Chapitre 5

Variable aléatoire continue

5.1 Définitions

Dans le chapitre précédent on a étudié les variables aléatoires discrètes, soit des variables aléatoires ayant un support fini ou dénombrable. Dans le présent chapitre, on présente les variables aléatoires, dites continues, dont l'image de la fonction X est un ensemble non dénombrable.

Exemple 5.1 *Soit X une variable aléatoire représentant l'heure d'arrivée d'un train à la gare. Alors,*

$$X(\Omega) = [0, 24].$$

Exemple 5.2 *Soit X une variable aléatoire représentant le montant d'un sinistre dû à un tremblement de terre. Alors,*

$$X(\Omega) = (0, \infty).$$

Définition 5.3 *Une variable aléatoire est dite continue s'il existe une fonction non-négative $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, pour laquelle pour tout sous-ensemble $B \subset \mathbb{R}$, on a*

$$\Pr(X \in B) = \int_B f(x)\mathrm{d}x.$$

La fonction f est dite la *fonction de densité de probabilité* de la variable aléatoire X et sera définie dans la section suivante.

5.2 Fonction de densité de probabilité

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, on a défini la fonction de masse de probabilité pour décrire le comportement de la variable aléatoire. Dans le cas d'une variable aléatoire continue, c'est plutôt la fonction de densité de probabilité qui joue ce rôle.

Définition 5.4 *La fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X est une fonction f_X satisfaisant les deux propriétés suivantes:*

$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0, \forall x \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x &= 1. \end{aligned}$$

Une fonction de densité de probabilité diffère d'une fonction de masse de probabilité: les valeurs d'une fonction de densité de probabilité ne sont pas des probabilités en soi. La probabilité $\Pr(X \in B)$ est obtenue en intégrant la fonction de densité de probabilité de X sur tout le sous-ensemble B. En d'autres mots, *c'est l'intégrale d'une fonction de densité de probabilité sur l'ensemble des valeurs possibles dans (a, b] qui donne la probabilité qu'une variable aléatoire continue prenne valeur dans cet interval (a,b]. Par conséquent, contrairement à la fonction de masse de probabilité d'une variable aléatoire discrète qui nous donne* $\Pr(X = x)$*, on a* $\Pr(X = x) = 0$ *pour une variable aléatoire continue car pour* $B = \{x\}$

$$\Pr(X \in B) = \int_x^x f_X(x)\mathrm{d}x = 0.$$

La probabilité qu'une variable aléatoire continue prenne une valeur fixée est donc nulle. Par conséquent, pour une variable aléatoire continue X *et* $B = [a, b]$*, on a*

$$\Pr(a < X < b) = \Pr(a \leq X < b) = \Pr(a < X \leq b) = \Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque 5.5 *Intuitivement,* $f(a)$ *est une mesure qui détermine les chances que la variable aléatoire* X *soit près de* a*. On peut toutefois évaluer la probabilité que* X *soit comprise dans un tout petit intervalle de longueur* ε *autour du point* a*. On a pour* $B = \left[a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right]$

$$\Pr(X \in B) = \Pr(a - \frac{\varepsilon}{2} \leq X \leq a + \frac{\varepsilon}{2}) = \int_{a-\frac{\varepsilon}{2}}^{a+\frac{\varepsilon}{2}} f_X(x)\mathrm{d}x \approx \varepsilon f(a).$$

Exemple 5.6 *Vérifier si la fonction* f_X *suivante est une fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, x > 0 \\ 0, \ \textit{ailleurs} \end{cases}.$$

Exemple 5.7 *Soit* X *une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} k(1+x), \ \ -1 \leq x \leq 0 \\ k(1-x), \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \ \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

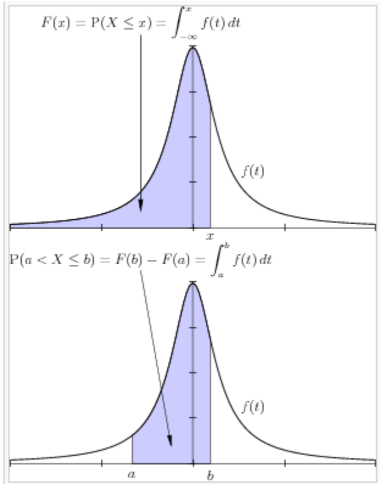
Trouver la constante k *telle que* f_X *est une fonction de densité de probabilité bien définie.*

Remarque 5.8 *Une fonction de densité de probabilité* f_X *ne doit pas nécessairement être continue partout mais elle doit contenir, au maximum, un nombre fini de discontinuités.*

5.3 Fonction de répartition

Définition 5.9 *La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue* X *avec fonction de densité de probabilité* f_X *est définie par*

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\mathrm{d}y.$$



Lien entre la densité, *f* et la fonction de répartition (haut), et, plus généralement, les probabilités (bas).

Exemple 5.10 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, 0 \leq x \leq 4 \\ 0, \ \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

(a) Trouver la fonction de répartition de X. (b) Faire les graphiques de f_X et F_X.

Proposition 5.11 ***Théorème de Leibnitz*** *Soit une fonction $f(x,\alpha)$ continue sur $[a,b]$ et $u(\alpha)$, $v(\alpha)$ des fonctions de α dérivables et pouvant prendre des valeurs dans $[a,b]$. Alors,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)\mathrm{d}x = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\mathrm{d}x + f(v(\alpha),\alpha)\frac{\mathrm{d}v(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} - f(u(\alpha),\alpha)\frac{\mathrm{d}u(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}.$$

Proposition 5.12 *La fonction de répartition F_X possède les propriétés suivantes:*

(1) $F_X(-\infty) = 0$ et $F_X(\infty) = 1$.

(2) Pour $x < y$, $F_X(x) \leq F_X(y)$.

