| Université Laval | Examen partiel traditionnel |
|---|---|
| Faculté des Sciences et de Génie | Hiver 2017 |
| École d'actuariat | Date: 22 février 2017 |

# Act-2001 Introduction à l'actuariat 2

Professeur: Etienne Marceau

| **Nom de famille de l'étudiant** | **Prénom de l'étudiant** | **Matricule** |
|---|---|---|
| | | |

- L'examen contient 12 questions à développement.
- Le total des points est de **110 points**.
- La durée est de 170 minutes.
- Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.
- Veuillez écrire vos réponses dans le cahier de réponse seulement.
- Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.
- Veuillez retourner le présent cahier, les annexes et le papier brouillon à la fin de l'examen.

| **Questions** | **Points obtenus** | **Points** |
|---|---|---|
| 1 | | 10 |
| 2 | | 12 |
| 3 | | 8 |
| 4 | | 12 |
| 5 | | 14 |
| 6 | | 12 |
| 7 | | 8 |
| 8 | | 8 |
| 9 | | 8 |
| 10 | | 8 |
| 11 | | 8 |
| 12 | | 12 |
| **Total** | | **110 (bonus = 10pts)** |

1. **(10 points).** Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim Pareto\,(1.2, 20)$ et $X_2 \sim Pareto\,(1.3, 30)$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.
On fournit les quantités suivantes :

$$\theta_1 = \Pr(S > 60), \quad \theta_2 = E\left[\mathrm{e}^{0.001S}\right] \quad \text{et} \quad \theta_3 = E\left[\mathrm{e}^{-0.001S}\right].$$

On fournit ci-dessous des réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ du couple de v.a. i.i.d. $(U_1, U_2)$ ($U_1 \sim U_2 \sim U(0,1)$), des réalisations de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ du couple $(X_1, X_2)$ et des réalisations $S^{(j)}$ de $S$ :

| $j$ | $U_1^{(j)}$ | $U_2^{(j)}$ | $X_1^{(j)}$ | $X_2^{(j)}$ | $S^{(j)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.4665 | 0.5616 | | | |
| 2 | | | 1.6670 | 399.8622 | 401.5292 |
| 3 | | | 2.5540 | 39.2601 | 41.8141 |
| 4 | | | 21.2087 | 30.7173 | 51.9260 |
| 5 | | | 74.5700 | 5.2724 | 79.8424 |

**Questions :**

(a) **(4 points).** Calculer la réalisation $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$ et $S^{(1)}$.

(b) **(4 points).** Seulement 2 parmi les 3 quantités $\theta_1$, $\theta_2$ et $\theta_3$ peuvent être évaluées.

i. Appliquer la méthode Monte-Carlo avec les 5 réalisations de $S$ pour évaluer approximativement ces 2 quantités.

ii. Expliquer clairement pourquoi la 3e quantité ne peut pas être évaluée.

(c) **(2 points).** Calculer la réalisation $\left(U_1^{(5)}, U_2^{(5)}\right)$.

**Solution :**

(a) **(4 points).** Calculer la réalisation $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$ et $S^{(1)}$.

On a

$$X_1^{(1)} = 20\left(\frac{1}{(1-0.4665)^{1/1.2}} - 1\right) = 13.761\,207\,865\,3$$

$$X_2^{(1)} = 30\left(\frac{1}{(1-0.5616)^{1/1.3}} - 1\right) = 26.572\,510\,342\,8$$

On obtient

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= X_1^{(1)} + X_2^{(1)} \\ &= 13.7612 + 26.5725 \\ &= 40.3337 \end{aligned}$$

(b) **(4 points).** Seulement 2 parmi les 3 quantités $\theta_1$, $\theta_2$ et $\theta_3$ peuvent être évaluées.

i. **(3 points).** Appliquer la méthode Monte-Carlo avec les 5 réalisations de $S$ pour évaluer approximativement ces 2 quantités.

On a

$$\theta_1 \simeq \widehat{\theta}_1 = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} 1_{\left\{S^{(j)}>60\right\}} = \frac{2}{5}$$

On a

$$\theta_1 \simeq \widehat{\theta}_3 = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} \mathrm{e}^{-0.001S^{(j)}} = ...$$

ii. **(1 point)** Expliquer clairement pourquoi la 3e quantité ne peut pas être évaluée.

On ne peut pas évaluer $\theta_2$ car l'espérance n'existe. Les espérances pour $\theta_1$ et $\theta_3$ existent.

(c) 2**(2 points).** Calculer la réalisation $\left(U_1^{(5)}, U_2^{(5)}\right)$.

On a recours au "Probability Integral Transform Theorem" :

$$U_1^{(5)} = F_{X_1}\left(X_1^{(5)}\right) = 1 - \left(\frac{20}{20+74.5700}\right)^{1.2} = 0.844999\,917\,99$$

$$U_2^{(5)} = F_{X_2}\left(X_2^{(5)}\right) = 1 - \left(\frac{30}{30+5.2724}\right)^{1.3} = 0.189800227\,331$$

2. **(12 points).** Soit les coûts pour un contrat d'assurance IARD définis par la v.a. $X$ avec

$$X = \begin{cases} B & ,I = 1 \\ 0 & ,I = 0 \end{cases},$$

où les v.a. $I$ et $B$ sont indépendantes avec

$$I \sim Bern\,(0.1)$$

et

$$B \sim Gamma\left(1.5, \frac{1}{1000}\right).$$

**Questions :**

(a) **(4 points).** Calculer $\gamma = F_X\,(5000)$ et $E\left[X \times 1_{\{X>5000\}}\right]$.

(b) **(1 point).** Représenter sur un graphique la courbe de $F_X\,(x)$, $x \geq 0$. Indiquer clairement la valeur de la masse de probabilité à 0.

(c) **(4 points).** Calculer $VaR_{0.5}\,(X)$ et $VaR_{0.99}\,(X)$.

(d) **(3 points).** Calculer $TVaR_{0.5}\,(X)$ et $TVaR_{\gamma}\,(X)$.

**Solution :**

(a) **(4 points).** Calculer $\gamma = F_X\,(5000)$ et $E\left[X \times 1_{\{X>5000\}}\right]$.

On a

$$\begin{aligned} \gamma &= F_X\,(5000) \\ &= 1 - 0.1 + 0.1 \times H\left(5000, 1.5, \frac{1}{1000}\right) \\ &= 1 - 0.1 + 0.1 \times H\left(\frac{5000}{1000}, 1.5, 1\right) \\ &= 0.9981434 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>5000\}}\right] &= 0.1 \times E\left[B \times 1_{\{B>5000\}}\right] \\ &= 0.1 \times 1500 \times \left(1 - H\left(5000, 1.5, \frac{1}{1000}\right)\right) \\ &= 0.1 \times 1500 \times \left(1 - H\left(\frac{5000}{1000}, 1.5, 1\right)\right) \\ &= 11.28529 \end{aligned}$$

(b) **(1 point).** Représenter sur un graphique la courbe de $F_X(x)$, $x \geq 0$. Indiquer clairement la valeur de la masse de probabilité à 0.
Graphique (0.5 pt) + $F_X(0) = 1 - 0.1 = 0.9$ (0.5pt)

(c) **(4 points).** Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_{0.99}(X)$.
**(2 points).** Comme $\kappa = 0.5 \leq 0.9$, on obtient

$$VaR_{0.5}(X) = 0$$

**(2 points).** Comme $\kappa = 0.99 > 0.9$, on obtient

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(X) &= VaR_{\frac{(0.99-0.9)}{0.1}}(B) \\ &= H^{-1}\left(0.9, 1.5, \frac{1}{1000}\right) \\ &= 3125.694 \end{aligned}$$

