Chapitre 1
Probabilité et espérance conditionnelle

1.1 Rappels

1.1.1 Cas discret

Considérons X et Y deux variables aléatoires discrètes avec fonction de masse de probabilité conjointe $\Pr(X = x, Y = y)$. Ainsi, on aura :

$$\Pr(X = x|Y = y) = \frac{\Pr(X = x, Y = y)}{\Pr\,(Y = y)}$$

$$F_{X|Y}(a|y) = \Pr(X \leq a, Y = y) = \sum_{x \leq a} \Pr(X = x|Y = y)$$

$$E(g(X)|Y = y) = \sum_{x} g(x) \times \Pr(X = x|Y = y)$$

Exemple 1.1 : Supposons X_1 et X_2 des variables aléatoires binomiales de paramètres (n_1, p) et (n_2, p) respectivement. Prouver que la fonction de masse de probabilité conditionnelle de X_1 sachant que $X_1 + X_2 = m$ peut s'écrire sous la forme d'une hypergéométrique.

Indice : la f.g.m. fait ressortir une forme intéressante pour $Y = X_1 + X_2$

Solution exemple 1.1 : Trouvons tout d'abord la loi de $X_1|X_1 + X_2 = m$

$$Pr(X_1 = k|X_1 + X_2 = m) = \frac{Pr(X_1 = k, X_1 + X_2 = m)}{Pr(X_1 + X_2 = m)} = \frac{Pr(X_1 = k, X_2 = m - k)}{Pr(X_1 + X_2 = m)}$$

$$= \frac{Pr(X_1 = k)Pr(X_2 = m - k)}{\boldsymbol{Pr(X_1 + X_2 = m)}}$$

$$M_{\boldsymbol{X_1+X_2}}(t) = \cdots$$

$$\begin{aligned} M_{X_1+X_2}(t) &= E\left[e^{t(X_1+X_2)}\right] \\ &= E\left[e^{tX_1}\right] \times E\left[e^{tX_2}\right] \\ &= (pe^t+q)^{n_1}(pe^t+q)^{n_2} \\ &= (pe^t+q)^{n_1+n_2} \\ &\Rightarrow (X_1+X_2) \sim Bin(n_1+n_2, p) \end{aligned}$$

Ensuite, on obtient :

$$Pr(X_1 = k|X_1 + X_2 = m) = \cdots$$

$$\frac{\binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \binom{n_2}{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n_2-m+k}}{\binom{n_1+n_2}{m} p^m (1-p)^{n_1+n_2-m}}$$

$$= \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{m-k}}{\binom{n_1+n_2}{m}}$$

$$\rightarrow (X_1 = k|X_1 + X_2 = m) \sim Hypergéométrique(n_1 + n_2, n_1, m)$$

<u>Exemple 1.2</u> : Supposons X_1 et X_2 des variables aléatoires suivant des lois de Poisson de moyenne λ_1 et λ_2. Trouver $E(X_1|X_1 + X_2 = m)$.

<u>Solution exemple 1.2</u> : Comme à l'exemple précédent, on doit trouver la loi de $X_1|X_1 + X_2 = m$ en premier lieu. La démarche est la même, et à l'aide de la f.g.m. de la loi de Poisson, on trouve que :

$$M_{X_1+X_2}(t) = E\left[e^{t(X_1+X_2)}\right] = \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[e^{tX_1}\right] \times E\left[e^{tX_2}\right] \\
&= e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} \\
&= e^{\lambda_1(e^t-1)+\lambda_2(e^t-1)} \\
&= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow (X_1 + X_2) \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$Pr(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \frac{\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!}\frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}} = \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} \\
&\Rightarrow (X_1 \mid X_1 + X_2 = n) \sim Binomiale\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) \\
&\Rightarrow E\left[X_1 \mid X_1 + X_2 = n\right] = \frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.
\end{aligned}
$$

Ce résultat représente aussi une loi connue, comme à l'exemple 1.

