- ACT-1002 -

Analyse probabiliste des risques actuariels

Solutions aux Exercices de Dépannage pour l'Examen I

Préparé par :
Jérémie Boudreault

Session :
Hiver 2017

Université Laval

Table des matières

1 Exercices de dépannage pour l'examen I

1.1 Prise de photos au sommet d'une montagne - SOLUTION

Lors de la dernière randonnée à montagne de la famille de Paul, il décide d'immortaliser ce moment une fois en haut et de prendre des photos de sa famille avec le beau paysage. On considère qu'il doit toujours y avoir un membre de la famille de 5 personnes qui doit s'occuper de prendre la photo. On se s'intéresse pas à la personne qui a pris la photo, mais l'ordre des gens sur la photo est important. De plus, les membres de la famille ne prennent pas toujours part à la prise de photo.

a) Combien peut-il y avoir de photos différentes possibles ? (Rép : 205)

SOLUTION - On a les cas ou il y aura 1 personne sur la photo, 2 personnes, 3 personnes et 4 personnes. Il ne peut y avoir 5 personnes sur la photo car sinon, personne ne sera disponible pour prendre la photo. Il faut permuter les personnes sur la photo car l'ordre en important.

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2}2! + \binom{5}{3}3! + \binom{5}{4}4! = 205$$

b) ... si Marie et Paul ne participent aux photos que s'ils y sont ensemble ? (Rép : 107)

SOLUTION - On procède de la même façon que ci-dessus (cas 1 personne, 2 personnes, etc) mais cette fois ci, le premier terme de la parenthèse est lorsque ni Marie ni Paul ne sont sur la photo, et le deuxième terme de la parenthèse est lorsque les deux sont sur la photo :

$$\left(\binom{3}{1} + 0\right) + \left(\binom{3}{2}2! + 2!\right) + \left(\binom{3}{3}3! + \binom{3}{1}3!\right) + \left(0 + \binom{3}{2}4!\right) = 107$$

c) ... et si Jean et Matthieu ne peuvent être l'un à coté de l'autre sur une photo ? (En plus de la condition b) (Rép : 89)

SOLUTION - On garde le développement fait en b, mais on retirera les cas ou Jean et Matthieu étaient côté à côte :

$$\left(\binom{3}{1} + 0\right) + \left(\left(\binom{3}{2}2! - \binom{2}{2}2!\right) + 2!\right) + \left(\left(\binom{3}{3}3! - 2!2!\right) + \binom{3}{1}3!\right) + \left(0 + \left(\binom{3}{2}4! - 3!2!\right)\right) = 89$$

1.2 Enfants tous en rond - SOLUTION

À la maternelle, un jeu classique est de se mettre en rond puis de tenir une grosse toile de plastique que l'on agite le plus fort que l'on peut. La classe de maternelle compte 12 enfants, dont 2 jumeaux identiques qui doivent toujours être un à coté de l'autre.

a) Combien y-a-t'il de façon possible de placer ces élèves autour de la toile ? (Rép : 3628800)

SOLUTION - On classe les deux jumeaux dans une boîte ensemble. Il ne faudra PAS permuter les enfants dans cette boîte puisqu'ils sont identiques. On rappelle que pour n objects placés en cercle, il y a $(n-1)!$ façons différents de les disposer. Ici, on a 10 enfants + 1 boîte (les deux jumeaux) à permuter autour de la toile. Ainsi :

$$(11-1)! = 3628800$$

b) ... si la classe compte aussi 2 soeurs qui ne peuvent être une à coté de l'autre ? (Rép : 2903040)

SOLUTION - On garde le nombre de cas totaux, et on retire les cas ou les deux soeur étaient côté a côte. On a donc 8 enfants + 1 boite (2 jumeaux) + 1 boite (2 soeurs) = 10 objets autour de la toile. On doit permuter les soeurs ensemble mais pas les jumeaux dans leur boîte (car les soeurs sont différents mais les jumeaux sont identiques). On obtient :

$$3628800 - (10-1)!2! = 2903040$$

1.3 Choix de repas au McDonald's - SOLUTION

Il est 3h du matin. 8 amis se pointent au McDonalds's à la suite d'une soirée bien arrosée. La caissière leur annonce qu'il ne restent plus que 5 repas disponibles, soit un Hamburger, un Junior au Poulet, un Cheese Burger, un Cheese Bacon et une Poutine. Déchirés, les amis se résolvent que seulement 5 d'entre eux pourront manger. (Autrement dit, il ne reste pas 5 choix de repas, mais bien seulement 5 repas)

a) Combien de combinaisons possible d'amis/repas sont possibles ? (Rép : 6720)

SOLUTION - Il faut choisir d'abord les 5 amis qui pourront manger. Ensuite, le premier ami aura le choix des 5 mets, le second des 4 restant, ainsi de suite :

$$\binom{8}{5} \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6720$$

b) ... si 2 amis ne veulent pas du repas «Hamburger» ? (Rép : 5040)

SOLUTION - On a les trois cas suivant : Aucune des deux personnes qui voulait les hamburgers a été choisie, une des deux a été choisie et finalement les 2 ont été choisies. On chosiit d'abord les amis, puis les repas qu'ils auront, en commençant par ceux qui ont la condition de ne pas avoir le hamburgeur.