(d) **(3 points).** Calculer $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{\gamma}(X)$.
**(1 point).** Comme $\kappa = 0.5 \leq 0.9$, on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_{0.5}(X) &= \frac{1}{1-0.5} \times q \times E[B] \\ &= \frac{1}{1-0.5} \times 0.1 \times 1.5 \times 1000 \\ &= 300 \end{aligned}$$

**(2 points).** Comme $\kappa = \gamma = 0.9981434 > 0.9$, on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_{\gamma}(X) &= \frac{1}{1-\gamma} \times q \times E\left[B \times 1_{\{B>5000\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-0.9981434} \times 11.28529 \\ &= 6078.471399\,33 \end{aligned}$$

3. **(8 points).** Les coûts pour un contrat sont représentés par la v.a. $X$ où

$$X = \begin{cases} 0 & , \; M = 0 \\ \sum_{k=1}^{M} B_k & , \; M > 0 \end{cases} ,$$

où $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. i.i.d., qui est aussi indépendante de la v.a. de fréquence $M$.
Par convention,

$$B_k \sim B \sim LNorm\left(\mu = 4.2, \sigma = 0.9\right), \quad k \in \mathbb{N}^+.$$

Information :

$$E\left[M\right] = 0.5 \quad \text{et} \quad Var\left(M\right) = 0.625.$$

**Questions :**

(a) **(4 points).** Pour modéliser la v.a. $M$, on doit choisir une seule loi parmi les lois binomiale, Poisson et binomiale négative.

i. À partir de l'information fournie, choisir la loi et calculer ses paramètres.

ii. Justifier votre choix.

iii. Calculer $\Pr\left(M = k\right)$, $k = 0, 1, 2$.

(b) **(4 points).** Calculer $F_{X|M \leq 1}\left(500\right)$ et $E\left[X \times 1_{\{M \leq 2\}}\right]$.

**Solution :**

(a) **(4 points).** Pour modéliser la v.a. $M$, on doit choisir une seule loi parmi les lois binomiale, Poisson et binomiale négative.

i. **(1.5 points).** À partir de l'information fournie, choisir la loi et calculer ses paramètres.
On a

$$E\left[M\right] = r\frac{1-q}{q}$$

et

$$Var\left(M\right) = r\frac{1-q}{q^2} = \frac{E\left[M\right]}{q}$$

On déduit

$$q = \frac{E\left[M\right]}{Var\left(M\right)} = \frac{0.5}{0.625} = 0.8$$

On déduit

$$r = E\left[M\right]\frac{q}{1-q} = 0.5 \times \frac{0.8}{1-0.8} = 2$$

ii. **(1 point).** Justifier votre choix.
On observe

$$Var\left(M\right) > E\left[M\right] \quad \Rightarrow \quad \text{loi binomiale négative}$$

iii. **(1.5 points).** Calculer $\Pr(M=k)$, $k=0,1,2$.

On obtient : 0.6400; 0.2560; 0.0768.

(b) **(4 points).** Calculer $F_{X|M\leq 1}(500)$ et $E\left[X\times 1_{\{M\leq 2\}}\right]$.

**(2 points).** On obtient

$$\begin{aligned}
F_{X|M\leq 1}(500) &= \Pr(X\leq 500|M\leq 1)\\
&= \Pr(X\leq 500, M=0|M\leq 1)+\Pr(X\leq 500, M=1|M\leq 1)\\
&= \Pr(M=0|M\leq 1)+\Pr(B\leq 500)\Pr(M=1|M\leq 1)\ \text{(indépendance de } B_1 \text{et } M)\\
&= \frac{0.6400}{0.6400+0.2560}+\Phi\left(\frac{\ln(500)-4.2}{0.9}\right)\frac{0.2560}{0.6400+0.2560}\\
&= 0.9964012
\end{aligned}$$

**(2 points).** On obtient

$$\begin{aligned}
E\left[X\times 1_{\{M\leq 2\}}\right] &= \sum_{k=0}^{2} E\left[X\times 1_{\{M=k\}}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{2} E\left[(B_1+...+B_k)\times 1_{\{M=k\}}\right]\\
&= E[B_1]\times E\left[1_{\{M=1\}}\right]+(E[B_1]+E[B_2])\times E\left[1_{\{M=1\}}\right]\ \text{(indépendance de } B_1,\ B_2\\
&= 40.95303
\end{aligned}$$

4. **(12 points).** On considère un portefeuille de $n$ contrats d'assurance IARD dont les coûts sont définis par les v.a. i.i.d. $X_1$, ..., $X_n$ avec

$$X_i \sim X \sim PoisComp(\lambda, F_B) \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

où $\lambda = 0.05$ et

$$B \sim Gamma\left(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{100}\right).$$

Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

**Questions :**

(a) **(3 points).** Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

(b) **(4 points).** La part allouée par contrat est définie par la v.a. $W_n = \frac{1}{n} S_n$.

i. Développer les expressions $E[W_n]$ et $Var(W_n)$; calculer leurs valeurs pour $n = 400$.

ii. En évoquant la propriété des mesures de risques appropriée, développer l'expression de $TVaR_\kappa(W_n)$ en fonction de $TVaR_\kappa(S_n)$.

iii. Appliquer le théorème central limite pour calculer approximativement $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.99$ et $n = 400$.

(c) **(5 points).** Soit les mesures de risque

$$\rho_1(X) = \sqrt{Var(X)} \quad \text{et} \quad \rho_2(X) = 600 \ln\left(E\left[e^{\frac{1}{600}X}\right]\right).$$

i. Calculer $\rho_1(X)$ et $\rho_2(X)$.

ii. En justifiant votre réponse, indiquer laquelle des 2 mesures satisfait la propriété d'invariance à la translation et laquelle ne la satisfait pas.

iii. En justifiant votre réponse, indiquer laquelle des 2 mesures satisfait la propriété d'homogénéité et laquelle ne la satisfait pas.

**Solution :**

(a) **(3 points).** Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

**(1 point).** On a

$$\begin{aligned} E[X] &= E[M] \times E[B] \\ &= 10 \end{aligned}$$

**(2 points).** On a

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M] \times Var(B) + Var(B) \times E[B]^2 \\ &= 3000 \end{aligned}$$

(b) **(4 points).** La part allouée par contrat est définie par la v.a. $W_n = \frac{1}{n} S_n$.

i. **(2 points).** Développer les expressions $E[W_n]$ et $Var(W_n)$; calculer leurs valeurs pour $n = 400$.

On a

$$\begin{aligned} E[W_n] &= E\left[\frac{1}{n}(X_1 + ..._X_n)\right] \\ &= \frac{1}{n} \times E[X_1] + ... + \frac{1}{n} E[X_n] \\ &= \frac{n}{n} \times E[X] \\ &= 10 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} Var(W_n) &= \frac{1}{n^2} Var(X_1 + ... + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2}(Var(X_1) + ... + Var(X_n)) \text{ (indépendance des } X_i) \\ &= \frac{1}{n} Var(X) \end{aligned}$$

On obtient

$$E[W_{400}] = 10$$

et

$$Var(W_{400}) = \frac{1}{400} Var(X) = \frac{3000}{400} = 7.5$$

ii. **(1 point).** En évoquant la propriété des mesures de risques appropriée, développer l'expression de $TVaR_\kappa(W_n)$ en fonction de $TVaR_\kappa(S_n)$.

