Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives (Solutions)

Hélène Cossette et Etienne Marceau

Version : 23 novembre 2019

Table des matières

1 Notions de probabilité pour la modélisation du risque **1**
1.1 Exercices traditionnels 1
1.2 Exercices informatiques 37

2 Méthodes Monte-Carlo **39**
2.1 Exercices traditionnels 39
2.2 Exercices informatiques 47

3 Mesures de risque et mutualisation des risques **51**
3.1 Exercices traditionnels 51
3.2 Exercices informatiques 100

4 Modélisation des risques non-vie **113**
4.1 Exercices traditionnels 113
4.2 Exercices informatiques 155

5 Mutualisation des risques non-vie **161**
5.1 Exercices traditionnels 161
5.2 Exercices informatiques 225

6 Introduction aux méthodes d'allocation de capital **245**
6.1 Exercices traditionnels 245
6.2 Exercices informatiques 249

7 Estimation des données d'assurance **251**

8 Processus de comptage **259**
8.1 Exercices traditionnels 259
8.2 Exercices informatiques 275

9 Méthodes récursives d'agrégation **287**
9.1 Exercices traditionnels 287
9.2 Exercices informatiques 300

10 Distributions multivariées et agrégation des risques **309**
10.1 Exercices - traditionnels 309
10.2 Exercices - informatique 349

11 Théorie des copules et agrégation des risques **351**
11.1 Exercices traditionnels 351
11.2 Exercices informatiques 371

Remerciements

Je tiens à remercier les étudiantes et les étudiants qui ont assisté aux cours que j'ai enseignés à l'École d'actuariat (Université Laval, Québec, Canada), à l'ISFA (Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France), à l'INSEA (Rabat, Maroc) et au Department of Mathematics and Statistics (McGill University, Montréal, Canada).

Préface

Document de référence. Le présent ouvrage comprend la théorie pour les cours Act-2001, Act-3000 et Act-7017 de l'École d'actuariat (Université Laval) ainsi que pour le cours Modèles Stochastiques en assurance non-vie (Master Recherche) de l'ISFA (Université Claude Bernard Lyon 1). Il s'agit d'une version nouvelle et retravaillée de [Marceau, 2013].

Prérequis. Les prérequis pour cet ouvrage sont principalement des cours de bases en mathématique, en probabilité et en statistique.

Conditions d'utilisation. Cet ouvrage est en cours de rédaction, ce qui implique que son contenu est continuellement révisé et mis à jour. Alors, il peut y avoir encore des erreurs et son contenu doit être encore amélioré. Pour cette raison, le lecteur est invité à nous communiquer tout commentaire et / ou correction qu'il peut y avoir. Les conditions suivantes d'utilisation doivent être respectées :

1. Cet ouvrage a été conçu pour des fins pédagogiques, personnelles et non-commerciales. Toute utilisation commerciale ou reproduction est interdite.
2. Son contenu demeure la propriété de ses auteurs.

Calculs et illustrations. Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project. Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Le logiciel GNU R et les bibliothèques sont disponibles sur le site du R Project et du Comprehensive R Archive Network (CRAN) :

https ://cran.r-project.org/.

L'environnement RStudio est disponible sur le site suivant :

https ://www.rstudio.com/products/rstudio/download/.

Codes R et GitHub. Les codes R de certaines solutions sont hébergés sur "GitHub". Il suffit de cliquer sur "GitHub" quand "Voir GitHub" apparaît dans la solution d'un exercice.

Versions précédentes :

1. 21 août 2019
2. 17 février 2019.

Chapitre 1

Notions de probabilité pour la modélisation du risque

1.1 Exercices traditionnels

1. On cherche x tel que $F_X(x) = u$. On doit donc isoler la variable x dans $u = F_X(x)$. On fait les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}
u &= F_X(x) \\
u &= 1 - \mathrm{e}^{-(\beta x)} \\
\mathrm{e}^{-(\beta x)} &= 1 - u \\
x &= \frac{-\log(1-u)}{\beta}.
\end{aligned}$$

   Alors, on obtient $F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\beta}\log(1-u)$.

