

## Chapitre 2

### Processus stochastiques – Introduction

#### 2.1 Définition

Les processus stochastiques servent à modéliser *l'évolution d'un phénomène aléatoire* comme par exemple l'évolution du surplus d'une compagnie d'assurance, du nombre de sinistres pour un assuré, d'un indice boursier, du taux d'inflation ou d'un taux d'intérêt, etc.

Définition (généralisée, moins sympathique) : on appelle processus stochastique une famille  $\{X(t), t \in R^+\}$  de variables aléatoires sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  fini ou infini et muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une suite croissante de sous-tribus (ou  $\sigma$ -algèbre) de  $\mathcal{F}$ .

Définition (courte, sympathique) : Soit  $X(t)$  une variable aléatoire avec indice  $t$ , i.e. un processus qu'on sera capable d'observer dans le temps. La suite de variables aléatoires exprimée sous forme de vecteur ou d'ensemble  $\underline{X} = \{X(t), t \in T\}$  est dite un processus stochastique (ou processus aléatoire).

Note : dans la pratique,  $t$  représente le temps. L'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  a trois composantes :  $\Omega$  représente le domaine (valeurs possibles du processus à un temps quelconque  $t$ , généralement  $t > 0$ ),  $\mathcal{F}$  représente la filtration, soit l'information qui est connue au temps  $t$  (tout ce qui s'est passé entre 0 et  $t$ ) et  $\mathbb{P}$  représente la probabilité des événements possibles dans le processus. Une tribu (ou  $\sigma$ -algèbre) permet de définir un ensemble mesurable dans la théorie de la mesure (grossièrement, une tribu = un « sous-ensemble » de valeurs). La notation peut changer légèrement selon que le processus soit discret ou continu (à voir plus tard).

En d'autres termes : le processus pourra prendre certaines valeurs spécifiques ( $\Omega$ ) dépendamment des anciennes valeurs ( $\mathcal{F}$ ) et avec des probabilités prédéfinies pour chacune de ces valeurs possibles ( $\mathbb{P}$ ). Par exemple, intuitivement, on pourrait dire que la météo est un processus stochastique. La température reste dans un certain intervalle ( $\Omega$  : entre -50 et +50 degrés Celsius au Québec, grosso modo), dépend de la température passée (difficile d'imaginer une tempête de neige s'il a fait +35 degrés Celsius la veille en plein été) et possède certaines probabilités (70% de probabilité de pluie demain, 50% dans deux jours, etc). L'exemple de la météo sera repris plus tard.

## 2.2 Classification des processus stochastiques

**Définition** : Un processus stochastique  $\{X(t), t \in T\}$ , qu'on dénotera parfois simplement  $X(t)$  pour simplifier, est dit en temps discret si  $T$  est un ensemble fini ou infini dénombrable. Autrement, on parlera d'un processus stochastique en temps continu (infini ou non-dénombrable).

**Définition** : L'ensemble des valeurs que les v.a.  $X(t)$  peuvent prendre est appelé l'espace des états du processus stochastique  $\{X(t), t \in T\}$ . Si l'espace des états d'un processus est un ensemble fini ou infini dénombrable, le processus est dit à espace d'états discret, versus à espace d'états continu autrement (infini ou non dénombrable).

**Remarques** : il est habituel de dénoter un processus discret par  $\{X_n, n \in T\}$ . Également, certains processus sont en théorie continus, mais sont appliqués de façon discrète à toutes fins pratiques puisqu'on ne peut pas les observer de façon parfaitement continue. Exemple : le prix d'un titre boursier, bien qu'en théorie « continu » à travers le temps, ne sera perceptible que de façon discrète avec des rafraichissements (« refresh ») nombreux à la bourse, mais pas pour autant « infinis ».

Il existe donc 4 types de processus stochastiques :

- 1 – Temps discret, espace d'états discret  $\rightarrow t \in (0,1,2, \dots)$  et  $X(t) \in (0,1,2, \dots)$
- 2 – Temps discret, espace d'états continu  $\rightarrow t \in (0,1,2, \dots)$  et  $X(t) \in \mathbb{R}$
- 3 – Temps continu, espace d'états discret  $\rightarrow t \in \mathbb{R}$  et  $X(t) \in (0,1,2, \dots)$
- 4 – Temps continu, espace d'états continu  $\rightarrow t \in \mathbb{R}$  et  $X(t) \in \mathbb{R}$

## 2.3 Exemples

**Exemple 2.1** : marche aléatoire

Un exemple classique de processus stochastique est celui où l'on considère une particule qui, à l'instant 0, se trouve à l'origine  $(0, 0)$ . À chaque unité de temps, on lance une pièce de monnaie. Si on obtient « pile » la particule se déplace d'une unité vers la droite et si on obtient « face », elle se déplace vers la gauche. Ainsi, la v.a.  $X_n$  désigne la position de la particule au bout de  $n$  lancers de la pièce de monnaie et le processus stochastique  $\{X_n, n = 0,1, \dots\}$  est dit une marche aléatoire. La marche aléatoire est un processus stochastique en temps discret et à espace d'états discret, c'est-à-dire  $X_n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ .

