ACT-1002 Exercices de dépannage

Ying He

Session : Hiver 2018

Examen 1

1.1 Plats Gastonomiques

Gaston Lagaffe aime bien cuisiner et il improvise tout le temps des nouvelles recettes. Pendant la fin de semaine, il a préparé 5 plats, soit : la morue aux fraises, les huîtres au chocolat, les crêpes « montgolfières », les œufs brouillés et les saucisses de Francfort. Fier de lui-même, Gaston les apporte au bureau pour faire les déguster par ses collègues : Prunelle, Fantasio, Jeanne, Boulier, Dupuis, De Maesmaker et Lebrac. Si une personne essaie un plat, elle doit le prendre au complet et les autres personnes ne peuvent pas y goûter. Comme il y a plus de personnes que les plats, tout le monde n'a pas de la chance d'essayer ces plats. Quel dommage !

1. Une personne peut prendre au maximum un plat. Combiens de possibilités y a-t-il ...
   (a) s'il n'y a aucune restriction ?
   (b) si son patron Prunelle se méfie de la morue aux fraises et veut absolument l'éviter ?
   (c) **et** si Jeanne veut les crêpes ou rien d'autre ?
2. Une personne peut prendre plusieurs plats. Combiens de possibilités y a-t-il ...
   (a) s'il n'y a aucune restriction ?
   (b) si Jeanne, admiratrice secrète de Gaston, veut au moins 2 plats ?
   (c) **et** si Prunelle veut toujours éviter la morue aux fraises ?

1.2 Jumeaux identiques

Dupont et Dupond sont deux jumeaux **entièrement identiques** qui aiment bien se costumer. Ce matin, dans leur garde-robe **commune**, il y a 4 chapeaux, 5 chemises, 6 paires de pantalons et 7 cravates. Les items d'une catégorie sont de couleurs différentes les uns et les autres. Dupont porte toujours une chemise, une paire de pantalons et une cravate ; tandis que Dupond est parfois indécis, il prend soit un chapeau, soit une cravate (mais pas les deux en même temps) en plus de la chemise et des pantalons.

a) Combiens y a-t-il de combinaisons possibles de vêtement pour les deux personnages ?
b) Dupond a un sens esthétique raffiné qui lui interdit de porter à la fois un chapeau noir et une chemise noire. Combiens y a-t-il de combinaisons possibles pour les deux personnages ?

Indice : bien déterminer si les Dupondt sont différenciables ou indissociables.

1.3 La Bibliothèque de Babel

L'écrivain Jorge Luis Borges a conçu une bibliothèque imaginaire dans un de ses contes, qu'il appelle la Bibliothèque de Babel. Cette bibliothèque est censée de contenir **tous les livres possibles**, c'est-à-dire les ouvrages déjà écrits par quelqu'un, ceux qui sont à venir et même ceux qui ne seront jamais écrits mais qui pourraient l'être. Bien sûr, on ne s'attend pas à ce que tous les livres soient « compréhensibles » parce qu'on peut trouver n'importe quelles combinaisons de caractères, par exemple : uuuuu. De plus, on s'impose quelques règles précises sur les formats des livres dans cette bibliothèque :

- Chaque livre contient 410 pages.
- Chaque page contient 40 **ou** 60 lignes.
- Chaque ligne contient 80 **ou** 100 caractères.
- Tous les livres sont écris dans un même alphabet qui contient 25 caractères : 22 lettres minuscules et 3 signes de ponctuation.
- Une page ne peut pas commencer par une ponctuation.

a) On s'intéresse à savoir combien de livres il y a dans cette bibliothèque. **Sans calculer le chiffre exact**, écrivez la formule pour y parvenir.

b) Comme Borges désapprouve un autre écrivain venu un peu après lui, Georges Perec, qui écrit des romans sans jamais utiliser la lettre « e », Borges exige que le « e » doit apparaître au moins une fois dans chaque livre. Maintenant, combien de livres y a-t-il dans la Bibliothèque de Babel ?