$$\binom{6}{5}5! + \binom{2}{1}\binom{6}{4}\binom{4}{1}4! + \binom{2}{2}\binom{6}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{1}3! = 5040$$

Ou :

$$\binom{6}{5}5! + \binom{2}{1}\binom{6}{4}\binom{4}{1}4! + \binom{2}{2}\binom{6}{3}\binom{4}{2}2!3! = 5040$$

c) ... si 3 amis sont végétariens ? (Rép : 480)

SOLUTION - Comme 3 personnes ne peuvent manger que la poutine, ces trois personnes ne pourront manger en même temps. Seulement une à la fois pourra manger, ou aucune des trois. Le premier cas est celui où aucune de ces trois personnes mange et le second, où une des trois pourra manger la poutine :

$$\binom{5}{5}5! + \binom{3}{1}\binom{5}{4}4! = 480$$

d) ... en combinant les conditions b et c ? (Rép : 288)

On garde les cas tels que décrits à la lettre c), mais en considérant les amis qui ne mangent pas d'hamburger. Ainsi, dans le premier cas, les 2 amis qui ne mangent pas d'hamburgeur sont présents et on doit s'assurer qu'ils ne mangent pas d'hamburger, et dans le second cas, ils peuvent être 1 (première partie de la parenthèse) ou 2 (deuxième partie de la parenthèse).

Dans l'ordre, pour le cas #2, on chosit : Un des trois enfant qui est végétarien, 1 ou 2 enfants qui ne peut manger le hamburger, le reste des enfants sans restrictions, le repas de l'enfant(ou des enfants) qui ne mange(mangent) pas le hamburger et finalement, on permute les repas restant entre les enfants sans restrictions. Ainsi :

$$\binom{5}{5}\binom{4}{1}\binom{3}{1} \times 3! + \binom{3}{1}\left(\binom{2}{1}\binom{3}{3}\binom{3}{1}3! + \binom{2}{2}\binom{3}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}2!\right) = 288$$

1.4 Vaches et enclos - SOLUTION

Philippe, fermier d'expérience, possède 5 enclos et 12 vaches. Les vaches sont identiques (i.e elles sont indifférentiables) mais les enclos sont différents.

a) Combien y-a-t'il de façons différentes de placer les vaches dans les enclos, si les enclos peuvent contenir aucune vache ? (Rép : 1820)

SOLUTION - On applique directement la formule pour des placer des balles identiques (vaches) dans des urnes différentes (enclos) où il n'y a pas de minimum dans chaque urne (enclos) :

$$\binom{\#\mathtt{Balles} + \#\mathtt{Urnes} - 1}{\#\mathtt{Balles}} = \binom{5 + 12 - 1}{12} = \binom{16}{12} = 1820$$

b) ... si les enclos doivent contenir au minimum une vache ? (Rép : 330)

SOLUTION - La seulement différence est qu'on retranchera 5 vaches au départ pour en placer au minimum une par enclos, peu importe quelle est la vache puisqu'elles sont identiques. Ensuite, le problème revient aux même qu'à la lettre a mais avec maintenant 12 - 5 = 7 vaches :

$$\binom{\#\mathtt{Balles} + \#\mathtt{Urnes} - 1}{\#\mathtt{Balles}} = \binom{5 + 7 - 1}{7} = \binom{11}{7} = 330$$

La nouvelle copine du fermier, Kim, décide de nommer les vaches, de sorte que les vaches sont désormais différentiables entre elles. Il n'y a aucun minimum de vaches par enclos.

c) Combien y-a-t'il de façons différentes de placer les vaches dans les enclos ? (Rép : 244140625)

SOLUTION - Directement, on a que chacune des vaches (différentes) peut aller dans un des cinq enclos. Donc :

$$5 \times 5 \times ... \times 5 = 5^{12} = 244140625$$

1.5 Lancers d'un dé - SOLUTION

On lance simultanément 6 dés réguliers (i.e la probabilité d'avoir un des six chiffres pour chacun des dés est donc de 1/6).

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une suite de 6 chiffres ? (Rép : 0.0154321)

SOLUTION - Avoir un 1, un 2, ..., un 6, et permuter ces résultats :

$$\left(\frac{1}{6}\right)^6 6! = 0.0154321$$

b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le chiffre 3 et 3 fois le chiffre 6 ? (Rép : 0.0004286694)

SOLUTION - Avoir un 3, un 3, un 3, un 6, un 6, un 6 et permuter ces résultats, en tenant compte que les 3 sont identiques et les 6 sont identiques :

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{6!}{3!3!} = 0.0004286694$$

c) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le même chiffre et 3 fois un chiffre différent du premier ? (Rép : 0.006430041)

SOLUTION - Choisir les chiffres X et Y (Y différent de X, mais il y aura 3X et 3Y), avoir un X, un X, un X, un Y, un Y, un Y et permuter ces résultats, en tenant compte que les X sont identiques et les Y sont identiques :

$$\binom{6}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{6!}{3!3!} = 0.006430041$$

d) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois le même chiffre et 2 fois un autre chiffre différent du premier ? (Rép : 0.009645062)

SOLUTION - Choisir le chiffre X puis le chiffre Y (Y différent de X et il y aura 4X et 2Y), avoir un X, un X, un X, un X, un Y, un Y et permuter ces résultats, en tenant compte que les X sont identiques et les Y sont identiques :

$$\binom{6}{1}\binom{5}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{6!}{4!2!} = 0.009645062$$

