Université Laval	Examen final traditionnel
Faculté des Sciences et de Génie	Hiver 2016
École d'actuariat	Date: Mercredi 27 avril 2016

Act-2001 Introduction à l'actuariat 2

Professeur: Etienne Marceau

Nom de famille de l'étudiant	**Prénom de l'étudiant**	**Matricule**

– L'examen contient 11 questions à développement.
– La durée est de 170 minutes.
– Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.
– Veuillez écrire vos réponses dans le cahier de réponse seulement.
– Voir les dernières pages de l'examen pour les annexes supplémentaires.
– Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet**.**
– Veuillez retourner le présent cahier, les annexes et le papier brouillon à la fin de l'examen.

Questions	**Points obtenus**	**Points**
1		10
2		16
3		9
4		14
5		14
6		10
7		16
8		8
9		16
10		10
11		9
Total		**120 (bonus = 12pts)**

1. **(10 points).** Soit la v.a. $X \sim BinomComp\,(2, 0.3; F_B)$ avec $B_1 \sim B_2 \sim B \sim Gamma\left(2, \frac{1}{200}\right)$.

On fournit les valeurs suivantes de la fonction de répartition $H\,(x; \alpha, 1)$ de la loi gamma avec les paramètres $\alpha = k$ and $\beta = 1$:

$x \mid k$	1	2	3	4	5	6	7
0.5	0.3935	0.0902	0.0144	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000
1	0.6321	0.2642	0.0803	0.0190	0.0037	0.0006	0.0001
1.5	0.7769	0.4422	0.1912	0.0656	0.0186	0.0045	0.0009
2	0.8647	0.5940	0.3233	0.1429	0.0527	0.0166	0.0045
2.5	0.9179	0.7127	0.4562	0.2424	0.1088	0.0420	0.0142
3	0.9502	0.8009	0.5768	0.3528	0.1847	0.0839	0.0335
3.5	0.9698	0.8641	0.6792	0.4634	0.2746	0.1424	0.0653
4	0.9817	0.9084	0.7619	0.5665	0.3712	0.2149	0.1107
4.5	0.9889	0.9389	0.8264	0.6577	0.4679	0.2971	0.1689
5	0.0033	0.9596	0.8753	0.7350	0.5595	0.3840	0.2378

Note: $H\,(x; \alpha, \beta) = H\,(\beta x; \alpha, 1)$. Example: $H\,(2000; 3, 0.001) = H\,(2; 3, 1) = 0.3233$.

Questions:

(a) **(3 points).** Calculer $\overline{F}_X\,(400)$.

(b) **(2 points).** Calculer $\overline{F}_{X|X>0}\,(400)$.

(c) **(3 points).** Calculer $E\left[X \times 1_{\{X>400\}}\right]$.

(d) **(2 points).** Calculer $TVaR_\kappa\,(X)$ où la valeur de κ est telle que $VaR_\kappa\,(X) = 400$. Fournir la valeur de κ.

Solution OK:

(a) **(3 points).** Calculer $\overline{F}_X\,(400)$.

On a

$$F_X\,(x) = f_M\,(0) + f_M\,(1)\,H\left(x; 2, \frac{1}{200}\right) + f_M\,(2)\,H\left(x; 4, \frac{1}{200}\right)$$

Alors, on conclut

$$\begin{aligned}
\overline{F}_X\,(x) &= 1 - F_X\,(x) \\
&= 1 - \left(f_M\,(0) + f_M\,(1)\,H\left(x; 2, \frac{1}{200}\right) + f_M\,(2)\,H\left(x; 4, \frac{1}{200}\right)\right) \\
&= f_M\,(0) - f_M\,(0) + f_M\,(1)\left(1 - H\left(x; 2, \frac{1}{200}\right)\right) + f_M\,(2)\left(1 - H\left(x; 4, \frac{1}{200}\right)\right) \\
&= f_M\,(1)\left(1 - H\left(x; 2, \frac{1}{200}\right)\right) + f_M\,(2)\left(1 - H\left(x; 4, \frac{1}{200}\right)\right)
\end{aligned}$$

On obtient : $\overline{F}_X\,(400) = 0.42 \times (1 - 0.594) + 0.09 \times (1 - 0.1429) = 0.247659$

(b) **(2 points).** Calculer $\overline{F}_{X|X>0}\,(400)$.

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X|X>0}(400) &= \frac{\overline{F}_X(400)}{1-f_M(0)} \\
&= \frac{0.247659}{1-0.49} \\
&= 0.485606
\end{aligned}$$

(c) **(3 points).** Calculer $E\left[X \times 1_{\{X>400\}}\right]$.
On a

$$\begin{aligned}
E\left[X \times 1_{\{X>400\}}\right] &= f_M(1) \times 2 \times 200 \left(1 - H\left(400; 2+1, \frac{1}{200}\right)\right) + f_M(2) \times 4 \times 200 \left(1 - H\left(400; \right.\right. \\
&= 0.42 \times 400 \times (1-0.3233) + 0.09 \times 800 \times (1-0.0527) \\
&= 181.8912
\end{aligned}$$

(d) **(2 points).** Calculer $TVaR_\kappa(X)$ où la valeur de κ est telle que $VaR_\kappa(X) = 400$. Fournir la valeur de κ.
On a

$$\kappa = 1 - 0.247659 = 0.752341$$

Comme $VaR_\kappa(X) = 400 > 0$ et que cette portion de la distribution est continue, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{X>400\}}\right] \\
&= \frac{1}{0.247659} 181.8912 \\
&= 734.442115974
\end{aligned}$$

:

2. **(16 points).** On considère un portefeuille de m contrats d'assurance continue vie entière émis à des assurés d'âge $x = 30$ dont les durées de vie sont i.i.d.

   La durée de vie de l'assuré i, désignée par $T_{x,i}$, $i = 1, 2, ..., m$.

   La durée de vie d'un assuré d'âge x obéit à une loi Gompertz avec

$$F_{T_x}(t) = 1 - e^{-\frac{\beta}{\gamma}e^{\gamma x}\left(e^{\gamma t}-1\right)},$$

   où $\beta = 0.00004$ et $\gamma = \ln(1.1)$. Voir en **annexe** des valeurs pertinentes pour cette questions.

   La prestation $b = 1000$ est versée au décès.

   On utilise une force d'intérêt de 2% pour les calculs.

   La v.a. Z_i correspond à la valeur présente pour le contrat i ($i = 1, 2, ..., m$).

   On définit la v.a. $W_{PTF,m}$ par

$$W_{PTF,m} = \frac{Z_1 + ... + Z_m}{m}.$$

   On définit les primes $\Pi_{m,\kappa}^{VaR} = VaR_\kappa(W_{PTF,m})$ et $\Pi_\kappa^{TVaR} = TVaR_\kappa(W_{PTF,m})$.

   Questions :

   (a) Calculer l'espérance et la variance de Z_i ($i = 1, 2, ..., m$).

   (b) Calculer la valeur exacte de la prime $\Pi_{m,\kappa}^{VaR}$ pour $m = 1$ et $\kappa = 99\%$.

   (c) Calculer la valeur exacte de la prime $\Pi_{m,\kappa}^{TVaR}$ pour $m = 1$ et $\kappa = 99\%$.

   (d) Calculer l'espérance et la variance de $W_{PTF,m}$ pour $m = 500$.

   (e) Utiliser l'approximation normale pour évaluer approximativement $\Pi_{m,\kappa}^{VaR}$ et $\Pi_{m,\kappa}^{TVaR}$ pour $m = 500$ et $\kappa = 99\%$.

   (f) On définit l'économie due à la mutualisation par $EC_{2000,\kappa}^{VaR} = \Pi_{1,\kappa}^{VaR} - \Pi_{500,\kappa}^{VaR}$ ou $EC_{500,\kappa}^{TVaR} = \Pi_{1,\kappa}^{TVaR} - \Pi_{500,\kappa}^{TVaR}$.

      i. Calculer $EC_{500,\kappa}^{VaR}$ et $EC_{500,\kappa}^{TVaR}$ pour $\kappa = 99\%$.

      ii. Commenter sur les deux valeurs obtenues.

   Solution :

   (a) **3pts.** Calculer l'espérance et la variance de Z_i ($i = 1, 2, ..., m$).

