groups of policyholders : the good and the bad risks. The insurer has a portfolio where $\frac{1}{3}$ are considered good risks. The number of claims distributions for both groups of risks are Poisson. The average number of claims of a good risk policyholder over a five years period is one while for bad risk, it is two. A new customer whose risk class is not known with certainty, has just recently purchased a policy from the insurer. Calculate the probability that this new customer will have two claims in a five year period.

Modèle général

- La perte totale est la somme des sinistres $B_1, B_2, \ldots$
- Le nombre de sinistre M est aléatoire (une v.a.).
- Alors,

$$X = \sum_{k=1}^{M} B_k, \quad \text{avec } X = 0 \text{ si } M = 0.$$

- Rappelons que :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}_Y[\mathbb{E}(X|Y)]$$

$$Var(X) = \mathbb{E}_Y[Var(X|Y)] + Var_Y[\mathbb{E}(X|Y)]$$

Espérance et variance de X

- Supposons que $B_1, B_2, \ldots$ sont i.i.d. et $\sim B$
- et indépendantes de M.
- Par conséquent,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[B]\mathbb{E}[M]$$

et

$$Var(X) = Var(B)\mathbb{E}(M) + Var(M)[\mathbb{E}(B)]^2.$$

Fonction de répartition de X. Espérance tronquée de X

$$F_X(x) = p_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_M(k) F_{B_1 + \ldots B_k}(x)$$

(détails en classe)

$$\mathbb{E}[X \times 1_{\{X \leq b\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} p_M(k) \mathbb{E}[(B_1 + \ldots + B_k) \times 1_{B_1 + \ldots + B_k \leq b}]$$

Donc,

$$\mathbb{E}[X \times 1_{\{X > b\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} p_M(k) \mathbb{E}[(B_1 + \ldots + B_k) \times 1_{B_1 + \ldots + B_k > b}]$$

TVaR

- $VaR_p(X) = F_X^{-1}(p)$

$$
\begin{aligned}
TVaR_p(X) &= \frac{\mathbb{E}[X \times 1_{\{X > VaR_p(X)\}}] + VaR_p(X)(F_X(VaR_p(X)) - p)}{1-p} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_M(k)\mathbb{E}[(B_1 + \ldots + B_k) \times 1_{B_1+\ldots+B_k > VaR_p(X)}]}{1-p} \\
&\quad + \frac{VaR_p(X)[F_X(VaR_p(X)) - p]}{1-p}
\end{aligned}
$$

- Pour $p < p_m(0)$ on a $VaR_p(X) = 0$
- Pour $p > p_M(0))$, on a de la continuité est alors $F_X(VaR_p(X)) = p$, ce qui simplifie l'expression de la $TVaR_p(X)$.

M.g.f.

On conditionne sur la v.a. M pour arriver à (à faire en classe)

$$M_X(t) = \mathbb{E}_M([M_B(t)]^M) = P_M(M_B(t))$$

Cas particulier : distribution de fréquence - Poisson(λ)

$$\mathbb{E}[X] = \lambda\mathbb{E}[B]$$

et

$$Var[X] = \lambda\mathbb{E}[B^2].$$

Il est simple a montrer que :

$$M_X(t) = e^{\lambda(M_B(t)-1)}$$

Cas particulier : distribution de fréquence - Bin(n, q)

$$\mathbb{E}[X] = nq\mathbb{E}[B]$$

et

$$Var[X] = nqVar(B) + nq(1-q)(\mathbb{E}[B])^2.$$

Il est simple a montrer que :

$$M_X(t) = (1 - q + qM_B(t))^n$$

Simulation par la méthode inverse

Génération des nombres pseudo-aléatoires

- pour simuler des valeurs d'une v.a. X par la méthode inverse, on utilise des valeurs (pseudo-)aléatoires d'une variable $U(0,1)$
- ces valeurs pséudo-aléatoire sont générées par l'ordinateur en utilisant une valeur initiale («source » ou « seed ») x_0 et ensuite les autres sont obtenues par :

$$x_n = ax_{n-1} \quad \text{modulo } m;$$

  Ensuite

$$U^{(n)} = \frac{x_n}{m}$$

- ...où x_0, a, b sont des nombres entiers (grand)

- Une méthode similaire : $x_n = (ax_{n-1} + c) \quad$ modulo m.
- Pour l'instant, on assume qu'on peut générer facilement des valeurs aléatoires (valeurs d'une v.a. $U(0, 1)$).
- En R, simplement utiliser : runif()
- Alors runif(100) va générer 100 valeurs aléatoires de la distribution uniforme $U(0, 1)$.

