Chapitre 4

Variable aléatoire discrète

4.1 Variable aléatoire

Lors d'une expérience aléatoire, nous sommes souvent intéressés par une fonction du résultat de l'expérience et non au résultat lui-même. Par exemple, lorsque l'on lance deux dés, on s'intéresse à la somme des dés et non au résultat sur chaque dé. Ces fonctions définies sur l'espace échantillonnal sont dites des variables aléatoires.

Définition 4.1 *Soit Ω l'espace échantillonnal d'une expérience aléatoire. Une variable aléatoire X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui associe un nombre réel $X(E)$ à un événement E de l'espace échantillonnal.*

Définition 4.2 *Soit une variable aléatoire X associée à un espace échantillonal Ω. Le support de X est l'ensemble des valeurs dans $\mathbb{R}$ que peut prendre X. Les variables aléatoires peuvent avoir un support discret, continu ou mixte.*

Le présent chapitre s'intéresse aux variables aléatoires à support discret. Les variables à support continu et mixte seront traitées dans le chapitre 5.

Définition 4.3 *Une variable aléatoire est dite à support discret si l'image de sa fonction est un ensemble fini (par exemple $\left\{0, 1, 2, 5, \frac{13}{2}\right\}$) ou dénombrable (par exemple $\mathbb{N}$).*

Exemple 4.4 *Une pièce de monnaie est lancée 3 fois. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de piles obtenus. (a) Donner l'espace échantillonal de cette expérience. (b) Définir la fonction X associant chaque résultat de l'espace échantillonal Ω dans $\mathbb{R}$. (c) Indiquer le support de la variable aléatoire X.*

Exemple 4.5 *Une pièce de monnaie est lancée 3 fois jusqu'à ce que l'on obtienne une face ou 3 piles. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de faces obtenus. (a) Donner l'espace échantillonal de cette expérience. (b) Définir la fonction X associant chaque résultat de l'espace échantillonal Ω dans $\mathbb{R}$. (c) Indiquer le support de la variable aléatoire X.*

4.2 Fonction de masse de probabilité, de répartition et quantile

4.2.1 Fonction de masse de probabilité

On a défini la probabilité comme étant un nombre $\Pr(E)$ associé à chaque événement E de Ω. Étant donné que la valeur d'une variable aléatoire est déterminée par le résultat de l'expérience aléatoire, on peut assigner des probabilités aux différentes valeurs possibles du support de la variable aléatoire.

Définition 4.6 *La fonction de masse de probabilité d'une variable aléatoire **discrète** dont les valeurs possibles sont* $\{x_1, x_2, ...\}$ *est la fonction* $p(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$ *définie par*

$$p(x) = \Pr(X = x) = \Pr\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

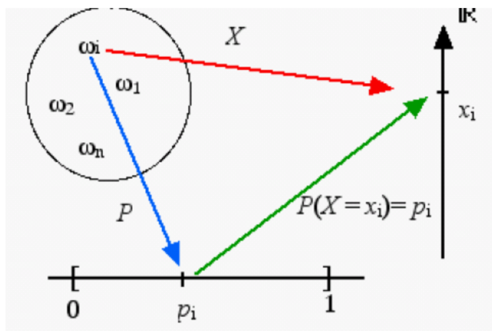
satisfaisant les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \Pr(X &= x) = 0,\ x \notin \{x_1, x_2, ...\} \\ \Pr(X &= x_i) \geq 0,\ i = 1, 2, ... \\ \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(X &= x_i) = 1. \end{aligned}$$

Remarque 4.7 *Pour alléger la notation on écrit la variable aléatoire* X *au lieu de* $X(\omega)$.

Remarque 4.8 *Il est important de faire la distinction entre la variable aléatoire* X *et la réalisation* x.

Remarque 4.9 *On peut illustrer celle-ci comme suit, où les* ω_i $(i = 1, ..., n)$ *correspondent aux événements de l'espace échantillonal:*



Exemple 4.10 *Dans une expérience qui consiste à lancer deux dés, on s'intéresse au chiffre maximum entre les deux dés. On définit donc* X *comme une variable aléatoire représentant le maximum entre les deux dés. Trouver et tracer la fonction de masse de probabilité de* X.

Exemple 4.11 *On extrait (sans remise) 4 balles d'une urne contenant 10 balles numérotées de 1 à 10. Soit* X *une variable aléatoire représentant le plus grand nombre extrait parmi ces 4 balles. Trouver la fonction de masse de probabilité de* X.

4.2.2 Fonction de répartition

Définition 4.12 *La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète* X *est définie par*

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \Pr(X = x_i).$$

Remarque 4.13 *Si* X *est une variable aléatoire **discrète** avec support* $x_1, x_2, x_3, ...$ *où* $x_1 < x_2 < x_3 < ...$ *alors la fonction de répartition est une fonction en escalier c'est-à-dire la valeur que prend* F_X *est constante sur les intervalles* $[x_{i-1}, x_i)$ *et fait un saut de* $\Pr(X = x_i)$ *à* x_i.

Exemple 4.14 *Dans un lot de 10 objets, il y en a un qui est défecteux. On pige (sans remise) un objet jusqu'à ce que l'on trouve l'objet défecteux. Soit* X *une variable aléatoire représentant le nombre d'essais requis pour trouver cet objet. Trouver la probabilité de trouver l'objet défectueux avant le 4ième essai.*

Exemple 4.15 *Soit une variable aléatoire discrète X avec fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(X=k)=\begin{cases}\frac{3}{10}, & k=5\\ \frac{2}{10}, & k=12\\ \frac{4}{10}, & k=15\\ \frac{1}{10}, & k=25\\ 0, & \textit{ailleurs.}\end{cases}$$

(a) Tracer la fonction de masse de probabilité de X. (b) Trouver et tracer la fonction de répartition de X.

Exemple 4.16 *Soit N une variable aléatoire représentant le nombre d'heures d'entraînement quotidien d'un athlète dont la fonction de masse de probabilité est*

$$\Pr(N=k)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & k=0\\ ck, & k\in\{1,2\}\\ c(5-k), & k\in\{3,4\}\\ 0, & \textit{ailleurs.}\end{cases}$$

(a) Trouver la probabilité que l'athlète s'entraîne au moins 2 heures. (b) Trouver et tracer la fonction de répartition de N.

Proposition 4.17 *La fonction de répartition F_X possède les propriétés suivantes:*

(1) $0 \le F_X(x) \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

(3) F_X est une fonction non-décroissante, c'est-à-dire que si $a < b$, alors $F_X(a) \le F_X(b)$.

(4) F_X est une fonction en escalier continue à droite.

(5) $\Pr(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$.

4.2.3 Fonction de répartition inverse (ou quantile)

Définition 4.18 *Soit une variable aléatoire X avec fonction de répartition F_X. On définit la fonction de répartition inverse F_X^{-1} par*

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \ge u\}$$

pour $u \in [0,1]$.

Remarque 4.19 *La fonction de répartition inverse est aussi appelée la fonction quantile de X.*

Exemple 4.20 *À l'aide de l'Exemple 4.15, trouver et tracer la fonction de répartition inverse F_X^{-1} de X.*

Exemple 4.21 *À l'aide de l'Exemple 4.16, trouver et tracer la fonction de répartition inverse F_N^{-1} de N.*

Remarque 4.22 *Il existe d'autres définitions de la fonction quantile, comme par exemple*

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > u\}.$$

Ces définitions ne seront toutefois pas utilisées dans le cadre de ce cours.

4.3 Fonction d'une variable aléatoire

Dans les prochaines sections, nous serons parfois intéressés à connaître le comportement d'une fonction g d'une variable aléatoire X, soit $g(X)$. Si l'on connaît la fonction de masse de probabilité et par le fait même la fonction de répartition et la fonction inverse de la variable aléatoire X, nous sommes en mesure d'en déduire les mêmes quantités pour la fonction d'intérêt $g(X)$. Ceci est illustré dans les deux exemples qui suivent.

Exemple 4.23 *Soit une variable aléatoire X avec fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(X=k)=\begin{cases} \frac{k}{10}, & k\in\{1,2,3,4\} \\ 0, & \textit{ailleurs}. \end{cases}$$

On s'intéresse à la fonction $Y=g(X)=\frac{10\ln(X)}{e^{2X}}$. (a) Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire Y. (b) Trouver $F_Y^{-1}(0.7)$.

Exemple 4.24 *Soit N une variable aléatoire représentant le nombre de sinistres pour un assuré sur une période d'un an avec fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(N=k)=\begin{cases} \frac{1}{3}, & k=1 \\ \frac{1}{10}, & k=2 \\ \frac{1}{3}, & k=3 \\ \frac{1}{6}, & k=4 \\ c, & k=5 \\ 0, & \textit{ailleurs}. \end{cases}$$

On suppose ainsi qu'un assuré ne peut avoir plus de 5 sinistres dans une période. Dans une étude, on s'intéresse aux périodes où au moins 3 sinistres ont été observés. On définit une variable aléatoire utile à cette étude par M. Trouver la fonction de masse de probabilité ainsi que la fonction de répartition de M.

4.4 Moments d'une variable aléatoire

4.4.1 Espérance

Définition 4.25 *L'espérance d'une variable aléatoire discrète, désignée par $E[X]$, est définie par*

$$E[X]=\sum_i x_i \Pr(X=x_i),$$

où $\{x_1,x_2,...\}$ correspond au support de la variable aléatoire X.