   Définition de Z_i :

$$Z_i = 1000v^{T_{x,i}}$$

   Espérance :

$$\begin{aligned} E[Z_i] &= \int_0^\infty 1000v_{0.02}^t f_{T_x}(t)\,dt \\ &= 1000 \times 0.4127000 \\ &= 412.7 \end{aligned}$$

2e moment :

$$\begin{aligned} E\left[Z_i^2\right] &= \int_0^\infty 1000^2 v^{2t} f_{T_x}(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty 1000^2 e^{-0.04t} f_{T_x}(t)\,dt \\ &= 1000^2 \times 0.1838682 \\ &= 183868.2 \end{aligned}$$

Variance :

$$\begin{aligned} Var(Z_i) &= E\left[Z_i^2\right] - E\left[Z_i\right]^2 \\ &= 183868.2 - 412.7^2 \\ &= 13546.91 \end{aligned}$$

(b) **2pts.** Calculer la valeur exacte de la prime $\Pi_{m,\kappa}^{VaR}$ pour $m = 1$ et $\kappa = 99\%$.
On a

$$\begin{aligned} \Pi_{1,\kappa}^{VaR} &= VaR_\kappa(Z_1) \\ &= 1000 e^{-0.02 VaR_{1-\kappa}(T_x)} \\ &= 1000 e^{-0.02 VaR_{1-0.99}(T_x)} \\ &= 1000 \times e^{-0.02\times 9.064092} \\ &= 834.200214572 \end{aligned}$$

(c) **3pts.** Calculer la valeur exacte de la prime $\Pi_{m,\kappa}^{TVaR}$ pour $m = 1$ et $\kappa = 99\%$.
On a

$$\begin{aligned} \Pi_{1,\kappa}^{TVaR} &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(Z_1)\,du \\ &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[Z_1 \times 1_{\{Z_1 > VaR_\kappa(Z_1)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_0^{VaR_{1-\kappa}(T_x)} 1000 e^{-0.02t} f_{T_x}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{1-0.99} 1000 \times \overline{A}_{\overset{1}{30}::\overline{834.200\,214\,572|}} \\ &= \frac{1}{1-0.99} 1000 \times \left(\overline{A}_{30} - e^{-0.02\times 9.064092} \times \overline{F}_{T_{30}}(9.064092)\,\overline{A}_{39.064092}\right) \end{aligned}$$

qui devient

$$
\begin{aligned}
\Pi_{1,\kappa}^{TVaR} &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} VaR_u\left(Z_1\right)du \\
&= \frac{1}{1-0.99}1000\times\left(\overline{A}_{30} - e^{-0.02\times 9.064092}\times \overline{F}_{T_{30}}\left(9.064092\right)\overline{A}_{39.064092}\right) \\
&= \frac{1}{1-0.99}1000\times\left(0.4127 - e^{-0.02\times 9.064092}\times 0.99\times\left(\left(1-0.064092\right)\times 0.4882166 + 0.064092 \times \right.\right. \\
&= : 902.709249284
\end{aligned}
$$

(d) **2pts.** Calculer l'espérance et la variance de $W_{PTF,m}$ pour $m = 500$.
Espérance :

$$E\left[W_{PTF,m}\right] = E\left[Z_1\right]$$

Variance :

$$
\begin{aligned}
Var\left(W_{PTF,m}\right) &= \frac{1}{500}Var\left(Z_1\right) \\
&= \frac{1}{500}13546.91 \\
&= 27.09382
\end{aligned}
$$

(e) **2pts.** Utiliser l'approximation normale pour évaluer approximativement $\Pi_{m,\kappa}^{VaR}$ et $\Pi_{m,\kappa}^{TVaR}$ pour $m = 500$ et $\kappa = 99\%$.
Prime $\Pi_{m,\kappa}^{VaR}$:

$$
\begin{aligned}
\Pi_{m,\kappa}^{VaR} &= VaR_{\kappa}\left(W_{PTF,m}\right) \\
&= E\left[W_{PTF,m}\right] + \sqrt{Var\left(W_{PTF,m}\right)}\Phi^{-1}\left(0.99\right) \\
&= 412.7 + \sqrt{27.09382}\times 2.326348 \\
&= 424.809042
\end{aligned}
$$

Prime $\Pi_{m,\kappa}^{TVaR}$:

$$
\begin{aligned}
\Pi_{m,\kappa}^{TVaR} &= TVaR_{\kappa}\left(W_{PTF,m}\right) \\
&= E\left[W_{PTF,m}\right] + \sqrt{Var\left(W_{PTF,m}\right)}\frac{1}{1-0.99}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Phi^{-1}(0.99)^2}{2}} \\
&= 412.7 + \sqrt{27.09382}\times\frac{1}{1-0.99}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{2.326348^2}{2}} \\
&= : 426.572\,895\,508
\end{aligned}
$$

(f) **2pts.** On définit l'économie due à la mutualisation par $EC_{2000,\kappa}^{VaR} = \Pi_{1,\kappa}^{VaR} - \Pi_{500,\kappa}^{VaR}$ ou $EC_{500,\kappa}^{TVaR} = \Pi_{1,\kappa}^{TVaR} - \Pi_{500,\kappa}^{TVaR}$.

i. **1pts.** Calculer $EC_{500,\kappa}^{VaR}$ et $EC_{500,\kappa}^{TVaR}$ pour $\kappa = 99\%$.
Économie $EC_{500,\kappa}^{VaR}$:

$$EC_{500,\kappa}^{VaR} = 834.200215 - 424.809042 = 409.391173$$

Économie $EC^{TVaR}_{500,\kappa}$:

$$EC^{TVaR}_{500,\kappa} = 902.709249 - 426.572896 = 476.136353$$

ii. **1pts.** Commenter sur les deux valeurs obtenues.

- En mutualisant les risques, il y a un importante économie
- (Bonus) Bien que la mesure VaR ne soit pas sous-additive, on observe aussi une économie selon ce principe.

3. (**9 points**). Les coûts pour un portefeuille sont représentés par la v.a. S où

$$F_S(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\tau}},$$

où $\lambda = 100$ et $\tau = 4$.

Le revenu total de primes est $P = 120$.

La prime P et un capital initial $u = 100$ sont investis dans un fonds dont le rendement instantanné est représenté par la v.a. R où

$$R \sim Norm\left(\mu = 0.06, \sigma = 0.2\right).$$

La probabilité de ruine pour la période est définie par

$$\psi(u) = \Pr\left(S > V(1)\right)$$

où

$$V(1) = (u + P)\, e^{R}.$$

Les v.a. S et R sont indépendantes.

On utilise la méthode Monte-Carlo pour évaluer approximativement $\psi(u)$.

On dispose des réalisations de U_1 pour simuler des réalisations de S et des réalisation de U pour produire des réalisations de R :

j	$U_1^{(j)}$	$S^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$R^{(j)}$
1	0.1491		0.8159	
2	0.8315		0.5793	
3	0.9792		0.0107	

Questions :

(a) **(4 points).** Produire les 3 réalisations de S.

(b) **(4 points).** Produire les 3 réalisations de R et de $V(1)$.

(c) **(1 points).** Utiliser les réalisations pour évaluer approximativement $\psi(u)$.

Solution (9 points) OK

(a) **(4 points).** Produire les 3 réalisations de S

On sait que

$$F_S(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\tau}}$$

(1 points) On trouve l'inverse de fonction de répartition

$$F_S^{-1}(y) = \lambda \times \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{-\frac{1}{\tau}}$$

(3 points) On trouve donc les réalisation de S par la méthode inverse

$$S^{(j)} = \begin{cases} 64.69933 & ,j=1 \\ 149.0437 & ,j=2 \\ 261.94012 & ,j=3 \end{cases}$$

(b) **(4 points).**Produire les 3 réalisations de R et de $V(1)$

(2 points) Par la méthode inverse on simules les réalisations normales

$$R^{(j)} = \begin{cases} 0.24 & ,j=1 \\ 0.10 & ,j=2 \\ -0.40 & ,j=3 \end{cases}$$

(2 points) Et on a

$$\begin{aligned} V(1)^{(j)} &= (u+P)\exp\left(R^{(j)}\right) \\ &= \begin{cases} 279.6664 & ,j=1 \\ 243.1426 & ,j=2 \\ 147.4453 & ,j=3 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) **(1 points).**Evaluer approximativement la $\psi(u)$

On sait que

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \Pr(S > V(1)) \\ &\simeq \frac{\sum^3 1_{\{S>V(1)\}}}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4. **(14 points).** Soit les v.a. i.i.d. $X_{1,1}, ..., X_{1,n_1}$ avec

$$X_{1,i} \sim X_1 \sim BNComp\left(r, q; F_{B_1}\right),$$

où $r = 0.1, q = \frac{1}{3}$, $B_1 \sim LNorm\left(\mu = \ln(10) - \frac{1}{2}, \sigma = 1\right)$, pour $i = 1, 2, ..., n_1$.