1.4 Portions magiques

Dans un petit village des Gaulois, afin de résister aux envasions des méchants Romains, le druide Panoramix a inventé une potion magique : quiconque en prend va devenir hyper fort. Ce jour-là, Panoramix a préparé un chaudron de potion magique qui contient l'équivalent de 18 portions. Combiens y a-t-il de façons de distribuer ces 18 portions indissociables parmi 5 villageois

a) pour que chacun devienne fort ?

b) **et** si un de ces villageois est Obélix, qui adore les potions et est naturellement très fort ?

c) s'il y n'a pas de restrictions de quantité pour chaque villageois ?

d) si Astérix, un de ces 5 villageois, veut prendre exactement 3 portions (pas de restrictions pour les autres) ?

e) si le Barde veut prendre au moins 2 portions pour se défendre et que le druide a découvert qu'une personne ne peut pas prendre plus que 16 portions, sinon il sentira le poisson pas frais ?

f) si Panoramix n'a pas besoin de distribuer toutes les portions ?

1.5 Un thé de fous

En se promenant au pays des merveilles, Alice arrive devant la maison du Lièvre de mars. Le Lièvre a invité cette journée-là le Chapelier, le Loir et six autres personnes mystérieuses pour une dégustation de thé. Comme Alice est aussi une amatrice de thé, elle s'invite et s'asseoit à la dernière place disponible. Combien de façons y a-t-il d'occuper les places d'une table ronde ...

a) pour que le Chapelier, le Lièvre et le Loir soient assis côte à côte ?

b) **et** que le Loir soit entre les deux autres ?

c) **et** en plus, ces trois personnages, trouvant qu'Alice manque de courtoisie, ne veulent pas qu'elle soit à côté d'eux ?

d) **et** en plus, deux personnes parmi les invités mystérieux sont parties temporairement et ont ainsi laissé leur place vide ?

e) Pendant la dégustation, la reine passe chez le Lièvre. Elle voudrait choisir quatre personnes autour de cette table (sur un total de dix) comme partenaire de croquet. Quelle est la probabilité qu'au moins trois des quatre personnes choisies soient côte à côte ?

1.6 Félix et les poissons

Pendant la fin de semaine, Félix aime bien aller pêcher au lac Cinquante-Poissons. Et comme son nom l'indique, il y a exactement 50 poissons dans le lac, qui se répartissent **également** en cinq espèces : saumons, truites, dorés, anguilles et esturgeons.

1. Pour bien protéger l'environnement, chaque fois que Félix attrape un poisson, il le remet à l'eau. Au bout d'une journée où Félix a attrapé cinq poissons, quelle est la probabilité que ...

   (a) les trois premiers sont des saumons, le quatrième une truite, et le cinquième un esturgeon ?

   (b) ce soient trois saumons, une truite et un esturgeon ?
   (c) trois des cinq poissons soient de la même espèce, et deux poissons appartenant à deux autres espèces ?
   (d) trois des cinq poissons soient de la même espèce ?
2. Un autre jour, Félix garde les poissons pour les offrir à ses trois neveux : Inky, Dinky et Winky. À la fin de cette journée fructueuse, Félix a attrapé cinq poissons. Quelle est la probabilité que ...
   (a) les trois premiers sont des saumons, le quatrième une truite, et le cinquième un esturgeon ?
   (b) ce soient trois saumons, une truite et un esturgeon ?
   (c) trois des cinq poissons soient de la même espèce, et deux poissons appartenant à deux autres espèces ?
   (d) trois des cinq poissons soient de la même espèce ?
3. Félix décide que le premier poisson qu'il attrape serait pour Inky, le deuxième pour Dinky, le troisième pour Winky, et le quatrième à nouveau pour Inky et ainsi de suite. Félix ramène 15 poissons chez lui. Quelle est la probabilité que...
   (a) ce soient cinq saumons, quatre truites, trois dorés, deux anguilles et un esturgeon ?
   (b) **et** que le deuxième poisson qu'Inky obtienne soit une truite ?
   (c) **et** que Dinky reçoive trois dorés ?