**(Note : enlever 0.5pt si la propriété n'est pas évoquée ou si ce n'est pas la bonne propriété qui est évoquée).**

On obtient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(W_n) &= TVaR_\kappa\left(\frac{1}{n} S_n\right) \\ &= \frac{1}{n} TVaR_\kappa(S_n) \text{ (propriété d'homogénéité de la mesure TVaR)} \end{aligned}$$

iii. **(1 point).** Appliquer le théorème central limite pour calculer approximativement $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.99$ et $n = 400$.

On a

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(W_n) &= \frac{1}{n} TVaR_{\kappa}(S_n) \\ &\simeq \frac{1}{n}\left(n \times E[X] + \sqrt{nVar(X)} TVaR_{\kappa}(Z)\right) \\ &= \frac{1}{400} \times 6919.596 \\ &= 17.29899 \end{aligned}$$

où $Z \sim Norm(0,1)$ avec $VaR_{0.99}(Z) = 2.326348$ et $= TVaR_{0.99}(Z) = 2.665214$

(c) **(5 points).** Soit les mesures de risque

$$\rho_1(X) = \sqrt{Var(X)} \quad \text{et} \quad \rho_2(X) = 600 \ln\left(E\left[e^{\frac{1}{600}X}\right]\right).$$

i. **(1 point).** Calculer $\rho_1(X)$ et $\rho_2(X)$.
**(0.5 point).** On obtient

$$\rho_1(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{3000} = 54.77226$$

**(0.5 point).** On obtient

$$\begin{aligned} \rho_2(X) &= 600 \ln\left(E\left[e^{\frac{1}{600}X}\right]\right) = \\ &= 600 \ln\left(\exp\left(\lambda\left(M_B\left(\frac{1}{6000}\right) - 1\right)\right)\right) \\ &= 13.2 \end{aligned}$$

ii. **(2 points).** En justifiant votre réponse, indiquer laquelle des 2 mesures satisfait la propriété d'invariance à la translation et laquelle ne la satisfait pas.
Soit $c \in \mathbb{R}$.
On obtient

$$\rho_1(X+c) = \sqrt{Var(X+c)} = \sqrt{Var(X)} \neq \rho_1(X) + c$$

On obtient

$$\begin{aligned} \rho_2(X+c) &= 600 \ln\left(E\left[e^{\frac{1}{600}(X+c)}\right]\right) \\ &= 600 \ln\left(E\left[e^{\frac{1}{600}X}\right] \times e^{\frac{1}{600}c}\right) \\ &= 600\left(\ln\left(E\left[e^{\frac{1}{600}X}\right]\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{600}c}\right)\right) \\ &= 600 \ln\left(E\left[e^{\frac{1}{600}X}\right]\right) + c \\ &= \rho_2(X) + c \end{aligned}$$

La mesure $\rho_1$ ne satisfait pas et la mesure $\rho_2$ satisfait à la propriété d'invariance à la translation.

iii. **(2 points).** En justifiant votre réponse, indiquer laquelle des 2 mesures satisfait la propriété d'homogénéité et laquelle ne la satisfait pas.
Soit $c \in \mathbb{R}^+$.
On obtient

$$\rho_1(cX) = \sqrt{Var(cX)} = \sqrt{c^2 Var(X)} = c\sqrt{Var(X)} = c\rho_1(X)$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\rho_2(cX) &= 600\ln\left(E\left[e^{\frac{1}{600}(cX)}\right]\right) \\
&= 600\ln\left(E\left[e^{\frac{c}{600}X}\right]\right) \\
&\neq c600\ln\left(E\left[e^{\frac{1}{600}X}\right]\right) \\
&= c \times \rho_2(X)
\end{aligned}$$

La mesure $\rho_1$ satisfait et la mesure $\rho_2$ ne satisfait par à la propriété d'homogénérité.

5. **(14 points).** Soit les v.a. indépendantes $M_1$ et $M_2$ avec

$$M_i \sim Pois\left(\lambda_i\right), \quad \lambda_i = 0.02i, \quad i = 1, 2.$$

On définit

$$X_1 = 1000M_1 \quad X_2 = 1000M_2 \quad \text{et} \quad S = X_1 + X_2.$$

Information :

$$F_{M_1}\left(1\right) = 0.9998026 \quad F_{M_2}\left(1\right) = 0.9992210 \quad F_{M_1+M_2}\left(1\right) = 0.9982704.$$

**Questions :**

(a) **(5 points).** Calculer $E\left[X_i\right]$, $VaR_{0.95}\left(X_i\right)$ et $TVaR_{0.95}\left(X_i\right)$ pour $i = 1, 2$. Comparer les valeurs et commenter brièvement.

(b) **(5 points).** Calculer $E\left[S\right]$, $VaR_{0.95}\left(S\right)$ et $TVaR_{0.95}\left(S\right)$. Comparer les valeurs et commenter brièvement.

(c) **(4 points).** Soit $\rho_\kappa$ une mesure avec $\kappa \in (0, 1)$. Pour $\kappa \in (0, 1)$, l'Index du Bénéfice de Mutualisation est défini par

$$IbM_\kappa = 1 - \frac{\rho_\kappa\left(S\right) - E\left[S\right]}{\sum_{i=1}^{2}\left(\rho_\kappa\left(X_i\right) - E\left[X_i\right]\right)} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

i. Quelle propriété $\rho_k$ doit-elle satisfaire pour que $\varphi_1 \geq 0$ ?

ii. Quelle propriété $\rho_k$ doit-elle satisfaire pour que chacun des 2 termes de la somme $\varphi_2$ soit positif ?

iii. Choisir la seule mesure parmi la VaR et la TVaR parmi qui satisfait (i) et (ii) ; puis, calculer $IbM_{0.95}$.

iv. Commenter brièvement le résultat.

**Solution :**

(a) **(5 points).** Calculer $E\left[X_i\right]$, $VaR_{0.95}\left(X_i\right)$ et $TVaR_{0.95}\left(X_i\right)$ pour $i = 1, 2$. Comparer les valeurs et commenter brièvement.

**(1.5 points).** On a

$$\begin{aligned} E\left[X_1\right] &= 1000 \times E\left[M_1\right] = 20 \\ \Pr\left(M_1 = 0\right) &= 0.98019867 \\ VaR_{0.95}\left(X_1\right) &= 1000 \times VaR_{0.95}\left(M_1\right) = 0 \end{aligned}$$

**(1 point).** On a

$$\begin{aligned}TVaR_{0.95}(X_1) &= 1000 \times TVaR_{0.95}(M_1) \\ &= 1000 \times \frac{1}{1-0.95} \times \left(E\left[M_1 \times 1_{\{M_1>0\}}\right] + VaR_{0.95}(M_1)\left(F_{M_1}(0) - 0.95\right)\right) \\ &= 1000 \times \frac{1}{1-0.95} \times E[M_1] \\ &= 1000 \times 20 \times 0.02 \\ &= 400\end{aligned}$$

**(1.5 points).** On a

$$\begin{aligned}E[X_2] &= 1000 \times E[M_2] = 40 \\ \Pr(M_2 = 0) &= 0.96078944 \\ VaR_{0.95}(X_2) &= 1000 \times VaR_{0.95}(M_2) = 0\end{aligned}$$

**(1 point).** On a

$$\begin{aligned}TVaR_{0.95}(X_2) &= 1000 \times TVaR_{0.95}(M_2) \\ &= 1000 \times \frac{1}{1-0.95} \times \left(E\left[M_2 \times 1_{\{M_1>0\}}\right] + VaR_{0.95}(M_2)\left(F_{M_2}(0) - 0.95\right)\right) \\ &= 1000 \times \frac{1}{1-0.95} \times E[M_2] \\ &= 1000 \times 20 \times 0.04 \\ &= 800\end{aligned}$$

(b) **(5 points).** Calculer $E[S]$, $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Comparer les valeurs et commenter brièvement.