   Code LaTeX : sol-10022.tex

2. La variable aléatoire X est continue. Alors, puisque $F_X\left(F_X^{-1}(u)\right) = u$, pour $u \in (0,1)$, on peut procéder comme suit :

$$\begin{aligned}
\Pr(F_X^{-1}(0.01) < X \leq F_X^{-1}(0.99)) &= \Pr(X \leq F_X^{-1}(0.99)) - \Pr(X \leq F_X^{-1}(0.01)) \\
&= F_X(F_X^{-1}(0.99)) - F_X(F_X^{-1}(0.01)) \\
&= 0.99 - 0.01 \\
&= 0.98.
\end{aligned}$$

   Approche alternative : grâce au théorème de la probabilité intégrale et puisque la variable aléatoire X est continue, on a $F_X(X) = U, U \sim U(0,1)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(F_X^{-1}(0.01) \leq X \leq F_X^{-1}(0.99)) &= \Pr\left(F_X\left(F_X^{-1}(0.01)\right) \leq F_X(X) \leq F_X\left(F_X^{-1}(0.99)\right)\right) \\
&= \Pr\left(0.01 \leq U \leq 0.99\right) \\
&= 0.99 - 0.01 \\
&= 0.98
\end{aligned}$$

   Code LaTeX : sol-10023.tex

3. (a) On cherche x tel que $F_X(x) = u$. On doit isoler la variable x comme suit :

$$\begin{aligned} u &= F_X(x) \\ u &= 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda x)^\tau} \\ 1 - u &= \mathrm{e}^{-(\lambda x)^\tau} \\ -(\lambda x)^\tau &= \log(1-u)\,. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \lambda x &= (-\log(1-u))^{\frac{1}{\tau}} \\ x &= \frac{1}{\lambda}(-\log(1-u))^{\frac{1}{\tau}}\,. \end{aligned}$$

On obtient $F_X^{-1}(u) = \frac{1}{\lambda}(-\log(1-u))^{\frac{1}{\tau}}$.

(b) On a

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(0.001) &= \frac{1}{\lambda}(-\log(1-0.001))^{\frac{1}{\tau}} = 0.00005005005 \\ F_X^{-1}(0.5) &= \frac{1}{\lambda}(-\log(1-0.5))^{\frac{1}{\tau}} = 24.02265069591 \\ F_X^{-1}(0.999) &= \frac{1}{\lambda}(-\log(1-0.999))^{\frac{1}{\tau}} = 2385.85414971528 \end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-10024.tex

4. (a) On vise à isoler x dans $F_X(x) = u$

$$\begin{aligned} u &= \frac{x^\tau}{\lambda^\tau + x^\tau} \\ \frac{\lambda^\tau + x^\tau}{x^\tau} &= u^{-1} \\ \frac{\lambda^\tau}{x^\tau} + 1 &= u^{-1}. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\tau &= u^{-1} - 1 \\ \frac{\lambda}{x} &= \left(u^{-1} - 1\right)^{\frac{1}{\tau}} \\ x &= \frac{\lambda}{(u^{-1}-1)^{\frac{1}{\tau}}}. \end{aligned}$$

Donc, le résultat voulu est $F_X^{-1}(u) = \frac{\lambda}{(u^{-1}-1)^{\frac{1}{\tau}}}$.

(b) On obtient

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(0.001) &= \frac{\lambda}{(0.001^{-1}-1)^{\frac{1}{\tau}}} = 1.26242 \\ F_X^{-1}(0.5) &= \frac{\lambda}{(0.5^{-1}-1)^{\frac{1}{\tau}}} = 20 \\ F_X^{-1}(0.999) &= \frac{\lambda}{(0.999^{-1}-1)^{\frac{1}{\tau}}} = 316.85181 \end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-10025.tex

5. (a) On vise à isoler x dans $F_X(x) = u$. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} F_X(x) &= u \\ 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x^\tau}\right)^\alpha &= u \\ \left(\frac{\lambda}{\lambda + x^\tau}\right)^\alpha &= 1 - u \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda + x^\tau} &= (1-u)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \frac{x^\tau}{\lambda} + 1 &= (1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ x^\tau &= \lambda\left((1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \\ x &= \left[\lambda\left((1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\tau}} \end{aligned}$$

On obtient $F_X^{-1}(u) = \left[\lambda\left((1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\tau}}$.