1.1.2 Cas continu

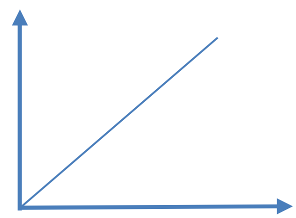
Soient X et Y des variables aléatoires continues avec fonction de densité conjointe $f_{x,y}(x,y)$. Alors :

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$F_{X|Y}(a|y) = \int_{-\infty}^{a} f_{X|Y}(x|y)dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{a} f_{X,Y}(x,y)dx$$
$$= \frac{\int_{-\infty}^{a} f_{X,Y}(x,y)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx}$$

<u>Exemple 1.3</u> : Supposons X et Y des variables aléatoires avec fonction de densité conjointe $f_{x,y}(x,y)$ tel que :

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} 4y(x-y)e^{-(x+y)}, 0 < y < x \\ 0, \text{ailleurs} \end{cases}$$



Trouver l'espérance conditionnelle de X sachant Y.

<u>Indice</u> : il pourrait être utile de poser une transformation du type $u = (x-y)$ après avoir trouvé la fonction de densité de X sachant Y.

<u>Solution exemple 1.3</u> : On cherche $E(X|Y=y)$. Trouvons tout d'abord $f_{X|Y}(x|y)$.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{4y(x-y)e^{-(x+y)}}{\int_y^{\infty} 4y(x-y)e^{-(x+y)}dx}$$
$$= \frac{(x-y)e^{-x}}{\int_y^{\infty} xe^{-x}dx - \int_y^{\infty} ye^{-x}dx} = \frac{(x-y)e^{-x}}{e^{-y}} = (x-y)e^{-(x-y)}$$

$$E(X|Y=y) = \int_y^{\infty} x(x-y)e^{-(x-y)}dx = \cdots$$

$$\begin{aligned} E\left[X \mid Y=y\right] &= \int_y^\infty x(x-y)e^{-(x-y)}dx \\ &= \int_0^\infty (u+y)ue^{-u}du \\ &= \int_0^\infty u^2e^{-u}du + y\int_0^\infty ue^{-u}du \\ &= \frac{\Gamma(3)}{(1)^3}\int_0^\infty \frac{(1)^3}{\Gamma(3)}u^{3-1}e^{-u}du + y \times \frac{\Gamma(2)}{(1)^2}\int_0^\infty \frac{(1)^2}{\Gamma(2)}u^{2-1}e^{-u}du \\ &= 2+y. \end{aligned}$$

Passe du cochon qui tousse (raccourci, shortcut). On reconnait la forme d'une loi Gamma (alpha = 3 et 2, lambda = 1)

1.2 Probabilités, Espérance et Variance par conditionnement

Il sera particulièrement important de bien comprendre et de bien maitriser le concept du conditionnement d'une variable aléatoire sur une autre aux fins d'en calculer l'espérance, la variance ou toute autre statistique descriptive pour les chapitres subséquents.

1.2.1 Probabilités

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes ou continues telles que décrite en 1.1. On aura donc :

<u>Cas discret</u> :

$$\Pr(X=x) = \sum \Pr(X=x|Y=y) \times \Pr(Y=y)$$

$$= E_Y[\Pr(X=x|Y)]$$

$$F_X(x) = \Pr(X \le x) = \sum F_{X|Y}(x|y) \times \Pr(Y=y)$$

$$= E_Y[\Pr(X \le x|Y)]$$

Cas continu :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy$$
$$= E_Y\left[f_{X|Y}(x|Y)\right]$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy$$
$$= E_Y\left[F_{X|Y}(x|Y)\right] = E[\Pr(X \leq x|Y)]$$

**** Toutes les espérances sont exprimées en fonction de Y. Dans certains cas, on obtient des expressions faciles à intégrer et qui se résument à des fonctions connues (voir fin de l'exemple 3 avec des lois Gamma, par exemple). D'autres fois, les expressions ne peuvent simplement pas être simplifiées et on devra conserver une forme plus complexe.*

Exemple 1.4 : Une compagnie d'assurance suppose que le nombre d'accidents pour chacun de ses assurés pour une année obéit à une loi de Poisson dont la moyenne diffère d'un assuré à l'autre. Si la moyenne du nombre de sinistres d'un assuré pris au hasard obéit à une loi gamma de paramètres α = 2 et β = 1; trouver la probabilité qu'un assuré pris au hasard ait n accidents dans la prochaine année?