Soit

$$N = M_1 + M_2 \sim Pois(\lambda = 0.06)$$

et

$$S = 1000 \times N.$$

On a

$$E[S] = 1000 \times E[N] = 60$$

Note : on a aussi

$$E[S] = E[X_1] + E[X_2] = 20 + 40 = 60.$$

On a

$$\Pr(S=0) = \Pr(N=0) = 0.94176453$$

On déduit

$$VaR_{0.95}(S) = 1000 \times VaR_{0.95}(N) = 1000$$

On obtient

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.95}(S) &= 1000 \times TVaR_{0.95}(N) \\
&= 1000 \times \frac{1}{1-0.95} \times \left(E\left[N \times 1_{\{N>1\}}\right] + VaR_{0.95}(N)\left(F_N(1) - 0.95\right)\right) \\
&= 1000 \times \frac{1}{1-0.95} \times \left(E[N] - E\left[N \times 1_{\{N\leq 1\}}\right] + VaR_{0.95}(N)\left(F_N(1) - 0.95\right)\right) \\
&= 1000 \times \frac{1}{1-0.95} \times (0.06 - +1 \times (F_N(1) - 0.95)) \\
&= 1000 \times 1.035291 \\
&= 1034.291
\end{aligned}$$

(c) **(4 points).** Soit $\rho_\kappa$ une mesure avec $\kappa \in (0,1)$. Pour $\kappa \in (0,1)$, l'Index du Bénéfice de Mutualisation est défini par

$$IbM_\kappa = 1 - \frac{\rho_\kappa(S) - E[S]}{\sum_{i=1}^{2}(\rho_\kappa(X_i) - E[X_i])} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

i. Quelle propriété $\rho_k$ doit-elle satisfaire pour que $\varphi_1 \geq 0$ ?
Propriété = Marge de sécurité positive

ii. Quelle propriété $\rho_k$ doit-elle satisfaire pour que chacun des 2 termes de la somme $\varphi_2$ soit positif ?
Propriété = Sous-additivité

iii. Choisir la seule mesure parmi la VaR et la TVaR parmi qui satisfait (i) et (ii) ; puis, calculer $IbM_{0.95}$.
Seule la mesure $TVaR$ satisfait à ces eux propriétés.
La mesure $VaR$ ne satisfait pas à ces eux propriétés.
On obtient

$$IbM_\kappa = 1 - \frac{1034.291 - 60}{400 - 20 + 800 - 40} = 0.145359.$$

iv. Commenter brièvement le résultat.
Selon la définition, on a $IbM_\kappa \in [0,1]$. Si $IbM_\kappa = 0$, cela signifie qu'il n'y a aucun bénéfice de mutualisation. Alors que $IbM_\kappa = 1$ correspond au bénéfice de mutualisation le plus élevé. Comme la mesure TVaR est sous-addtive, on observe un bénéfice de mutualisation modéré.

6. **(12 points).** Soit les v.a. indépendantes

$$X_1 \sim LNorm\,(\mu = 4.2, \sigma = 0.9) \quad \text{et} \quad X_2 \sim Gamma\left(\alpha = 2.5, \beta = \tfrac{1}{40}\right).$$

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.
On fournit ci-dessous des réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ du couple de v.a. i.i.d. $(U_1, U_2)$ ($U_1 \sim U_2 \sim U\,(0,1)$), des réalisations suivantes de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ du couple $(X_1, X_2)$ et des réalisations $S^{(j)}$ de la v.a. $S$ :

| $j$ | $U_1^{(j)}$ | $U_2^{(j)}$ | $X_1^{(j)}$ | $X_2^{(j)}$ | $S^{(j)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.24 | 0.55 | | | |
| 2 | 0.99 | 0.25 | | | |
| 3 | 0.11 | 0.15 | 22.11 | 39.88 | 61.99 |
| 4 | 0.88 | 0.75 | 192.00 | 132.51 | 324.51 |
| 5 | 0.06 | 0.95 | 16.46 | 221.41 | 237.87 |

Note : conserver 2 décimales pour les calculs.
**Questions :**

(a) **(4 points).** Calculer les réalisations $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$, $\left(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}\right)$, $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$.
On obtient

(b) **(3 points).** Utiliser les résultats en (a) pour calculer des approximations de $TVaR_{0.6}\,(X_1)$, $TVaR_{0.6}\,(X_2)$, et $TVaR_{0.6}\,(S)$.

(c) **(3 points).** Utiliser les résultats en (a) pour calculer

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)}\right\}\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)}\right\}\right)$$
$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{S^{(j_1)} + S^{(j_2)}\right\}\right).$$

(d) **(1 point).** Comparer les valeurs obtenues en (b) et en (c).

(e) **(1 point).** Utiliser les valeurs en (b) et (c) pour illustrer la propriété de la sous-additivité de la TVaR.

**Solution :**

(a) **(4 points).** Calculer les réalisations $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$, $\left(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}\right)$, $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$.

2 réalisations de $X_1$ : 35.32 541.16
2 réalisations de $X_2$ : 94.56 53.49
2 réalisations de $S$ : 129.88 594.65

(b) **(3 points).** Utiliser les résultats en (a) pour calculer des approximations de $TVaR_{0.6}(X_1)$, $TVaR_{0.6}(X_2)$, et $TVaR_{0.6}(S)$.

On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(X_1) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(X_1^{[4]} + X_1^{[5]}\right) \\ &= 366.58 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(X_2) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(X_2) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(X_2^{[4]} + X_2^{[5]}\right) \\ &= 176.96 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.6}(S) &\simeq \widetilde{TVaR_{0.6}}(S) \\ &= \frac{1}{5\times(1-0.6)} \times \left(S^{[4]} + S^{[5]}\right) \\ &= 459.58 \end{aligned}$$

(c) **(3 points).** Utiliser les résultats en (a) pour calculer

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)}\right\}\right)$$
$$\varphi_2 = \tfrac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)}\right\}\right)$$
$$\varphi_3 = \tfrac{1}{2}\left(\sup_{j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,5\},j_1\neq j_2}\left\{S^{(j_1)} + S^{(j_2)}\right\}\right).$$

On a

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\max\left\{\begin{array}{c} X_1^{(1)} + X_1^{(2)}, X_1^{(1)} + X_1^{(3)}, X_1^{(1)} + X_1^{(4)}, X_1^{(1)} + X_1^{(4)}, X_1^{(2)} + X_1^{(3)}, X_1^{(2)} + X_1^{(4)}, X_1^{(2)} + X_1^{(5)} \\ X_1^{(3)} + X_1^{(4)}, X_1^{(3)} + X_1^{(5)}, X_1^{(4)} + X_1^{(5)} \end{array}\right.\right.$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\max\left\{\begin{array}{c} X_2^{(1)}+X_2^{(2)}, X_2^{(1)}+X_2^{(3)}, X_2^{(1)}+X_2^{(4)}, X_2^{(1)}+X_2^{(4)}, X_2^{(2)}+X_2^{(3)}, X_2^{(2)}+X_2^{(4)}, X_2^{(2)}+X_2^{(5)} \\ X_2^{(3)}+X_2^{(4)}, X_2^{(3)}+X_2^{(5)}, X_2^{(4)}+X_2^{(5)} \end{array}\right.\right.$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\left(\max\left\{\begin{array}{c} S^{(1)}+S^{(2)}, S^{(1)}+S^{(3)}, S^{(1)}+S^{(4)}, S^{(1)}+S^{(4)}, S^{(2)}+S^{(3)}, S^{(2)}+S^{(4)}, S^{(2)}+S^{(5)}, \\ S^{(3)}+S^{(4)}, S^{(3)}+S^{(5)}, S^{(4)}+S^{(5)} \end{array}\right\}\right)$$