Remarque 4.26 *L'espérance de la variable aléatoire X, soit $E[X]$, est une moyenne pondérée des différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire X où le poids attribué à chaque valeur est la probabilité que X prenne cette valeur. On la désigne également par μ_X.*

Exemple 4.27 *Trouver $E[X]$ où X représente le résultat du lancement d'un dé.*

Exemple 4.28 *Un professeur distribue un examen de 3 questions à 5 choix de réponses chacune. La correction est négative telle qu'une bonne réponse vaut 4 points alors qu'un point est enlevé pour une mauvaise réponse. Si un étudiant répond à toutes les questions, quelle est l'espérance de son résultat?*

Remarque 4.29 *Évidemment, si $\Pr(a\leq X\leq b)=1$, alors $a\leq E[X]\leq b$.*

Remarque 4.30 *Prendre note que $E[X]$ n'existe pas toujours. Elle existe si et seulement si*

$$E[X] = \sum_{x_i} |x_i| \Pr(X = x_i) < \infty.$$

L'espérance existera toujours toutefois lorsque le support de la variable aléatoire est fini. Par contre lorsque le support de la variable aléatoire n'est pas fini mais dénombrable, la série ci-dessus doit absolument converger pour que l'espérance existe.

Exemple 4.31 *Soit une variable aléatoire X avec fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{k(k+1)}, & k \in \mathbb{N}^+ \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

(a) Montrer que la fonction de masse de probabilité est bien définie. (b) Trouver $E[X]$.

Solution. (a) On doit vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Pr(X = k) = 1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} \right)$$

car par fractions partielles, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{A_1}{k} + \frac{A_2}{k+1} \\ A_1(k+1) + A_2(k) &= 1 \\ (A_1 + A_2)(k) + A_1 &= 1, \end{aligned}$$

d'où $A_1 + A_2 = 0$ et $A_1 = 1$. Ainsi, $A_1 = 1$ et $A_2 = -1$. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(X &= k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

et par conséquent l'espérance de X n'est pas définie. ■

Proposition 4.32 *Pout toute variable aléatoire discrète **non négative** X,*

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} \Pr(X > x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} (1 - F_X(x)). \end{aligned}$$

Exemple 4.33 *Soit X une variable aléatoire avec fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(X=k)=\begin{cases} 0.2, & k=-1 \\ 0.5, & k=0 \\ 0.3, & k=1 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Trouver $E\left[X^2\right]$.

Proposition 4.34 *Soit X une variable aléatoire discrète. Alors, pour toute fonction g dans $\mathbb{R}$, on a*

$$E\left[g(X)\right]=\sum_{x_i} g(x_i)\Pr(X=x_i).$$

Exemple 4.35 *Reprendre l'Exemple 4.33 à l'aide de la Proposition 4.34.*

Définition 4.36 *Soit une fonction g définie par $g\left(x\right)=1_{\{x\in C\}}$ où $1_{\{x\in C\}}$ est dite une fonction indicatrice telle que*

$$1_{\{x\in C\}}=\begin{cases} 1, & x\in C \\ 0, & y\notin C \end{cases}$$

où C est un sous-ensemble du support de X.

Remarque 4.37 *L'espérance d'une variable aléatoire indicatrice est égale à une probabilité...*

$$\begin{aligned} E\left[1_{\{X\in C\}}\right] &= (1)\Pr\left(X\in C\right)+(0)\Pr\left(X\notin C\right) \\ &= \Pr\left(X\in C\right). \end{aligned}$$

Exemple 4.38 *Soit une variable aléatoire X représentant le montant d'un sinistre avec fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(X=k)=\begin{cases} 0.65, & k=0 \\ 0.15, & k=100 \\ 0.17, & k=200 \\ 0.03, & k=500 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(a) Trouver $E\left[1_{\{90<X<250\}}\right]$. (b) Trouver $E\left[X\times 1_{\{90<X<250\}}\right]$. (c) Trouver $E\left[X\times 1_{\left\{X>F_X^{-1}(0.70)\right\}}\right]$

Exemple 4.39 *Soit T une variable aléatoire représentant la durée de vie résiduelle entière d'un individu âgé de 85 ans avec fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(T=t)=\begin{cases} 0.40, & t=0 \\ 0.30, & t=1 \\ 0.15, & t=2 \\ 0.10, & t=3 \\ 0.05, & t=4 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Une compagnie d'assurance versera un montant de 20000\$ à sa conjointe s'il décède dans les 2 prochaines années, 10000\$ s'il décède au cours de l'année suivante et rien ensuite. (a) Définir une variable aléatoire désignée par C représentant les coûts pour la compagnie. (b) Trouver l'espérance des coûts pour la compagnie. (c) Trouver $E\left[\min\left(C;15000\right)\right]$. (d) Trouver $E\left[\max\left(C-5000;0\right)\right]$.

Proposition 4.40 *L'espérance d'une variable aléatoire possède les propriétés suivantes:*

(1) Soit c une constante. Alors, $E\left[c\right]=c$.
(2) Soit g une fonction dans $\mathbb{R}$. Alors, $E\left[cg(X)\right]=cE\left[g(X)\right]$.
(3) Soit g et h deux fonctions dans $\mathbb{R}$. Alors, $E\left[g(X)+h(X)\right]=E\left[g(X)\right]+E\left[h(X)\right]$.
(4) Si $g(x)\leq h(x)$, $\forall x$, alors $E\left[g(X)\right]\leq E\left[h(X)\right]$.

4.4.2 Variance

Dans la sous-section précédente, on a vu que l'espérance de la variable aléatoire X nous indique qu'elle est la moyenne pondérée des différentes valeurs possibles de X, c'est-à-dire que l'espérance nous informe sur la valeur que prend X en moyenne. Toutefois, celle-ci ne nous donne aucune indication quant à la dispersion ou l'étendue de ces valeurs possibles autour de la moyenne. Ceci est illustré dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 4.41 *Soit des variables aléatoires X, Y, Z avec fonction de masse de probabilité*

$$
\begin{aligned}
\Pr(X &= k) = \begin{cases} 1, \ k = 0 \\ 0, \ ailleurs. \end{cases} \\
\Pr(Y &= k) = \begin{cases} 0.5, \ k = -1 \\ 0.5, \ k = 1 \\ 0, \ ailleurs. \end{cases} \\
\Pr(Z &= k) = \begin{cases} 0.5, \ k = -100 \\ 0.5, \ k = 100 \\ 0, \ ailleurs. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Trouver $E[X]$, $E[Y]$, $E[Z]$.

Solution.

$$
\begin{aligned}
E[X] &= (0)(1) = 0 \\
E[Y] &= (-1)(0.5) + (1)(0.5) = 0 \\
E[Z] &= (-100)(0.5) + (100)(0.5) = 0.
\end{aligned}
$$

■

L'exemple ci-dessous montre clairement que des variables aléatoires avec des supports très différents peuvent avoir la même espérance. Celle-ci ne nous donne donc aucune indication quant à la variabilité des valeurs possibles que peut prendre la variable aléatoire. Comment peut-on mesurer la variation d'une variable aléatoire autour de sa moyenne? On peut calculer l'écart moyen entre X et sa moyenne, soit

$$E[X - E[X]]$$

mais $E[X - E[X]] = E[X] - E[X] = 0$. Cette mesure ne nous donne toutefois aucune information sur la dispersion de la variable aléatoire X car tous les écarts négatifs entre la valeur de la variable aléatoire et la moyenne sont compensés par tous les écarts positifs. Une solution à ce problème serait donc de s'intéresser à la moyenne des écarts absolus entre X et sa moyenne, soit

$$E[|X - E[X]|].$$

Il est néanmoins pas toujours facile de travailler avec des valeurs absolues. On choisira donc de mesurer la dispersion de X par la moyenne du carré des écarts entre X et sa moyenne. Cette mesure de dispersion, que l'on appelera variance, a l'avantage, contrairement à $E[|X - E[X]|]$, d'accorder une plus grande importance aux grands écarts.

Définition 4.42 *Soit X une variable aléatoire de moyenne $E[X]$. La variance de X est définie par*

$$Var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right].$$

Remarque 4.43 *On note également la variance de X par σ_X^2. De plus, $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ est dit l'écart-type (ou déviation standard) de X.*

Exemple 4.44 *Dans l'Exemple 4.41, trouver $Var(X)$, $Var(Y)$, $Var(Z)$.*

Solution.

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E\left[(X-0)^2\right] = (0-0)^2\,(1) = 0 \\
Var(Y) &= E\left[(Y-0)^2\right] = (-1-0)^2\,(0.5) + (1-0)^2\,(0.5) = 1 \\
Var(Z) &= E\left[(Z-0)^2\right] = (-100-0)^2\,(0.5) + (100-0)^2\,(0.5) = 10000.
\end{aligned}$$

■

Remarque 4.45 *La variance d'une variable aléatoire est toujours positive étant donné qu'elle est la moyenne du carré des écarts à la moyenne.*

Remarque 4.46 *Une variance de zéro indique que la variable aléatoire prend une seule valeur avec probabilité 1. Une petite variance signifie que les valeurs prises par la variable aléatoire sont peu volatiles autour de la moyenne alors qu'une variance élevée est signe que les valeurs prises par la variable aléatoire seront dispersées autour de la moyenne.*

Proposition 4.47 *Soit X une variable aléatoire de moyenne $E[X]$. La variance de X peut également être évaluée comme suit:*

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2.$$

Proposition 4.48 *Soit X une variable aléatoire discrète. Alors, pour toute fonction g dans $\mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}
Var(g(X)) &= E\left[(g(X) - E[g(X)])^2\right] \\
&= E\left[(g(X))^2\right] - E^2[g(X)] \\
&= \sum_{x_i} (g(x_i))^2 \Pr(X = x_i) - \left(\sum_{x_i} g(x_i) \Pr(X = x_i)\right)^2
\end{aligned}$$

Proposition 4.49 *Soit X une variable aléatoire de moyenne $E[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

