

ACT-4101 Régimes de retraite  
**Illustration du risque de longévité**  
avec diverses tables de mortalité et paramètres  
Mise à jour : 2016-09-26 LA

## Contenu

1-	Introduction.....	1
2-	Référence interne .....	2
3-	Explications sur le lien entre les centiles et la couleur des bâtonnets des histogrammes .....	2
4-	Effet d'un changement d'âge sur la fonction de densité .....	3
5-	Effet d'un changement de sexe sur la fonction de densité .....	8
6-	Comparaison Homme-Femme sur même graphique de fonction de densité .....	13
7-	Comparaison de 3 tables de mortalité en date du 2014-01-01 .....	14
8-	Comparaison d'un changement de date d'évaluation pour une même table .....	18
	Annexe 1 : Renseignements pour la durée de vie d'une personne de 65 ans .....	26
	Annexe 2 : Valeurs obtenues avec la table ICA CPM2014 (2014-01-01) .....	27
	Annexe 3 : Valeurs obtenues avec la table ICA CPM2014 (2017-01-01) .....	28

### 1- Introduction

En complément aux illustrations contenues et évoquées dès le premier cours de la session pour le cours ACT-4101 Régimes de retraite, ce document procure des données et illustrations pour comparer la question du risque de longévité. Je remercie M. Étienne Vanasse, étudiant à la maîtrise en actuariat en 2016 et auxiliaire d'enseignement de ce cours, pour son assistance et ses commentaires dans la réalisation de ce document.

Ces graphiques permettent d'apprécier l'incertitude fondamentale quant au risque de longévité, et de voir les effets de divers paramètres sur la densité obtenue.

Les statistiques en annexe comprennent des mesures de moyenne (espérance de vie complète), écart-type, et la valeur de quelques centiles pour la durée de vie. L'annexe 1 compare trois tables de mortalité à un même âge. Les annexes 2 et 3 présentent des valeurs pour une seule table, soit la ICA CPM-2014 Mixte, mais à plusieurs âges et deux dates d'évaluation.

L'étudiant est invité à comprendre l'impact de changer un paramètre à la fois. Par exemple :

- pour une table de mortalité donnée, comparer le changement de distribution obtenue lorsque l'âge augmente de 65 à 100 ans;
- pour une même table, comparer l'effet d'un changement de sexe de M à F sur la densité et les mesures (espérance, variance, quantiles);

- pour une même table et même personne, comparer l'effet de changer la date d'évaluation, et ainsi l'effet de l'amélioration de la mortalité dans le temps (valide pour tables de mortalité avec échelle de projection);
- pour une même personne et même date d'évaluation, comparer l'effet d'un changement de table de mortalité (3 tables de référence proposées);
- effet combiné de ces changements.

## 2- Référence interne

Éléments de comparaison, paramètres, objets utilisés

- objet de calcul DistributionMortalite.java, version 2016-09-19
- comparaison de tables de mortalité de référence GAM-83, UP-94, ICA CPM2014 Mixte (Composite)
- sexe : Homme, Femme
- Âge de calcul: de 60 à 100 ans par pas de 5 ans
- Date d'évaluation : 2014, 2015, 2016, 2017, 2020, 2030, 2045
- Sortie: illustration sous forme graphique de la densité en pas de temps annuel
- Valeurs numériques d'espérance de vie et d'autres mesures pertinentes

Les graphiques se trouvent aux pages suivantes, avec certains commentaires selon l'élément qui est comparé.

## 3- Explications sur le lien entre les centiles et la couleur des bâtonnets des histogrammes

Pour illustrer sur les graphiques diverses sections de la fonction de densité, nous utilisons des couleurs « froides » (bleus) pour les risques faibles et des couleurs « chaudes » (rouges) pour les risques élevés d'un point de vue du risque de longévité. Les divisions initiales couvrent les quatre quartiles, mais présentent plus de détail dans le dernier quartile pour identifier le dernier décile et la région correspondant au 95<sup>e</sup> centile.

L'âge des centiles se trouve dans le dernier bâtonnet de la couleur en question. Par exemple, dans le premier histogramme ci-dessous pour l'âge de 65 ans, chaque bâtonnet correspond à une valeur entière de durée de vie : la valeur de 17 correspond aux durées de vie comprises entre 17,00 et 17,99. La fonction de densité pour ces valeurs entières provient des valeurs suivantes illustrées dans l'histogramme:  ${}_0|q_{65}^{2017} = 0,00781$ ,  ${}_1|q_{65}^{2017} = 0,00813$  ...,  ${}_{17}|q_{65}^{2017} = 0,02944$  et ainsi de suite. Avec ces paramètres, nous avons :  ${}_{17}p_{65}^{2017} = 0,75397$  et  ${}_{18}p_{65}^{2017} = 0,72453$ . En conséquence les bâtonnets pour les 18 premières valeurs, de 0 à 17 inclusivement, sont inclus dans la portion du graphique associée au premier quartile.

#### **4- Effet d'un changement d'âge sur la fonction de densité**

On utilise les hypothèses suivantes pour la première série de graphiques à venir :

- Table CIA CPM2014 Mixte (Composite), table générationnelle
- Date d'évaluation au 2017-01-01
- Sexe : Homme
- Âges de 65 ans à 100 ans.

Faire attention aux changements de valeur de l'axe des ordonnées dans les histogrammes pour les âges avancés.

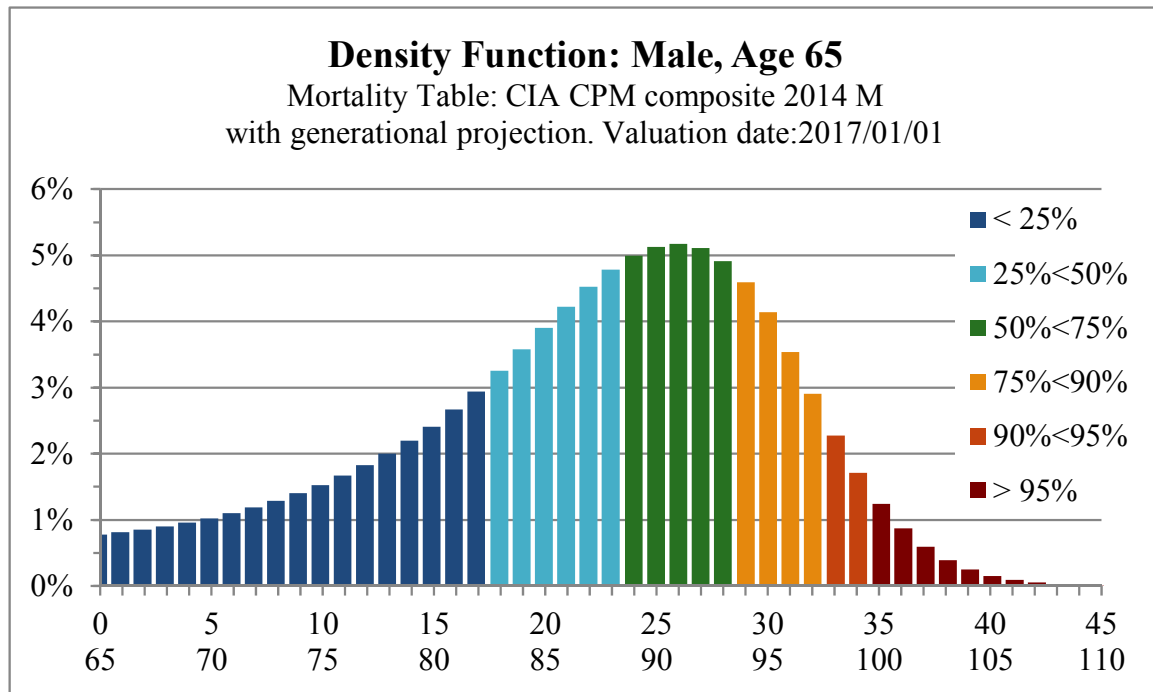
#### **Valeurs numériques associées au graphique à 65 ans**

Sous une hypothèse de distribution uniforme des décès, on retrouve les valeurs suivantes pour plus d'information (voir plus de détails à l'annexe 3):

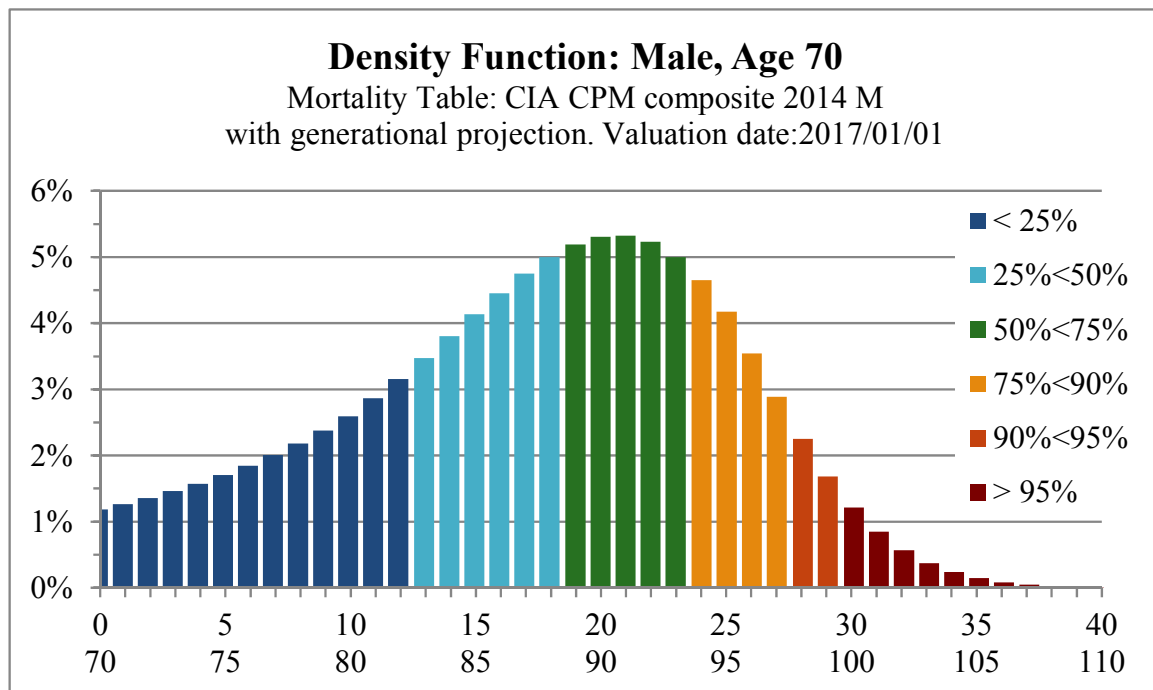
- premier quartile : 17,135 années;
- médiane : 23,621 années;
- troisième quartile : 28,567 années;
- 90<sup>e</sup> centile : 32,207 années;
- 95<sup>e</sup> centile : 34,249 années;
- Probabilité de survivre jusqu'à 100 ans : 3,71 %;
- Mode de la distribution : 26 ans avec 5,173 %;
- Moyenne, ou espérance de vie complète : 22,337 années;
- Écart-type : 8,492 années;

Notez que la moyenne, la médiane et le mode sont différents étant donné l'asymétrie de la distribution.

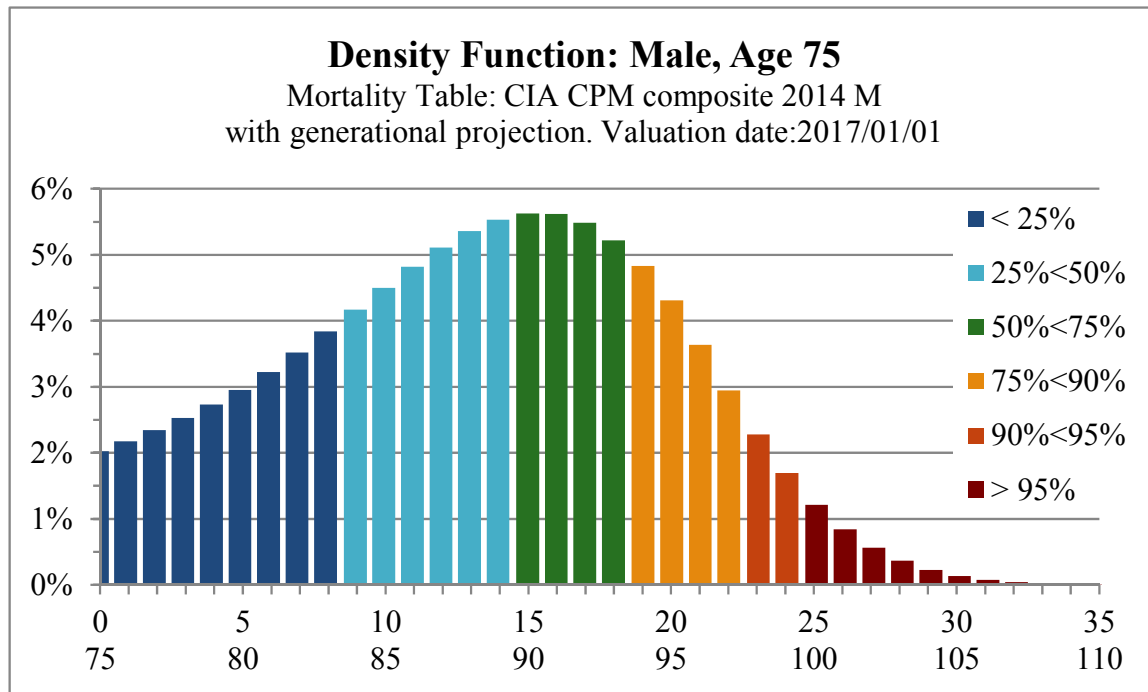
À 65 ans :



