ACT-2011
Hiver 2021

Chapitre 13

Tenue de marché et couverture delta

Thomas Landry, M.Sc., ASA, AICA
École d'actuariat, Université Laval

Préface

Une partie de ces notes de cours est reprise ou inspirée de celles de l'ancienne version du cours montée par Claire Bilodeau, et la propriété intellectuelle de ce document est donc grandement partagée avec elle.

Dans ce chapitre, on se questionne sur les enjeux des teneurs de marché (*market-makers*) qui fournissent les options, les produits dérivés en général et la gestion des risques.

13.1. Les teneurs de marché

Les teneurs de marchés visés dans le présent chapitre sont des professionnels qui créent des produits dérivés. Ce chapitre explorera leur perspective ainsi que leurs stratégies pour « couvrir leurs positions » (*hedging*).

Un teneur de marché au sens général (pas juste dans le contexte des produits dérivés) se tient prêt à acheter des vendeurs et à vendre aux acheteurs et s'assurent de conserver un marché liquide avec des transactions rapides/immédiates. Techniquement, les propriétaires de magasin de détail sont en quelque sorte des teneurs de marché qui achètent différents produits aux fournisseurs et/ou directement aux producteurs des produits en question pour les rendre disponibles au grand public, par exemple.

Les opérations pour compte propre (*proprietary trading*) sont conceptuellement distinctes de la tenue de marché et généralement effectuées par une institution financière pour son propre compte, pour suivre une stratégie d'investissement. Les clients et les opérateurs pour compte propre des intuitions financières tirent généralement leur profit des mouvements du marché. Les teneurs de marché qui ont l'objet du présent chapitre tirent leur profit principalement des frais de transaction.

13.2. Le risque des teneurs de marché

13.2.1. Couverture delta-neutre

Sans couverture (*hedging*), un teneur de marché se retrouve avec une position arbitraire, selon les ordres de ses clients.

Les teneurs de marché peuvent contrôler leur risque en faisant de la **couverture delta (delta neutre, *delta hedging*).** Ils calculent le delta de l'option qu'ils ont vendue et prennent une position parfaitement inverse dans le sous-jacent. Une position couverte en delta (*delta-hedged*, delta neutre) n'est pas, en général, à coût parfaitement nul et requiert du capital à investir initialement.

En bout de ligne, une position couverte et le capital initial lié à cette position devrait théoriquement fournir un rendement égal au taux sans risque. La grande majorité des modèles d'évaluation des produits dérivés se basent sur ce principe : une position couverte (le capital initialement investi) aura un rendement théoriquement certain, peu importe les variations dans le prix du sous-jacent, et devrait donc répliquer le comportement d'un prêt/emprunt au taux sans risque.

La couverture dite en delta neutre est couramment utilisée en pratique et un élément clef pour comprendre l'évaluation des options, comme on l'a vu aux chapitres précédents avec le concept du portefeuille réplicatif.

13.2.2 Risque Lié aux options en l'absence de couverture

On a déjà vu le concept que pour chaque options achetée/vendue (transigée), il y a toujours deux partis prenants (souvent position longue versus courte mais pas toujours). Le risque est donc lié à une des positions pour l'option ou la stratégie en question.

Supposons qu'un client veut acheter une option d'achat d'un teneur de marché. Ce dernier lui en vend une avec :

- S_0 = K = 40$
- Hypothèse de $\sigma = 30\%, r = 8\%$ et aucun dividende
- Échéance de 3 mois ($\frac{91}{365}$ année)

$$C\left(S = 40, K = 40, \sigma = 0.3, r = 0.08, T - t = \frac{91}{365}, \delta = 0\right)$$
$$= 40 \underbrace{e^{-0*\frac{91}{365}}N(d_1)}_{1*0.58240416=\Delta_C} - 40e^{-0.08*\frac{91}{365}} \underbrace{N(d_2)}_{0.5232266} = 2.7804\$$$

Avec $d_1 = \frac{ln(S/K)+\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = \frac{\overbrace{ln(40/40)}^{=0}+\left(0.08-0+\frac{0.3^2}{2}\right)\frac{91}{365}}{0.3\sqrt{\frac{91}{365}}} = 0.20804775$

et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} = 0.20804775 - 0.3\sqrt{\frac{91}{365}} = 0.05825337$

- $\Delta_C = e^{-\delta(T-t)}N(d_1) = e^{-0*\frac{91}{365}}N(0.20804775) = 0.5824$ > 0 (Call)
- $\Gamma_c = \frac{e^{-\delta(T-t)}\,\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{(T-t)}} = \frac{e^{-0*\frac{91}{365}}\,\phi(0.20804775)}{40*0.3\sqrt{\frac{91}{365}}} = 0.06515618$ > 0 (toujours)
- $\theta_c = \cdots \cong -0.017$ < 0 (toujours)

Pour le teneur de marché qui **vend** l'option d'achat, $\Delta < 0$ et le danger est que le prix de l'action monte. Aussi, $\theta > 0$ et sa position prend de la valeur dans le temps (toute chose étant égale par ailleurs).

