ACT-2011
Hiver 2021

Chapitre 11

Évaluation des options par la méthode binomiale : sujets sélectionnés

Thomas Landry, M.Sc., ASA, AICA
École d'actuariat, Université Laval

Préface

Une partie de ce chapitre est inspiré des anciennes notes de cours montées par Claire Bilodeau. Ce chapitre se veut une suite directe du chapitre 10 dans lequel nous allons notamment étudier la levée hâtive, l'évaluation neutre au risque et l'utilisation de la loi lognormale plus en détails. Nous allons démontrer que les mesures dites neutres au risque sont cohérentes avec des méthodes plus traditionnelles d'actualisation de flux monétaires avec des taux d'intérêt qui reflètent implicitement le niveau de risque des flux en question.

11.1. Les implications de l'exercice hâtif

11.1.1 Analyse de l'exercice hâtif

Le détenteur de l'option l'exercera hâtivement si la valeur de l'exercice excède la valeur de l'option si celle-ci est conservée.

En levant l'option d'achat avant l'échéance, le détenteur :

- Reçoit l'action et ainsi les dividendes futurs sur l'action
- Paye le prix d'exercice avant l'échéance (intérêt sur le prix d'exercice)
- Perd l'assurance implicite à l'option d'achat (put implicite)

Le premier point encourage un exercice hâtif alors que les deux autres le découragent.

Illustration :

- Une option d'achat a un prix d'exercice de 100$,
- Le sous-jacent procure un taux de dividende de 5%,
- Le taux d'intérêt sans risque est de 5%.
- Si le sous-jacent a une valeur de 200$ et que l'échéance est dans un an alors la valeur actualisée des dividendes est d'un peu moins de 10$, ce qui est nettement supérieur à l'intérêt sur le prix d'exercice qu'on doit payer en plus en exerçant hâtivement l'option (environ 5$).

- Ainsi, l'exercice hâtif peut être avantageux ici.
- « Peut »… ? Oui, peut ! Car dans les faits, on perd l'assurance implicite (put implicite) de l'option d'achat. Et si le sous-jacent venait à baisser de prix, s'il tombait à 50$… ? Il est impossible de le revendre au prix d'exercice, car nous n'avons pas d'option de vente à ce prix, **ce qui aurait correspondu à l'option de vente implicite à l'option d'achat qui a été exercée plus tôt !**
- Il existe différentes façons pour exprimer l'option de vente implicite, le put implicite, ou encore « l'assurance implicite » à l'option d'achat, celle-ci en est une parmi tant d'autres.
- La probabilité que le prix de l'action redescende rapidement dépend de la volatilité du prix de l'action. C'est sur cette composante qu'on s'intéressera…

11.1.2. Au sujet de la volatilité du prix de l'action

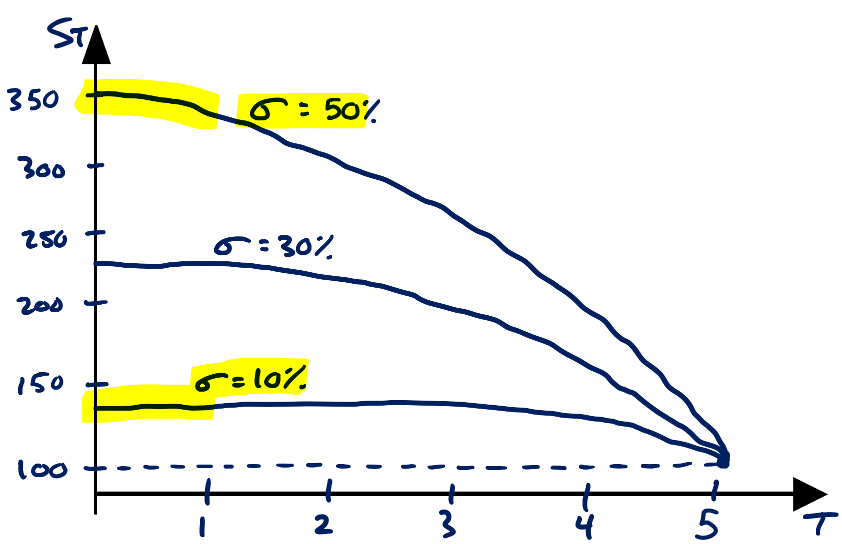
Si la volatilité était nulle, l'assurance n'aurait aucune valeur, logiquement. Plus la volatilité est élevée, plus les risques et les grandes variations de prix sont vraisemblables et plus l'assurance coutera chère (et plus le prix des options augmentera, si on considère les options comme des formes d'assurance).