1.6 Jeu de cartes - SOLUTION

On tire 5 cartes sans remise à partir d'un jeu duquel on a laissé les deux jokers (i.e. le jeu compte donc 54 cartes).

a) Quelle est la probabilité de piger les deux jokers et deux as et une autre carte qui n'est pas un as ? (Rép : 0.000091067)

SOLUTION - On pige les 2 jokers, deux as parmi les quatre et une autre carte parmi les restantes :

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{4}{2}\binom{48}{1}}{\binom{54}{5}} = 0.000091067$$

b) Quelle est la probabilité de piger deux jokers et deux as ou plus ? (Rép : 0.0000923317)

SOLUTION - Premier cas : On pige exactement 2 as. Deuxième cas : On pige exactement 3 as :

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{4}{2}\binom{48}{1}+\binom{2}{2}\binom{4}{3}}{\binom{54}{5}}=0.0000923317$$

c) Quelle est la probabilité d'obtenir une suite ? (Rép : 0.0032379)

SOLUTION - On doit avoir les cartes As,2,3,4,5 jusqu'à 10, J, Q, K, As. Autrement dit, on ne s'intéresse pas aux couleurs. Si on fait le cas AS, 2, 3, 4, 5, on aura 1 parmi 4 pour chaque carte. Ensuite, les autres cas (2,3,4,5,6 ; 3,4,5,6,7 ; 4,5,6,7,8 ; etc) seront exactement trouvés de la même manière mais avec des chiffres différents. On arrive donc à 10 cas identiques, d'où la multiplication par 10 :

$$\frac{\binom{4}{1}^5\times 10}{\binom{54}{5}}=0.0032379$$

d) Quelle est la probabilité d'obtenir 5 cartes de la même sorte ($\heartsuit\diamondsuit\spadesuit\clubsuit$) , si l'on considère qu'un joker peut faire office de n'importe quelle sorte ? (Rép : 0.00379825)

SOLUTION - On le fait en 3 cas. Premier cas : On a aucun joker. Deuxième cas : On a un joker. Troisière cas : On a deux joker. Ensuite, on doit choisir la sorte qui sera la même pour toutes les cartes tirées.

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{13}{5}+\binom{2}{1}\binom{4}{1}\binom{13}{4}+\binom{2}{2}\binom{4}{1}\binom{13}{3}}{\binom{54}{5}}=0.00379825$$

1.7 Pile ou Face - SOLUTION

On lance une pièce de monnaie truquée, dont la probabilité d'avoir pile est de 70%.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 piles et 7 faces en 10 lancers ? (Rép : 0.0090017)

SOLUTION - On fait le problème en ayant PPPFFFFFFF avec les probabilités respectives, puis on permutte les résultats en considérant les piles comme identiques et les faces comme identiques :

$$(0.70)^3(0.30)^7\frac{10!}{3!7!}=0.0090017$$

b) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 3 faces dans les lancers 8 à 10 et d'obtenir exactement 3 piles et 7 faces en 10 lancers ? (Rép : 0.0026255)

SOLUTION - On doit obtenir les 3 faces aux lancers 8 à 10. Ensuite, il reste 7 lancers pour obtenir exactement 3 piles et 4 faces, peu importe l'ordre de ces 7 lancers :

$$(0.3)^3\times(0.7)^3(0.3)^4\frac{7!}{3!4!}=0.0026255$$

c) Quelle est la probabilité conditionnelle d'avoir obtenu 3 faces dans les lancers 8 à 10, sachant qu'on a obtenu 3 piles et 7 faces en 10 lancers ? (Rép : 0.2916667)

SOLUTION -

$$\begin{aligned}
\Pr\left[3 \text{ faces dans lancers 8 à 10 } \mid 3 \text{ piles et 7 faces}\right] &= \frac{\Pr\left[3 \text{ faces dans lancers 8 à 10 } \cap 3 \text{ piles et 7 faces}\right]}{\Pr\left[3 \text{ piles et 7 faces}\right]} \\
&= \frac{\Pr\left[\text{Prob trouvée en b}\right]}{\Pr\left[\text{Prob trouvée en a}\right]} \\
&= \frac{0.0026255}{0.0090017} \\
&= 0.2916667
\end{aligned}$$

d) Quelle est la probabilité d'avoir toujours obtenu un résultat différent du lancer précédent en 10 lancers ? (Rép : 0.00081682)

SOLUTION - On doit avoir eu FPFPFPFPFP ou PFPFPFPFPF. Directement :

$$0.7^5 0.3^5 \times 2 = 0.00081682$$

e) ... et en 9 lancers ? (Rép : 0.00194481)

SOLUTION - Il s'agit d'avoir eu PFPFPFPFPX et FPFPFPFPFX avec X qui peut-être pile ou face. Directement :

$$0.7^5 0.3^4 + 0.3^5 0.7^4 = 0.00194481$$

f) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 faces en 40 lancers ? (Rép : 0.999402072)