On a

| $j$ | $U_1^{(j)}$ | $U_2^{(j)}$ | $X_1^{(j)}$ | $X_2^{(j)}$ | $S^{(j)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.24 | 0.55 | 35.32 | 94.56 | 129.88 |
| 2 | 0.99 | 0.25 | 541.16 | 53.49 | 594.65 |
| 3 | 0.11 | 0.15 | 22.11 | 39.88 | 61.99 |
| 4 | 0.88 | 0.75 | 192.00 | 132.51 | 324.51 |
| 5 | 0.06 | 0.95 | 16.46 | 221.41 | 237.87 |

On obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)}+X_1^{(4)}\right) = 366.58 \\
\varphi_2 &= \frac{1}{2}\left(X_2^{(4)}+X_2^{(5)}\right) = 176.96 \\
\varphi_3 &= \frac{1}{2}\left(S^{(2)}+S^{(4)}\right) = \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)}+X_2^{(2)}+X_1^{(4)}+X_2^{(4)}\right) = 459.58
\end{aligned}$$

(d) **(1 point).** Comparer les valeurs obtenues en (b) et en (c).
On observe

$$\begin{aligned}
\widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1) &= \varphi_1 \\
\widetilde{TVaR_{0.6}}(X_2) &= \varphi_2 \\
\widetilde{TVaR_{0.6}}(S) &= \varphi_3
\end{aligned}$$

(e) **(1 point).** Utiliser les valeurs en (b) et (c) pour illustrer la propriété de la sous-additivité de la TVaR.
On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{TVaR_{0.6}}(S) &= \varphi_3 = \frac{1}{2}\left(S^{(2)}+S^{(4)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)}+X_2^{(2)}+X_1^{(4)}+X_2^{(4)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)}+X_1^{(4)}\right)+\frac{1}{2}\left(X_2^{(2)}+X_2^{(4)}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(X_1^{(2)}+X_1^{(4)}\right)+\frac{1}{2}\left(X_2^{(5)}+X_2^{(4)}\right) \text{ (on remplace } X_2^{(2)} \text{ par } X_2^{(5)} \text{ qui est plus élevée)} \\
&= \varphi_1+\varphi_2 = \widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1)+\widetilde{TVaR_{0.6}}(X_1)
\end{aligned}$$

7. **(8 points).** Soit une v.a. $X$ avec $E[X] < \infty$ (note : on ne précise pas si la v.a. $X$ est discrète, continue, ou mixte). La définition initiale de la TVaR de $X$ est

$$TVaR_\kappa(X) = \tfrac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u \quad , \quad \kappa \in (0,1). \tag{1}$$

**Questions :**

(a) **(4 points).** Démontrer directement à partir de (1) que

$$TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \tfrac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X));0] \quad , \quad \kappa \in (0,1). \tag{2}$$

Important : pour la démonstration de (2), on ne peut pas passer par la relation en (3).

(b) **(4 points).** Démontrer à partir de (2) que

$$TVaR_\kappa(X) = \tfrac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa\right)\right\} \quad , \quad \kappa \in (0,1). \tag{3}$$

**Solution :**

(a) **(4 points).** Démontrer directement à partir de (1) que

$$TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \tfrac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X));0] \quad , \quad \kappa \in (0,1).$$

Important : pour la démonstration de (2), on ne peut pas passer par la relation en (3).
On a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X) + VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \left(F_X^{-1}(u) - VaR_\kappa(X)\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X)(1-\kappa) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[\max\left(F_X^{-1}(U) - VaR_\kappa(X);0\right)\right] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X);0)] + VaR_\kappa(X) \ \text{ (Quantile Function Theorem)}
\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

(b) **(4 points).** Démontrer à partir de (2) que

$$TVaR_\kappa(X) = \tfrac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa\right)\right\} \quad , \quad \kappa \in (0,1).$$

On a

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[\max\left(X - VaR_{\kappa}(X);0\right)\right] + VaR_{\kappa}(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E\left[\left(X - VaR_{\kappa}(X)\right) \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}\right] + VaR_{\kappa}(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}\right] - \frac{1}{1-\kappa} VaR_{\kappa}(X) \times E\left[1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}\right] + VaR_{\kappa}(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}\right] - \frac{1}{1-\kappa} \left(VaR_{\kappa}(X) \times \left(1 - F_X\left(VaR_{\kappa}(X)\right)\right) - (1-\kappa) Va\right. \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \left\{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}\right] + VaR_{\kappa}(X)\left(F_X\left(VaR_{\kappa}(X)\right) - \kappa\right)\right\}
\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

8. **(8 points).** Soit une v.a. discrète positive $X$ avec $E[X] < \infty$ avec

$$f_X(k) = \Pr(X = k) \quad \text{et} \quad F_X(k) = \Pr(X \leq k) \quad , k \in \mathbb{N}.$$

**Questions :**

(a) **(2 points).** Démontrer

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - F_X(k)).$$

(b) **(2 points).** Démontrer une expression semblable (i.e. en fonction de $(1 - F_X(k))$) pour

$$\pi_X(k) = E[\max(X - k; 0)]$$

pour $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, on a

$$\pi_X(0) = E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - F_X(k)).$$

(c) **(4 points).** On dispose de l'information suivante :

| $k$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_X(k) = E[\max(X-k;0)]$ | 0.4933 | 0.2555 | 0.1221 | 0.0540 | 0.0222 | 0.0085 |

i. Calculer $F_X(k)$, $k = 6, 7, 8, 9, 10$.

ii. Calculer $VaR_{0.95}(X)$ et $TVaR_{0.95}(X)$.

**Solution :**

(a) **(2 points).** Démontrer

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - F_X(k)).$$

On a

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{j=0}^{\infty} j f_X(j) = \sum_{j=1}^{\infty} j f_X(j) \\
&= f_X(1) + (f_X(2) + f_X(2)) + (f_X(2) + f_X(3) + f_X(3)) + ... \\
&= (f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) + ...) + (f_X(2) + f_X(3) + ...) + (f_X(3) + ...) + ... \\
&= (1 - F_X(0)) + (1 - F_X(1)) + (1 - F_X(2)) + ... \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - F_X(k))
\end{aligned}$$

(b) **(2 points).** Démontrer une expression semblable (i.e. en fonction de $(1-F_X(k))$) pour

$$\pi_X(k) = E[\max(X-k;0)]$$

pour $k \in \mathbb{N}$. Pour $k=0$, on a

$$\pi_X(0) = E[X] = \sum_{k=0}^{\infty}(1-F_X(k)).$$

On a

$$\begin{aligned}
E[\max(X-k;0)] &= \sum_{j=k+1}^{\infty} j f_X(j) \\
&= f_X(k+1) + (f_X(k+2)+f_X(k+2)) + (f_X(k+2)+f_X(k+3)+f_X(k+3) \\
&= (f_X(k+1)+f_X(k+2)+f_X(k+3)+...) + (f_X(k+2)+f_X(k+3)+...) + \\
&= (1-F_X(k)) + (1-F_X(k+1)) + (1-F_X(k+2)) + ... \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}(1-F_X(k+l))
\end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{N}$.
On retrouve lexpression quand $k=0$.