À l'extrême, on aura que :

$$\sigma = 0 \Rightarrow \text{on exerce si } rk < \delta S \Rightarrow S > \frac{kr}{\delta}$$

On reprend les illustrations 11.1 et 11.2 du livre de référence avec le même contexte que celui de la dernière illustration et en utilisant un modèle binomial à 500 périodes sur 5 ans en présumant une volatilité (écart-type, le σ) annuelle de 10%, 30% et 50%. On obtient :

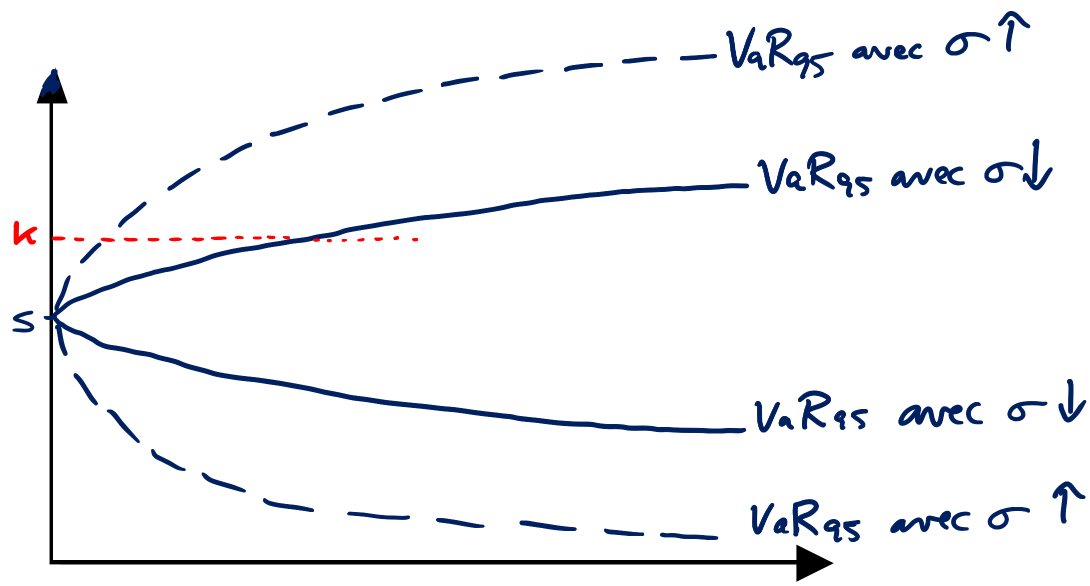
<u>Graphique 11.1</u> : limite de la valeur du sous-jacent pour qu'il puisse être profitable d'exercer l'option d'achat hâtivement :



Plus la volatilité est élevée, plus le sous-jacent pourra prendre un plus grand éventail de valeurs une fois rendu à l'échéance, et plus les options implicites (assurances implicites) aux options d'achat et de vente ont de la valeur. Le prix du sous-jacent devra donc faire en sorte que l'exercice hâtif soit particulièrement profitable et entraine une valeur d'exercice très élevée pour « contrecarrer » la perte de l'assurance implicite lors d'un exercice hâtif.

Rappel : au chapitre 9, on a vu un exemple avec un mouvement brownien qui illustrait que plus l'échéance était élevée, plus le prix de l'option était élevé, toute chose étant égale par ailleurs.

Dans les faits, on pourrait laisser l'échéance fixe et faire varier la volatilité de l'action, et donc l'étendue des valeurs que celle-ci peut prendre, et on obtiendrait un constat semblable, soit que le prix des options implicite est proportionnel au niveau de la volatilité.



On parlera maintenant d' « assurance implicite » au sens général et non pas de put implicite dans un call ou de call implicite dans un put, mais le concept reste le même (ceci servira à généraliser pour les deux cas).

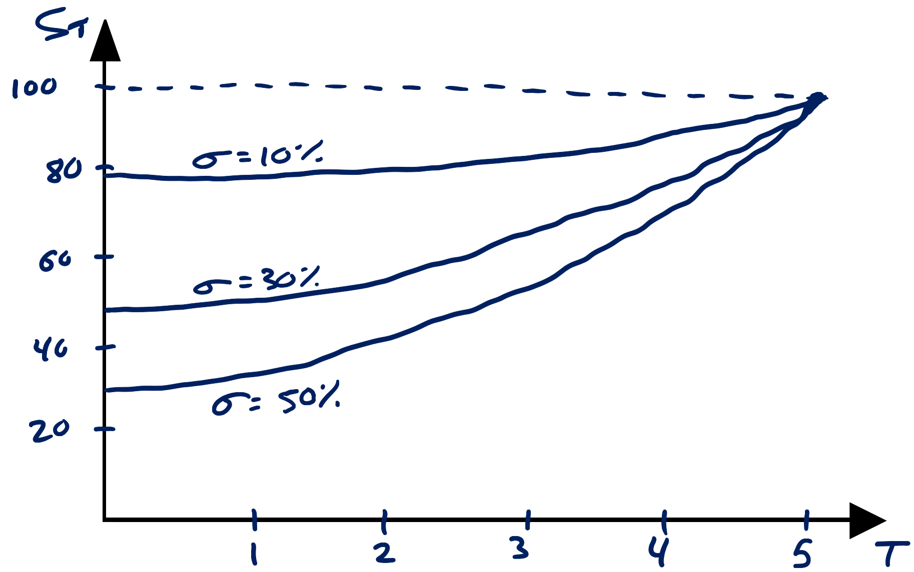
La valeur de l'assurance implicite diminue lorsqu'on se rapproche de l'échéance. En effet, plus on s'en rapproche, moins l'action aura le temps de changer de valeur dans le futur, et plus on aura une idée, ou encore une bonne approximation de la valeur finale de l'action rendu à l'échéance.