### Exemple 2.2 : Évolution du prix d'une action

On considère l'évolution du prix d'une action aux temps 0,1,2,3,4. Le prix de l'action au temps 0 est  $P_0 = 100$ . Le processus du prix est défini par  $P = \{P_n, n = 0,1,2,3,4\}$ . À chaque temps, le prix de l'action peut soit augmenter, soit descendre. A cette fin, on définit une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées  $R_1; \dots; R_4$  où  $R_n$  prend les valeurs 0.9 ou 1.2. On suppose que pour  $n = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned}\Pr(R_n = 0.9) &= q \\ \Pr(R_n = 1.2) &= 1 - q\end{aligned}$$

On définit  $P_n = P_{n-1}R_n$  pour  $n = 1,2,3,4$  toujours avec  $P_0 = 100$ . Le prix à l'émission  $P_0$  est donc une constante alors que  $P_1, \dots, P_4$  sont des v.a. On observe que :

$$P_1 \in \{100 \times 0.9, 100 \times 1.2\}$$

$$P_2 \in \{100 \times 0.9^2, 100 \times 0.9 \times 1.2, 100 \times 1.2^2\}$$

$$P_3 \in \{100 \times 0.9^3, 100 \times 0.9^2 \times 1.2, 100 \times 0.9 \times 1.2^2, 100 \times 1.2^3\}$$

$$P_4 \in \{100 \times 0.9^4, 100 \times 0.9^3 \times 1.2, 100 \times 0.9^2 \times 1.2^2, 100 \times 0.9 \times 1.2^3, 100 \times 1.2^4\}$$

Par conséquent,

$$\Pr(P_n = 100 \times 0.9^i \times 1.2^{n-i}) = \binom{n}{i} q^i (1 - q)^{n-i}$$

Où  $i = 0, 1, \dots, n$  représente le nombre de fois où le prix a baissé. On a donc un processus discret à espace d'états discret.

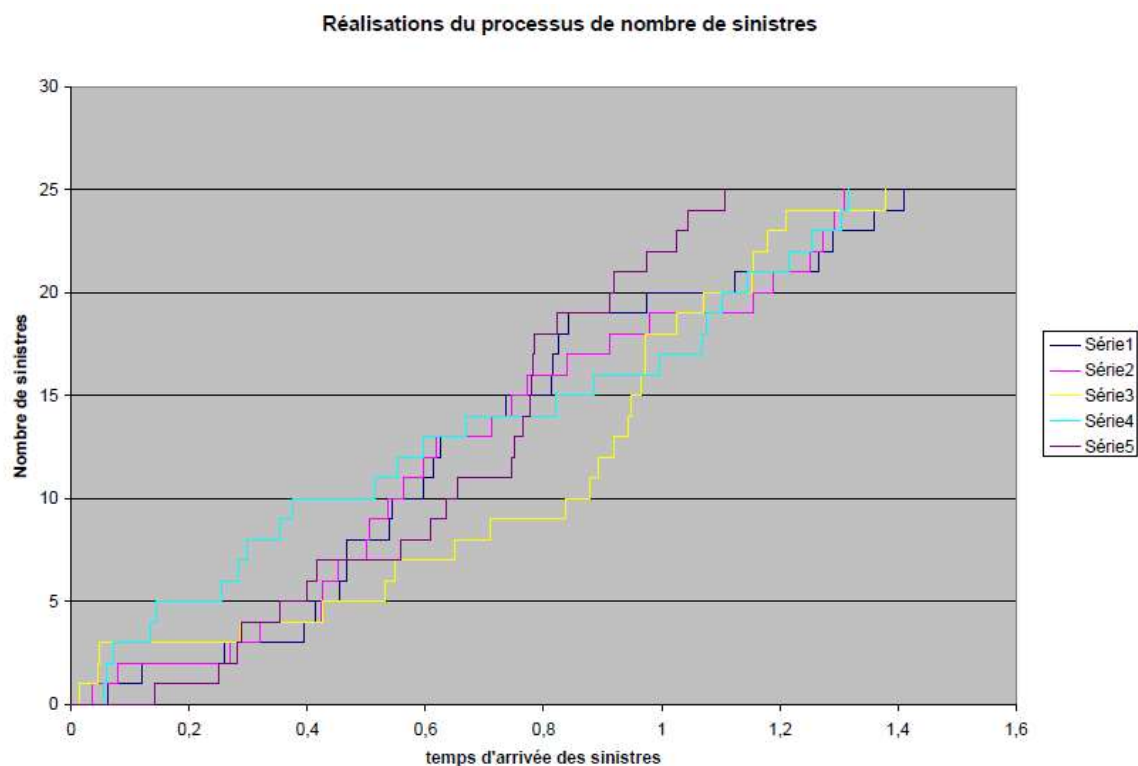
Avec  $q = 0.4$ , par exemple, on pourrait calculer la probabilité que le prix de l'action se situe à 116.64\$ à  $t = 4$  ans, i.e. avec deux années où  $R_n = 0.9$  et deux années où  $R_n = 1.2$ , peu importe l'ordre des événements :