Solution exemple 1.4 : Il s'agit d'un bel exemple de mélange de lois Poisson et Gamma. Avec ce type d'exemple, on devrait être en mesure de retrouver une nouvelle loi Gamma avec de nouveaux paramètres, ce qui nous permettra de dériver de façon explicite la fonction de masse de probabilité pour N avec :

N : v.a. représentant le nombre d'accidents pour un assuré pour une période
Λ : v.a. représentant la moyenne du nombre d'accidents pour une période
→ $(N|\Lambda = \lambda) \sim Poisson(\lambda)$

$$Pr(N = n) = \int_0^{\infty} \Pr(N = n|\,\Lambda = \lambda) \times g(\lambda) d\lambda$$
$$= \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \frac{(1)^2 \lambda^{2-1} e^{-1\times\lambda}}{\Gamma(2)} d\lambda \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^\infty \lambda^{n+1} e^{-2\lambda} d\lambda \\
&= \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+2)}{2^{n+2}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{2^{n+2} \lambda^{(n+2)-1} e^{-2\lambda}}{\Gamma(n+2)} d\lambda}_{Gamma(\alpha^*=n+2, \beta^*=2)}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{n+1}{2^{n+2}}
$$

Il conviendrait de vérifier que cette fonction de masse de probabilité somme à 1 sur toutes les valeurs possibles pour n :

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+2}}}_{A} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}}}_{B}
$$

$$
= \cdots
$$

$$
\rightarrow A + B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
$$

1.2.2 Espérance

Supposons X et Y des variables aléatoires discrètes ou continues avec fonction de masse ou de densité de probabilité conjointe $\Pr(X = x, Y = y)$ ou $f_{X,Y}(x, y)$. Alors :

Cas discret :

$$E[X] = E\big[E[X|Y]\big] = \sum_{y} E[X|Y = y] \times Pr(Y = y)$$

Cas continu :

$$E[X] = E\big[E[X|Y]\big] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y = y] f_Y(y)\, dy$$

Exemple 1.5 : Des essais indépendants d'une expérience aléatoire sont effectués jusqu'à l'obtention de k succès consécutifs. Trouver le nombre espéré d'essais nécessaires si la probabilité de succès à chaque essai est p.

Solution exemple 1.5 : La démarche peut paraitre un peu longue ici et le plus important est de bien définir le point de départ, i.e. sur quoi il faudra conditionner notre espérance. On définit donc :

N_k : v. a. représentant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir k succès consécutifs

$M_k = E[N_k]$

On peut définir M_k en conditionnant N_k par rapport à N_{k-1} comme suit :

$$M_k = E[N_k] = E\big[E[N_k|N_{k-1}]\big]$$

On commencera donc en développant $E[N_k|N_{k-1}]$:

$$E[N_k|N_{k-1}] = \cdots$$

$$
\begin{aligned}
E\left[N_k \mid N_{k-1}=n\right] &= E\left[N_k \mid N_{k-1}=n,(n+1)ième\ essai=succès\right] \\
\times \Pr(kième\ essai &= succès \mid N_{k-1}=n) \\
&\quad +E\left[N_k \mid N_{k-1}=n,(n+1)ième\ essai=échec\right] \\
\times \Pr(kième\ essai &= échec \mid N_{k-1}=n) \\
&= E\left[N_k \mid N_{k-1}=n,(n+1)ième\ essai=succès\right] \\
\times \Pr(kième\ essai &= succès) \\
&\quad +E\left[N_k \mid N_{k-1}=n,(n+1)ième\ essai=échec\right] \\
\times \Pr(kième\ essai &= échec) \text{ car essais indépendants} \\
&= (n+1)\times p+(n+1+E\left[N_k\right])\times(1-p) \\
&= n+1+(1-p)E\left[N_k\right]
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow E[N_k|N_{k-1}] = n + 1 + (1-p) \times E[N_k] \text{ avec n } = N_{k-1}$$

Donc, on obtiendra finalement :

$$M_k = E\big[E[N_k|N_{k-1}]\big] = \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[N_{k-1}+1+(1-p)E\left[N_k\right]\right] \\
&= M_{k-1}+1+(1-p)M_k \\
\Longrightarrow\ & M_k-(1-p)M_k = M_{k-1}+1
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow M_k = \frac{M_{k-1}+1}{p}$$

Maintenant, supposons pour commencer que k = 1. On a donc que le nombre d'essais nécessaires pour avoir un premier succès suit une loi géométrique de paramètre p, et que son espérance sera par définition :

$$M_1 = E[N_1] = \frac{1}{p}$$

De façon récursive, on obtient :

$$M_2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}$$

$$M_3 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}$$

$$\ldots$$

$$M_k = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^k}$$

****Note : Pour une loi géométrique avec X représentant le nombre <u>d'essais nécessaires</u> pour obtenir un premier succès, on a que $[X] = \frac{1}{p}$. Si X représente le nombre d'échecs avant d'obtenir un premier succès, alors on a que $E[X] = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$. Intuitivement, on comprend ce raisonnement en imposant un p élevé (proche de 1) qui devrait nous fournir des espérances proches de 1 et de 0, respectivement selon ces deux définitions.*