On présume que le prix de l'action augmente ponctuellement de $\underbrace{0{,}75\$}_{\epsilon = +0{,}75}$ pour atteindre 40,75\$. On doit donc revaloriser la valeur de l'option d'achat et on obtient :

$$C\left(S = 40{,}75, K = 40, \sigma = 0.3, r = 0.08, (T-t) = \frac{91}{365}, \delta = 0\right)$$
$$= 40.75\ \underbrace{e^{-0*\frac{91}{365}}N(d_1)}_{1*0.63007814=\Delta_C} - 40e^{-0.08*\frac{91}{365}}\ \underbrace{N(d_2)}_{0.57231299} = 3.2352\$$$

Avec $d_1 = \frac{ln(S/K)+\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = \frac{\overbrace{ln(40.75/40)}^{=0.01857639}+\left(0.08-0+\frac{0.3^2}{2}\right)\frac{91}{365}}{0.3\sqrt{\frac{91}{365}}} = 0.33206032$

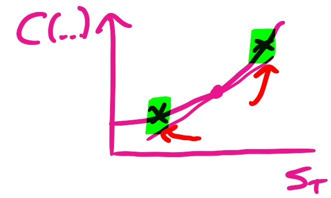
et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} = 0.33206032 - 0.3\sqrt{\frac{91}{365}} = 0.18226594$

Le teneur de marché a ainsi perdu 2.7804 – 3.2352 = – 0.4548\$. Si une journée s'était écoulée avant d'atteindre cette nouvelle valeur, alors on aurait eu une valeur différente vu le theta négatif, mais ici, on ne fait varier que la valeur du sous-jacent.

13.2.3. L'utilité du delta et du gamma

Si on avait utilisé le delta calculé initialement pour approximer le nouveau prix de l'option d'achat, qu'aurions-nous obtenu…?

$$\underbrace{2.7804}_{\substack{\text{Prix du call} \\ \text{avec S = 40\$}}} + \underbrace{0.75}_{\substack{\text{Variation} \\ \text{prix de S}}} * \underbrace{0.5824}_{\Delta_C} = 3.2172\$$$



Si on se fie uniquement au delta, la variation dans le prix de l'option serait de 0.4368\$, ce qui sous-estime la véritable variation de 0.4548\$. La raison est que le delta était mesuré pour un sous-jacent qui vaut exactement 40\$. En effet, une fois rendu à 40.75\$, le sous-jacent a maintenant un delta de **0.6301** > 0.5824 (*le delta évolue sur la valeur du sous-jacent évolue*).

Si la valeur du sous-jacent augmente, le delta augmente aussi pour une option d'achat, et il faudrait donc continuellement recalculer le nouveau delta en théorie (et donc intégrer le delta pour chaque tranche d'augmentation de la valeur du sous-jacent entre 40\$ et 40.75\$).

> ***Remarque*** *: le delta est la première dérivée de la valeur de l'option par rapport à la valeur du sous-jacent. Une meilleure approximation pour la nouvelle valeur d'une option à la suite d'une variation de la valeur du sous-jacent serait donc de considérer également la deuxième dérivée, soit le Gamma (comme avec la duration et la convexité pour calculer la nouvelle valeur actualisée d'une série de flux financiers futurs suite à une variation du taux d'actualisation, ACT-1001 chapitre 7).*

Conclusion : le delta peut servir pour de petites variations dans le prix du sous-jacent. Autrement, *il sous-estime l'augmentation du prix de l'option*

Question : comment palier à ce problème sans se lancer dans des calculs complexes?

Solution : Pour de plus grandes variations, on devra considérer la convexité avec le gamma, et ainsi :

$$\underbrace{2.7804}_{\substack{\text{Prix du call} \\ \text{avec S = 40\$}}} + \underbrace{0.75}_{\substack{\text{Variation} \\ \text{prix de S}}} * \underbrace{0.5824}_{\Delta_C} + \underbrace{0.75^2}_{\substack{\text{Variation} \\ \text{prix de S} \\ \text{au carré}}} \underbrace{\left(\frac{0.0652}{2}\right)}_{\frac{\Gamma_C}{2}} = 3.2355\$$$

3.2352

Conclusion (prise 2) : la combinaison du delta et du gamma permet une bonne approximation pour des variations modérées.

