



Sprint de codage 3

Consignes

- Ce travail est à réaliser en équipe.
- Vous devez obligatoirement remplir la *Déclaration d'intégrité relative aux travaux et aux examens* dans monPortail.
- La remise des livrables s'effectue dans la boîte de dépôt dans monPortail.

1 Intégration numérique

Un collègue de travail a calculé dans un rapport un intervalle de confiance pour une moyenne, mais sans mentionner le niveau de confiance. Toutefois, vous savez qu'il a utilisé 1,84 comme quantile de la loi normale centrée réduite avec fonction de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Vous connaissez suffisamment cette densité pour savoir que

$$\int_{-z}^z f(x) dx = 2 \int_0^z f(x) dx.$$

1.1 Mandat

Déterminer le niveau de confiance de l'intervalle calculé par votre collègue à l'aide des quatre méthodes suivantes :

1. la méthode d'intégration numérique de Simpson;
2. l'intégration Monte-Carlo;
3. la fonction R `integrate`;
4. la fonction R `pnorm`.

1.2 Livrables

Un fichier de script `integration.R` contenant l'intégralité du code R permettant de réaliser le mandat. Vous devez *obligatoirement* développer la fonction `simpson` décrite ci-dessous et documenter adéquatement — dans le format présenté dans [Goulet \(2020, chapitre 6\)](#) — la fonction ainsi que les expressions qui servent à compléter le mandat.

La fonction `simpson` calcule l'intégrale définie d'une fonction par la méthode d'intégration numérique de Simpson. Sa signature est :

```
simpson(FUN, lower, upper, subdivisions = 1000)
```

L'argument `FUN` est une fonction R qui permet de calculer la fonction mathématique à intégrer. Les arguments `lower` et `upper` sont les bornes d'intégration inférieure et supérieure, alors que `subdivisions` est le nombre d'intervalles de la méthode de Simpson. La fonction doit effectuer les deux tests suivants sur les valeurs des paramètres :

- si la borne `upper` est inférieure à `lower`, la fonction s'arrête et affiche un message d'erreur;
- si les bornes `lower` et `upper` sont égales, la fonction retourne immédiatement la valeur 0 sans faire plus de calculs.

Le second test devra se conformer aux indications contenues dans la section Note de la rubrique d'aide de l'opérateur « `==` ». Enfin, la fonction ne devrait comporter aucune boucle.

Exemple d'utilisation.

```
> f <- function(x) x^2 * log(x)
> simpson(f, 1, 1.5, subdivisions = 100)
[1] 0.1922594
```



Vous pouvez aisément éviter les boucles dans la fonction `simpson` en utilisant judicieusement la fonction `seq`.

2 Distribution *phase-type*

La fonction de répartition de la distribution *phase-type* avec vecteur de probabilités initiales $\boldsymbol{\pi}$ et matrice de transition \mathbf{T} est

$$F(x) = \begin{cases} \pi_{m+1}, & x = 0, \\ 1 - \boldsymbol{\pi} e^{\mathbf{T}x} \mathbf{e}, & x > 0, \end{cases}$$

où \mathbf{e} est un vecteur colonne de 1 et

$$e^{\mathbf{M}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^n}{n!}$$

est l'exponentielle de la matrice \mathbf{M} . (Le produit matriciel d'un vecteur avec \mathbf{e} revient donc à additionner tous les éléments du vecteur.)

L'exemple 8.5 du document de référence explique comment calculer l'exponentielle d'une matrice lorsque celle-ci est diagonalisable.

2.1 Mandat

Calculer $F(1)$, où F est la fonction de répartition d'une distribution *phase-type* avec vecteur de probabilités initiales $\boldsymbol{\pi} = (0,5614, 0,4386)$ et matrice de transition

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -8,640 & 1,997 \\ 0,101 & -1,095 \end{bmatrix}.$$


2.2 Livrables

Un fichier de script `phasetype.R` contenant des expressions R pour calculer $F(1)$ de deux manières différentes : directement à partir de la définition ci-dessus ; avec la fonction `pphtype` du paquetage **actuar**.

Vous pouvez utiliser la fonction `eigen`. Commentez adéquatement votre démarche et vos expressions.

Bibliographie

Goulet, V. 2020, *Programmer avec R*, Document libre sous licence Creative Commons BY-SA 4.0. URL <https://vigou3.gitlab.io/programmer-avec-r>.

 © Vincent Goulet. Ce document est publié sous licence [Attribution-Partage dans les mêmes conditions 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).