4.4.3 Autres moments

Définition 4.50 *Soit X une variable aléatoire discrète. On définit le moment d'ordre n (**autour de l'origine**) par*

$$E[X^n] = \sum_i x_i^n \Pr(X = x_i).$$

Définition 4.51 *Soit X une variable aléatoire discrète. On définit le moment **centré** d'ordre n de X par*

$$E[(X - E[X])^n] = \sum_i (x_i - E[X])^n \Pr(X = x_i).$$

Définition 4.52 *Soit X une variable aléatoire discrète. On définit le moment **réduit** d'ordre n de X par*

$$E\left[\left(\frac{X}{\sqrt{Var(X)}}\right)^n\right] = \sum_i \left(\frac{x_i}{\sqrt{Var(X)}}\right)^n \Pr(X = x_i).$$

Définition 4.53 *Soit X une variable aléatoire discrète. On définit le moment **centré-réduit** d'ordre n de X par*

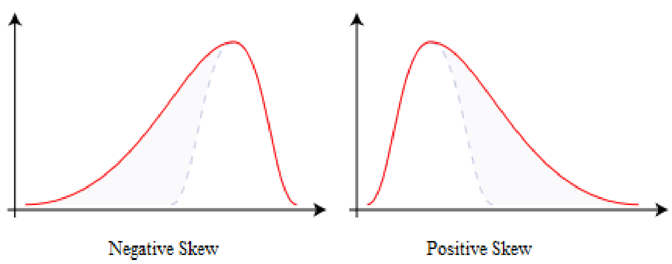
$$E\left[\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{Var(X)}}\right)^n\right] = \sum_i \left(\frac{x_i - E[X]}{\sqrt{Var(X)}}\right)^n \Pr(X = x_i).$$

En plus de l'espérance et de la variance, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement donnent de l'information sur le comportement de la variable aléatoire X permettant ainsi de caractériser la distribution de la variable aléatoire.

Définition 4.54 *Soit X une variable aléatoire discrète. Le coefficient d'asymétrie, que l'on désigne par γ_X, correspond au 3ième moment centré-réduit, soit*

$$\gamma_X = E\left[\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{Var(X)}}\right)^3\right] = \sum_i \left(\frac{x_i - E[X]}{\sqrt{Var(X)}}\right)^3 \Pr(X = x_i).$$

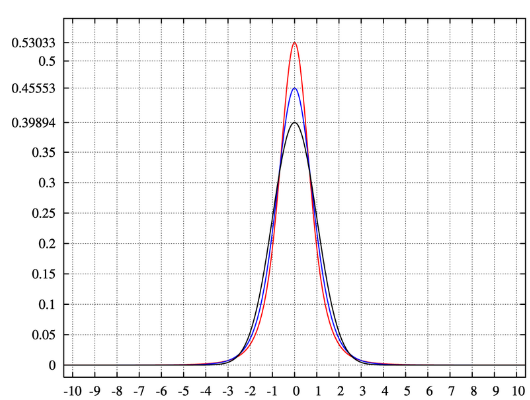
Remarque 4.55 *Le coefficient d'asymétrie donne une idée de l'asymétrie de la distribution de la variable aléatoire. Un coefficient d'asymétrie négatif, soit $\gamma_X < 0$, indique que la distribution de la variable aléatoire X est décalée à droite de la médiane et donc la queue de la distribution est étalée vers la gauche. Un coefficient d'asymétrie positif, soit $\gamma_X > 0$, indique que la distribution de la variable aléatoire X est décalée à gauche de la médiane et donc la queue de la distribution est étalée vers la droite. À noter que dans le graphique ci-dessous, l'impact du coefficient d'asymétrie sur la distribution est montré dans le cas d'une variable aléatoire continue et non discrète.*



Définition 4.56 *Soit X une variable aléatoire discrète. Le coefficient d'aplatissement ou kurtosis, que l'on désigne par κ_X, correspond au 4ième moment centré-réduit, soit*

$$\kappa_X = E\left[\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{Var(X)}}\right)^4\right] = \sum_i \left(\frac{x_i - E[X]}{\sqrt{Var(X)}}\right)^4 \Pr(X = x_i).$$

Remarque 4.57 *Le coefficient d'aplatissement est un indicateur de l'aplatissement de la distribution d'une variable aléatoire. Dans le graphique ci-dessous, on montre des distributions (continues et non discrètes) avec différents kurtosis.*



Définition 4.58 *Soit X une variable aléatoire de moyenne $E[X]$ et variance $Var(X)$. La variable aléatoire centrée-réduite correspondante est définie par*

$$Y = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var(X)}},$$

où

$$\begin{aligned} E[Y] &= E\left[\frac{X - E[X]}{\sqrt{Var(X)}}\right] = \frac{1}{\sqrt{Var(X)}} E[X - E[X]] = 0, \\ Var[Y] &= E\left[(Y - E[Y])^2\right] = E\left[Y^2\right] = E\left[\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{Var(X)}}\right)^2\right] = \frac{1}{Var(X)} E\left[(X - E[X])^2\right] = 1. \end{aligned}$$

Lorsque l'on centre et réduit une variable aléatoire, son origine passe de μ_X à 0 et son échelle devient en unités d'écart-type par rapport au nouvel origine. La variable aléatoire centrée-réduite Y représente donc le nombre d'écarts-type par lequel X diffère de μ_X. Par exemple, si $\mu_X = 2$ et $\sigma_X = 2$, alors on a

X	$Y = \left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)$
0	-1
1	$\frac{-1}{2}$ *(situé à* $\frac{1}{2}\sigma$ *à gauche de l'origine)*
2	0 *(nouvel origine)*
3	$\frac{1}{2}$
4	1 *(situé à* 1σ *de l'origine)*
5	$\frac{3}{2}$
6	2 *(situé à* 2σ *de l'origine).*

De plus, la variable aléatoire centrée-réduite Y n'est pas fonction de l'unité de mesure. Soit X une variable aléatoire exprimée en mètres de moyenne 10m et d'écart-type 2m. Supposons que l'on observe $X = 16$. Alors,

$$Y = \frac{16 - 10}{2} = 3.$$

On est donc à 3 écarts-type de la moyenne. Si l'on prend les mêmes quantités mais mesurées en centimètres et donc $X = 1600$, on a

$$Y = \frac{1600 - 1000}{200} = 3.$$

On se situe toujours à 3 écarts-type de la moyenne ce qui confirme que la variable aléatoire centrée-réduite n'est pas fonction de l'unité de mesure.

4.5 Fonctions génératrices

Dans cette section, on définit deux fonctions très importantes, soit la fonction génératrice des moments (fgm) et la fonction génératrice des probabilités (fgp). Ces fonctions permettent d'identifier la distribution d'une variable aléatoire. Lorsque la fgm existe, elle caractérise de façon unique la distribution qui lui est associée.

4.5.1 Fonction génératrice des moments

Définition 4.59 *Soit X une variable aléatoire discrète avec fonction de masse de probabilité* $\Pr(X = x)$. *Alors, la fonction génératrice des moments de X est définie par*

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_i (e^{tx_i}) \Pr(X = x_i),$$

où

$$
\begin{aligned}
E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] &= \sum_i (\mathrm{e}^{tx_i}) \Pr(X = x_i) \\
&= \sum_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx_i)^k}{k!} \right) \Pr(X = x_i), \text{ car } \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_i \left(1 + tx_i + \frac{(tx_i)^2}{2!} + \frac{(tx_i)^3}{3!} + ... \right) \Pr(X = x_i) \\
&= \sum_i \Pr(X = x_i) + t \sum_i x_i \Pr(X = x_i) + \frac{t^2}{2!} \sum_i x_i^2 \Pr(X = x_i) + ... \\
&= 1 + tE[X] + \frac{t^2}{2!} E\left[X^2\right] + ...
\end{aligned}
$$

Proposition 4.60 *Si $M_X(t)$ existe, alors*

$$M_X^k(0) = \frac{\mathrm{d}^k M_X(t)}{\mathrm{d}t^k} |_{t=0} = E\left[X^k\right], \ k \in \mathbb{N}^+.$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= 1 + tE[X] + \frac{t^2}{2!} E\left[X^2\right] + \frac{t^3}{3!} E\left[X^3\right] + ... + \frac{t^k}{k!} E\left[X^k\right] + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} E\left[X^{k+1}\right] + ... \\
M_X'(t) &= \frac{\mathrm{d}M_X(t)}{\mathrm{d}t} = E[X] + tE\left[X^2\right] + \frac{t^2}{2!} E\left[X^3\right] + ... + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} E\left[X^k\right] + \frac{t^k}{k!} E\left[X^{k+1}\right] + ... \\
M_X''(t) &= \frac{\mathrm{d}^2 M_X(t)}{\mathrm{d}t^2} = E\left[X^2\right] + tE\left[X^3\right] + ... + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} E\left[X^k\right] + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} E\left[X^{k+1}\right] + ... \\
& ... \\
M_X^{(k)}(t) &= \frac{\mathrm{d}^k M_X(t)}{\mathrm{d}t^k} = E\left[X^k\right] + tE\left[X^{k+1}\right] + ...
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_X'(0) &= \frac{\mathrm{d}M_X(t)}{\mathrm{d}t} |_{t=0} = E[X] \\
M_X''(0) &= \frac{\mathrm{d}^2 M_X(t)}{\mathrm{d}t^2} |_{t=0} = E\left[X^2\right] \\
& ... \\
M^{(k)}(0) &= \frac{\mathrm{d}^k M_X(t)}{\mathrm{d}t^k} |_{t=0} = E\left[X^k\right].
\end{aligned}
$$

■

Exemple 4.61 *Soit X une variable aléatoire discrète avec fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(X = k) = \begin{cases} 0.40, & k = 1 \\ 0.30, & k = 2 \\ 0.15, & k = 3 \\ 0.10, & k = 5 \\ 0.05, & k = 7 \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

(a) Trouver $E[X]$ et $Var(X)$. (b) Trouver $M_X(t)$. (c) Trouver $E[X]$ et $Var(X)$ à l'aide de $M_X(t)$.