Remarques :

- Cette méthode tient sa source des séries de Taylor, avec :

$$f(a) + \overbrace{\frac{f'(a)}{1!}}^{\Delta}(x-a) + \overbrace{\frac{f''(a)}{2!}}^{\Gamma}(x-a)^2 + \overbrace{\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots}^{\approx 0}$$

- Le delta surestime la diminution du prix de l'option quand la valeur du sous-jacent diminue. En fait, le delta fournira généralement une approximation un peu trop basse pour la valeur de l'option pour une variation quelconque de la valeur du sous-jacent, car il néglige toutes les dérivées 2ème, 3ème, 4ème et ainsi de suite si on regarde la série de Taylor.
- À vérifier en exercice que pour une baisse de 0.75$ de valeur dans le sous-jacent (nouvelle valeur de 39.25$) :
    - Le nouveau delta aurait baissé à 0.5326
    - La baisse dans la valeur de l'option aurait été de -0.4368$ avec l'approximation du delta
    - La « vraie » variation exacte aurait été de -0.4182$ pour une nouvelle valeur de 2.3622$ pour l'option d'achat
    - En ajoutant le gamma pour une meilleure approximation, on arriverait à 2.3619375$

13.3. Couverture en delta (delta neutre, *delta hedging*)

13.3.1. Illustration avec teneur de marché qui vend une option d'achat

On reprend l'exemple de la page 385 du livre de référence, section 13.3. Le teneur de marché *vend l'option d'achat et couvre sa position en delta avec des actions*. En reprenant l'exemple précédent, **ceci implique qu'il achète 0.5824 action** pour compenser son delta de - 0.5824.

On regarde l'évolution de la position du teneur de marché (théorique, sans frais).

Jour 0 $(t = 0/365)$

- Vente d'une option d'achat sur 100 actions
- Chaque option (par unité de sous-jacent) vaut 2.7804$
- $100 * 2.7804 = 278.04\$$ reçu par le teneur de marché, qui achète $100 * \underbrace{0.5824}_{\Delta_c} = 58.24$ actions pour $58.24 * 40\$ = 2329.60\$$
- Coût net initial de $2329.60 - 278.04 = 2051.56\$$

Jour 1 ($t = 1/365$)

- $S_{\frac{1}{365}} = 40.50\$$ $\Rightarrow \varepsilon_{1/365} = S_{1/365} - S_0 = 0{,}50$
- $C\left(S_{\frac{1}{365}} = 40.50\$, K = 40, \sigma = 0.3, r = 0.08, T - t = \frac{90}{365}, \delta = 0\right) = 3.0621\$$
- Pour le teneur de marché :

$$\underbrace{58.24 * 40.50}_{\text{Valeur de ses actions}} - \underbrace{100 * 3.0621}_{\text{Nouvelle valeur de l'option émise}} - \underbrace{2051.56 * e^{\frac{0.08}{365}}}_{\text{Coût initial accumulé pour le teneur de marché}} = 0.5003$$

$$= 58.24 * \underbrace{(40.50 - 40)}_{\text{Gain par action}} + \underbrace{(278.04 - 306.21)}_{\text{Gain pour les 100 options}} - \underbrace{2051.56 * (e^{\frac{0.08}{365}} - 1)}_{\text{Intérêt}}$$

- Donc environ 0.50$ de profit en une journée
- On doit procéder au rebalancement du portefeuille car le delta a changé! Nouveau delta :

$$e^{-\delta(T-t)} N\left(\underbrace{\frac{ln(S/_K) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_1}\right) = N\left(\frac{ln(40.50/_{40}) + \left(0.08 + \frac{0.3^2}{2}\right)\frac{90}{365}}{0.3\sqrt{\frac{90}{365}}}\right) = \mathbf{0.6142}$$

- Le teneur de marché a besoin de $100 * (\mathbf{0.6142} - 0.5824) = 3.18$ nouvelles actions
- Il doit donc injecter $3.18 * 40.50 = \mathbf{128.79\$}$ de plus
- En sommant le coût initial accumulé avec le profit de la journée (ce qui est équivalent à la valeur des 58,24 actions du teneur de marché moins la valeur des options d'achat qu'il a vendues) et le rachat de nouvelles actions, on obtient :

$3{,}18 \cdot 40{,}50$

$3{,}18 \cdot 40{,}50$

$$\underbrace{\left[\overbrace{2051.56 * e^{\frac{0.08}{365}}}^{\text{Coût initial accumulé}} + \overbrace{0.5003}^{\text{Profit}}\right]}_{=\underbrace{58.24 * 40.50}_{\text{Valeur de ses actions}} - \underbrace{100*3.0621}_{\text{Nouvelle valeur de l'option émise}}} + \mathbf{128.79} = \mathbf{2181.30\$}$$

