Université Laval	Examen partiel traditionnel
Faculté des Sciences et de Génie	Hiver 2018
École d'actuariat	Date: 24 février 2018

Act-2001 Introduction à l'actuariat 2

Professeur: Etienne Marceau

Nom de famille de l'étudiant	**Prénom de l'étudiant**	**Matricule**

– L'examen contient 10 questions à développement.

– Le total des points est de **120 points**.

– La durée est de 170 minutes.

– Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.

– Veuillez écrire vos réponses dans le cahier de réponse seulement.

– Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.

– Veuillez retourner le présent cahier, les annexes et le papier brouillon à la fin de l'examen.

Questions	**Points obtenus**	**Points**
1		15
2		10
3		11
4		18
5		14
6		10
7		14
8		8
9		8
10		12
Total		120

1 Symboles et abréviations

1.1 Symboles

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ = ensemble des entiers naturels (incluant $\{0\}$)
2. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2...\}$
3. $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
4. $\mathbb{R}^+$ = ensemble des nombres réels positifs (incluant $\{0\}$)
5. $i = \sqrt{-1}$ = unité imaginaire
6. $\mathbb{C} = \{x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ = ensemble des nombres complexes
7. $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$
8. $\rho_P (X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$
9. $\Phi (x)$ = fonction de répartition de la loi normale standard
10. $\Phi^{-1} (u)$ = fonction quantile de la loi normale standard

1.2 Abréviations

1. fmp = fonction de masses de probabilité
2. fgp = fonction génératrice des probabilités
3. fgm = fonction génératrice des moments
4. i.i.d. = indépendant(e)s et identiquement distribué(e)s
5. v.a. = variable(s) aléatoire(s)
6. TLS = transformée de Laplace-Stieltjes

2 Questions

1. **(15 points).** Soit les v.a. indépendantes

$$X_1 \sim LNorm\,(\mu = 4.2, \sigma = 0.9) \quad \text{et} \quad X_2 \sim Gamma\left(\alpha = 2.5, \beta = \tfrac{1}{40}\right).$$

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.
On fournit ci-dessous des réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ du couple de v.a. i.i.d. (U_1, U_2) ($U_1 \sim U_2 \sim U\,(0,1)$), des réalisations suivantes de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ du couple (X_1, X_2) et des réalisations $S^{(j)}$ de la v.a. S :

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	0.24	0.55			
2	0.99	0.25			
3	0.11	0.15	22.11	39.88	61.99
4	0.88	0.75	192.00	132.51	324.51
5	0.06	0.95	16.46	221.41	237.87

Note : conserver 2 décimales pour les calculs.
Questions :

(a) **(6 points).** Calculer les réalisations $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$, $\left(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}\right)$, $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$.

(b) **(3 points).** Utiliser les résultats à l'item [1a] pour calculer des approximations de $TVaR_{0.6}\,(X_1)$, $TVaR_{0.6}\,(X_2)$, et $TVaR_{0.6}\,(S)$.

(c) **(3 points).** Utiliser les résultats à l'item [1a] pour calculer

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sup_{j_1, j_2 \in \{1,2,\ldots,5\}, j_1 \neq j_2} \left\{X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)}\right\}\right)$$
$$\varphi_2 = \tfrac{1}{2}\left(\sup_{j_1, j_2 \in \{1,2,\ldots,5\}, j_1 \neq j_2} \left\{X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)}\right\}\right)$$
$$\varphi_3 = \tfrac{1}{2}\left(\sup_{j_1, j_2 \in \{1,2,\ldots,5\}, j_1 \neq j_2} \left\{S^{(j_1)} + S^{(j_2)}\right\}\right).$$

(d) **(1 point).** Comparer les valeurs obtenues aux items [1b] et [1c].

(e) **(2 points).** Utiliser les valeurs aux items [1b] et [1c] pour illustrer la propriété de la sous-additivité de la TVaR.

Solution :

(a) **(4 points).** Calculer les réalisations $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$, $\left(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}\right)$, $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$.
2 réalisations de X_1 : 35.32 541.16
2 réalisations de X_2 : 94.56 53.49
2 réalisations de S : 129.88 594.65

(b) **(3 points).** Utiliser les résultats en (a) pour calculer des approximations de $TVaR_{0.6}\,(X_1)$, $TVaR_{0.6}\,(X_2)$, et $TVaR_{0.6}\,(S)$.

On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(X_1) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(X_1^{[4]} + X_1^{[5]}\right) \\ &= 366.58 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(X_2) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(X_2) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(X_2^{[4]} + X_2^{[5]}\right) \\ &= 176.96 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(S) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(S) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(S^{[4]} + S^{[5]}\right) \\ &= 459.58 \end{aligned}$$

(c) **(3 points).** Utiliser les résultats en (a) pour calculer

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tfrac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)}\right\}\right) \\ \varphi_2 &= \tfrac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)}\right\}\right) \\ \varphi_3 &= \tfrac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{S^{(j_1)} + S^{(j_2)}\right\}\right). \end{aligned}$$

On a

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\max\left\{\begin{array}{c} X_1^{(1)} + X_1^{(2)}, X_1^{(1)} + X_1^{(3)}, X_1^{(1)} + X_1^{(4)}, X_1^{(1)} + X_1^{(4)}, X_1^{(2)} + X_1^{(3)}, X_1^{(2)} + X_1^{(4)}, X_1^{(2)} + X_1^{(5)}, \\ X_1^{(3)} + X_1^{(4)}, X_1^{(3)} + X_1^{(5)}, X_1^{(4)} + X_1^{(5)} \end{array}\right.\right.$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\max\left\{\begin{array}{c} X_2^{(1)} + X_2^{(2)}, X_2^{(1)} + X_2^{(3)}, X_2^{(1)} + X_2^{(4)}, X_2^{(1)} + X_2^{(4)}, X_2^{(2)} + X_2^{(3)}, X_2^{(2)} + X_2^{(4)}, X_2^{(2)} + X_2^{(5)}, \\ X_2^{(3)} + X_2^{(4)}, X_2^{(3)} + X_2^{(5)}, X_2^{(4)} + X_2^{(5)} \end{array}\right.\right.$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\left(\max\left\{\begin{array}{c} S^{(1)} + S^{(2)}, S^{(1)} + S^{(3)}, S^{(1)} + S^{(4)}, S^{(1)} + S^{(4)}, S^{(2)} + S^{(3)}, S^{(2)} + S^{(4)}, S^{(2)} + S^{(5)}, \\ S^{(3)} + S^{(4)}, S^{(3)} + S^{(5)}, S^{(4)} + S^{(5)} \end{array}\right\}\right)$$