(b) On a

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(0.001) &= \left[\lambda\left((1-0.001)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\tau}} = 0.200070 \\ F_X^{-1}(0.5) &= \left[\lambda\left((1-0.5)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\tau}} = 5.652503 \\ F_X^{-1}(0.999) &= \left[\lambda\left((1-0.999)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\tau}} = 38.534312 \end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-10026.tex

6. (a) Soit $\mathcal{A} = \{0, 500, 1200, 2700, 5000\}$. Alors on a

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x \in \mathcal{A}} x \Pr(X = x) \\ &= 0 \times 0.4 + 500 \times 0.1 + 1200 \times 0.3 + 2700 \times 0.15 + 5000 \times 0.05 \\ &= 1065. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} E\left[\max(X - 2500; 0)\right] &= \sum_{x \in \mathcal{A}} \max(x - 2500; 0) \Pr(X = x) \\ &= 0 \times 0.4 + 0 \times 0.1 + 0 \times 0.3 + 200 \times 0.15 + 2500 \times 0.05 \\ &= 155. \end{aligned}$$

(c) On obtient

$$\begin{aligned} E\left[\min(X; 2500)\right] &= \sum_{x \in \mathcal{A}} \min(x; 2500) \Pr(X = x) \\ &= 0 \times 0.4 + 500 \times 0.1 + 1200 \times 0.3 + 2500 \times 0.15 + 2500 \times 0.05 \\ &= 910. \end{aligned}$$

(d) On calcule

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>2500\}}\right] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} x \times 1_{\{x>2500\}} \Pr(X=x) \\ &= 0 \times 0.4 + 0 \times 0.1 + 0 \times 0.3 + 2700 \times 0.15 + 5000 \times 0.05 \\ &= 655. \end{aligned}$$

(e) On déduit

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X\leq 2500\}}\right] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} x \times 1_{\{x\leq 2500\}} \Pr(X=x) \\ &= 0 \times 0.4 + 500 \times 0.1 + 1200 \times 0.3 + 0 \times 0.15 + 0 \times 0.05 \\ &= 410. \end{aligned}$$

(f) On calcule premièrement les valeurs de $F_X(x), x \in \mathcal{A}$. Alors, on déduit

x	0	500	1200	2700	5000
$\Pr(X=x)$	0.4	0.1	0.3	0.15	0.05
$\Pr(X\leq x)$	0.4	0.5	0.8	0.95	1

$$F_X^{-1}(0.5) = 500;$$

$$F_X^{-1}(0.6) = 1200;$$

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>500\}}\right] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} x \times 1_{\{x>500\}} \Pr(X=x) \\ &= 0 \times 0.4 + 0 \times 0.1 + 1200 \times 0.3 + 2700 \times 0.15 + 5000 \times 0.05 \\ &= 1015; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>1200\}}\right] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} x \times 1_{\{x>1200\}} \Pr(X=x) \\ &= 0 \times 0.4 + 0 \times 0.1 + 0 \times 0.3 + 2700 \times 0.15 + 5000 \times 0.05 \\ &= 655. \end{aligned}$$

(g) On calcule

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X\leq 500\}}\right] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} x \times 1_{\{x\leq 500\}} \Pr(X=x) \\ &= 0 \times 0.4 + 500 \times 0.1 + 0 \times 0.3 + 0 \times 0.15 + 0 \times 0.05 \\ &= 50; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X\leq 1200\}}\right] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} x \times 1_{\{x\leq 1200\}} \Pr(X=x) \\ &= 0 \times 0.4 + 500 \times 0.1 + 1200 \times 0.3 + 0 \times 0.15 + 0 \times 0.05 \\ &= 410. \end{aligned}$$

(h) On effectue d'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^1 F_X^{-1}(u)\mathrm{d}u &= \int_0^{0.4} 0\mathrm{d}u + \int_{0.4}^{0.5} 500\mathrm{d}u + \int_{0.5}^{0.8} 1200\mathrm{d}u + \int_{0.8}^{0.95} 2700\mathrm{d}u + \int_{0.95}^{1} 5000\mathrm{d}u \\ &= 0(0.4-0) + 500(0.5-0.4) + 1200(0.8-0.5) + 2700(0.95-0.8) + 5000(1-0.95) \\ &= 0\times 0.4 + 500\times 0.1 + 1200\times 0.3 + 2700\times 0.15 + 5000\times 0.05 \\ &= E[X] \\ &= 1065.\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-10027.tex