(3) $\Pr(a \leq X \leq b) = \Pr(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$.

(4) $F'_X(x) = f(x)$, $\forall x$ où $f(x)$ est continue.

$$\begin{aligned} F'_X(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f_X(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_X(y)\mathrm{d}y + f_X(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} - f_X(-\infty)\frac{\mathrm{d}-\infty}{\mathrm{d}x} \\ &= 0 + f_X(x) - 0 \\ &= f_X(x). \end{aligned}$$

Exemple 5.13 *Soit X une variable aléatoire continue représentant le montant d'un sinistre en assurance auto avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathrm{c}e^{-\frac{x}{1000}}, \ x > 0 \\ 0, \ \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

(a) Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire X. (b) Trouver la probabilité qu'un assuré ait un sinistre d'un montant compris entre 500 et 1200. (c) Trouver la probabilité qu'un assuré ait un sinistre d'un montant de plus de 2000.

Exemple 5.14 *(Dépannage MP, no. 18). Soit une variable aléatoire X avec fonction de densité*

$$f_X(x) = \varphi \times 1_{\{t_1 \leq x \leq t_2\}} + \theta \times 1_{\{t_2 \leq x \leq t_3\}} + \omega \times 1_{\{t_3 \leq x \leq t_4\}}.$$

(a) Trouver l'

5.4 Fonction de répartition inverse

La fonction de répartition inverse pour une variable aléatoire continue est définie de la même façon que dans le cas d'une variable aléatoire discrète. Cependant, on parvient parfois à obtenir une forme analytique de la fonction de répartition inverse pour certaines variables aléatoires continues. On rappelle ci-dessous la définition de la fonction de répartition inverse et on poursuit avec un exemple.

Définition 5.15 *Soit X une variable aléatoire avec fonction de répartition F_X. On définit la fonction de répartition inverse F_X^{-1} par*

$$F_X^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}$$

pour $u \in [0, 1]$. La fonction de répartition inverse est aussi appelée la fonction quantile de X.

Exemple 5.16 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, 0 < x < 1 \\ 0, ailleurs. \end{cases}$$

(a) Trouver l'expression de la fonction de répartition inverse de X. (b) Trouver le 20ième centile de X. (c) Trouver la médiane de X.

5.5 Distribution d'une fonction d'une variable aléatoire continue

La présente section s'apparente à la section 4.3. Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité f_X et $Y = g(X)$ une fonction de X. Nous sommes intéressés à connaître la fonction de densité de probabilité f_Y d'une variable aléatoire $Y = g(X)$. Dans un premier temps, nous trouverons la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = g(X)$ que l'on dérivera par la suite pour obtenir la fonction de densité de probabilité de Y. Ensuite, nous formaliserons le tout dans une proposition.

Exemple 5.17 *Soit X une variable aléatoire avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9}, \ 0 < x < 3 \\ 0, \ ailleurs. \end{cases}$$

Trouver la fonction de densité de probabilité de $Y = X^3$.

Proposition 5.18 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité f_X et g une fonction strictement croissante ou décroissante et dérivable en tout point. Alors, la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = g(X)$ est*

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) \right|,$$

où $g^{-1}(y)$ est la valeur de x telle que $g(x) = y$.

Exemple 5.19 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, 0 < x < 1 \\ 0, ailleurs. \end{cases}$$

Trouver la fonction de densité de probabilité de $Y = g(X) = 1 - 3X^2$.

Remarque 5.20 *Une autre façon d'identifier la distribution de $Y = g(X)$ est d'utiliser la fonction génératrice des moments. Étant donné qu'il y a un lien biunivoque entre la fonction génératrice des moments et la distribution d'une variable aléatoire, on a qu'à trouver la fonction génératrice des moments de $Y = g(X)$ et d'identifier, lorsque possible, la distribution correspondante. On reviendra sur cette approche après avoir trouver les expressions des fonctions génératrices des moments de différentes distributions continues usuelles.*

Définition 5.21 *Soit $g(X)$ une fonction de la variable aléatoire continue X avec fonction de densité de probabilité f_X. Alors,*

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque 5.22 *Analogue au cas discret: $f(x)\mathrm{d}x \approx P(x \leq X \leq x + \mathrm{d}x)$ pour $\mathrm{d}x$ petit.*

Proposition 5.23 *Pout toute variable aléatoire **continue non négative** X,*

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\infty} \Pr(X > x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

5.6 Lois continues usuelles

5.6.1 Loi uniforme continue

Définition 5.24 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

La variable aléatoire X est dite obéir à une loi uniforme continue sur (a,b).

Proposition 5.25 *Soit X une variable aléatoire continue telle que $X \sim U(a,b)$. Alors,*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b. \end{cases} \\ F_X^{-1}(u) &= a + (b-a)u \\ E[X] &= \frac{a+b}{2} \\ Var(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \\ M_X(t) &= \frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{t(b-a)}. \end{aligned}$$

Exemple 5.26 *Soit une variable aléatoire X telle que $X \sim U(a,b)$. Démontrer que $E[X] = \frac{a+b}{2}$ à l'aide de la fonction génératrice des moments.*

Solution.