On a

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	0.24	0.55	35.32	94.56	129.88
2	0.99	0.25	541.16	53.49	594.65
3	0.11	0.15	22.11	39.88	61.99
4	0.88	0.75	192.00	132.51	324.51
5	0.06	0.95	16.46	221.41	237.87

On obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)}+X_1^{(4)}\right)=366.58\\
\varphi_2 &= \frac{1}{2}\left(X_2^{(4)}+X_2^{(5)}\right)=176.96\\
\varphi_3 &= \frac{1}{2}\left(S^{(2)}+S^{(4)}\right)=\frac{1}{2}\left(X_1^{(2)}+X_2^{(2)}+X_1^{(4)}+X_2^{(4)}\right)=459.58
\end{aligned}$$

(d) **(1 point).** Comparer les valeurs obtenues en (b) et en (c).
On observe

$$\begin{aligned}
\widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1) &= \varphi_1\\
\widetilde{TVaR_{0.6}}(X_2) &= \varphi_2\\
\widetilde{TVaR_{0.6}}(S) &= \varphi_3
\end{aligned}$$

(e) **(1 point).** Utiliser les valeurs en (b) et (c) pour illustrer la propriété de la sous-additivité de la TVaR.
On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{TVaR_{0.6}}(S) &= \varphi_3=\frac{1}{2}\left(S^{(2)}+S^{(4)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)}+X_2^{(2)}+X_1^{(4)}+X_2^{(4)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)}+X_1^{(4)}\right)+\frac{1}{2}\left(X_2^{(2)}+X_2^{(4)}\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)}+X_1^{(4)}\right)+\frac{1}{2}\left(X_2^{(5)}+X_2^{(4)}\right)\text{ (on remplace } X_2^{(2)} \text{ par } X_2^{(5)} \text{ qui est plus élevée)}\\
&= \varphi_1+\varphi_2=\widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1)+\widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1)
\end{aligned}$$

2. **(10 points).** Soit une v.a. discrète X dont la fgp est définie par

$$\mathcal{P}_X(t) = 0.38 + 0.12t^{10} + 0.27t^{80} + 0.13t^{200} + 0.1t^{1000}.$$

Questions :

(a) **(2 points).** Identifier toutes les valeurs non-nulles de $\Pr(X = x)$ (en précisant les valeurs de x).

(b) **(2 points).** Calculer $F_X^{-1}(u)$, pour $u = 0.6$. Interpréter.

(c) **(2 points).** Calculer $E\left[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(u)\}}\right]$, pour $u = 0.6$. Interpréter.

(d) **(2 points).** Développer l'expression de $\int_{0.25}^{0.95} F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u$ et calculer sa valeur. Interpréter.

(e) **(2 points).** Calculer $E[\max(X - 100; 0)]$. Interpréter.

Solutions :

(a) **(2 points).** Identifier toutes les valeurs non-nulles de $\Pr(X = x)$ (en précisant les valeurs de x).

On déduit

x	$\Pr(X = x)$	$\Pr(X \leq x)$
0	0.38	0.38
10	0.12	0.5
80	0.27	0.77
200	0.13	0.9
1000	0.1	1

(b) **(2 points).** Calculer $F_X^{-1}(u)$, pour $u = 0.6$. Interpréter.

On obtient

$$F_X^{-1}(0.6) = 80$$

(c) **(2 points).** Calculer $E\left[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(u)\}}\right]$, pour $u = 0.6$. Interpréter.

On obtient

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(0.6)\}}\right] &= E\left[X \times 1_{\{X > 80\}}\right] \\ &= 200 \times 0.13 + 1000 \times 0.1 \\ &= ... \end{aligned}$$

(d) **(2 points).** Développer l'expression de $\int_{0.25}^{0.95} F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u$ et calculer sa valeur. Interpréter.

x	$\Pr(X = x)$	$\Pr(X \leq x)$
0	0.38	0.38
10	0.12	0.5
80	0.27	0.77
200	0.13	0.9
1000	0.1	1

On obtient

$$\begin{aligned} \int_{0.25}^{0.95} F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= (0.5 - 0.25) \times 10 + 0.27 \times 80 + 0.13 \times 200 + 0.05 \times 1000 \\ &= 100.1 \end{aligned}$$

(e) **(2 points).** Calculer $E\left[\max\left(X-100;0\right)\right]$. Interpréter.
On obtient

$$\begin{aligned} E\left[\max\left(X-100;0\right)\right] &= (200-100)\times 0.13 + (1000-100)\times 0.1 \\ &= 103.0 \end{aligned}$$

3. **(11 points).** Le tableau (source : Tableau 2 de Swiss Re (2010)) ci-dessous contient les coûts totaux de $m = 28$ inondations importantes survenues au Canada pendant les années 1909, 1910, ..., 2008 (100 ans) :

Table 2:
Large Flood Disasters in Canada and Estimated Total Costs (trended to 2008)

Year	Province	Location/Area	Total Costs in millions CAD (trended to 2008)
1954	ON	Southern ON (Hurricane Hazel)	5,392
1948	BC	Fraser River	5,172
1950	MB	Winnipeg	4,652
1996	QC	Saguenay	2,699
1997	MB	Southern Manitoba	1,230
1948	ON	Southern Ontario	706
1993	MB	Winnipeg	618
2005	ON	Southern Ontario	[1] 587
2005	AB	High river, southern AB	[1] 519
1937	ON	Southern Ontario	470
1923	NB	Saint John River Basin	463
1955	SK/MB	Manitoba and Saskatchewan	362
2004	AB	Edmonton	303
1995	AB	Southern Alberta	285
1934	NB	Plaster Rock	198
1936	NB	New Brunswick	188
1999	MB	Melita	163
1916	ON	Central Ontario	161
1909	NB	Chester	149
1961	NB	Saint John River Basin	148
1987	QC	Montréal	147
1996	QC	Montréal and Mauricie Region	145
1920	ON	Southwestern Ontario	132
1920	BC	Prince George	131
2004	ON	Peterborough	129
1972	QC	Richelieu River	124
1983	NF	Newfoundland	115
1974	QC	Maniwaki	103

Data sources: Public Safety Canada, 2007; Shrubsole *et al.*, 1993.
[1] Trended insured losses. Data source: IBC, 2008
Trending methods: Collins & Lowe, 2001

Les coûts sont en 1 millions \$ de 2008.
Hypothèses :
- les coûts totaux suite à une inondation importante au Canada sont modélisés par la v.a. $B \sim LNorm(\mu, \sigma)$;
- le nombre d'inondations pendant une année au Canada est modélisé par la v.a. $M \sim Pois(\lambda)$.