Nous avons beaucoup regardé le cas de l'option d'achat. Du côté de l'option de vente, lorsque l'option est exercée avant l'échéance, le détenteur :

- Reçoit le prix d'exercice avant l'échéance (gain en intérêt)
- Vend l'action et ne reçoit donc plus les dividendes sur l'action
- Perd l'assurance implicite (le call implicite) de l'option

Pour illustrer l'assurance implicite, imaginez que le titre augmentait de valeur de manière vertigineuse tout de suite après l'exercice de l'option de vente… trop tard pour racheter l'action maintenant, on a laissé partir un titre qui vaut dorénavant une fortune !!!

<u>Graphique 11.2</u> : limite de la valeur du sous-jacent pour qu'il puisse être profitable d'exercer l'option de vente hâtivement :



11.2. Les implications de l'évaluation neutre au risque

11.2.1. Neutralité versus aversion au risque

On reprend les résultats du chapitre 10 et on réécrit la valeur d'une option au sens global comme étant, dans le cas d'un modèle à une période de longueur h :

$$\theta = (\theta_u * p^* + \theta_d * (1 - p^*))e^{-rh}$$

Avec $p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}$ pour un exemple unitaire qui représente la probabilité dite « neutre au risque » d'une hausse de la valeur du sous-jacent. Les autres variables représentent encore le taux (force) neutre au risque et le taux de dividende, ici présumés composés continument. La lettre θ peut être remplacée par C (option d'achat, Call) ou P (option de vente, Put) selon le cas.

Toutes les valeurs actualisées qui déterminent la valeur théorique de l'option tiennent donc dans un environnement dit « neutre au risque ». En pratique, ce concept est abstrait et on pourrait s'attendre à prendre des « vraies » probabilités (normalement avec $p > p^*$) et une force d'intérêt qui exprimerait et reflèterait le risque inhérent au sous-jacent ($\mu > r$).

Dans les faits, les investisseurs ne sont pas exactement « neutres au risque ». Ils sont averses au risque, ce qui implique qu'ils désirent minimiser le risque et/ou exigeront un rendement supplémentaire pour la prise de risques. Bref, ils cherchent à maximiser leur ratio de Sharpe et ils exigent une prime de risque pour s'exposer au risque.

Un investisseur véritablement « neutre au risque » quant à lui, cherche à maximiser son rendement espéré mais sera indifférent face au niveau de la volatilité.

Ainsi, dans un environnement dit neutre au risque, on a :

$$p^* u S e^{\delta h} + (1-p^*) d S e^{\delta h} = e^{rh} S$$

Et la solution de cette équation nous donne la formule pour p^*. Dans cet environnement, on actualise tout avec la force d'intérêt r, et on évaluera les options comme si les investisseurs étaient neutres au risque, comme on le faisait au chapitre 10.

Cependant, les investisseurs ne sont pas neutres au risque ! On ne suppose donc pas que les actions et autres titres risqués s'accumulent au taux sans risque pour calculer l'espérance de leur taux de rendement.

11.2.2. Évaluation d'une option avec les « vraies » probabilités

On parlera parfois des probabilités « réelles » versus neutres au risque (*real world vs risk neutral*). L'évaluation neutre au risque est cohérente avec l'évaluation des options dans un environnement réel dans lequel on actualise les flux monétaires futures au taux d'intérêt qui prend en considération le risque du sous-jacent.

On suppose un taux de dividende nul et un rendement annuel composé continument (force de rendement annuelle) sur le sous-jacent de α. On a ainsi :

$$uS * p + dS * (1-p) = S * e^{\alpha h}$$

$$p = \frac{e^{\alpha h} - d}{u - d}$$

On aura donc $d < e^{\alpha h} < u$.

Remarque : attention, les valeurs de « u » et de « d » sont soit fournies, soit estimées en fonction d'un paramètre de volatilité tel que vu au chapitre 10 *à partir des mêmes formules neutres au risque* avec $u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}}$ et $d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}$ (voir exemple de calcul plus loin).

La valeur espérée de l'option à l'échéance sera, pour une option d'achat :

$$\theta_u * p + \theta_d * (1-p) = \theta_u * \frac{e^{\alpha h} - d}{u - d} + \theta_d * \frac{u - e^{\alpha h}}{u - d}$$

À ce stade, il nous reste à actualiser cette valeur à t = 0 pour connaitre le prix de cette option. Cependant, nous ne sommes plus dans un environnement neutre au risque est les probabilités utilisées expriment un risque dans le sous-jacent.

Question : devrait-on utiliser le taux de rendement espéré du sous-jacent, α ?

Réponse : Non ! Ce taux exprime le risque du sous-jacent, mais l'option est un investissement qui vient accentuer le risque de l'investissement (levier financier) et est donc plus risquée que le sous-jacent.