$$\Pr(P_4 = 116.64) = \binom{4}{2} 0.4^2 (1 - 0.4)^{4-2} = 0.3456$$

Cette probabilité considère tous les chemins possibles. Si on avait désiré un seul chemin spécifique, par exemple  $R_1 = R_2 = 0.9$  et  $R_3 = R_4 = 1.2$ , alors on aurait eu une réponse 6 fois plus petite (0.0576, puisqu'on considère un des 6 chemins possibles seulement).

### Exemple 2.3 : Évolution du nombre de sinistres

On considère un portefeuille de contrats d'assurance automobile pour lequel on examine l'évolution du nombre de sinistres au cours d'une année. On définit le processus du nombre de sinistres par  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$  avec  $N(0) = 0$ . Le processus peut prendre les valeurs dans  $\{0,1,2, \dots\}$ . On a donc un processus en temps continu (car on observe  $N(t)$  sur  $t \geq 0$ ) avec espace d'états discret (car  $N(t) \in \{0,1,2, \dots\}$ ). Voici 5 réalisations du processus  $\underline{N}$ :

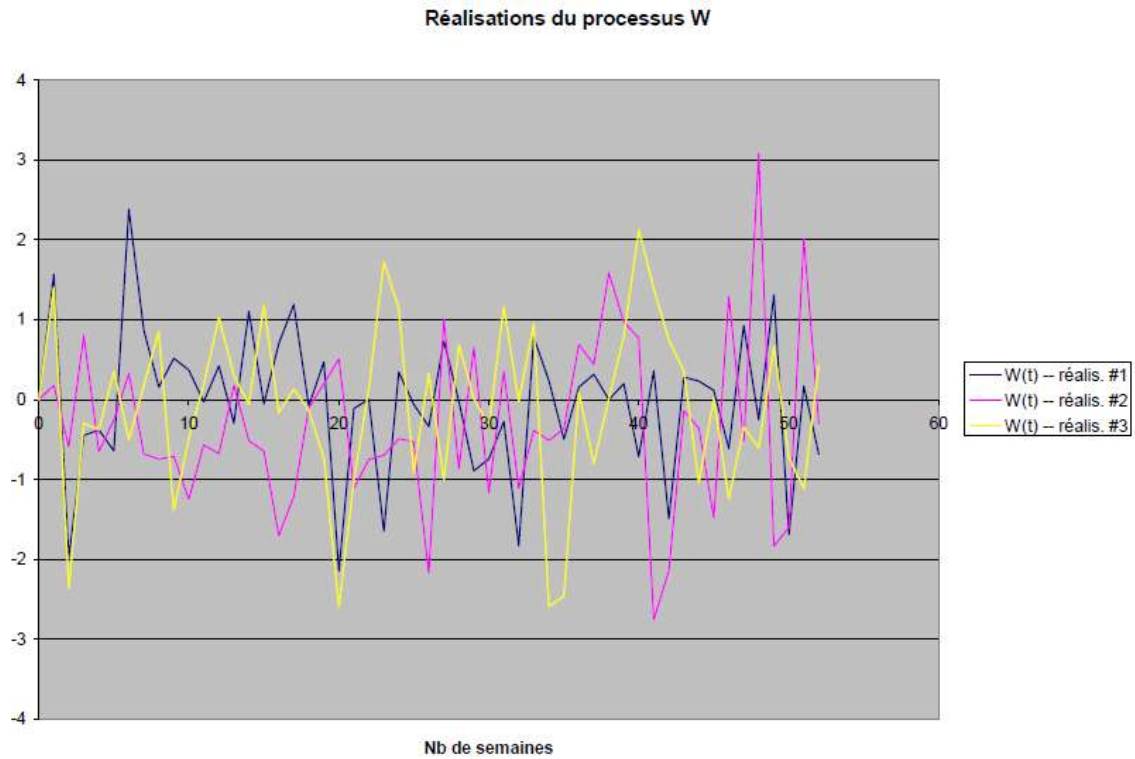


Ces réalisations du processus du nombre de sinistres sont les suivantes aux durées 0.25, 0.50, 0.75 et 1.00 (cumulatives) :