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M_X(t)\,|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{e}^{tb}-\mathrm{e}^{ta}}{t(b-a)}\,|_{t=0} \\
&= \frac{(b\mathrm{e}^{tb}-a\mathrm{e}^{ta})t(b-a)-(b-a)(\mathrm{e}^{tb}-\mathrm{e}^{ta})}{t^2(b-a)^2}\,|_{t=0} \\
&= \frac{0}{0}.
\end{aligned}$$

On doit donc avoir recours à la règle de l'Hopital avec laquelle on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}M_X(t)}{\mathrm{d}t} &= \lim_{t\to 0}\frac{(b-a)(b\mathrm{e}^{tb}-a\mathrm{e}^{ta})+(b^2\mathrm{e}^{tb}-a^2\mathrm{e}^{ta})t(b-a)-(b-a)(b\mathrm{e}^{tb}-a\mathrm{e}^{ta})}{2t(b-a)^2} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(b-a)(b^2\mathrm{e}^{tb}-a^2\mathrm{e}^{ta})+(b^3\mathrm{e}^{tb}-a^3\mathrm{e}^{ta})t(b-a)+(b^2\mathrm{e}^{tb}-a^2\mathrm{e}^{ta})(b-a)-(b-a)(b^2\mathrm{e}^{tb}-a^2\mathrm{e}^{ta})}{2(b-a)^2} \\
&= \frac{(b-a)\left(b^2-a^2\right)+\left(b^2-a^2\right)(b-a)-(b-a)\left(b^2-a^2\right)}{2(b-a)^2} \\
&= \frac{\left(b^2-a^2\right)(b-a)}{2(b-a)^2} \\
&= \frac{(b-a)(b+a)(b-a)}{2(b-a)^2} \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

■

Exemple 5.27 *À partir de 5h00am, il y a un bus en direction de Montréal qui passe à la Gare du Palais à toutes les 30 minutes. Une personne qui veut prendre le bus arrivera à la gare à une heure aléatoire entre 8h45 et 9h45. Trouver la probabilité qu'elle attende au plus 10 minutes avant de partir.*

Exemple 5.28 *Soit X une variable aléatoire continue telle que $X \sim U(a,b)$. Trouver la valeur de c telle que* $\Pr\left(\left|X-\frac{a+b}{2}\right|<c\right)=\frac{3}{4}$.

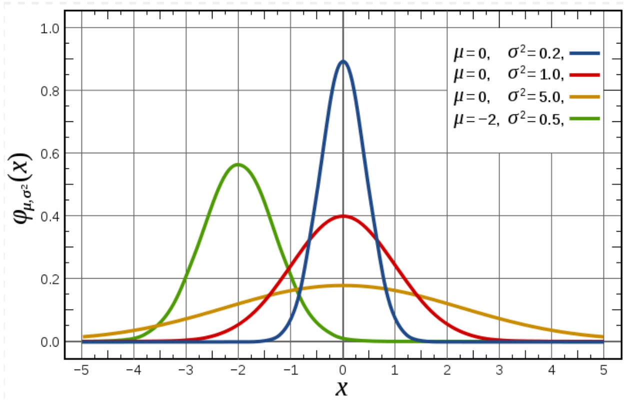
5.6.2 Loi normale

Définition 5.29 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, & x\in\mathbb{R}, \mu\in\mathbb{R},\ \sigma>0 \\ 0, & \textit{ailleurs.}\end{cases}$$

La variable aléatoire X est dite obéir à une loi normale de paramètres μ et σ.

Remarque 5.30 *Ci-dessous, différents graphiques de la fonction de densité de probabilité d'une variable* *aléatoire* $X \sim N(\mu, \sigma)$.



Remarque 5.31 *La loi normale est symétrique par rapport à* μ.

Proposition 5.32

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}.$$

Preuve. Posons $I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}dy$. Alors,

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(y^2+x^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On utilise les coordonnées polaires pour évaluer la double intégrale, c'est-à-dire on pose

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

où $r \in (0, \infty)$ et $\theta \in (0, 2\pi)$. Le jacobien de la transformation est

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin(\theta) \\ \sin\theta & r\cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) \\ &= r\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \\ &= r. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} r\,d\theta dr \\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} r \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= -2\pi \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} \\ &= 2\pi(0-1) \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

d'où $I = \sqrt{2\pi}$. ■

Proposition 5.33 *Soit une variable aléatoire X telle que $X \sim N(\mu, \sigma)$. Alors,*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ F_X^{-1}(u) &= \mu + \sigma\Phi^{-1}(u), \end{aligned}$$

où $\Phi(.)$ correspond à la fonction de répartition d'une variable aléatoire obéissant à une loi normale standard, c'est-à-dire à une loi normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

Proposition 5.34 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim N(\mu, \sigma)$. Alors,*

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proposition 5.35 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim N(\mu, \sigma)$. Alors, $Y = aX + b$ obéit à une loi normale de paramètres $\mu^* = a\mu + b$ et $\sigma^* = a\sigma$.*

Exemple 5.36 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 9)$. Trouver (a)* $\Pr(2 < X < 5)$. *(b)* $\Pr(|X - 3| > 6)$.

Exemple 5.37 *Les résultats d'un test d'aptitude donné à un groupe d'étudiants sont normalement distribués de moyenne 100 et d'écart-type 15. (a) Quel résultat doit avoir un étudiant pour être dans les 10% meilleurs du groupe? (b) Quelle proportion du groupe d'étudiants a un résultat entre 90 et 110.*

Proposition 5.38 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim N(\mu, \sigma)$.*

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu \\ Var(X) &= \sigma^2 \\ M_X(t) &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Preuve.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Posons $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$,$dy = \frac{dx}{\sigma}$. Alors,

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma y + \mu)}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy \\ &= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= (\sigma)(0) + \left(\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\right)\left(\sqrt{2\pi}\right) \\ &= \mu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[(X-\mu)^2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx. \end{aligned}$$

Posons $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $dy = \frac{dx}{\sigma}$. Alors,

$$Var(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

$$\begin{aligned} u &= y,\ \mathrm{d}v = y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}y, v = -\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}(0+\sqrt{2\pi}) \text{ car exp. tend plus vite vers 0} \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x$$

Posons $y = \frac{x-\mu}{\sigma}, \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\sigma}$. Alors,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{t(\sigma y+\mu)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(y^2-2\sigma t y)}{2}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(y^2-2\sigma t y+\sigma^2 t^2)}{2}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\sigma t)^2}{2}}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Posons $z = y - \sigma t, \mathrm{d}z = \mathrm{d}y$, d'où

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{\mathrm{e}^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} \\ &= \mathrm{e}^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \end{aligned}$$

■

Exemple 5.39 *Montrer le résultat de la Proposition 5.35 à l'aide de la fonction génératrice des moments.*

A la Section 4.6.4, on a vu que l'on pouvait approximer une loi binomiale par une loi de Poisson. On propose ci-dessous une deuxième approximation de la loi binomiale qui est un cas particulier du théorème central limite que l'on verra au Chapitre 7.