Soit les v.a. i.i.d. $X_{2,1}, ..., X_{2,n_2}$ avec

$$X_{2,j} \sim X_2 \sim PComp\left(\lambda; F_{B_2}\right),$$

où $\lambda = 0.2$, $B_2 \sim Gamma\left(\alpha = 5, \beta = \frac{5}{10}\right)$, pour $j = 1, 2, ..., n_2$.

Les v.a. $X_{1,1}, ..., X_{1,n_1}$, $X_{2,1}, ..., X_{2,n_2}$ sont indépendantes.

On définit

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i} \qquad S_2 = \sum_{j=1}^{n_2} X_{2,j} \qquad S = S_1 + S_2.$$

On définit la mesure

$$\rho_\kappa(Y) = E[Y] + \frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(Y)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$

Questions :

(a) **(2 points).** Montrer que la fonction

$$\varphi\left(X_{1,1}, ..., X_{1,n_1}, X_{2,1}, ..., X_{2,n_2}\right) = \rho_\kappa(S) = \rho_\kappa\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i} + \sum_{j=1}^{n_2} X_{2,j}\right)$$

est homogène.

(b) **(4 points).** Calculer $\rho_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.99$, $n_1 = 100$ et $n_2 = 100$.

(c) **(4 points).** Appliquer le théorème d'Euler à la mesure $\rho_\kappa(S)$ pour calculer les contributions $C_\kappa^\rho(S_1; S)$ et $C_\kappa^\rho(S_2; S)$ de chaque ligne d'affaires. Commenter brièvement.

(d) **(4 points).** Appliquer le théorème d'Euler à la mesure $\rho_\kappa(S)$ pour calculer les contributions $C_\kappa^\rho(X_{1,1}; S)$ et $C_\kappa^\rho(X_{2,1}; S)$ d'un contrat de chaque ligne d'affaire. Commenter brièvement.

Solution OK:

(a) **(2 points).** Montrer que la fonction

$$\varphi\left(X_{1,1}, ..., X_{1,n_1}, X_{2,1}, ..., X_{2,n_2}\right) = \rho_\kappa(S) = \rho_\kappa\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i} + \sum_{j=1}^{n_2} X_{2,j}\right)$$

est (positive) homogène.

On a

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\lambda X_{1,1},...,\lambda X_{1,n_1},\lambda X_{2,1},...,\lambda X_{2,n_2}\right) &= \rho_\kappa\left(\lambda\sum_{i=1}^{n_1}X_{1,i}+\lambda\sum_{j=1}^{n_2}X_{2,j}\right)\\
&= \rho_\kappa\left(\lambda S\right)\\
&= E\left[\lambda S\right]+\frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var\left(\lambda S\right)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}\\
&= \lambda\left(E\left[S\right]+\frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var\left(S\right)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}\right)\\
&= \lambda\rho_\kappa\left(S\right)\\
&= \lambda\varphi\left(X_{1,1},...,X_{1,n_1},X_{2,1},...,X_{2,n_2}\right).
\end{aligned}$$

La fonction (i.e. la mesure) est homogène.

(b) **(4 points).** Calculer $\rho_\kappa\left(S\right)$, pour $\kappa=0.99$, $n_1=100$ et $n_2=100$.

- $E\left[X_1\right]=r\frac{1-q}{q}E\left[B_1\right]=0.1\times\frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\times 10=2$
- $E\left[X_2\right]=\lambda E\left[B_2\right]=0.2\times\frac{\alpha}{\beta}=0.2\times 10=2$
- $Var\left(X_1\right)=0.1\times\frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\times Var\left(B_1\right)+0.1\times\frac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}E\left[B_1\right]^2=0.2\times\left(e^{2\left(\ln(10)-\frac{1}{2}\right)+2\times 1}-10^2\right)+\frac{0.2}{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(10^2\right)=94.365637$
- $Var\left(X_2\right)=\lambda E\left[B_2^2\right]=0.2\times\left(\frac{5\times 6}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)=24$
- $E\left[S_1\right]=n_1E\left[X_1\right]=100\times 2=200$
- $E\left[S_2\right]=n_2E\left[X_2\right]=100\times 2=200$
- $E\left[S\right]=E\left[S_1\right]+E\left[S_2\right]=400$
- $Var\left(S_1\right)=n_1Var\left(X_1\right)=100\times 94.365637=9436.5637$
- $Var\left(S_2\right)=n_2Var\left(X_2\right)=100\times 24=2400$
- $Var\left(S\right)=Var\left(S_1\right)+Var\left(S_2\right)=9436.5637+2400=11836.5637$
- $\rho_{0.99}\left(S\right)=400+\frac{1}{1-0.99}\sqrt{11836.5637}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(2.326348)^2}{2}}=689.964\,488\,887$
- Note:

u	0.5	0.9	0.95	0.99	0.999	0.9999
$\Phi^{-1}\left(u\right)$	0	1.281552	1.644854	2.326348	3.090232	3.719016

(c) **(4 points).** Appliquer le théorème d'Euler à la mesure $\rho_\kappa\left(S\right)$ pour calculer les contributions $C_\kappa^\rho\left(S_1;S\right)$ et $C_\kappa^\rho\left(S_2;S\right)$ de chaque ligne d'affaires. Commenter brièvement.
Selon le Théorème d'Euler, on obtient

$$\begin{aligned}
C_\kappa^\rho\left(S_1;S\right) &= E\left[S_1\right]+\frac{1}{1-\kappa}\frac{Var\left(S_1\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}\\
&= 200+\frac{1}{1-0.99}\frac{9436.5637}{\sqrt{11836.5637}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(2.326348)^2}{2}}\\
&= 431.170\,84
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
C_{\kappa}^{\rho}\left(S_2;S\right) &= E\left[S_2\right]+\frac{1}{1-\kappa}\frac{Var\left(S_2\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\
&= 200+\frac{1}{1-0.99}\frac{2400}{\sqrt{11836.5637}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(2.326348)^2}{2}} \\
&= 258.793\,649\,151
\end{aligned}
$$

Pour cette mesure, comme $E\left[S_1\right]=E\left[S_2\right]$ et comme tous les risques sont indépendants, seules variances (ou écart-types) permettent de distinguer de façon claire les contributions de chaque ligne d'affaires

(d) **(4 points).** Appliquer le théorème d'Euler à la mesure $\rho_{\kappa}\left(S\right)$ pour calculer les contributions $C_{\kappa}^{\rho}\left(X_{1,1};S\right)$ et $C_{\kappa}^{\rho}\left(X_{2,1};S\right)$ d'un contrat de chaque ligne d'affaire. Commenter brièvement.

Selon le Théorème d'Euler, on obtient

$$
\begin{aligned}
C_{\kappa}^{\rho}\left(X_{1,1};S\right) &= E\left[X_{1,1}\right]+\frac{1}{1-\kappa}\frac{Var\left(X_{1,1}\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\
&= 2+\frac{1}{1-0.99}\frac{94.365637}{\sqrt{11836.5637}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(2.326348)^2}{2}} \\
&= 4.31170\,84
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
C_{\kappa}^{\rho}\left(X_{2,1};S\right) &= E\left[X_{2,1}\right]+\frac{1}{1-\kappa}\frac{Var\left(X_{2,1}\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\
&= 2+\frac{1}{1-0.99}\frac{24}{\sqrt{11836.5637}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(2.326348)^2}{2}} \\
&= 2.58793\,649\,151
\end{aligned}
$$

Les risques sont iid dans chaque ligne d'affaires. C'est pourquoi les contributions de la chaque lignes d'affaire est $\frac{1}{100}$ de la contribution totale de la ligne d'affaires.

5. **(14 points).** On considère un portefeuille de $m = 5000$ contrats d'assurance temporaire $n = 3$ ans à des individus de 70 ans dont les durées de vie sont i.i.d.

La v.a. $T_{x,i}$ représente la durée de vie de l'assuré i d'âge x, $i = 1, 2, ..., m$, où

$$F_{T_{x,i}}(t) = 1 - e^{-0.00006\times 1.1^x\left(1.1^t-1\right)},$$

pour $t \geq 0$.