4.5.2 Fonction génératrice des probabilités

Définition 4.62 *Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $\mathbb{N}$ avec fonction de masse de probabilité $\Pr(X=x)$. Alors, la fonction génératrice des probabilités de X est définie par*

$$P_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_i (t^{x_i}) \Pr(X = x_i).$$

Proposition 4.63 *Soit X une variable aléatoire (discrète, continue ou mixte). Alors,*

$$P_X(t) = M_X(\ln(t)).$$

Proposition 4.64 *Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $\mathbb{N}$ avec fonction de masse de probabilité $\Pr(X=x)$. Alors,*

$$P_X^{(k)}(0) = \frac{\mathrm{d}^k P_X(t)}{\mathrm{d}t^k}\Big|_{t=0} = k!\Pr(X=k),\ k \in \mathbb{N}^+.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
P'_X(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{x=0}^{\infty} t^x \Pr(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x t^{x-1}\Pr(X=x) \\
&= \Pr(X=1) + 2t\Pr(X=2) + 3t^2\Pr(X=3) + 4t^3\Pr(X=4) + \ldots \\
P''_X(t) &= 2\Pr(X=2) + (3)(2t)\Pr(X=3) + (4)\left(3t^2\right)\Pr(X=4) + \ldots \\
&\vdots \\
P_X^{(k)}(t) &= k(k-1)(k-2)\ldots\Pr(X=k) + (k+1)k(k-1)\ldots t\Pr(X=k+1) + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_X^{(1)}(0) &= \Pr(X=1); \\
P_X^{(2)}(0) &= 2\Pr(X=2); \\
P_X^{(3)}(0) &= 3!\Pr(X=3); \\
&\ldots \\
P_X^{(k)}(0) &= k!\Pr(X=k).
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.65 *Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $\mathbb{N}$ avec fonction de masse de probabilité $\Pr(X=x)$. Alors,*

$$P_X^{(k)}(1) = E\left[X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1)\right],\ k \in \mathbb{N}^+$$

est dit le kième moment factoriel de X.

Preuve.

$$\begin{aligned}
P'_X(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{x=0}^{\infty} t^x \Pr(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x t^{x-1}\Pr(X=x) \\
&= \Pr(X=1) + 2t\Pr(X=2) + 3t^2\Pr(X=3) + 4t^3\Pr(X=4) + \ldots \\
P''_X(t) &= 2\Pr(X=2) + (3)(2t)\Pr(X=3) + (4)\left(3t^2\right)\Pr(X=4) + \ldots \\
&\vdots \\
P_X^{(k)}(t) &= k(k-1)(k-2)\ldots\Pr(X=k) + (k+1)k(k-1)\ldots t\Pr(X=k+1) + \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P'_X(1) &= \Pr(X=1) + (2)(1)\Pr(X=2) + (3)(1)^2\Pr(X=3) + ... \\
&= E[X] \\
P''_X(1) &= 2\Pr(X=2) + (3)(2)(1)\Pr(X=3) + (4)(3)(1)\Pr(X=4) + ... \\
&= \sum_x (x^2 - x)\Pr(X=x) \\
&= \sum_x x(x-1)\Pr(X=x) \\
&= E[X(X-1)] \\
& \quad ...
\end{aligned}
$$

■

Exemple 4.66 *Soit l'Exemple 4.61, (a) Trouver $P_X(t)$. (b) Calculer $E[X]$ à l'aide de (a). (c) Calculer $\Pr(X=3)$ à l'aide de (a).*

4.6 Lois discrètes usuelles

On s'intéresse à différentes distributions permettant de décrire des phénomènes observés fréquemment.

4.6.1 Loi uniforme discrète

Définition 4.67 *Soit une expérience aléatoire consistant à extraire au hasard un point de l'ensemble équiprobable $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset R$. La variable aléatoire X donnant le point observé est dite une variable aléatoire uniforme discrète dont la fonction de masse de probabilité est*

$$\Pr(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \; k \in \{x_1, x_2, ..., x_n\} \\ 0, \; ailleurs \end{cases} .$$

Dans le cas particulier où la variable aléatoire X est une loi uniforme discrète définie sur le sous-ensemble $\{a, a+1, ..., b-1, b\}$ de $\mathbb{N}$, il est possible d'obtenir une expression générale pour la fonction de répartition, l'espérance, la variance et la fonction génératrice des moments de X.

Définition 4.68 *Soit une variable aléatoire X obéissant à une loi uniforme discrète définie sur $\{a, a+1, ..., b-1, b\}$. Alors,*

$$\Pr(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, \; k \in \{a, a+1, ..., b-1, b\} \\ 0, \; ailleurs. \end{cases}$$

et

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \begin{cases} 0, \; x < a \\ \frac{[x]-a+1}{b-a+1}, \; a \le x < b \\ 1, \; x \ge b. \end{cases} \\
E[X] &= \frac{a+b}{2} \\
Var(X) &= \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12} \\
M_X(t) &= \frac{e^{at} - e^{(b+1)t}}{(b-a+1)(1-e^t)},
\end{aligned}
$$

où $[x]$ correspond à la partie entière de x.

Pour $a \leq x < b$, on a

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{k=a}^{[x]} \Pr(X = k) \\ &= \sum_{k=a}^{[x]} \frac{1}{b-a+1} \\ &= \frac{[x]-a+1}{b-a+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=a}^{b} k \Pr(X = k) \\ &= \sum_{k=a}^{b} k \frac{1}{b-a+1} \\ &= \frac{1}{b-a+1} \left(\sum_{k=0}^{b} k - \sum_{k=0}^{a-1} k \right) \\ &= \frac{1}{b-a+1} \left(\frac{b(b+1)}{2} - \frac{(a-1)a}{2} \right) \\ &= \frac{1}{b-a+1} \left(\frac{b^2+b-a^2+a}{2} \right) \\ &= \frac{1}{b-a+1} \left(\frac{b^2-a^2+b+a}{2} \right) \\ &= \frac{1}{b-a+1} \left(\frac{(b-a)(b+a)+b+a}{2} \right) \\ &= \frac{1}{b-a+1} \left(\frac{(b+a)(b-a+1)}{2} \right) \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Sachant que $\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on a

$$
\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \sum_{k=a}^{b} k^2 \Pr(X=k) \\
&= \sum_{k=a}^{b} k^2 \frac{1}{b-a+1} \\
&= \frac{1}{b-a+1}\left(\sum_{k=0}^{b} k^2 - \sum_{k=0}^{a-1} k^2\right) \\
&= \frac{1}{b-a+1}\left(\frac{(b)(b+1)(2b+1)}{6} - \frac{(a-1)(a)(2(a-1)+1)}{6}\right) \\
&= \frac{1}{6(b-a+1)}\left[\left(b^2+b\right)(2b+1) - \left(a^2-a\right)(2a-1)\right] \\
&= \frac{1}{6(b-a+1)}\left[2b^3+3b^2+b-2a^3+3a^2-a\right] \\
&= \frac{1}{6(b-a+1)}\left[2\left(b^3-a^3\right)+3b^2+3a^2+(b-a)\right] \\
&= \frac{1}{6(b-a+1)}\left[(b-a)\left(2b^2+2ab+2a^2+(b-a)-(b-a)\right)+3\left(b^2+a^2\right)+(b-a)\right] \\
&= \frac{1}{6(b-a+1)}\left[(b-a)\left(2b^2+2ab+2a^2+(b-a)\right)-b^2+2ab-a^2+3\left(b^2+a^2\right)+(b-a)\right] \\
&= \frac{1}{6(b-a+1)}\left[(b-a)\left(2b^2+2ab+2a^2+(b-a)\right)+\left(2b^2+2ab+2a^2+b-a\right)\right] \\
&= \frac{1}{6(b-a+1)}\left[(b-a+1)\left(2b^2+2ab+2a^2+(b-a)\right)\right] \\
&= \frac{2b^2+2ab+2a^2+b-a}{6}
\end{aligned}
$$

On obtient donc

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{2b^2+2ab+2a^2+b-a}{6} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2b^2+2ab+2a^2+b-a}{6} - \left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right) \\
&= \frac{b^2-2ab+a^2+2b-2a}{12} \\
&= \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] \\
&= \sum_{k=a}^{b} \left(\mathrm{e}^{tk}\right) \Pr(X=k) \\
&= \sum_{k=a}^{b} \left(\mathrm{e}^{tk}\right) \left(\frac{1}{b-a+1}\right) \\
&= \frac{1}{b-a+1} \sum_{k=a}^{b} \left(\mathrm{e}^{tk}\right) \\
&= \frac{1}{b-a+1} \left(\sum_{k=0}^{b} \left(\mathrm{e}^{t}\right)^k - \sum_{k=0}^{a-1} \left(\mathrm{e}^{t}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{b-a+1} \left(\frac{1-\left(\mathrm{e}^{t}\right)^{b+1}}{1-\mathrm{e}^{t}} - \frac{1-\left(\mathrm{e}^{t}\right)^{a}}{1-\mathrm{e}^{t}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{(b+1)t}}{(b-a+1)\left(1-\mathrm{e}^{t}\right)}.
\end{aligned}
$$

Remarque 4.69 *Pour $X \in \{1, 2, ..., N\}$ avec probabilité $\Pr(X = i) = \frac{1}{N}$, $\forall i$, on a*

$$M_X(t) = \frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{(N+1)t}}{1-\mathrm{e}^{t}}\right).$$

