Chapitre 2

Axiomes de probabilité

Dans ce chapitre, on introduit le concept de "probabilité d'un événement" et on regarde comment ces probabilités peuvent être évaluées. Pour débuter, on doit définir les concepts d'espace échantillonal et d'événement.

2.1 Concepts de base

Définition 2.1 *Une **expérience aléatoire** est un processus (c'est-à-dire une suite d'actions conduisant à un but défini), motivé par l'étude d'un (ou de plusieurs) caractère sur une population donnée, tel qu'on ne peut prédire avec certitude le résultat de l'expérience mais uniquement l'ensemble de tous les résultats possibles.*

Exemple 2.2 *Lancer un dé régulier et observer le résultat obtenu.*

Exemple 2.3 *Dans un groupe de 100 assurés en assurance auto, observer le nombre d'accidents au cours d'une année.*

Définition 2.4 *Un **espace échantillonnal** est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. On le désigne généralement par Ω ou S ("sample space").*

Exemple 2.5 *Donner l'espace échantillonal des expériences suivantes: (a) Lancer 2 pièces de monnaie et observer les résultats. (b) Mesurer, en heure, la durée de vie d'une ampoule.*

Définition 2.6 *Un **événement** relié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble de l'espace échantillonnal Ω. (On désigne les événements par des lettres majuscules $A, B, C, ...$).*

Exemple 2.7 *Une expérience consiste à lancer un dé. L'événement E consiste à obtenir un nombre pair et l'événement F à avoir un nombre inférieur à 4. Définir l'espace échantillonal Ω et les sous-ensembles représentant les événements E et F.*

Définition 2.8 *L'événement correspondant à l'**union** de deux événements E et F, désigné par $E \cup F$, est l'ensemble des résultats qui sont dans E ou F ou dans E et F.*

Exemple 2.9 *Dans l'exemple 2.7, trouver $E \cup F$.*

Définition 2.10 *L'événement correspondant à l'union de n événements, désigné par $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$, est l'ensemble des résultats qui sont dans E_i pour **au moins** une valeur de i.*

Définition 2.11 *L'événement correspondant à l'**intersection** de deux événements E et F, désigné par $E \cap F$ (ou EF), est l'ensemble des résultats qui sont à la fois dans E et F.*

Exemple 2.12 *Dans l'exemple 2.7, trouver* $E \cap F$.

Définition 2.13 *L'événement correspondant à l'intersection de* n *événements, désigné par* $\bigcap_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n$, *est l'ensemble des résultats qui sont dans* ***tous*** *les événements* E_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Définition 2.14 *L'événement correspondant au* ***complément*** *de l'événement* E, *désigné par* E^c *(ou* $\overline{E}$, E'*), est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience qui ne sont pas dans* E.

Exemple 2.15 *Dans l'exemple 2.7, trouver* E^c.

Définition 2.16 *Si* ***tous*** *les résultats de l'événement* E *sont aussi dans* F, *on dit que* E *est* ***inclus*** *dans* F *et on le désigne par* $E \subset F$. *On dit que deux événements sont* ***égaux*** *ou* ***identiques*** *(c'est-à-dire* $E = F$*) si* $E \subset F$ ***et*** $F \subset E$.

Remarque 2.17 *On désigne par* $\varnothing$ *(ensemble vide) un événement qui ne peut se réaliser peu importe le résultat de l'expérience.*

Remarque 2.18 *On dit que* E *et* F *sont des événements mutuellement exclusifs si* $E \cap F = \varnothing$. *Par exemple, si* $E = \{nombre\ pair\}$ *et* $F = \{nombre\ impair\}$, *alors* $E \cap F = \varnothing$.

Remarque 2.19 $\Omega^c = \varnothing$.

Définition 2.20 *Soit* $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ *un ensemble de sous-ensembles non-vides de l'espace échantillonnal* Ω *d'une expérience. Si les événements* $E_1, E_2, ..., E_n$ *sont mutuellement exclusifs et que* $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$, *alors on dit que* $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ *forme une partition de* Ω.

2.2 Opérations sur les ensembles

Soit les n événements $E_1, E_2, ..., E_n$. On définit dans la présente section les opérations de base sur ces ensembles.

Proposition 2.21 ***(Commutativité)***

$$\begin{aligned} E_1 \cup E_2 &= E_2 \cup E_1 \\ E_1 \cap E_2 &= E_2 \cap E_1 \end{aligned}$$

Proposition 2.22 ***(Associativité)***

$$\begin{aligned} (E_1 \cup E_2) \cup E_3 &= E_1 \cup (E_2 \cup E_3) \\ (E_1 \cap E_2) \cap E_3 &= E_1 \cap (E_2 \cap E_3) \end{aligned}$$

Proposition 2.23 ***(Distributivité)***

$$\begin{aligned} (E_1 \cup E_2) \cap E_3 &= (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3) \\ (E_1 \cap E_2) \cup E_3 &= (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3) \end{aligned}$$

Proposition 2.24 ***(Loi de DeMorgan)***

$$\begin{aligned} (1) \quad \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^c &= \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c \\ (2) \quad \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i \right)^c &= \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c \end{aligned}$$