$61{,}42 - 58{,}24 = 3{,}18$

$+61{,}42 \cdot 40{,}50$
$-100 \cdot 3.0621$
$2181{,}30$

Il s'agit de la valeur de la position à cet instant. Autrement dit, si on désirait rentrer dans une position identique à $t = 1/365$, on devrait acheter 61,42 actions (delta de 0,6142 fois 100 actions) de valeur de $S_{\frac{1}{365}} = 40.50\$$ chacune et vendre 100 options d'achat de valeur de 3.0621$ chacune, pour un nouveau coût initial au jour 1 de $61.42 * 40.50 - 100 * 3.0621 = \mathbf{2181.30\$}$. *Ce coût peut être associé à la capacité d'emprunt du teneur de marché en vertu de sa position couverte en delta en lien avec l'option d'achat qu'il a vendue.*

Jour 2 ($t = 2/365$)

- $S_{\frac{2}{365}} = 39.25\$$ $\epsilon_{2/365} = \dots = -1{,}25$
- $C\left(S_{\frac{2}{365}} = 39.25\$, K = 40, \sigma = 0.3, r = 0.08, T - t = \frac{89}{365}, \delta = 0\right) = 2.3282\$$
- Pour le teneur de marché :

$$\underbrace{61.42 * 39.25}_{\text{Valeur de ses actions au jour 2}} - \underbrace{100 * 2.3282}_{\text{Nouvelle valeur de l'option au jour 2}} - \underbrace{2181.30 * e^{\frac{0.08}{365}}}_{\text{Intérêt sur le coût de la position au jour précédent pour le teneur de marché}} = -3.8631$$

$$= 61.42 * \underbrace{(39.25 - 40.50)}_{\text{Gain par action}} + \underbrace{(306.21 - 232.82)}_{\text{Gain pour les 100 options}} - \underbrace{2181.30 * \left(e^{\frac{0.08}{365}} - 1\right)}_{\text{Intérêt}} = -3.8631$$

- Donc environ 3.8631\$ de perte en une journée
- On doit procéder au rebalancement du portefeuille car le delta a changé! Le nouveau delta est de :

$$e^{-\delta(T-t)} N\left(\frac{ln\left(S/_K\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T}}\right) = N\left(\frac{ln\left(39.25/_{40}\right) + \left(0.08 + \frac{0.3^2}{2}\right)\frac{89}{365}}{0.3\sqrt{\frac{89}{365}}}\right) = 0.5311 = \Delta_{2/365}$$

- Le teneur de marché a besoin de $100 * (0.5311 - 0.6142) = -8.31$ nouvelles actions (négatif, donc il doit *revendre 8.31 de ses actions*)
- Il obtiendra $8.31 * 39.25 = 326.26\$$ de cette vente.
- En sommant le coût initial accumulé, le profit de la journée et le rachat de nouvelles actions, on obtient :

$$\underbrace{\left[\overbrace{2181.30 * e^{\frac{0.08}{365}}}^{\text{Valeur de la position le jour 1 accumulé au jour 2}} + \overbrace{(-3.8631)}^{\text{Profit (perte) jour 2}}\right]}_{= \underbrace{61.42 * 39.25}_{\text{Valeur de ses actions au jour 2}} - \underbrace{100 * 2.3282}_{\text{Nouvelle valeur de l'option au jour 2}}} \overbrace{- 326.26}^{\text{Vente des actions}} = \underbrace{1851.66\$}_{\text{Coût à } t = 2/365}$$

- Il s'agit de la valeur de la position à cet instant. Autrement dit, si on désirait rentrer dans une position identique à $t = 2/365$, on devrait acheter 53.11 actions (delta de 0,5311 fois 100 actions) de valeur de $S_{\frac{2}{365}} = 39.25\$$ chacune et vendre 100 options d'achat de valeur de 2.3282\$ chacune, pour un nouveau coût initial au jour 1 de $53.11 * 39.25 - 100 * 2.3282 =$ $\mathbf{1851.66}$.

13.3.2. Interprétations de l'illustration

Pour les profits journaliers :

- À la fin du jour 1, le teneur de marché a un profit journalier (*overnight profit*) de 0,50$ avec la variation des prix du le marché. Il pourrait ainsi retirer des fonds du portefeuille ainsi créé.
- Cependant, à la fin du jour 2, le teneur de marché a un profit journalier (*overnight profit*) négatif (perte) de -3,8631$.

Supposons qu'on prenne la position sans risque qui rend le coût total nul :

Jour 0

- Vente de 100 options d'achat
- En contrepartie, achat de 58.24 actions avec un emprunt de 2051.56$ en plus des 278.04$ obtenus avec la vente des options d'achat

Remarque : notre capacité d'emprunt est présumée être égale à la valeur des actions moins la valeur des options vendues dans notre portefeuille pour recréer un coût initial nul. Celle-ci est de 2051.56$ au jour 0.