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{k=1}^{N} \left(\mathrm{e}^{tk}\right) \Pr(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\mathrm{e}^{tk}\right) \left(\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\mathrm{e}^{tk}\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{3t}+...+\mathrm{e}^{Nt}\right) \\
&= \frac{1}{N}\mathrm{e}^{t}\left(1+\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{2t}+...+\mathrm{e}^{(N-1)t}\right) \\
&= \frac{1}{N}\mathrm{e}^{t}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{Nt}}{1-\mathrm{e}^{t}}\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{(N+1)t}}{1-\mathrm{e}^{t}}\right).
\end{aligned}
$$

Pour trouver l'espérance à l'aide de la fonction génératrice des moments, on obtient 0 au dénominateur...

$$
\begin{aligned}
E[X] &= M'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{N}\left(\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{(N+1)t}}{1-\mathrm{e}^{t}}\right) \\
&= \textit{tjrs 0 au dénom.}
\end{aligned}
$$

On doit donc faire cela autrement...

$$
\begin{aligned}
M_X'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{e}^{tk}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k\mathrm{e}^{tk}
\end{aligned}
$$

Donc,

$$\begin{aligned} M'_X(0) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k \\ &= \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{N(N+1)}{2}\right) \\ &= \frac{N+1}{2} \end{aligned}$$

$$M''_X(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^2 \mathrm{e}^{tk}$$

d'où

$$\begin{aligned} M''_X(0) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^2 \\ &= \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right) \\ &= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[X^2\right] - (E[X])^2 \\ &= M''(0) - (M'(0))^2 \\ &= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{N^2-1}{12} \end{aligned}$$

Exemple 4.70 *Une expérience consiste à lancer un dé non-truqué à 12 faces numérotées de 1 à 12 et à observer le résultat obtenu. Soit X une variable aléatoire représentant le résultat obtenu. (a) Écrire l'expression de la fonction de masse de probabilité de X. (b) Écrire l'expression de la fonction de répartition de X. (c) Trouver $E[X]$ et $Var(X)$.*

4.6.2 Loi de Bernoulli

Définition 4.71 *Soit une expérience où il n'y a que deux résultats possibles: un succès ou un échec. Une variable aléatoire X définie par $X(succès) = 1$ et $X(échec) = 0$ est dite une variable aléatoire de Bernoulli dont la fonction de masse de probabilité est*

$$\Pr(X = k) = \begin{cases} 1-p, \; k = 0 \\ p, \; k = 1 \\ 0, \; ailleurs, \end{cases}$$

où p correspond à la probabilité d'avoir un succès et $(1-p)$ à la probabilité d'avoir un échec.

Remarque 4.72 *Pour signifier que la variable aléatoire X obéit à une loi de Bernoulli de paramètre p, on écrit $X \sim Bern(p)$.*

Proposition 4.73 *Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Alors,*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \begin{cases} 0, \; x < 0 \\ 1-p, \; 0 \leq x < 1 \\ 1, \; x \geq 1 \end{cases} \\ E[X] &= p \\ Var(X) &= p(1-p) \\ M_X(t) &= (1-p) + pe^t \\ P_X(t) &= (1-p) + pt \end{aligned}$$

Exemple 4.74 *On lance un dé et on considère que l'on a un succès si l'on obtient 4 ou 6 et un échec si l'on obtient 1, 2, 3 ou 5. (a) Définir une variable aléatoire X représentant un succès lors du tir du dé. (b) Trouver la fonction de masse de probabilité de X. (c) Trouver la fonction de répartition de X. (d) Trouver $E[X]$ et $Var(X)$.*

4.6.3 Loi Binomiale

Définition 4.75 *Soit n essais indépendants d'une expérience aléatoire résultant à chaque fois en un succès, avec probabilité p, ou en un échec avec probabilité $(1-p)$. Une variable aléatoire X représentant le nombre de succès parmi les n essais est dite une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p dont la fonction de masse de probabilité est*

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \; x = 0, 1, ..., n \\ 0, \; ailleurs. \end{cases}$$

Proposition 4.76 *Soit une variable aléatoire X telle que $X \sim Bin(n, p)$. Alors,*

$$\begin{aligned} E[X] &= np \\ Var(X) &= np(1-p) \\ M_X(t) &= \left((1-p) + pe^t\right)^n \\ P_X(t) &= ((1-p) + pt)^n \end{aligned}$$

Remarque 4.77 *La loi de Bernoulli est une loi binomiale avec $n = 1$. Une variable aléatoire binomiale X représente le nombre de succès parmi n essais. On peut donc écrire cette variable aléatoire comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli, c'est-à-dire*

$$X = I_1 + I_2 + ... + I_n,$$

où I_j $(j = 1, ..., n)$ sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Attention: $X \neq nI$.

Remarque 4.78 *Il n'y a pas de forme explicite pour la fonction de répartition d'une variable aléatoire binomiale. On a donc*

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{[x]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

où $[x]$ correspond à la partie entière de x.

Remarque 4.79 *Par le théorème du binôme, on peut vérifier que la variable aléatoire binomiale X est bien définie, c'est-à-dire $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$.*

Remarque 4.80 *À noter que la variance d'une variable aléatoire binomiale est toujours inférieure à son espérance, soit $Var(X) = np(1-p) < E[X] = np$. Ceci s'avéra important dans le cadre de la modélisation de la fréquence des sinistres.*

Exemple 4.81 *Une compagnie d'assurance auto détient un portefeuille dont 100 assurés font partie de la classe no.1 des conducteurs. La probabilité d'avoir un accident pour un assuré de cette classe est de 0.05. (a) Trouver la probabilité d'observer 4 accidents au sein des assurés de la classe no.1 au cours de la prochaine année. (b) Trouver le nombre espéré d'accident pour ce groupe au cours de la prochaine année.*

Exemple 4.82 *Dans une population donnée on rencontre, en moyenne, 1 daltonien sur 100 personnes. Combien d'individus devons-nous avoir dans un échantillon pour qu'il contienne au moins 1 daltonien avec une probabilité supérieure à 0.95?*

4.6.4 Loi de Poisson

Définition 4.83 *Soit une expérience aléatoire où un événement se produit en moyenne λ fois par unité de mesure considérée (habituellement le temps). Soit X une variable aléatoire représentant le nombre de fois où un événement se produit par l'unité de mesure considérée. Alors, la variable aléatoire X est dite une variable aléatoire de Poisson dont la fonction de masse de probabilité est*

$$\Pr(X = k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!},\ k = 0, 1, 2, ... \\ 0,\ ailleurs. \end{cases}$$

Proposition 4.84 *Soit une variable aléatoire X telle que $X \sim Poisson(\lambda)$. Alors,*

$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda \\ Var(X) &= \lambda \\ M_X(t) &= \mathrm{e}^{\lambda\left(\mathrm{e}^t - 1\right)} \\ P_X(t) &= \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}. \end{aligned}$$

Exemple 4.85 *Soit N une variable aléatoire représentant le nombre d'accidents de moto par année pour un groupe d'assurés. On suppose que N obéit à une loi de Poisson de moyenne 2. Quelle est la probabilité d'observer au moins un accident de moto au cours d'une année?*

Exemple 4.86 *Soit X une variable aléatoire obéissant à une loi de Poisson telle que $\Pr(X = 1) = \Pr(X = 2)$. Trouver $\Pr(X = 4)$.*

Remarque 4.87 *On peut vérifier que la variable aléatoire X obéissant à une loi de Poisson est bien définie, c'est-à-dire*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + ...\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = 1.$$

Remarque 4.88 *Il n'y a pas de forme explicite pour la fonction de répartition d'une variable aléatoire obéissant à une loi de Poisson. On a donc $F_X(x) = \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$, $x \geq 0$.*

Remarque 4.89 *À noter que la variance d'une variable aléatoire obéissant à une loi de Poisson est toujours égale à son espérance, soit $Var(X) = \lambda = E[X]$. Ceci s'avéra important dans le cadre de la modélisation de la fréquence des sinistres. La loi de Poisson est également très utilisée notamment en théorie du risque et en processus aléatoire pour sa simplicité et ses différentes propriétés.*

Proposition 4.90 ***Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson*** *Soit $M \sim Bin(n,p)$ tel que $np = \lambda$. Alors,*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P_M(t) &= \lim_{n\to\infty} (1-p+pt)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}t\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\lambda}{n}(t-1)\right)^n \\ &= \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}\end{aligned}$$

car $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$ pour tout x. Ceci correspond à la fonction génératrice des probabilités d'une variable aléatoire M obéissant à une loi de Poisson de paramètre λ.