Proposition 5.40 ***Théorème limite de DeMoivre-Laplace*** *Soit S le nombre de succès dans n essais indépendants chacun résultant en un succès avec probabilité p et un échec avec probabilité $(1-p)$ et donc $S \sim Bin\,(n,p)$. Alors pour tout $a < b$,*

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left(a \leq \frac{S-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Remarque 5.41 *On a proposé deux approximations (une discrète et une continue) pour la loi Binomiale: l'approximation de Poisson: bonne lorsque n est grand et p petit et l'approximation normale: bonne lorsque n est grand (souvent prend $n \geq 30$). Étant donné que la loi binomiale est discrète et donc a comme suppport des entiers et que la loi normale est continue, on utilise généralement une correction pour la continuité avant d'effectuer l'approximation normale. On remplace $\Pr(X = x)$ par $\Pr\left(x - \frac{1}{2} < X < x + \frac{1}{2}\right)$ ce qui est équivalent étant donné que X ne peut prendre que des valeurs entières.*

Exemple 5.42 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim Bin(40, 0.5)$. Trouver $\Pr(X = 20)$ et comparer avec l'approximation normale.*

Solution. Loi binomiale:

$$\Pr(X = 20) = \binom{40}{20} (0.5)^{40} = 0.1254.$$

Approximation normale:

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= 20) = \Pr\left(20 - \frac{1}{2} < X < 20 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \Pr(19.5 < X < 20.5) \\
&= \Pr\left(\frac{19.5 - (40)(0.5)}{\sqrt{(40)(0.5)(0.5)}} < \frac{X - (40)(0.5)}{\sqrt{(40)(0.5)(0.5)}} < \frac{20.5 - (40)(0.5)}{\sqrt{(40)(0.5)(0.5)}}\right) \\
&\approx \Pr\left(\frac{19.5 - 20}{\sqrt{10}}) < Z < \frac{20.5 - 20}{\sqrt{10}}\right) \\
&= \Phi(0.16) - \Phi(-0.16) \\
&= 0.5636 - (1 - 0.5636) \\
&= 0.1272.
\end{aligned}$$

■

5.6.3 Loi lognormale

Définition 5.43 *Soit Y une variable aléatoire obéissant à une loi normale de paramètres μ et σ. Alors, la variable aléatoire $X = \mathrm{e}^Y$ est dite obéir à une loi lognormale de paramètres μ et σ dont la fonction de densité de probabilité est donnée par*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}, \ x \in \mathbb{R}^+, \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0.$$

Proposition 5.44 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim LN(\mu, \sigma)$. Alors,*

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) \\
F_X^{-1}(u) &= \mathrm{e}^{\mu + \sigma\Phi^{-1}(u)} \\
E[X] &= \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\
Var(X) &= \mathrm{e}^{2\mu + \sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right).
\end{aligned}$$

Remarque 5.45 *La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire lognormale n'a pas de forme analytique.*

Exemple 5.46 *Le montant en milliards de dollars des dommages causés par le passage d'un ouragan est modélisé par une loi lognormale de paramètres $\mu = 1.6$ et $\sigma = 0.6$. (a) Trouver la probabilité que le montant des dommages soit supérieur à 10 milliards de dollars. (b) Trouver le 95ième centile de la distribution du montant des dommages.*

5.6.4 Loi exponentielle

Définition 5.47 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité*

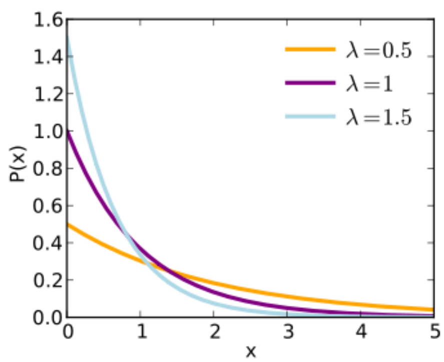
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

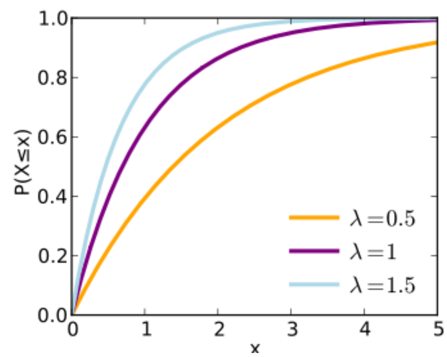
La variable aléatoire X est dite obéir à une loi exponentielle de paramètre λ.