SOLUTION -

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\#\text{ Faces en 40 lancers } \geqslant 4\right] \\
&= 1 - \Pr\left[\#\text{ Faces en 40 lancers } < 4\right] \\
&= 1 - \Pr\left[\#\text{ Faces en 40 lancers } \leqslant 3\right] \\
&= 1 - \Pr\left[\#\text{ Faces en 40 lancers } \in \{0,1,2,3\}\right] \\
&= 1 - \left(0.7^{40} + 0.7^{39}0.3^1 \times \frac{40!}{39!1!} + 0.7^{38}0.3^2 \times \frac{40!}{38!2!} + 0.7^{37}0.3^3 \times \frac{40!}{37!3!}\right) \\
&= 1 - 0.0005979284 \\
&= 0.9994021
\end{aligned}$$

1.8 Bières bues à un party par deux colocs - SOLUTION

Le réfrigérateur de deux colocataires, Cédrick et Daehli, compte 16 bières : 6 blanches, 4 rousses, 3 blondes et 3 noires. En vue d'une petite soirée, Cédrick prend les 16 bières du réfrigérateur qu'il place dans son sac pour lui et Daehli. Lors de la soirée, à chaque fois que Cédrick se prend une bière parmi celles qu'il a emportées, il prend le soin d'en amener une à son coloc aussi (i.e Cédrick est toujours le premier à se choisir une bière, et choisit par la suite celle pour Daehli.) Ils ont bu 4 bières chacun au cours de la soirée.

a) Quelle est la probabilité que Cédrick ait bu les 3 bières noires ? (Rép : 0.007142857)

SOLUTION - **Méthode 1 :** Pour que Cédrick ait bu les 3 bière noires, Daehli doit en avoir bu aucune. Il y aura une des séries suivantes, ou la première lettre est la bière de Cédrick, la deuxième, celle de Daehli, la troisième, celle de Cédrick et ainsi de suite. On dénote X une bière quelconque et N, une bière noire :

NXNXN...	XXNXNXN...
NXXXNXN...	NXNXXXN...

Il s'agit donc de calculer les probabilités pour chacun de ces patterns.

Pour la première ligne, première colonne :

$$\frac{3}{16} \times \frac{13}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{12}{13} \times \frac{1}{12} = 0.001785714$$

Pour la première ligne, deuxième colonne :

$$\frac{13}{16} \times \frac{12}{15} \times \frac{3}{14} \times \frac{11}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} \times \frac{1}{10} = 0.001785714$$

Pour le deuxième ligne, première colonne :

$$\frac{3}{16} \times \frac{13}{15} \times \frac{12}{14} \times \frac{11}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} \times \frac{1}{10} = 0.001785714$$

Pour la deuxième ligne, deuxième colonne :

$$\frac{3}{16} \times \frac{13}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{12}{13} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{11} \times \frac{1}{10} = 0.001785714$$

D'où la réponse finale :

$$0.001785714 \times 4 = 0.007142856$$

SOLUTION - Méthode 2 : Il aurait été plus facile de procéder en schématisant le problème, soit se représenter le problème comme des symboles que l'on peut permuter comme bon nous semble, ainsi une représentation pourrait être :

$$[\mathrm{N}] - \mathrm{B} - [\mathrm{N}] - \mathrm{B} - [\mathrm{N}] - \mathrm{B} - [\mathrm{B}] - \mathrm{B} - | - \mathrm{B} - \mathrm{R} - \mathrm{R} - \mathrm{R} - \mathrm{R} - \mathrm{D} - \mathrm{D} - \mathrm{D}$$

Les [X] représentent les bières bues par Cédrick, alors que la barre verticale | représente la séparation entre les bières bues et non bues. Pour les fins de cette schématisation, on se dit que les bières non bues seront aussi pigées du sac (mais pas nécessairemetn bues).

Ainsi, les cas totaux sont (selon la schématisation que l'on a fait i.e. toutes les bière sont pigées) :

$$\frac{16!}{6!4!3!3!} = 33633600$$

Pour avoir le cas qui nous intéresse, on doit permuter tous les symboles, en laissant cependant les bières noires dans les crochets [N]. On aura donc $16 - 3$ symboles à permuter. Ensuite, on permute les 4 bières qui sont dans les crochets, autrement dit, les 3 bières noires et une bières quelconque. Finalement, on doit diviser le tout par les symboles identiques, soit 6B, 4R et 3D (et non les 3N puisqu'elles sont déjà été permutées dans les crochets [X])

$$\frac{(16-3)!\frac{4!}{3!}}{6!4!3!} = 240240$$

En divisant les cas obtenus par les cas totaux, on obtient la même réponse :

$$\frac{240240}{33633600} = 0.007142857$$

b) Quelle est la probabilité que les bières non bues soient : 1 blanche, 2 blondes, 3 noires et 2 rousses ? (Rép : 0.008391608)

SOLUTION - On garde la même schématisation en plaçant les bières non bues de l'autre côté de la limite, et on retire les crochets [] puisqu'on se s'intéresse plus aux bière bues par Cédrick. On trouve automatique les bière qui seront bues :

$$B - B - B - B - B - R - R - D - | - B - D - D - N - N - N - R - R$$

Il s'agit simplement de permuter les bière bues et les bière non bues et diviser par les cas totaux :

$$\frac{\left(\frac{8!}{5!2!1!}\right)\left(\frac{8!}{1!2!3!2!}\right)}{33433600}$$

c) ... et que Daehli ait bu 3 blanches et une blonde, et que la première bière de Cédrick soit une rousse ? (Rép : 0.000599401)