Remarque 4.91 *Il est à noter que l'on approxime une loi à deux paramètres (loi binomiale) avec une loi à un seul paramètre (loi de Poisson).*

Exemple 4.92 *On suppose que la probabilité qu'un item produit par une certaine machine sera défectueux avec probabilité 0.1. Trouver la probabilité que sur un échantillon de 10 items, il y en ait au plus un de défectueux. Comparer votre réponse avec l'approximation de Poisson.*

Solution. Soit X une variable aléatoire représentant le nombre d'items défectueux parmi l'échantillon. Alors, $X \sim Bin(10, 0.1)$ et

$$\begin{aligned}\Pr(X &\le 1) = \Pr(X=0)+\Pr(X=1) \\ &= \binom{10}{0}(0.1)^0(0.9)^{10} + \binom{10}{1}(0.1)^1(0.9)^9 \\ &= 0.7361.\end{aligned}$$

L'approximation avec la loi de Poisson donne avec $\lambda = (10)(0.1) = 1$

$$\begin{aligned}\Pr(X &\le 1) = \Pr(X=0)+\Pr(X=1) \\ &= \frac{1^0\mathrm{e}^{-1}}{0!} + \frac{1^1\mathrm{e}^{-1}}{1!} \\ &= 2\mathrm{e}^{-1} = 0.7358.\end{aligned}$$

■

4.6.5 Loi Géométrique

Définition 4.93 *Soit une suite d'essais indépendants d'une même expérience aléatoire résultant, à chaque fois, en un succès avec probabilité p ou en un échec avec probabilité $(1-p)$. Soit X une variable aléatoire représentant le nombre d'**essais** nécessaires pour obtenir un **premier** succès. Alors, la variable aléatoire X est dite une variable aléatoire géométrique dont la fonction de masse de probabilité est*

$$\Pr(X=k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1}, \ k = \mathbf{1}, 2, 3, ... \\ 0, \ ailleurs. \end{cases}$$

Remarque 4.94 *À noter que le support de la variable aléatoire définie ci-dessus débute à 1.*

Remarque 4.95 *Soit l'événement E_i correspondant à obtenir un succès au $i$ème essai. Alors,*

$$\begin{aligned}\Pr(X &= k) = \Pr(\overline{E}_1\overline{E}_2...\overline{E}_{k-1}E_k) \\ &= \Pr(\overline{E}_1)\Pr(\overline{E}_2)...\Pr(\overline{E}_{k-1})\Pr(E_k) \\ &= (1-p)(1-p)...(1-p)p \\ &= p(1-p)^{k-1}.\end{aligned}$$

Proposition 4.96 *Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim$ Géométrique (p). Alors,*

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1-(1-p)^{[x]}, & x \geq 1. \end{cases} \\
E[X] &= \frac{1}{p} \\
Var(X) &= \frac{(1-p)}{p^2} \\
M_X(t) &= \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \\
P_X(t) &= \frac{pt}{1-(1-p)t}
\end{aligned}$$

Exemple 4.97 *On choisit une carte avec remplacement parmi un jeu de 52 cartes jusqu'à ce que l'on obtienne un as. (a) Trouver l'espérance et la variance du nombre de lancers nécessaires pour obtenir un as. (b) Quelle est la probabilté qu'au moins 10 essais soient nécessaires?*

Remarque 4.98 *On peut vérifier qu'une variable aléatoire X obéissant à une loi géométrique est bien définie, c'est-à-dire*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\left(1+(1-p)+(1-p)^2+...\right) = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

On a donc qu'un succès se produira éventuellement avec probabilité 1.

Remarque 4.99 *La fonction de masse d'une variable aléatoire géométrique peut aussi être définie par*

$$\Pr(X=k) = p(1-p)^k,\ k = \mathbf{0}, 1, 2, ...$$

*où X est une variable aléatoire représentant le nombre d'**échecs** avant un premier succès. Il est à noter que le support de la variable aléatoire géométrique définie ci-dessus débute à 0. Dans ce cas, si l'événement E_i correspond à obtenir un succès au ième essai, on a*

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= k) = \Pr(\overline{E}_1\overline{E}_2...\overline{E}_k E_{k+1}) \\
&= \Pr(\overline{E}_1)\Pr(\overline{E}_2)...\Pr(\overline{E}_k)P(E_{k+1}) \\
&= (1-p)(1-p)...(1-p)p \\
&= p(1-p)^k.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \sum_{k=0}^{[x]} p(1-p)^k \\
&= p\left(\left(1+(1-p)+(1-p)^2+...+(1-p)^{[x]}\right)\right) \\
&= p\left(\frac{1-(1-p)^{[x]+1}}{1-(1-p)}\right) \\
&= 1-(1-p)^{[x]+1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{1-p}{p} \\
Var(X) &= \frac{1-p}{p^2} \\
M_X(t) &= \frac{p}{1-(1-p)e^t} \\
P_X(t) &= \frac{p}{1-(1-p)t}.
\end{aligned}$$

Le lien entre les deux définitions d'une variable aléatoire géométrique est

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{nombre d'essais pour 1er succès} \\ X_2 &= \text{nombre d'échecs avant le 1er succès} \\ &\Rightarrow X_1 = X_2 + 1 \\ &\Rightarrow E[X_2] = E[X_1 - 1] = E[X_1] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} \\ &\Rightarrow Var(X_2) = Var(X_1 - 1) = Var(X_1) = \frac{1-p}{p^2}. \end{aligned}$$

Exemple 4.100 *Refaire l'Exemple 4.97b) avec la deuxième définition de la variable aléatoire géométrique X représentant le nombre d'**échecs** avant le 1er succès.*

Proposition 4.101 *La loi géométrique est sans mémoire. En effet, la loi de probabilité du nombre d'essais à répéter jusqu'à l'obtenion d'un premier succès dans une suite d'essais de Bernoulli identiques et indépendants est la même quel que soit le nombre d'essais accumulés auparavant. Mathématiquement, cela se traduit par*

$$\Pr(X > n + m \,|X > n) = \Pr(X > m).$$

La loi géométrique est la seule distribution discrète qui possède cette propriété.

Preuve. Soit X une variable aléatoire géométrique avec fonction de masse de probabilité

$$\Pr(X = k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1}, & k = \mathbf{1}, 2, 3, ... \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X > n + m \,|X > n) &= \frac{\Pr(X > n + m \cap X > n)}{\Pr(X > n)} \\ &= \frac{\Pr(X > n + m)}{\Pr(X > n)} \\ &= \frac{\Pr(X = n + m + 1) + \Pr(X = n + m + 2) + \Pr(X = n + m + 3) + ...}{\Pr(X = n + 1) + \Pr(X = n + 2) + \Pr(X = n + 3) + ...} \\ &= \frac{p(1-p)^{n+m} + p(1-p)^{n+m+1} + p(1-p)^{n+m+2} + ...}{p(1-p)^{n} + p(1-p)^{n+1} + p(1-p)^{n+2} +} \\ &= \frac{p(1-p)^{n+m}\left(1 + (1-p) + (1-p)^2 + ...\right)}{p(1-p)^{n}\left(1 + (1-p) + (1-p)^2 +\right)} \\ &= (1-p)^m \\ &= \Pr(X > m) \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \Pr(X > m) &= \Pr(X = m + 1) + \Pr(X = m + 2) + \Pr(X = m + 3) + ... \\ &= p(1-p)^m + p(1-p)^{m+1} + p(1-p)^{m+2} + ... \\ &= p(1-p)^m \left(1 + (1-p) + (1-p)^2 + ...\right) \\ &= p(1-p)^m \left(\frac{1}{1-(1-p)}\right) \\ &= (1-p)^m. \end{aligned}$$

■

Remarque 4.102 *Autres façons d'interpréter la propriété sans mémoire de la loi géométrique:*

(1) La connaissance du résultat des k premiers tirages ne modifie pas les probabilités pour les suivants.

(2) Devoir attendre n lancers (au moins) pour voir apparaître un premier succès a la même probabilité que l'on parle du premier tirage ou du millième tirage sachant qu'on n'a pas obtenu de succès pour ces mille premiers tirages.

Exemple 4.103 *Vous avez effectué 10 essais dans le but d'obtenir un 6 en lançant un dé mais vous n'avez toujours pas réussi. Trouver la probabilité que 4 essais supplémentaires soient nécessaires pour que vous obteniez un 6.*
Solution. *Soit X une variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un 6. Alors, $X \sim$ Géom $\left(p = \frac{1}{6}\right)$ et*

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X = 14 \,|X > 10\,\right) &= \frac{\Pr\left(X = 14 \cap X > 10\right)}{\Pr\left(X > 10\right)} \\
&= \frac{\Pr\left(X = 14\right)}{\Pr\left(X > 10\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{13}}{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{11} + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{12} + ...} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{13}}{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\left(1 + \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + ...\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{13}}{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)}\right)} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{3} \\
&= \Pr\left(X = 4\right).
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.104 *Soit X une variable aléatoire obéissant à une loi géométrique telle que*

$$\Pr(X = k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1}, & k = \mathbf{1}, 2, 3, ... \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrer que $e_X\left(d\right) = E\left[X - d\,|X > d\right] = E\left[X\right]$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
E\left[X - d\,|X > d\,\right] &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(k-d\right)\Pr\left(X = k\,|X > d\,\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(k-d\right)\frac{\Pr\left(X = k, X > d\right)}{\Pr\left(X > d\right)} \\
&= \sum_{k=d+1}^{\infty}\left(k-d\right)\frac{p(1-p)^{k-1}}{\left(1-p\right)^{d}} \\
&= \frac{1}{\left(1-p\right)^{d}}\left(\sum_{k=d+1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} - d\sum_{k=d+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{\left(1-p\right)^{d}}\left(\sum_{k=d+1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} - d\left(1-p\right)^{d}\right)
\end{aligned}$$

Posons $y = k - d$ et donc $k = y + d$. Alors,

$$\begin{aligned}
E\left[X - d\,|X > d\right] &= \frac{1}{(1-p)^d}\left(\sum_{y=1}^{\infty}(y+d)\,p(1-p)^{(y+d)-1} - d\,(1-p)^d\right) \\
&= \frac{1}{(1-p)^d}\left(\sum_{y=1}^{\infty} yp(1-p)^{(y+d)-1} + \sum_{y=1}^{\infty} dp(1-p)^{(y+d)-1} - d\,(1-p)^d\right) \\
&= \frac{1}{(1-p)^d}\left((1-p)^d\sum_{y=1}^{\infty} yp(1-p)^{y-1} + d\,(1-p)^d\sum_{y=1}^{\infty} p(1-p)^{y-1} - d\,(1-p)^d\right) \\
&= \frac{1}{(1-p)^d}\left((1-p)^d\,E[X] + d\,(1-p)^d - d\,(1-p)^d\right) \\
&= E[X].
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.105 *Soit Xune variable aléatoire obéissant à une loi géométrique telle que*

$$\Pr(X = k) = \begin{cases} p(1-p)^k, & k = \mathbf{0}, 1, 2, 3, ... \\ 0, & \textit{ailleurs}. \end{cases}$$