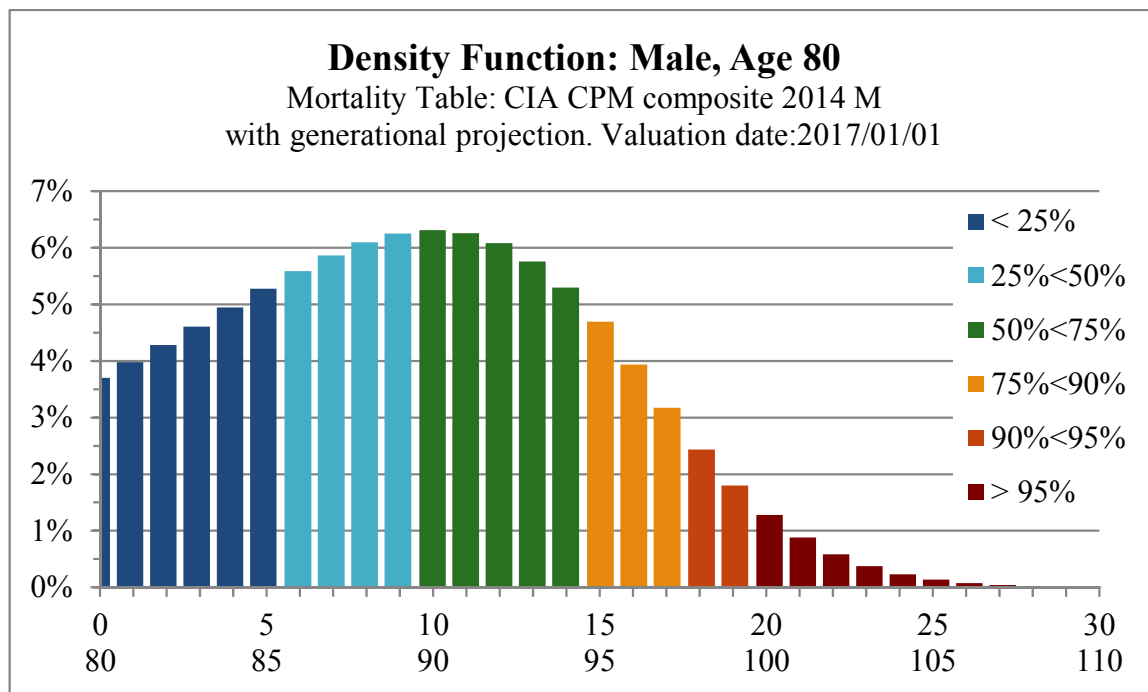
À 70 ans :



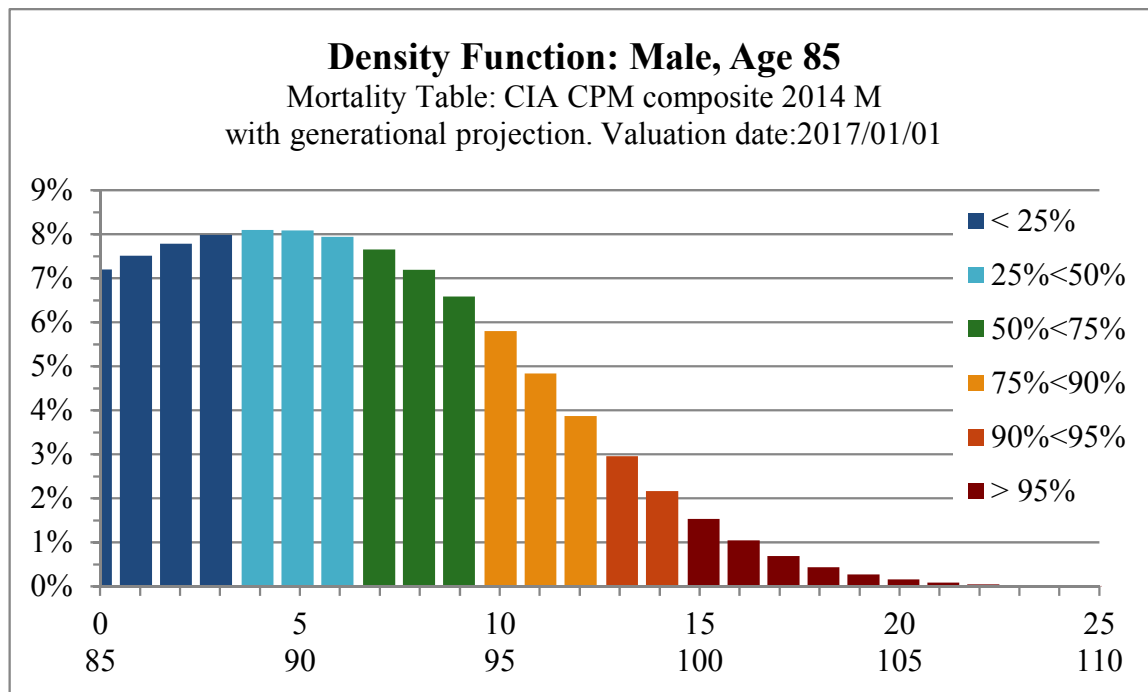
À 75 ans :



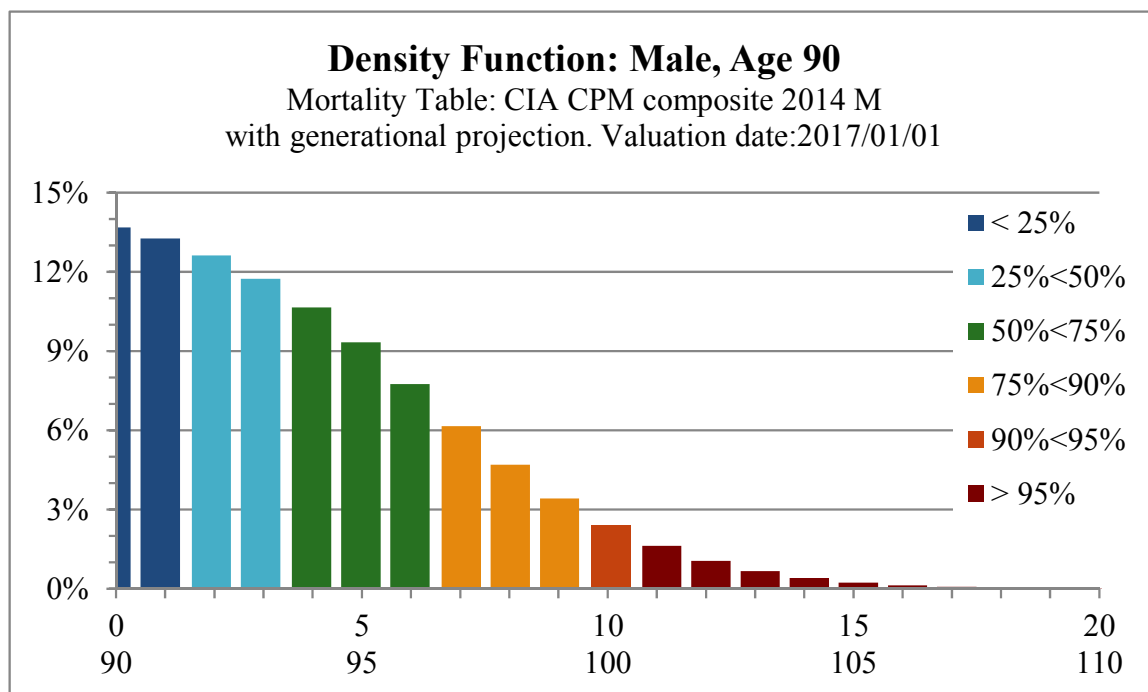
À 80 ans :



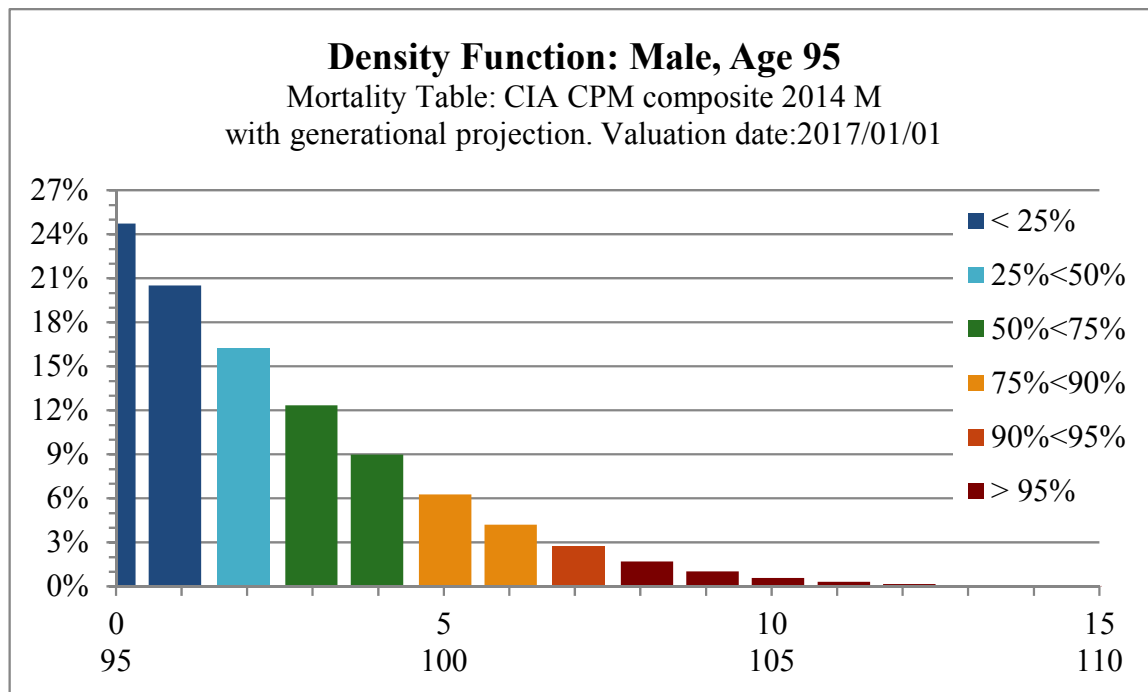
À 85 ans :



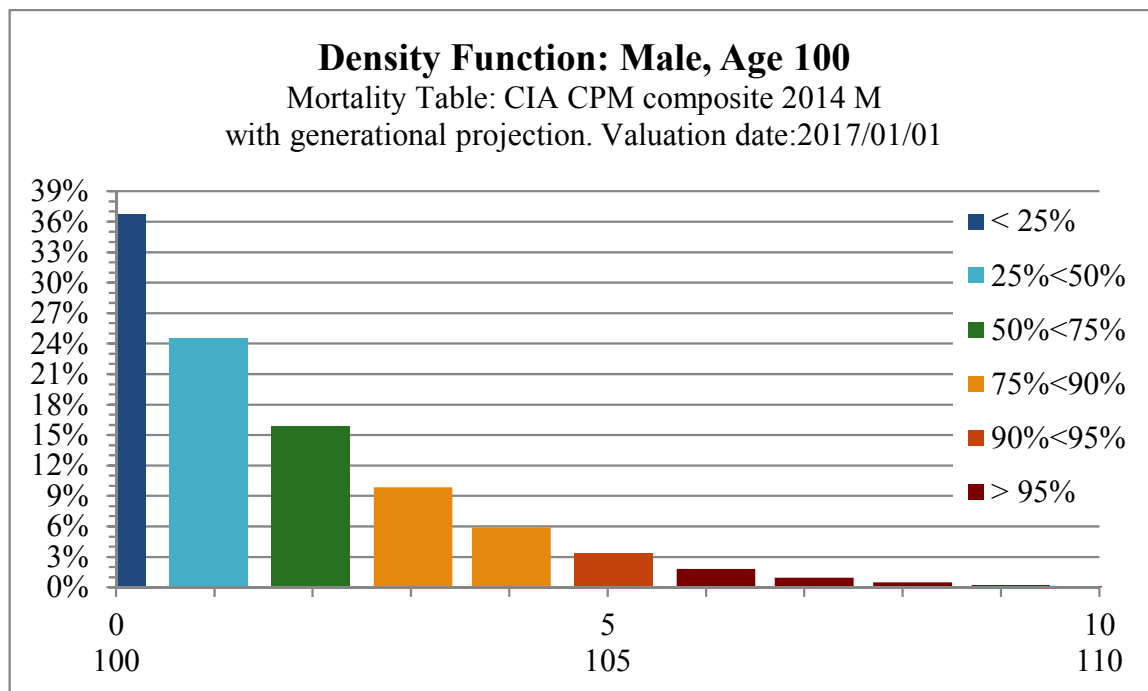
À 90 ans :



À 95 ans :



À 100 ans :



### **5- Effet d'un changement de sexe sur la fonction de densité**

On utilise les hypothèses suivantes pour la prochaine série de graphiques :

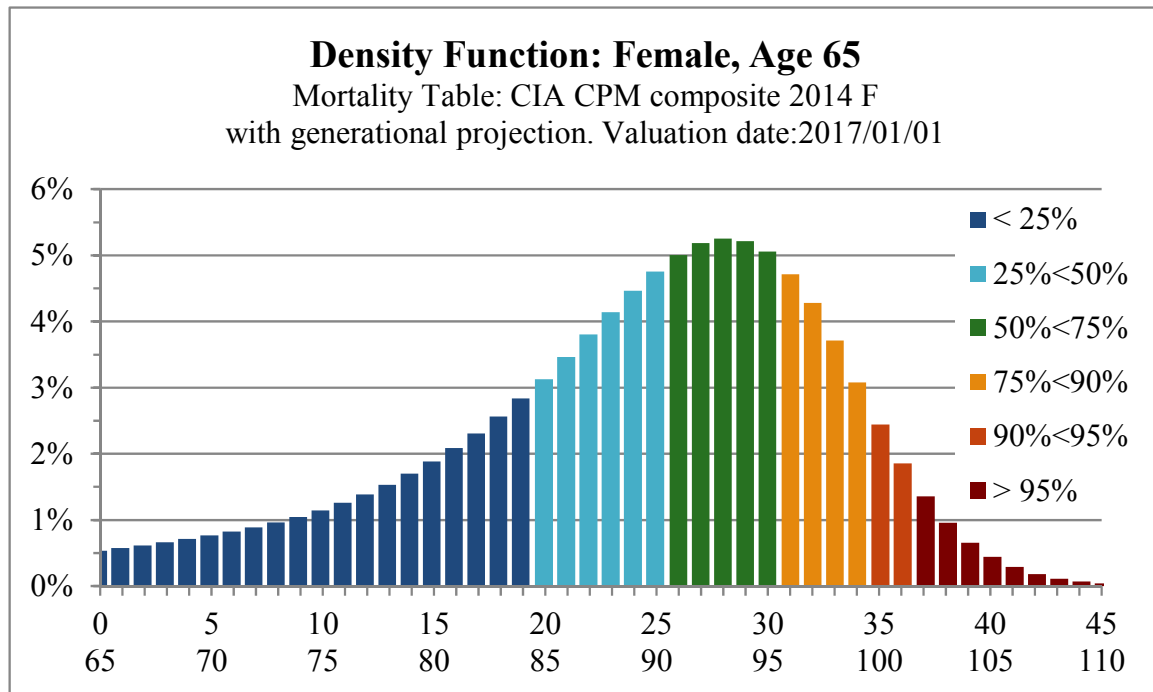
- Table CIA CPM2014 Composite, table générationnelle
- Date d'évaluation au 2017-01-01
- Sexe : Femme
- Âges de 65 ans à 100 ans.