SOLUTION - On garde le schéma de la lettre b, mais en réarrangeant l'ordre des bières bues pour que Daehli ait bu les bières qu'il voulait (en utilisant les crochet () et que Cédrick ait bu une rousse au départ. On obtient :

$$[R] - (B) - B - (B) - B - (B) - (D) - R - | - B - D - D - N - N - N - R - R$$

Les permutations pour le côté droite ne change pas. Par contre, au niveau du côté gauche, on doit permuter les bière qui n'ont pas positions fixe (Ni de () ni de []) ainsi que permuter les bières à l'intérieur des (). Directement :

$$\frac{\left(\frac{3!}{2!}\frac{4!}{3!}\right)\left(\frac{8!}{1!2!3!2!}\right)}{33433600} = 0.000599401$$

1.9 Preuve - SOLUTION

Démontrer que : $max(0, \Pr[A] + \Pr[B] - 1) \leqslant \Pr[A \cap B] \leqslant min(\Pr[A], \Pr[B])$

SOLUTION - On démontre d'abord le terme de gauche :

Par définition :

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$$

$$\rightarrow \Pr[A \cap B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cup B]$$

La valeur maximale de $\Pr[A \cup B]$ est 1 (par définition d'une probabilité).

Puisque $\Pr[A \cap B]$ est une fonction décroissante de $\Pr[A \cup B]$ (i.e. $\Pr[A \cap B] = f(\Pr[A \cup B])$). De par la valeur maximale de $\Pr[A \cup B] = 1$, on trouve directement :

$$\Pr[A \cap B] \geqslant \Pr[A] + \Pr[B] - 1 \qquad \text{(I)}$$

Or une probabilité est toujours supérieure à 0. D'où :

$$\Pr[A \cap B] \geqslant 0 \qquad \text{(II)}$$

En combinant (I) et (II), on obtient :

$$\Pr[A \cap B] \geqslant max(\Pr[A] + \Pr[B] - 1, 0) \qquad \text{(III)} \qquad \square$$

Pour le <u>côté droit</u>, on utilise les définitions suivantes : (À démontrer graphiquement)

$$\Pr[A \cap B] \leqslant \Pr[A] \qquad (A)$$

$$\Pr[A \cap B] \leqslant \Pr[B] \qquad (B)$$

En combinant (A) et (B) et pour les deux conditions soit vraies, on obtient :

$$\Pr[A \cup B] \leqslant min(\Pr[A], \Pr[B]) \qquad (C) \qquad \square$$

Finalement, on combinant (III) et (C), on obtient :

$$max(0, \Pr[A] + \Pr[B] - 1) \leqslant \Pr[A \cap B] \leqslant min(\Pr[A], \Pr[B]) \qquad \square$$

1.10 Analyse de survie des étudiants en actuariat - SOLUTION

Nous nous sommes amusés à modéliser la survie des étudiants dans le bac en actuariat. Les moments où un étudiant peut quitter le bac sont définis comme : Durant de la première session, durant la seconde session, et finalement à n'importe quel moment à partir de la troisième session jusqu'à la fin de Bac. Ainsi, nous pouvons définir les probabilité de survie suivantes :

- Probabilité de survivre à la première session = 0.60
- Probabilité de survivre à la deuxième session, sachant qu'on a survécu à la première session = 0.80
- Probabilité d'obtenir son bac, sachant qu'on a survécu à la deuxième session = 0.95

a) Vous débutez votre première session. Qu'elle est la probabilité que vous obteniez votre Bac ? (Rép : 0.456)

SOLUTION - Définissions pour le problème :

- $\Pr[1]$ = Probabilité de survivre à la première session
- $\Pr[2|1]$ = Probabilité de survivre à la deuxième session, sachant qu'on a survécu à la première session
- $\Pr[Bac|2]$ = Probabilité d'obtenir son bac, sachant qu'on a survécu à la deuxième session

Pour trouver la probabilité recherchée, on a directement :

$$\begin{aligned}\Pr[Bac] &= \Pr[Bac|2] \times \Pr[2] \\ &= \Pr[Bac|2] \times \Pr[2|1] \times \Pr[1] \\ &= 0.95 \times 0.8 \times 0.95 \times 0.60 \\ &= 0.456\end{aligned}$$

b) Vous êtes à la fin de la deuxième session. Votre ami a lâché le bac. Qu'elles sont les probabilités respectives qu'il ait lâché au cours de la première et au cours de la seconde session ? (Rép : 10/13 et 3/13)

SOLUTION - On amène la notation $\bar{X}$ pour dénoter l'événement d'avoir couler lors de la session X. On trouve d'abord la probabilité d'avoir laché lors de la première ou deuxième session :

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\bar{1} \text{ ou } \bar{2}\right] &= \Pr\left[\bar{1}\right] + \Pr\left[1\right] \times \Pr\left[\bar{2}|1\right] \\
&= (1 - \Pr\left[1\right]) + \Pr\left[1\right] \times (1 - \Pr\left[2|1\right]) \\
&= (1 - 0.6) + 0.6 \times (1 - 0.8) \\
&= 0.52
\end{aligned}$$

Pour la probilité qu'il ait laché lors de la première session :

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\bar{1}|\bar{1} \text{ ou } \bar{2}\right] &= \frac{\Pr\left[\bar{1} \cap (\bar{1} \text{ ou } \bar{2})\right]}{\Pr\left[\bar{1} \text{ ou } \bar{2}\right]} \\
&= \frac{\Pr\left[\bar{1}\right]}{\Pr\left[\bar{1} \text{ ou } \bar{2}\right]} \\
&= \frac{1 - 0.6}{0.52} \\
&= \frac{10}{13}
\end{aligned}$$