Les observations triées des coûts sont définies par $x^{[1]} < x^{[2]} < ... < x^{[28]}$, où $x^{[2]} = 115\ 000\ 000$ et $x^{[27]} = 5\ 172\ 000\ 000$.
Pour identifier les paramètres μ et σ, on fixe

$$x^{[j]} = F_B^{-1}\left(\frac{j}{m+1}\right), \ j = 1, 2, ..., m.$$

La valeur du paramètre λ est donnée par

$$\lambda = \frac{\text{nombre inondations}}{\text{nombre d'années de la période d'observation}}.$$

Questions :
(a) **(3 points).** Déterminer les valeurs des paramètres μ et σ à partir de $x^{[1]}$ et $x^{[28]}$. Note : $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{29}\right) = -1.8186$ et $\Phi^{-1}\left(\frac{28}{29}\right) = 1.8186$.
(b) **(1 point).** Déterminer la valeur du paramètre λ.
(c) **(7 points).** Les coûts pour une inondation pendant l'année 2018 sont définis par la v.a. B_{2018}, avec $B_{2018} \sim B$.

Le nombre d'inondations au Canada pendant l'année 2018 est défini par la v.a. M_{2018}, avec $M_{2018} \sim M$.

Les coûts totaux résultants de toutes les inondations survenues au Canada en 2018 sont définis par la v.a. $X_{2018} \sim PoisComp\left(\lambda, F_{B_{2018}}\right)$, i.e.,

$$X_{2018} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_{2018}} B_{2018,k} & , \quad M_{2018} > 0 \\ 0 & , \quad M_{2018} = 0 \end{cases},$$

où $\{B_{2018,k}, k \in \mathbb{N}^{+}\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. (avec $B_{2018,k} \sim B_{2018} \sim B$) qui est indépendante de la v.a. M_{2018}.

i. **(2 points).** Quelle est la probabilité qu'au moins 1 inondation survienne au Canada en 2018 ? Calculer qu'il survienne au Canada en 2018 autant d'inondations qu'en 2005 ?
ii. **(2 points).** Calculer $E\left[X_{2018}\right]$. Expliquer en mots cette quantité.
iii. **(3 points).** Calculer $F_{X_{2018}}(0)$ et $\overline{F}_{X_{2018}|M_{2018}=1}(x)$, où $x = 1\ 000\ 000\ 000$. Expliquer en mots les deux probabilités calculées.

Solutions :

(a) **(3 points).** Déterminer les valeurs des paramètres μ et σ à partir de $x^{[1]}$ et $x^{[28]}$. Note : $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{29}\right) = -1.8186$ et $\Phi^{-1}\left(\frac{28}{29}\right) = 1.8186$.

On a
$$x^{[j]} = F_B^{-1}\left(\frac{j}{m+1}\right) = \exp\left(\mu + \sigma\Phi^{-1}\left(\frac{j}{m+1}\right)\right)$$

On isole (μ, σ) dans
$$\begin{aligned} \ln\left(x^{[1]}\right) &= \mu + \sigma\Phi^{-1}\left(\frac{1}{29}\right) \\ \ln\left(x^{[28]}\right) &= \mu + \sigma\Phi^{-1}\left(\frac{28}{29}\right) \end{aligned}$$

On obtient
$$\mu = \frac{\ln\left(x^{[1]}\right) + \ln\left(x^{[28]}\right)}{2} = ...$$

et
$$\sigma = \frac{\ln\left(x^{[28]}\right) - \mu}{\Phi^{-1}\left(\frac{28}{29}\right)} = ...$$

(b) **(1 point).** Déterminer la valeur du paramètre λ.

$$\lambda = \frac{\text{nombre inondations}}{\text{nombre d'années de la période d'observation}} = 0.28$$

(c) **(7 points).** Les coûts pour une inondation pendant l'année 2018 sont définis par la v.a. B_{2018}, avec $B_{2018} \sim B$.

Le nombre d'inondations au Canada pendant l'année 2018 est défini par la v.a. M_{2018}, avec $M_{2018} \sim M$.

Les coûts totaux résultants de toutes les inondations survenues au Canada en 2018 sont définis par la v.a. $X_{2018} \sim PoisComp\left(\lambda, F_{B_{2018}}\right)$, i.e.,

$$X_{2018} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_{2018}} B_{2018,k} & , \quad M_{2018} > 0 \\ 0 & , \quad M_{2018} = 0 \end{cases},$$

où $\{B_{2018,k}, k \in \mathbb{N}^{+}\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. (avec $B_{2018,k} \sim B_{2018} \sim B$) qui est indépendante de la v.a. M_{2018}.

i. **(2 points).** Quelle est la probabilité qu'au moins 1 inondation survienne au Canada en 2018 ? Calculer qu'il survienne au Canada en 2018 autant d'inondations qu'en 2005 ?
On obtient
$$\Pr\left(M > 0\right) = e^{-\lambda} = e^{-0.28} =: 0.755\,783\,741\,456$$
On obtient
$$\Pr\left(M = 2\right) = \frac{e^{-0.28}0.28^{2}}{2} =: 2.\,962\,672\,266\,51 \times 10^{-2}$$

ii. **(2 points).** Calculer $E\left[X_{2018}\right]$. Expliquer en mots cette quantité.
On obtient
$$E\left[X_{2018}\right] = E\left[M\right]E\left[B\right] = ...$$

iii. **(3 points).** Calculer $F_{X_{2018}}\left(0\right)$ et $\overline{F}_{X_{2018}|M_{2018}=1}\left(x\right)$, où $x = 1\ 000\ 000\ 000$. Expliquer en mots les deux probabilités calculées.
On obtient
$$F_{X_{2018}}\left(0\right) = F_{M}\left(0\right) = ...$$
On obtient
$$\overline{F}_{X_{2018}|M_{2018}=1}\left(x\right) = \Pr\left(B > x\right) = ...$$

4. **(18 points).** Soit les couples de v.a. (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) avec $E[X_1] = E[Y_1] = 10$ et $E[X_2] = E[Y_2] = 20$.
On fournit les valeurs suivantes :

- valeurs de $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$: ;

$x_1 \backslash x_2$	0	20	40
0	$\frac{9}{180}$	$\frac{71}{180}$	0
10	0	$\frac{20}{180}$	0
20	0	$\frac{71}{180}$	$\frac{9}{180}$

- valeurs de $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$: .