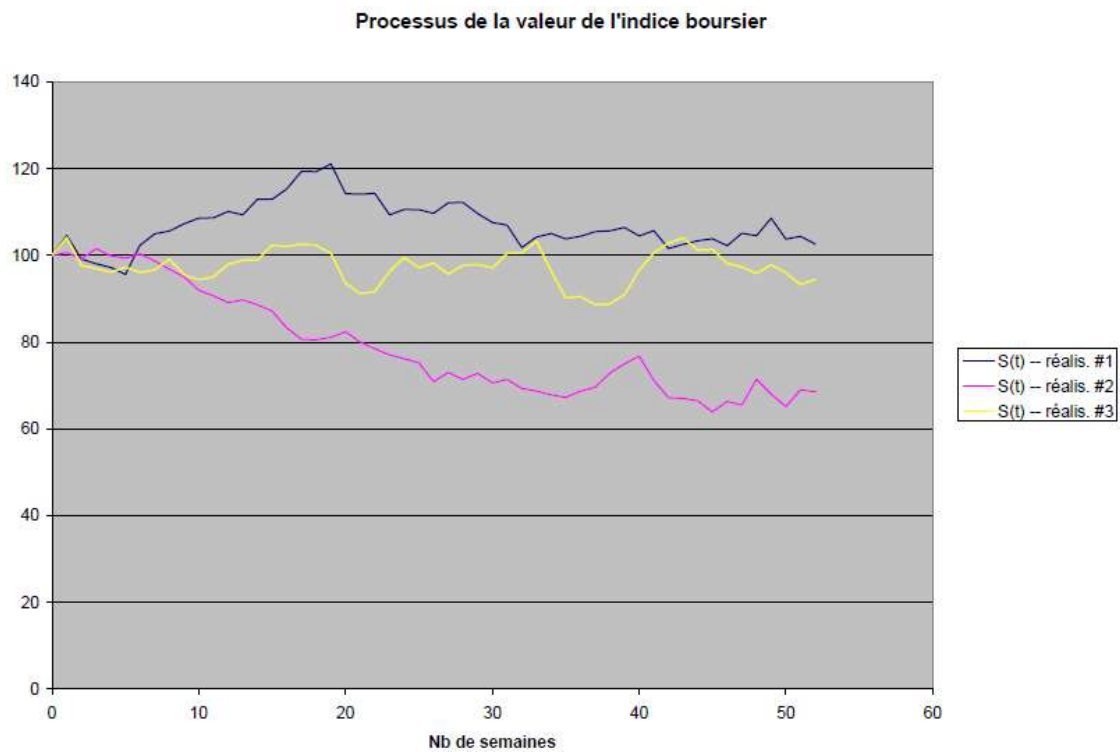
t	Réal. 1	Réal. 2	Réal. 3	Réal. 4	Réal. 5
0.25	2	2	3	5	2
0.50	8	7	5	10	7
0.75	15	15	9	14	12
1.00	20	19	18	17	22

#### Exemple 2.4 : Évolution d'un indice boursier

On examine l'évolution d'un indice boursier  $S$  au cours d'une année. On définit  $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$  avec  $S(0) = 100$  et  $S(t) = S(0)e^{(\mu t + \sigma W(t))}$ , où  $\underline{W} = \{W(t), t \geq 0\}$  est un processus en temps continu à espace d'états continu (plus particulièrement un processus de Wiener avec  $W(0) = 0$ ). Le processus  $\underline{W}$  prend des valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Le processus  $S$  prend donc des valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . On a que  $\underline{S}$  est un processus temps continu à espace d'états continu. Voici 3 réalisations du processus  $\underline{W}$ :



Voici 3 réalisations du processus  $\underline{S}$  :



Ces réalisations du processus de l'indice boursier sont les suivantes aux durées 13, 26, 39 et 52 semaines :

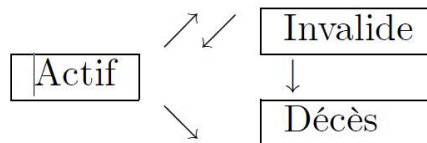
T	Réal. 1	Réal. 2	Réal. 3
0	100	100	100
13 semaines	109.39	89.72	98.92
26 semaines	109.72	70.90	98.22
39 semaines	106.43	75.00	90.96
52 semaines	102.62	68.56	94.52

### Exemple 2.5 : Évolution du statut d'un assuré

On considère l'évolution du statut d'un assuré au cours d'une année. On définit un processus discret sur trois états qui sont :

État 1	Actif
État 2	Invalide
État 3	Décédé

Logiquement, la transition entre les états 1 et 2 est possible dans les deux sens. Cependant, une fois un assuré rendu dans l'état 3, impossible d'en ressortir.