Proposition 5.48 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim Exp(\lambda)$. Alors,*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x},\ x > 0 \\ F_X^{-1}(u) &= \frac{-\ln(1-u)}{\lambda} \\ E[X] &= \frac{1}{\lambda} \\ Var(X) &= \frac{1}{\lambda^2} \\ M_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - t},\ t < \lambda. \end{aligned}$$

Remarque 5.49 *Quelques graphes de fonctions de densité et de répartition de variables aléatoires exponentielles de différents paramètres.*





Proposition 5.50 ***(Propriété multiplicative)*** *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim Exp(\lambda)$. Alors,*

$$\Pr(X > s + t) = \Pr(X > s)\Pr(X > t).$$

Proposition 5.51 ***(Propriété sans mémoire)*** *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim Exp(\lambda)$. Alors,*

$$\Pr(X > s + t\,|X > t) = \Pr(X > s).$$

Remarque 5.52 *Dans un contexte de distributions de sinistres, on a que la variable aléatoire X représente le montant d'un sinistre. Étant donné la propriété sans mémoire de la loi exponentielle, on a par exemple que la probabilité qu'un sinistre soit supérieur à 2000$ sachant qu'il est supérieur à 1500$ est égale à la probabilité qu'un sinistre soit supérieur à $500. Dans un contexte d'analyse de survie, on a que la variable aléatoire X représente l'âge au décès. Ici, on a que la probabilité qu'un individu survive $s + t$ années sachant qu'il a survécu t années est égale à la probabilité qu'il survive s années. Il en va de même lorsque X représente l'âge d'une machine ou d'une ampoule.*

Remarque 5.53 *La loi exponentielle est une loi fondamentale dans la modélisation du montant d'un sinistre, du temps d'attente entre deux sinistres et en analyse de survie.*

Exemple 5.54 *Soit X une variable aléatoire représentant le temps d'attente en années entre deux ouragans. On suppose $X \sim Exp(0.2)$. Trouver la probabilité que le prochain ouragan se produise dans les 2 prochaines années sachant que le dernier ouragan a eu lieu il y a 3 ans.*

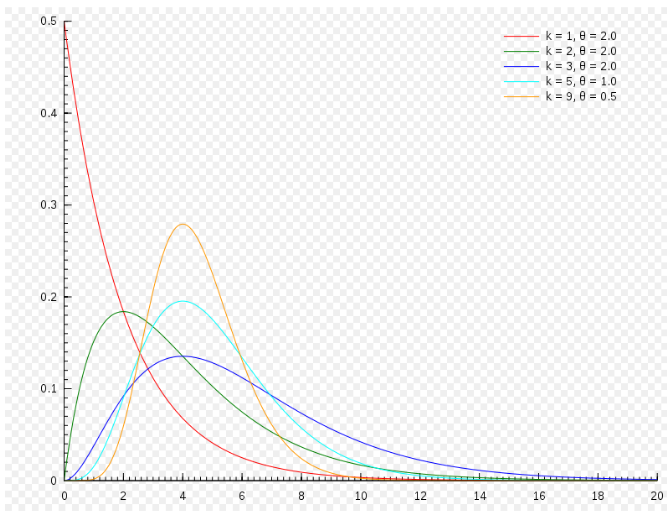
5.6.5 Loi gamma

Définition 5.55 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \textit{ailleurs}, \end{cases}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ est appelée une fonction gamma. La variable aléatoire X est dite obéir à une loi gamma de paramètres α et λ.

Remarque 5.56 *Quelques graphes de fonctions de densité de probabilité de variables aléatoires gamma de différents paramètres $\alpha = k$ et $\lambda = \frac{1}{\theta}$.*



Remarque 5.57 *Le paramètre α est le paramètre de forme alors que le paramètre λ fixe l'échelle.*

Proposition 5.58 *Soit la fonction gamma $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$. Alors,*

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1).$$

Proposition 5.59 *Soit $\alpha = n \in \mathbb{N}^+$. Alors,*

$$\Gamma(n) = (n - 1)!.$$

Remarque 5.60 *On peut facilement montrer que*

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} dx = 1.$$

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx.$$

On pose $y = \lambda x, \mathrm{d}y = \lambda \mathrm{d}x$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-y}\frac{\mathrm{d}y}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Proposition 5.61 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim Gamma\,(\alpha, \lambda)$. Alors,*

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \frac{\Gamma(\alpha; \lambda x)}{\Gamma(\alpha)} = H(x; \alpha, \lambda)\,,\ x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \\
E[X] &= \frac{\alpha}{\lambda} \\
Var(X) &= \frac{\alpha}{\lambda^2} \\
M_X(t) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha,\ t < \lambda,
\end{aligned}$$

où $\Gamma(\alpha; x) = \int_0^x y^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$ est dite une fonction gamma incomplète.

Proposition 5.62 ***Proposition 5.63*** *Soit une variable aléatoire X telle que $X \sim Gamma\,(\alpha, \lambda)$ où $\alpha \in \mathbb{N}^+$. Alors, la fonction de répartition de X peut s'écrire sous la forme analytique suivante*

$$F_X(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1}\frac{(\lambda x)^k \mathrm{e}^{-\lambda x}}{k!}.$$

Preuve. Les outils utilisés dans la preuve dépassent le cadre de ce cours. ■

Remarque 5.64 *La loi gamma est une généralisation de la loi exponentielle. Plus précisément, si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes obéissant toutes à une loi exponentielle de paramètre λ, alors $Y = X_1 + ... + X_n$ obéit à une loi gamma de paramètres $\alpha = n$ et λ. On peut le démontrer à l'aide de la fonction génératrice des moments. Ceci sera discuté au prochain chapitre.*

Remarque 5.65 *Une loi gamma de paramètres $\alpha = n$ et λ avec $n \in \mathbb{N}^+$ est aussi appelée une loi $Erlang\,(n, \lambda)$.*

Remarque 5.66 *On ne peut évaluer la fonction quantile d'une variable aléatoire obéissant à une loi gamma qu'en optimisant numériquement la fonction de répartition (avec `Excel`, `R` ou `Maple` par exemple).*

Exemple 5.67 *Soit les données suivantes pour la fonction gamma incomplète*

z	$\Gamma(3.3; z)$
0.44	0.0145
4.4	2.0582
44	2.6834

et les valeurs suivantes pour la fonction gamma

α	$\Gamma(\alpha)$
3	2
3.3	2.6834

(a) Soit $X \sim Gamma(\alpha = 3, \lambda = 0.01)$. Trouver $F_X(300)$. (b) Soit $X \sim Gamma(\alpha = 3.3, \lambda = 0.01)$. Trouver $F_X(440)$.