Solution : on définit un taux d'actualisation γ (Gamma) qui nous permettra d'actualiser la valeur à l'échéance dans le contexte d'une option dans un environnement de risque dit « réel ». On reprend les formules développées au chapitre 10 pour établir un portefeuille réplicatif. On avait établi que :

- On achète/vend Δ action (sous-jacent)
- On prête/emprunte B$ au taux sans risque
- Rappel : $Prix\ pour\ répliquer\ l'option = \theta = \Delta S + B$

Ainsi, le taux à utiliser pour actualiser la valeur à l'échéance de l'option sera le même que celui du portefeuille réplicatif. On peut ainsi établir un facteur d'actualisation qui représente une moyenne pondérée des facteurs du portefeuille réplicatif et on obtient :

$$e^{\gamma h} = \frac{\Delta S}{\Delta S + B} e^{\alpha h} + \frac{B}{\Delta S + B} e^{rh} = \frac{\Delta S e^{\alpha h} + B e^{rh}}{\theta}$$

Avec $\Delta = \left(\frac{\theta_u - \theta_d}{S(u-d)}\right)$ et $B = e^{-rh}\left(\frac{u*\theta_d - d*\theta_u}{u-d}\right)$

Et ainsi, on obtient :

$$\theta = e^{-\gamma h} \underbrace{\left(\Delta S e^{\alpha h} + B e^{rh}\right)}_{\text{Valeur à l'échéance espérée du portefeuille réplicatif}} = e^{-\gamma h} \underbrace{\left(\theta_u * \overbrace{\left(\frac{e^{\alpha h} - d}{u - d}\right)}^{p} + \theta_d * \overbrace{\left(\frac{u - e^{\alpha h}}{u - d}\right)}^{(1-p)}\right)}_{\text{Valeur à l'échéance de l'option}}$$

Ou encore :

$$\theta = \frac{\theta_u * \frac{e^{\alpha h} - d}{u - d} + \theta_d * \frac{u - e^{\alpha h}}{u - d}}{\left(\frac{\Delta S}{\Delta S + B} e^{\alpha h} + \frac{B}{\Delta S + B} e^{rh}\right)}$$

Et si on rajoutait des dividendes… ? Et si $\delta > 0$?

$$uS * p + dS * (1 - p) = S * e^{(\alpha - \delta)h}$$

$$p = \frac{e^{(\alpha - \delta)h} - d}{u - d}$$

Pour calculer le portefeuille réplicatif, on reprend des résultats du chapitre 10 ajustés avec des probabilités « réelles ». Avec un environnement neutre au risque, on avait au chapitre 10 :

$$\Delta = \left(\frac{C_u - C_d}{U - D}\right) e^{-\delta h} = \left(\frac{C_u - C_d}{S(u - d)}\right) e^{-\delta h}$$

Maintenant, on aura encore avec la nouvelle notation pour une option « quelconque » :

$$\Delta = \left(\frac{\theta_u - \theta_d}{S(u - d)}\right) e^{-\delta h}$$

$$B = e^{-rh} \left(\frac{U * \theta_d - D * \theta_u}{U - D}\right) = e^{-rh} \left(\frac{u * \theta_d - d * \theta_u}{u - d}\right)$$

<u>Remarque</u> : le calcul n'est pas changé pour l'emprunt/prêt B.

On reprend les mêmes calculs qu'à l'exemple précédent sans dividende avec quelques ajustements et on obtient :

$$e^{\gamma h} = \frac{\Delta S}{\Delta S + B} e^{\alpha h} + \frac{B}{\Delta S + B} e^{rh} = \frac{\Delta S e^{\alpha h} + B e^{rh}}{\theta}$$

<u>Rappel</u> : maintenant qu'on a rajouté des dividendes, le Δ est différent dans la formule !!! Sinon, la formule n'a pas changé en apparence.

Et ainsi, on obtient :

$$\theta = e^{-\gamma h} \underbrace{\left(\Delta S e^{\alpha h} + B e^{rh}\right)}_{\substack{\text{Valeur à l'échéance espérée} \\ \text{du portefeuille réplicatif}}} = e^{-\gamma h} \underbrace{\left(\theta_u * \overbrace{\left(\frac{e^{(\alpha-\delta)h} - d}{u-d}\right)}^{p} + \theta_d * \overbrace{\left(\frac{u - e^{(\alpha-\delta)h}}{u-d}\right)}^{1-p} \right)}_{\text{Valeur à l'échéance de l'option}}$$

Ou encore :

$$\theta = \frac{\theta_u * \dfrac{e^{(\alpha-\delta)h} - d}{u-d} + \theta_d * \dfrac{u - e^{(\alpha-\delta)h}}{u-d}}{\left(\dfrac{\Delta S}{\Delta S + B} e^{\alpha h} + \dfrac{\Delta S}{\Delta S + B} e^{rh}\right)}$$

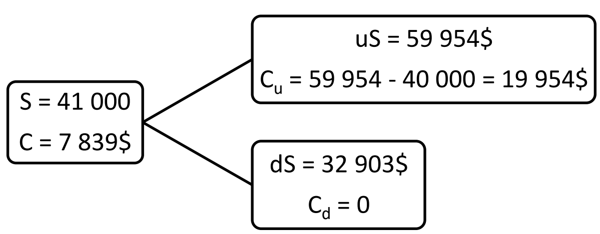
Avec $\Delta = \left(\frac{\theta_u - \theta_d}{S(u-d)}\right) e^{-\delta h}$ et $B = e^{-rh}\left(\frac{u*\theta_d - d*\theta_u}{u-d}\right)$

11.2.3. Exemples

Exemple (illustration 11.3 *DM*) : on a une force de rendement espéré de $\alpha = 15\%$ pour une action qui vaut initialement S = 41$ avec une volatilité $\sigma = 30\%$, un prix d'exercice pour une option d'achat européenne de K = 40$, une force d'intérêt sans risque de r = 8%, une période d'un an et un taux de dividende nul.

