Travail pratique 2 ACT-2007

Olivier Bourret

20 avril 2021

Question 1

Chacun des résultats se trouvent par quelques simples étapes.

1. **Trouver** ${}_{10}p_x^{00}$

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x^{00} = {}_t\, p_x^{\overline{00}} &= e^{-\int_{s=0}^{t} \mu_{x+s}^{01} + \mu_{x+s}^{02} ds} \\
&= e^{-\int_{s=0}^{t} 0.001 + 0.005 ds} \\
&= e^{-\int_{s=0}^{t} 0.006 ds} \\
&= e^{-0.006t}
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow_{10}\, p_x^{00} = e^{-0.006\cdot(10)} = e^{-0.06} \approx 0.941\,764\,534}$$

2. **Trouver** ${}_{10}p_x^{01}$

$$
\begin{aligned}
{}_{10}p_x^{01} &= \int_{t=0}^{10} {}_{10}p_x^{\overline{00}} \cdot \mu_{x+s}^{01} \cdot_{10-t}\, p_x^{\overline{11}} dt \qquad \longrightarrow \\
&= \int_{t=0}^{10} e^{-0.006t}(0.001) \cdot e^{-0.012(10-t)} dt \\
&= 0.001 e^{-0.12} \int_{t=0}^{10} e^{-0.006t} dt \\
&= 0.001 e^{-0.12} \left(\frac{e^{-0.06} - 1}{-0.006} \right) \approx \mathbf{0.009\,140\,683}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{10-t}p_x^{\overline{11}} &= e^{-\int_{s=0}^{10-t} \mu_{x+t+s}^{12} ds} \\
&= e^{-\int_{s=0}^{10-t} 0.012 ds} \\
&= e^{-0.012(10-t)}
\end{aligned}
$$

3. **Trouver** ${}_{10}p_x^{02}$

$$
\begin{aligned}
{}_{10}p_x^{02} &= 1 -_{10} p_x^{00} -_{10} p_x^{01} \\
&= 1 - e^{-0.06} - 0.009\,140\,683 \\
&= \mathbf{0.049\,094\,783}
\end{aligned}
$$

4. **Trouver** ${}_{10}p_x^{11}$

$$\begin{aligned}
{}_{10}p_x^{11} = {}_{10}\,p_x^{\overline{11}} &= e^{-\int_{s=0}^{10}\mu_{x+s}^{12}ds} \\
&= e^{-\int_{s=0}^{t}0.012ds} \\
&= \boldsymbol{e^{-0.12} \approx 0.886\,920\,437}
\end{aligned}$$

5. **Trouver** ${}_{10}p_x^{12}$

$$\begin{aligned}
{}_{10}p_x^{12} &= 1 - {}_{10}\,p_x^{11} \\
&= \boldsymbol{1 - e^{-0.12} \approx 0.113\,079\,563}
\end{aligned}$$

Question 2

a) Calculer ${}_{10}p_{60}^{00}$, ${}_{10}p_{60}^{01}$ et ${}_{10}p_{60}^{02}$

Avec l'équation forward de Kolmogorov, il est possible de bâtir le système d'équation suivant:

- $\frac{d}{dt}\left({}_tp_{60}^{00}\right) = {}_t\,p_{60}^{00}\,\mu_{60+t}^{00} + {}_t\,p_{60}^{01}\,\mu_{60+t}^{10} + {}_t\,p_{60}^{02}\,\mu_{60+t}^{20}$
- $\frac{d}{dt}\left({}_tp_{60}^{01}\right) = {}_t\,p_{60}^{00}\,\mu_{60+t}^{01} + {}_t\,p_{60}^{01}\,\mu_{60+t}^{11} + {}_t\,p_{60}^{02}\,\mu_{60+t}^{21}$
- $\frac{d}{dt}\left({}_tp_{60}^{02}\right) = {}_t\,p_{60}^{00}\,\mu_{60+t}^{02} + {}_t\,p_{60}^{01}\,\mu_{60+t}^{12} + {}_t\,p_{60}^{02}\,\mu_{60+t}^{22}$

Avec $\mu_{60+t}^{20} = \mu_{60+t}^{21} = \mu_{60+t}^{22} = 0$ et en remplaçant les μ_{60+t}^{ii} par $-(\sum_{j\neq i}^{n}\mu_{60+t}^{ij})$, nous pouvons réduire le système d'équation ainsi:

- $\frac{d}{dt}\left({}_tp_{60}^{00}\right) = -(\mu_{60+t}^{01} + \mu_{60+t}^{02})\,{}_tp_{60}^{00} + \mu_{60+t}^{10}\,{}_tp_x^{01}$
- $\frac{d}{dt}\left({}_tp_{60}^{01}\right) = \mu_{60+t}^{01}\,{}_tp_{60}^{00} - (\mu_{60+t}^{10} + \mu_{60+t}^{12}) \cdot {}_t\,p_{60}^{01}$
- $\frac{d}{dt}\left({}_tp_{60}^{02}\right) = \mu_{60+t}^{02}\,{}_tp_{60}^{00} + \mu_{60+t}^{12} \cdot {}_t\,p_{60}^{01}$

Puisque $\frac{{}_{t+h}p_{60}^{ij} - {}_tp_{60}^{ij}}{h} \approx \frac{dt}{d}\,{}_tp_{60}^{ij}$ en isolant ${}_{t+h}p_{60}^{ij}$, on ontient ${}_{t+h}p_{60}^{ij} \approx h \cdot \frac{dt}{d}\,{}_tp_{60}^{ij} + {}_t\,p_{60}^{ij}$. Ainsi, de manière itérative, en supposant les valeurs initiale de ${}_tp_{60}^{00} = 1$, ${}_tp_{60}^{01} = 0$ et ${}_tp_{60}^{02} = 0$ on trouve les valeurs successives avec $h = 1/12$ jusqu'à $t = 10$. Le code de la fonction qui est programmée en R est le suivant:

```r
## Équation forward de Kolmogorov
Kolmo <- function(t){
    P_00 <- 1
    P_01 <- 0
    P_02 <- 0
    h <- 1/12
```

```r
    i <- 1
    a1 <- 4E-4
    a2 <- 5E-4
    b1 <- 3.4674E-6
    b2 <- 7.5858E-5
    c1 <- 0.138155
    c2 <- 0.087498
    for(i in 0:(t/h-1)){
        x <- (-(a1 + b1 * exp(c1 * (60 + h*i)) + a2 + b2 * exp(c2 * (60 + h*i)))* P_00 + 0.1*(a1 + b1 *
        y <- ((a1 + b1 * exp(c1 * (60 + h*i))) * P_00 - (0.1 * (a1 + b1 * exp(c1 * (60 + h*i))) + a2 + 
        z <- ((a2 + b2 * exp(c2 * (60 + h*i)))* P_00 + (a2 + b2 * exp(c2 * (60 + h*i)))* P_01) *h + P_0
        P_00 <- x
        P_01 <- y
        P_02 <- z
        i <- i+1
    }
    resultat <- c(P_00, P_01, P_02)
    resultat
}

rep2 <- Kolmo(10)
```

J'obtiens comme résultat:

Table 1: Résultats recherchés

${}_{10}P_{60}^{00}$	${}_{10}P_{60}^{01}$	${}_{10}P_{60}^{02}$
0.5875568	0.2026324	0.2098108

b) Expliquer pourquoi ${}_{10}p_{60}^{00} \neq {}_{10}p_{60}^{\overline{00}}$

${}_{10}p_{60}^{00}$ représente la probabilité d'être dans l'état 0 à 60 ans et de terminer à l'état 0 à $60+t$ avec la possibilité de sortir de l'état et d'y revenir. Pour ${}_{10}p_{60}^{\overline{00}}$, c'est le même principe, sauf qu'il est impossible de sortir de l'état 0 et d'y revenir. Alors, puisque dans la situation, nous avons que $\mu_x^{01} \neq 0$ et $\mu_x^{10} \neq 0$, il est donc possible de sortir de l'état 0 et d'y revenir. Dans ce cas-ci, ${}_{10}p_{60}^{00}$ inclue ${}_{10}p_{60}^{\overline{00}}$ en plus de la probabilité de sortir de l'état 0 et d'y revenir. Ainsi, ${}_{10}p_{60}^{00} \neq {}_{10}p_{60}^{\overline{00}}$.