$y_1 \backslash y_2$	0	20	40
0	$\frac{4}{180}$	$\frac{72}{180}$	$\frac{4}{180}$
10	$\frac{1}{180}$	$\frac{18}{180}$	$\frac{1}{180}$
20	$\frac{4}{180}$	$\frac{72}{180}$	$\frac{4}{180}$

Mesure de risque : Soit une v.a. Z avec $E[Z] < \infty$ et $E[Z^2] < \infty$.

- Le superviseur d'une stagiaire et d'un stagiaire en actuariat qui ont suivi le cours Act-2001 propose d'utiliser la mesure suivante :

$$\rho_\kappa(Z) = E[Z] + \sqrt{Var(Z)}\varphi(\kappa),$$

où $\varphi(\kappa) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\Phi^{-1}(\kappa))^2}{2}} \geq 0$, pour $\kappa \in (0, 1)$.
- $\varphi(0.99) = 2.665214$ (pour les calculs ci-dessous).
- $\rho_\kappa(Z) \neq VaR_\kappa(Z)$ et $\rho_\kappa(Z) \neq TVaR_\kappa(Z)$, $\kappa \in (0, 1)$.

Inégalité du triangle :

- Soit un couple de v.a. (Z_1, Z_2) avec $E[Z_i] < \infty$ et $E[Z_i^2] < \infty$, $i = 1, 2$.
- Alors, on a

$$\sqrt{Var(Z_1 + Z_2)} \leq \sqrt{Var(Z_1)} + \sqrt{Var(Z_2)}.$$

Questions :

(a) **(3 points).** Identifier les valeurs des fonctions de masse de probabilité de f_{X_1}, f_{X_2}, f_{Y_1} et f_{Y_2}.

(b) **(3 points).** Calculer $Var(X_i)$ et $Var(Y_i)$, $i = 1, 2$.

(c) **(2 points).** Calculer $\rho_{0.99}(X_i)$, $i = 1, 2$, et $\rho_{0.99}(X_1 + X_2)$.

(d) **(2 points).** Calculer $\rho_{0.99}(Y_i)$, $i = 1, 2$, et $\rho_{0.99}(Y_1 + Y_2)$.

(e) **(2 points).** Calculer les valeurs de $\Pr(X_1 \leq X_2)$ et $\Pr(Y_1 \leq Y_2)$.

(f) **(6 points).** Les deux stagiaires, attentifs pendant le cours Act-2001, veulent démontrer que la mesure ρ_κ proposée par leur superviseur n'est pas cohérente. En effet, la mesure satisfait à 3 des 4 propriétés (souhaitables pour être cohérente) et elle ne satisfait pas à la quatrième.

  i. **(4 points).** Indiquer les 3 propriétés, avec démonstration à l'appui, satisfaites par la mesure de risque ρ_κ. Pour la démonstration de l'une d'entre elles, il est recommandé d'utiliser l'inégalité du triangle.

  ii. **(2 points).** Indiquer la propriété à laquelle la mesure de risque ρ_κ ne satisfait pas et utiliser les valeurs calculées aux items [4c], [4d], et [4e] comme contre-exemple pour le confirmer.

Solutions :

(a) **(3 points).** Identifier les valeurs des fonctions de masse de probabilité de f_{X_1}, f_{X_2}, f_{Y_1} et f_{Y_2}.

On obtient

(b) **(3 points).** Calculer $Var(X_i)$ et $Var(Y_i)$, $i = 1, 2$.
On obtient

(c) **(2 points).** Calculer $\rho_{0.95}(X_i)$, $i = 1, 2$, et $\rho_{0.95}(X_1 + X_2)$.
On obtient

(d) **(2 points).** Calculer $\rho_{0.95}(Y_i)$, $i = 1, 2$, et $\rho_{0.95}(Y_1 + Y_2)$.
On obtient

(e) **(2 points).** Calculer les valeurs de $\Pr(X_1 \leq X_2)$ et $\Pr(Y_1 \leq Y_2)$.
On obtient

$$\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$$

et

$$\Pr(Y_1 \leq Y_2) = 1 - \frac{77}{180} = \frac{103}{180}.$$

(f) **(6 points).** Les deux stagiaires, attentifs pendant le cours Act-2001, veulent démontrer que la mesure ρ_κ proposée par leur superviseur n'est pas cohérente. En effet, la mesure satisfait à 3 des 4 propriétés (souhaitables pour être cohérente) et elle ne satisfait pas à la quatrième.

i. **(4 points).** Indiquer les 3 propriétés, avec démonstration à l'appui, satisfaites par la mesure de risque ρ_κ. Pour la démonstration de l'une d'entre elles, il est recommandé d'utiliser l'inégalité du triangle.

- Invariance à la translation : Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa(Z + a) &= E[Z + a] + \sqrt{Var(Z + a)}\varphi(\kappa) \\
&= E[Z] + a + \sqrt{Var(Z)}\varphi(\kappa) \\
&= \rho_\kappa(Z) + a
\end{aligned}$$

pour tout $\kappa \in (0, 1)$.

- Homogénéité : Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa(aZ) &= E[aZ] + \sqrt{Var(aZ)}\varphi(\kappa) \\
&= aE[Z] + a\sqrt{Var(Z)}\varphi(\kappa) \\
&= a\rho_\kappa(Z)
\end{aligned}$$

pour tout $\kappa \in (0, 1)$.