Les histogrammes suivants reprennent les mêmes distributions que celles illustrées pour les hommes. En comparaison des histogrammes faits pour les hommes, pour un même âge donné, la forme observée de la densité de la durée de vie des femmes semble décalée vers la droite, avec un déplacement du mode de la distribution pour les premiers graphiques.

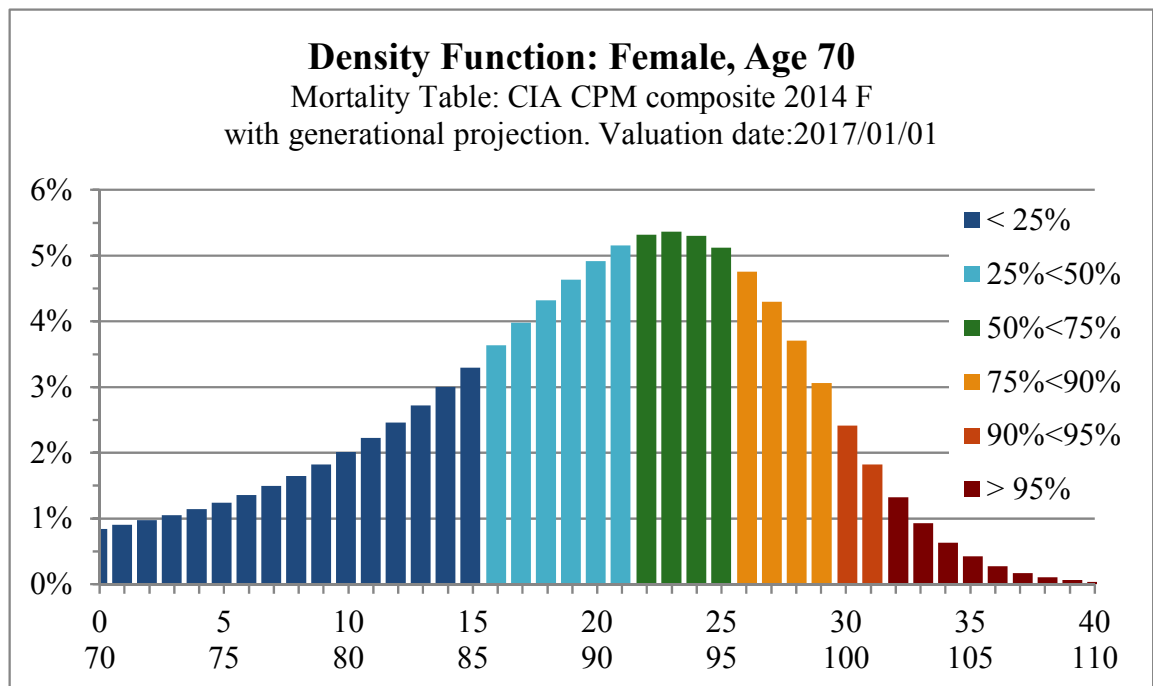
Des valeurs numériques pour les statistiques sur la durée de vie sont disponibles en annexe : l'annexe 3 présente des valeurs pour cette table de mortalité avec une date d'évaluation au 2017-01-01.



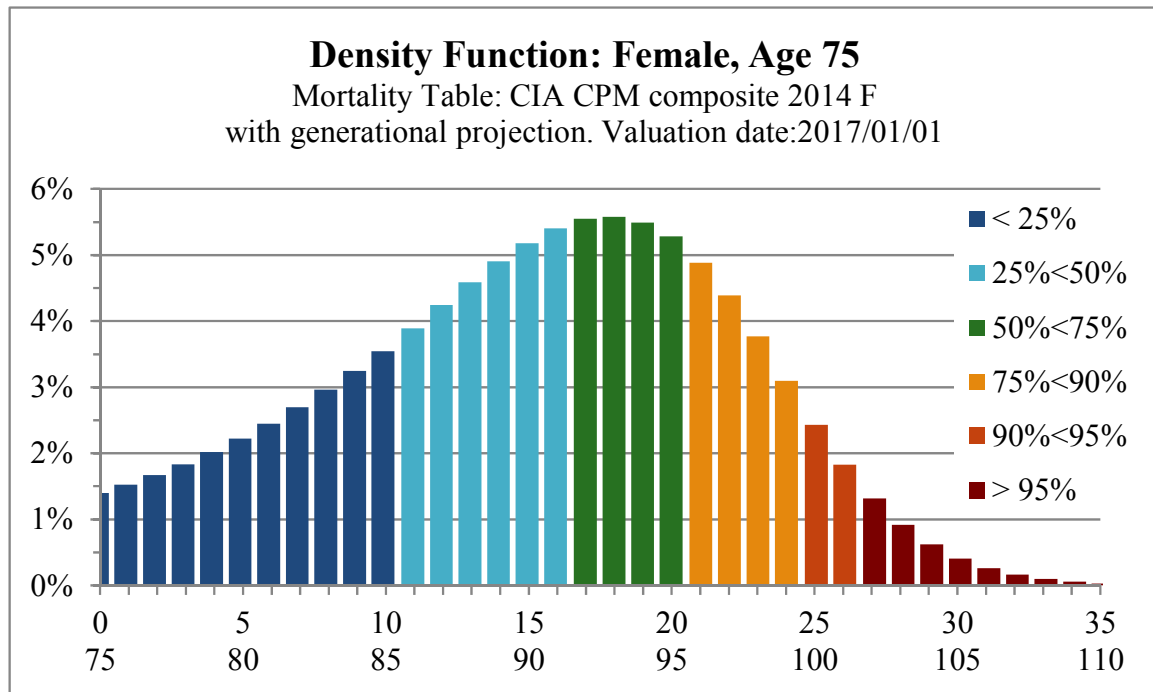
À 65 ans :



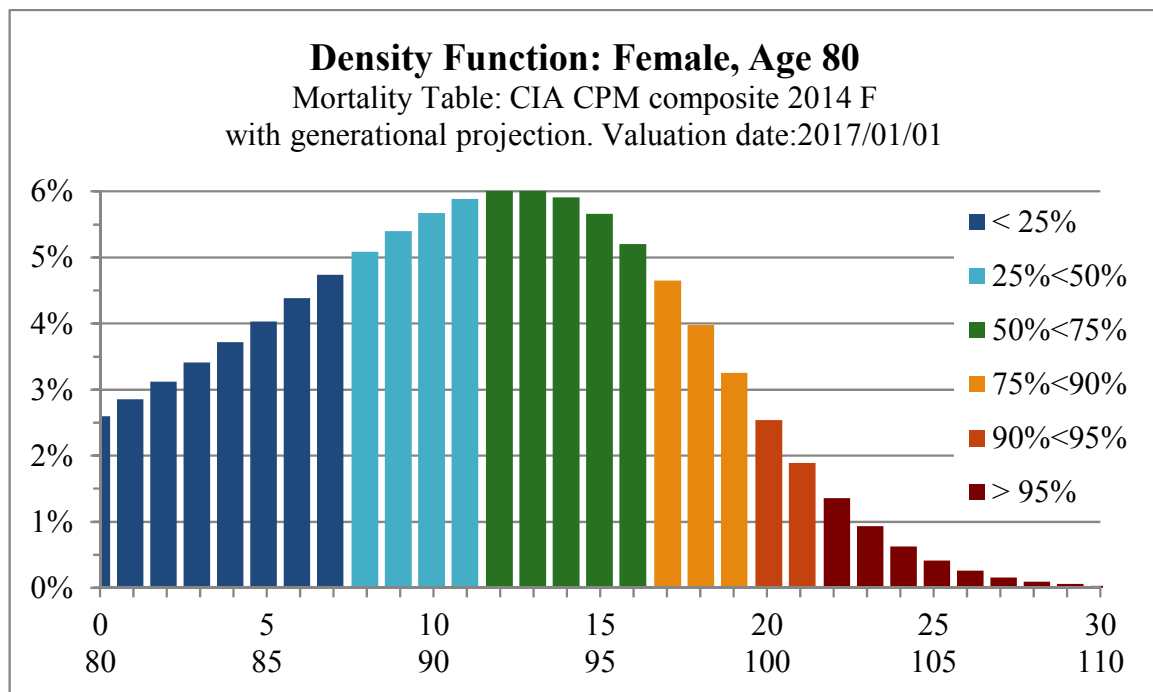
À 70 ans :



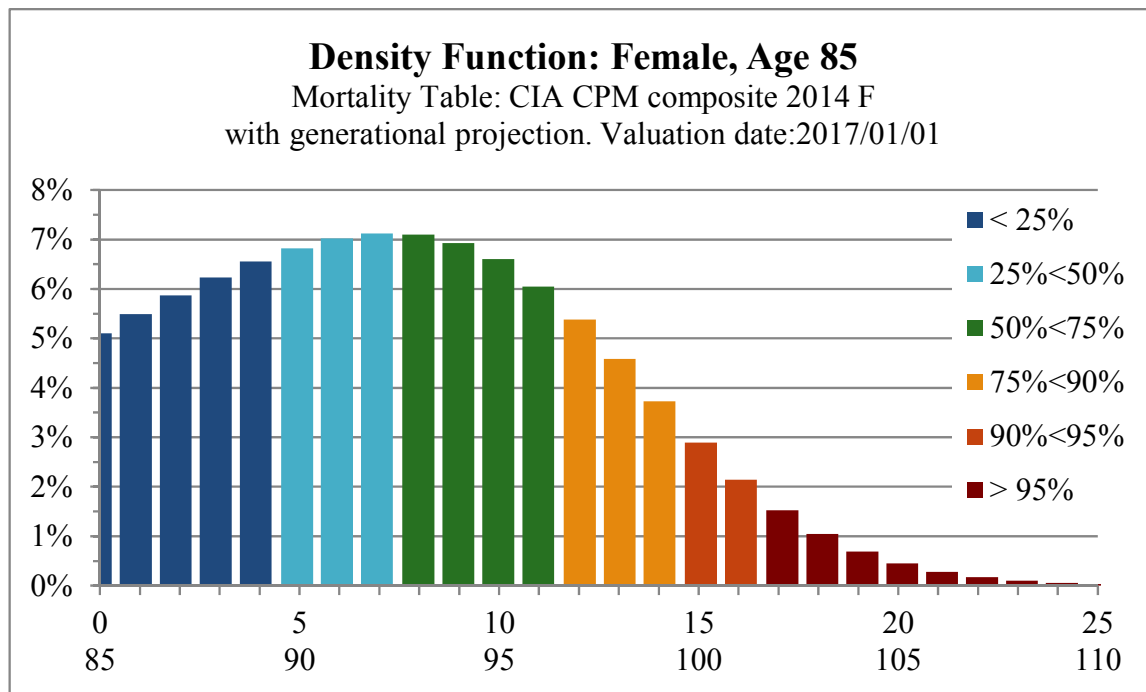
À 75 ans :



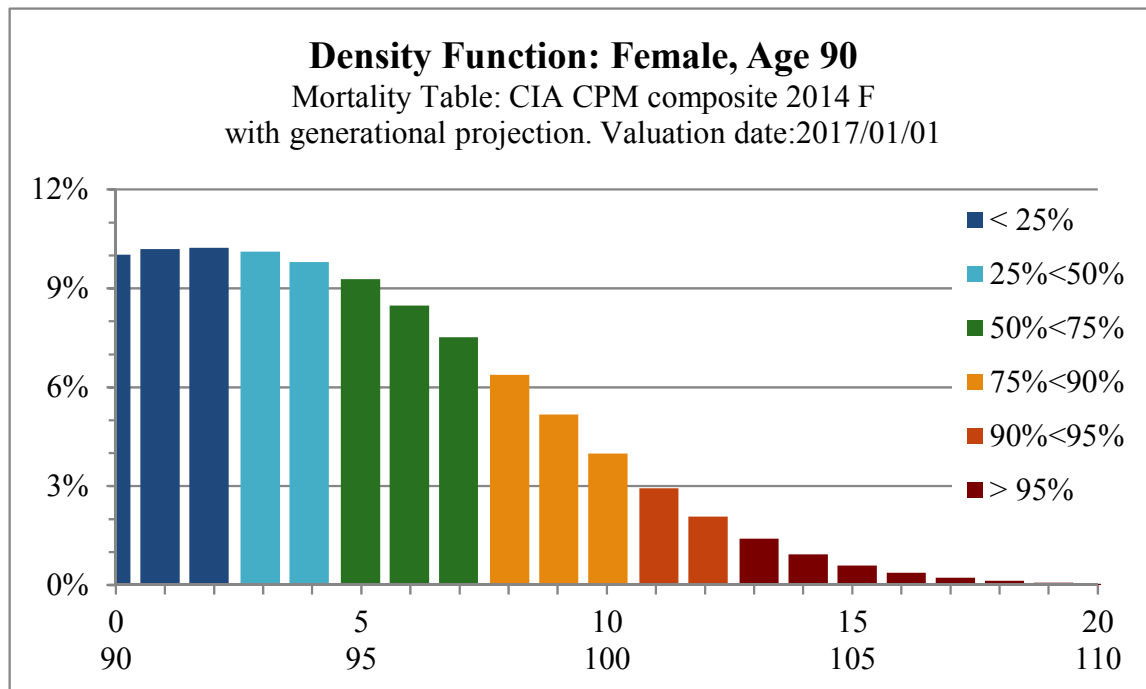
À 80 ans :