1.7 Musique Stochastique

Xenakis est un compositeur paresseux. Au lieu de composer par lui-même, il se sert d'un ordinateur pour générer de la musique de façon aléatoire. Sa pièce comporte 6 segments, d'une minute chacun et sera jouée par 4 instruments (piano, violon, flûte et triangle). Chaque instrument peut apparaître dans un seul segment et ses chances de figurer dans chacun sont égales. Cela permet de créer toutes sortes de musiques étranges ! Passionné par les probabilités, Xenakis se demande quelles sont les probabilités d'obtenir les chef-d'œuvres avec les critères suivants :

a) Le piano et le violon se font entendre dans le premier segment, la flûte dans le troisième et le triangle dans le quatrième.
b) Le premier segment met en vedette deux instruments, le troisième et le quatrième segments chacun un autre.

c) Deux instruments jouent en duo dans un même segment, et les deux autres instruments jouent en solo dans deux autres segments.

d) Deux instruments jouent en duo dans un même segment.

Finalement, Xenakis s'aperçoit qu'il est plus difficile de calculer les probabilités que de composer de la musique lui même. Pouvez-vous l'aider ?

1.8 Spip deteste les voyages

Spirou partira en voyage demain et il cherche son passeport ! Il est sûr à 80% que celui-ci se trouve dans un des quatre tiroirs de son bureau (autant de chance dans chacun). Selon son expérience, l'autre possibilité est que, Spip, son animal de compagnie l'a délibérément caché et l'a ainsi rendu définitivement introuvable. Au début, Spirou commence à fouiller dans les tiroirs tout en restant optimiste. Après avoir ouvert trois tiroirs et toujours sans succès, Spirou commence à perdre espoir de le retrouver. Expliquez pourquoi en utilisant les termes probabilistes.

1.9 Quel est le titre de ce problème ?

Afin de trouver un trésor, Raymond Smullyan se rend sur une île où il y a seulement deux types d'habitants : les Chevaliers et les Coquins. Ce qui les rend spéciaux est que les Chevaliers disent toujours la vérité et que les Coquins mentent toujours. Raymond sait qu'un tiers des habitants de l'île sont des Chevaliers, mais il n'y pas de signe qui permet de les reconnaître. Ce jour-là, il croise deux habitants, A et B. A lui dit : « Il y a un trésor sur cette île ». Ensuite, B dit : « Tu dois croire A car il est un Chevalier ». Quelle est donc la probabilité qu'il y a un trésor sur l'île ?

1.10 Quel est le titre de ce problème ? - Suite

Raymond fait un autre voyage et il se retrouve encore sur une île. Et devinez quoi ? Là aussi cette île est habitée au tiers par des Chevaliers et aux deux tiers par des Coquins. Quelle coïncidence ! Mais cette fois-ci, les Chevaliers ne sont pas complètement honnêtes et les Coquins ne sont pas absolument menteurs : un Coquin ment deux fois plus fréquemment qu'un Chevalier. Un habitant sympathique croisé par Raymond affirme qu'il y a un trésor sur cette île. Or, les recherches minutieuses de Raymond ne donnennt aucun résultat. Quelle est la probabilité que cet habitant sympathique soit un Chevalier ?

1.11 Les hommes dansants

Un client demande à Sherlock Holmes de résoudre une énigme : il s'agit deux messages composés des dessins de petits bonshommes qui dansent. Selon le client, chacun de ces messages représente une phrase et il faut décoder les deux phrases pour avoir l'information au complet. Comme Sherlock se sent un peu paresseux ce jour-là, il invite son frère Mycroft et son assistant Watson à l'aider. Chacun travaille de son côté et ils partagent leurs résultats à la fin. Pour qu'un message soit décodé, il suffit qu'un des trois trouve sa signification. L'ordre du décodage des messages n'est pas important, mais il faut les décoder tous les deux pour résoudre l'énigme. Pour chaque message, Sherlock juge que lui-même a une chance sur deux de le décoder, tandis que son frère, légèrement plus intelligent que lui, aura trois chances sur cinq. Quant à Watson, Sherlock ne compte pas trop sur lui : il aura seulement une chance sur cinq.

a) Quelle est la probabilité que l'énigme soit résolue ?

b) Malgré leurs efforts combinés, ils n'ont pas pu trouver la solution à la fin. Quelle est la probabilité qu'ils soit parvenus à décoder le premier message ?