7. On se rappelle que

$$\mathcal{P}_X(t) = E[t^X] = \sum_{i=1}^{\infty} t^x \Pr(X=x).$$

Alors, les seules valeurs de X dont les probabilités sont non nulles sont $x \in \mathcal{A} = \{0, 20, 50, 100, 300\}$. On déduit les valeurs suivantes de $\Pr(X=x)$ et $F_X(x)$, pour $x \in \mathcal{A}$:

x	0	20	50	100	300
$\Pr(X=x)$	0.2	0.05	0.35	0.3	0.1
$\Pr(X\leq x)$	0.2	0.25	0.6	0.9	1

(a) On calcule

$$\begin{aligned}E[X] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} x\Pr(X=x) \\ &= 0\times 0.2 + 20\times 0.05 + 50\times 0.35 + 100\times 0.3 + 300\times 0.1 \\ &= 78.5.\end{aligned}$$

(b) On obtient

$$\begin{aligned}E[\max(X-80;0)] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} \max(x-80;0)\Pr(X=x) \\ &= 0\times 0.2 + 0\times 0.05 + 0\times 0.35 + 20\times 0.3 + 220\times 0.1 \\ &= 28.\end{aligned}$$

(c) On déduit

$$\begin{aligned}E[\min(X;80)] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} \min(x;80)\Pr(X=x) \\ &= 0\times 0.2 + 20\times 0.05 + 50\times 0.35 + 80\times 0.3 + 80\times 0.1 \\ &= 50.5.\end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned}E\left[X\times 1_{\{X>80\}}\right] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} x\times 1_{\{x>80\}}\Pr(X=x) \\ &= 0\times 0.2 + 0\times 0.05 + 0\times 0.35 + 100\times 0.3 + 300\times 0.1 \\ &= 60.\end{aligned}$$

(e) On a $F_X^{-1}(0.5) = 50$. Alors, on a

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq 50\}}\right] &= \sum_{x \in \mathcal{A}} x \times 1_{\{x \leq 50\}} \Pr(X = x) \\ &= 0 \times 0.2 + 20 \times 0.05 + 50 \times 0.35 + 0 \times 0.3 + 0 \times 0.1 \\ &= 18.5. \end{aligned}$$

(f) On effectue l'intégrale comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_X^{-1}(u)\mathrm{d}u &= \int_0^{0.2} 0\mathrm{d}u + \int_{0.2}^{0.25} 20\mathrm{d}u + \int_{0.25}^{0.6} 50\mathrm{d}u + \int_{0.6}^{0.9} 100\mathrm{d}u + \int_{0.9}^{1} 300\mathrm{d}u \\ &= 0(0.2-0) + 20(0.25-0.2) + 50(0.6-0.25) + 100(0.9-0.6) + 300(1-0.9) \\ &= 0 \times 0.2 + 20 \times 0.05 + 50 \times 0.35 + 100 \times 0.3 + 300 \times 0.1 \\ &= 78.5. \end{aligned}$$

(g) On obtient

$$\begin{aligned} \Pr\left(F_X^{-1}(0.24) < X \leq F_X^{-1}(0.86)\right) &= \Pr(20 < X \leq 100) \\ &= F_X(100) - F_X(20) \\ &= 0.9 - 0.25 \\ &= 0.65. \end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-10028.tex

8. (a) On sait que

$$\begin{aligned} P_X(t) &= E[t^X] \\ &= \sum_{x \in \mathcal{A}} t^x \Pr(X = x). \end{aligned}$$

Alors, le support de X correspond aux éléments de l'ensemble $\mathcal{A}$ pour lesquels il y a une probabilité non nulle associée. On effectue la parenthèse au carré pour trouver

$$P_X(t) = 0.856 + 0.128t + 0.016t^2$$

et on déduit que le support de X est $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ où

$$\begin{aligned} \Pr(X = 0) &= 0.856 \\ \Pr(X = 1) &= 0.128 \\ \Pr(X = 2) &= 0.016. \end{aligned}$$

(b) On calcule

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x \in \mathcal{A}} x \Pr(X = x) = 0.16; \\ Var(X) &= \sum_{x \in \mathcal{A}} (x - E[X])^2 \Pr(X = x) = 0.1664. \end{aligned}$$