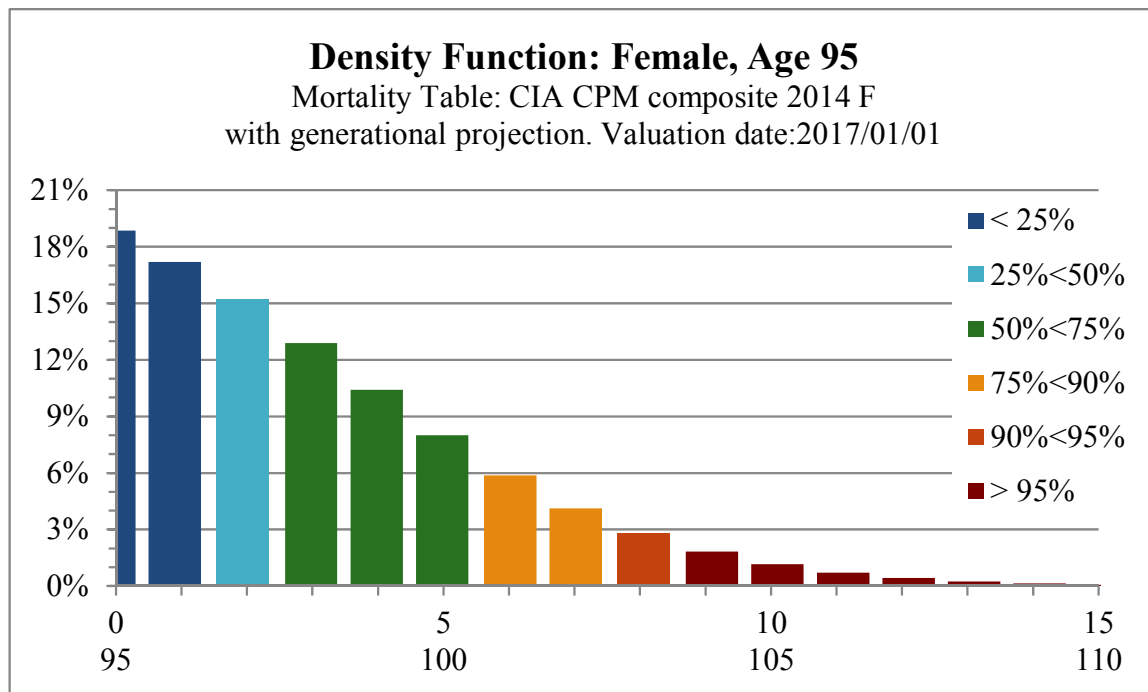
À 85 ans :



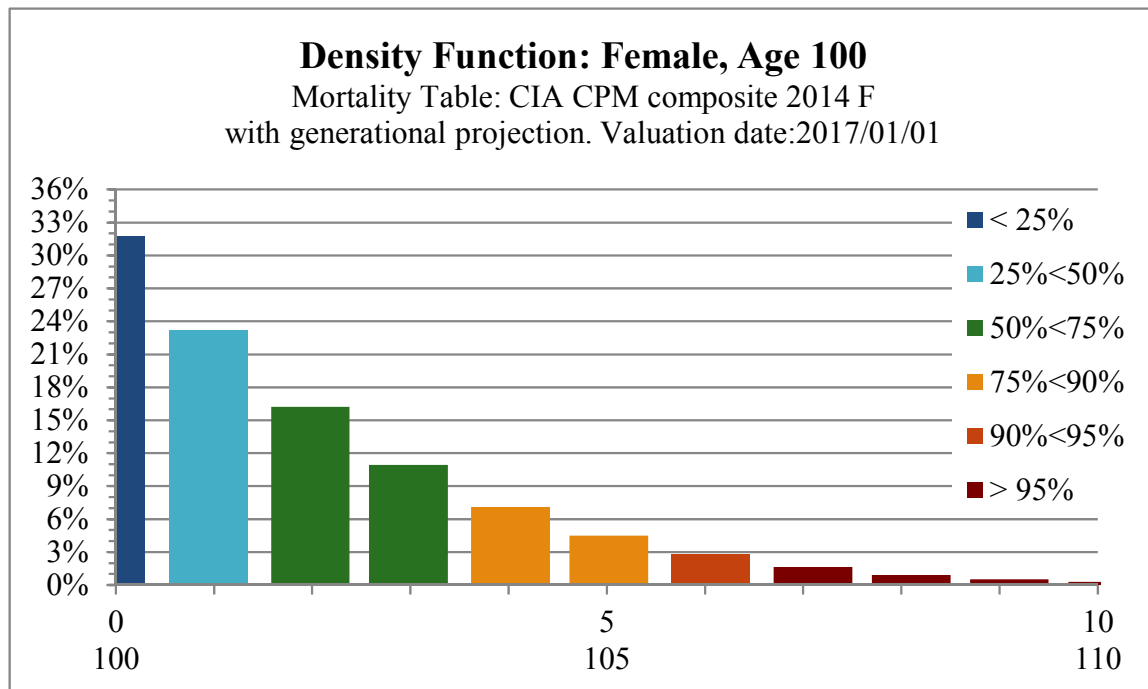
À 90 ans :



À 95 ans :



À 100 ans :

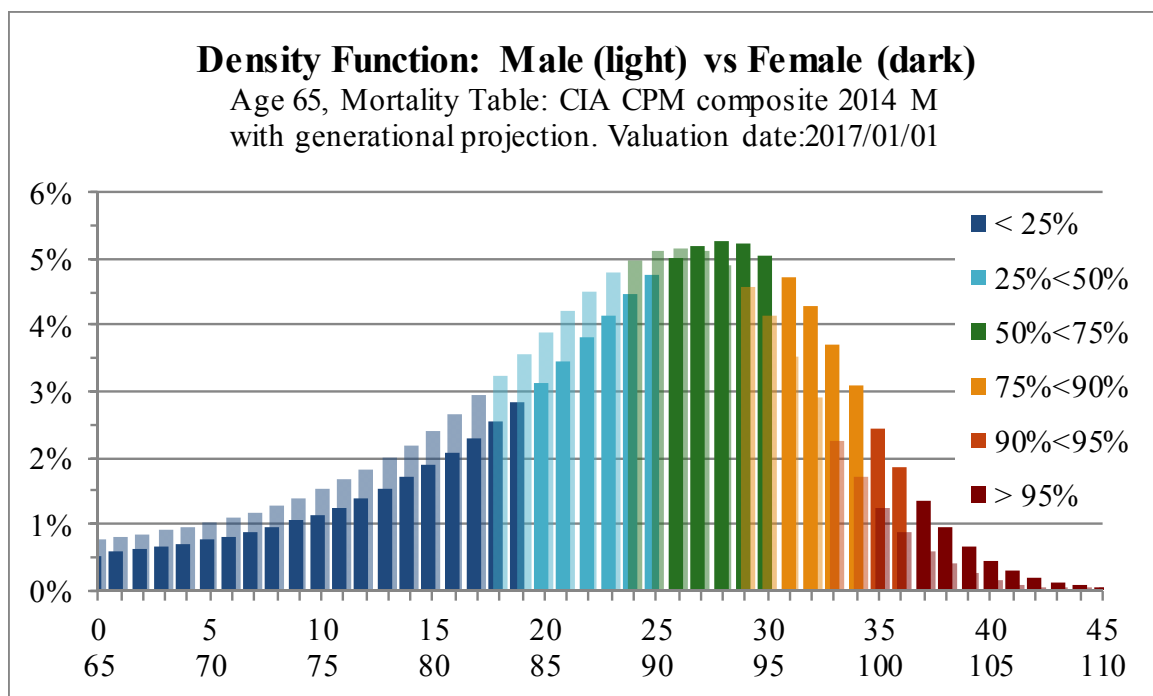


## 6- Comparaison Homme-Femme sur même graphique de fonction de densité

On utilise les hypothèses suivantes pour le prochain graphique :

- Table CIA CPM2014 Composite, table générationnelle
- Date d'évaluation au 2017-01-01
- Sexe : Homme et Femme
- Âge : 65 ans.

Les bâtonnets de la distribution des hommes se trouvent en arrière-plan (remplissage à 50 %) alors que ceux de la distribution des femmes est en avant-plan. Bien qu'il soit un peu plus difficile de distinguer chaque bâtonnet, cela illustre le déplacement de la distribution « vers la droite » lorsque l'on passe de la densité pour hommes à la densité pour femmes. Vous noterez que cela remet en perspective la notion que « les femmes vivent plus longtemps que les hommes » : bien que vrai pour la moyenne et pour les centiles, il y a quand même des différences entre individus.



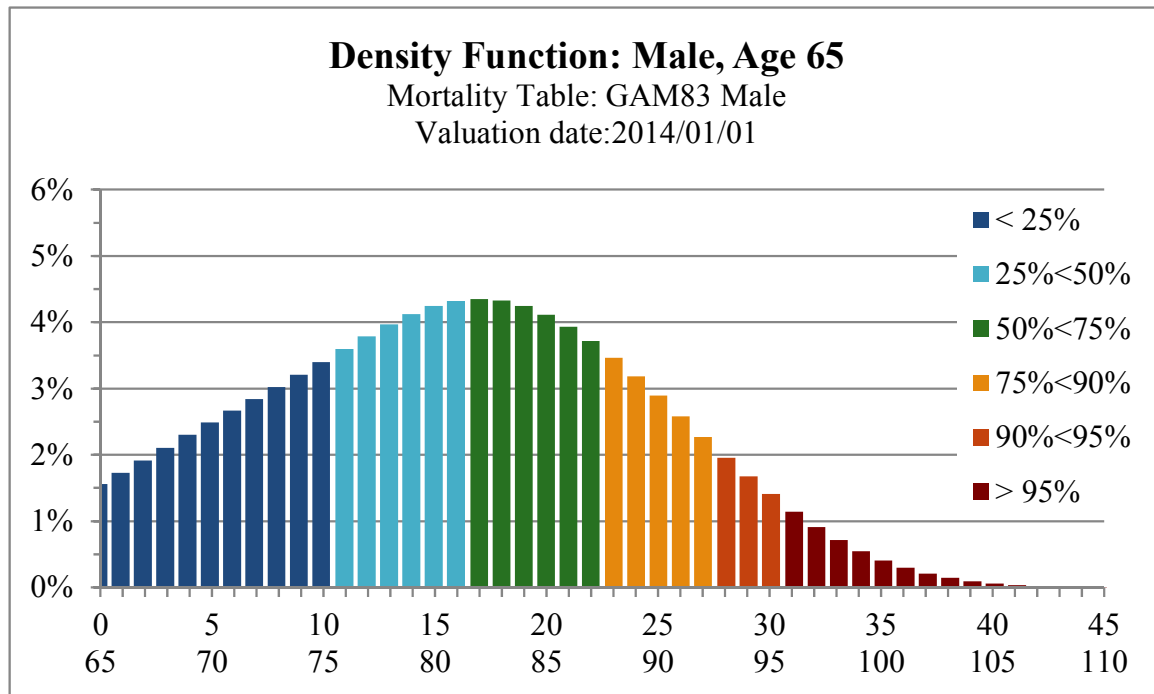
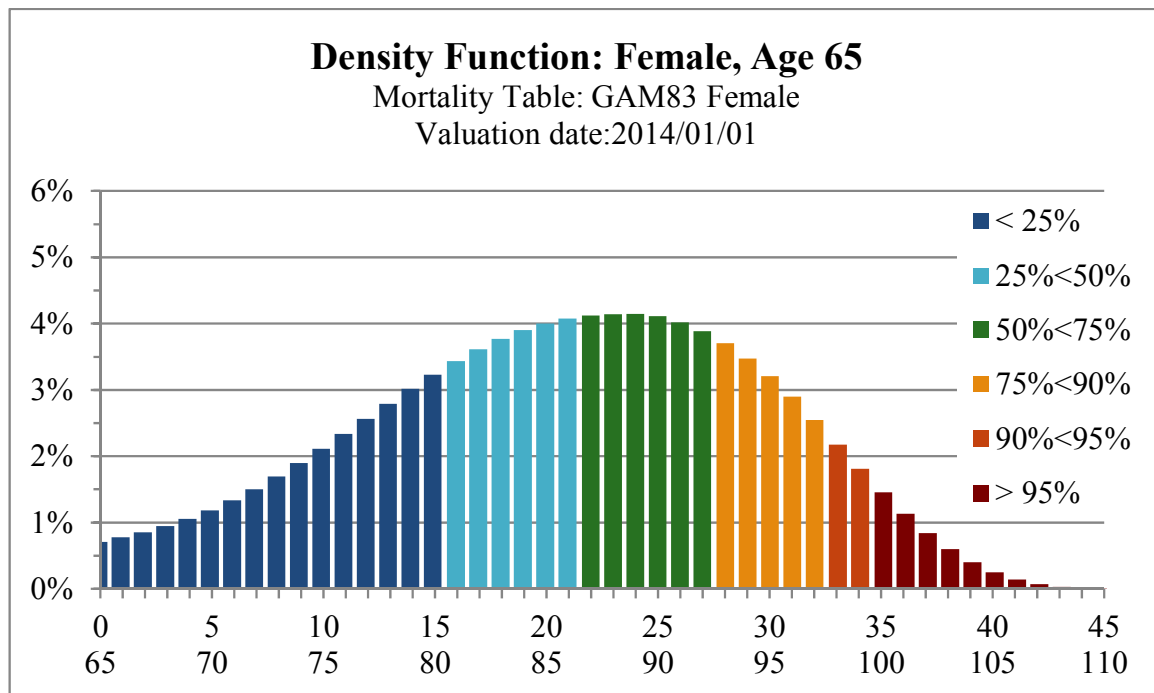
## **7- Comparaison de 3 tables de mortalité en date du 2014-01-01**