Application : évaluer des intégrales

- Pour évaluer
$$\theta = \int_0^1 g(x)dx.$$
- Comme $f_U(x) = 1$ pour $x \in (0,1)$, on a
$$\theta = \int_0^1 g(x) \times 1dx = E(g(U)), \quad U \sim U(0,1)$$
et
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{g(U_i)}{k} \to E(g(U)), \quad k \to \infty.$$
- - méthode Monte Carlo.

Exemple 2.1

Estimer

$$\int_0^1 (x + e^x)dx.$$

Pour intégrales sur $[a, b]$

- Pour estimer
$$\theta = \int_a^b g(x)dx,$$
- utiliser la substitution $y = \frac{x-a}{b-a}$.
- Ensuite,
$$\theta = \int_0^1 h(y)dy, \quad \text{où } h(y) = (b-a)g((b-a)y + a),$$
- et le problème est réduit au cas précédent, sur $[0, 1]$.
- Pour $\theta = \int_0^\infty g(x)dx$, utiliser la substitution $y = \frac{1}{x+1}$ et $\theta = \int_0^1 h(y)dy, \quad$ où $h(y) = \frac{g(\frac{1}{y}-1)}{y^2}$.

Simuler par la méthode inverse

- Pour simuler valeurs de la v.a. X avec fonction de répartition F :
  - a) générer valeurs aléatoires de $U^{(j)} \sim U(0,1)$
  - b) puis :

$$X^{(j)} = F^{-1}(U^{(j)})$$

Exemple 2.2

Simuler valeurs de la v.a. X avec fonction de répartition

$$F(x) = x^n, \quad 0 < x < 1.$$

Solution :

- générer valeurs aléatoires de $U^{(j)} \sim U(0, 1)$;
- Set $X = U^{1/n}$.

$X \sim Exp(\lambda)$

Exemple 2.3

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad 0 < x < \infty.$$

- générer valeurs aléatoires de $U^{(j)} \sim U(0, 1)$;
- Soit $X^{(j)} = F^{-1}(U^{(j)}) = -\frac{1}{\lambda} log(1 - U^{(j)})$.
- Équivalent (sans obtenir les mêmes valeurs) avec $X^{(j)} = -\frac{1}{\lambda} log(U^{(j)})$.
- ...ou utiliser rexp(n, lambda)

$X \sim Gamma(n, \lambda)$, aussi appelée $Erlang(n, \lambda)$

Exemple 2.4

.

$X \sim Poisson(\lambda)$

Exemple 2.5

(en utilisant des valeurs de $Exp(\lambda)$)

$$P(X = j) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

- Le temps entre les événements est $Exp(\lambda)$ et $N(1)$, le nombre d'événements avant temps $t = 1$, est Poisson(λ).
- Algorithme :
  - générer n $X_1, X_2, ..., X_n \sim Exp(\lambda)$;
  - $N(1) = max\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i \leq 1\}$.