- Sous-additivité : Soit un couple de v.a. (Z_1, Z_2) avec $E[Z_i] < \infty$ et $E\left[Z_i^2\right] < \infty$,

$i=1,2$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa\left(Z_1+Z_2\right) &= E\left[Z_1+Z_2\right]+\sqrt{Var\left(Z_1+Z_2\right)}\varphi\left(\kappa\right) \\
&= E\left[Z_1\right]+E\left[Z_2\right]+\sqrt{Var\left(Z_1+Z_2\right)}\varphi\left(\kappa\right) \\
&\leq E\left[Z_1\right]+E\left[Z_2\right]+\left(\sqrt{Var\left(Z_1\right)}+\sqrt{Var\left(Z_2\right)}\right)\varphi\left(\kappa\right) \text{ (inégalité du triangle)} \\
&= \rho_\kappa\left(Z_1\right)+\rho_\kappa\left(Z_2\right),
\end{aligned}$$

pour tout $\kappa \in (0,1)$.

ii. **(2 points).** Indiquer la propriété à laquelle la mesure de risque ρ_κ ne satisfait pas et utiliser les valeurs calculées aux items [4c], [4d], et [4e] comme contre-exemple pour le confirmer.

- Motononicité : Bien que

$$\Pr\left(X_1 \leq X_2\right)=1$$

on a obtenu les valeurs suivantes à l'item [4c] :

$$\rho_{0.99}\left(X_1\right)>\rho_{0.99}\left(X_2\right).$$

5. **(14 points).** Soit les coûts pour un contrat d'assurance IARD définis par la v.a. X qui obéit à une loi composée avec

$$\mathcal{M}_X(t) = \mathcal{P}_M(\mathcal{M}_B(t)),$$

où $\mathcal{P}_M(s) = (1-q+qs)^2$ et $\mathcal{M}_B(t) = \frac{\beta}{\beta-t}$.
On a observé que

$$F_X(0) = 0.8464 \text{ et } E[X] = 960.$$

Questions :

(a) **(2 points).** Identifier les lois des v.a. M et B. Quelle est la loi de X ?

(b) **(3 points).** Calculer les paramètres q et β.

(c) **(2 points).** Calculer $\gamma = F_X(24000)$.

(d) **(1 point).** Représenter sur un graphique la courbe de $F_X(x)$, $x \geq 0$. Indiquer clairement la valeur de la masse de probabilité à 0.

(e) **(2 points).** Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_\gamma(X)$.

(f) **(4 points).** Calculer $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_\gamma(X)$.

Solutions :

(a) **(2 points).** Identifier les lois des v.a. M et B. Quelle est la loi de X ?

Loi de M :

$$M \sim Binom(2, q)$$

Loi de B :

$$B \sim Exp(\beta)$$

Loi de X :

$$X \sim BinomComp(2, q; F_B)$$

(b) **(3 points).** Calculer les paramètres q et β.

On a

$$F_X(x) = (1-q)^2 + 2q(1-q)H(x;1,\beta) + q^2 H(x;2,\beta)$$

avec

$$\begin{aligned} F_X(0) &= (1-q)^2 \\ &= 0.8464 \end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned} q &= 1 - \sqrt{0.8464} \\ &= 0.08. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} E[X] &= E[M]E[B] \\ &= qE[B]. \end{aligned}$$

On déduit

$$E[B] = \frac{E[X]}{q} = \frac{960}{0.08} = 12000$$

(c) **(2 points).** Calculer $\gamma = F_X(24000)$.

On obtient

$$
\begin{aligned}
\gamma &= F_X(24000) \\
&= (1-q)^2 + 2q(1-q)H(24000;1,\beta) + q^2 H(24000;2,\beta)
\end{aligned}
$$

(d) **(1 point).** Représenter sur un graphique la courbe de $F_X(x)$, $x \geq 0$. Indiquer clairement la valeur de la masse de probabilité à 0.
Masse à 0 : 0.8464

(e) **(2 points).** Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_\gamma(X)$.
Comme $\kappa = 0.5 < F_X(0)$, on a

$$
VaR_{0.5}(X) = 0
$$

Comme $\kappa = \gamma = F_X(24000) > F_X(0) = 0.8464$, on obtient

$$
VaR_\gamma(X) = 24000
$$

(f) **(4 points).** Calculer $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_\gamma(X)$.
On a

$$
\begin{aligned}
TVaR_{0.5}(X) &= \frac{1}{1-0.5} E\left[X \times 1_{\{X>0\}}\right] \\
&= 2 \times E[X] \\
&= 2 \times 960 \\
&= 1920.
\end{aligned}
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
TVaR_\gamma(X) &= \frac{1}{1-\gamma}\left(2q(1-q)\frac{1}{\beta}\overline{H}(24000;2,\beta) + q^2\frac{2}{\beta}\overline{H}(24000;3,\beta)\right) \\
&= ...
\end{aligned}
$$

6. **(10 points).** Soit la v.a. X représentant les coûts d'une erreur technologique pour une entreprise où

$$X = \begin{cases} 0 & , \quad R \leq 3 \\ B & , \quad R > 3 \end{cases}$$

avec les v.a. indépendantes B et R.
On a

$$\begin{aligned} F_B(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\tau}}, \, x \geq 0, \, \tau > 0, \, \lambda > 0 \\ \text{et } F_R(x) &= 1 - \frac{2}{3}e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, \, x \geq 0, \, \beta > 0, \, \gamma > 0. \end{aligned}$$

Questions :

(a) **(2 points).** Développer l'expression de $F_X(x)$, $x \geq 0$.
(b) **(2 points).** Démontrer que $F_B^{-1}(u) = \lambda\left(u^{-1} - 1\right)^{-1/\tau}$, $u \in (0,1)$.
(c) **(2 points).** Développer l'expression de $VaR_\kappa(X)$, $u \in (0,1)$.
(d) **(4 points).** Hypothèses $\tau = 2$, $\lambda = 10$. Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_{0.9999}(X)$.