La prestation de décès est de 20000, versée en fin d'année.

La valeur présente des coûts pour le contrat i est représentée par la v.a. Z_i qui est définie en fonction de la v.a. $T_{x,i}$ $(i = 1, 2, ..., m)$.

Les valeurs présentes (actualisées) sont calculées avec une force d'intérêt de 4%.

On définit la v.a. Z_{PTF} comme étant la valeur présente des coûts pour l'ensemble du portefeuille où

$$Z_{PTF} = Z_1 + ... + Z_m.$$

Questions :

(a) **(4 points).** Calculer la prime pure et le revenu total de primes.

(b) **(5 points).** Calculer les valeurs espérées des sorties de fonds pour les années 1, 2, 3.

(c) **(5 points).** Déterminer les montants qui doivent être investis dans des obligations 0-coupon au temps 0 pour financer les valeurs espérées des sorties de fonds pour les années 1, 2, 3 (voir en (5b)). Les prix des obligations sont calculés en supposant le modèle de taux d'intérêt déterministe (avec force d'intérêt 4%). Expliquer brièvement comment le revenu total de primes sera alloué en considérant les montants à investir au temps 0 (qui ont été déterminés en (5b)).

Solution : OK

(a) **(4 points).** Calculer la prime pure et le revenu total de primes pures.

(3 points). On a

$$\begin{aligned}
E[Z] &= 20000\left(vF_{T_x}(1) + v^2\left(F_{T_x}(2) - F_{T_x}(1)\right) + v^3\left(F_{T_x}(3) - F_{T_x}(2)\right)\right) \\
&= 20000\left(e^{-0.04}F_{T_x}(1) + e^{-0.04\times 2}\left(F_{T_x}(2) - F_{T_x}(1)\right) + e^{-0.04\times 3}\left(F_{T_x}(3) - F_{T_x}(2)\right)\right) \\
&= 20000\left(\begin{array}{c} e^{-0.04}\left(1 - e^{-0.00006\times 1.1^{70}\left(1.1^1-1\right)}\right) \\ +e^{-0.04\times 2}\left(e^{-0.00006\times 1.1^{70}\left(1.1^1-1\right)} - e^{-0.00006\times 1.1^{70}\left(1.1^2-1\right)}\right) \\ +e^{-0.04\times 3}\left(e^{-0.00006\times 1.1^{70}\left(1.1^2-1\right)} - e^{-0.00006\times 1.1^{70}\left(1.1^3-1\right)}\right) \end{array}\right) \\
&= 286.775059
\end{aligned}$$

(1 points). Revenu total :

$$\begin{aligned}
\Pi^{TOT} &= 5000 \times 286.775059 \\
&= 1433875.295
\end{aligned}$$

(b) **(5 points).** Calculer les valeurs espérées des sorties de fonds pour les années 1, 2, 3. On a

$$\begin{aligned} E\left[CF\left(1\right)\right] &= 5000 \times 20000 \times F_{T_x}\left(1\right) \\ &= 5000 \times 20000 \times \left(1 - e^{-0.00006 \times 1.1^{70}\left(1.1^{1}-1\right)}\right) \\ &= 472727.284756 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[CF\left(2\right)\right] &= 5000 \times 20000 \times \left(F_{T_x}\left(2\right) - F_{T_x}\left(1\right)\right) \\ &= 5000 \times 20000 \times \left(e^{-0.00006 \times 1.1^{70}\left(1.1^{1}-1\right)} - e^{-0.00006 \times 1.1^{70}\left(1.1^{2}-1\right)}\right) \\ &= 517419.329342 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[CF\left(3\right)\right] &= 5000 \times 20000 \times \left(F_{T_x}\left(3\right) - F_{T_x}\left(2\right)\right) \\ &= 5000 \times 20000 \times \left(e^{-0.00006 \times 1.1^{70}\left(1.1^{2}-1\right)} - e^{-0.00006 \times 1.1^{70}\left(1.1^{3}-1\right)}\right) \\ &= 566054.916308 \end{aligned}$$

(c) **(5 points).** Déterminer les montants qui doivent être investis dans des obligations 0-coupon au temps 0 pour financer les valeurs espérées des sorties de fonds pour les années 1, 2, 3 (voir en (**??**)). Les prix des obligations sont calculés en supposant le modèle de taux d'intérêt déterministe (avec force d'intérêt 4%). Expliquer brièvement comment le revenu total de primes sera alloué en considérant les montants à investir au temps 0 (qui ont été déterminés en (**??**)).

($\frac{4}{3}$ point). Montant #1

$$\begin{aligned} A\left(1\right) &= vE\left[CF\left(1\right)\right] \\ &= e^{-0.04} \times 472727.284756 \\ &= 454191.382793 \end{aligned} \tag{1}$$

($\frac{4}{3}$ point). Montant #2

$$\begin{aligned} A\left(2\right) &= v^{2}E\left[CF\left(2\right)\right] \\ &= e^{-0.04 \times 2} \times 517419.329342 \\ &= 477638.240852 \end{aligned}$$

($\frac{4}{3}$ point). Montant #3

$$\begin{aligned} A\left(3\right) &= v^{3}E\left[CF\left(3\right)\right] \\ &= e^{-0.04 \times 3} \times 566054.916308 \\ &= 502045.673578 \end{aligned}$$

(1 point). La compagnie va acheter des obligations 0 coupon avec échéance 1, 2, 3 de telle sorte que la compagnie puisse financer l'espérance des sorties de fonds aux échéances 1,2 3. Les coûts sont $A\left(1\right)$, $A\left(2\right)$ et $A\left(3\right)$

6. **(10 points).** Soit les v.a. i.i.d. $X_1, ..., X_n$ avec

$$X_i \sim BNComp\left(r, q; F_C\right),$$

où $r = 2.5, q = \frac{1}{3}$, $C \sim Pareto\left(\alpha = 1.5, \lambda = 5\right)$, pour $i = 1, 2, ..., n$.

On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $W_n = \frac{1}{n} S_n$.

On ne peut pas identifier une forme explicite pour F_{W_n}.

Parmi les deux méthodes proposées, on choisit une **seule** méthode appropriée pour approximer F_{W_n} :

- méthode #1 – approximation basée sur la loi normale ;
- méthode #2 – approximation basée sur la loi du montant de sinistre maximal.

Note : les méthodes ne sont pas utilisées deux fois dans ce numéro.

Questions :

(a) **(2 points).** Calculer la valeur de $E\left[W_n\right]$.

(b) **(4 points). Démontrer** que la part allouée W_n tend (en distribution) vers $E\left[W_n\right]$. (**Note** : il faut démontrer le résultat qui permet d'obtenir cette conclusion).

(c) **(4 points).** La prime pour un contrat du portefeuille est

$$\Pi_{\kappa,n}\left(X\right) = VaR_{\kappa}\left(W_n\right).$$

Pour $\kappa = 0.99$ et $n = 100$, évaluer approximativement $VaR_{\kappa}\left(W_n\right)$ en utilisant une seule des 2 méthodes proposées. Justifier brièvement votre choix.

Solution OK :

(a) **(2 points).** Calculer la valeur de $E\left[W_n\right]$. où $r = 2.5, q = \frac{1}{3}$, $C \sim Pareto\left(\alpha = 1.5, \lambda = 5\right)$, pour $i = 1, 2, ..., n$.
On a

$$\begin{aligned} E\left[W_n\right] &= E\left[X_1\right] \\ &= 2.5 \times 2 \times \frac{5}{1.5 - 1} \\ &= 50 \end{aligned}$$

(b) **(4 points). Démontrer** que la part allouée W_n tend (en distribution) vers $E\left[W_n\right]$. (**Note** : il faut démontrer le résultat qui permet d'obtenir cette conclusion).
We define

$$W_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

where

$$L_{W_n}\left(t\right) = L_X\left(\frac{t}{n}\right).$$

Near the origin, we have

$$L_X(t) = 1 - \mu t + o(t).$$

It implies that

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} L_{W_n}(t) &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\mu\frac{t}{n}\right)^n \\ &= e^{-\mu t} \\ &= L_Z(t),\end{aligned}$$

where the rv Z is defined such that

$$\Pr(Z = \mu) = 1.$$

Then, we conclude that W_n converges in distribution to the rv Z i.e.

$$W_n \overset{d}{\to} Z.$$

We have proven Khinchine's version of the weak law of large numbers.