$$u = e^{(r-\delta)h + \sigma\sqrt{h}} = e^{(0.08-0)+0.3} = 1.4623$$

$$d = e^{(r-\delta)h - \sigma\sqrt{h}} = e^{(0.08-0)-0.3} = 0.8025$$



$$p = \frac{e^{(\alpha-\delta)h} - d}{u-d} = \frac{e^{0.15} - 0.8025}{1.4623 - 0.8025} = 0.5446$$

Valeur à l'échéance espérée :

$$0.5446 * 19\,954 + (1 - 0.5446) * 0 = 10\,867\$$$

$$\Delta = \left(\frac{\theta_u - \theta_d}{S(u-d)}\right) e^{-\delta h} = \left(\frac{19\,954}{59\,954 - 32\,903}\right) = 0.738$$

$$B \ = e^{-rh}\left(\frac{u * \theta_d - d * \theta_u}{u - d}\right) = e^{-0.08}\left(\frac{1.4623 * 0 - 0.8025 * 19\,954}{1.4623 - 0.8025}\right) = -22\,405$$

$$e^{\gamma h} = \frac{\Delta S}{\Delta S + B} e^{\alpha h} + \frac{B}{\Delta S + B} e^{rh}$$

$$= \frac{0.738 * 41\,000}{0.738 * 41\,000 + (-22\,405)} e^{0.15} + \frac{(-22\,405)}{0.738 * 41\,000 + (-22\,405)} e^{0.08}$$

$$= 1.386$$

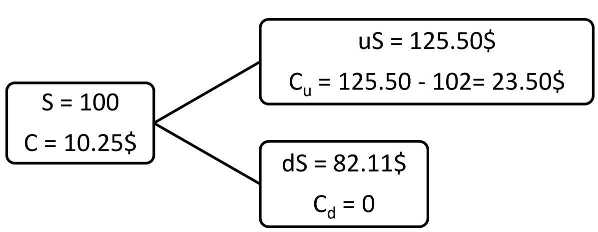
$$\text{Prix de l'option} = \frac{\text{valeur à l'échéance}}{1.386} = 10\,867 * e^{-\gamma h} = \ \mathbf{7\,839}\$$$

Ce qui implique que $\gamma = \ln(1{,}386) = 32{,}64\%$

Il est laissé en exercice de vérifier que le résultat est le même (valeur de l'option) avec les formules présentées au chapitre 10 dans un environnement neutre au risque.

<u>Autre exemple à une période</u> : S = 100, K = 102, r = 0,05, δ = 0,02, T = h = ½, $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.08$
Pour option d'achat avec mesure neutre au risque :

$$u = e^{(r-\delta)h + \sigma\sqrt{h}} = e^{\frac{(0.05-0.02)}{2} + 0.3\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1.255$$
$$d = e^{(r-\delta)h - \sigma\sqrt{h}} = e^{\frac{(0.05-0.02)}{2} - 0.3\sqrt{\frac{1}{2}}} = 0.8211$$



$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} = \frac{e^{\frac{(0.05-0.02)}{2}} - 0.8211}{1.255 - 0.8211} = 0.4472$$

Valeur à l'échéance espérée :

$$E[Valeur\ à\ l'échéance] = \underbrace{0.4472}_{p^*} * \overbrace{23.50}^{\theta_u = C_u} + \underbrace{(1-0.4472)}_{1-p^*} * \overbrace{0}^{\theta_d = C_d} = 10.51\$$$

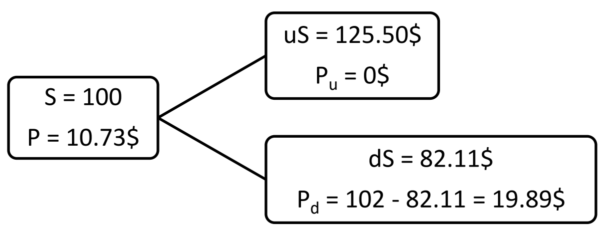
$$C = \theta = (p^*\theta_u + (1-p^*)\theta_d)e^{-rh} = 10.51 * e^{-\frac{0.05}{2}} = 10.25\$$$

$$\Delta = \left(\frac{\theta_u - \theta_d}{S(u-d)}\right)e^{-\delta h} = \left(\frac{23.50}{43.39}\right)e^{-\frac{0.02}{2}} = 0.5362$$

$$B = e^{-rh}\left(\frac{u * \theta_d - d * \theta_u}{u-d}\right) = e^{-\frac{0.05}{2}}\left(\frac{1.255 * 0 - 0.8211 * 23.50}{1.255 - 0.8211}\right) = -43.37\$$$

Pour l'option de vente avec mesure neutre au risque, en reprenant des résultats obtenus dans les calculs pour l'option d'achat :

$$u = 1.255\ , d = 0.8211$$



$$p^* = 0.4472$$

Valeur à l'échéance espérée :

$$E[Valeur\ à\ l'échéance] = \underbrace{0.4472}_{p^*} * \overbrace{0}^{\theta_u = P_u} + \underbrace{(1-0.4472)}_{1-p^*} * \overbrace{19.89}^{\theta_d = P_d} = 11\$$$

$$P = \theta = (p^*\theta_u + (1-p^*)\theta_d)e^{-rh} = 11 * e^{-\frac{0.05}{2}} = 10.725\$$$

$$\Delta = \left(\frac{\theta_u - \theta_d}{S(u-d)}\right)e^{-\delta h} = \left(\frac{-19.89}{43.39}\right)e^{-\frac{0.02}{2}} = -0.4539$$

$$B = e^{-rh}\left(\frac{u * \theta_d - d * \theta_u}{u-d}\right) = e^{-\frac{0.05}{2}}\left(\frac{1.255 * 19.89 - 0.8211 * 0}{1.255 - 0.8211}\right) = 56.11\$$$