1.12 Devant la loi

Samedi après-midi, Franz s'installe sur son balcon et commence à lire un roman qui s'appelle « Le Procès ». Voici l'histoire : Un homme de la campagne arrive devant une porte qui lui donnerait accès à la loi. Or, ce n'est pas si facile ! Un gardien redoutable apparaît et l'empêche d'entrer sauf si l'homme réussit à le vaincre. Le gardien révèle aussi qu'il y a deux autres portes derrière et que chacune a un gardien encore plus terrible que le précédent. Il faut réussir à passer la première porte pour atteindre la deuxième, et ainsi de suite. Une fois la troisième porte traversée, l'homme de la campagne pourrait enfin accéder à la loi.
Dans le chapitre suivant, Franz apprend que l'homme de la campagne a 50% de chance de l'emporter contre le premier gardien, 40% contre le deuxième, et 30% contre le dernier, qui est le plus terrible de tous. Trop curieux de connaître le destin du personnage, Franz a sauté à la dernière page du roman et il a su que l'homme n'a pas pu avoir accès à la loi. Quelle est la probabilité que le personnage a franchi la deuxième porte ?

1.13 Un coup de dés jamais n'abolira le hasard

On lance simultanément 7 dés standards.

a) On n'est pas capable de distinguer les dés. Donc on ne s'intéresse qu'à la combinaison des chiffres obtenus, et non aux dés sur lesquels les chiffres apparaissent. Combien de possibilités y a-t-il ?

b) Quelle est la probabilité que le plus grand nombre d'occurence d'un chiffre donné soit 3 ?

c) Soit X_i la variable aléatoire représentant le nombre de fois où le chiffre i est obtenu. On s'intéresse au comportement de : $\max(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6)$. Trouver la fonction de masse de probabilité de la variable aléatoire en question.

d) Trouver la fonction de répartition et en tracer le graphique.

e) Trouver la fonction de quantile et en tracer le graphique. Quelle est sa médiane ?

f) Calculer son espérance et sa variance.

g) On appelle la variable en b) X. Trouver E $[\mathrm{X}|\mathrm{X}\geq 5]$

h) On introduit deux mesures de risque importantes en actuariat : Value at Risk (VaR) et Tail value of Risk (TVaR). Leurs définitions sont comme suit :

$$\mathrm{VaR}_\kappa(\mathrm{X}) = \mathrm{F}_X^{-1}(\kappa)$$

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(\mathrm{X}) = \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa}$$

Calculer $\mathrm{TVaR}_{0.9}(\mathrm{X})$.
Indice : On commence par trouver la valeur de $\mathrm{VaR}_{0.9}(\mathrm{X})$.

Examen 2

2.1

Soit X une variable aléatoire telle que

$$P_X(t) = (0.3t + 0.4t^3 + 0.3)^2$$

a) Calculer $E[X]$

b) Calculer $P(|2X-6| > 4)$ et $P(|X-1| \leq 3)$

c) Calculer $E[X|X < 4]$

d) Calculer $E[max(X-2;0)]$ et $E[min(X;2)]$

e) Calculer $Var(X^3 + 2X + 9)$

2.2 L'épreuve des preuves

a) Soit N une variable aléatoire discrète non négative, montrer que

$$\text{E[min(N,d)]} = \sum_{i=0}^{d-1} P(N > i), \text{ d} \in \{1, 2, 3...\}.$$

Indice : se référer à l'exercice théorique 4.4 du Ross.

b) À partir de a), trouver l'expression de la fonction stop-loss de N, E[max(N-d,0)]

c) À partir de b), refaire l'exercice 2.1 d).