(c) **(4 points).** On dispose de l'information suivante :

| $k$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_X(k) = E[\max(X-k;0)]$ | 0.4933 | 0.2555 | 0.1221 | 0.0540 | 0.0222 | 0.0085 |

i. **(2 points).** Calculer $F_X(k)$, $k = 6,7,8,9,10$.
On utilise la relation

$$(1-F_X(k)) = \pi_X(k) - \pi_X(k+1), \text{ pour } k \in \mathbb{N},$$

qui devient

$$F_X(k) = 1 + \pi_X(k+1) - \pi_X(k), \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

On obtient

| $k$ | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|
| $F_X(k)$ | $1+0.2555-0.4933 = 0.762$ | $1-0.2555+0.1221 = 0.866\,6$ | $1-0.1221+0.0540 = 0.9$ |

| $k$ | 9 | 10 |
|---|---|---|
| $F_X(k)$ | $1-0.0540+0.0222 = 0.9682$ | $1-0.0222+0.0085 = 0.986\,3$ |

ii. **(2 points).** Calculer $VaR_{0.95}(X)$ et $TVaR_{0.95}(X)$.
On obtient

$$VaR_{0.95}(X) = 9.$$

Avec (2), on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_{0.95}(X) &= VaR_{0.95}(X) + \frac{1}{1-_{0.95}} E\left[\max\left(X - VaR_{0.95}(X); 0\right)\right] \\ &= 9 + \frac{1}{0.05} \times \pi_X(9) \\ &= 9 + 20 \times 0.0540 \\ &= 10.08 \end{aligned}$$

9. **(8 points).** Soit les v.a. $X$ et $Y$ ($E[X] < \infty$, $E[Y] < \infty$) avec les fonctions de répartition $F_X$ et $F_Y$, quantile $F_X^{-1}$ et $F_Y^{-1}$, et stop-loss $\pi_X$ et $\pi_Y$. (Note : on ne précise pas si les v.a. $X$ et $Y$ sont discrètes, continues, ou mixtes; dépendantes ou indépendantes).
La relation

$$TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \tfrac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) \quad , \quad \text{pour } \kappa \in (0,1), \tag{4}$$

est valide pour toute v.a. $X$.
Soit la fonction convexe

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(x)$$

pour $x \in \mathbb{R}$.
Alors, (4) peut être récrit sous la forme

$$TVaR_\kappa(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}}\{\varphi(x)\} \tag{5}$$

**Question :** En utilisant de façon astucieuse (4) et (5), démontrer que

$$TVaR_\kappa(X+Y) \leq TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y) \tag{6}$$

pour $\kappa \in (0,1)$. **Note** : Il ne faut pas faire la démonstration basée sur les statistiques d'ordre ou celle basée sur les fonctions indicatrices généralisées.
**Solution :** On a

$$TVaR_\kappa(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}}\{\varphi(x)\}$$

ce qui signifie

$$TVaR_\kappa(X) \leq \varphi(x)\text{, pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour $\alpha \in (0,1)$, on a

$$TVaR_\kappa(\alpha\times X + (1-\alpha)\times Y) \leq x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_{\alpha\times X+(1-\alpha)\times Y}(x)\text{, pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On choisit

$$x_\alpha = \alpha\times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)\times VaR_\kappa(Y)$$

et on a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(\alpha\times X + (1-\alpha)\times Y) &\leq x_0 + \frac{1}{1-\kappa}\pi_{\alpha\times X+(1-\alpha)\times Y}(x_0) \\
&= x_0 + \frac{1}{1-\kappa}\times E[\max(\alpha\times X + (1-\alpha)\times Y - x_0; 0)] \\
&= \alpha\times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)\times VaR_\kappa(Y) \\
&\quad + \frac{1}{1-\kappa}\times E[\max(\alpha\times X + (1-\alpha)\times Y - \alpha\times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha)\times
\end{aligned}$$

La fonction

$$E\left[\max\left(W;0\right)\right]$$

est convexe.
Alors, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}\left(\alpha \times X + (1-\alpha)\times Y\right) &\leq \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1-\alpha)\times VaR_{\kappa}(Y) \\
&\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1-\alpha)\times Y - \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1-\alpha)\times \\
&= \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1-\alpha)\times VaR_{\kappa}(Y) \\
&\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times E[\max(\alpha \times (X - VaR_{\kappa}(X)) + (1-\alpha)\times (Y - VaR_{\kappa}(Y)); \\
&\leq \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + (1-\alpha)\times VaR_{\kappa}(Y) \\
&\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times \alpha E\left[\max\left(X - VaR_{\kappa}(X);0\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{1-\kappa} \times (1-\alpha) E\left[\max\left(Y - VaR_{\kappa}(Y);0\right)\right] \\
&= \alpha \times VaR_{\kappa}(X) + \frac{1}{1-\kappa} \times \alpha E\left[\max\left(X - VaR_{\kappa}(X);0\right)\right] \\
&\quad + (1-\alpha)\times VaR_{\kappa}(Y) + \frac{1}{1-\kappa} \times (1-\alpha) E\left[\max\left(Y - VaR_{\kappa}(Y);0\right)\right]
\end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in (0,1)$.
La relation est vraie pour $\alpha = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}\left(\frac{1}{2}\times X + \left(1-\frac{1}{2}\right)\times Y\right) &\leq \frac{1}{2}\times VaR_{\kappa}(X) + \frac{1}{1-\kappa}\times\frac{1}{2}E\left[\max\left(X - VaR_{\kappa}(X);0\right)\right] \\
&\quad + \left(1-\frac{1}{2}\right)\times VaR_{\kappa}(Y) + \frac{1}{1-\kappa}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)E[\max(Y - VaR_{\kappa}(Y
\end{aligned}$$

Avec la propriété d'homoénéité de la TVaR, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}TVaR_{\kappa}(X+Y) &\leq \frac{1}{2}\times VaR_{\kappa}(X) + \frac{1}{1-\kappa}\times\frac{1}{2}E\left[\max\left(X - VaR_{\kappa}(X);0\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\times VaR_{\kappa}(Y) + \frac{1}{1-\kappa}\times\frac{1}{2}E\left[\max\left(Y - VaR_{\kappa}(Y);0\right)\right]
\end{aligned}$$

On multiplie par "2" et on obtient le résultat désiré.

10. **(8 points).** Les coûts pour un contrat sont représentés par la v.a. $X$ où

$$X = \begin{cases} 0 & , \ M = 0 \\ B_1 & , \ M = 1 \\ B_1 + B_2 & , \ M = 2 \end{cases}.$$

Les v.a. $B_1$, $B_2$, et $M$ sont indépendantes.
De plus, $M \sim Binom\,(2, 0.3)$ et

$$B_1 \sim B_2 \sim B \quad \text{avec} \quad F_B\,(x) = 1 - \exp\left(-\left(\tfrac{x}{50}\right)^{0.5}\right),\ x \geq 0.$$

**Questions :**

(a) **(1.5 points).** Calculer les valeurs exactes de $F_M\,(k)$, $k = 0, 1, 2$.

(b) **(6.5 points).** Pour calculer les réalisations $X^{(j)}$ de $X$, on utilise dans l'ordre les réalisations de la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$ fournies ci-dessous :

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U^{(j)}$ | 0.31 | 0.97 | 0.45 | 0.76 | 0.89 | 0.64 | 0.06 | 0.53 | 0.25 |

i. Calculer $M^{(1)}$ et $X^{(1)}$.
ii. Calculer $M^{(2)}$ et $X^{(2)}$.
iii. Calculer $M^{(3)}$ et $X^{(3)}$.
iv. Appliquer la méthode Monte-Carlo avec les 3 réalisations de $X$ pour évaluer approximativement $E\,[\max\,(X - 100; 0)]$.