Solutions :

(a) **(2 points).** Développer l'expression de $F_X(x)$, $x \geq 0$.
On a

$$F_X(x) = 1 - q + qF_B(x)$$

avec

$$\begin{aligned} q &= \Pr(R > 3) \\ &= \overline{F}_R(3) \\ &= ... \end{aligned}$$

(b) **(2 points).** Démontrer que $F_B^{-1}(u) = \lambda\left(u^{-1} - 1\right)^{-1/\tau}$, $u \in (0,1)$.
On pose

$$\begin{aligned} & u = \frac{1}{} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 + \left(\tfrac{x}{\lambda}\right)^{-\tau} = \tfrac{1}{u} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\tfrac{x}{\lambda}\right)^{-\tau} = \tfrac{1}{u} - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \lambda\left(\tfrac{1}{u} - 1\right)^{-\frac{1}{\tau}} \end{aligned}$$

(c) **(2 points).** Développer l'expression de $VaR_\kappa(X)$, $u \in (0,1)$.
On a

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(X) &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 < u < 1-q \\ F_B^{-1}\left(\frac{\kappa-(1-q)}{q}\right) & , \quad 1-q < u < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 < u < 1-q \\ \lambda\left(\frac{1}{\frac{\kappa-(1-q)}{q}} - 1\right)^{-\frac{1}{\tau}} & , \quad 1-q < u < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 < u < 1-q \\ \lambda\left(\frac{q}{\kappa-(1-q)fs} - 1\right)^{-\frac{1}{\tau}} & , \quad 1-q < u < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(d) **(4 points).** Hypothèses $\tau = 2$, $\lambda = 10$. Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_{0.9999}(X)$.

- On a
$$VaR_{0.5}(X) = 0$$
- On a
$$\begin{aligned} VaR_{0.9999}(X) &= \lambda \left(\frac{q}{\kappa - (1-q) fs} - 1 \right)^{-\frac{1}{\tau}} \\ &= ... \end{aligned}$$

7. **(14 points).** La question est basée sur la section des évènements catastrophiques du document produit par le Bureau d'assurance du Canada (**document séparé**).
On utilise uniquement les données de la dernière colonne sous le titre "*Loss plus loss adjustment expenses in 2016 dollars*".
Les montants sont exprimées en multiple de 1000 \$Can.
À partir de ces données, les actuaires de la compagnie de réassurance LavalRe ont démontré que les coûts d'un évènement catastrophique (v.a. B, en \$Can) obéissait à une loi de Pareto, i.e.,

$$B \sim Pareto\,(\alpha = 2.1, \lambda = 90500000)\,.$$

Questions :

(a) **(2 points).** Pour la prochaine année, calculer la probabilité p que les coûts de la prochaine catastrophe excèdent ceux de la catastrophe survenue à Fort McMurray, en mai 2016.

(b) **(3 points).** Arrangement #1. Pour la prochaine année, la compagnie LavalRe et $n-1 = 4$ autres compagnies de réassurance décident de partager les coûts d'une catastrophe selon l'arrangement suivant :
- À chaque catastrophe qui pourrait éventuellement survenir, les coûts de la catastrophe (v.a. B) sont répartis équitablement entre chacune des n compagnies.
- La part de LavalRe est représentée par la v.a. W_n.

Définir la v.a. W_n et calculer $VaR_{0.9999}\,(W_n)$ en utilisant adroitement une propriété de la fonction quantile.

(c) **(9 points).** Arrangement #2. La compagnie LavalRe assume les coûts en excès de $d = 500\ 000\ 000$ (500 millions \$Can). Cette exposition est représentée par la v.a. Y_d où

$$Y_d = \max\,(B - d; 0)\,.$$

i. **(3 points).** Calculer $\Pr\,(Y_d = 0)$ et $F_{Y_d}\,(x)$, $x = 1\ 000\ 000\ 000$ \$Can.

ii. **(3 points).** Calculer $VaR_\kappa\,(Y_d)$, $\kappa = 0.5$ et 0.9999, en utilisant adroitement une propriété de la fonction quantile.

iii. **(3 points).** Calculer $\int_{0.025}^{0.975} VaR_u\,(Y_d)\,\mathrm{d}u$, en utilisant adroitement une propriété de la fonction quantile.

Solutions :

(a) **(2 points).** Pour la prochaine année, calculer la probabilité p que les coûts de la prochaine catastrophe excèdent ceux de la catastrophe survenue à Fort McMurray, en mai 2016.
On a

$$p = \Pr\,(B > 3816447000) = \left(\frac{90500000}{3816447000 + 90500000}\right)^{2.1} = 0.0003682164823$$

(b) **(3 points).** Arrangement #1. Pour la prochaine année, la compagnie LavalRe et $n-1 = 4$ autres compagnies de réassurance décident de partager les coûts d'une catastrophe selon l'arrangement suivant :
- À chaque catastrophe qui pourrait éventuellement survenir, les coûts de la catastrophe (v.a. B) sont répartis équitablement entre chacune des n compagnies.
- La part de LavalRe est représentée par la v.a. W_n.

Définir la v.a. W_n et calculer $VaR_{0.9999}\,(W_n)$ en utilisant adroitement une propriété de

la fonction quantile.
On a

$$W_n = \frac{1}{5} X$$

On déduit

$$VaR_{0.9999}\left(W_n\right) = \frac{1}{5} VaR_{0.9999}\left(X\right) = ...$$

(c) **(9 points).** Arrangement #2. La compagnie LavalRe assume les coûts en excès de $d = 500\ 000\ 000$ (500 millions \$Can). Cette exposition est représentée par la v.a. Y_d où

$$Y_d = \max\left(B - d; 0\right).$$

i. **(3 points).** Calculer $\Pr\left(Y_d = 0\right)$ et $F_{Y_d}\left(x\right)$, $x = 1\ 000\ 000\ 000$ \$Can.
On a

$$\begin{aligned}
\Pr\left(Y_d = 0\right) &= \Pr\left(\max\left(B - d; 0\right) = 0\right) \\
&= \Pr\left(B \leq d\right) \\
&= ...
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Pr\left(Y_d \leq x\right) &= \Pr\left(\max\left(B - d; 0\right) \leq x\right) \\
&= \Pr\left(B \leq d + x\right) \\
&= ...
\end{aligned}$$

ii. **(3 points).** Calculer $VaR_\kappa\left(Y_d\right)$, $\kappa = 0.5$ et 0.9999, en utilisant adroitement une propriété de la fonction quantile.
La fonction $\varphi\left(x\right) = \max\left(x - d; 0\right)$ est croissante et B est une v.a. continue.
Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
VaR_\kappa\left(Y_d\right) &= VaR_\kappa\left(\max\left(B - d; 0\right)\right) \\
&= \max\left(VaR_\kappa\left(B\right) - d; 0\right)
\end{aligned}$$

iii. **(3 points).** Calculer $\int_{0.025}^{0.975} VaR_u\left(Y_d\right) \mathrm{d}u$, en utilisant adroitement une propriété de la fonction quantile.
On a

$$\begin{aligned}
\int_{0.025}^{0.975} VaR_u\left(Y_d\right) \mathrm{d}u &= \int_{0.025}^{0.975} \max\left(VaR_u\left(B\right) - d; 0\right) \mathrm{d}u \\
&= \int_{F_B(B)}^{0.975} VaR_u\left(B\right) \mathrm{d}u - d \\
&= ...
\end{aligned}$$