2.3

Soit X une variable aléatoire discrète telle que

$$E[max(X-2;0)] - E[max(X-3;0)] = 0.64$$

$$E[max(X-3;0)] - E[max(X-4;0)] = 0.4$$

Calculer P(X = 3)

2.4 Bi-binomial

Soit X une variable aléatoire telle que X $\sim$ Bin (n, p), n $\geq$ 2.

a) Démontrer que

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}^k] = \mathrm{np}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\,\mathrm{E}[\mathrm{Y}^i]$$

dont Y $\sim$ Bin (n-1, p).

b) Si n = 5, p = 0.4, calculer le coefficient d'asymétrie de X.

2.5 L'actuariat au service des paresseux

Arthur est un actuaire qui aime jouer au Pokémon Go, mais il est assez paresseux et ne veut pas trop faire d'efforts. Chaque jour, il essaie d'attraper des Pokémons pendant son trajet entre chez lui, sur la rue Cartier, et son bureau sur la Grande-Allée. Selon ses hypothèses, le nombre de Pokémon apparus quotidiennement dans son chemin suit une loi de Poisson de moyenne 3. Pour chaque Pokémon apparu, il a 80% de chances de l'attraper. Arthur veut calculer la probabilité qu'il obtienne moins de deux Pokémons au cours d'une journée. Modélisez cette probabilité selon ces hypothèses d'Arthur.

2.6 Zazie dans le métro

Zazie, petite fille venue de la campagne, séjourne chez son oncle Gabriel à Paris. Parmi les milliers d'attractions touristiques, deux la fascine particulièrement : la Tour Eiffel et Notre-Dame. Selon elle, chacun mérite plusieurs visites. À partir de la station de métro Montparnasse proche de chez Gabriel, la ligne 6 l'amènerait à la Tour tandis que la ligne 4 se dirige vers la cathédrale. Zazie arrive à la station aléatoirement entre 9 heures et 10 heures du matin. Ce qui complique son projet, c'est qu'une journée sur dix le métro est complètement en grève. Alors, pas de visite ces jours-là ! Cette semaine, l'horaire du train est le suivant :

Ligne	Horaire
4	9 :02 9 :09 9 :12 9 :19 9 :22 9 :29 9 :32 9 :39 9 :42 9 :49 9 :52 9 :59
6	9 :07 9 :17 9 :27 9 :37 9 :47 9 :57

a) En entrant dans la station, Zazie consulte l'horaire pour les dix prochaines minutes et elle a autant de chances de choisir chacun des trains qui passeront pendant cette période. Quelle est la destination que Zazie a le plus de chances d'atteindre selon ce système ?

b) Si elle décide de prendre le premier train qui passera quelle que soit sa destination, où a-t-elle le plus de chances de se retrouver ?

Pour les calculs suivants, utilisez le système décrit en b).

c) Soit X, le nombre de voyages en métro nécessaire pour que Zazie réussisse à se rendre à la Tour, trouvez $E[X|X>1]$.

d) Zazie est allée à Notre-Dame pour la deuxième fois lors de sa cinquième sortie. Quelle est la probabilité qu'elle réussisse à se rendre à la cathédrale à sa première sortie ?

e) Combiens de sorties Zazie doit-elle faire pour que la probabilité de se rendre à la Tour au moins deux fois soit d'au moins 70 % ?

2.7 Rosencrantz and Guildenstern are dead

La grande préoccupation pour Rosencrantz et Guildenstern dans la vie, est de ne rien faire d'autre que lancer des pièces de monnaie et de prédire les résultats. Au moment où commence ce problème, Rosencrantz a cinq pièces dans chacune des poches de son pantalon, il en sort deux d'une même poche au hasard, les lance l'une après l'autre, et laisse Guildenstern deviner si c'est pile ou face. Or, ce que Guildenstern ne sait pas, est que Rosencrantz a caché deux pièces truquées qui ont seulement des côtés face dans la poche droite. Il croit naïvement que son ami joue le jeu de façon honnête. Si les résultats des deux pièces sont deux faces, quelle est la probabilité que Rosencrantz ait triché (en supposant qu'il a autant de chance de choisir une poche que l'autre) ?