Pour la probabilité qu'il ait laché lors de la deuxième session :

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\bar{2}|\bar{1} \text{ ou } \bar{2}\right] &= \frac{\Pr\left[\bar{2} \cap (\bar{1} \text{ ou } \bar{2})\right]}{\Pr\left[\bar{1} \text{ ou } \bar{2}\right]} \\
&= \frac{\Pr\left[\bar{2}\right]}{\Pr\left[\bar{1} \text{ ou } \bar{2}\right]} \\
&= \frac{0.6 * (1 - 0.8)}{0.52} \\
&= \frac{3}{13}
\end{aligned}$$

c) Vous et votre ami avez tous deux passé la première session. Quelle est la probabilité que vous obteniez tous les deux votre Bac ? (Considérer la survie dans le Bac de chaque personne comme des événements indépendants) (Rép : 0.5776)

SOLUTION - Trouver la probabilité qu'un élève qui a passé la première année obtenienne le bac :

$$\begin{aligned}
\Pr\left[Bac|1\right] &= \Pr\left[2|1\right] \times \Pr\left[Bac|2\right] \\
&= 0.8 * 0.95 \\
&= 0.76
\end{aligned}$$

Pour que les deux étudiants obtiennent leur bac, il doit y avoir que les deux événements se réalisent donc :

$$0.76 \times 0.76 = 0.5776$$

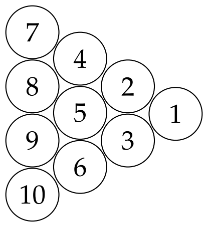
d) S'il y a 150 étudiants qui débutent le Bac, 80 autres étudiants qui ont survécu à la première session et 60 autres à la seconde, combien d'étudiants parmi ceux-ci obtiendront leur diplôme, si les probabilités de survie définies se réalisent parfaitement ? (La survie des étudiants est encore considérée comme indépendante) (Rép : 186 élèves)

SOLUTION - Directement :

$$150 \times (0.456) + 80 \times (0.76) + 60 \times (0.95) = 186.2 \approx 186$$

1.11 Probabilité de réussite au BeerPong - SOLUTION

Un jeu consiste à lancer une balle de ping-pong dans l'un des 10 verres placés de l'autre coté d'une table. La probabilité d'obtenir le verre numéroté i en lançant la balle est inversement proportionnelle au carré du numéro du verre. Soit X la variable aléatoire du numéro du verre obtenu à un lancer. On suppose que la probabilité de n'obtenir aucun verre est nulle.



a) Trouver la fonction de masse de probabilité de la variable aléatoire X. (Rép : $\Pr[X = 1; 2; 3; ...] = 0.645; 0.161; 0.0717; ...$)

SOLUTION - On a que la variable aléatoire X pour la probabilité d'avoir le verre dénoté x est de :

$$\Pr[X = x] = c\frac{1}{x^2} \qquad \text{Pour : } x = 1, 2, 3, ..., 10$$

On trouve la variable c en sachant que la somme des probabilité vaut 1 :

$$\sum_{x=1}^{10} c\frac{1}{x^2} = 1 \rightarrow c = \frac{1}{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{10^2}} = 0.645258$$

On a donc que :

$$\Pr[X = 1] = 0.645258/1 = 0.645258$$
$$\Pr[X = 2] = 0.645258/2^2 = 0.161314496$$
$$\Pr[X = 3] = 0.645258/3^2 = 0.071695331$$
$$...$$
$$\Pr[X = 10] = 0.645258/10^2 = 0.006452580$$

b) Trouver la fonction de répartition de X en tracer le graphique.

SOLUTION -

$$F_X(x) = 0 \qquad x < 1$$
$$F_X(x) = 0.645258 \qquad 2 > x \geqslant 1$$

$$F_X(x) = 0.645258 + 0.161314496 = 0.8065725 \qquad 3 > x \geqslant 2$$

$$F_X(x) = 0.645258 + 0.161314496 + 0.071695331 = 0.8782678 \qquad 4 > x \geqslant 3$$

$$\ldots$$

$$F_X(x) = 1 \qquad x \geqslant 10$$

c) Trouver la fonction quantile de X et en tracer le graphique.

SOLUTION -

$$F_X^{-1}(u) = 1 \qquad 0.645258 > u \geqslant 0$$

$$F_X^{-1}(u) = 2 \qquad 0.8065725 > u \geqslant 0.64528$$

$$F_X^{-1}(u) = 3 \qquad 0.8782678 > u \geqslant 0.8065725$$

$$\ldots$$

$$F_X^{-1}(u) = 10 \qquad 1 > u \geqslant 0.9935474$$

d) Si on pose la valeur de la variable aléatoire $X = 0$ si aucun verre n'est obtenu, on définit aussi $\Pr[X = 0] = 30\%$. Trouver la nouvelle fonction de masse de probabilité. (Rép : $\Pr[X = 0; 1; 2; 3; ...] = 0.30; 0.4516; 0.1129; 0.05019; ...$)