<u>Exemple 1.6</u> : Une compagnie d'assurance auto classifie ses assurés en k classes où la probabilité qu'un assuré soit dans la $i^{ème}$ classe est p_i,$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Elle suppose que le nombre d'accident par année d'un assuré de type i est une v.a de Poisson de paramètre λ_i (i = 1, … , k). On suppose que sachant la classe de l'assuré, le nombre d'accidents est indépendant d'une période à l'autre et qu'un assuré demeure dans la même classe d'une année à l'autre. Sachant qu'un assuré pris au hasard a n accidents dans sa première année, quel est le nombre espéré d'accidents pour cet assuré au cours de la deuxième année?

<u>Solution exemple 1.6</u> : On définira les variables N_j et C telles que :

- N_j : v.a. représentant le nb. d'accidents pour un assuré dans l'année j

- C : v.a. représentant la classe d'un assuré avec

$$p_i = \Pr(C = i)\,, i = 1, \ldots, k$$

- $(N_j | C = i)$: v.a. représentant le nb. d'accidents pour un assuré de la classe i dans l'année j

$$(N_j | C = i) \sim Poisson(\lambda_i)$$

On cherche $E[N_2 | N_1 = n]$. Ainsi,

$$E[N_2|N_1 = n] = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{E[N_2|N_1 = n, C = i]} \times Pr(C = i|N_1 = n)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{E[N_2|C = i]} \times Pr(C = i|N_1 = n)\ ^{*}$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda_i} \times Pr(C = i|N_1 = n)\ ^{**}$$

** On peut enlever le « $N_1 = n$ » dans la partie gauche de la sommation à la deuxième ligne puisque les années sont « conditionnellement indépendantes ». Autrement dit, si on sait dans quelle classe est un assuré (i.e. C = i), alors pas besoin de connaitre son expérience de l'an passé ou de toute année antérieure pour connaitre le nombre espéré de sinistres pour la prochaine année.*

*** On a la même espérance à chaque année pour une classe C = i donnée.*

Ensuite, on trouve la probabilité a posteriori $\Pr(C = i|N_1 = n)$:

$$\Pr(C = i|N_1 = n) = \frac{\Pr(C = i, N_1 = n)}{\Pr(N_1 = n)} = \cdots$$

$$= \frac{\Pr(N_1 = n \mid C = i)\Pr(C = i)}{\Pr(N_1 = n)}$$

$$= \frac{\Pr(N_1 = n \mid C = i)\Pr(C = i)}{\sum_{j=1}^{k} \Pr(N_1 = n \mid C = j)\Pr(C = j)}$$

$$= \frac{\frac{\lambda_i^n e^{-\lambda_i}}{n!} \times p_i}{\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j^n e^{-\lambda_j}}{n!} \times p_j}$$

$$= \frac{\lambda_i^n e^{-\lambda_i} p_i}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n e^{-\lambda_j} p_j}$$

Par conséquent,

$$E[N_2|N_1 = n] = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda_i} \times Pr(C = i|N_1 = n)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\lambda_i} \times \frac{\lambda_i^n e^{-\lambda_i} p_i}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n e^{-\lambda_j} p_j}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{n+1} e^{-\lambda_i} p_i}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n e^{-\lambda_j} p_j}$$

<u>Autre solution possible à l'exemple 1.6</u> :

$$E[N_2|N_1 = n] = \sum_{i=1}^{k} m \times Pr(N_2 = m|N_1 = n)$$

On trouve la fonction de masse de probabilité $Pr(N_2 = m|N_1 = n)$:

$$Pr(N_2 = m|N_1 = n)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} Pr(N_2 = m|N_1 = n, C = i) \times Pr(C = i|N_1 = n)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} Pr(N_2 = m|C = i) \times Pr(C = i|N_1 = n) = \cdots$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i^m e^{-\lambda_i}}{m!} \times \frac{\lambda_i^n e^{-\lambda_i} p_i}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n e^{-\lambda_j} p_j}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{m+n} e^{-2\lambda_i} p_i}{m! \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n e^{-\lambda_j} p_j}.$$