**Solution :**

(a) **(1.5 points).** Calculer les valeurs exactes de $F_M\,(k)$, $k = 0, 1, 2$.
On obtient : 0.49; 0.91; 1.00

(b) **(6.5 points).** Pour calculer les réalisations $X^{(j)}$ de $X$, on utilise dans l'ordre les réalisations de la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$ fournies ci-dessous :

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U^{(j)}$ | 0.31 | 0.97 | 0.45 | 0.76 | 0.89 | 0.64 | 0.06 | 0.53 | 0.25 |

On a

$$F_B^{-1}\,(u) = 50 \times (-\ln(1-u))^2$$

i. **(1.5 points).** Calculer $M^{(1)}$ et $X^{(1)}$.
$U^{(1)} \Rightarrow M^{(1)} = 0$ et $X^{(1)} = 0$

ii. **(1.5 points).** Calculer $M^{(2)}$ et $X^{(2)}$.
$U^{(2)} \Rightarrow M^{(2)} = 2$ et $X^{(2)} = B_1^{(2)} + B_2^{(2)}$
$U^{(3)} \Rightarrow B_1^{(2)} = 50 \times (-\ln(1-0.45))^2 = 17.870454$
$U^{(4)} \Rightarrow B_2^{(2)} = 50 \times (-\ln(1-0.76))^2 = 101.833\,055$
$\Rightarrow X^{(2)} = 17.870454 + 101.833\,055 = 119.703509$

iii. **(1.5 points).** Calculer $M^{(3)}$ et $X^{(3)}$.
$U^{(5)} \Rightarrow M^{(3)} = 1$ et $X^{(3)} = B_1^{(3)}$
$U^{(6)} \Rightarrow B_1^{(3)} = 50 \times (-\ln(1-0.64))^2 = 52.188564$
$\Rightarrow X^{(3)} = 52.188564$

iv. **(2 points).** Appliquer la méthode Monte-Carlo avec les 3 réalisations de $X$ pour évaluer approximativement $\varphi = E[\max(X-100;0)]$.
On obtient

$$\begin{aligned}\varphi &\simeq \widetilde{\varphi} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}\max\left(X^{(j)}-100;0\right)\\ &= \frac{1}{3}119.703509\\ &= 39.901170\end{aligned}$$

11. **(8 points).** Soit la v.a. continue positive $X$ dont $E[X] < \infty$ et $E\left[X^l\right]$ n'existe pas pour $l = 2, 3, \ldots$ .
On hésite entre les lois Pareto et lognormale.
On doit faire un seul choix en se basant sur les informations suivantes :

$$E[X] = 10 \quad \text{et} \quad e_X(30) = E[X - 30|X > 30] = 60 = \text{fonction d'excès moyen.}$$

Soit les v.a. i.i.d. $X_1$, $X_2$ avec $X_1 \sim X_2 \sim X$.
**Questions :**
(a) **(2 points).** Identifier la loi de $X$ et ses paramètres. Justifier votre choix.
(b) **(1 point).** Calculer $VaR_{0.9999}(X)$.
(c) **(3 points).** On observe

$$\Pr\left(X_1 \leq \frac{x}{2}, X_2 \leq \frac{x}{2}\right) \leq \Pr(X_1 + X_2 \leq x) \leq \Pr(X_1 \leq x, X_2 \leq x), \tag{7}$$

pour $x \geq 0$.
Utiliser les 2 inégalités en (7) pour calculer des bornes inférieures et supérieures sur $\Pr(X_1 + X_2 > 2000)$.
(d) **(2 points).** Démontrer à l'aide d'un graphique sur un plan le résultat en (7).
(**Suggestion** : Dessiner les 3 domaines d'intégration dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ pour les trois probabilités en (7). L'abscisse du graphique correspond aux valeurs prises par la v.a. $X_1$ et l'ordonnée correspond aux valeurs prises par la v.a. $X_2$.)

**Questions :**
(a) **(2 points).** Identifier la loi de $X$ et ses paramètres. Justifier votre choix.
Les moments de la loi lognormale existent pour tout $l = 1, 2, \ldots$
Selon les informations, $X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$ avec $1 < \alpha < 2$.
On a

$$E[X] = 10 = \frac{\lambda}{\alpha - 1}$$

et

$$\begin{aligned} e_X(30) &= E[X - 30|X > 30] = 60 \\ &= \frac{\lambda}{\alpha - 1} + \frac{30}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{30}{\alpha - 1} = 60 - 10 = 50.$$

On obtient

$$\alpha - 1 = \frac{30}{50} \text{ et } \alpha = 1.6.$$

On déduit

$$\lambda = 6.$$

(b) **(1 point).** Calculer $VaR_{0.9999}(X)$.
On obtient

$$VaR_{0.9999}(X) = 6 \times \left( \frac{1}{(1-0.9999)^{\frac{1}{1.6}}} - 1 \right) = 1891.366596.$$

(c) **(3 points).** On observe

$$\Pr\left(X_1 \le \frac{x}{2}, X_2 \le \frac{x}{2}\right) \le \Pr(X_1 + X_2 \le x) \le \Pr(X_1 \le x, X_2 \le x),$$

pour $x \ge 0$.
À partir des 2 inégalités en (7), on déduit

$$1 - \Pr(X_1 \le x, X_2 \le x) \le \Pr(X_1 + X_2 > 2000) \le 1 - \Pr\left(X_1 \le \frac{x}{2}, X_2 \le \frac{x}{2}\right)$$

Hypothèse d'indépendance : on obtient

$$1 - \left(1 - \left(\frac{6}{6+2000}\right)^{1.6}\right)^2 \le \Pr(X_1 + X_2 > 2000) \le 1 - \left(1 - \left(\frac{6}{6+1000}\right)^{1.6}\right)^2$$

et

$$1.829459 \times 10^{-4} \le \Pr(X_1 + X_2 > 2000) \le 5.518935 \times 10^{-4}$$

(d) **(2 points).** Démontrer à l'aide d'un graphique sur un plan le résultat en (7).
(**Suggestion** : Dessiner les 3 domaines d'intégration dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ pour les trois probabilités en (7). L'abscisse du graphique correspond aux valeurs prises par la v.a. $X_1$ et l'ordonnée correspond aux valeurs prises par la v.a. $X_2$.)
$\Pr\left(X_1 \le \frac{x}{2}, X_2 \le \frac{x}{2}\right) = \Pr(\{A_1\})$
$\Pr(X_1 + X_2 \le x) = \Pr(\{A_2\})$
$\Pr(X_1 \le x, X_2 \le x) = \Pr(\{A_3\})$
Deniz, Simon-Pierre, ou Nassim, pourriez-voir me faire les 3 dessins, SVP ?
$\{A_1\} = \{(x_1, x_2), 0 \le x_1 \le x, 0 \le x_2 \le x\}$ =carré avec les coins $(0,0)$, $(x,0)$, $(0,x)$, $(x,x)$
$\{A_2\} = \{(x_1, x_2), 0 \le x_1, 0 \le x_2, 0 \le x_1 + x_2 \le x\}$ =triangle avec les coins $(0,0)$, $(x,0)$, $(0,x)$
$\{A_3\} = \left\{(x_1, x_2), 0 \le x_1 \le \frac{x}{2}, 0 \le x_2 \le \frac{x}{2}\right\}$ =carré avec les coins $(0,0)$, $\left(\frac{x}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{x}{2}\right)$, $\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right)$

12. **(12 points). 2 questions distinctes.**

(a) **(8 points).** Soit les couples de v.a. $(X_1, X_2)$ et $(Y_1, Y_2)$ avec $E[X_1] = E[Y_1] = 4$ et $E[X_2] = E[Y_2] = 14.5$. On fournit les valeurs suivantes de leurs fonctions de masse de probabilité :

| $k_1$ | $k_2$ | $f_{X_1,X_2}(k_1,k_2)$ | $f_{Y_1,Y_2}(k_1,k_2)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 0.56 | 0.7 |
| 0 | 25 | 0.24 | 0.1 |
| 20 | 10 | 0.14 | 0 |
| 20 | 25 | 0.06 | 0.2 |