SOLUTION - On doit trouver la constante c tel que :

$$\Pr[X = 0] + \sum_{x=1}^{10} c\frac{1}{x^2} = 1$$

$$\sum_{x=1}^{10} c\frac{1}{x^2} = 1 - \Pr[X = 0]$$

$$\sum_{x=1}^{10} c\frac{1}{x^2} = 0.70$$

$$c = \frac{0.70}{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{10^2}}$$

$$\rightarrow c = 0.4516806$$

On a donc :

$$\Pr[X = 0] = 0.30$$

$$\Pr[X = 1] = 0.4516806/1 = 0.4516806$$

$$\Pr[X = 2] = 0.4516806/2^2 = 0.1129201$$

$$\Pr[X = 3] = 0.4516806/3^2 = 0.05018673$$

$$\ldots$$

$$\Pr[X = 10] = 0.4516806/10^2 = 0.004516806$$

On définit la variable aléatoire $Y = X|X \leqslant 3$ avec X tel que défini à la lettre d.

e) Définir la fonction de masse de Y. (Rép : $\Pr[Y = 0; 1; 2; 3] = 0.328; 0.494; 0.123; 0.055$)

SOLUTION -

$$\begin{aligned}
\Pr[Y=y] &= \Pr[X=y|X\leqslant 3] \\
&= \frac{\Pr[X=y\cap X\leqslant 3]}{\Pr[X\leqslant 3]} \\
&= \frac{\Pr[X=y\cap y\leqslant 3]}{\Pr[X\leqslant 3]} \\
&= \frac{\Pr[X=y\times 1_{y\leqslant 3}]}{\Pr[X\leqslant 3]} \\
&= \frac{\Pr[X=y\times 1_{y\leqslant 3}]}{\sum_{x=0}^{3}\Pr[X=x]} \\
&= \frac{\Pr[X=y\times 1_{y\leqslant 3}]}{0.9147875}
\end{aligned}$$

Comme on a que Y est seulement définie pour $y \leqslant 3$ (de par l'indicatrice), on aura :

$$\Pr[Y=0] = \frac{\Pr[X=0]}{0.9147875} = 0.32794503$$

$$\Pr[Y=1] = \frac{\Pr[X=1]}{0.9147875} = 0.49375467$$

$$\Pr[Y=2] = \frac{\Pr[X=2]}{0.9147875} = 0.12343867$$

$$\Pr[Y=3] = \frac{\Pr[X=3]}{0.9147875} = 0.05486163$$

f) Calculer $E[Y]$ et $Var[Y]$. (Rép : 0.905 et 0.6618)

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{3} y\times\Pr[Y=y] = 0.9052169$$

$$E\left[Y^2\right] = \sum_{y=0}^{3} y^2\times\Pr[Y=y] = 1.481264$$

$$Var[Y] = E\left[Y^2\right] - E[Y]^2 = 0.6618464$$

g) Calculer $E\left[Y\times 1_{\{Y\geqslant 2\}}\right]$ et $E[5Y-2]$. (Rép : 0.412 et 2.526)

$$E\left[Y\times 1_{\{Y\geqslant 2\}}\right] \sum_{y=0}^{3} y\times 1_{\{y\geqslant 2\}}\Pr[Y=y] = \sum_{y=2}^{3} y\Pr[Y=y] = 0.4114622$$

$$E[5Y-2] = 5E[Y]-2 = 5\times(0.9052169)-2 = 2.526084$$

h) Calculer $Var[25-3Y]$. (Rép : 5.957)

$$Var[25-3Y] = (-3)^2 Var[Y] = 9Var[Y] = 5.956618$$

i) Calculer $\Pr[|Y-2| \geqslant 1]$. (Rép : 0.672)

$$\begin{aligned}
\Pr[|Y-2| \leqslant 1] &= \Pr[-1 \leqslant Y-2 \leqslant 1] \\
&= \Pr[-1+2 \leqslant Y \leqslant 1+2] \\
&= \Pr[1 \leqslant Y \leqslant 3] \\
&= \Pr[Y \in \{1,2,3\}] \\
&= \Pr[Y=1] + \Pr[Y=2] + \Pr[Y=3] \\
&= 0.672055
\end{aligned}$$

1.12 Cyclistes en ordre - SOLUTION

Le club de cyclistes de Québec désire se placer d'une façon bien particulière pour leur prochaine sortie à vélo. Les cyclistes se placent un à la suite de l'autre. Le club compte N cyclistes, dont m sont considérés comme mauvais et le reste, comme bon. Les cyclistes en tête et en queue de file doivent être de bons cyclistes et ce choix est important pour le club. Une fois ces deux cyclistes choisis, les cyclistes bons sont considérés comme indifférentiables, de même que les cyclistes mauvais. On veut qu'il y ait au minimum k cyclistes bons entre chaque cycliste mauvais. Le premier et le dernier cycliste sont suivi/précédé par un mauvais cycliste. Exprimer le nombre de combinaisons de files possibles pour la prochaine sortie du club de cyclistes de Québec en fonction de N, m et k.

SOLUTION - On résume le problème comme :

- Cyclistes totaux : N
- Bons cyclistes : $N - m$
- Mauvais cyclistes : m

On devra d'abord chosir 1 bon cyliste en tête de file puis 1 bon pour en queue de file. Il restera donc $N - m - 2$ bons cyclistes à placer.