Jour 1

- La valeur du portefeuille monte à 2181.30$ (et notre capacité d'emprunt augmente donc de 129.74$ en une journée)
- Pour demeurer couvert en delta neutre (delta hedged), on doit acheter 3,18 actions à 40,50$ chacune pour un total de 128.79$
- On paye un 0,45$ d'intérêt journalier payé sur le prêt
- La différence de 129.74 – 128.79 – 0.45 = 0.50 est le profit journalier.

Le profit de la valorisation au marché est égal au flux monétaire net d'une position 100% financée par emprunt :

$$
\begin{aligned}
Flux\ monétaire\ net\ = & \left[+\ changement\ dans\ la\ capacité\ d'emprunt\right] \\
& -\ argent\ utilisé\ pour\ l'achat\ de\ nouvelles\ actions \\
& -\ intérêts\ sur\ emprunt
\end{aligned}
$$

$$MV_i - MV_{i-h} = \left[(\Delta_i S_i - C_i) - (\Delta_{i-h} S_{i-h} - C_{i-h})\right] - S_i(\Delta_i - \Delta_{i-h}) - MV_{i-h}(e^{rh} - 1)$$

*Ici, $h = 1/365$ dans nos exemples

Remarques :

- Si le flux monétaire net est positif, on peut empocher le montant.
- Si le flux monétaire net est négatif, il faut injecter des fonds
- Un portefeuille couvert qui ne requiert jamais d'injections de fonds est dit auto-financé

13.3.3. Couverture delta pour plusieurs jours

Les gains et pertes quotidiens résultent de l'effet combiné de trois éléments, toujours en conservant l'exemple de l'option d'achat présenté auparavant :

1. Le **gamma** : pour de gros mouvements de la valeur du sous-jacent S_t , le teneur de marché perd de l'argent. Pour de petits mouvements de S_t , le teneur de marché fait de l'argent.

   Plus le mouvement est grand, moins la couverture delta est adéquate. Du point de vue du teneur de marché, quand S_t augmente, Δ_C augmente et sa position courte dans l'option d'achat perd de la valeur (car l'option d'achat prend de la valeur pour le client qui a une position longue). La perte de valeur pour le teneur de marché dans sa position courte dans l'option d'achat est souvent plus grande que sa prise de valeur dans la proportion Δ_C d'action qu'il a acheté dans sa stratégie de couverture.

   À l'inverse, quand S_t diminue, Δ_C diminue et l'option d'achat vendue par le teneur de marché gagne de la valeur moins vite que la proportion Δ_C d'action que possède le teneur de marché n'en perd. *Il faut toujours conserver le point de vue du teneur de marché dans cette analyse*.

2. Le **theta** : l'option perd de la valeur avec le temps en absolu, ce qui est à l'avantage du teneur de marché (qui a une position courte dans l'option d'achat).

3. Les **intérêts** : il faut payer les intérêts sur les emprunts

Lecture complémentaire : tableau 13.2 et figure 13.2 (p. 387-388 *DM*).

- Jour i
- Prix d'une action : S_i
- Prix de 100 options : $100 * C_i$
- Delta de la position : $100 * \Delta_i$
- Valeur du portefeuille (investissement) $MV_i = 100 * \Delta_i S_i - 100 * C_i$
- Intérêts = $-MV_{i-h}\left(e^{\frac{0.08}{365}} - 1\right)$ avec $h = 1/365$
- Gain en capital = $100 * \Delta_{i-h}(S_i - S_{i-h}) - 100(C_i - C_{i-h})$
- Profit quotidien = gain en capital + intérêts

Remarque : on voit dans la figure 13.2 que de petits mouvements génèrent un profit au jour le jour mais de grands mouvements génèrent des pertes. Le graphique est inversé si les positions sont inversées.

13.3.4. Mouvement du sous-jacent dans un portefeuille autofinancé

Pour un mouvement d'un écart-type (σ) de la valeur du sous-jacent (hausse ou baisse), on obtiendra le tableau 13.3 (p. 389 DM). Ces mouvements ressemblent à ceux du modèle de l'arbre forward (arbre à terme) du chapitre 10.

Pour des déplacements d'exactement un écart-type, le portefeuille sera autofinancé (profit nul). Dans la figure 13.2, ceci représente les deux points où la courbe croise l'axe, pour entrainer un profit journalier nul (mouvement du sous-jacent modéré, variation ni trop haute ni trop basse). Autrement dit, tous les éléments de l'équation de profit s'annulent. Aucune injection de fonds, mais on ne retire rien non plus.

Ainsi, si $\boldsymbol{S_i = S_{i-1}e^{rh\pm\sigma\sqrt{h}}}$, le portefeuille delta-neutre sera autofinancé.