**Questions :**

i. Identifier les valeurs des fonctions de masse de probabilité de $f_{X_1}$, $f_{X_2}$, $f_{Y_1}$ et $f_{Y_2}$. Calculer $Var(X_i)$ et $Var(Y_i)$, $i = 1, 2$.

ii. Calculer les valeurs de $\Pr(X_1 \leq X_2)$ et $\Pr(Y_1 \leq Y_2)$. Est-ce que les deux probabilités sont égales à 1 ?

iii. Soit une v.a. $W$ où $E[W] < \infty$ et $Var(W) < \infty$. Soit la mesure de risque $\rho(W) = \sqrt{Var(W)}$. Choisir un seul couple parmi $(X_1, X_2)$ et $(Y_1, Y_2)$ pour construire un contre-exemple servant à confirmer que la mesure $\rho$ ne satisfait pas à la propriété de monotonicité. Justifier clairement votre choix.

iv. Calculer $E[\max(X_1 + X_2 - 40; 0)]$ et $E\left[Y_1 \times 1_{\{Y_2>20\}}\right]$.

**Solution :**

i. **(2 points).** Identifier les valeurs des fonctions de masse de probabilité de $f_{X_1}$, $f_{X_2}$, $f_{Y_1}$ et $f_{Y_2}$. Calculer $Var(X_i)$ et $Var(Y_i)$, $i = 1, 2$.

On a

$$f_{X_1}(0) = f_{Y_1}(0) = 0.8 \text{ et } f_{X_1}(20) = f_{Y_1}(20) = 0.2$$
$$f_{X_2}(10) = f_{Y_2}(10) = 0.7 \text{ et } f_{X_2}(25) = f_{Y_2}(25) = 0.3$$

On obtient

$$Var(X_1) = 64 \text{ et } Var(X_2) = 47.25$$

ii. **(2 points).** Calculer les valeurs de $\Pr(X_1 \leq X_2)$ et $\Pr(Y_1 \leq Y_2)$. Est-ce que les deux probabilités sont égales à 1 ?

On obtient

$$\Pr(X_1 \leq X_2) = \sum_{k_1=1}^{2} \sum_{k_2=1}^{2} f_{X_1,X_2}(k_1,k_2) \times 1_{\{k_1 \leq k_2\}} = 0.86$$

On obtient

$$\Pr(Y_1 \leq Y_2) = \sum_{k_1=1}^{2} \sum_{k_2=1}^{2} f_{Y_1,Y_2}(k_1,k_2) \times 1_{\{k_1 \leq k_2\}} = 1.$$

Réponse à la question : non

iii. **(2 points).** Soit une v.a. $W$ où $E[W] < \infty$ et $Var(W) < \infty$. Soit la mesure de risque $\rho(W) = \sqrt{Var(W)}$. Choisir un seul couple parmi $(X_1, X_2)$ et $(Y_1, Y_2)$ pour construire un contre-exemple servant à confirmer que la mesure $\rho$ ne satisfait pas à la propriété de monotonicité. Justifier clairement votre choix.
Propriété de la monotonicité. Soit un couple de v.a. $(W_1, W_2)$ tel que $\Pr(W_1 \leq W_2) = 1$. Une mesure $\rho$ est monotone si $\rho(W_1) \leq \rho(W_2)$.
La condition pour cette propriété est satisfaite pour le couple $(Y_1, Y_2)$. Toutefois, on observe que $\rho(Y_1) \geq \rho(Y_2)$. Donc, la mesure $\rho$ n'est pas monotone.

iv. **(2 points).** Calculer $E[\max(X_1 + X_2 - 40; 0)]$ et $E\left[Y_1 \times 1_{\{Y_2>20\}}\right]$.
On obtient

$$E[\max(X_1 + X_2 - 40; 0)] = \sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=1}^{2} f_{X_1,X_2}(k_1, k_2) \times \max(k_1 + k_2 - 40) = 5 \times 0.06 = 0.3$$

et

$$E\left[Y_1 \times 1_{\{Y_2>20\}}\right] = \sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=1}^{2} f_{Y_1,Y_2}(k_1, k_2) \times k_1 \times 1_{\{k_2>20\}} = 20 \times 0.2 = 4.$$

(b) **(4 points).** Soit les v.a. continues $X$ et $Y$ ($E[X] < \infty$, $E[Y] < \infty$) avec les fonctions de répartition $F_X$ et $F_Y$.
La relation

$$\begin{array}{c} TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] \\ \text{ou} \\ (1-\kappa)\, TVaR_\kappa(X) = E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right], \end{array} \tag{8}$$

est valide pour toute v.a. continue $X$.

**Question** : En utilisant de façon astucieuse (8), l'hypothèse de v.a. continues et les fonctions indicatrices, démontrer que

$$TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y) - TVaR_\kappa(X+Y) \geq 0, \quad \text{pour } \kappa \in (0,1).$$

**Note** : Il ne faut pas faire la démonstration utilisant les statistiques d'ordre ni refaire celle présentée au numéro 9.

**Solution** : Pour tout $\kappa \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
& (1-\kappa)\, TVaR_\kappa(X) + (1-\kappa)\, TVaR_\kappa(Y) - (1-\kappa)\, TVaR_\kappa(X+Y) \\
= \; & E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + E\left[Y \times 1_{\{Y>VaR_\kappa(Y)\}}\right] - E\left[(X+Y) \times 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right] \\
= \; & E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] - E\left[X \times 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right] + E\left[Y \times 1_{\{Y>VaR_\kappa(Y)\}}\right] - E\Big[Y \times 1_{\{X+Y>Va} \\
= \; & E\left[X \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] - E\left[Y \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right].
\end{aligned}$$

On commence par montrer que

$$E\left[X \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \geq 0.$$

On introduit le terme auxiliaire

$$E\left[VaR_\kappa(X) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right],$$

où

$$\begin{aligned} E\left[VaR_\kappa(X) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] &= VaR_\kappa(X) \times E\left[\left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR}\right.\right. \\ &= VaR_\kappa(X) \times ((1-\kappa) - (1-\kappa)) = 0. \end{aligned}$$

On y va :

$$\begin{aligned} & E\left[VaR_\kappa(X) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \\ = \;& E\left[(X - VaR_\kappa(X)) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \end{aligned}$$

On observe

$$\begin{array}{lll} (X - VaR_\kappa(X))\left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right) \geq 0 & \text{si} & X < VaR_\kappa(X) \\ (X - VaR_\kappa(X))\left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right) = 0 & \text{si} & X = VaR_\kappa(X) \\ (X - VaR_\kappa(X))\left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right) \geq 0 & \text{si} & X > VaR_\kappa(X). \end{array}$$

Alors, on déduit

$$\begin{aligned} & E\left[VaR_\kappa(X) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \\ = \;& E\left[(X - VaR_\kappa(X)) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \geq 0. \end{aligned}$$

On refait le même développement pour le terme en fonction de la v.a. $Y$.
Il en résulte que

$$(1-\kappa)\,TVaR_\kappa(X) + (1-\kappa)\,TVaR_\kappa(Y) - (1-\kappa)\,TVaR_\kappa(X+Y) \geq 0$$

ou

$$TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y) - TVaR_\kappa(X+Y) \geq 0, \quad \text{pour } \kappa \in (0,1).$$

# FIN