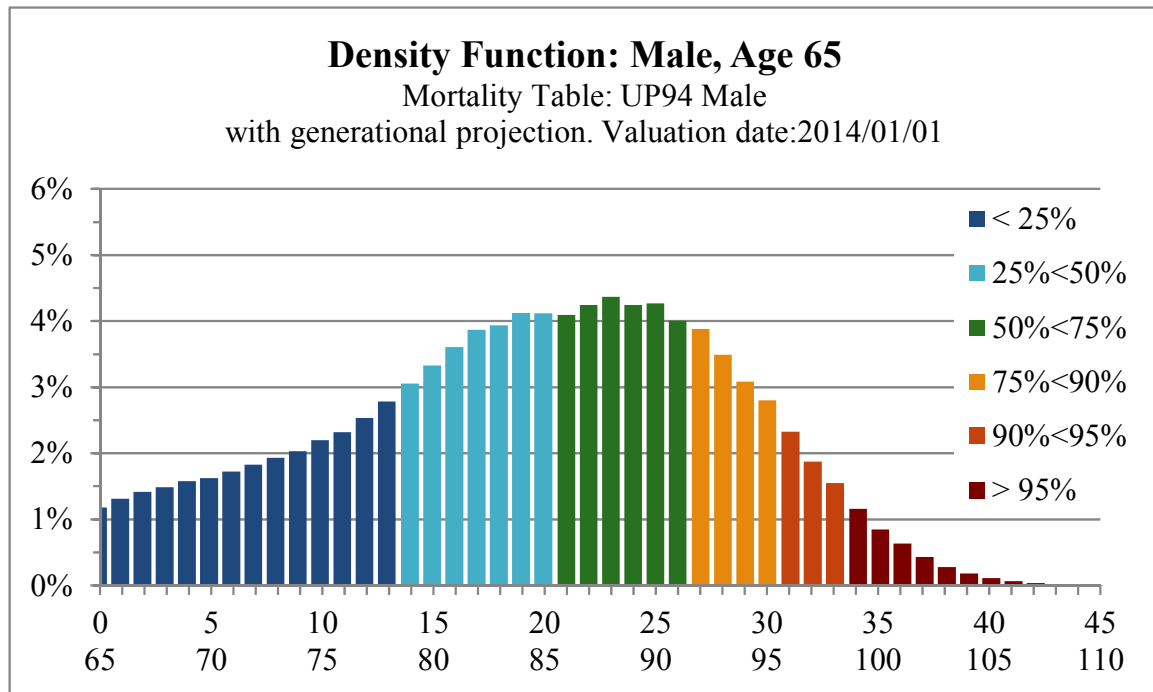
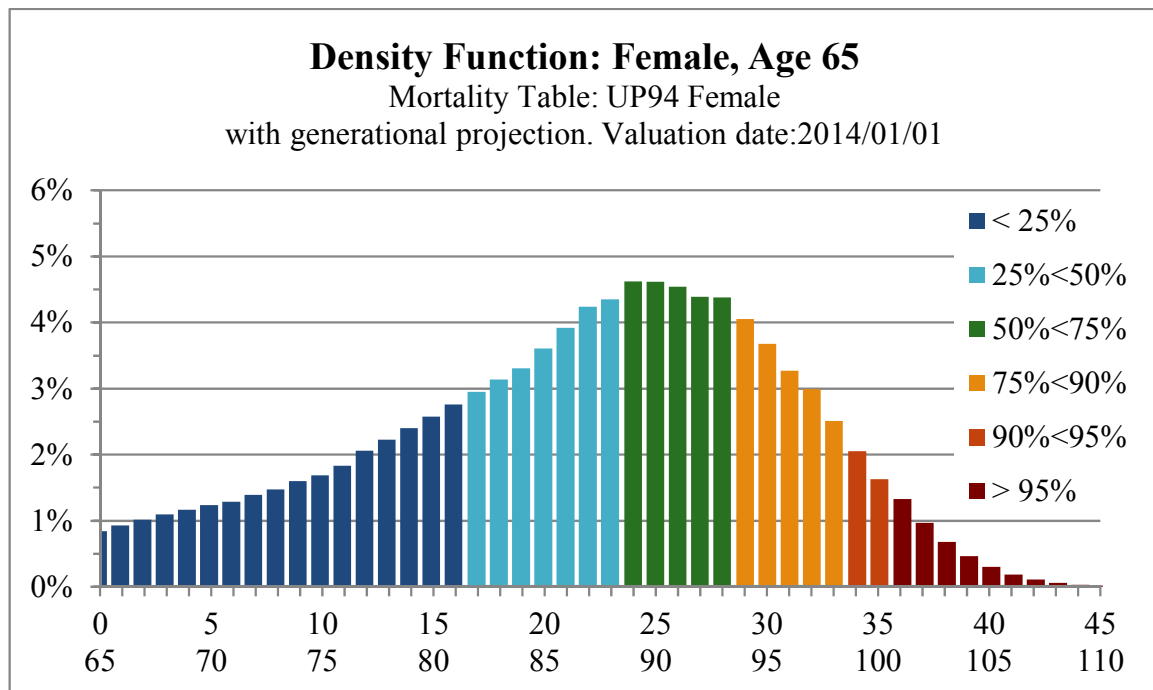
Comparaison de la fonction de densité pour un homme ou une femme de 65 ans, en date du 2014-01-01, pour les trois tables de mortalité suivantes :

- Table de mortalité statique GAM-83 (ancienne table de mortalité fréquemment utilisée pour régimes de retraite canadiens dans les années 1980-1990)
- Table de mortalité générationnelle UP-94
- Table de mortalité générationnelle CIA CPM2014 Composite

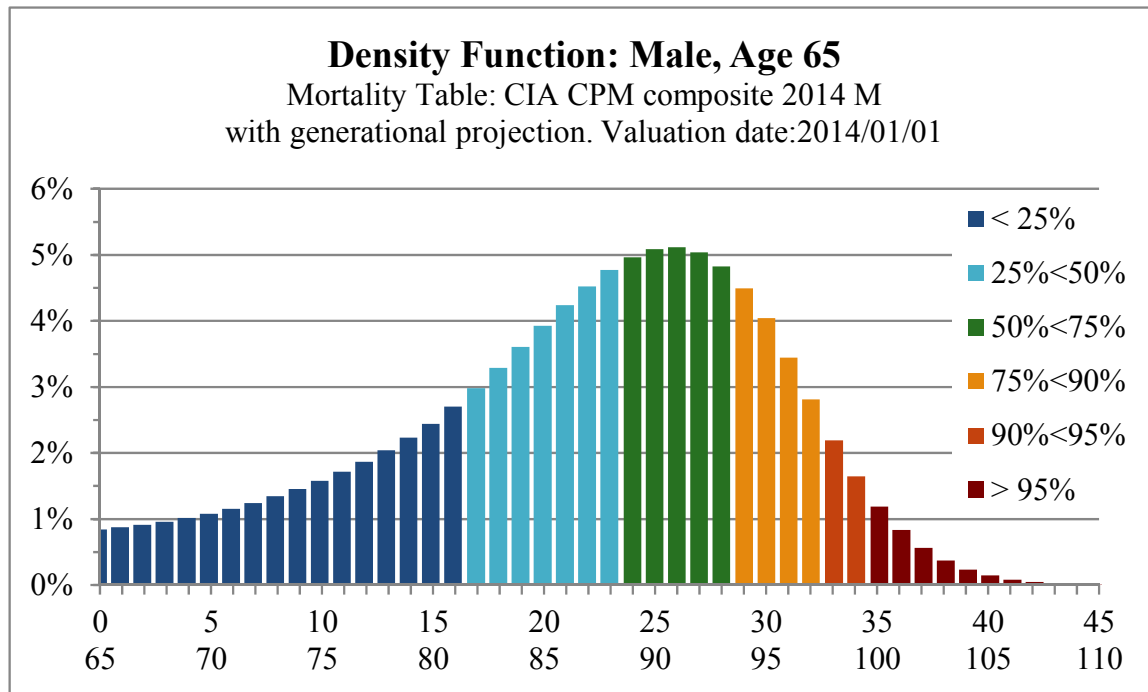
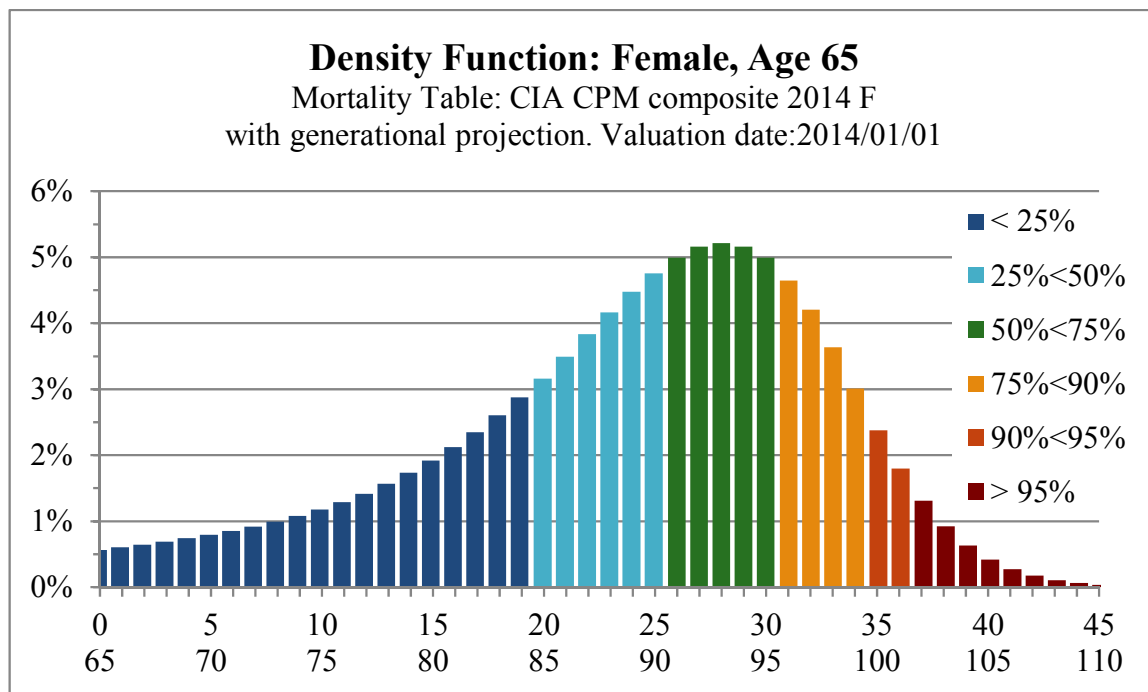
Comparativement à la section 1, notez que la densité est évaluée au 2014-01-01 et non pas au 2017-01-01 dans cette section.

L'impact de l'échelle de projection AA applicable à la table UP-94 donne un aspect particulier à la densité obtenue en 2014 : il s'agit d'une projection de 20 ans pour la probabilité de décès à 65 ans, 21 ans pour celle à 66 ans et ainsi de suite pour cette projection générationnelle. Rappelons que la table GAM-83 illustrée dans cette section n'utilise pas d'échelle de projection : les valeurs obtenues ne seraient pas modifiées par un changement de date d'évaluation.

**Homme, 65 ans, table GAM-83, 2014-01-01****Femme, 65 ans, table GAM-83, 2014-01-01**

**Homme, 65 ans, table UP-94, 2014-01-01****Femme, 65 ans, table UP-94, 2014-01-01**



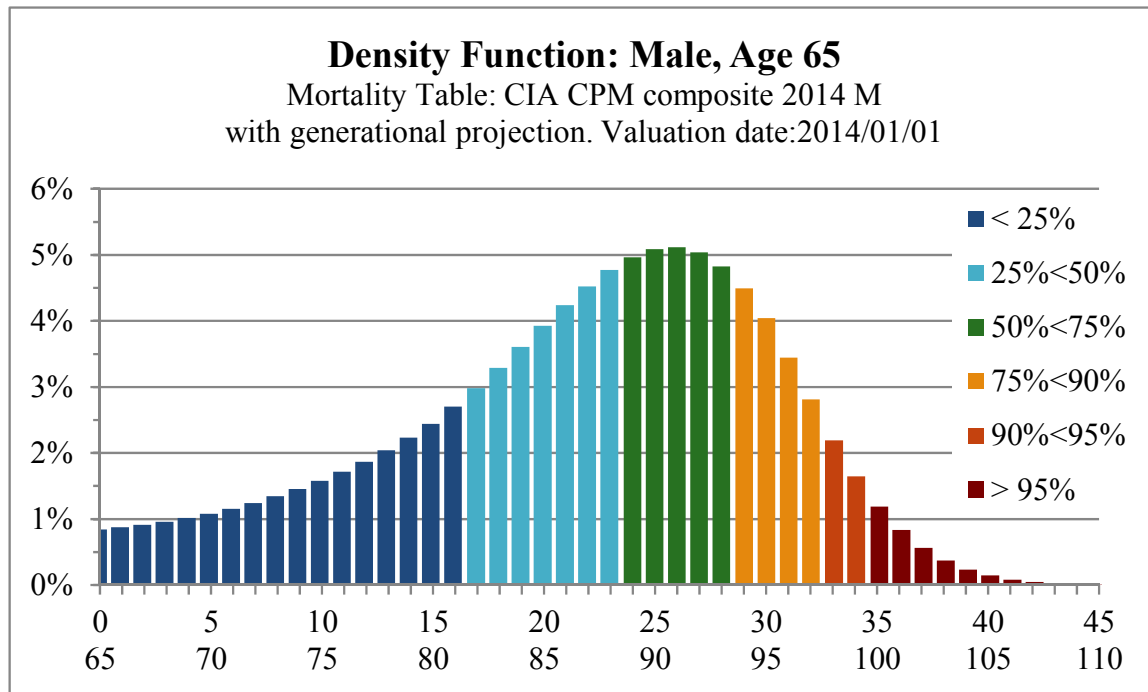
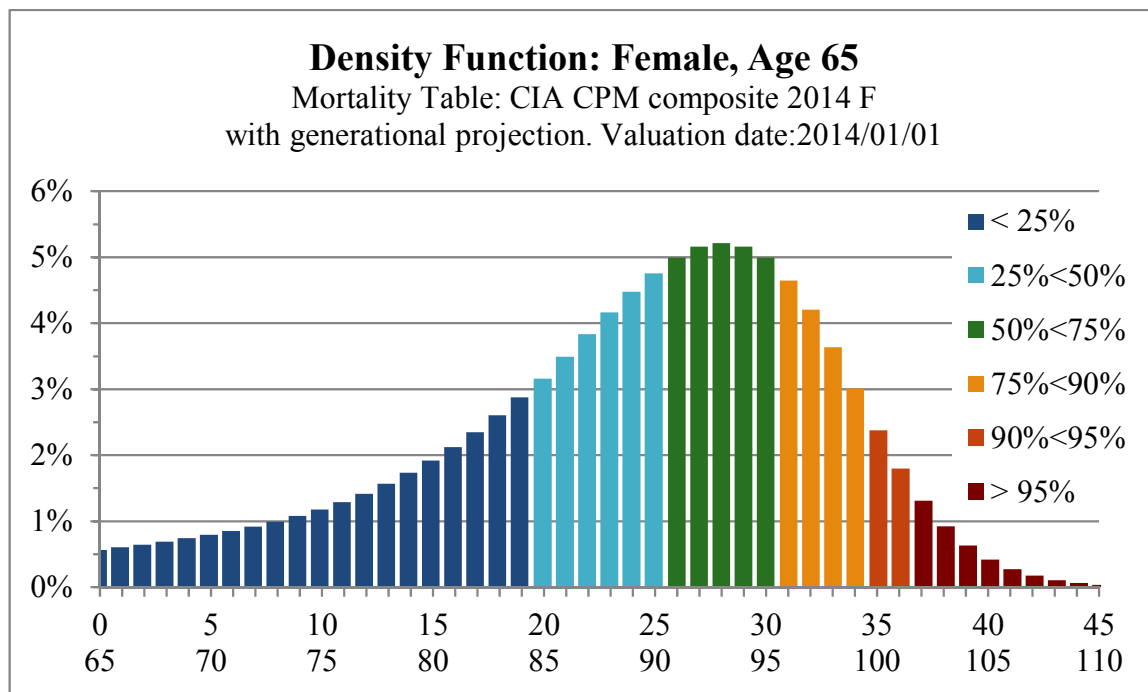
**Homme, 65 ans, table ICA CPM2014, 2014-01-01****Femme, 65 ans, table ICA CPM2014, 2014-01-01**