2.8 Chat de Schrödinger

Schrödinger, physicien et philosophe, a proposé l'expérience suivante : on enferme un chat dans une boîte avec un dispositif qui tue l'animal dès qu'il détecte la désintégration d'**un** atome d'un corps radioactif. 30 minutes après le début de l'expérience, Schrödinger se demande si le chat est encore vivant, mais il prétend qu'il est impossible de dire l'état du chat tant qu'on n'a pas ouvert la boîte. Or, c'est uniquement parce que Schrödinger n'est pas un spécialiste des probabilités qu'il n'arrive pas à résoudre son problème. Pouvez-vous l'aider en trouvant une idée approximative sur l'état du chat ?

a) On sait que le corps radioactif que Schrödinger utilise contient un atome et que le temps pour qu'il se désintègre suit une loi exponentielle avec une moyenne de 45 minutes. Trouvez la médiane de la durée de vie (en heures) du chat.

b) Quelle est la médiane de la durée de vie du chat (en heures) si Schrödinger est sûr qu'il est encore vivant après 15 minutes ?

c) Si le corps radioactif contient plutôt cinq atomes, quel est état du chat après 30 minutes ?

d) S'il y a 20 atomes dans la boîte (pauvre petit chat), quelle est probabilité qu'au moins la moitié sera désintégrée au bout d'une demie heure ? Utiliser l'approximation normale.

e) On s'intéresse à modéliser la variable aléatoire Y, qui représente la racine carrée du temps de désintégration d'un atome. Trouver la fonction de densité de Y.

f) Calculer $\mathrm{F}_Y^{-1}(0.9)$

2.9 Arsène Lupin, gentleman-cambrioleur

Le détective Dupin est en train d'analyser le dossier criminel du célèbre Arsène Lupin, de manière actuarielle. D'après les statistiques, la perte monétaire (en millions) subie lors d'un vol de Lupin est une variable aléatoire X qui suit une certaine loi de probabilité dont la fonction génératrice des moments est

$$\frac{0.03125}{(0.5-t)^5}$$

a) Trouver la probabilité que Lupin dévalise plus que 20 millions lors de son prochain vol.

b) Calculer $\mathrm{Var}(X^2+1)$

2.10 L'épreuve des preuves (2)

a) Soit X une variable aléatoire continue non négative, montrer que

$$\mathrm{E[min(X,d)]} = \int_0^d (1-F_X(x))dx,\ \mathrm{d}>0$$

b) À partir de a), trouver l'expression de la fonction stop-loss de X, E[max(X-d,0)]

c) À partir de b), refaire l'exemple 5.79 dans les notes du cours.

Examen 3

3.1 Un peu de maths dans la vie ...

Soit le vecteur aléatoire (X, Y) avec fonction de densité de probabilité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = c \times 1_{\{0 \leq x \leq \frac{3}{2},\ |x-1| \leq y \leq 1\}}$$

a) Trouver la valeur de c.

b) Calculer $F_{X,Y}(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), F_{X,Y}(\frac{1}{2}, 3), F_{X,Y}(2, \frac{3}{4})$

   Comparer avec Exemple **6.18 a)** dans les notes du cours.

c) Trouver les fonctions de densité de probabilité marginale de X.

d) Calculer Cov(X,Y).

e) Calculer $f_{X|Y}(x|y)$.

f) Calculer $E[X - Y|Y = \frac{3}{4}]$.

g) Calculer $E[X - Y|Y < \frac{3}{4}]$.

D'autres exercices similaires :

1. Exemples 6.24, 6.31, 6.36, 6.41 dans les notes du cours
2. Exercices de dépannage de Jérémie : 3.3 et 3.4
3. Exercices de Marie-Pier : 30, 36, 39

3.2 Analyse probabiliste des risques académiques

Selon une étude scientifique, l'espérance de la note obtenue pour le cours de probabilité pour un étudiant en actuariat est proportionnelle au temps consacré aux études. Pour ceux qui étudient deux heures de probabilité par jour, leur note obéit à une loi normale de paramètres $(\mu,\sigma) = (70{,}10)$; pour ceux qui étudient seulement une heure par jour, la note obéit plutôt à une loi normale de paramètres $(\mu,\sigma) = (55{,}20)$. Et si quelqu'un n'étudie presque jamais, la note obéit à une loi normale de paramètres $(\mu,\sigma) = (30{,}10)$. Une certaine année (qui n'est pas 2017), on découvre que 30% des étudiants de la classe sont très travaillants, 45% sont moyennement sérieux ; tandis que les autres aiment plutôt faire le party. Calculer l'espérance et la variance de la note obtenue par un étudiant quelconque.