On représente l'évolution de l'état d'un individu par le processus  $\underline{X} = \{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  avec  $X_n \in \{1, 2, 3\}$ . On a donc que  $\underline{X}$  est un processus en temps discret à espace d'états discret. Dans le chapitre 3 du cours, on verra qu'on peut modéliser  $\underline{X}$  comme une chaîne de Markov. On a produit 3 réalisations du processus  $\underline{X}$  qu'on observe sur 6 périodes avec comme départ  $X_0 = 1$  :

Réalisation	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
Réal. 1	1	1	3	3	3	3
Réal. 2	1	1	2	1	3	3
Réal. 3	1	1	1	2	2	2

## 2.4 Fonction de densité, de masse de probabilité et de répartition

**Définition** : La fonction de répartition d'ordre k du processus stochastique  $\{X(t), t \in T\}$  est la fonction de répartition conjointe du vecteur aléatoire  $(X(t_1), \dots, X(t_k))$  :

$$F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = Pr(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_k) \leq x_k)$$

**Remarque** : Dans le cas où k=1, on a la fonction de répartition d'une seule v.a.  $X(t_1)$ , i.e.  $F_{X(t_1)}(x_1)$  et lorsque k=2, on a la fonction de répartition conjointe de  $(X(t_1), X(t_2))$ , i.e.  $F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ .

**Définition** : les fonctions de masse et de densité de probabilité d'ordre k du processus stochastique  $\{X(t), t \in T\}$  sont respectivement :

$$p(x_1, \dots, x_k; n_1, \dots, n_k) = Pr(X_{n_1} = x_1, \dots, X_{n_k} = x_k)$$

$$f(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \dots \partial x_k} F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k)$$

**Exemple 2.6** : On considère l'exemple 2.1 de la marche aléatoire de la section 2.3 où  $X_n$  représente la position de la particule après n périodes et  $p = Pr(\text{pile})$ . Si les lancers de la pièce de monnaie sont indépendants (par défaut), trouver la fonction de masse de probabilité d'ordre 1 du processus à l'instant  $n = 2$ .

$$p(x; n = 2) = Pr(X_2 = x) = \begin{cases} 2p(1-p) & \text{si } x=0 \\ p^2 & \text{si } x=2 \\ (1-p)^2 & \text{si } x=-2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

*\* Ici, à noter que les valeurs 1 et -1 sont impossibles. En fait, les valeurs impaires ne sont possibles qu'aux pas de temps impairs ( $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ ) et vice-versa pour les valeurs paires.*

*\*\* On écrit  $X_2$  et non  $X(2)$  car le processus est discret (standard).*

## 2.5 Moments d'ordre 1 et 2 des processus stochastiques

Comme les moyennes, les variances et les covariances servent à caractériser et à faire ressortir des informations intéressantes sur les variables et les vecteurs aléatoires. De la même façon, on peut aussi caractériser un processus stochastique à l'aide de ses moments. On s'attardera davantage sur les deux premiers moments, comme à l'habitude.

Définition : La moyenne d'un processus stochastique  $\{X(t), t \in T\}$  à l'instant  $t$  est définie par

$$m_x(t) = E[X(t)]$$

Définition : La fonction d'autocovariance du processus stochastique  $\{X(t), t \in T\}$  en  $\{t_1, t_2\}$  est définie par :

$$Cov(X(t_1), X(t_2)) = E[X(t_1), X(t_2)] - m_x(t_1)m_x(t_2)$$

Définition : La variance du processus stochastique  $\{X(t), t \in T\}$  à l'instant  $t$  est définie par

$$Var[X(t)] = Cov(X(t), X(t))$$

Remarque : on parle de fonction d'autocovariance et non de fonction de covariance car techniquement, la fonction est calculée pour deux variables du même processus  $\{X(t), t \in T\}$ , mais à deux instants différents.

Exemple 2.7 : Un processus de Bernoulli est une suite de v.a. de Bernoulli  $X_1, X_2, \dots$  associées à des essais indépendants pour lesquels la probabilité de succès est la même pour chacun des essais. Les valeurs possibles pour chaque variable sont donc de 0 (échec) ou 1 (succès) avec comme probabilités respectives  $(1-p)$  et  $p$ . Trouver la moyenne du processus au temps  $k$  et la fonction d'autocovariance  $Cov(X_{k_1}, X_{k_2})$ .