Question 3

La solution est relativement simple à calculer et peut se résoudre en quelques étapes. Voici ma démarche:

- $$\begin{aligned} p_{40}^{(\tau)} &= 1 - q_{40}^{(\tau)} \\ &= 1 - q_{40}^{(1)} - q_{40}^{(2)} \\ &= 0.66 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} p_{40}^{(\tau)} &= p_{40}^{'(1)} \cdot p_{40}^{'(2)} \\ 0.66 &= (1-0.25)(1-y) \\ \Rightarrow \quad y &= 0.12 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} p_{41}^{(\tau)} &= p_{41}^{'(1)} \cdot p_{41}^{'(2)} \\ &= (1-0.2)(1-2(0.12)) \\ &= 0.608 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} l_{42} &= l_{40} \cdot p_{40}^{(\tau)} \cdot p_{41}^{(\tau)} \\ &= 2000(0.66)(0.608) \\ &\mathbf{= 802.56} \end{aligned}$$

Question 4

a) Calculer $_{20}q_{40}^{'(2)}$ et $_{20|10}q_{40}^{'(2)}$

Pour commencer, il faut calculer $_tp_{40}^{'(2)}$ et $_tq_{40}^{'(2)}$ pour trouver $_{20}q_{40}^{'(2)}$.

$$\begin{aligned}
{}_tp_{40}^{'(2)} &= e^{-\int_{s=0}^{t}\mu_{40+s}^{'(2)}ds} \\
&= e^{-\int_{s=0}^{t}0.01ds} \\
&= e^{-0.01t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad {}_tq_{40}^{'(2)} &= 1 -{}_t p_{40}^{'(2)} \\
&= 1 - e^{-0.01t}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{{}_{20}q_{40}^{'(2)} = 1 - e^{-0.01(20)} \approx 0.181\,269\,247}$$

Puisque $\mu_{40+t}(2) = 0.01 \Rightarrow X \sim Exp(\lambda = 0.01)$. Alors, par la proporiété de la loi sans mémoire, on peut dire que $_tq_{40}^{'(2)} =_t q_{60}^{'(2)}$. On peut donc trouver la réponse souhaitée.

$$\begin{aligned}
{}_{20|10}q_{40}^{'(2)} &=_{20} p_{40}^{'(2)} \cdot_{10} q_{60}^{'(2)} \\
&= e^{-0.01(20)}(1 - e^{-0.01(10)}) \\
&= \boldsymbol{e^{-0.2} - e^{-0.3} \approx 0.077\,912\,532}
\end{aligned}$$

b) Calculer $_{20}q_{40}^{(2)}$ et $_{20|10}q_{40}^{(2)}$

Premièrement, je trouve $_tp_{40}^{(\tau)}$

$$\begin{aligned}
{}_tp_{40}^{'(1)} &= e^{-\int_{s=0}^{t}\mu_{40+s}^{'(1)}ds} \\
&= e^{-\int_{s=0}^{t}\frac{1}{70-s}ds} \\
&= e^{-ln(70-s)|_{s=0}^{t}} \\
&= \frac{70-t}{70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad {}_tp_{40}^{(\tau)} &=_t p_{40}^{'(1)} \cdot_t p_{40}^{'(2)} \\
&= \frac{70-t}{70}e^{-0.01t}
\end{aligned}$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
{}_{20}q_{40}^{(2)} &= \int_{t=0}^{20} {}_tp_{40}^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(2)} dt \\
&= \int_{t=0}^{20} \frac{70-t}{70} e^{-0.01t}(0.01)dt \\
&= \frac{0.01}{70}\left[\int_{t=0}^{20} 70e^{-0.01t}dt - \int_{t=0}^{20} te^{-0.01t}dt\right] \\
&= \frac{0.01}{70}\left[\frac{70e^{-0.01t}}{-0.01} - \left(\frac{te^-0.01t}{-0.01} - \frac{1}{0.01^2}\left(e^{-0.01t}\right)\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{20} \\
&\mathbf{= 0.156\,236\,252}
\end{aligned}
$$