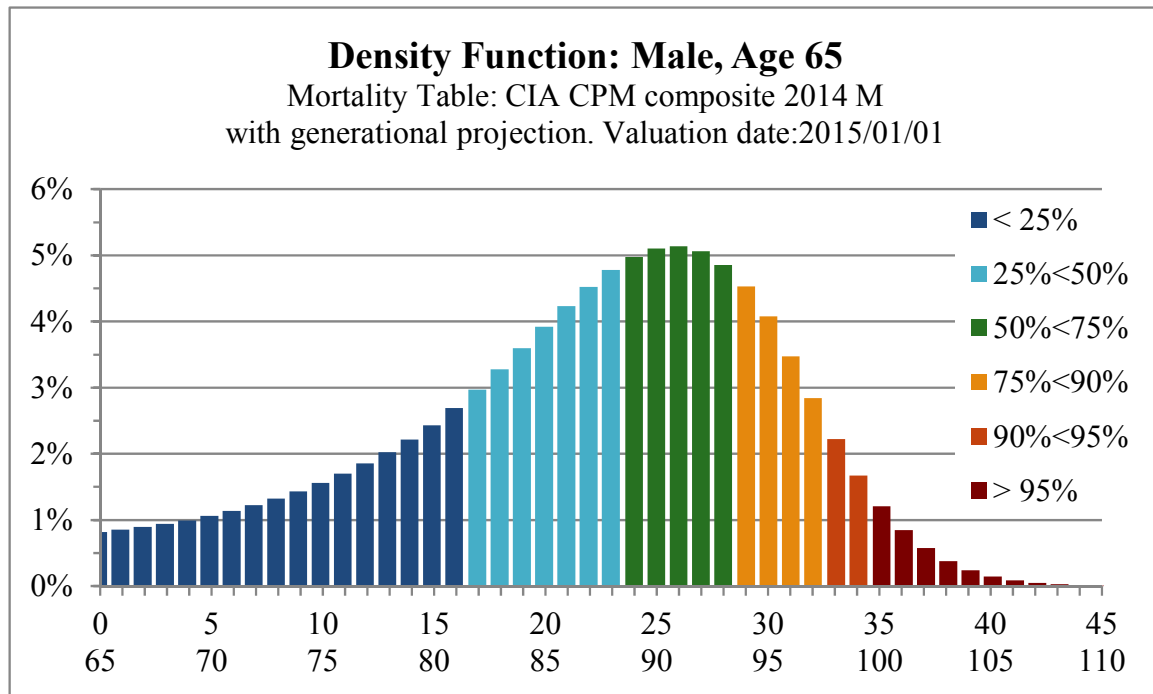
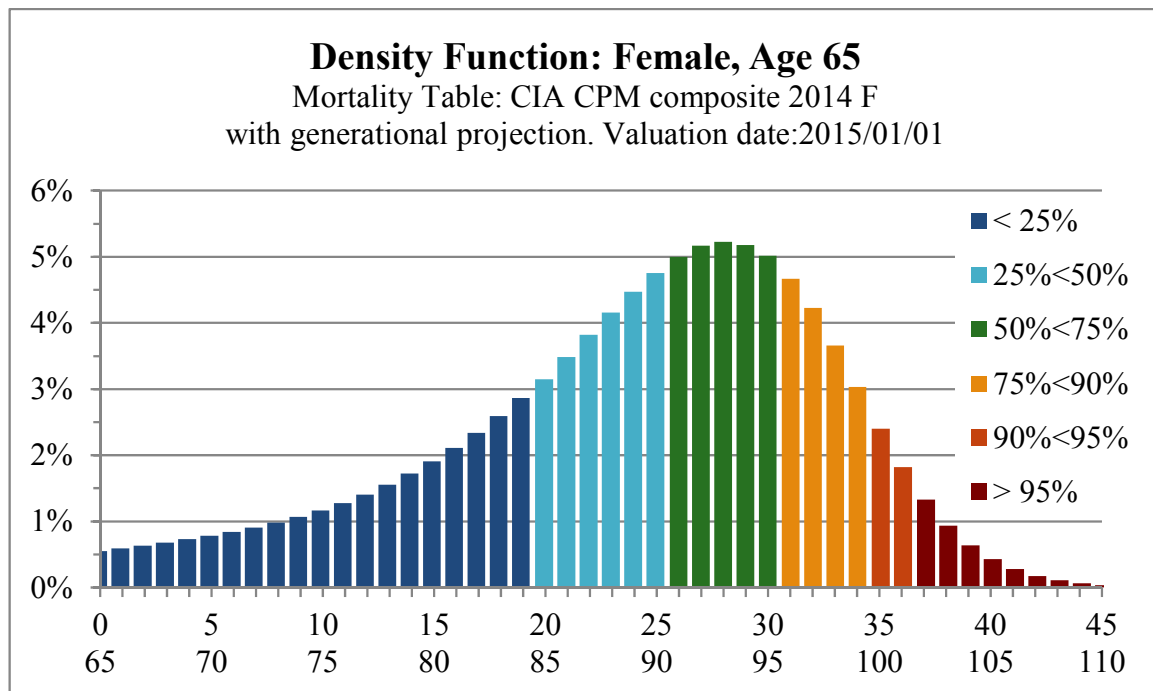
## **8- Comparaison d'un changement de date d'évaluation pour une même table**

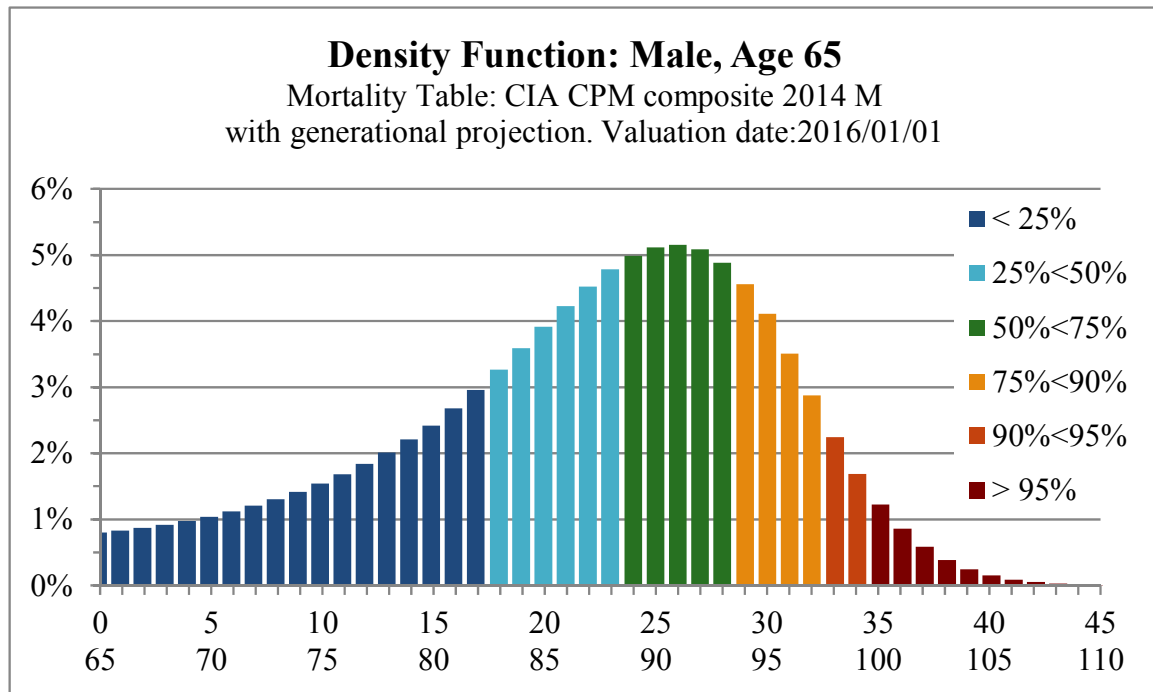
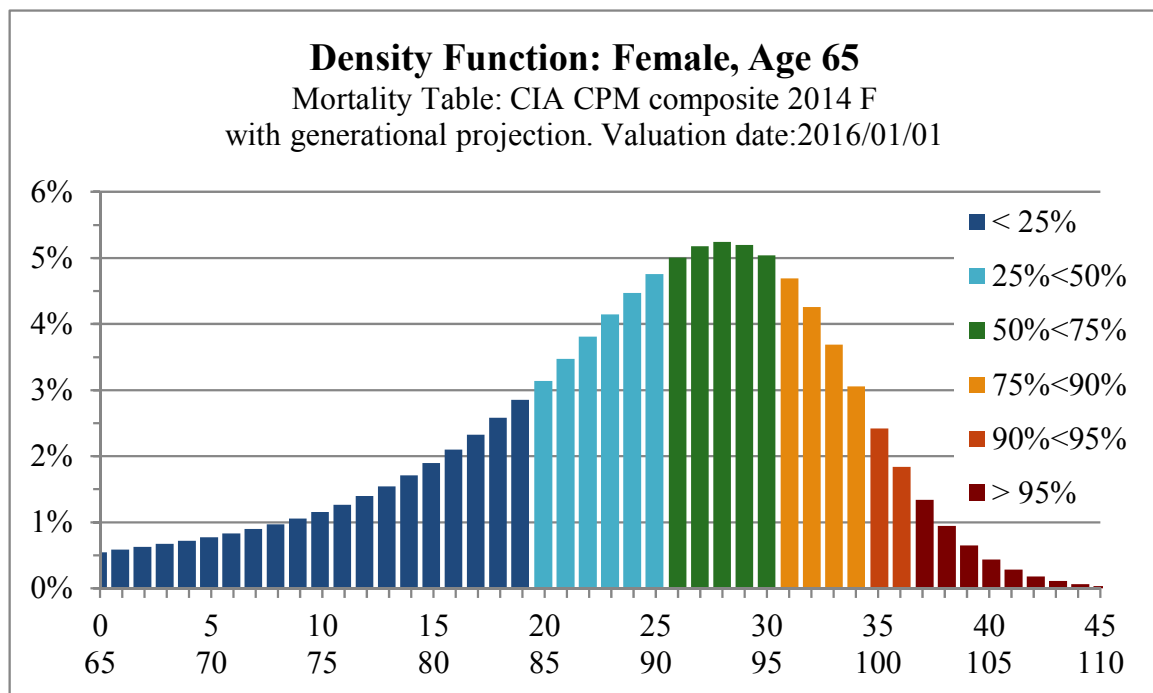
Nous illustrons à cette section l'effet de modifier la date d'évaluation d'une année civile à une autre. Nous utilisons la table de mortalité ICA CPM2014 Composite, pour un homme ou une femme de 65 ans. La date d'évaluation est le 1<sup>er</sup> janvier des années civiles suivantes : 2014, 2015, 2016, 2017, 2020, 2030, 2045.