Solution exemple 2.7 : La moyenne est relativement simple à calculer, i.e.

$$E[X_k] = p \quad \forall k \in \{1, 2, \dots\}$$

Pour la fonction d'autocovariance, on aura que :

$$Cov(X_{k_1}, X_{k_2}) = E(X_{k_1}X_{k_2}) - E(X_{k_1})E(X_{k_2})$$



Avec :

$$E(X_{k_1} X_{k_2}) = \begin{cases} p^2, & k_1 \neq k_2 \\ p, & k_1 = k_2 \end{cases}$$

Puisque les essais sont indépendants, pour  $k_1 \neq k_2$  on a que :

$$E(X_{k_1} X_{k_2}) = E(X_{k_1}) E(X_{k_2}) = p^2$$

Alors que pour  $k_1 = k_2$  on a

$$E(X_{k_1} X_{k_1}) = E(X_{k_1}^2) = 1^2 \times p + 0^2 \times (1 - p) = p.$$

Ainsi, on a que

$$Cov(X_{k_1}, X_{k_2}) = \begin{cases} 0, & k_1 \neq k_2 \\ p(1 - p) = Var(X_k), & k_1 = k_2 \end{cases}$$

**Exemple 2.8 :** Soit  $Y$  une variable aléatoire qui suit une loi  $U(0,1)$ . On définit le processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$  par :

$$X(t) = e^Y t, t \geq 0$$

- Trouver la fonction de densité d'ordre 1 du processus
- Trouver la fonction de répartition d'ordre 3 du processus
- Trouver la moyenne du processus à l'instant  $t$
- Trouver la fonction d'autocovariance  $Cov(X(t), X(t+s))$

Solution exemple 2.8 :

$$a) X(t) = e^Y t \leftrightarrow Y = \ln\left(\frac{X(t)}{t}\right)$$

Car  $Y \sim U(0,1)$

$$f(x; t) = f_{X(t)}(x) = f_Y\left(\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right) \times \left| \frac{\partial \ln\left(\frac{x}{t}\right)}{\partial x} \right| = 1 \times \left| \frac{1}{\left(\frac{x}{t}\right)} \times \frac{1}{t} \right|$$

$$= \frac{1}{x}, \text{ pour } x \in (t, te) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Pour que } \ln(x/t) \text{ entre } 0 \text{ et } 1 \\ \text{(domaine de la loi uniforme } (0,1)) \end{array}$$

$$b) F(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3) = Pr(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, X(t_3) \leq x_3) \\ = \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \Pr(t_1 e^Y \leq x_1, t_2 e^Y \leq x_2, t_3 e^Y \leq x_3) \\
&= \Pr(e^Y \leq \frac{x_1}{t_1}, e^Y \leq \frac{x_2}{t_2}, e^Y \leq \frac{x_3}{t_3}) \\
&= \Pr\left(Y \leq \ln\left(\frac{x_1}{t_1}\right), Y \leq \ln\left(\frac{x_2}{t_2}\right), Y \leq \ln\left(\frac{x_3}{t_3}\right)\right) \\
&= \Pr\left(Y \leq \min\left[\ln\left(\frac{x_1}{t_1}\right), \ln\left(\frac{x_2}{t_2}\right), \ln\left(\frac{x_3}{t_3}\right)\right]\right) \\
&= \min\left[\ln\left(\frac{x_1}{t_1}\right), \ln\left(\frac{x_2}{t_2}\right), \ln\left(\frac{x_3}{t_3}\right)\right].
\end{aligned}$$

Ici, on doit comprendre que la variable  $Y$  est « commune » aux trois variables  $x_1, x_2$ , et, i.e. qu'elle ne change pas avec le temps.

$$\begin{aligned}
\text{c) } m_x(t) &= E[X(t)] = \dots \\
&= \int_0^1 e^y t dy \\
&= te^y \Big|_0^1 \\
&= t(e - 1).
\end{aligned}$$

$$\text{d) } \text{Cov}(X(t), X(t+s)) = E[X(t), X(t+s)] - m_x(t)m_x(t+s)$$

$$\rightarrow E[X(t), X(t+s)] = \int_0^1 (e^y t)(e^y (t+s)) dy = \dots$$

$$\begin{aligned}
E[X(t)X(t+s)] &= \int_0^1 (e^y t)(e^y (t+s)) dy \\
&= t(t+s) \int_0^1 e^{2y} dy \\
&= t(t+s) \frac{e^{2y}}{2} \Big|_0^1 \\
&= t(t+s) \left( \frac{e^2 - 1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$Cov(X(t), X(t+s)) = t(t+s) \left( \frac{e^2 - 1}{2} \right) - t(t+s)(e - 1)^2$$