Et on obtient finalement :

$$E[N_2|N_1 = n] = \sum_{m=0}^{\infty} m \times Pr(N_2 = m|N_1 = n) = \cdots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{m+n} e^{-2\lambda_i} p_i}{m! \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{n} e^{-\lambda_j} p_j}$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{n} e^{-\lambda_j} p_j} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m!} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{m+n} e^{-2\lambda_i} p_i$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{n} e^{-\lambda_j} p_j} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{n} e^{-\lambda_i} p_i \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} m \times \frac{\lambda_i^{m} e^{-\lambda_i}}{m!}}_{= \boldsymbol{\lambda_i}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{n+1} e^{-\lambda_i} p_i}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{n} e^{-\lambda_j} p_j}.$$

Exemple 1.7 : On a les 4 classes d'assurés suivantes :

i	p_i	λ_i
1	0.2	0
2	0.3	1
3	0.4	2
4	0.1	3

Si un assuré pris au hasard a eu 2 sinistres la première année, quel est le nombre de sinistres espéré pour cet assuré pour la 2ème année?

Solution exemple 1.7 : ce problème est semblable au précédent (1.6), mais on pourra ici trouver une valeur numérique à l'espérance recherchée. Commençons par trouver la probabilité qu'un individu pris au hasard ait 2 sinistres au cours d'une année, sans connaitre la classe ou la catégorie de l'assuré en question :

$$Pr[N_1 = 2] = \sum_{j=1}^{4} \frac{\lambda_j^2 e^{-\lambda_j} p_j}{2} \cong \frac{0.3717}{2}$$

Maintenant, on calculera la probabilité conditionnelle que l'assuré provienne de chacune des classes possibles en fonction du nombre de sinistres au cours de la première année, soit $N_1 = 2$:

$$Pr[C=i|N_1=2]=\frac{\lambda_i^2 e^{-\lambda_i} p_i /_2}{\sum_{j=1}^4 \lambda_j^2 e^{-\lambda_j} p_j /_2}=\frac{\lambda_i^2 e^{-\lambda_i} p_i}{\sum_{j=1}^4 \lambda_j^2 e^{-\lambda_j} p_j}$$

$$Pr[C=1|N_1=2]=\cdots$$
$$=\quad 0$$

$$Pr[C=2|N_1=2]=\cdots$$

$$\frac{e^{-1}\times 0.3}{0.3717}=0.2969$$

$$Pr[C=3|N_1=2]=\cdots$$
$$=\quad \frac{2^2\times e^{-2}\times 0.4}{0.3717}$$
$$=\quad 0.5826$$

$$Pr[C=4|N_1=2]=\cdots$$
$$=\quad \frac{3^2\times e^{-3}\times 0.1}{0.3717}$$
$$=\quad 0.1205$$

Finalement, on trouve le nombre de sinistres espérés pour l'année 2 :

$$E\left[N_2 \mid N_1=n\right]=\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \times \Pr(C=i \mid N_1=n)$$

i	$p_i = \Pr(C = i)$	λ_i	$\Pr(C = i \mid N_1 = 2)$
1	0.2	0	0
2	0.3	1	0.2969
3	0.4	2	0.5826
4	0.1	3	0.1205
	$\sum_i = 1$		$\sum_i = 1$

$$E[N_2 \mid N_1 = 2] = 0 + 1 \times 0.2969 + 2 \times 0.5826 + 3 \times 0.1205$$

$$= 1.8236$$

** Ici, on aurait aussi pu simplement appliquer la formule de la 2ème démarche de l'exemple 1.6 et on aurait obtenu le même résultat :*

$$E[N_2|N_1 = n] = \quad = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{n+1} e^{-\lambda_i} p_i}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{n} e^{-\lambda_j} p_j}$$

On pourrait également appliquer la 2ème démarche de l'exemple 1.6 de long en large, mais cela reviendrait au même.