The proof requires the rvs X_1, X_2, ... to be positive.

(c) **(4 points).** La prime pour un contrat du portefeuille est

$$\Pi_{\kappa,n}(X) = VaR_\kappa(W_n).$$

Pour $\kappa = 0.99$ et $n = 100$, évaluer approximativement $VaR_\kappa(W_n)$ en utilisant une seule des 2 méthodes proposées. Justifier brièvement votre choix.

On ne peut pas prendre la méthode #1, car elle est applicable si l'espérance et la variance de X existent, ce qui n'est pas le cas.

On applique la méthode #2 car elle est appropriée quand le montant de sinistre est de loi Pareto.

On propose d'approximer S_n par la v.a. V_n ($W_n = \frac{S_n}{n}$, par $\frac{V_n}{n}$) et qui représente le montant maximal de sinistre pour l'ensemble du portefeuille.

On a

$$S_n \sim BNComp(nr, q; F_C)$$

On a

$$N_n \sim BN(nr, q)$$

On

$$F_{S_n}(x) \simeq F_{V_n}(x)$$

où

$$\begin{aligned}F_{V_n}(x) &= ... \\ &= P_{N_n}(F_B(x)) \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)F_B(x)}\right)^{nr}\end{aligned}$$

On observe

$$\kappa = \left(\frac{q}{1-(1-q)F_B\left(x\right)} \right)^{nr}$$

qui devient

$$\frac{q}{\kappa^{\frac{1}{nr}}} = 1-\left(1-q\right)F_C\left(x\right)$$

On obtient

$$\begin{aligned} F_{V_n}^{-1}\left(\kappa\right) &= F_B^{-1}\left(\frac{1-\frac{q}{\kappa^{\frac{1}{nr}}}}{1-q} \right) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1-\frac{q}{\kappa^{\frac{1}{nr}}}}{1-q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Comme $r = 1.5, q = \frac{1}{3}$, $C \sim Pareto\left(\alpha = 1.5, \lambda = 5\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} VaR_\kappa\left(S_n\right) &\simeq VaR_\kappa\left(V_n\right) \\ &= F_V^{-1}\left(\kappa\right) \\ &= 5 \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1-\frac{\frac{1}{3}}{0.99^{\frac{1}{250}}}}{1-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{1.5}}} - 1 \right) \\ &= 6758.276417 \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} VaR_\kappa\left(W_n\right) &= \frac{1}{n} VaR_\kappa\left(S_n\right) \\ &\simeq \frac{1}{n} VaR_\kappa\left(V_n\right) \\ &= \frac{1}{100} 6758.276417 \\ &= 67.58276417 \end{aligned}$$

7. **(16 points).** Soit la v.a. $X \sim Makeham\,(\alpha, \beta, \gamma)$ avec

$$\mu(x) = \alpha + \beta e^{\gamma x}, \; x \geq 0.$$

Questions:

(a) **(2 points).** Montrer que

$$T_x \sim Makeham\,(\alpha, \beta_x, \gamma)$$

où

$$\beta_x = \beta e^{\gamma x}$$

(b) **(2 points).** Montrer que

$$T_x = \min(W, Y_x)$$

où W et Y_x sont des v.a. indépendantes avec

$$W \sim Exp\,(\alpha) \text{ (cause accidentelle)}$$

et

$$Y_x \sim Gompertz\,(\beta_x, \gamma) \text{ (cause "biologique").}$$

(c) **(12 points).** On considère un contrat de rente vie-entière émis à un individu de 55 ans. La rente annuelle est $g = 10000$, payable en début d'année. La force d'intérêt est de 3%. La v.a. Z représente la valeur présente des coûts pour le contrat. Hypothèses : $\alpha = 0.001$, $\beta = 0.00006$ et $\gamma = 0.08$.
Soit la v.a. $U \sim Unif\,(0, 1)$. Dans le tableau ci-dessous, on fournit 5 réalisations $W^{(j)}$ de W et 5 réalisations $U^{(j)}$ de U :

i	$W^{(j)}$	$U^{(j)}$	$Y_x^{(j)}$	$T_x^{(j)}$	$Z^{(j)}$
1	16.90	0.75			
2	864.22	0.59			
3	6.71	0.92			
4	1077.70	0.44			
5	199.64	0.87			

Sous-questions :

i. Calculer les réalisations $Y_x^{(j)}$ de Y_x (avec les réalisations $U^{(j)}$ de U).

ii. Calculer les réalisations $T_x^{(j)}$ de T_x.

iii. Calculer les réalisations $Z^{(j)}$ de Z.

iv. Utiliser les réalisations de $Z^{(j)}$ de Z pour calculer une approximation ...

- ... de $E[Z]$;
- ... de $VaR_{0.6}(Z)$;
- ... de $E\left[Z \times 1_{\{Z > VaR_{0.6}(Z)\}}\right]$; et
- ... de $TVaR_{0.6}(Z)$.

Solution OK:

(a) **(2 points).** Montrer que

$$T_x \sim Makeham\,(\alpha, \beta_x, \gamma)$$

où

$$\beta_x = \beta e^{\gamma x}$$

Pour la v.a. T_x, on obtient

$$\overline{F}_{T_x}(t) = \frac{\exp\left(-\alpha\,(x+t) - \frac{\beta}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{\gamma(x+t)} - 1\right)\right)}{\exp\left(-\alpha x - \frac{\beta}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{\gamma x} - 1\right)\right)} = \exp\left(-\alpha t - \frac{\beta}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma x}\left(\mathrm{e}^{\gamma t} - 1\right)\right)$$

Alors, si $X \sim Makeham\,(\alpha, \beta, \gamma)$, cela implique $T_x \sim Makeham\,(\alpha, \beta\mathrm{e}^{\gamma x}, \gamma)\,.$

(b) **(2 points).** Montrer que

$$T_x = \min\,(W, Y_x)$$

où W et Y_x sont des v.a. indépendantes avec

$$W \sim Exp\,(\alpha)$$

et

$$Y_x \sim Gompertz\,(\beta_x, \gamma)$$

On peut représenter T_x en fonction de deux v.a. indépendantes $W_x \sim Gompertz\,(\beta\mathrm{e}^{\gamma x}, \gamma)$ et $Z \sim Exp\,(\alpha)$ avec

$$T_x = \min\,(W, Y_x)\,.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\min\left(W, Y_x\right) > t\right) &= \Pr\left(W > t, Y_x > t\right) \\
&= \Pr\left(W > t\right)\Pr\left(Y_x > t\right) \\
&= \exp\left(-\alpha t\right)\exp\left(-\frac{\beta}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma x}\left(\mathrm{e}^{\gamma t} - 1\right)\right) \\
&= \exp\left(-\alpha t - \frac{\beta}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma x}\left(\mathrm{e}^{\gamma t} - 1\right)\right),
\end{aligned}$$

où le dernier terme correspond à la fonction de survie de la loi de Gompertz-Makeham. Cette représentation permet de simuler des réalisations de T_x.

(c) **(12 points).**On considère un contrat de rente continue vie-entière émis à un assuré de 50 ans. En supposant un taux de rente $g = 20000$ et une force d'intérêt de 4%, la v.a. Z représente la valeur présente des coûts pour le contrat. Hypothèses : $\alpha = 0.001$, $\beta = 0.00005$ et $\gamma = 0.06$.

Soit la v.a. $U \sim Unif\,(0, 1)$. Dans le tableau ci-dessous, on fournit 5 réalisations $W^{(j)}$

de W et 5 réalisations $U^{(j)}$ de U :

i	$W^{(j)}$	$U^{(j)}$	$Y_x^{(j)}$	$T_x^{(j)}$	$Z^{(j)}$
1	16.90	0.75			
2	864.22	0.59			
3	6.71	0.92			
4	1077.70	0.44			
5	199.64	0.87			

Sous-questions :

i. **(2.5 points).** Calculer les réalisations $Y_x^{(j)}$ de Y_x (avec les réalisations $U^{(j)}$ de U).
73.81188 66.56560 83.72019 59.55826 80.18842

ii. **(1.5 points).**Calculer les réalisations $T_x^{(j)}$ de T_x.
16.90000 66.56560 6.71000 59.55826 80.18842

iii. **(2.5 points).**Calculer les réalisations $Z^{(j)}$ de Z.
245676.2 465117.5 117699.1 453832.4 479771.9

iv. Utiliser les réalisations de $Z^{(j)}$ de Z pour calculer une approximation ...