Rappel : il n'y a pas de dividende pour l'instant.

13.4. La mathématique de la couverture delta

Le delta (Δ), le gamma (Γ) et le theta (θ) influencent le profit sur une position couverte en delta (delta-neutre).

Remarque : les autres composantes (σ, r, δ) ne changent pas. On ne touche donc pas au vega, au rho ni au psi.

13.4.1. Utilisation du gamma pour approximer le changement dans le prix de l'option

En 13.2.3. on avait pris l'exemple suivant :

$$\underbrace{2.7804}_{\substack{\text{Prix du call}\\ \text{avec S = 40\$}}} + \underbrace{0.75}_{\substack{\text{Variation}\\ \text{prix de S}}} * \underbrace{0.5824}_{\Delta_C} + \underbrace{0.75^2}_{\substack{\text{Variation}\\ \text{prix de S}\\ \text{au carré}}} \underbrace{\left(\frac{0.0652}{2}\right)}_{\frac{\Gamma_C}{2}} = 3.2355\$$$

Et le véritable prix de l'option avec que le prix du sous-jacent soit passé de 40 à 40.75 est de 3.2352$.

Concrètement, l'approximation ***delta-gamma*** indique que (résultat des séries de Taylor) :

$$\underbrace{C(S_t)}_{\text{Prix du call}} + \underbrace{(S_{t+h} - S_t)}_{\substack{\text{Variation}\\ \text{prix du S-J}}} * \Delta_{C(S_t)} + \underbrace{(S_{t+h} - S_t)^2}_{\substack{\text{Carré de la variation}\\ \text{du prix du S-J}}} \frac{\Gamma_{C(S_t)}}{2} \cong C(S_{t+h})$$

Remarques :

- Ceci ignore l'effet du temps (l'impact de « h »)… et fonctionnera donc pour un h petit!
- L'approximation tient également pour une option de vente
- Le delta dépend du prix de l'action… et le gamma également

13.4.2. L'ajout du theta

On reprend l'équation en 13.4.1 en réécrivant :

$$C(S_{t+h}) = C(S_t + \epsilon) \cong \underbrace{C(S_t)}_{\text{Prix du call}} + \left(\underbrace{\epsilon}_{\substack{\text{Variation} \\ \text{prix du S-J}}} * \Delta_{C(S_t)}\right) + \left(\underbrace{\epsilon^2}_{\substack{\text{Carré de la} \\ \text{variation du} \\ \text{prix du S-J}}} \frac{\Gamma_{C(S_t)}}{2}\right)$$

On inclut dorénavant l'effet du passage du temps de t à t+h. Globalement, on aura :

$$C(S_{t+h}, T-t-h) \cong \underbrace{C(S_t, T-t)}_{\substack{\text{Prix du call} \\ \text{à } t}} + \left(\underbrace{\epsilon}_{\substack{\text{Variation} \\ \text{prix du S-J}}} * \Delta_{C(S_t, T-t)}\right) + \left(\underbrace{\epsilon^2}_{\substack{\text{Carré de la} \\ \text{variation du} \\ \text{prix du S-J}}} \frac{\Gamma_{C(S_t, T-t)}}{2}\right) + \boldsymbol{h\theta_{(S_t, T-t)}}$$

Cette formule fonctionnera bien quand les variations dans le prix du sous-jacent et la variation dans le temps (ϵ et h) sont petits.

Exemple tableau 13.4 : $C\left(S_{\frac{1}{365}} = 40{,}75, T-t = \frac{90}{365}\right) \cong \underbrace{3{,}2355}_{\substack{\text{Approx.} \\ \text{avec } \Delta \text{ et } \Gamma}} + \underbrace{(-0{,}0173)}_{\substack{\Theta \text{ pour} \\ 1 \text{ jour}}} = 3{,}2182$ (v.s. 3,2176)

$C\left(S_{\frac{1}{365}} = 39{,}25, T-t = \frac{90}{365}\right) \cong \underbrace{2{,}3619}_{\substack{\text{Approx.} \\ \text{avec } \Delta \text{ et } \Gamma}} + \underbrace{(-0{,}0173)}_{\substack{\Theta \text{ pour } 1 \\ \text{jour}}} = 2{,}3446$ (v.s. 2,3452)

Lecture complémentaire : p.393 DM (figure 13.3 et tableau 13.4)

13.4.3. Le profit du teneur de marché

La valeur de la position du teneur de marché à t est de $\Delta_{C(S_t,T-t)} * S_t - C(S_t, T-t)$.