1.2.3 Variance

Supposons X et Y des variables aléatoires discrète ou continues avec fonction de masse ou de densité de probabilité conjointe $\Pr(X = x, Y = y)$ ou $f_{X,Y}(x, y)$. Alors on peut utiliser le conditionnement de deux façons différentes pour obtenir la variance de X :

1. $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$. Il est possible de trouver $E[X^2]$ et $E[X]$ en conditionnant sur Y comme suit :
$$E[X^2] = E\big[E[X^2|Y]\big]$$
$$E[X] = E\big[E[X|Y]\big]$$

2. $Var[X] = E\big[Var[X|Y]\big] + Var\big[E[X|Y]\big]$

Exemple 1.8 : on reprend l'exemple 1.5 et on cherche toujours à avoir k succès consécutifs avec p = probabilité de succès à chaque essai. Trouver maintenant la variance du nombre d'essais nécessaires pour obtenir ces k succès consécutifs.

Première solution exemple 1.8 : La solution est longue à développer. Commençons par établir la formule pour la variance inconditionnelle :

$$Var[N_k] = E\left[Var[N_k|N_{k-1}]\right] + Var\left[E[N_k|N_{k-1}]\right]$$

On a vu précédemment que :

$$E[N_k|N_{k-1}] = N_{k-1} + 1 + (1-p) \times E[N_k]$$

Pour la suite de notre démarche, on utilisera une variable indicatrice I_k telle que :

$$I_k = \begin{cases} 1, \text{si kième succès de suite à l'essai suivant } N_{k-1} \\ 0, \text{si échec à l'essai suivant } N_{k-1} \end{cases}$$

On aura donc :

$$E[N_k|N_{k-1}] = \cdots$$

$$\begin{aligned} &= E[N_k \mid N_{k-1}, I_k = 1] \times \Pr(I_k = 1) + E[N_k \mid N_{k-1}, I_k = 0] \times \Pr(I_k = 0) \\ &= pE[N_{k-1} + 1 \mid N_{k-1}, I_k = 1] + (1-p)E[N_{k-1} + 1 + N_k' \mid N_{k-1}, I_k = 0] \end{aligned}$$

Où N_k' est le (nouveau) nombre d'essais nécessaires pour obtenir k succès consécutifs (suite à l'échec). Étant donné que $N_k' \sim N_k$ et N_k' est indépendant de N_{k-1}' et I_k , on a :

$$= \quad p(N_{k-1} + 1) + (1-p)(N_{k-1} + 1 + E[N_k])$$

$$\rightarrow E[N_k|N_{k-1}] = N_{k-1} + 1 + (1-p) \times E[N_k]$$

L'intérêt de la variable indicatrice sera au niveau de la démarche pour trouver l'espérance au carré et la variance :

$$E\left[{N_k}^2|N_{k-1}\right] = E\left[{N_k}^2|N_{k-1}, I_k = 1\right] \times Pr(I_k = 1) + E\left[{N_k}^2|N_{k-1}, I_k = 0\right] \times Pr(I_k = 0)$$

$$= \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&= pE\left[(N_{k-1}+1)^2 \mid N_{k-1}, I_k=1\right] + (1-p)E\left[(N_{k-1}+1+N'_k)^2 \mid N_{k-1}, I_k=0\right] \\
&= p(N_{k-1}+1)^2 + (1-p)E\left[(N_{k-1}+1)^2 + 2(N_{k-1}+1)N'_k + N'^2_k \mid N_{k-1}, I_k=0\right] \quad (*) \\
&= p\left(N_{k-1}+1\right)^2 + (1-p)((N_{k-1}+1)^2 + 2(N_{k-1}+1)E\left[N_k\right] + E\left[N_k^2\right]) \text{ car } N'_k \sim N_k \\
&= \left(N_{k-1}+1\right)^2 + 2(1-p)(N_{k-1}+1)E\left[N_k\right] + (1-p)E\left[N_k^2\right]
\end{aligned}
$$

***On décompose le terme au carré afin de regrouper les constantes et les v.a. sachant N'_{k-1} et I_k .

$$
\begin{aligned}
Var\left[N_k|N_{k-1}\right] &= E\left[N_k^2|N_{k-1}\right] - E^2\left[N_k|N_{k-1}\right] \\
&= \left(N_{k-1}+1\right)^2 + 2(1-p)(N_{k-1}+1)E\left[N_k\right] + (1-p)E\left[N_k^2\right] \\
&\quad - \left((N_{k-1}+1) + (1-p)E\left[N_k\right]\right)^2 \\
&= (1-p)E\left[N_k^2\right] - (1-p)^2E^2\left[N_k\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[Var\left[N_k|N_{k-1}\right]\right] &= E\left[(1-p)E\left[N_k^2\right] - (1-p)^2E^2\left[N_k\right]\right] \\
&= (1-p)E\left[N_k^2\right] - (1-p)^2E^2\left[N_k\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var\left[E\left[N_k \mid N_{k-1}\right]\right] &= Var\left[N_{k-1} + 1 + (1-p)E\left[N_k\right]\right] \\
&= Var\left[N_{k-1}\right]
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow E\big[Var[N_k|N_{k-1}]\big] = (1-p)E\big[{N_k}^2\big] - (1-p)^2E^2[N_k]$$