Montrer que $e_X(d) = E\left[X - d\,|X > d\right] = E[X] + 1$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
E\left[X - d\,|X > d\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}(k-d)\Pr\left(X = k\,|X > d\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k-d)\,\frac{\Pr\left(X = k, X > d\right)}{\Pr\left(X > d\right)} \\
&= \sum_{k=d+1}^{\infty}(k-d)\,\frac{p(1-p)^k}{(1-p)^{d+1}} \\
&= \frac{1}{(1-p)^{d+1}}\left(\sum_{k=d+1}^{\infty} kp(1-p)^k - d\sum_{k=d+1}^{\infty} p(1-p)^k\right) \\
&= \frac{1}{(1-p)^{d+1}}\left(\sum_{k=d+1}^{\infty} kp(1-p)^k - d\,(1-p)^{d+1}\right)
\end{aligned}$$

Posons $y = k - (d+1)$ et donc $k = y + (d+1)$. Alors,

$$\begin{aligned}
E\left[X - d\,|X > d\right] &= \frac{1}{(1-p)^{d+1}}\left(\sum_{y=0}^{\infty}(y+(d+1))\,p(1-p)^{y+(d+1)} - d\,(1-p)^{d+1}\right) \\
&= \frac{1}{(1-p)^{d+1}}\left(\sum_{y=0}^{\infty} yp(1-p)^{y+(d+1)} + \sum_{y=0}^{\infty}(d+1)\,p(1-p)^{y+(d+1)} - d\,(1-p)^{d+1}\right) \\
&= \frac{1}{(1-p)^{d+1}}\left((1-p)^{d+1}\sum_{y=0}^{\infty} yp(1-p)^y + (1-p)^{d+1}\sum_{y=0}^{\infty}(d+1)\,p(1-p)^y - d\,(1-p)^{d+1}\right) \\
&= \frac{1}{(1-p)^{d+1}}\left((1-p)^{d+1}\,E[X] + (1-p)^{d+1}(d+1) - d\,(1-p)^{d+1}\right) \\
&= E[X] + 1
\end{aligned}$$

■

Remarque 4.106 *À noter que l'on a*

$$\Pr(X \geq n+m \,|X > n\,) = \Pr(X \geq m)$$

car

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq n+m \,|X > n\,) &= \frac{\Pr(X \geq n+m \cap X > n)}{\Pr(X > n)} \\
&= \frac{\Pr(X \geq n+m)}{\Pr(X > n)} \\
&= \frac{\Pr(X = n+m) + \Pr(X = n+m+1) + \Pr(X = n+m+2) + ...}{\Pr(X = n+1) + \Pr(X = n+2) + \Pr(X = n+3) + ...} \\
&= \frac{p(1-p)^{n+m-1} + p(1-p)^{n+m} + p(1-p)^{n+m+1} + ...}{p(1-p)^{n} + p(1-p)^{n+1} + p(1-p)^{n+2} +} \\
&= \frac{p(1-p)^{n+m-1}\left(1 + (1-p) + (1-p)^2 + ...\right)}{p(1-p)^{n}\left(1 + (1-p) + (1-p)^2 +\right)} \\
&= (1-p)^{m-1} \\
&= \Pr(X \geq m)
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq m) &= \Pr(X = m) + \Pr(X = m+1) + \Pr(X = m+2) + ... \\
&= p(1-p)^{m-1} + p(1-p)^{m} + p(1-p)^{m+1} + ... \\
&= p(1-p)^{m-1}\left(1 + (1-p) + (1-p)^2 + ...\right) \\
&= p(1-p)^{m-1}\left(\frac{1}{1-(1-p)}\right) \\
&= (1-p)^{m-1}.
\end{aligned}$$

4.6.6 Loi Binomiale Négative

Définition 4.107 *Soit une suite d'essais indépendants d'une même expérience aléatoire résultant, à chaque fois, en un succès avec probabilité p ou un échec avec probabilité $(1-p)$. Soit X une variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le rième succès. Alors, la variable aléatoire X est dite une variable aléatoire binomiale négative dont la fonction de masse de probabilité est*

$$\Pr(X = k) = \begin{cases} \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \ k = \mathbf{r}, r+1, ... \\ 0, \ \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

Proposition 4.108 *Soit une variable aléatoire X telle que $X \sim BinNég\,(r, p)$. Alors,*

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{r}{p} \\
Var(X) &= \frac{r(1-p)}{p^2} \\
M_X(t) &= \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r \\
P_X(t) &= \left(\frac{pt}{1-(1-p)t}\right)^r.
\end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=r}^{\infty} k \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \\
&= \sum_{k=r}^{\infty} k \frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!} p^r (1-p)^{k-r} \\
&= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{k!}{(r-1)!(k-r)!} p^r (1-p)^{k-r}.
\end{aligned}$$

Posons $y = k+1$ et donc $k = y-1$**.** On obtient

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{y=r+1}^{\infty} \frac{(y-1)!}{(r-1)!((y-1)-r)!} p^r (1-p)^{(y-1)-r} \\
&= \sum_{y=r+1}^{\infty} \frac{(y-1)!}{(r-1)!(y-(r+1))!} p^r (1-p)^{y-(r+1)}.
\end{aligned}$$

On a presque la fonction de masse de probabilité d'une variable aléatoire binomiale négative sous la sommation: on a le paramètre p qui demeure inchangé alors que le paramètre r est $r^* = r+1$. Alors,

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{r}{p} \sum_{y=r+1}^{\infty} \frac{(y-1)!}{((\mathbf{r}+\mathbf{1})-1)!(y-(r+1))!} p^{\mathbf{r}+\mathbf{1}} (1-p)^{(y-(r+1))} \\
&= \frac{r}{p} \sum_{y=r*}^{\infty} \binom{y-1}{r^*-1} p^{r^*} (1-p)^{y-r^*}, \text{ où } r^* = r+1 \\
&= \frac{r}{p}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \sum_{k=r}^{\infty} k^2 \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \\
&= \sum_{k=r}^{\infty} k^2 \frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!} p^r (1-p)^{k-r} \\
&= \sum_{k=r}^{\infty} k \frac{k!}{(r-1)!(k-r)!} p^r (1-p)^{k-r}
\end{aligned}$$

Posons $y = k+1$ et donc $k = y-1$. Alors,

$$\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \sum_{y=r+1}^{\infty} (y-1) \frac{(y-1)!}{(r-1)!\,(y-(r+1))!} p^r (1-p)^{(y)-(r+1)} \\
&= \frac{r}{p} \sum_{y=r+1}^{\infty} (y-1) \frac{(y-1)!}{((r+1)-1))!\,(y-(r+1))!} p^{r+1} (1-p)^{(y)-(r+1)} \\
&= \frac{r}{p} E[Y-1] \text{ où } Y \sim BinNég(r^* = r+1, p) \\
&= \frac{r}{p}\left(\frac{(r+1)}{p} - 1\right)
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
Var\left(X\right) &= E\left[X^2\right]-E^2\left[X\right]\\
&= \frac{r}{p}\left(\frac{r+1}{p}-1\right)-\left(\frac{r}{p}\right)^2\\
&= \frac{r^2}{p^2}+\frac{r}{p^2}-\frac{r}{p}-\frac{r^2}{p^2}\\
&= \frac{r}{p^2}-\frac{r}{p}\\
&= \frac{r}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\\
&= \frac{r}{p}\left(\frac{1-p}{p}\right)\\
&= \frac{r\left(1-p\right)}{p^2}.
\end{aligned}$$

$$M_X(t)=\sum_{k=r}^{\infty}\mathrm{e}^{tk}\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}.$$

On sait que $\binom{k-1}{r-1}=\frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!}$ est équivalent à $\binom{k-1}{k-r}=\frac{(k-1)!}{(k-r)!(r-1)!}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{k=r}^{\infty}\mathrm{e}^{tk}\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}\\
&= \sum_{k=r}^{\infty}\mathrm{e}^{tk}\binom{k-1}{k-r}p^r(1-p)^{k-r}.
\end{aligned}$$

Posons $y=k-r$ et donc $k=r+y$. Alors,

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{y=0}^{\infty}\mathrm{e}^{t(y+r)}\binom{r+y-1}{y}p^r(1-p)^y\\
&= \left(p\mathrm{e}^t\right)^r\sum_{y=0}^{\infty}\binom{r+y-1}{y}\left((1-p)\mathrm{e}^t\right)^y.
\end{aligned}$$

Petite parenthèse...soit la fonction $f(t)=(1-t)^{-r}$. La série de Maclaurin de f, c'est-à-dire la série de Taylor de f en $a=0$, est

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r+n-1)!}{(r-1)!}\frac{1}{n!}t^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r+n-1}{n}t^n
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
f'(t) &= r(1-t)^{-r-1}\Rightarrow f'(0)=r\\
f''(t) &= r(r+1)(1-t)^{-r-2}\Rightarrow f''(0)=r(r+1)\\
&\vdots\\
f^{(n)}(t) &= r(r+1)...(r+n-1)(1-t)^{-r-n}\Rightarrow f^{(n)}(0)=r(r+1)...(r+n-1)=\frac{(r+n-1)!}{(r-1)!}.
\end{aligned}$$

Fin de la parenthèse...On peut donc écrire

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \left(p\mathrm{e}^t\right)^r \sum_{y=0}^{\infty} \binom{r+y-1}{y} \left((1-p)\mathrm{e}^t\right)^y \\ &= \left(p\mathrm{e}^t\right)^r (1-(1-p)\mathrm{e}^t)^{-r} \\ &= \left(\frac{p\mathrm{e}^t}{1-(1-p)\,\mathrm{e}^t}\right)^r. \end{aligned}$$

Remarque 4.109 *Soit une fonction f. La série de Taylor de f en a est*

$$f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + ...$$

Si $a = 0$, la série est appelée série de Maclaurin de f.