Et,

$$
\begin{aligned}
{}_{30}q_{40}^{(2)} &= \int_{t=0}^{30} {}_tp_{40}^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(2)} dt \\
&= \frac{0.01}{70}\left[\frac{70e^{-0.01t}}{-0.01} - \left(\frac{te^-0.01t}{-0.01} - \frac{1}{0.01^2}\left(e^{-0.01t}\right)\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{30} \\
&= 0.206\,415\,618
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{20|10}q_{40}^{(2)} &=_{30} q_{40}^{(2)} -_{20} q_{40}^{(2)} \\
&= 0.206\,415\,618 - 0.156\,236\,252 \\
&\mathbf{= 0.050\,179\,366}
\end{aligned}
$$

Question 5

Avant de se lancer dans la solution, voici quelques résultats préliminaires:

- $q_x^{(1)} = \dfrac{d_x^{(1)}}{l_x} = \dfrac{5}{1000} = \dfrac{1}{200}$
- $q_x^{(2)} = \dfrac{d_x^{(2)}}{l_x} = \dfrac{25}{1000} = \dfrac{1}{40}$
- $q_x^{(\tau)} = q_x^{(1)} + q_x^{(2)} = 0.005 + 0.025 = 0.03$
- $p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)} = 1 - 0.03 = 0.97$
- $q_{x+1}^{(1)} = \dfrac{d_{x+1}^{(1)}}{l_{x+1}} = \dfrac{5}{970} = \dfrac{1}{194}$
- $q_{x+1}^{(2)} = \dfrac{d_{x+1}^{(2)}}{l_{x+1}} = \dfrac{30}{970} = \dfrac{3}{97}$
- $q_{x+1}^{(\tau)} = q_{x+1}^{(1)} + q_{x+1}^{(2)} = \dfrac{1}{194} + \dfrac{3}{97} = \dfrac{7}{194}$

Pour le premier contrat, il est possible de calculer la valeur présente.

$$
\begin{aligned}
VPA_{@0}(\text{Prest}) &= 50\,000(vq_x^{(1)} + v^2p_x^{(\tau)} \cdot q_{x+1}^{(1)}) + 20\,000(vq_x^{(2)} + v^2p_x^{(\tau)} \cdot q_{x+1}^{(2)}) \\
&= 50\,000((1.05)^{-1}(0.005) + (1.05)^{-2}(0.97)\frac{1}{194}) + 20\,000((1.05)^{-1}(0.025) + (1.05)^{-2}(0.97)\frac{3}{97}) \\
&= 1\,485.260\,771
\end{aligned}
$$

Puisque la valeur présente est la même, il reste à calculer la prestation du deuxième contrat.

$$\begin{aligned} VPA_{@0}(\text{Prest}) &= X(vq_x^{(\tau)} + v^2 p_x^{(\tau)} \cdot q_{x+1}^{(\tau)}) \\ 1\,485.260\,771 &= X((1.05)^{-1}(0.03) + (1.05)^{-2}(0.97)\frac{7}{194}) \\ \boldsymbol{X} &= \mathbf{24\,6241.060\,15} \end{aligned}$$

Question 6

Le numéro ressemble étrangement à celui du numéro 3. La seule différence, c'est que nous avons $\frac{q_{41}^{'(2)}}{q_{40}^{'(2)}} = 2$. Si nous posons $q_{40}^{'(2)} = y$, nous aurons donc que $q_{41}^{'(2)} = 2y$. Ainsi, nous revenons exactement au même problème qu'au numéro 3. Alors, la solution est la suivante:

- $$\begin{aligned} p_{40}^{(\tau)} &= 1 - q_{40}^{(\tau)} \\ &= 1 - q_{40}^{(1)} - q_{40}^{(2)} \\ &= 0.66 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} p_{40}^{(\tau)} &= p_{40}^{'(1)} \cdot p_{40}^{'(2)} \\ 0.66 &= (1 - 0.25)(1 - y) \\ \Rightarrow \quad y &= 0.12 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} p_{41}^{(\tau)} &= p_{41}^{'(1)} \cdot p_{41}^{'(2)} \\ &= (1 - 0.2)(1 - 2(0.12)) \\ &= 0.608 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} l_{42} &= l_{40} \cdot p_{40}^{(\tau)} \cdot p_{41}^{(\tau)} \\ &= 2000(0.66)(0.608) \\ &\mathbf{= 802.56} \end{aligned}$$