- Équivalent :
  -générer $U_1, U_2, \ldots, U_n \sim U(0,1)$ et

$$
\begin{aligned}
N(1) &= max\{n : \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{\lambda}\log(U_i) \leq 1\} \\
&= max\{n : U_1U_2\ldots U_n \geq e^{-\lambda}\} \\
&= min\{n : U_1U_2\ldots U_n < e^{-\lambda}\} - 1.
\end{aligned}
$$

Exemple 2.6

$\max(X-d,0)$ et $\min(X,d)$

Exemple 2.7

$X + Y$, pour X, Y indépendantes

Somme composée avec distribution de fréquence - BinNeg(r, q)

Si $X = \sum_{k=1}^{M} B_k$ avec $B_1, B_2, \ldots \sim B$ sont i.i.d., et $M \sim BinNeg(r, q)$ on a

$$\mathbb{E}[X] = r\frac{1-q}{q}\mathbb{E}[B]$$

et

$$Var[X] = r\frac{1-q}{q}Var(B) + r\frac{1-q}{q^2}(\mathbb{E}[B])^2.$$

De plus, :

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{1-q}{q}[M_B(t) - 1]\right)^{-r}$$

- Pour $M \sim Poisson()$, on a $Var(M) = \mathbb{E}[M]$; pour $M \sim Bin()$, on a $Var(M) \leq \mathbb{E}[M]$; $M \sim NegBin()$, on a $Var(M) \geq \mathbb{E}[M]$
- Alors, si les paramètres de trois lois de fréquence M sont choisis de sorte que les trois moyennes sont égales, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^{BinComp}] &= \mathbb{E}[X^{PoissonComp}] = \mathbb{E}[X^{BinNegCom}] \\ \mathbb{V}[X^{BinComp}] &\leq \mathbb{V}[X^{PoissonComp}] \leq \mathbb{V}[X^{BinNegCom}]\end{aligned}$$

Simulation. Estimer VaR et TVaR

Exemple 2.8

VaR, TVar pour Poisson(λ)

Simulation de v.a. définies par un mélange

- Pour Simuler n réalisations de X :
- Simuler une réalisation $\Theta^{(j)}$ de Θ
- Simuler une réalisation de $X^{(j)}|\Theta = \Theta^{(j)}$
- Répéter pour $j = 1, 2, \ldots, n$

Exemple 2.9

(à faire en classe)

Exemple 2.10

(à faire en classe)

Remarques pour la simulation de la VaT et de la TVaR

- Rappeler que

$$VaR_p(X) \approx [F^{(m)}]^{-1}(p) = \inf\{x^{(j)}; F^{(m)}(x^{(j)}) \geq p\}$$

- Soit j_0 fixé tel que $[F^{(m)}]^{-1}(p) = j_0$.
- Supposons que $m \times p$ est entieret et que les réaliasations $x^{(i)}$ sont différentes. Alors, $F^{(m)}(x^{(j_0)}) = p$, ce qui implique

$$\begin{aligned} TVaR_p(X) &\approx \frac{1}{m(1-p)} \sum_{j=1}^{m} x^{(j)} \times 1_{\{x^{(j)} > x^{(j_0)}\}} \\ &= \frac{1}{m - j_0} \sum_{j=j_0+1}^{m} x^{[j]} \\ &= CTE_p(\tilde{X}) \end{aligned}$$

où $x^{[1]}, x^{[2]}, \ldots, x^{[m]}$ sont les réalisations $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ en ordre croissante

- Pour une v.a. X continue, soit m réalisations de X en ordre croissante : $x^{[1]} < x^{[2]} < \ldots < x^{[m]}$
- Pour ordonner les composantes d'un vecteur y en ordre croissante, utiliser en R $sort(y)$
- Pour un p fixé, on peut souvent choisir m tel que $m \times p$ est entier.
- Alors, si $p = 0.95$, et $m = 100$, alors $VaR_{0.95}(X) \approx x^{[95]}$ et $TVaR_{0.95}(X) \approx \frac{x^{[96]}+\ldots+x^{[100]}}{100}$.
- Alors, si $p = 0.95$, et $m = 1000$, alors $VaR_{0.95}(X) \approx x^{[950]}$ et $TVaR_{0.95}(X) \approx \frac{x^{[951]}+\ldots+x^{[1000]}}{1000}$.
- Alors, si $p = 0.95$, et $m = 10000$, alors $VaR_{0.95}(X) \approx x^{[9500]}$ et $TVaR_{0.95}(X) \approx \frac{x^{[9501]}+\ldots+x^{[10000]}}{10000}$.
- Alors, il est simple à le trouver, mais on a besoin de plusieurs simulations pour une bonne approximation de la $TVaR$.