8. **(8 points).** Soit les v.a. X et Y ($E[X] < \infty$, $E[Y] < \infty$) avec les fonctions de répartition F_X et F_Y, quantile F_X^{-1} et F_Y^{-1}, et stop-loss π_X et π_Y. (Note : on ne précise pas si les v.a. X et Y sont discrètes, continues, ou mixtes; dépendantes ou indépendantes).
On rappelle que
$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u,\ \kappa \in (0,1). \tag{1}$$
La relation
$$TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \tfrac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) \quad , \quad \text{pour } \kappa \in (0,1), \tag{2}$$
est valide pour toute v.a. X.
Soit la fonction convexe
$$\varphi(x) = x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(x)$$
pour $x \in \mathbb{R}$.
Alors, (2) peut être récrit sous la forme
$$TVaR_\kappa(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}}\{\varphi(x)\} \tag{3}$$

Questions :

(a) **(3 points).** À partir directement de la définition de la TVaR en (1), démontrer la relation en (2).

(b) **(5 points).** En utilisant de façon astucieuse (2) et (3), démontrer que
$$TVaR_\kappa(X+Y) \le TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y)$$
pour $\kappa \in (0,1)$.
Note : Il ne faut pas faire la démonstration basée sur les statistiques d'ordre ou celle basée sur les fonctions indicatrices généralisées.

Solutions :

(a) **(3 points).** À partir directement de la définition de la TVaR en (1), démontrer la relation en (2).
On a
$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X) + VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \left(F_X^{-1}(u) - VaR_\kappa(X)\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X)(1-\kappa) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[\max\left(F_X^{-1}(U) - VaR_\kappa(X);0\right)\right] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X);0)] + VaR_\kappa(X) \ \text{(Quantile Function Theorem)}
\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

(b) **(5 points).** En utilisant de façon astucieuse (2) et (3), démontrer que

$$TVaR_\kappa(X+Y) \leq TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y)$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

On a

$$TVaR_\kappa(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \{\varphi(x)\}$$

ce qui signifie

$$TVaR_\kappa(X) \leq \varphi(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour $\alpha \in (0,1)$, on a

$$TVaR_\kappa(\alpha \times X + (1-\alpha)\times Y) \leq x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_{\alpha\times X+(1-\alpha)\times Y}(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On choisit

$$x_\alpha = \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)\times VaR_\kappa(Y)$$

et on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(\alpha \times X + (1-\alpha)\times Y) &\leq x_0 + \frac{1}{1-\kappa}\pi_{\alpha\times X+(1-\alpha)\times Y}(x_0) \\ &= x_0 + \frac{1}{1-\kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1-\alpha)\times Y - x_0; 0)] \\ &= \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)\times VaR_\kappa(Y) \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1-\alpha)\times Y - \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha \end{aligned}$$

La fonction

$$E[\max(W;0)]$$

est convexe.

Alors, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(\alpha \times X + (1-\alpha)\times Y) &\leq \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)\times VaR_\kappa(Y) \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1-\alpha)\times Y - \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha \\ &= \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)\times VaR_\kappa(Y) \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times E[\max(\alpha \times (X - VaR_\kappa(X)) + (1-\alpha)\times (Y - VaR_\kappa(Y \\ &\leq \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)\times VaR_\kappa(Y) \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times \alpha E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times (1-\alpha) E[\max(Y - VaR_\kappa(Y); 0)] \\ &= \alpha \times VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} \times \alpha E[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)] \\ &\quad + (1-\alpha)\times VaR_\kappa(Y) + \frac{1}{1-\kappa} \times (1-\alpha) E[\max(Y - VaR_\kappa(Y); 0 \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in (0,1)$.
La relation est vraie pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}\left(\frac{1}{2}\times X + \left(1-\frac{1}{2}\right)\times Y\right) &\leq \frac{1}{2}\times VaR_{\kappa}\left(X\right) + \frac{1}{1-\kappa}\times\frac{1}{2}E\left[\max\left(X - VaR_{\kappa}\left(X\right);0\right)\right] \\ &\quad + \left(1-\frac{1}{2}\right)\times VaR_{\kappa}\left(Y\right) + \frac{1}{1-\kappa}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)E\left[\max\left(Y - VaR\right.\right. \end{aligned}$$

Avec la propriété d'homoénéité de la TVaR, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}TVaR_{\kappa}\left(X+Y\right) &\leq \frac{1}{2}\times VaR_{\kappa}\left(X\right) + \frac{1}{1-\kappa}\times\frac{1}{2}E\left[\max\left(X - VaR_{\kappa}\left(X\right);0\right)\right] \\ &\quad +\frac{1}{2}\times VaR_{\kappa}\left(Y\right) + \frac{1}{1-\kappa}\times\frac{1}{2}E\left[\max\left(Y - VaR_{\kappa}\left(Y\right);0\right)\right] \end{aligned}$$

On multiplie par "2" et on obtient le résultat désiré.

9. **(8 points).** Soit les v.a. i.i.d. $X_1, ..., X_n$ avec

$$X_i \sim Pareto\left(\alpha = 1.5, \lambda = 5\right),$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $W_n = \frac{1}{n} S_n$.
On ne peut pas identifier une forme explicite pour F_{W_n}.
Questions :

(a) **(2 points).** Calculer la valeur de $E\left[W_n\right]$.