(c) Par définition, on a

$$M_X(t) = E[\mathrm{e}^{tX}] = \sum_{x \in \mathcal{A}} \mathrm{e}^{tx} \Pr(X = x) = 0.856 + 0.128 \times \mathrm{e}^t + 0.016 \times \mathrm{e}^{2t}$$

et
$$\varphi(t) = \frac{1}{t}\ln(M_X(t)).$$
Selon les hypothèses, on obtient
$$\varphi(0.1) = 0.1686137.$$

Code LaTeX : sol-10029.tex

9. (a) On obtient

$$\begin{aligned}
\Pr(X > 0) &= 1 - F_X(0) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{(0-0.08)}{0.2}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{0.08}{0.2}} \\
&= 0.66484.
\end{aligned}$$

(b) On doit trouver la fonction quantile en deux temps. On sait que la loi est symétrique par rapport à μ. Alors on se trouve dans le premier cas si $u < 0.5$ et dans le deuxième cas si $u > 0.5$.
Pour $0 < u < 0.5$, on isole x dans $u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}}$. On a

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}} \\
\frac{(x-\mu)}{\sigma} &= \log(2u) \\
x &= \sigma\log(2u) + \mu.
\end{aligned}$$

Pour $0.5 < u < 1$, on isole x dans
$$u = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}.$$
On obtient

$$\begin{aligned}
u &= 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} \\
-\frac{(x-\mu)}{\sigma} &= \log(2(1-u)) \\
x &= -\sigma\log(2(1-u)) + \mu.
\end{aligned}$$

On conclut que la fonction quantile a deux formes, car la loi est symétrique, i.e.,
$$F_X^{-1}(u) = \begin{cases} \sigma\log(2u) + \mu & \text{, si } 0 < u < 0.5 \\ -\sigma\log(2(1-u)) + \mu & \text{, si } 0.5 < u < 1. \end{cases}$$

(c) On calcule

$$\begin{gathered}
F_X^{-1}(0.001) = 0.2\log(2\times 0.001) + 0.08 = -1.162922 \\
F_X^{-1}(0.5) = 0.2\log(2\times 0.5) + 0.08 = -0.2\log(2(1-0.5)) + 0.08 = 0.08 \\
F_X^{-1}(0.999) = -0.2\log(2(1-0.999)) + 0.08 = 1.322922
\end{gathered}$$

On aurait aussi pu trouver $F_X^{-1}(0.5)$ sans les fonctions quantiles. Puisque la loi de X est symétrique autour de sa moyenne, la médiane est égal à μ.

(d) i. On déduit

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[10\mathrm{e}^X] \\ &= 10E[\mathrm{e}^X] \\ &= 10\mathcal{M}_X(1) \\ &= \frac{10\mathrm{e}^\mu}{1-\sigma^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= E\left[\left(10\mathrm{e}^X\right)^2\right] \\ &= 10^2E[\mathrm{e}^{2X}] \\ &= 10^2\mathcal{M}_X(2) \\ &= \frac{10^2\mathrm{e}^{2\mu}}{1-\sigma^2 2^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[Y^2] - E[Y]^2 \\ &= \frac{10^2\mathrm{e}^{2\mu}}{1-\sigma^2 2^2} - \left(\frac{10\mathrm{e}^\mu}{1-\sigma^2}\right)^2 \\ &= 10^2\mathrm{e}^{2\mu}\left(\frac{1}{1-\sigma^2 2^2} - \frac{1}{(1-\sigma^2)^2}\right). \end{aligned}$$

ii. On obtient

$$E[Y] = \frac{10\mathrm{e}^{0.08}}{1-0.2^2} = 11.28424;$$

$$Var(Y) = 10^2\mathrm{e}^{2\times 0.08}\left(\frac{1}{1-4\times 0.2^2} - \frac{1}{(1-0.2^2)^2}\right) = 12.3696.$$

iii. On a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \Pr(Y \le x) \\ &= \Pr(10\mathrm{e}^X \le x) \\ &= \Pr\left(\mathrm{e}^X \le \frac{x}{10}\right) \\ &= \Pr\left(X \le \log\left(\frac{x}{10}\right)\right) \\ &= F_X\left(\log\left(\frac{x}{10}\right)\right). \end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\left(\log\left(\frac{x}{10}\right)-\mu\right)}{\sigma}} & ,\log\left(\frac{x}{10}\right) < \mu \\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\log\left(\frac{x}{10}\right)-\mu\right)}{\sigma}} & ,\log\left(\frac{x}{10}\right) > \mu \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{10}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\sigma}} & ,\log\left(\frac{x}{10}\right) < \mu \\ 1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{10}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\mathrm{e}^{\frac{\mu}{\sigma}} & ,\log\left(\frac{x}{10}\right) > \mu \end{cases} \end{aligned}$$