$VaR_p(aX)$ et $TVaR_p(aX)$ pour $a < 0$

- D'abord, pour $a = -c$, avec $c > 0$, $VaR_p(-cX) = cVaR_p(-X)$ ...et similaire pour $TVaR$
- Il reste à étudier $VaR_p(-X)$ et $TVaR_p(-X)$.
- $F_{-X}(x) = \mathbb{P}[X \geq x]$
- Pour X continue, $F_{-X}(x) = 1 - F_X(-x)$
- Pour X discrète ou mixte, ce n'est pas toujours vrai.

Cas 1 : X continue

- Alors, pour X continue, $F_{-X}(x) = 1 - F_X(-x)$ ce qui implique

$$VaR_p(-X) = -VaR_{1-p}(X)$$

et

$$\begin{aligned} TVaR_p(-X) &= -\frac{1}{1-p}\int_0^{1-p} VaR_s(X)ds \\ &= -\frac{\mathbb{E}[X \times 1_{\{X \leq VaR_{1-p}(X)\}}]}{1-p} \\ &= -\frac{1}{1-p}[\mathbb{E}[X] - p \times TVaR_{1-p}(X)] \end{aligned}$$

Cas 2 : X discrète

Exemple 2.11

(à faire en classe)

Remarque 2.1

$VaR_p(X) \neq VaR_p^+(X)$ seulement pour p qui corresponde à une ligne horizontale de $F_X(x)$

Cas 2 : X discrète

- Alors, on a :

$$VaR_p(-X) = -VaR^+_{1-p}(D)$$

et

$$TVaR_p(-X) = -\frac{1}{1-p}\int_0^{1-p} VaR^+_s(X)ds$$

et

$$\begin{aligned} TVaR_p(-X) &= -\frac{1}{1-p}\mathbb{E}[X \times 1_{\{X \leq VaR^+_{1-p}(X)\}}] \\ &\quad + \frac{1}{1-p}VaR^+_{1-p}(X)[F_X(VaR^+_{1-p}(X)) - (1-p)] \end{aligned}$$

Exemple 2.12

(à faire en classe)

Distribution de sinistres « light tailed » et « heavy tailed »

- Les montants des sinistres sont modelisés par des distributions à support positif
- Il est important de classifier ces distributions par rapport à la possibilité élevée ou non d'avoir de grands nombres (pertes) : « heavy » ou » light tailed ».
- La probabilité $\Pr[X > x]$ est référée parfois à la queue (« tail ») de la distribution
- Les termes « heavy » ou « light tailed » peuvent être un terme absolu ou relatif
- On peut dire, par exemple que X est « light tailed » (queue lourde) - concept absolu ou on peut dire que X a une queue moins lourde que Y.

- Les termes « heavy » ou « light tailed » peuvent être un terme absolu ou relatif
- On peut dire, par exemple que X est « light tailed » (queue lourde) - concept absolu ou on peut dire que X a une queue moins lourde que Y.
- Il y a plusieurs définitions/classifications, qui ne sont pas toutes équivalentes.
- Généralement (pas nécessairement pour tous les critères) ,
  - les distributions Pareto, (lognormale), Weibull$(\tau \in (0,1))$, Gamma$(\alpha \in (0,1), \beta)$, Burr, F-généralisée et log-logistic sont « heavy tailed »
  - et les distributions Exp(β), Gamma$(\alpha \geq 1, \beta)$, Weibull$(\tau \geq 1)$ sont « light tailed »
  - la distribution exponentielle est considéré comme « border ligne »

Concept absolu. Classification basée sur l'existence des moments

- X est « light tailed » si tous les moments $\mathbb{E}[X^k]$ existent (par exemple Erlang)
- X est « heavy tailed » si les moments $\mathbb{E}[X^k]$ existent jusqu'à un maximum $k \leq n$ (par exemple, Pareto)
- Alors, si la f.g.m., $\mathbb{E}[e^{tX}]$ existe, alors tous les moments d'ordre n existent et la distribution est « light tailed ».
  - L'inverse n'est pas nécessairement vrai. Par exemple, X lognormale est moyenne lourde.
  - Alors, pour parler de « heavy » ou « light tailed », il faut spécifier le critère (la définition) utilisé.