Exercice 5.68 *Soit les données suivantes pour les fonctions gamma et gamma incomplète*

z	$\Gamma(5.5; z)$
1.5	0.4868
15	52.259.

α	$\Gamma(\alpha)$
5	24
5.5	52.343

(a) Si $X \sim Gamma(5, 0.1)$, trouver $F_X(15)$. (b) Si $X \sim Gamma(5.5, 1)$, trouver $F_X(15)$. (c) Si $X \sim Gamma(5.5, 0.1)$, trouver $F_X(15)$.

Solution. (a) $F_X(15) = 0.01858$. (b) $F_X(15) = 0.9984$. (c) $F_X(15) = 0.0093$. ■

5.6.6 Loi du khi-carré (ou khi-deux)

Définition 5.69 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x > 0,\ n \in \mathbb{N}^+ \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

La variable aléatoire X est dite obéir à une loi khi-carré de n degrés de liberté.

Remarque 5.70 *La loi khi-carré est un cas particulier de la loi gamma où $(\alpha, \lambda) = \left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.*

Remarque 5.71 *La loi khi-carré est très utilisée en statistiques, notamment pour faire un test d'ajustement et ainsi valider l'hypothèse d'une distribution pour une population donnée ou pour vérifier l'indépendance entre deux variables sur une population donnée.*

Proposition 5.72 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \chi^2(n)$. Alors,*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \ x > 0, n \in \mathbb{N}^+ \\ E[X] &= n \\ Var(X) &= 2n \\ M_X(t) &= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}, \ t < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Preuve. La loi khi-carré de n degrés de liberté étant le cas particulier de la loi gamma où $(\alpha, \lambda) = \left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$, on a

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{\Gamma(\alpha; \lambda x)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ E[X] &= \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{1}{2}} = n \\ Var(X) &= \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{\frac{n}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2n \\ M_X(t) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}, \ t < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■

Proposition 5.73 *Soit X et Y des variables aléatoires telles que $X \sim N(0,1)$ et $Y = X^2$. Alors, $Y \sim \chi^2(1)$.*

5.6.7 Loi bêta

Définition 5.74 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, & 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0, & \textit{ailleurs}, \end{cases}$$

où $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ est appelée une fonction bêta. La variable aléatoire X est dite obéir à une loi bêta de paramètres α et β.

Proposition 5.75 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim B\hat{e}ta\,(\alpha,\beta)$. Alors,*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{B(x;\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)} \\ E[X] &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ Var(X) &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \\ M_X(t) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha+j}{\alpha+\beta+j}, \end{aligned}$$

où $B(x;\alpha,\beta) = \int_0^x y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy$ est appelée une fonction bêta incomplète.

Preuve.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^x y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\mathrm{d}y \\ &= \frac{B(x;\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X\left(x\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^1 \frac{x^{(\alpha+1)-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)} \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)} \int_0^1 \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(\beta\right)} x^{(\alpha+1)-1}(1-x)^{\beta-1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)} \frac{\left(\alpha\right)\Gamma\left(\alpha\right)}{\left(\alpha+\beta\right)\Gamma\left(\alpha+\beta\right)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X\left(x\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_0^1 \frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)} x^{(\alpha+2)-1}(1-x)^{\beta-1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)} \frac{\Gamma\left(\alpha+2\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+2\right)} \int_0^1 \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+2\right)}{\Gamma\left(\alpha+2\right)\Gamma\left(\beta\right)} x^{(\alpha+2)-1}(1-x)^{\beta-1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)} \frac{\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\left(\alpha+\beta+1\right)\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)} \frac{\left(\alpha+1\right)\left(\alpha\right)\Gamma\left(\alpha\right)}{\left(\alpha+\beta+1\right)\left(\alpha+\beta\right)\Gamma\left(\alpha+\beta\right)} \\
&= \frac{\left(\alpha\right)\left(\alpha+1\right)}{\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha+\beta+1\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var\left(X\right) &= E\left[X^2\right] - E^2\left[X\right] \\
&= \frac{\left(\alpha\right)\left(\alpha+1\right)}{\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha+\beta+1\right)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha^2+\alpha\beta+\alpha+\beta) - \alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha^2+\alpha\beta - \alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\alpha\beta}{\left(\alpha+\beta\right)^2\left(\alpha+\beta+1\right)}
\end{aligned}$$