Pour resimplifier la notation, on réécrira $\Delta_t * S_t - C(S_t)$

Le changement de valeur de t à t+h :

$$\underbrace{\Delta_t * (S_{t+h} - S_t)}_{\substack{Changement\ dans \\ valeur\ du\ S-J}} - \underbrace{[C(S_{t+h}) - C(S_t)]}_{\substack{Changement\ dans \\ valeur\ de\ l'option}} - \underbrace{[\Delta_t S_t - C(S_t)]\overbrace{(e^{rh} - 1)}^{\cong rh}}_{Intérêt}$$

$$= \Delta_t (S_{t+h} - S_t) - \left[\Delta_t (S_{t+h} - S_t) + \frac{1}{2}\Gamma_t (S_{t+h} - S_t)^2 + \Theta_t h\right] - [\Delta_t S_t - C(S_t)](e^{rh} - 1)$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\Gamma_t (S_{t+h} - S_t)^2 + \Theta_t h + [\Delta_t S_t - C(S_t)](e^{rh} - 1)\right]$$

C'est le profit du teneur de marché quand le prix passe de S_t à S_{t+h} dans un intervalle de temps de longueur h.

On peut décortiquer la dernière équation en trois composantes :

1. **Gamma :** $-\frac{1}{2}\Gamma_t (S_{t+h} - S_t)^2$
2. **Theta :** $-\Theta_t h \Rightarrow \Theta_t h \times 365$ selon la formule utilisée ...!
3. **Intérêts :** $-[\Delta_t S_t - C(S_t)](e^{rh} - 1)$

En situation de position courte sur une option d'achat (option d'achat vendue) et couverte, soit la position du teneur de marché dans notre exemple, l'effet du theta est positif et les deux autres sont négatifs.

<u>Remarque</u> : pour la position « globale » du teneur de marché dans cet exemple, c'est la magnitude de la variation du sous-jacent et non la direction qui compte, ce qui explique qu'on ne retrouve pas $(S_{t+h} - S_t)$ dans la formule mais plutôt $(S_{t+h} - S_t)^2$.

Lecture complémentaire : tableau 13.5 DM avec le profit pour différentes valeurs de $(S_{t+h} - S_t)$ tel qu'approximé en ***delta-gamma-theta***.

13.4.4. Mouvement d'un écart-type

On reprend l'exemple d'une variation d'un écart-type de la valeur du sous-jacent avec $(S_{t+h} - S_t)^2 = \epsilon^2 = \sigma^2 S_t^2 h$. Le profit sera :

$$-\left[\frac{1}{2}\Gamma_t \sigma^2 S_t^2 + \Theta_t\right]h - \left[\Delta_t S_t - C(S_t)\right]\underbrace{(e^{rh} - 1)}_{\cong rh \text{ selon le DM (formule 13.9)}} = 0 \text{ pour } \pm 1 \text{ É-T}$$

Remarques :

- Pour exactement un écart-type de variation, le profit devrait être approximativement nul
- De petits mouvements sont plus probables que de gros mouvements. Ainsi, en moyenne, le teneur de marché devrait souvent faire ses frais

13.5. L'analyse de Black-Scholes

On fera des liens entre la gestion des différents risques et l'évaluation des options.

13.5.1. Constat de Black-Scholes

Si une action bouge d'un écart-type, une position delta-neutre fera tout juste ses frais, si on tient compte des coûts de financement.

Supposons que le mouvement d'un écart-type se fasse chaque minute et que la couverture est révisée et rééquilibrée chaque minute. La position couverte devrait gagner la force d'intérêt sans risque.

En travaillant en continu et en réarrangeant l'équation (13.10 p.396 du DM en approximant $e^{rh} - 1 \cong rh$) :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \Gamma_t + r S_t \Delta_t + \Theta_t \cong r\,C(S_t)$$

ou $\Theta_t \times 365$ selon la formule utilisée

Il s'agit de l'équation de Black-Scholes pour caractériser la dynamique d'une option. On suppose encore que σ, r et δ ne changent pas. On ne touche donc pas au vega, au rho et au psi.

Le lien entre la couverture en delta-neutre et l'évaluation est l'une des plus importantes en finance.

13.5.2. Couverture delta-neutre pour les options américaines

Lecture complémentaire : p.396-397 DM

Pour résumer, l'équation précédente (équation 13.10 dans le livre de référence) ne tient que s'il n'est pas optimal d'exercer hâtivement l'option.

13.5.3. Fréquence du rééquilibrage du portefeuille

En pratique, les frais de transaction causent des frictions, ou autrement dit, le rééquilibrage du portefeuille peut être couteux à chaque fois que le delta change.

On peut mesurer l'effet d'un rééquilibrage moins fréquent (équation 13.11 du DM) :

$$R_{h,i} = \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \Gamma \left(x_i^2 - 1 \right) h$$

Avec x_i qui représente le nombre d'écart-types du déplacement de S et $R_{h,i}$ est le rendement de la période i, en supposant une position delta-neutre au départ, et h est le temps entre les ajustements dans le portefeuille. On présume que le teneur de marché a vendu une option.