iv. On a $\log\left(\frac{10}{10}\right) = 0 < 0.08$. Alors, on déduit

$$\begin{aligned}
\Pr(Y > 10) &= 1 - F_Y(10) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{0.08}{0.2}} \\
&= 0.66484
\end{aligned}$$

v. On a $\log\left(\frac{15}{10}\right) = 0.4054651 > 0.08$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
\Pr(Y > 15) &= 1 - F_Y(15) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}(1.5)^{-\frac{1}{0.2}}\,\mathrm{e}^{\frac{0.08}{0.2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}(1.5)^{-5}\,\mathrm{e}^{0.08\times 5} \\
&= 0.09822714.
\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-10030.tex

10. (a)

$$\begin{aligned}
E\left[\max(X - d; 0)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(x - d; 0)\, f_X(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{d}^{\infty} (x - d)\,\mathrm{d}F_X(x) \\
&= -\int_{d}^{\infty} (x - d)\,\mathrm{d}\overline{F}_X(x) \\
&= -(x - d)\,\overline{F}_X(x)\big|_{x=d}^{\infty} + \int_{d}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}(x - d)\overline{F}_X(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{d}^{\infty} \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
E\left[\max(N - k; 0)\right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \max(j - k; 0)\Pr(N = j) \\
&= \sum_{j=k}^{\infty} (j - k)\Pr(N = j) \\
&= (k - k)\Pr(N = k) + ((k + 1) - k)\Pr(N = k + 1) \\
&\quad + ((k + 2) - k)\Pr(N = k + 2) + ((k + 3) - k)\Pr(N = k + 3) + \dots \\
&= 1 \times \Pr(N = k + 1) + 2 \times \Pr(N = k + 2) + \dots \\
&= 1 \times (\Pr(N = k + 1) + \Pr(N = k + 2) + \dots) \\
&\quad + (2 - 1) \times (\Pr(N = k + 2) + \Pr(N = k + 3) + \dots) \\
&\quad + (3 - 2) \times (\Pr(N = k + 3) + \Pr(N = k + 4) + \dots) \\
&\quad + (4 - 3) \times (\Pr(N = k + 4) + \Pr(N = k + 4) + \dots) \\
&= 1 \times \Pr(N > k) + 1 \times \Pr(N > k + 1) + \dots \\
&= \sum_{j=k}^{\infty} \overline{F}_N(j).
\end{aligned}$$

En version mathématique

$$\begin{aligned}
E\left[\max\left(N-k;0\right)\right] &= \sum_{j=k}^{\infty}(j-k)\Pr(N=j)\\
&= \sum_{j=k}^{\infty}\sum_{m=0}^{j-k-1}\Pr(N=j)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=m+k+1}^{\infty}\Pr(N=j)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\overline{F}_N(m+k)\\
&= \sum_{m=k}^{\infty}\overline{F}_N(m).
\end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
\pi_N(k)-\pi_N(k+1) &= \sum_{m=k}^{\infty}\overline{F}_N(m)-\sum_{m=k+1}^{\infty}\overline{F}_N(m)\\
&= \overline{F}_N(k)+\sum_{m=k+1}^{\infty}\overline{F}_N(m)-\sum_{m=k+1}^{\infty}\overline{F}_N(m)\\
&= \overline{F}_N(k).
\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-10005.tex

11. (a)