Exemple 2.13

(à faire en classe)

Concept relatif. Comparaison entre deux queues

- Soit deux v.a., avec $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.
- On dit que X a la queue plus lourde que Y si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_Y(x)} = \infty$$

- .... ce qui est équivalent avec

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} = \infty$$

Concept absolu. Classification basée sur l'existence de la f.g.m.

- X est « light tailed » si la f.g.m., $\mathbb{E}[e^{tX}]$ existe
- X est « light tailed » si on a

$$\lim_{x\to\infty} e^{rx}\overline{F}_X(x) < \infty, \quad \text{pour tout } r > 0$$

- X est « heavy tailed » si on a

$$\lim_{x\to\infty} e^{rx}\overline{F}_X(x) = \infty, \quad \text{pour tout } r > 0$$

Exemple 2.14

(à faire en classe)

Fonction de mortalité (Force de mortalité)

- La force de mortalité (pour une variable aléatoire X) est l'analogue de la force d'intérêt δ_t mais pour décrire la mortalité au lieu de l'intérêt.
- La force de mortalité $\mu_X(x)$ (aussi notée μ_x) est le taux instantané de mortalité à l'âge x.
- Sa expression mathématique est $\mu_X(x) = \frac{f_X(x)}{\overline{F}_X(x)}$.
- De plus,

$$\mu_x = \frac{f_X(x)}{\overline{F}_X(x)} = -\frac{\overline{F}'_X(x)}{\overline{F}_X(x)} = -\frac{d}{dx}\ln[\overline{F}_X(x)], \quad x \geq 0.$$

- Alors, pour un petit intervalle $(t, t+dt)$:

$$f_X(t)dt \approx \mathbb{P}[t < X < t+dt];$$

$$\mu_X(t)dt \approx \mathbb{P}[t < X < t+dt | X > t];$$

Propriétés de la force de mortalité :

Proposition 2.2

Une fonction $\mu(x)$ est la fonction de mortalité d'une variable aléatoire si :

- $\mu(x) \geq 0$ pour tous $x \geq 0$.
- Divergence : $\int\limits_0^\infty \mu(x)dx = \infty$.

Proposition 2.3

La fonction de mortalité caractérise uniquement la distribution :

- $\overline{F}_X(x) = e^{-\int_0^x \mu(u)du}$.
- $f_X(x) = \mu(x)e^{-\int_0^x \mu(x)du}$.

Exemple 2.15

Trouvez la fonction de survie, de répartition et de densité pour les variables aléatoires suivantes :

- Exponentielle :

$$\mu_x = \lambda = \textit{constante} > 0, \quad x > 0;$$

- De'Moivre (Uniforme sur $(0, \omega)$) :

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}, \quad 0 < x < \omega, \text{ où } \omega > 0;$$

Exemple 2.16

La distribution de Weibull :

$$\mu_x = kx^n, \quad x \geq 0, k > 0, n > -1.$$

On peut démontrer que

$$\overline{F}_X(x) = e^{-\int_0^x \mu_X(t)dt} = e^{\left[-\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right]} = e^{\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n+1}\right]}$$

pour $\theta = \left(\frac{n+1}{k}\right)^{1/(n+1)}$.

- Remarque : Pour $n = 0$ elle devient la distribution exponentielle.

Classification des v.a. basée sur la fonction de mortalité - Concept absolu

- X est « light tailed » si la fonction de mortalité (de hasard) est croissante
- X est « heavy tailed » si la fonction de mortalité (de hasard) est décroissante

Exemple 2.17

(à faire en classe)

Concept absolu. Classification basée sur la fonction d'excès-moyen

- X est « light tailed » si la fonction d'excès-moyen est décroissante
- X est « heavy tailed » si la fonction d'excès-moyen est croissante.