On représente le reste du problème comme suit :

Tête-Bon | Mauv. | $> k$ bons | Mauv. | ... | Mauv. | $> k$ bons | Mauv. | Queue-Bon

On utilise d'abord $k \times (m-1)$ bons cycliste pour placer entre les m mauvais. (Il y a m mauvais cyclistes, mais a $m-1$ espaces entre chaque mauvais). Il nous restera donc $N-m-2-k(m-1)$ bons cyclistes à placer dans les $m-1$ espaces entre les mauvais cyclistes.

À ce stade, on se rend compte d'une chose : on a un nombre d'objets identiques (bons cyclistes) à placer dans des espaces différents (entre les mauvais cyclistes). Il s'agit au même que de placer des balles identiques dans des urnes différentes. On se rapelle de la formule pour placer des balles dans des urnes (lors que les urnes peuvent être vides)

$$\binom{\#Balles + \#Urnes - 1}{\#Balles}$$

Le nombre de balles est le nombre de bon cyclistes restant $N-m-2-k(m-1)$ et le nombre d'urne est le nombre d'espace entre les mauvais cycliste $m-1$. Directement, on trouve :

$$\binom{N-m-2-k(m-1)+(m-1)-1}{N-m-2-k(m-1)}$$

Il ne faut cependant pas oublier d'ajouter le choix du premier bon cycliste en tête et le choix du bon cycliste en queue de file. Ainsi, on ajoute $\binom{N-m}{1}$ et $\binom{N-m-1}{1}$ à la formule ci-dessus :

$$\binom{N-m}{1}\binom{N-m-1}{1}\binom{N-m-2-k(m-1)+(m-1)-1}{N-m-2-k(m-1)}$$

$$\rightarrow \binom{N-m}{1}\binom{N-m-1}{1}\binom{N-km+k-4}{N-m-2-km+k)}$$

Ou

$$\rightarrow \binom{N-m}{1}\binom{N-m-1}{1}\binom{N-km+k-4}{m-2}$$

1.13 Profit au Dagobert - SOLUTION

Le nouveau propriétaire du Dagobert a sous-estimé la soif des étudiants en actuariat pour le party qu'ils organisent et a malencontreusement acheté une quantité trop faible d'alcool. Ainsi, la probabilité qu'un étudiant ne puisse boire à sa soif est de 5% si le prix du billet est à 20$ et de 10% si le billet est à 10$. La politique du bar veut que si une personne ne peut pas boire à sa soif, elle se verra rembourser la valeur de son billet multipliée par 20. Les probabilités pour le prix du billet dépendent du feeling du propriétaire et sont définies comme suit : Pr [Prix du billet = 10$] = 0.60 et Pr [Prix du billet = 20$] = 0.40. Il y aura 100 étudiants à cette soirée, et ce, peu importe le prix du billet.

a) Quelle est la probabilité que le Dagobert essuie une perte pour cette soirée (i.e que le revenu net soit inférieur à 0) ? (Rép : 0.7190542)

SOLUTION - Soit P pour la variable aléatoire du prix du billet :

$$\Pr[P=p] = \begin{cases} 0.60 & p=10 \\ 0.40 & p=20 \end{cases}$$

Soit la variable aléatoire X des gens qui se feront remboursés, avec $X|P=p$ la variable aléatoire conditionnelle au prix du billet :

$$\Pr[X=x|P=10] = \begin{cases} \binom{100}{x}0.10^x 0.90^{100-x} & x=0,1,2,3,...,100 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

$$\Pr[X=x|P=20] = \begin{cases} \binom{100}{x}0.05^x 0.95^{100-x} & x=0,1,2,3,...,100 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

Pour que le Dagobert essuie une perte, sachant que le prix du billet est P, alors, il faut que sont revenu (R) soit négatif (R = gain - perte < 0). Les gains sont 100 billets au prix P et les pertes sont X personnes qui se font remboursées le prix de leur billet multiplié par 20. Le revenu est donc :

$$R = 100 \times P - 20 \times P \times X$$

On cherche :

$$\begin{aligned}
\Pr[R < 0] &= \Pr[100 \times P - 20 \times P \times X < 0] \\
&= \Pr[-20 \times P \times X < -100P] \\
&= \Pr\left[X > \frac{100P}{20P}\right] \\
&= \Pr[X > 5] \\
&= 1 - \Pr[X \leqslant 5] \\
&= 1 - \Pr[X \in 0, 1, 2, 3, 4, 5]
\end{aligned}$$

Comme X dépend du prix du billet, on doit conditionner sur P :

$$\begin{aligned}
\Pr[R < 0] &= 1 - \Pr[X \in 0, 1, 2, 3, 4, 5] \\
&= 1 - (\Pr[P = 10] \Pr[X \in 0, 1, 2, 3, 4, 5 | P = 10] + \Pr[P = 20] \Pr[X \in 0, 1, 2, 3, 4, 5 | P = 20]) \\
&= 1 - (\Pr[P = 10] (\Pr[X = 0 | P = 10] + ... + \Pr[X = 5 | P = 10]) \\
&+ \Pr[P = 20] (\Pr[X = 0 | P = 20] + ... + \Pr[X = 5 | P = 20])) \\
&= 1 - 0.60(0.05757689) - 0.40(0.6159991) \\
&= 1 - 0.2809458 \\
&= 0.7190542 \qquad \square
\end{aligned}$$

——- FIN DES EXERCICES POUR L'EXAMEN 1