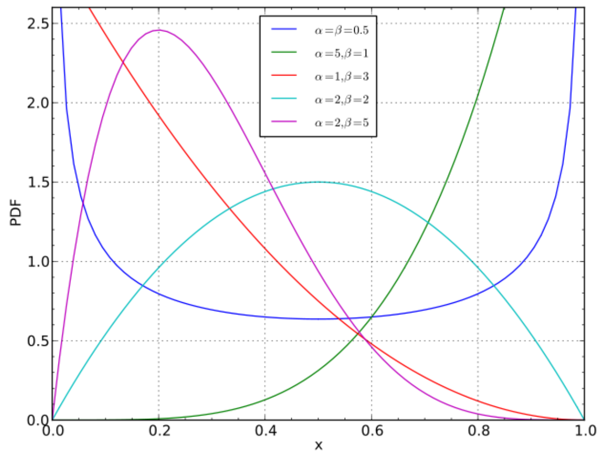
$$\begin{aligned}
M_X\left(t\right) &= E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f_X\left(x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tx)^k}{k!}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\int_0^1 x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}B\left(\alpha+k,\beta\right) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{B\left(\alpha+k,\beta\right)}{B(\alpha,\beta)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{B\left(\alpha+k,\beta\right)}{B(\alpha,\beta)} &= \frac{\Gamma\left(\alpha+k\right)\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+k+\beta\right)}\frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+k\right)\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+k+\beta\right)\Gamma\left(\alpha\right)} \\
&= \frac{\left(\alpha+k-1\right)\left(\alpha+k-2\right)...\left(\alpha\right)\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\left(\alpha+k+\beta-1\right)\left(\alpha+k+\beta-2\right)...\left(\alpha+\beta\right)\Gamma\left(\alpha+\beta\right)\Gamma\left(\alpha\right)} \\
&= \frac{\left(\alpha+k-1\right)\left(\alpha+k-2\right)...\left(\alpha\right)}{\left(\alpha+\beta+k-1\right)\left(\alpha+\beta+k-2\right)...\left(\alpha+\beta\right)} \\
&= \prod_{j=0}^{k-1}\frac{\left(\alpha+j\right)}{\left(\alpha+\beta+j\right)}.
\end{aligned}$$

$$M_X\left(t\right) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\left(\alpha+j\right)}{\left(\alpha+\beta+j\right)}.$$

■

Remarque 5.76 *Quelques graphes de fonctions de densité de variable aléatoire bêta.*



Remarque 5.77 *La loit bêta est souvent utilisée pour décrire le comportement d'une probabilité inconnue ou la proportion de dommage (assurance habitation par exemple) étant donné son support compris entre 0 et 1.*

Exercice 5.78 *Soit X une variable aléatoire obéissant à une loi bêta de paramètres $\alpha = 3.4$ et $\beta = 6.6$. Trouver $F_X(0.7)$...voir Excel.*

Exercice 5.79 *Soit X une variable aléatoire obéissant à une loi bêta de paramètres $\alpha = 3$ et $\beta = 2$. Trouver $F_X(0.7)$.*

5.6.8 Loi Pareto

Définition 5.80 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité de probabilité*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}, & x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

La variable aléatoire X est dite obéir à une loi Pareto de paramètres α et λ.

Proposition 5.81 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$. Alors,*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\alpha \\ E[X] &= \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \ \alpha > 1 \\ Var(X) &= \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \ \alpha > 2 \\ E\left[X^k\right] &= \frac{\lambda^k k!}{\Pi_{j=1}^k(\alpha - j)}, \ \alpha > k \\ M_X(t) &= n'existe\ pas. \end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+y)^{\alpha+1}}\mathrm{d}y \\ &= \alpha\lambda^\alpha \frac{(\lambda+y)^{-(\alpha+1)+1}}{-(\alpha+1)+1}\,|_0^x \\ &= -\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+y)^\alpha}\,|_0^x \\ &= 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha, \alpha>0 \end{aligned}$$

$$E[X] = \int_0^\infty x\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$$

Posons $u=x, du=dx$ et $dv=\frac{1}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x, v=\frac{1}{-\alpha(\lambda+x)^\alpha}$

$$\begin{aligned} E[X] &= \alpha\lambda^\alpha\left(\frac{-x}{\alpha(\lambda+x)^\alpha}\,|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{\alpha(\lambda+x)^\alpha}\mathrm{d}x\right) \\ &= \alpha\lambda^\alpha\left(\frac{-1}{\alpha(\alpha-1)(\lambda+x)^{\alpha-1}}\,|_0^\infty\right), \alpha>1 \\ &= \alpha\lambda^\alpha\left(0-\frac{1}{\alpha(\alpha-1)(\lambda)^{\alpha-1}}\right), \alpha>1 \\ &= \frac{\lambda}{\alpha-1},\ \alpha>1 \end{aligned}$$

$$E\left[X^2\right] = \int_0^\infty x^2\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$$

Posons $u=x^2, du=2xdx$ et $dv=\frac{1}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x, v=\frac{1}{-\alpha(\lambda+x)^\alpha}$:

$$E\left[X^2\right] = \alpha\lambda^\alpha\left(\frac{x^2}{-\alpha(\lambda+x)^\alpha}\,|_0^\infty + \frac{2}{\alpha}\int_0^\infty \frac{x}{\alpha(\lambda+x)^\alpha}\mathrm{d}x\right)$$

Posons $u=x, du=dx$ et $dv=\frac{1}{(\lambda+x)^\alpha}\mathrm{d}x, v=\frac{1}{-(\alpha-1)(\lambda+x)^{\alpha-1}}$:

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= \alpha\lambda^\alpha\left(\frac{x^2}{-\alpha(\lambda+x)^\alpha}\,|_0^\infty + \frac{2}{\alpha}\left(\frac{-x}{(\alpha-1)(\lambda+x)^{\alpha-1}}\,|_0^\infty + \frac{1}{\alpha-1}\int_0^\infty \frac{1}{(\lambda+x)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x\right)\right),\ \alpha>2 \\ &= \alpha\lambda^\alpha\left(0+\frac{2}{\alpha}\left(0+\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{-1}{(\alpha-2)(\lambda+x)^{\alpha-2}}\,|_0^\infty\right)\right)\right),\ \alpha>2 \\ &= \alpha\lambda^\alpha\left(\frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha-1}\left(0+\frac{1}{(\alpha-2)\lambda^{\alpha-2}}\right)\right)\right),\ \alpha>2 \\ &= \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)},\ \alpha>2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[X^2\right] - E^2[X] \\ &= \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \left(\frac{\lambda}{\alpha-1}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[X^k\right] &= \int_0^\infty x^k \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \frac{\alpha x^k}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha+1} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Posons $y = \frac{\lambda}{\lambda+x}$, $dy = -\frac{\lambda}{(\lambda+x)^2}dx$. Ainsi, $x = \frac{\lambda(1-y)}{y}$ et $dx = \frac{-(\lambda+x)^2}{\lambda}dy = -\frac{\lambda}{y^2}dy$