Remarque 2.4

Cette définition est différente que celle dans le livre d'Étienne Marceau, Section 2.5.2 (« heavy tailed » si la fonction d'excès-moyen est croissante à l'infini et « light tailed » si la fonction d'excès-moyen tends vers une constante finie).

Remarque 2.5

$$\lim_{d\to\infty} e_X(d) = \lim_{d\to\infty} \frac{1}{h(d)}.$$

Exemple 2.18

(à faire en classe)

Remarque 2.6

La fonction d'excès-moyen caractérise uniquement la distribution X :

$$\overline{F}(x) = \frac{e(0)}{e(x)} e^{-\int_0^x \frac{1}{e(t)} dt}.$$

Exemple 2.19

Supposons que $e_X(d) = d + 1, \forall d \geq 0$.
a) Trouver $\overline{F}_X(x), f_X(x), \mu_X(x)$;
b) Calculer le coefficient de variation $CV(X) = \frac{\sigma}{\mu}$
c) Est-ce que X a une que lourde ?

Distributions d'un montant d'un sinistre.

- v.a. positives
- d'habitude, en assurance domage et assurance maladie, avec coéfficient d'asymétrie positive - c.-à-d., la queue de droite (à valeurs hautes) est plus longue ou grosse

-Cas particuliers

(à discuter en classe ; plus de détails- livre de É. Marceau, pages 69-75)

- Exponentielle
- Erlang
- Gamma
- Lognormale
- Weibull
- Pareto
- Mélange d'exponentielles ;
- Mélange d'Erlangs
- etc.

-Cas particuliers : v.a. « Exponentielle »

- « sans mémoire »
- fonctions de mortalité et d'excès-moyen constantes
- « light-tailed » (à la limit pour certains critères)
- sum de n i.i.d. $Exp(\lambda)$ est $Erlang(n, \lambda)$
- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépentant et $Exp(\lambda_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, alors $\min\{X_1, \ldots, X_n\} \sim Exp(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$
- pdf, cdf, mgf, etc.
- utilisée pour le temps entre sinistres ; aussi pour le montant de sinistres dans le forme d'un mélange d'exponentielles
- preuves et détails - en classe

-Cas particuliers : v.a. « $Erlang(n, \lambda)$ »

- obtenue comme une somme de n i.i.d. $Exp(\lambda)$
- facile à simuler en utilisant la remarque que c'est une somme de n i.i.d. $Exp(\lambda)$
- « light-tailed »
- utilisée en pratique pour le montants de sinistres, sourtout dans le forme d'un mélange d'Erlangs.
- pdf, cdf, mgf, etc.
- généralisation d'exponentielle et cas particulier de Gamma
- pdf, cdf, mgf, etc.
- utilisée pour le temps entre sinistres ; aussi pour le montant de sinistres dans le forme d'un mélange d'exponentielles
- somme de n i.i.d. $Erlang(m, \beta)$ est $Erlang(nm, \beta)$, ce qui permet de trouver des expressions analytiques pour la $TVaR$ de la somme composée en fonction des fonctions de répartitions des montants de sinistres.

-Cas particuliers : v.a. « Gamma »

- généralisation d'Erlang
- « light-tailed » ou « heavy-tailed »
- très différente pour valeurs différents des paramètres
- somme de n i.i.d. $Gamma(\alpha, \beta)$ est $Gamma(n\alpha, \beta)$, ce qui permet de trouver des expressions analytiques pour la $TVaR$ de la somme composée en fonction des fonctions de répartitions des montants de sinistres.
- pdf, cdf, mgf, etc.