Définition : la mesure d'autocorrélation se rapproche de l'autocovariance, mais permet de comparer deux processus d'amplitudes différentes entre eux pour mesurer la dépendance du processus à un moment donné par rapport à la mesure (le niveau ou la valeur) du processus à l'instant précédent. Autrement dit :

$$\rho_{auto}(X(t)) = \frac{Cov(X(t_1), X(t_2))}{\sqrt{Var(X(t_1))Var(X(t_2))}}$$

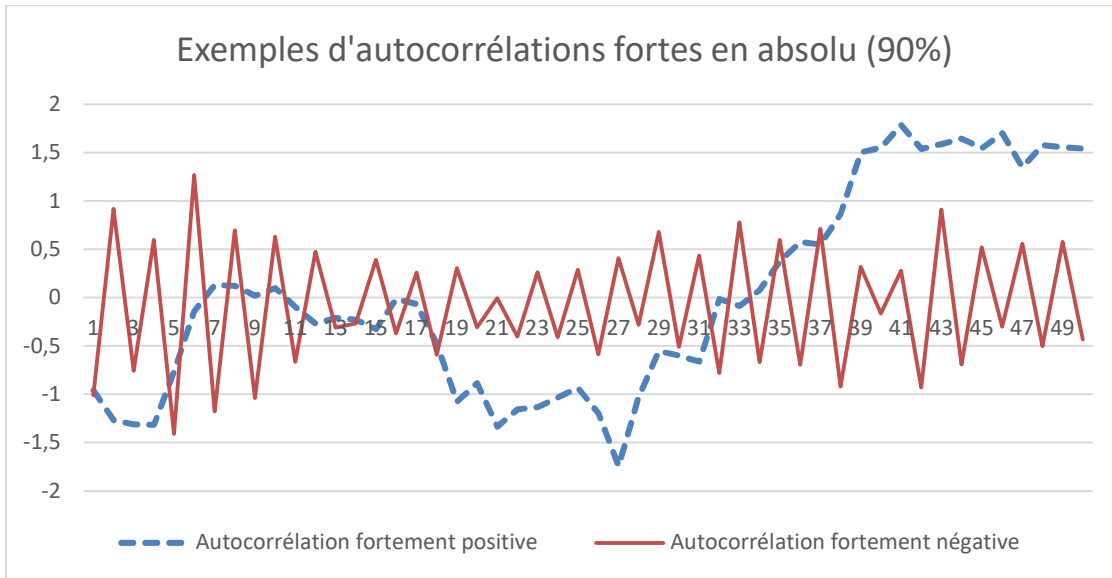
On suppose ici que  $t_1 < t_2$ . Parfois, pour des pas de temps de 1 (peu importe la mesure, en année, en mois, en semaine, selon le modèle), on écrira simplement :

$$\boxed{\rho_{auto}(X(t)) = \frac{Cov(X(t), X(t-1))}{\sqrt{Var(X(t))Var(X(t-1))}}}$$

Souvent, la variance du processus, lorsque celui-ci est stationnaire (définition en 2.6), est identique pour n'importe quelle période, et on pourra donc réécrire la formule sous la forme suivant si certaines conditions et propriétés asymptotiques sont respectées :

$$\rho_{auto}(X(t)) = \frac{Cov(X(t), X(t-1))}{Var(X(t))}$$

Ainsi, on peut comparer deux processus d'amplitudes différentes (exemple, un processus en milliers et l'autre en centièmes) plus facilement. L'autocorrélation se situera toujours entre -1 et +1, comme toute forme de corrélation.



Exemple d'application : modèle autorégressif AR(p).

$$X(t) = \alpha + \sum_{i=1}^p \beta_i X(t-i) + \varepsilon(t)$$

Le modèle le plus simple, le AR(1), s'écrit comme suit :

$$X(t) = \underbrace{\alpha}_{\text{Constante}} + \underbrace{\beta X(t-1)}_{\text{Partie autorégressive}} + \underbrace{\varepsilon(t)}_{\substack{\text{Partie} \\ \text{aléatoire} \\ \sim N(0, \sigma^2)}}$$

Règle générale, plus la partie autorégressive est forte ( $\beta$  élevé) et plus la partie aléatoire est faible ( $\sigma$  petit), plus l'autocorrélation sera élevée. Ces modèles sont davantage étudiés dans les cours de séries chronologiques. À noter que certaines règles existent pour que ces modèles restent « stationnaires ».

Exemple 2.9 : Considérons les données suivantes

8    10    5    3    -4    -2    5    2    8    7    3    -1    0    -5

À quoi est égale l'autocorrélation de cette série de données?