$$\begin{aligned} E\left[X^k\right] &= \int_1^0 \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda(1-y)}{y}\right)^k (y)^{\alpha+1} \left(-\frac{\lambda}{y^2}\right) \mathrm{d}y \\ &= \alpha\lambda^k \int_0^1 y^{(\alpha-k)-1} (1-y)^{(k+1)-1} \mathrm{d}y \\ &= \alpha\lambda^k B(\alpha-k, k+1) \\ &= \alpha\lambda^k \frac{\Gamma(\alpha-k)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \alpha\lambda^k \frac{k!\Gamma(\alpha-k)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \\ &= \alpha\lambda^k \frac{k!\Gamma(\alpha-k)}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)\Gamma(\alpha-k)} \\ &= \frac{\lambda^k k!}{\Pi_{j=1}^k(\alpha-j)},\ \alpha > k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{tx} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \left(1 + tx + \frac{(tx)^2}{2} + \frac{(tx)^3}{3!} + \frac{(tx)^4}{4!} + \ldots\right) \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} \mathrm{d}x \\ &= \infty \end{aligned}$$

■

Remarque 5.82 *La loi Pareto est une loi fondamentale en actuariat utilisée notamment pour la modélisation des montants de sinistres élevés. Elle est une distribution à queue longue d'où son utilité notamment en réassurance. Le phénomène longue queue est causé par une variable pouvant atteindre des valeurs très grandes, valeurs pour lesquelles le nombre d'observations devient très petit; en revanche le nombre d'observations pour les petites valeurs de la taille analysée sont souvent très élevées. À noter que le mode de la loi Pareto est zéro.*

Remarque 5.83 *On verra au Chapitre 6 que la loi Pareto peut être obtenue à l'aide d'un mélange de variables aléatoires ou du ratio de deux variables aléatoires.*

Exemple 5.84 *Soit X une variable aléatoire obéissant à un loi Pareto de paramètres α et λ avec $\alpha > 1$. Trouver l'expression de la fonction stop-loss définie par*

$$\pi_X(d) = E\left[\max(X-d;0)\right].$$

Solution.

$$\begin{aligned}
\pi_X(d) &= E\left[\max(X-d;0)\right] \\
&= \int_0^d \max(x-d;0)\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x + \int_d^\infty \max(x-d;0)\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^d 0\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x + \int_d^\infty (x-d)\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x \\
&= \int_d^\infty (x-d)\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x \\
&= \alpha\lambda^\alpha\left(\int_d^\infty \frac{x}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x\right) - d\left[1-F_X(d)\right]
\end{aligned}$$

Posons $u = x, \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \mathrm{d}v = (\lambda+x)^{-(\alpha+1)}\mathrm{d}x, v = \frac{-1}{\alpha(\lambda+x)^\alpha}$

$$\begin{aligned}
\pi_X(d) &= \alpha\lambda^\alpha\left(\frac{-x}{\alpha(\lambda+x)^\alpha}\Big|_d^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_d^\infty \frac{1}{(\lambda+x)^\alpha}\mathrm{d}x\right) - d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha \\
&= \alpha\lambda^\alpha\left(\frac{d}{\alpha(\lambda+d)^\alpha} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(\alpha-1)(\lambda+d)^{\alpha-1}}\right)\right) - d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha \\
&= \lambda^\alpha\left(\frac{d}{(\lambda+d)^\alpha} + \frac{1}{(\alpha-1)(\lambda+d)^{\alpha-1}}\right) - d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha \\
&= \frac{\lambda^\alpha d}{(\lambda+d)^\alpha} + \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha-1)(\lambda+d)^{\alpha-1}} - d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(\alpha-1)(\lambda+d)^{\alpha-1}} \\
&= \frac{\lambda}{\alpha-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

■

Exemple 5.85 *Soit une variable aléatoire X obéissant à une loi Pareto de paramètres α et λ avec $\alpha > 1$. Trouver l'expression de la fonction d'excès-moyen définie par*

$$e_X(d) = E\left[X-d\,|X>d\right].$$

Solution. Soit $Y = (X - d)\,|X > d$. Alors,

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\
&= \Pr(X - d \leq y\,|X > d) \\
&= \frac{\Pr(X \leq y + d, X > d)}{\Pr(X > d)} \\
&= \frac{\Pr(d < X \leq y + d)}{\Pr(X > d)} \\
&= \frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{\Pr(X > d)} \\
f_Y(y) &= \frac{f_X(y+d)}{\Pr(X > d)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_X(d) &= E[Y] \\
&= \int_0^\infty y f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty y \frac{f_X(y+d)}{\Pr(X > d)}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Posons $x = y + d$ et $dx = dy$:

$$\begin{aligned}
e_X(d) &= \int_d^\infty (x - d)\,\frac{f_X(x)}{1 - F_X(d)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi_X(d)}{1 - F_X(d)} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\alpha-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha-1}}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha}} \\
&= \frac{\lambda + d}{\alpha - 1} \\
&= \frac{\lambda}{\alpha - 1} + \frac{d}{\alpha - 1} \text{ (fn. linéaire)}
\end{aligned}$$

■

Remarque 5.86 *On peut aussi écrire la fonction d'excès-moyen ainsi*

$$\begin{aligned}
e_X(d) &= E[X - d\,|X > d] \\
&= \frac{E\left[(X - d) \times 1_{\{X > d\}}\right]}{\Pr(X > d)}
\end{aligned}$$