-Cas particuliers : v.a. « *LogNormale* »

- modeliser les montants de sinistres en assurance dommage
- fonction d'excès-moyen croissante (à vérifier)
- fonction de mortalité peut être ni croissante ni décroissante
- « light-tailed », « heavy-tailed » ou ni un ni l'autre, selon le critère utilisé
- Pour une somme composée X avec des montants de sinistres B log-normales, il n'est pas possible d'obtenir des expressions analytiques de F_X, $E[X \times 1_{X>b}]$ et $TVaR_p(X)$; cependant, il est possible de les évaluer approximativement

-Cas particuliers : v.a. « *Weibull* »

- « light-tailed », « heavy-tailed », selon le 1er paramètre τ
- généralisation d'exponentielle (prendre $\tau = 1$)
- utilisée en modelisation des durées de vie pour $\tau > 1$ et en modelisation des montantes de sinistres pour $\tau < 1$. Dans ce cas, fonction d'excès-moyen croissante et il n'est pas possible d'obtenir des expressions analytiques de F_X, $E[X \times 1_{X>b}]$ et $TVaR_p(X)$.

-Cas particuliers : v.a. mélange d'exponentielles et mélange d'Erlangs

- utilisés beaucoup pour modeliser le montant des sinistres
- mélange continu ou disctret (fini ou denombrable)
- Melange d'exponentielle avec Gamma rendre une v.a. Pareto
- Remarque importante : avec un mélange denombrable d'Erlangs, on peut estimmer n'importe quelle distribution continue avec support positif.
- Pour une somme composée X avec des montants de sinistres B mélange d'Erlangs, il est pas possible d'obtenir des expressions analytiques de F_X, $E[X \times 1_{X>b}]$ et $TVaR_p(X)$.

Le cas particulier de somme composée : $X = \sum_{i=1}^{M} B_i$ où $M \sim Bernoulli(q)$

- appliqué pour la somme des réclamations dans un intervalle court (e.g., une année).
- $F_X(x)$
- $VaR_p(X)$
- $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X \times 1_{\{X \leq d\}}], \mathbb{E}[X \times 1_{\{X \geq d\}}]$
- $TVaR_p(X)$

Chapitre III : Mutualisation des risques

- Soit le conglomérat des risques d'un assureur : $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- Les X_i peuvent être i.i.d. ou non, indépendantes ou dépendantes, provenant du même type de contrat ou non.
- Les X_i peuvent avoir une distribution connue ou non.
- Les X_i peuvent être des sommes composés : $X_j = \sum_{i=1}^{M_j} B_{ij}$.
- Le but est d'étudier les propriétés du risque global :

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

- $\mathbb{E}[S]$
- $\mathbb{V}[S]$
- m.g.f. si les X_i sont indépendantes ;
- m.g.f. si les X_i sont i.i.d.

Exemple 3.1

(à faire en classe un 1-2 exercices du dépannage 7)

Somme de n lois Poisson composées

Proposition 3.1

Soit

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

où

$$X_j \sim PComp(\lambda_j; F_{B_j}), \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Alors

$$S \sim PComp(\lambda_S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j; F_C)$$

avec

$$F_C(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_S} F_{B_j}(x).$$

Remarque 3.2

Le résultat est très fort parque on peut avoir des paramètre différents de λ_j et de F_{B_j} dans chaque somme Poisson composée X_j.

Exemple 3.2

(à faire en classe)

Somme de n lois Binomiales Négatives composées

Proposition 3.3

Soit

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

où

$$X_j \sim BNComp(r_j, q; F_B), \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Alors

$$S \sim BNComp(r_S = \sum_{j=1}^{n} r_j, q; F_B)$$

Somme de n lois Binomiales composées

Proposition 3.4

Soit

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

où

$$X_j \sim BComp(n_j, q; F_B), \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Alors

$$S \sim BNComp(n_S = \sum_{j=1}^{n} n_j, q; F_B)$$

Remarque 3.5

Les deux derniers résultats sont moins généraux que dans le cas poisson parce qu'il faut avoir le même paramètre q et la même fonction de répartition F_B dans chaque somme Binomiale Négative (Binomiale) composée X_j.

Le cas général

- Dans le cas général, les expressions de la fonction de répartition de S deviennent très complexes, même dans des cas simples de X_j.