- **(1.5 points)....** de $E[Z]$; On obtient

$$E[Z] \simeq 352419.4$$

- **(1 points)....** de $VaR_{0.6}(Z)$; On obtient

$$VaR_{0.6}(Z) \simeq 453832.4$$

- **(1.5 points)....** de $E\left[Z \times 1_{\{Z > VaR_{0.6}(Z)\}}\right]$; On obtient

$$\begin{aligned} E\left[Z \times 1_{\{Z > VaR_{0.6}(Z)\}}\right] &\simeq \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} Z^{(j)} \times 1_{\left\{Z^{(j)} > \widetilde{VaR}_{0.6}(Z)\right\}} \\ &= 188977.9 \end{aligned}$$

- **(1.5 points)....** de $TVaR_{0.6}(Z)$. On obtient

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(Z) &= \frac{1}{1-0.6} E\left[Z \times 1_{\{Z > VaR_{0.6}(Z)\}}\right] \\ &\simeq \frac{1}{1-0.6} \times \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} Z^{(j)} \times 1_{\left\{Z^{(j)} > \widetilde{VaR}_{0.6}(Z)\right\}} \\ &= 472444.7 \end{aligned}$$

8. **(8 points). Deux questions distinctes.**

   (a) **(4 points).** On rappelle l'énoncé du **Théorème de la fonction quantile** dans le cas particulier d'une v.a. continue.

   Théorème 1 *Soit une v.a. continue X avec fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1}. Soit une v.a. $U \sim U(0,1)$. Alors, la fonction de répartition de $F_X^{-1}(U)$ est F_X.*

   Questions :

   i. **(3 points).** Faire la démonstration du théorème.

   ii. **(1 point).** Indiquer une application concrète de ce théorème dans le cours et en actuariat.

   (b) **(4 points).** On rappelle l'énoncé du **Théorème d'Euler.**

   Théorème 2 *Soit $\varphi(x_1, ..., x_n)$ une fonction définie sur R^n avec valeur dans R, que l'on suppose différentiable en tout point. Si la fonction φ est (positivement) homogène de degré m, alors on a*

$$m\varphi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)$$

   pour tout $(x_1, ..., x_n) \in R^n$.

   Question : Démontrer le théorème.

Solution – (8 points). Deux questions distinctes. OK

(a) **(4 points).** On rappelle l'énoncé du **Théorème de la fonction quantile** dans le cas particulier d'une v.a. continue.

Théorème 3 *Soit une v.a. continue X avec fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1}. Soit une v.a. $U \sim U(0,1)$. Alors, la fonction de répartition de $F_X^{-1}(U)$ est F_X.*

Questions :

i. **(3 points).** Faire la démonstration du théorème. Comme la v.a. X est continue, on a

$$\Pr\left(F_X^{-1}(U) \leq x\right) = \Pr\left(U \leq F_X(x)\right),$$

car les évènements $\left\{F_X^{-1}(U) \leq x\right\}$ et $\{U \leq F_X(x)\}$ coïncident. De la fonction de répartition de $U \sim U(0,1)$, on déduit

$$\Pr\left(F_X^{-1}(U) \leq x\right) = \Pr\left(U \leq F_X(x)\right) = F_X(x).$$

ii. **(1 point).** Indiquer une application concrète de ce théorème dans le cours et en actuariat.
Réponse : La simulation M-C

(b) **(4 points).** On rappelle l'énoncé du **Théorème d'Euler.**
Si $\varphi(x_1, ..., x_n)$ est homogène d'ordre m, on sait que

$$\varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^m \varphi(x_1, ..., \lambda_n) \tag{2}$$

pour tout $\lambda > 0$. On dérive de part d'autre par rapport à λ et on pose $\lambda = 1$. Du côté gauche de l'égalité en (2), on a

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} &= \left.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)}{\partial(\lambda x_i)} \times \frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1} \\
&= \left.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)}{\partial(\lambda x_i)} \times x_i\right|_{\lambda=1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} \times x_i.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour le côté droit de l'égalité en (2), on a

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d(\lambda^m \varphi(x_1, ..., x_n))}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} &= \left. m\lambda^{m-1}\varphi(x_1, ..., x_n)\right|_{\lambda=1} \\
&= m\varphi(x_1, ..., x_n).
\end{aligned}$$

9. **(16 points).** Soit le couple de v.a. discrètes (M_1, M_2). Les hypothèses A, B, C suivantes sont considérées pour les valeurs de $\Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2)$:

Hypothèse A			
$m_1 \| m_2$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0

Hypothèse B			
$m_1 \| m_2$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	0
1	0	$\frac{1}{2}$	0
2	0	0	$\frac{1}{4}$

Hypothèse C			
$m_1 \| m_2$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{4}$	0	0

On définit $N = M_1 + M_2$.

Questions :

(a) **(2 points).** Pour chaque hypothèse, les valeurs de $\Pr(M_i = k)$, pour $k = 0, 1, 2$ et $i = 1, 2$. Commenter brièvement.

(b) **(3 points).** Pour chaque hypothèse, on doit calculer $Cov(M_1, M_2)$.

(c) **(3 points).** Pour chaque hypothèse, on doit indiquer si elle correspond à l'une des situations suivantes (note 1 : il s'agit ci-dessous du coefficient de corrélation de Pearson) (note 2 : il y a une situation par hypothèse) :

- les v.a. M_1 et M_2 sont négativement corrélées ;
- les v.a. M_1 et M_2 sont positivement corrélées ;
- les v.a. M_1 et M_2 sont indépendantes (si oui, il faut le démontrer) ;
- les v.a. M_1 et M_2 sont non-corrélées (i.e. corrélation nulle, il faut trouver un contre-exemple pour indiquer qu'elles ne sont pas indépendantes).

(d) **(5 points).** Pour chaque hypothèse, on doit calculer $TVaR_{0.8}(M_1)$, $TVaR_{0.8}(M_2)$, $TVaR_{0.8}(N)$.

(e) **(3 points).** Pour chaque hypothèse, on doit calculer le bénéfice de mutualisation

$$B_{0.8} = TVaR_{0.8}(M_1) + TVaR_{0.8}(M_2) - TVaR_{0.8}(N).$$

Indiquer pour quelle hypothèse le bénéfice est le plus grand et indiquer pour quelle hypothèse le bénéfice est le plus petit.

Solution (16 points) OK :

(a) **(2 points).** Pour chaque hypothèse, on doit calculer les valeurs de $\Pr(M_i = k)$, pour $k = 0, 1, 2$ et $i = 1, 2$. Commenter brièvement.

Clairement, pour lses 4 hypothèses, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(M_1 = 0) &= \Pr(M_2 = 0) = \frac{1}{4} \\
\Pr(M_1 = 1) &= \Pr(M_2 = 1) = \frac{1}{2} \\
\Pr(M_1 = 2) &= \Pr(M_2 = 2) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(b) **(3 points).** Pour chaque hypothèse, on doit calculer $Cov\,(M_1, M_2)$.
On a
$$Cov\,(M_1, M_2) = E\,[M_1 M_2] - E\,[M_1]\,E\,[M_2]$$
(1 point). Hypothèse A : $E\,[M_1 M_2] = 1$ et $Cov\,(M_1, M_2) = 1 - 1 \times 1 = 0$
(1 point). Hypothèse B : $E\,[M_1 M_2] = 1\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4} = 1.\,5$ et $Cov\,(M_1, M_2) = 1.5-1\times 1 = 0.5$
(1 point). Hypothèse C : $E\,[M_1 M_2] = 1\times\frac{1}{2} = 0.\,5$ et $Cov\,(M_1, M_2) = 0.5-1\times 1 = -0.5$

(c) **(3 points).** Pour chaque hypothèse, on doit indiquer si elle correspond à l'une des situations suivantes (note 1 : il s'agit ci-dessous du coefficient de corrélation de Pearson) (note 2 : il y a une situation par hypothèse) :

- les v.a. M_1 et M_2 sont négativement corrélées ;
- les v.a. M_1 et M_2 sont positivement corrélées ;
- les v.a. M_1 et M_2 sont indépendantes (si oui, il faut le démontrer) ;
- les v.a. M_1 et M_2 sont non-corrélées (i.e. corrélation nulle, il faut trouver un contre-exemple pour indiquer qu'elles ne sont pas indépendantes).