Solution exemple 2.9 :

Prenons tout d'abord les (n-1) premiers nombres, i.e. :

8    10    5    3    -4    -2    5    2    8    7    3    -1    0

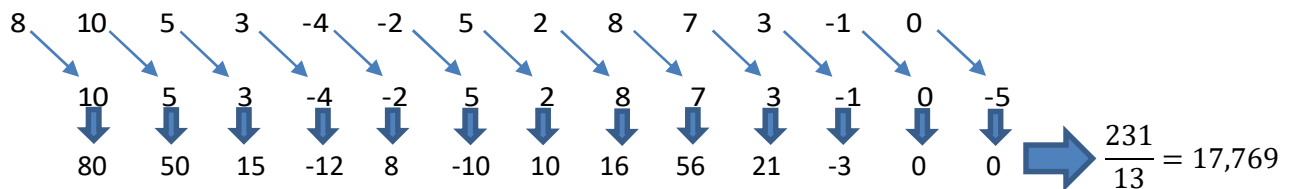
On a une moyenne de 3,385 qui sera associée à  $E[X(t-1)]$ .

Pour les (n-1) derniers nombres, i.e.

10    5    3    -4    -2    5    2    8    7    3    -1    0    -5

On a ici une moyenne de 2.385 qui sera associée à  $E[X(t)]$ .

Pour  $E[X(t)X(t-1)]$ , dans le cas présent, on obtient 17.769, empiriquement :



On a donc une covariance  $Cov[X(t)X(t-1)] = E[X(t)X(t-1)] - E[X(t)]E[X(t-1)] = 9.698$ .

Pour les variances, elles sont respectivement de 17.006 et de 19.775. Ainsi, on obtient un coefficient d'autocorrélation de  $\rho_{auto}(X(t)) = \frac{Cov(X(t), X(t-1))}{\sqrt{Var(t)Var(t-1)}} = \frac{9.698}{\sqrt{17.006 \cdot 19.775}} = 52.885\%$ .

*\*Attention, avec Excel, la fonction « var() » prend la variance échantillonnale par défaut, avec (n-1) au dénominateur, alors qu'on utilise généralement un « n » au dénominateur pour calculer le coefficient de corrélation, implicitement. La fonction « coefficient correlation » n'utilise pas la variance échantillonnale, cependant, et fournit le résultat recherché sans biais. En utilisant les fonctions « COVARIANCE() » et « VAR() » avec Excel, on aurait obtenu un coefficient de corrélation d'environ 48.8% ; ce biais est accentué lorsque les données ne sont pas nombreuses.*

## 2.6 Propriétés

Deux processus fort utilisés dans des applications, soit le processus de Poisson et le mouvement Brownien (respectivement aux chapitres 4 et 6), possèdent chacun deux propriétés importantes : l'indépendance et la stationnarité des accroissements.

**Définition :** Si les variables aléatoires  $X(t_4)-X(t_3)$  et  $X(t_2)-X(t_1)$  sont indépendantes  $\forall t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ , on dit que le processus stochastique  $\{X(t), t \in T\}$  est un processus à **accroissements indépendants**.

**Définition :** Si les variables aléatoires  $X(t_2+s)-X(t_1+s)$  et  $X(t_2)-X(t_1)$  possèdent la même fonction de répartition pour tout  $s$ , on dit que  $\{X(t), t \in T\}$  est un processus à **accroissements stationnaires**.

De façon plus technique, on dira que le processus  $\{X(t), t \in T\}$  est stationnaire, ou stationnaire « au sens strict », si sa fonction de répartition d'ordre  $n$  est invariante pour tout changement d'origine  $s$  tel que :

$$\underbrace{F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}_{\text{commençant à } t \text{ (exemple à } 0)} = \underbrace{F(x_1, \dots, x_n; t_1 + s, \dots, t_n + s)}_{\text{commençant à } t+s \text{ (exemple à } 0+s=s)} \quad \forall s, \forall n, \forall t_1, \dots, t_n$$

Si  $\{X(t), t \in T\}$  est un processus stationnaire continu au sens strict, alors on peut écrire que :

$$f(x; t) = f(x; t + s) \text{ et } f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 + s, t_2 + s) \quad \forall s, t_1, t_2$$

On peut ainsi simplifier et réécrire :

$$f(x; t) = f(x) \text{ et } f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_2 - t_1) \quad \forall s, t_1, t_2$$

Autrement dit, la fonction de densité d'ordre 1 du processus doit être indépendante de  $t$  et la fonction de densité d'ordre 2 nécessite qu'on connaisse la différence entre  $t_1$  et  $t_2$ , mais pas explicitement la valeur de  $t_1$  et la valeur de  $t_2$ .