Preuve. On débute par montrer l'égalité (1) de gauche à droite. On suppose $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$. Alors, $x \notin \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$ et par conséquent $x \notin E_1$, $x \notin E_2$,..., $x \notin E_n$. Ceci conduit donc à $x \in E_1^c$, $x \in E_2^c$,..., $x \in E_n^c$ qui correspond à $x \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$. On poursuit en montrant l'égalité (1) de droite à gauche. Ainsi, on suppose $x \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$. Alors, $x \in E_1^c$, $x \in E_2^c$,..., $x \in E_n^c$ et donc $x \in E_i^c$, $\forall i$ ou de façon équivalente $x \notin E_i$, pour n'importe quel i. On a donc $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ et par conséquent $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$. On utilise l'égalité (1) pour démontrer l'égalité (2) comme suit:

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c\right)^c &= \bigcap_{i=1}^{n} (E_i^c)^c \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} E_i.\end{aligned}$$

On obtient donc $\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c$. ■

2.2.1 Axiomes de probabilité

Définition 2.25 ***(Intuitive)*** *La probabilité d'un événement relié à une expérience aléatoire est une mesure de la fréquence de réalisation de cet événement lorsque l'expérience est répétée un très grand nombre de fois* $(n \to \infty)$.

Définition 2.26 ***(Approche axiomatique)*** *Soit Ω un espace échantillonnal d'une expérience aléatoire. Supposons que pour chaque événement E de Ω, il existe un nombre $\Pr(E)$, qui est associé à E. On appelle $\Pr(E)$ la probabilité de l'événement E si celle-ci satisfait les axiomes suivants:*

1. $0 \leq \Pr(E) \leq 1$.
2. $\Pr(\Omega) = 1$.
3. Si $E_i \cap E_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors $\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(E_i)$.

Proposition 2.27

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

Proposition 2.28

$$\Pr(E^c) = 1 - \Pr(E).$$

Proposition 2.29

$$E \subset F \Rightarrow \Pr(E) \leq \Pr(F).$$

Proposition 2.30

$$\Pr(E \cup F) = \Pr(E) + \Pr(F) - \Pr(E \cap F)$$

Proposition 2.31 ***(Généralisation de la Proposition 2.30)***

$$\begin{aligned}\Pr(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) &= \sum_{i=1}^{n} \Pr(E_i) - \sum_{i_1<i_2} \Pr(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + ... + \\ &\quad (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<...<i_r} \Pr(E_{i_1}E_{i_2}...E_{i_r}) + ... + (-1)^{n+1} \Pr(E_1 E_2 ... E_n)\end{aligned}$$

où $\sum_{i_1<i_2<...<i_r}$ *est sur toutes les* $\binom{n}{r}$ *combinaisons de sous-ensembles possibles de taille r de* $\{1, 2, ..., n\}$. ***(voir Ross proposition 4.4 page 31).***

Cette dernière proposition stipule que la probabilité de l'union de n événements égale la somme des probabilités de chacun des n événements pris un à la fois, moins la somme des probabilités des événements pris deux à la fois, plus la somme des probabilités des événements pris trois à la fois, etc.

Remarque 2.32 *Pour $n = 3$, la Proposition 2.31 correspond à*

$$\begin{aligned}\Pr(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= \Pr(E_1) + \Pr(E_2) + \Pr(E_3) \\ &\quad - \Pr(E_1 \cap E_2) - \Pr(E_1 \cap E_3) - \Pr(E_2 \cap E_3) \\ &\quad + \Pr(E_1 \cap E_2 \cap E_3).\end{aligned}$$

Exemple 2.33 *Un certain type de voiture présente parfois deux vices de fabrication; on sait que 7% de ces voitures ont le premier défaut, 11% le deuxième défaut et 2% ont les deux défauts. Trouver la probabilité qu'une voiture de ce type soit exempte de défauts.*

2.2.2 Résultats équiprobables

Pour plusieurs expériences aléatoires, les différents résultats de l'espace échantillonnal ont tous la même chance de se réaliser (ex: lancer d'un dé). On considère un espace échantillonnal avec un nombre fini de résultats possibles $\Omega = \{1, 2, ..., N\}$ où l'on suppose

$$\Pr(\{1\}) = \Pr(\{2\}) = ... = \Pr(\{N\}).$$

Ceci implique, étant donné les axiomes 2 et 3 de la Définition 2.26, que

$$\Pr(\{i\}) = \frac{1}{N},\ i = 1, ..., N$$

car

$$\Pr(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{N} \Pr(\{i\}) = N \Pr(\{i\}).$$

On a donc de façon générale pour un événement E (qui est un sous-ensemble de Ω)

$$\Pr(E) = \frac{\text{Nombre de résultats dans } E}{\text{Nombre de résultats dans } \Omega}.$$

Ceci revient à dire que si l'on suppose que tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire ont la même chance de se réaliser, alors la probabilité de tout événement E est égale à la proportion du nombre de résultats dans l'espace échantillonnal qui sont inclus dans E.

Exemple 2.34 *Deux dés sont lancés. Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit égale à 7?*

Exemple 2.35 *On choisit au hasard un comité de 5 personnes à partir d'un groupe de 6 hommes et 9 femmes. Chaque personne a autant de chance d'être choisie. Quelle est la probabilité que le comité soit formé de 3 hommes et 2 femmes?*

Exemple 2.36 *On lance un dé 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 au moins une fois?*