Maintenant, recommençons avec des mesures « réelles » :

$$p = \frac{e^{(\alpha-\delta)h} - d}{u - d} = \frac{e^{\frac{(0.08-0.02)}{2}} - 0.8211}{1.255 - 0.8211} = 0.4825$$

$$E[Valeur\ à\ l'échéance\ Call] = \underbrace{0.4825}_{p} * \overbrace{23.50}^{\theta_u = P_u} + \underbrace{(1 - 0.4825)}_{1-p} * \overbrace{0}^{\theta_d = P_d} = 11.34\$$$

$$E[Valeur\ à\ l'échéance\ Put] = \underbrace{0.4825}_{p} * \overbrace{0}^{\theta_u = P_u} + \underbrace{(1 - 0.4825)}_{1-p} * \overbrace{19.89}^{\theta_d = P_d} = 10.29\$$$

<u>Question</u> : comment actualiser ces valeurs à l'échéance ?

<u>Réponse</u> : avec $e^{\gamma h}$

<u>Rappel</u> : on a que $e^{\gamma h} = \frac{\Delta S}{\Delta S + B} e^{\alpha h} + \frac{B}{\Delta S + B} e^{rh}$

$$Avec\ Call \Rightarrow\ e^{\gamma h} = \frac{\overbrace{0.5362}^{\Delta\ avec\ Call} * 100}{0.5362 * 100 + (-43.37)} e^{\frac{0.08}{2}} + \frac{(-43.37)}{0.5362 * 100 + (-43.37)} e^{\frac{0.05}{2}}$$

$$= 1.106384$$

$$\text{Prix de l'option d'achat} = \frac{\text{E[Valeur à l'échéance]}}{1.106384} = \frac{11.34}{1.106384} = \mathbf{10.25\$}$$

$$Avec\ Put \Rightarrow\ e^{\gamma h} = \frac{\overbrace{-0.4539}^{\Delta\ avec\ Put} * 100}{-0.4539 * 100 + 56.11} e^{\frac{0.08}{2}} + \frac{56.11}{-0.4539 * 100 + 56.11} e^{\frac{0.05}{2}}$$

$$= 0.9597$$

$$\text{Prix de l'option de vente} = \frac{\text{E[Valeur à l'échéance]}}{0.9597} = \frac{10.29}{0.9597} = \mathbf{10.725}$$

<u>Remarques</u> :

- Les produits dérivés peuvent augmenter ou diminuer l'exposition au risque. Lorsque l'exposition est augmentée/accentuée, on observe un taux d'actualisation plus élevé pour considérer le risque (dans le cas présent, l'option d'achat) et quand le risque est diminué/limité, on observa un taux d'actualisation plus faible (ici même un taux négatif dans le cas de l'option de vente).

- Attention, pour un modèle avec plusieurs périodes, les paramètres u, d, p et p^* restent les mêmes tout le long de l'arbre. Cependant, comme le portefeuille réplicatif change de nœud en nœud, les paramètres Δ et B changent de branche en branche, si bien que le taux γ changera également selon l'évolution du prix du sous-jacent dans le temps. L'exemple des pages 329 et 330 est laissé à faire en exercice dans le livre de référence à cet effet.
- Sans consigne spécifique, il est souvent plus simple et plus pratique d'utiliser l'évaluation dite neutre au risque. Cependant, il sera parfois impossible d'utiliser cette méthode, d'où la pertinence de la méthode d'évaluation avec mesures de probabilité réelles.

11.3. L'arbre binomial et la lognormalité

La méthode de l'arbre binomiale constitue une bonne illustration et une bonne façon pour produire une distribution représentative de l'évolution du sous-jacent sous certaines conditions. Cette méthode se base notamment.

11.3.1. Marche aléatoire / cheminement aléatoire

Un peu d'histoire…

Le modèle de cheminement aléatoire, ou parfois simplement appelé « marche aléatoire », est une théorie financière à la base de l'hypothèse de l'efficience des marchés financiers. Le postulat avait été fait initialement par Jules Regnault en 1863, puis repris par Louis Bachelier en 1900.

Selon cette théorie, les variations du prix d'une action sont réputées être indépendantes les unes des autres. Il s'agit d'une hypothèse de base, pas nécessairement vraie (quelques corrélations, phénomènes et tendances peuvent parfois être observées).