Exemple 3.3

(à faire en classe)

- Il reste à utiliser des approximations :
  - Méthodes d'approximations par une distribution connue (normale, gamma, lognormale, inverse gaussienne, Pareto généralisée) ; utiliser 2-3 premier moments de S ; parfois ajouter un paramètre de translation.
  - raffinement de l'approximation basée sur la distribution normale (l'approximation « Normal Power » -...par dans ce cours)
  - mélange d'Erlang (ou d'exponentielles)
  - méthodes basées sur la simulation
- Méthodes d'approximations fondées sur les moments

Méthodes basées sur les moments

- Estimer la F_S par F_T où T est connue et tel que $\mathbb{E}[S^k] = \mathbb{E}[T^k]$, pour $k = 1, 2, \ldots, m$.
- D'habitude m est petit : $m = 2$ ou $m = 3$.

Approximation basée sur la distribution normale (et les deux premiers moments de S)

- Supposons que les deux premiers moments de S sont connus (équivalent, sa moyenne et sa variance sont connues).
- Théorème central limite (version classique)

Théorème 3.6

Soient les v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim X$ avec $\mathbb{E}[X_k] = \mu_X$ et $\mathbb{V}[X_k] = \sigma_X^2$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Alors, on a

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{V}[S_n]}} \to Z, \quad n \to \infty,$$

où $Z \sim N(0,1)$ et la convergence dans l'équation précédente est en distribution.

- Pour le cas où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ne sont pas identiquement distribués, on peut utiliser
- Variante du théorème central limite classique :

Théorème 3.7

Soient les v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes avec les espérances et les variances finies. Soit $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Alors, $\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mu_{X_i}$ et $\mathbb{V}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{X_i}$ et on a

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{V}[S_n]}} \to Z, \quad n \to \infty,$$

ou $Z \sim N(0,1)$ et la convergence dans l'équation précédente est en distribution.

- On estime S par T, ou $T \sim N(\mu_S, \sigma_S^2)$
- Alors,

$$\begin{aligned} F_S(x) &\approx F_T(x) = \\ VaR_p(S) &\approx VaR_p(x) = \\ TVaR_p(S) &\approx TVaR_p(x) = \end{aligned}$$

où $Z \sim N(0, 1)$.

- l'approximation est simple, mais pas toujours satisfaisante, notamment dans la queue de S.
- Pourquoi ?

Exemple 3.4

(à faire en classe)

Approximation basée sur la distribution Lognormale (et les deux premiers

- Utilisée pour un portefeuille des v.a. $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. ou non (dépendantes ou/et non idéntiquement distribuées
- Donc, on approximate S par $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$ avec

$$\mu =$$

$$\sigma^2 =$$

(à faire en classe)

-
-

Exemple 3.5

(à faire en classe)

Approximation basée sur la distribution Gamma translatée (et les trois pre

- Utilisée parce que gamma a une asymétrie positive
- Approximer S par $x_0 + T$, où $T \sim Gamma(\alpha, \beta)$
- ...ou α, β, x_0 sont trouvés en utilisant le trois premiers moments (ou, équivalent, l'éspérance, la variance et le coéfficient d'asymetrie) - à faire en classe
- C'est une approximation seulement pour la queue droite de S.

- Si S a une masse de probabilité élevée à zéro, estimer $S'\{S|S>0\}$ par $x_0 + T$, où $T \sim Gamma(\alpha, \beta)$ et ensuite faire les ajustements.

D'autres approximations

- D'un façon similaire, on utilise pour T les v.a. F-généralisée, Pareto (ou Pareto généralisée), etc.

Revoir les mesures de risques. La prime comme mesure de risque

Primes et propriétés

- Principe de valeur espérée
- Principe de la variance
- Principe de l'écart type
- Principe de la VaR
- Principe de la TVaR
- Principe exponentiel (prime d'utilité exponentielle)

Exemple 3.6

(à faire en classe)

Exemple 3.7

(à faire en classe)

Exemple 3.8

(à faire en classe)