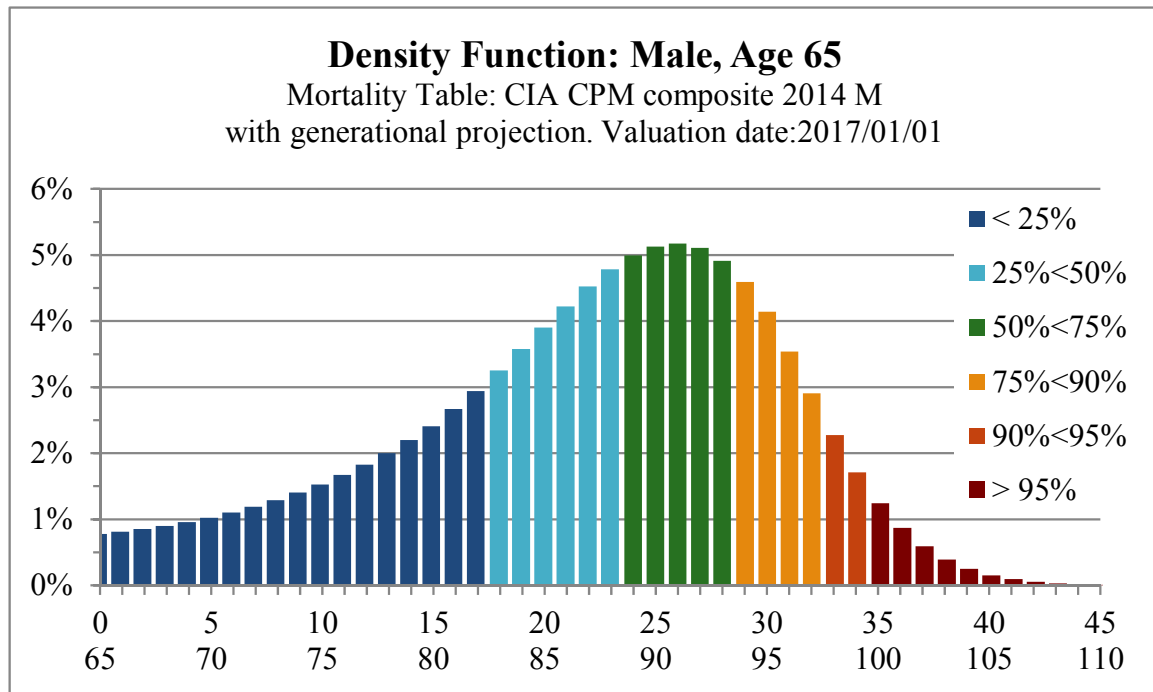
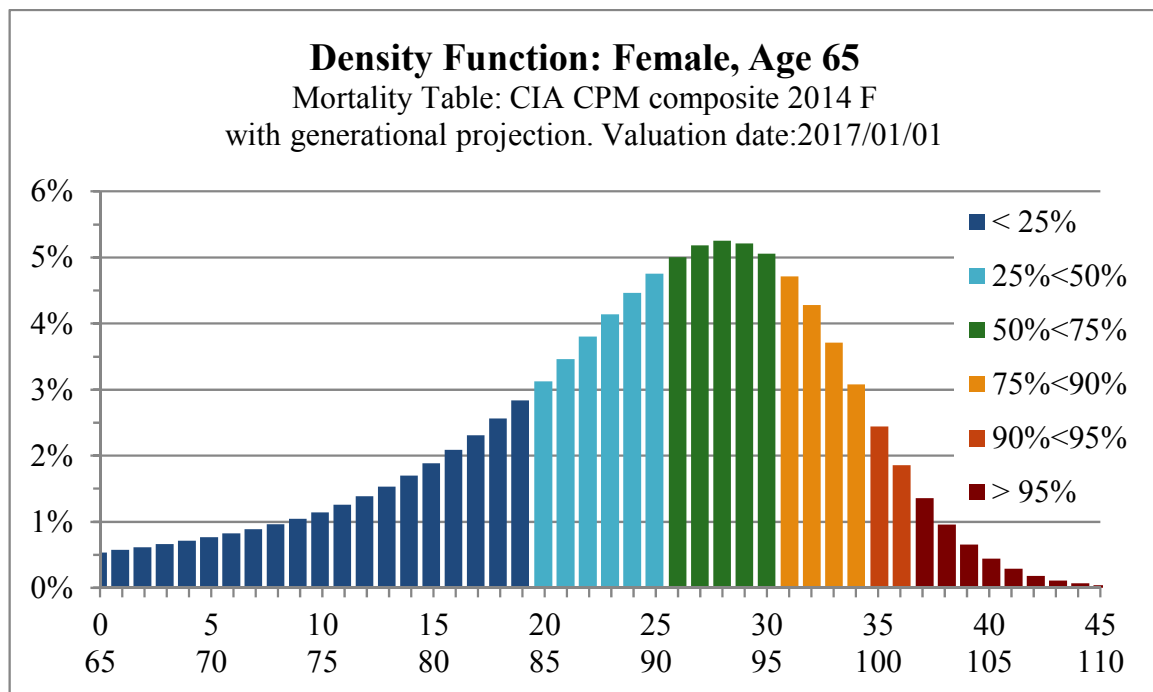
Notons que les histogrammes pour les années 2014 et 2017 sont identiques à ceux utilisés aux sections 3, 4 et 6. Ils sont repris pour fins de cohérence à l'intérieur de cette section.

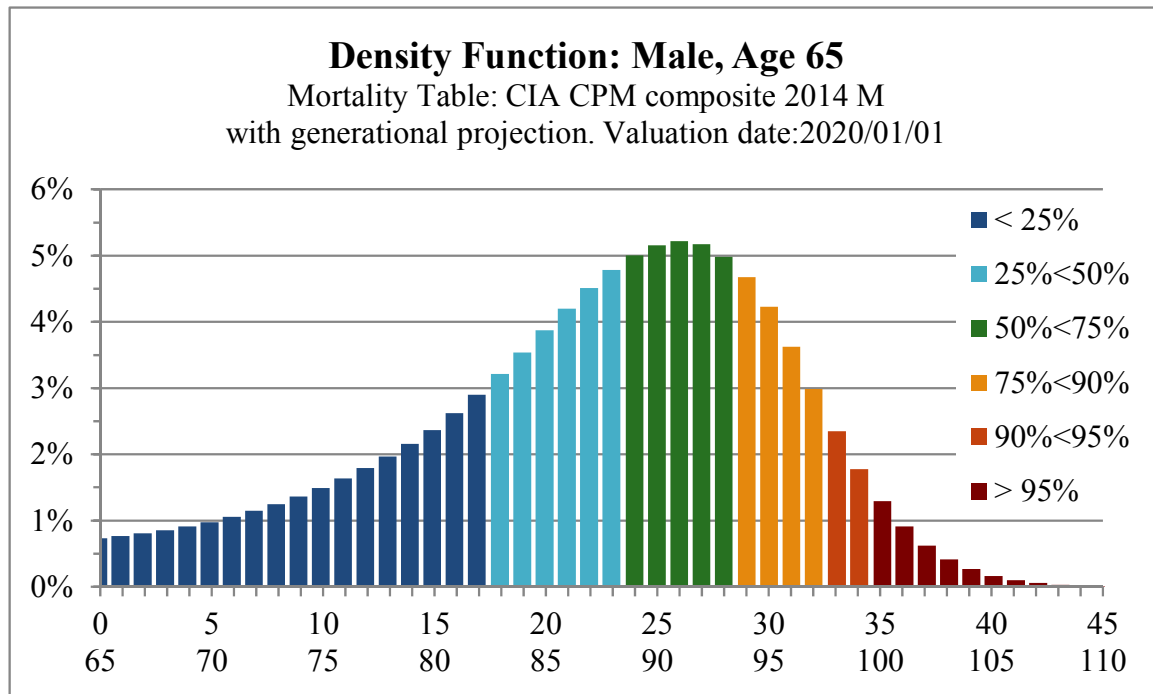
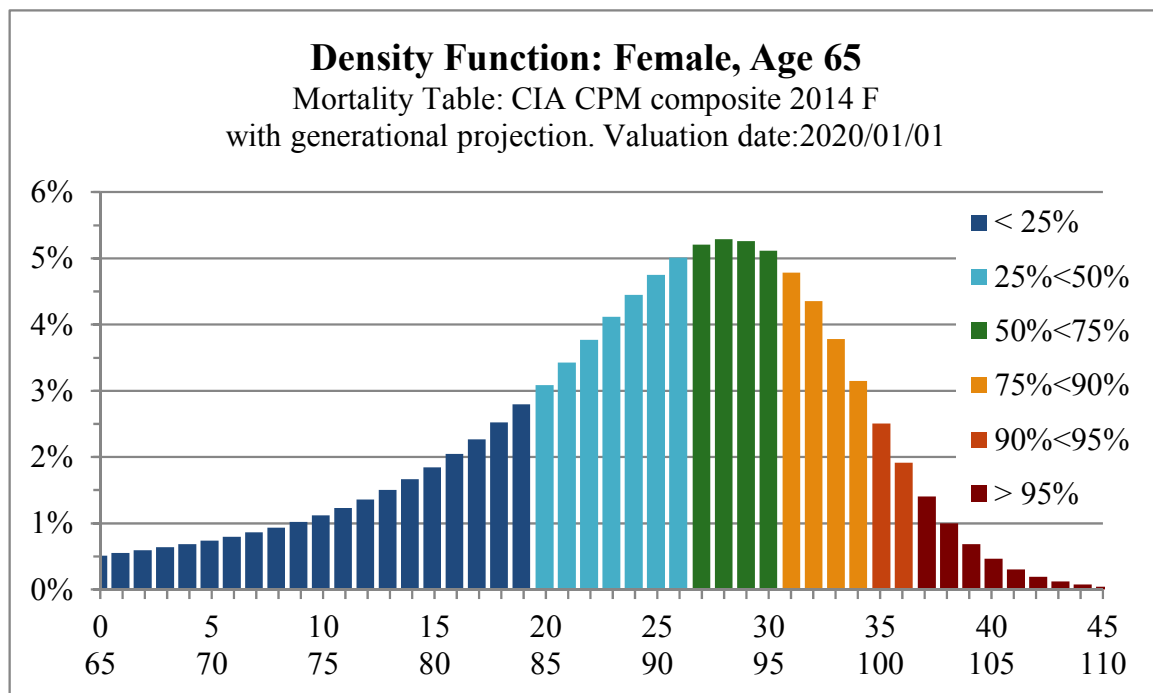
Les changements illustrent l'effet de l'application de l'échelle de projection CPM-B sur une période de plus en plus longue.

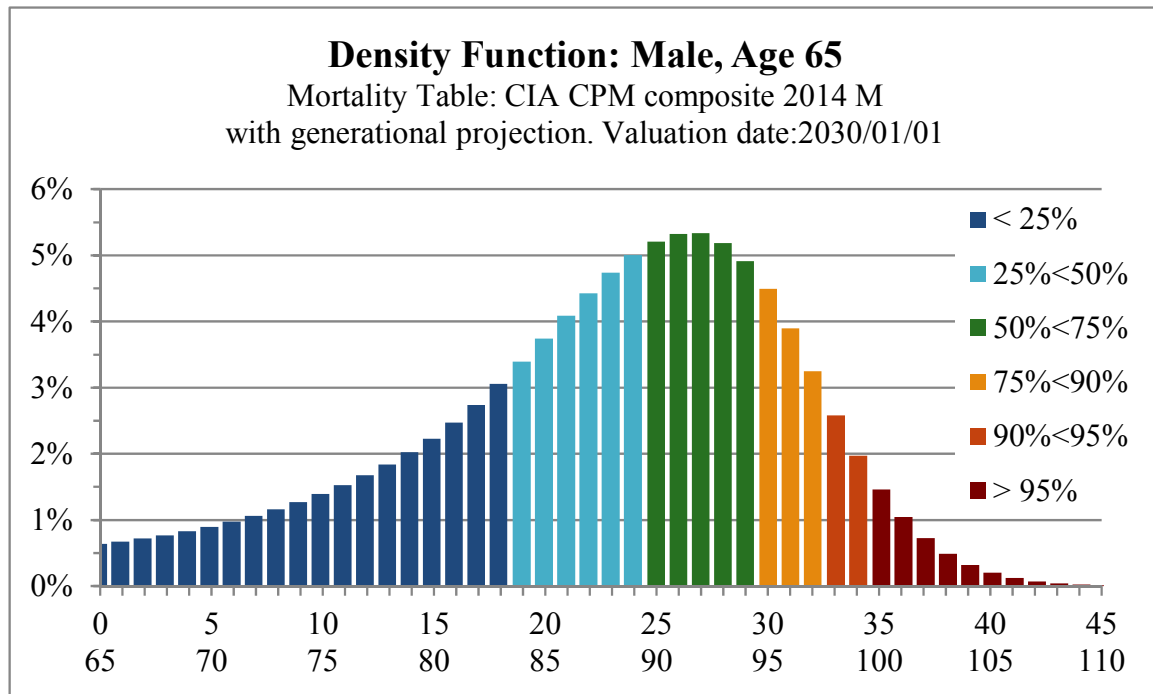
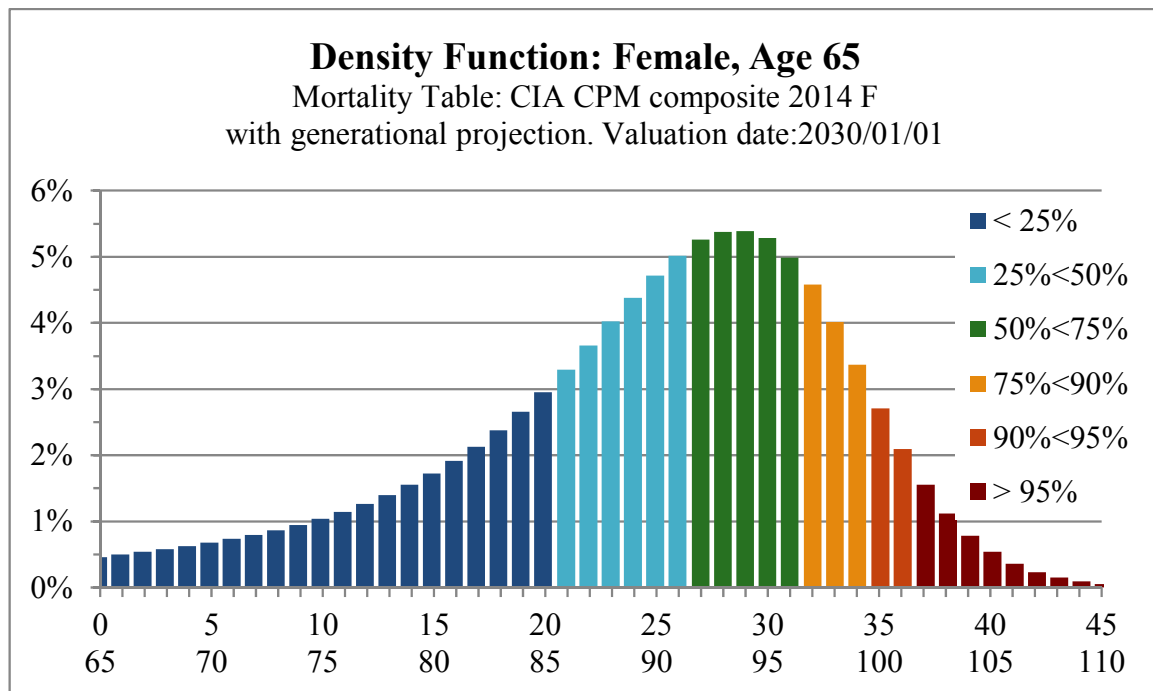
**Homme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2014-01-01****Femme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2014-01-01**