■

Exemple 4.110 *Une boîte contient 5 balles noires et 7 balles rouges. On pige une balle, on en note la couleur et on la remet dans la boîte. Trouver la probabilité d'avoir besoin de plus de 4 essais pour obtenir 3 balles noires.*

Remarque 4.111 *La loi géométrique est un cas particulier de la loi binomiale négative où $r = 1$.*

Remarque 4.112 *À noter que le support de la variable aléatoire binomiale négative définie ci-dessus débute à r.*

Remarque 4.113 *La fonction de masse de probabilité d'une variable aléatoire binomiale négative où X correspond au nombre d'essais pour obtenir un r ième succès peut aussi être écrite sous la forme*

$$\begin{aligned} \Pr(X &= k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \\ &= \binom{k-1}{k-r} p^r (1-p)^{k-r} \end{aligned}$$

car $\binom{k-1}{r-1} = \frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!}$.

Remarque 4.114 *On peut vérifier qu'une variable aléatoire X obéissant à une loi de binomiale négative est bien définie, c'est-à-dire que la somme de ses probabilités donne 1. La preuve n'est pas difficile mais longue...*

Remarque 4.115 *La fonction de masse de probabilité d'une variable aléatoire binomiale négative peut aussi être définie par*

$$\begin{aligned} \Pr(X &= k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \ k = \mathbf{0}, 1, ... \\ &= \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k, \ k = \mathbf{0}, 1, ... \end{aligned}$$

*où X est une variable aléatoire représentant le nombre d'**échecs** avant le rième succès. Dans ce cas, le support de la variable aléatoire X débute à 0 et*

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{r(1-p)}{p} \\ Var(X) &= \frac{r(1-p)}{p^2} \\ M_X(t) &= \left(\frac{p}{1-(1-p)\mathrm{e}^t}\right)^r \\ P_X(t) &= \left(\frac{p}{1-(1-p)t}\right)^r \end{aligned}$$

Remarque 4.116 *À noter que la variance d'une variable aléatoire obéissant à une loi binomiale négative est toujours supérieure à son espérance, soit* $Var\,(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} > E\,[X] = \frac{r(1-p)}{p}$*. Ceci s'avéra important dans le cadre de la modélisation de la fréquence des sinistres.*

4.6.7 Loi Hypergéométrique

Définition 4.117 *Soit une population de* N *objets distincts où* m *objets sont de type no.1 et* $N-m$ *de type no.2. On extrait sans remise un échantillon de taille* n *où* $n < N$*. Soit* X *une variable aléatoire représentant le nombre d'objets de type no.1 dans l'échantillon. Alors, la variable aléatoire* X *est dite une variable aléatoire hypergéométrique dont la fonction de masse de probabilité est*

$$\Pr(X=k) = \begin{cases} \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, & k = 0, 1, ..., \min(n, m). \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

Proposition 4.118 *Soit* X *une variable aléatoire telle que* $X \sim HyperGéo\,(N, n, m)$*. Alors, on a*

$$\begin{aligned} E\,[X] &= n\frac{m}{N} \\ Var\,(X) &= \frac{nm}{N}\left(\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{nm}{N}\right). \end{aligned}$$

Preuve. Supposons $m \leq n$.

$$E\,[X] = \sum_{k=0}^{m} k\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Étant donné que

$$\begin{aligned} k\binom{m}{k} &= k\frac{m!}{(m-k)!k!} \\ &= m\frac{(m-1)!}{(m-k)!(k-1)!} \\ &= m\binom{m-1}{k-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} n\binom{N}{n} &= n\frac{N!}{n!(N-n)!} \\ &= N\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \\ &= N\binom{N-1}{n-1}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} E\,[X] &= \sum_{k=0}^{m} k\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{m\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} \\ &= \frac{nm}{N}\sum_{k=1}^{m} \frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N-1}{n-1}} \\ &= \frac{nm}{N}\sum_{k=1}^{m} \frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{(N-1)-(m-1)}{(n-1)-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Posons $y = k - 1$ et donc $k = y + 1$. Alors,

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{nm}{N} \sum_{y=0}^{m-1} \frac{\binom{m-1}{y}\binom{(N-1)-(m-1)}{(n-1)-y}}{\binom{N-1}{n-1}} \\ &= \frac{nm}{N} \sum_{y=0}^{m^*} \frac{\binom{m^*}{y}\binom{N^*-m^*}{n^*-y}}{\binom{N^*}{n^*}},\ \textit{où } N^* = N-1,\ m^* = m-1,\ n^* = n-1 \\ &= n\frac{m}{N} \end{aligned}$$

étant donné que l'on somme toutes les probabilités d'une loi hypergéométrique de paramètres $N^* = N - 1, m^* = m - 1, n^* = n - 1$. ■

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{k=0}^{m} k^2 \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \left(n\frac{m}{N}\right)^2 \\ & \textit{...très long.} \end{aligned}$$

Exemple 4.119 *Sachant que 10 ampoules sur un lot de 100 ampoules sont défectueuses, quelle est la probabilité que sur 5 ampoules pigées au hasard sans remise, 3 soient défectueuses?*

Solution. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'ampoules défectueuses parmi les 5 ampoules pigées. Alors,

$$X \sim HyperGéo(N = 100, m = 10, n = 5)$$

d'où

$$\Pr(X = 3) = \frac{\binom{10}{3}\binom{100-10}{5-3}}{\binom{100}{5}} = \frac{\binom{10}{3}\binom{90}{2}}{\binom{100}{5}}.$$

■

Exemple 4.120 *On pige 13 cartes, sans remise, d'un jeu de 52 cartes. Si X est le nombre de cartes de pique dans ces 13 cartes, quelle est la probabilité d'avoir au plus 2 cartes de pique?*

Solution. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de cartes de pique dans l'échantillon de 13 cartes. Alors,

$$X \sim HyperGéo(N = 52, m = 13, n = 13).$$

$$\Pr(X \le 2) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2) = \frac{\binom{13}{0}\binom{39}{13} + \binom{13}{1}\binom{39}{12} + \binom{13}{2}\binom{39}{11}}{\binom{52}{13}}.$$

■

Remarque 4.121 *La différence entre la loi hypergéométrique et la loi binomiale est le fait que les essais sont indépendants dans le cas de la loi binomiale (échantillon extrait avec remise) et dépendants dans le cas de la loi hypergéométrique (échantillon extrait sans remise).*

Étant donné la remarque ci-dessus, on peut approximer une loi hypergéométrique par une loi binomiale lorsque m et N sont grands par rapport à la taille de l'échantillon n. Dans ce cas, il y a très peu de différence si l'échantillon est pris avec ou sans remise car la probabilité d'extraire un objet de type no.1 demeure presque inchangée d'un tir à l'autre.

Proposition 4.122 *Soit une variable aléatoire X obéissant à une loi hypergéométrique de paramètres N, m et n. Si N et m sont grands par rapport à n, on peut approximer la variable aléatoire hypergéométrique X par une variable aléatoire binomiale de paramètres n et $p = \frac{m}{N}$.*

Solution.

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{(N-m)!}{(n-k)!(N-m-n+k)!}\frac{n!(N-n)!}{N!}
\end{aligned}$$

En déplaçant les termes, on obtient

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}(m)(m-1)...(m-k+1)(N-m)(N-m-1)...(N-m-n+k+1)$$
$$\frac{1}{N(N-1)...(N-k+1)(N-k)(N-k-1)...(N-n+1)}$$

qui est équivalent à

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{m(m-1)...(m-k+1)}{N(N-1)...(N-k+1)}\frac{(N-m)(N-m-1)...(N-m-n+k+1)}{(N-k)(N-k-1)...(N-n+1)}.$$

Ainsi, lorsque $p = \frac{m}{N}$ et m et N sont grands par rapport à n et k, c'est-à-dire $\frac{N-m}{N-k} = \frac{N}{N-k} - \frac{m}{N-k} \approx 1 - \frac{m}{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(X &= k) \approx \binom{n}{k}\left(\frac{m}{N}\right)^k\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-k} \\
&\approx \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

■

Exemple 4.123 *Soit $N = 1000$ le nombre d'objets distincts dans un échantillon, $m = 3$ le nombre d'objets de type no.1 et $n = 2$ la taille de l'échantillon prélevé parmi N.*

(1) Loi hypergéométrique:

$$\Pr(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1000-3}{2-1}}{\binom{1000}{2}} = 0.0059880.$$

(2) Approximation binomiale: $p = \frac{m}{N} = 0.003$

$$\Pr(X = 1) = \binom{2}{1}(0.003)(0.997) = 0.005982.$$

Exemple 4.124 *Soit $N = 10000$ le nombre d'objets distincts dans un échantillon, $m = 30$ le nombre d'objets de type no.1, $n = 2$ la taille de l'échantillon prélevé parmi N et $x = 1$.*

(1) Loi hypergéométrique:

$$\Pr(X = 1) = \frac{\binom{30}{1}\binom{10000-30}{2-1}}{\binom{10000}{2}} = 0.0059826.$$

(2) Approximation binomiale: $p = \frac{m}{N} = \frac{30}{10000} = 0.003$

$$\Pr(X = 1) = \binom{2}{1}(0.003)(0.997) = 0.005982.$$