(1 point). Hypothèse A : non-corrélées. Clairement les v.a. M_1 et M_2 ne sont pas indépendantes, car (par exemple)
$$\Pr\,(M_1 = 0, M_2 = 0) = 0 \neq \Pr\,(M_1 = 0)\Pr\,(M_2 = 0) = \frac{1}{8}$$
Il y a plusieurs autres contre-exemples.
(1 point). Hypothèse B : positivement corrélées
(1 point). Hypothèse C : négativement corrélées

(d) **(5 points).** Pour chaque hypothèse, on doit calculer $TVaR_{0.8}\,(M_1)$, $TVaR_{0.8}\,(M_2)$, $TVaR_{0.8}\,(N)$.
(1 point). Pour toutes les hypothèses :

- $F_{M_i}\,(0) = 0.25$, $F_{M_i}\,(1) = 0.75$, $F_{M_i}\,(2) = 1$
- $VaR_{0.8}\,(M_1) = VaR_{0.8}\,(M_1) = 2$
- $TVaR_{0.8}\,(M_1) = TVaR_{0.8}\,(M_2) = 2$

(1.5 points). Hypothèse A :

- $f_N\,(0) = 0$, $f_N\,(1) = 0.5$, $f_N\,(2) = 0$, $f_N\,(3) = 0.5$, $f_N\,(4) = 0$,
- $F_N\,(0) = 0$, $F_N\,(1) = 0.5$, $F_N\,(2) = 0.5$, $F_N\,(3) = 1$, $F_N\,(4) = 1$
- $VaR_{0.8}\,(N) = VaR_{0.8}\,(N) = 3$
- $TVaR_{0.8}\,(M_1) = TVaR_{0.8}\,(M_2) = 3$

(1.5 points). Hypothèse B :

- $f_N\,(0) = 0.25$, $f_N\,(1) = 0$, $f_N\,(2) = 0.5$, $f_N\,(3) = 0$, $f_N\,(4) = 0.25$,
- $F_N\,(0) = 0.25$, $F_N\,(1) = 0.25$, $F_N\,(2) = 0.75$, $F_N\,(3) = 0.75$, $F_N\,(4) = 1$
- $VaR_{0.8}\,(N) = VaR_{0.8}\,(N) = 4$
- $TVaR_{0.8}\,(M_1) = TVaR_{0.8}\,(M_2) = 4$

(1 point). Hypothèse C :

- $f_N(0) = 0,\ f_N(1) = 0,\ f_N(2) = 1,\ f_N(3) = 0,\ f_N(4) = 0,$
- $F_N(0) = 0,\ F_N(1) = 0,\ F_N(2) = 1,\ F_N(3) = 1,\ F_N(4) = 1$
- $VaR_{0.8}(N) = VaR_{0.8}(N) = 2$
- $TVaR_{0.8}(M_1) = TVaR_{0.8}(M_2) = 2$

(e) **(3 points).** Pour chaque hypothèse, on doit calculer le bénéfice de mutualisation

$$B_{0.8} = TVaR_{0.8}(M_1) + TVaR_{0.8}(M_2) - TVaR_{0.8}(N).$$

Indiquer pour quelle hypothèse le bénéfice est le plus grand et indiquer pour quelle hypothèse le bénéfice est le plus petit.

(1 point). Bénéfice le plus grand = Hypothèse C : $B_{0.8} = 2 + 2 - 2 = 2$
(1 point). Bénéfice le plus petit = Hypothèse B : $B_{0.8} = 2 + 2 - 4 = 0$
(1 point). Hypothèse A : $B_{0.8} = 2 + 2 - 3 = 1$

10. **(10 points).** Soit la v.a. $\Theta \sim Bern\,(0.2)$.

Soient les v.a. strictement positives X_1, ..., X_n où, sachant $\Theta = \theta$,

$$(X_1|\Theta = \theta)\,, ..., (X_n|\Theta = \theta)$$

sont conditionnellement indépendantes, et

$$E\left[X_i|\Theta = \theta\right] = 1 + 5\theta,$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.

On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$ et $W_n = \frac{S_n}{n}$.

Questions :

(a) **(2 points).** Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta = 0\right]$ et $\lim\limits_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta = 1\right]$.

(b) **(1 points).** Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} E\left[W_n\right]$.

(c) **(2 points).** Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} Var\left(W_n\right)$.

(d) **(5 points).** En utilisant la transformée de Laplace-Stieljes (notation : $L_Y(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tY}\right]$ pour une v.a. positive Y), démontrer que W_n tend en distribution vers la v.a. Z où

$$\Pr\left(Z = z_0\right) = \Pr\left(\Theta = 0\right)$$

et

$$\Pr\left(Z = z_1\right) = \Pr\left(\Theta = 1\right)$$

avec $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta = 0\right]$ et $z_1 = \lim\limits_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta = 1\right]$.

i. Étape 1: Identifier $\lim\limits_{n\to\infty} L_{W_n|\Theta=0}(t)$.

ii. Étape 2: Identifier $\lim\limits_{n\to\infty} L_{W_n|\Theta=1}(t)$.

iii. Étape 3: Identifier $\lim\limits_{n\to\infty} L_{W_n}(t)$ et conclure.

Solution OK:

(a) **(2 points).** Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta = 0\right]$ et $\lim\limits_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta = 1\right]$.

On a

$$\begin{aligned} E\left[W_n|\Theta = 0\right] &= E\left[X_1|\Theta = 0\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} E\left[W_n|\Theta = 1\right] &= E\left[X_1|\Theta = 0\right] \\ &= 6 \end{aligned}$$

On conclut

$$\lim_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta = 0\right] = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta=1\right]=6$$

(b) **(1 points).** Calculer $\lim_{n\to\infty} E\left[W_n\right]$.

Pour tout n, on a

$$\begin{aligned} E\left[W_n\right] &= \Pr\left(\Theta=0\right)E\left[W_n|\Theta=0\right]+\Pr\left(\Theta=1\right)E\left[W_n|\Theta=1\right] \\ &= 0.8\times 1+0.2\times 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

On conclut

$$\lim_{n\to\infty} E\left[W_n\right]=2$$

(c) **(2 points).** Calculer $\lim_{n\to\infty} Var\left(W_n\right)$.

On a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} Var\left(W_n\right) &= Var\left(E\left[W_n|\Theta\right]\right) \\ &= 0.8\times(1-2)^2+0.2\times(6-2)^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

(d) **(5 points).** En utilisant la transformée de Laplace-Stieljes (notation : $L_Y(t)=E\left[\mathrm{e}^{-tY}\right]$ pour une v.a. positive Y), démontrer que W_n tend en distribution vers la v.a. Z où

$$\Pr\left(Z=z_0\right)=\Pr\left(\Theta=0\right)$$

et

$$\Pr\left(Z=z_1\right)=\Pr\left(\Theta=1\right)$$

avec $z_0=\lim_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta=0\right]$ et $z_1=\lim_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta=1\right]$.

i. **(1.5 points).** Étape 1: Identifier $\lim_{n\to\infty} L_{W_n|\Theta=0}(t)$.

On a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} L_{W_n|\Theta=0}(t) &= \lim_{n\to\infty}\left(1-E\left[W_n|\Theta=0\right]\frac{t}{n}\right)^n \\ &= e^{-E\left[W_n|\Theta=0\right]t} \\ &= e^{-1t} \end{aligned}$$

ii. **(1.5 points).** Étape 2: Identifier $\lim_{n\to\infty} L_{W_n|\Theta=1}(t)$.