**Homme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2015-01-01****Femme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2015-01-01**

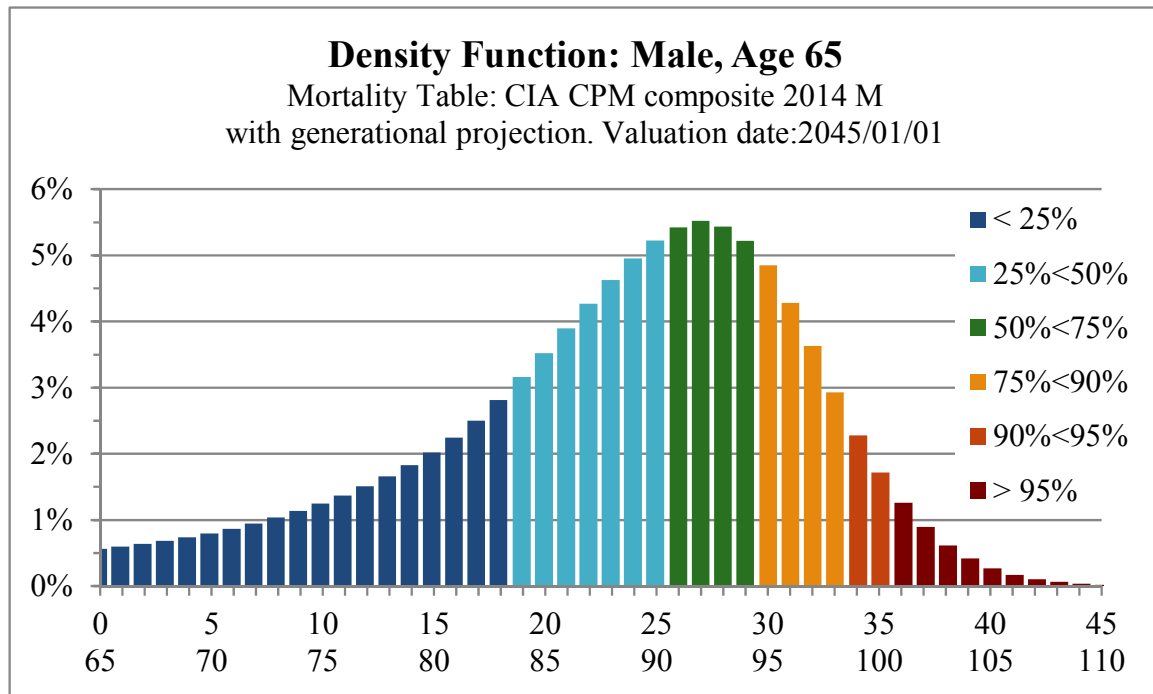
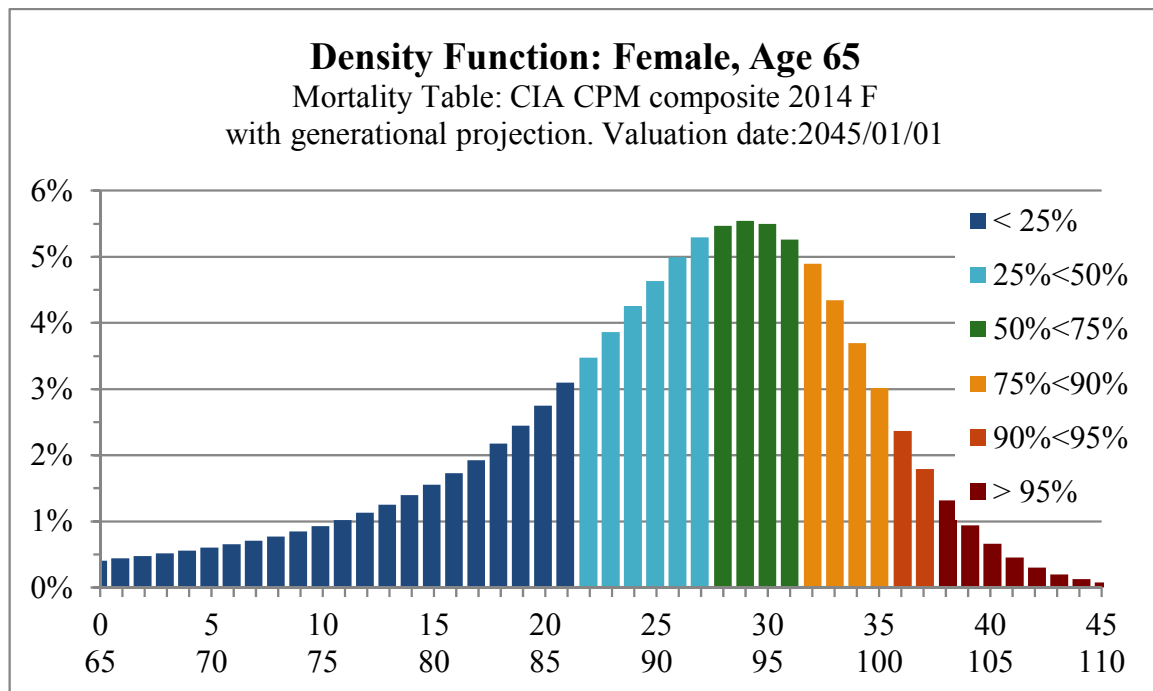
**Homme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2016-01-01****Femme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2016-01-01**

**Homme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2017-01-01****Femme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2017-01-01**

**Homme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2020-01-01****Femme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2020-01-01**

**Homme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2030-01-01****Femme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2030-01-01**



**Homme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2045-01-01****Femme, 65 ans, table ICA CPM2014, Évaluation au 2045-01-01**

**Annexe 1 : Renseignements pour la durée de vie d'une personne de 65 ans**  
 Comparaison de 3 tables de mortalité, plusieurs dates d'évaluation, Homme et Femme

**Table de mortalité    GAM-83**

<b>Date d'éval. (01-01)</b>	<b>Homme</b>			<b>Femme</b>		
	<b>Moyenne</b>	<b>Variance</b>	<b>Écart-type</b>	<b>Moyenne</b>	<b>Variance</b>	<b>Écart-type</b>
<b>2014</b>	16.69	70.99	8.43	21.29	78.39	8.85
<b>2015</b>	16.69	70.99	8.43	21.29	78.39	8.85
<b>2016</b>	16.69	70.99	8.43	21.29	78.39	8.85
<b>2017</b>	16.69	70.99	8.43	21.29	78.39	8.85
<b>2020</b>	16.69	70.99	8.43	21.29	78.39	8.85
<b>2030</b>	16.69	70.99	8.43	21.29	78.39	8.85
<b>2045</b>	16.69	70.99	8.43	21.29	78.39	8.85

**Table de mortalité    UP-94 G**

<b>Date d'éval. (01-01)</b>	<b>Homme</b>			<b>Femme</b>		
	<b>Moyenne</b>	<b>Variance</b>	<b>Écart-type</b>	<b>Moyenne</b>	<b>Variance</b>	<b>Écart-type</b>
<b>2014</b>	19.80	78.44	8.86	22.13	82.82	9.10
<b>2015</b>	19.87	78.34	8.85	22.17	82.80	9.10
<b>2016</b>	19.95	78.24	8.85	22.21	82.79	9.10
<b>2017</b>	20.03	78.14	8.84	22.25	82.78	9.10
<b>2020</b>	20.26	77.79	8.82	22.38	82.72	9.10
<b>2030</b>	21.01	76.37	8.74	22.78	82.43	9.08
<b>2045</b>	22.06	73.62	8.58	23.37	81.71	9.04

**Table de mortalité    CIA CPM 2014  
Composite**

<b>Date d'éval. (01-01)</b>	<b>Homme</b>			<b>Femme</b>		
	<b>Moyenne</b>	<b>Variance</b>	<b>Écart-type</b>	<b>Moyenne</b>	<b>Variance</b>	<b>Écart-type</b>
<b>2014</b>	<b>22.11</b>	<b>73.17</b>	<b>8.55</b>	<b>24.43</b>	<b>75.61</b>	<b>8.70</b>
<b>2015</b>	22.19	72.78	8.53	24.49	75.38	8.68
<b>2016</b>	22.27	72.43	8.51	24.54	75.18	8.67
<b>2017</b>	<b>22.34</b>	<b>72.11</b>	<b>8.49</b>	<b>24.60</b>	<b>74.98</b>	<b>8.66</b>
<b>2020</b>	22.53	71.39	8.45	24.75	74.50	8.63
<b>2030</b>	23.04	70.53	8.40	25.22	73.54	8.58
<b>2045</b>	23.74	69.90	8.36	25.88	72.33	8.50

**Annexe 2 : Valeurs obtenues avec la table ICA CPM2014 (2014-01-01)**

Âge de 60 à 100 ans, Homme et Femme

**Évaluation faite au 2014-01-01****Statistiques sur la durée de vie avec centiles****Hommes**

Âge	Moyenne	Écart-type	Centiles								
			1%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%	99%
60	26.64	9.44	1.58	7.27	12.62	21.36	28.39	33.49	37.18	39.24	43.03
65	<b>22.11</b>	<b>8.55</b>	<b>1.18</b>	<b>5.36</b>	<b>9.39</b>	<b>16.83</b>	<b>23.41</b>	<b>28.41</b>	<b>32.06</b>	<b>34.11</b>	<b>37.89</b>
70	17.70	7.64	0.78	3.58	6.46	12.48	18.54	23.39	26.99	29.00	32.77
75	13.55	6.63	0.46	2.19	4.11	8.60	13.88	18.48	21.99	23.97	27.69
80	9.82	5.52	0.25	1.24	2.39	5.43	9.68	13.83	17.18	19.09	22.72
85	6.74	4.34	0.13	0.66	1.31	3.19	6.27	9.71	12.74	14.57	17.97
90	4.43	3.24	0.07	0.36	0.71	1.81	3.83	6.41	8.96	10.62	13.79
95	2.87	2.36	0.04	0.20	0.40	1.01	2.29	4.11	6.19	7.59	10.37
100	2.01	1.75	0.03	0.14	0.27	0.68	1.53	2.85	4.48	5.59	7.88

**Femmes**

Âge	Moyenne	Écart-type	Centiles								
			1%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%	99%
60	29.15	9.37	2.67	9.99	15.62	24.13	30.88	35.82	39.50	41.56	45.44
65	<b>24.43</b>	<b>8.70</b>	<b>1.73</b>	<b>7.12</b>	<b>11.73</b>	<b>19.32</b>	<b>25.83</b>	<b>30.73</b>	<b>34.39</b>	<b>36.43</b>	<b>40.27</b>
70	19.90	7.89	1.12	4.88	8.36	14.80	20.90	25.69	29.31	31.33	35.11
75	15.57	6.99	0.68	3.10	5.51	10.61	16.13	20.74	24.29	26.28	29.99
80	11.58	5.98	0.37	1.76	3.29	7.00	11.67	15.96	19.39	21.33	24.97
85	8.15	4.86	0.19	0.93	1.81	4.23	7.83	11.58	14.75	16.61	20.15
90	5.45	3.73	0.10	0.49	0.97	2.42	4.91	7.86	10.65	12.36	15.71
95	3.52	2.73	0.05	0.26	0.53	1.35	2.91	5.04	7.35	8.84	11.89
100	2.34	2.02	0.03	0.16	0.31	0.79	1.78	3.34	5.17	6.46	9.01

**Annexe 3 : Valeurs obtenues avec la table ICA CPM2014 (2017-01-01)**

Âge de 60 à 100 ans, Homme et Femme

**Évaluation faite au 2017-01-01****Statistiques sur la durée de vie avec centiles****Hommes**

Âge	Moyenne	Écart-type	Centiles								
			1%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%	99%
60	26.86	9.37	1.68	7.65	13.05	21.65	28.59	33.64	37.31	39.37	43.19
65	<b>22.34</b>	<b>8.49</b>	<b>1.27</b>	<b>5.68</b>	<b>9.78</b>	<b>17.13</b>	<b>23.62</b>	<b>28.57</b>	<b>32.21</b>	<b>34.25</b>	<b>38.00</b>
70	17.93	7.59	0.84	3.82	6.79	12.82	18.76	23.55	27.14	29.15	32.89
75	13.77	6.61	0.49	2.34	4.34	8.91	14.13	18.66	22.15	24.13	27.83
80	10.01	5.52	0.27	1.33	2.54	5.66	9.91	14.00	17.34	19.25	22.85
85	6.86	4.36	0.14	0.69	1.37	3.31	6.42	9.84	12.85	14.68	18.11
90	4.48	3.26	0.07	0.37	0.73	1.85	3.89	6.48	9.02	10.69	13.86
95	2.88	2.37	0.04	0.20	0.40	1.01	2.29	4.13	6.21	7.62	10.43
100	2.02	1.76	0.03	0.14	0.27	0.68	1.54	2.86	4.50	5.61	7.91

**Femmes**

Âge	Moyenne	Écart-type	Centiles								
			1%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%	99%
60	29.32	9.33	2.78	10.25	15.91	24.34	31.04	35.94	39.61	41.67	45.57
65	<b>24.60</b>	<b>8.66</b>	<b>1.81</b>	<b>7.35</b>	<b>12.01</b>	<b>19.55</b>	<b>25.99</b>	<b>30.85</b>	<b>34.50</b>	<b>36.54</b>	<b>40.40</b>
70	20.06	7.86	1.17	5.07	8.60	15.03	21.06	25.82	29.42	31.45	35.25
75	15.73	6.98	0.71	3.22	5.70	10.84	16.30	20.87	24.41	26.40	30.14
80	11.73	5.98	0.38	1.84	3.42	7.19	11.85	16.09	19.51	21.45	25.11
85	8.26	4.87	0.20	0.98	1.89	4.35	7.97	11.69	14.84	16.71	20.28
90	5.50	3.74	0.10	0.50	1.00	2.47	4.96	7.92	10.70	12.43	15.79
95	3.53	2.74	0.05	0.27	0.53	1.36	2.92	5.05	7.38	8.87	11.93
100	2.35	2.03	0.03	0.16	0.32	0.79	1.79	3.35	5.19	6.49	9.06