(b) **(6 points).**

i. **(4 points).Démontrer** de façon appropriée que la part allouée W_n tend (en distribution) vers la v.a. Z où

$$\Pr\left(Z = E\left[X\right]\right) = 1. \tag{4}$$

(**Note** : il faut démontrer le résultat qui permet d'obtenir cette conclusion).

ii. **(2 points).**Interpréter le résultat en (4) dans le contexte de l'assurance.

Solutions :

(a) **(2 points).** Calculer la valeur de $E\left[W_n\right]$.
On a

$$\begin{aligned} E\left[W_n\right] &= E\left[\frac{1}{n} S_n\right] \\ &= \frac{1}{n} E\left[S_n\right] \\ &= \frac{1}{n} n E\left[X\right] \\ &= E\left[X\right] \end{aligned}$$

où

$$E\left[X\right] = \frac{0.5}{1.5 - 1} = 1.$$

(b) **(6 points).**

i. **(4 points).Démontrer** de façon appropriée que la part allouée W_n tend (en distribution) vers la v.a. Z où

$$\Pr\left(Z = E\left[W_n\right]\right) = 1.$$

(**Note** : il faut démontrer le résultat qui permet d'obtenir cette conclusion).

On utilise la TLS de W_n donnée par (pour $t > 0$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= E\left[e^{-W_n t}\right] \\
&= E\left[e^{-\frac{1}{n}S_n t}\right] \\
&= E\left[e^{-S_n \frac{t}{n}}\right] \\
&= E\left[e^{-(X_1+...+X_n)\frac{t}{n}}\right] \\
&= E\left[e^{-X_1 \frac{t}{n}}\right] \times ... \times E\left[e^{-X_n \frac{t}{n}}\right] \text{ (indépendance)} \\
&= E\left[e^{-X \frac{t}{n}}\right]^n \text{ (i.d.)}
\end{aligned}$$

Ensuite, on procède au passage à la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) &= \lim_{n\to\infty} E\left[e^{-X\frac{t}{n}}\right]^n \\
&\simeq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{E[X]\,t}{n}\right)^n \\
&= e^{-E[X]t} \\
&= \mathcal{L}_Z(t)
\end{aligned}$$

où

$$\Pr(Z = E[X]) = \Pr(Z = E[W_n]) = 1.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n}(t) = \mathcal{L}_Z(t)$$

on conclut

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n}(x) = F_Z(x)$$

pour tout point de continuité $x \in \mathbb{R}$.

ii. **(2 points).**Interpréter le résultat en (4) dans le contexte de l'assurance.
Quand la taille n du portefeuille devient importante, la part allouée à chaque contrat tend vers la constante $E[X]$

10. **(12 points).** Soit une v.a. continue X dont le support est $\mathbb{R}$ et avec

$$F_X^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right),\ u \in (0,1).$$

Questions :

(a) **(4 points).** Développer l'expression de $TVaR_\kappa(X)$. Note : $\lim_{v\to 0} v \ln v = 0$.

(b) **(3 points).** Développer l'expression de $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) **(5 points).** Soit la v.a. $Y = 0.2X + 0.06$, représentant le rendement instantanné annuel sur un titre boursier.

i. **(1 point).** Calculer $F_Y(0)$.

ii. **(2 points).** Calculer $VaR_{0.99}(Y)$. Indiquer clairement les propriétés utilisées.

iii. **(2 points).** Calculer $TVaR_{0.99}(Y)$. Indiquer clairement les propriétés utilisées.

Solutions :

(a) **(4 points).** Développer l'expression de $TVaR_\kappa(X)$. Note : $\lim_{v\to 0} v \ln v = 0$.

On a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) du \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(u)\, du - \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(1-u)\, du. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(u)\, du &= \frac{1}{1-\kappa}\, u\ln(u)\Big|_\kappa^1 - \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 du \\ &= 0 - \frac{1}{1-\kappa}\kappa\ln(\kappa) - 1 \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\kappa\ln(\kappa) - 1 \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(1-u)\, du &= \frac{1}{1-\kappa} - (1-u)\ln(1-u)\Big|_\kappa^1 - \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 du \\ &= 0 - \ln(1-\kappa) - 1 \\ &= -\ln(1-\kappa) - 1. \end{aligned}$$

On combine les deux expressions et on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) du \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(u)\, du - \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \ln(1-u)\, du \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\kappa\ln(\kappa) - \ln(1-\kappa) \end{aligned}$$

(b) **(3 points).** Développer l'expression de $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} x &= \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) \\ &\Leftrightarrow e^{x} = \frac{u}{1-u} \\ &\Leftrightarrow (1-u)\, e^{x} = u \\ &\Leftrightarrow e^{x} = u\,(1+e^{x}) \end{aligned}$$

On conclut

$$F_X(x) = \frac{e^{x}}{1+e^{x}} = \frac{1}{1+e^{-x}},\ x \in \mathbb{R}.$$

(c) **(5 points).** Soit la v.a. $Y = 0.2X + 0.06$, représentant le rendement instantanné annuel sur un titre boursier.

i. **(1 point).** Calculer $F_Y(0)$.
On a

$$\begin{aligned} F_Y(0) &= \Pr(Y \leq 0) \\ &= \Pr(0.2X + 0.06 \leq 0) \\ &= \Pr\left(X \leq \frac{-0.06}{0.2}\right) \\ &= ... \end{aligned}$$

ii. **(2 points).** Calculer $VaR_{0.99}(Y)$. Indiquer clairement les propriétés utilisées.
On a

$$Y = 0.2X + 0.06 = \varphi(X)$$

où

$$\varphi(x) = 0.2x + 0.06$$

est une fonction strictement croissante d'une v.a. continue.
Alors, on a

$$\begin{aligned} VaR_{\kappa}(Y) &= 0.2 \times VaR_{k}(X) + 0.06 \\ &= ... \end{aligned}$$

iii. **(2 points).** Calculer $TVaR_{0.99}(Y)$. Indiquer clairement les propriétés utilisées.
On a

$$Y = 0.2X + 0.06 = \varphi(X)$$

où

$$\varphi(x) = 0.2x + 0.06$$

est une fonction strictement croissante d'une v.a. continue.
Alors, on a

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(Y) &= 0.2 \times TVaR_{k}(X) + 0.06 \\ &= ... \end{aligned}$$

FIN