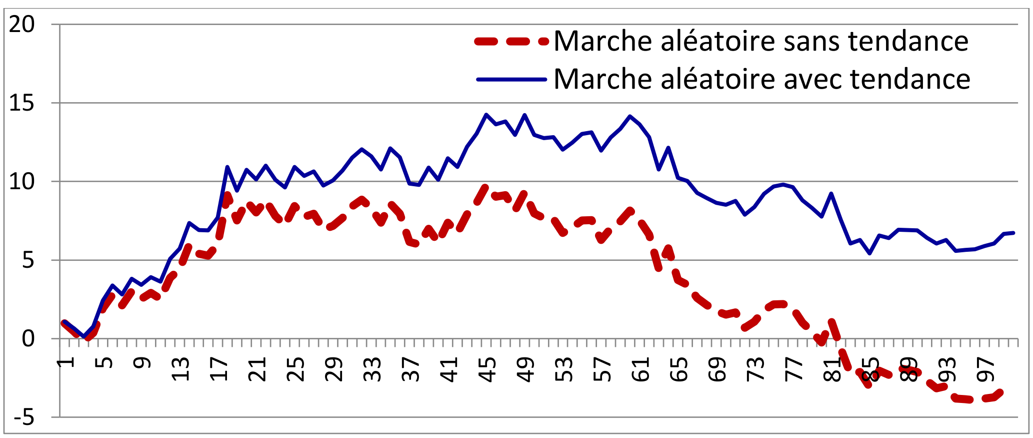
Par exemple, après des évènements « extrêmes », comme une crise financière, le marché a globalement tendance, dans l'histoire, à répondre d'une certaine façon après un « stress ». Après une année avec -50% en bourse, on s'attend à un rendement positif pendant la période de reprise qui suivra, par exemple. Sinon, l'indépendance se vérifie bien la majorité du temps.

À la base, un professeur d'économie à Princeton (Malkiel) a demandé à ses étudiants d'effectuer une série de pile ou face en simulant un titre boursier de 50$ qui montait et descendait de 0,50$ à chaque lancer (pile = +0,50$, face = - 0,50$). Malkiel a ensuite présenté le graphique a un "spécialiste" de la bourse de l'époque. Ce dernier lui recommande automatiquement d'acheter le stock, sans savoir que le graphique qui lui a été présenté était purement aléatoire avec une espérance clairement nulle. Cette étude a remis en doute la pertinence et l'expertise de plusieurs pseudo-spécialistes de l'époque qui prétendaient pouvoir prédire l'avenir en fonction du passé.

La théorie

L'indépendance des variations du prix d'une action peut s'expliquer de plusieurs façons. Par exemple :

- C'est l'arrivée de nouvelles informations (économiques, sectorielles, politiques…) qui fait bouger les titres. Cette information est toujours « soudaine » et imprévue
- Comme il y a beaucoup d'investisseurs et beaucoup de transactions, cette nouvelle information est reflétée instantanément dans les prix des actions
- Cette nouvelle information qui arrive est aléatoire (suit une marche aléatoire, « random walk »), et peut être positive comme négative
- => Les actions suivent une marche aléatoire
- Traduction : le passé n'est pas garant du futur.
- Il peut tout de même y avoir une tendance à long terme (augmentation à long terme des prix, en général). Ainsi, à la marche aléatoire vient généralement se joindre la tendance, qui fait que le prix des actions aura tendance à augmenter à long terme. Il est important de dissocier ces deux phénomènes. La tendance s'explique par le fait que le rendement des actions est en moyenne positif.



Mathématiquement, on dira que Y = variable aléatoire du résultat du lancer (pièce de monnaie, pile ou face, +1 ou -1). On aura :

$$Y = \begin{cases} +1 \; si \; face \\ -1 \; si \; pile \end{cases}$$

Supposons que la pièce de monnaie n'est pas biaisée (50% de probabilité) et donc que :

$$Pr[Y = 1] = Pr[Y = -1] = \frac{1}{2}$$

Soit Y_i le résultat du i$^{\text{ème}}$ lancer et Z_n le total cumulatif après n lancers. On aura :

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Plus n est élevé, plus l'étendue des valeurs possibles de Z_n sera élevé et plus $|Z_n|$ sera élevé. On aura que $E[Z_n{}^2] = Var[Z_n{}^2] = n$ puisque $E[Z_n] = 0$ (comme avec une loi normale) et Z_n représente la distance avec le point de départ.

<u>Preuve</u> :

$$E[Z_1{}^2] = E[Y_1{}^2] = \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2}(1)^2 = 1$$

$$E[Z_2{}^2] = \left(\frac{2}{4}\right)(0)^2 + \frac{1}{4}(2)^2 + \frac{1}{4}(2^2) = 2$$

$$\vdots$$

$$E[Z_n{}^2] = E[(Z_{n-1} + Y_n)^2] = E[Z_{n-1}{}^2 + 2Z_{n-1}Y_n + Y_n{}^2]$$

$$= \underbrace{E[Z_{n-1}{}^2]}_{n-1} + 2E[Z_{n-1}]\underbrace{E[Y_n]}_{0} + \underbrace{E[Y_n{}^2]}_{1} = n$$

11.3.2. Modélisation du prix d'une action avec une marche aléatoire

Dans les faits, la marche aléatoire peut fournir des prix négatifs. Également, l'amplitude ou encore l'étendue des résultats possibles devrait dépendre de la longueur de la période visée (h)et du prix d'achat initial (S). Finalement, les prix devraient augmenter en moyenne.