3.3 En attendant Godot

À 7 heures du soir, quatre personnes, Vladimir, Estragon, Lucky et Pozzo, se dirigent chacun vers un point de rencontre sur une route de campagne où Godot est censé les rejoindre. Or, Godot ne peut pas venir ce jour-là, il envoie un petit garçon pour prévenir les autres. Si l'une des quatre personnes arrive au lieu de rencontre avant le petit garçon, elle sera obligée d'attendre Godot dans l'incertitude ; ceux qui arrivent plus tard partent tout de suite car ils savent que c'est inutile d'attendre. Supposons que chaque personne a une probabilité P d'arriver avant le petit garçon où P obéit à une loi bêta de paramètres ($\alpha = 2$, $\beta = 8$). Évaluer l'espérance et la variance du nombre de personnes qui attendront Godot.

3.4 En attendant Godot (2)

Recalculer la question précédente en supposant que les temps d'arrivée des quatre personnes sont des variables aléatoires exponentielles indépendantes avec moyenne 1 (en heure) et que le petit garçon arrive sur place aléatoirement entre 7 heures et 8 heures.

Réponses

1.1

1. a) 2520
   b) 2160
   c) 900
2. a) 16807
   b) 2551
   c) 2310

1.2

a) 29400

b) 28560

1.3

a) $(22*25^{40*80-1})^{410}+(22*25^{40*100-1})^{410}+(22*25^{60*80-1})^{410}+(22*25^{60*100-1})^{410}$

b) a) - $(21*24^{40*80-1})^{410}$ - $(21*24^{40*100-1})^{410}$ - $(21*24^{60*80-1})^{410}$ - $(21*24^{60*100-1})^{410}$

1.4

a) 2380

b) 3060

c) 7315

d) 816

e) 4840

f) 33649

1.5

a) 30240

b) 10080

c) 7200

d) 3600

e) $\frac{2}{7}$

1.6

1. a) 0.00032

   b) 0.0064

   c) 0.192

   d) 0.256

2. a) 0.0002831845

   b) 0.00566369

   c) 0.1699107

   d) 0.2208839

3. a) 0.001269612

   b) 0.0003385632

   c) 0.000009301186

1.7

a) 0.0007716049

b) 0.009259259

c) 0.5555556

d) 0.625

1.9 0.2

1.10 0.2

1.11

a) 0.7056

b) 0.4565217

1.12 $\frac{7}{47}$

1.13

a) 792
b) 0.4350995
c)
d)
e) 3
f) 2.659508, 0.4890463
g) 5.065954
h) 4.128172

2.1

a) 3
b) 0.6 et 0.25
c) 1.8
d) 1.36 et 1.64
e) 5830.65

2.3 0.24

2.4 0.1825742

2.5 0.308441

2.6

a) Notre Dame
b) Autant de chance pour les deux endroits
c) 3
d) $\frac{1}{4}$
e) 5

2.7 0.6552

2.8

a) 0.51986

b) 0.76986

c) P(le chat soit vivant) = 0.03567

d) 0.5398

e)

f) 1.31413

2.9

a) 0.02925269

b) 12480

3.1

a) $\frac{8}{7}$

b) $\frac{1}{28}, \frac{1}{7}, \frac{17}{28}$

c)

d) -0.01913265

e)

f) $\frac{1}{8}$

g) 0.4755

3.2

a) 53.25

b) 455.6875

3.3

a) 0.8

b) 0.8145455

3.4

a) 1.471518

b) 1.323248