$h = \frac{T}{n}$

Avec l'équation 13.12 du DM, on a :

h^2

$$Var[R_{h,i}] = \frac{1}{2} (S^2 \sigma^2 \Gamma \mathrm{h})^2$$

$\sum_{i=1}^{n} R_{h,i} \rightarrow V\left[\sum_{i=1}^{n} R_{h,i}\right] = n \cdot \left(\frac{T}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \Gamma$

Un ajustement plus fréquent tire profit de la diversification temporelle. Il réduit la variabilité. Cependant, la moyenne n'est théoriquement pas affectée. Par exemple, pour un rééquibrage journalier ou horaire :

① $$Var\left[R_{\frac{1}{365},1}\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{S^2 \sigma^2 \Gamma}{365} \right)^2$$

② $$Var\left[\sum_{i=1}^{24} R_{\frac{1}{365*24},1}\right] = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{2} \left(\frac{S^2 \sigma^2 \Gamma}{24 * 365} \right)^2 = \frac{Var\left[R_{\frac{1}{365},1}\right]}{24}$$

13.5.4. Couverture delta-neutre en pratique

La couverture delta-neutre ne suffit pas à éliminer le risque complètement. Il est possible de rendre une position gamma-neutre, mais cela requiert des produits dérivés. Il est possible de procéder à une réplication statique de l'option, une stratégie dans laquelle des options servent à couvrir des options.

Il est possible de se protéger contre de forts mouvements du sous-jacent en achetant de l'assurance, c'est-à-dire en achetant des options d'achat et de vente profondément hors du cours.

Il est possible de régler le problème en créant un nouveau produit dérivé, par exemple un swap de variance.

13.5.5. Gamma-neutre

Lecture complémentaire : p.399-402, tableau 13.6 et figure 13.4.

On regarde la couverture gamma-neutre et on reprend le tableau 13.6. On a $S = 40$, $\sigma = 0.3, r = 0.08, \delta = 0$.

	$Call\left(K = 40, t = \frac{3}{12}\right)$	$Call\left(K = 45, t = \frac{4}{12}\right)$	Achat 1,2408 Call(K = 45), Vente d'un Call(K = 40)
Prix (S)	2.7804	1.3584	-1.0993
Delta (Δ)	0.5825	0.3285	-0.1749
Gamma (Γ)	0.0651	0.0524	0
Vega (ν)	0.0781	0.0831	0.0250
Theta (θ)	-0.0173	-0.0129	0.0013
Rho (ρ)	0.0513	0.0389	-0.0013

Si on a une option vendue avec K = 40 et qu'on cherche à neutraliser le gamma :

$$-0,0651 \times 1 + 0,0524 \cdot n_c = 0 \Rightarrow n_c = 1,2408 \times Call(45, \tfrac{1}{3}) \text{ à acheter}$$

On cherche ensuite à neutraliser le delta :

$$\underbrace{-0,5825 \times 1}_{\text{Call (40) vendu}} + \underbrace{0,3285 \cdot 1,2408}_{\text{1,2408 Call(45) achete}} + n_s \times 1 \Rightarrow n_s = 0,1749 \text{ action à acheter}$$

En neutralisant le gamma, on améliore le profit… Pourquoi ne pas toujours le faire?

1. Il faut prendre position dans d'autres options, ce qui peut devenir complexe et comporte souvent des frais non-négligeables.
2. Les clients des teneurs de marché achètent des options qui ont généralement des gammas positifs (rappel, le gamma est positif pour les options d'achat et de vente). Ainsi, les teneurs de marchés ont des gammas négatifs en agrégé en contrepartie. Si un teneur de marché pouvait théoriquement chercher la neutralité en gamma, ils ne peuvent certainement pas tous l'être en même temps.

13.6. Tenue de marché en tant qu'assurance

Lecture complémentaire : p.402-403 DM

Si les teneurs de marché peuvent faire face à de grosses pertes, la tenue de marché a beaucoup en commun avec l'assurance.

13.6.1. Assurance

Les compagnies d'assurance tentent de mettre en commun des risques diversifiables. Dans le modèle classique, les risques sont indépendants.

Les compagnies d'assurances ont deux principales façons de s'assurer qu'elles peuvent payer les réclamations :

1. Capital
2. Réassurance

13.6.2. Teneurs de marché

Le capital est essentiel. Il y a un certain potentiel de diversification, mais un certain risque n'est pas diversifiable (notion de risque systémique).

La possibilité de réassurance est nécessairement limitée, à cause des positions « naturelles » des investisseurs.

→ limites à transférer le risque (où? À qui?)