Le modèle binomiale traite tous ces enjeux et suppose que les rendements composés suivent une forme de marche aléatoire avec dérive (biais positif). On écrit ainsi le modèle binomial :

$$S_{t+h} = S_t e^{(r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}} \Leftrightarrow r_{t,t+h} = \ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right) = (r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}$$

$r_{t,t+h}$ a deux composantes :

- Une composante « certaine », soit $(r - \delta)h$
- Une composante « aléatoire », soit $\pm\sigma\sqrt{h}$

On répond à tous les critères avec le modèle binomial, c'est-à-dire :

1. Le titre aura toujours une valeur positive, même si les variations sont toutes négatives
2. L'ampleur et/ou l'étendue des valeurs possibles du titre dépend de h ($\pm\sigma\sqrt{h}$) et du prix initial S (variations proportionnelles à S)
3. La composante de dérive $(r - \delta)h$, associé à une paramétrisation adéquate (probabilités de hausse versus baisse) assure que le prix augmentera en moyenne (espérance d'incréments positive)

11.3.3. Lognormalité et modèle binomiale

L'arbre binomial constitue une forme d'approximation de la distribution lognormale. La distribution lognormale découle de l'hypothèse que les rendements composés (continument) du titre sont distribués normalement. Autrement dit, on suppose que :

$$\ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right) = r_{t,t+h} \sim N((r-\delta)h, \sigma^2 h) \rightarrow e^{r_{t,t+h}} \sim \log N(",")$$

Dans les faits, si on fixe T, alors on a que : *Rappel : $T = nh$

$\lim_{n\to\infty} r_{t,t+h} = \lim_{h\to 0} r_{t,t+h}$ suit une loi normale

Remarque : $t + nh = t + T$. Ainsi, le prix $S_{t,t+nh} = S_{t,t+T}$ suit une loi lognormale quand $n \to \infty$ ou quand $h \to 0$.

Revenons à un nombre n fini de périodes.

$$Pr\left[S_T = S_0 u^{n-i} d^i\right] = \binom{n}{i} (p^*)^{n-i} (1-p^*)^i$$

Remarque : il y a n+1 nœuds à la fin ! Le premier nœud correspond donc à i = 0 sous cette forme. Autrement, si i commence à 1, on devrait écrire $Pr\left[S_T = S_0 u^{n+1-i} d^{i-1}\right] = \binom{n}{i}(p^*)^{n-i}(1-p^*)^i$.

Plus n est élevé (plus le nombre de branches est élevé), plus la distribution se rapprochera de celle d'une loi lognormale, qui a pour domaine l'ensemble des réels positifs et qui a un coefficient d'asymétrie positif.

11.3.4. Arbres binomiaux alternatifs

La combinaison $u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}}$ et $d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}$ n'est pas la seule forme qui sert à construire un arbre binomial. L'approche d'évaluation neutre au risque peut être abordée différemment. On notera que pour $n < \infty$, les résultats seront différents mais asymptotiquement identiques (même distribution quand $n \to \infty$ ou $h \to 0$ ce qui signifie une infinité de branches).

Méthode de Cox-Ross-Rubinstein

La méthode la plus connue est probablement celle de ***Cox-Ross-Rubinstein*** avec $u = e^{+\sigma\sqrt{h}}$ et $d = e^{-\sigma\sqrt{h}}$. On aura ainsi que $ud = 1$. Il est toujours important que $\underbrace{e^{-\sigma\sqrt{h}}}_{d} < e^{(r-\delta)h} < \underbrace{e^{+\sigma\sqrt{h}}}_{u}$

pour exclure toute possibilité d'arbitrage. Ceci est généralement vérifié pour un h petit, mais l'arbre binomial des prix à terme (tel qu'introduit au chapitre 10, le modèle « standard ») règle ce problème par défaut.

Il est possible de recalculer de nouvelles probabilités neutres au risque et d'évaluer le prix d'une option avec les mêmes méthodes que celles vues précédemment avec un tel modèle.

<u>Arbre lognormal (Jarrow-Rudd)</u>

On pose :

$$u = e^{\left(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)h+\sigma\sqrt{h}}$$

$$d = e^{\left(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)h-\sigma\sqrt{h}}$$

Ce modèle entraine des prix différents, mais tend asymptotiquement encore vers des résultats similaires à ceux des précédents. À revoir dans un chapitre ultérieur.

Remarque : On a que $u/d = e^{2\sigma\sqrt{h}}$

11.3.5. Pertinence de la lognormalité

Les hypothèses suivantes sont vérifiées avec un modèle lognormal :

- La volatilité est réputée être constante
- Les grandes variations ne se produisent pas ponctuellement
- Les rendements composés constituent des incréments dits indépendants les uns des autres pour des périodes distinctes

Dans les faits, ces caractéristiques ne sont pas nécessairement réalistes, car en pratique on observe :

- Des périodes à volatilité variable (*volatility clustering*). Des modèles à hétéroscédasticité conditionnelle (*AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity ARCH*, *Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity GARCH,* etc) viennent corriger ce problème.
- Les variations peuvent provenir de chocs ponctuels à distributions asymétriques (à revoir)
- On observe souvent une persistance des rendements à court terme (corrélation positive) et des comportements cycliques (corrélation négative à long terme)

<u>Conclusion</u> : les modèles introduits jusqu'à présent constituent une base pour modéliser la dynamique de divers instruments financiers, mais des modèles plus raffinés sont souvent utilisés en pratique.

<u>Lecture complémentaire</u> : p.337-338 DM sur les modèles avec paiements discrets de dividendes. À noter que ce type de modèle n'est pas recombinant, et donc moins intéressant pour plusieurs périodes (voir illustration 11.9 p.338).