$$\rightarrow Var\big[E[N_k|N_{k-1}]\big] = Var[N_{k-1}]$$

Puis, finalement :

$$Var[N_k] = \ E\big[Var[N_k|N_{k-1}]\big] + Var\big[E[N_k|N_{k-1}]\big]$$

$$= \ Var[N_{k-1}] + (1-p)E\big[{N_k}^2\big] - (1-p)^2E^2[N_k]$$

$$
\begin{aligned}
= \ & Var[N_{k-1}] + (1-p)E\big[{N_k}^2\big] - (1-p)E^2[N_k] \\
& + (1-p)E^2[N_k] - (1-2p+p^2)E^2[N_k]
\end{aligned}
$$

$$= \ Var[N_{k-1}] + (1-p)Var[N_k] + p(1-p)E^2[N_k]$$

On obtient donc la formule récursive suivante :

$Var[N_k] = \cdots$

$$Var\left[N_k\right] = \frac{Var\left[N_{k-1}\right]}{p} + (1-p)E^2\left[N_k\right]$$

Étant donné que N_1 suit une géométrique (p), alors on obtient :

$$\begin{aligned}
Var\left[N_1\right] &= \frac{Var\left[N_0\right]}{p} + (1-p)E^2\left[N_1\right] = \frac{(1-p)}{p^2} \\
Var\left[N_2\right] &= \frac{Var\left[N_1\right]}{p} + (1-p)E^2\left[N_2\right] \\
&= \frac{(1-p)}{p^3} + (1-p)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)^2, \text{ où } M_2 = E\left[N_2\right] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \\
&\dots
\end{aligned}$$

<u>Deuxième solution exemple 1.8</u> : On pose, avec la même notation :

$$N_k = N_{k-1} + 1 + (1 - I_k)N_k'$$

Avec N_k' = nouveau nombre d'essais nécessaires pour obtenir k succès consécutifs suite à l'échec.

** Rappel : en réalité, on aurait :*

$$N_k = \underbrace{I_k(N_{k-1}+1)}_{\substack{\text{J'obtiens un succès tout de suite} \\ \text{après mon (k-1)ème succès consécutif}}} + \underbrace{(1-I_k)(N_{k-1}+1+N_k')}_{\substack{\text{J'obtiens un échec tout de suite} \\ \text{après mon (k-1)ème succès consécutif :} \\ \text{on recommence le processus à 0}}}$$

Ce qui revient à $N_k = N_{k-1} + 1 + (1 - I_k)N_k'$

On aura donc :

$$E[N_k|N_{k-1}] = E[N_{k-1} + 1 + (1 - I_k)N_k'|N_{k-1}]$$

$$\begin{aligned}
&= N_{k-1} + 1 + E[(1 - I_k)N_k'|N_{k-1}] \\
&= N_{k-1} + 1 + E[(1 - I_k)]\ E[N_k'] \\
&= N_{k-1} + 1 + (1 - p)\ E\left[N_k\ \right]
\end{aligned}$$

$$V[N_k|N_{k-1}] = V[N_{k-1} + 1 + (1 - I_k)N_k'|N_{k-1}]$$

$$\begin{aligned}
&= V[(1 - I_k)N_k'|N_{k-1}] \\
&= E\left[\left((1 - I_k)N_k'\right)^2|N_{k-1}\right] \\
&\qquad\qquad - E^2[(1 - I_k)N_k'|N_{k-1}] \\
&= E[(1 - I_k)^2]E\left[{N_k'}^2\right] - E^2[(1 - I_k)]E^2[N_k'] \\
&= (1 - p)E\left[{N_k'}^2\right] - (1 - p)^2E^2\left[N_k\ \right]
\end{aligned}$$

Avec :

$$E[(1 - I_k)^2] = (1 - 1)^2 \times Pr(I_k = 1) + (1 - 0)^2 \times Pr(I_k = 0)$$

Le reste de la démarche est identique à celle présentée dans la première solution.