On a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} L_{W_n|\Theta=1}(t) &= \lim_{n\to\infty}\left(1-E\left[W_n|\Theta=1\right]\frac{t}{n}\right)^n \\ &= e^{-E\left[W_n|\Theta=1\right]t} \\ &= e^{-6t} \end{aligned}$$

iii. **(2 points).** Étape 3: Identifier $\lim_{n\to\infty} L_{W_n}(t)$ et conclure.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} L_{W_n}(t) &= \Pr(\Theta=0)\lim_{n\to\infty} L_{W_n|\Theta=0}(t) + \Pr(\Theta=0)\lim_{n\to\infty} L_{W_n|\Theta=1}(t) \\
&= 0.8\times e^{-1t} + 0.2\times e^{-6t} \\
&= L_Z(t)
\end{aligned}$$

où la v.a. Z prend 2 valeurs, soit 1 et 6, avec

$$\Pr(Z=1) = 0.8 \text{ et } \Pr(Z=6) = 0.1.$$

Then, we conclude that W_n converges in distribution to the rv Z i.e.

$$W_n \xrightarrow{d} Z.$$

11. **(9 points).** Les coûts pour un contrat d'assurance santé sont définis par la v.a. X.
Soit la v.a. d'hétérogénéité $\Theta \sim LNorm\left(\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma = 1\right)$.
Sachant $\Theta = \theta$, on a

$$(X|\Theta = \theta) \sim PoisComp\,(\lambda\theta, F_B)$$

avec $\lambda = 10$ et $B \sim Gamma\left(\alpha = 1.5, \beta = \frac{1}{100}\right)$.
La prime pour le contrat avec la mesure décomposée comme suit :

$$\rho_\kappa(X) = E[X] + C_\kappa(X) + D_\kappa(X)$$

où

$$\begin{aligned} C_\kappa(X) &= \frac{E_\Theta[Var(X|\Theta)]}{Var(X)}\frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(X)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ D_\kappa(X) &= \frac{Var_\Theta(E[X|\Theta])}{Var(X)}\frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(X)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}. \end{aligned}$$

La composante $D_\kappa(X)$ correspond à la portion expliquée par l'hétérogénéité.

Questions :

(a) **(2 points).** Calculer $E[X]$

(b) **(5 points).** Calculer $C_{0.99}(X)$ et $D_{0.99}(X)$.

(c) **(2 points).** Calculer $\rho_{0.99}(X)$ et commenter brièvement par rapport à l'hétérogénéité.

Solution OK:

(a) **(2 points).** Calculer $E[X]$.

On a

$$E[X|\Theta] = \lambda\Theta\frac{\alpha}{\beta}$$

On a

$$\begin{aligned} E[X] &= E_\Theta[E[X|\Theta]] \\ &= E\left[\lambda\Theta\frac{\alpha}{\beta}\right] \\ &= \lambda\frac{\alpha}{\beta}E[\Theta] \\ &= \lambda\frac{\alpha}{\beta} \\ &= 10 \times 150 = 1500 \end{aligned}$$

(b) **(5 points).** Calculer $C_{0.99}(X)$ et $D_{0.99}(X)$.

On a

$$\begin{aligned} E_{\Theta}\left[Var\left(X|\Theta\right)\right] &= E_{\Theta}\left[\lambda\Theta\frac{\alpha\left(\alpha+1\right)}{\beta^{2}}\right] \\ &= \lambda\frac{\alpha\left(\alpha+1\right)}{\beta^{2}}E_{\Theta}\left[\Theta\right] \\ &= 10\times\frac{1.5\times2.5}{\left(\frac{1}{100}\right)^{2}} = 375000 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} Var_{\Theta}\left(E\left[X|\Theta\right]\right) &= Var\left(\lambda\Theta\frac{\alpha}{\beta}\right) \\ &= \left(\lambda\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2}Var\left(\Theta\right) \\ &= \left(1500^{2}\right)\left(e^{-1+2}-1^{2}\right) \\ &= 3866134.114 \end{aligned}$$

On conclut

$$Var\left(X\right) = 375000 + 3866134.114 =: 4241134.114$$

On obtient

$$\begin{aligned} C_{0.99}\left(X\right) &= \frac{375000}{4241134.114}\frac{1}{1-0.99}\sqrt{4241134.114}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(2.326348)^{2}}{2}} \\ &= 485.31337369 \\ D_{\kappa}\left(X\right) &= \frac{3866134.114}{4241134.114}\frac{1}{1-0.99}\sqrt{4241134.114}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(2.326348)^{2}}{2}} \\ &= 5003.430\,90668 \end{aligned}$$

(c) **(2 points).** Calculer $\rho_{0.99}\left(X\right)$ et commenter brièvement par rapport à l'hétérogénéité.

$$\begin{aligned} \rho_{\kappa}\left(X\right) &= E\left[X\right] + C_{\kappa}\left(X\right) + D_{\kappa}\left(X\right) \\ &= 1500 + 485.3134 + 5003.4309 \end{aligned}$$

L'hétérogénéit a un impact important sur la prime.

FIN

Annexes

- Values of the quantile function Φ^{-1} of the standard normal distribution.

u	0.5	0.9	0.95	0.99	0.999	0.9999
$\Phi^{-1}(u)$	0	1.281552	1.644854	2.326348	3.090232	3.719016

- See the next page for values of actuarial functions.

Valeurs de $\overline{A}_x$ et $\overline{a}_x$ ($\delta = 0.02$, 0.03, 0.04 et $\mu_x = 0.00004 \times 1.1^x$)

- Dans l'ordre: x; $\overline{A}_x$ $_{@\delta=0.02}$ $\overline{A}_x$ $_{@\delta=0.03}$ $\overline{A}_x$ $_{@\delta=0.04}$ $\overline{a}_x$ $_{@\delta=0.02}$ $\overline{a}_x$ $_{@\delta=0.03}$ $\overline{a}_x$ $_{@\delta=0.04}$
- 30 0.4127000 0.2726145 0.1838682 29.36500 24.246184 20.403294
- 31 0.4206056 0.2803791 0.1907650 28.96972 23.987363 20.230874
- 32 0.4286344 0.2883329 0.1978884 28.56828 23.722238 20.052791
- 33 0.4367857 0.2964776 0.2052427 28.16071 23.450747 19.868931
- 34 0.4450591 0.3048149 0.2128325 27.74705 23.172838 19.679187
- 35 0.4534536 0.3133460 0.2206619 27.32732 22.888465 19.483453
- 36 0.4619681 0.3220722 0.2287346 26.90160 22.597593 19.281634
- 37 0.4706012 0.3309940 0.2370544 26.46994 22.300198 19.073639
- 38 0.4793514 0.3401120 0.2456246 26.03243 21.996266 18.859386
- 39 0.4882166 0.3494261 0.2544480 25.58917 21.685797 18.638801
- 40 0.4971947 0.3589360 0.2635271 25.14027 21.368801 18.411822
- 41 0.5062830 0.3686408 0.2728642 24.68585 21.045307 18.178396
- 42 0.5154786 0.3785393 0.2824607 24.22607 20.715356 17.938483
- 43 0.5247782 0.3886298 0.2923177 23.76109 20.379007 17.692058
- 44 0.5341782 0.3989099 0.3024357 23.29109 20.036335 17.439108
- 45 0.5436746 0.4093769 0.3128145 22.81627 19.687437 17.179638
- 46 0.5532627 0.4200272 0.3234533 22.33686 19.332425 16.913668
- 47 0.5629378 0.4308569 0.3343505 21.85311 18.971436 16.641238
- 48 0.5726946 0.4418612 0.3455037 21.36527 18.604626 16.362407
- 49 0.5825271 0.4530348 0.3569098 20.87364 18.232175 16.077256
- 50 0.5924293 0.4643714 0.3685646 20.37853 17.854286 15.785886
- 51 0.6023944 0.4758644 0.3804631 19.88028 17.471187 15.488422
- 52 0.6124152 0.4875061 0.3925994 19.37924 17.083130 15.185015
- 53 0.6224841 0.4992882 0.4049664 18.87580 16.690395 14.875840
- 54 0.6325929 0.5112014 0.4175561 18.37035 16.293286 14.561099
- 55 0.6427331 0.5232359 0.4303592 17.86335 15.892136 14.241020

- 56 0.6528956 0.5353809 0.4433655 17.35522 15.487302 13.915862
- 57 0.6630708 0.5476248 0.4565636 16.84646 15.079172 13.585911
- 58 0.6732489 0.5599553 0.4699408 16.33756 14.668158 13.251480
- 59 0.6834194 0.5723591 0.4834834 15.82903 14.254697 12.912914
- 60 0.6935716 0.5848223 0.4971765 15.32142 13.839256 12.570587
- Interpolation : pour $x \in \{30, 31, ..., 60\}$ et $s \in [0, 1]$,

$$\overline{A}_{x+s} = (1-s) \times \overline{A}_x + s \times \overline{A}_{x+1} \quad \text{et} \quad \overline{a}_{x+s} = (1-s) \times \overline{a}_x + s \times \overline{a}_{x+1}$$

- Relations : $\overline{A}_x = \overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{t}|} + v^t \; {}_tp_x \overline{A}_{x+t}$ et $\overline{a}_x = \overline{a}_{x:\overline{t}|} + v^t \; {}_tp_x \overline{a}_{x+t}$