$$\begin{aligned}
\pi_X(x) &= \int_x^{\infty}\overline{F}_X(y)\mathrm{d}y\\
&= \int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y\\
&= -\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\pi_X(x) &= \int_x^{\infty}(y-x)f_X(y)\mathrm{d}y\\
&= \int_x^{\infty}yf_X(y)\mathrm{d}y-\int_x^{\infty}xf_X(u)\mathrm{d}y\\
&= \int_x^{\infty}y\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y-x\overline{H}(x;\alpha,\beta)\\
&= \int_x^{\infty}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y-x\overline{H}(x;\alpha,\beta)\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\beta}\int_x^{\infty}\frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}y^{(\alpha+1)-1}\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y-x\overline{H}(x;\alpha,\beta)\\
&= \frac{\alpha}{\beta}\overline{H}(x;\alpha+1,\beta)-x\overline{H}(x;\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\pi_X(x) &= \int_x^\infty (y-x) f_X(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_x^\infty y f_X(y)\mathrm{d}y - \int_x^\infty x f_X(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^\infty y f_X(y)\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^x y f_X(y)\mathrm{d}y - x\left(1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \\
&= \mu - \int_{-\infty}^x \mu f_X(y)\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^x (x-\mu) f_X(y)\mathrm{d}y - x\left(1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \\
&= \mu - \mu\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} - x\left(1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \\
&= \mu\left(1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) + \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} - x\left(1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \\
&= (\mu-x)\left(1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) + \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.
\end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned}
\pi_X(x) &= \int_x^\infty (y-x) f_X(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_x^\infty y f_X(y)\mathrm{d}y - \int_x^\infty x f_X(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_x^\infty y f_X(y)\mathrm{d}y - x\overline{F}(x).
\end{aligned}$$

On sait que la fonction de densité de X est

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{x}\phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right),$$

où $\phi(\bullet)$ est la fonction de densité d'une loi normale centrée et réduite. Alors, pour résoudre l'intégrale, on fait le changement de variable $z = \ln y$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty y f_X(u)\mathrm{d}y &= \int_{\ln x}^\infty \mathrm{e}^z \phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_{\ln x}^\infty \mathrm{e}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z \\
&= \int_{\ln x}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2-2y\mu-\mu^2-2\sigma^2 z}{2\sigma^2}}\mathrm{d} \\
&= \int_{\ln x}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2-2z\mu-\mu^2-2\sigma^2 z}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z \\
&= \int_{\ln x}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu-\sigma^2)^2-2\mu\sigma^2-\sigma^4}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z \\
&= \int_{\ln x}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{-2\mu\sigma^2-\sigma^4}{2\sigma^2}}\mathrm{d}z \\
&= \int_{\ln x}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\mathrm{d}z \\
&= \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{\ln x}^\infty \phi\left(\frac{z-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)\mathrm{d}z \\
&= \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln x-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)\right).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
\pi_X(x) &= \int_x^\infty y f_X(y)\mathrm{d}y - x\overline{F}(x) \\
&= \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln x-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)\right) - x\left(1-\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)\right).
\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-10006.tex

12. (a) On a

$$\begin{aligned}
E\left[X\times 1_{\{X>x\}}\right] &= \int_x^\infty y f_X(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_x^\infty y\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

On intègre par parties pour trouver

$$\begin{aligned}
E\left[X\times 1_{\{X>x\}}\right] &= -y\mathrm{e}^{-\lambda y}\Big|_{y=x}^\infty + \int_x^\infty \mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda y}}{\lambda}\bigg|_{y=x}^\infty \\
&= x\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda}.
\end{aligned}$$

(b) On déduit

$$E\left[X\times 1_{\{X>x\}}\right] = \int_x^\infty y f_X(y)\mathrm{d}y,$$

qui a été fait en 11b, alors, on obtient

$$E\left[X \times 1_{\{X>x\}}\right] = \frac{\alpha}{\beta}\overline{H}(x; \alpha+1, \beta).$$

(c) On a

$$E\left[X \times 1_{\{X>x\}}\right] = \int_x^\infty y f_X(y)\mathrm{d}y,$$

qui a été fait en 11c, alors, on obtient

$$E\left[X \times 1_{\{X>x\}}\right] = \mu\left(1-\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) + \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

(d) On a

$$E\left[X \times 1_{\{X>x\}}\right] = \int_x^\infty y f_X(y)\mathrm{d}y,$$

qui a été fait en 11d, alors, on obtient

$$E\left[X \times 1_{\{X>x\}}\right] = \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln x-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)\right).$$

Code LaTeX : sol-10007.tex

13.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_Z(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tZ}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{t(X+Y)}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{tX+tY}\right] \\
&\overset{\text{ind}}{=} E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] \times E\left[\mathrm{e}^{tY}\right] \\
&= \mathcal{M}_X(t) \times \mathcal{M}_Y(t).
\end{aligned}$$

(a) On a $\mathcal{M}_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_Z(t) &= (1-\beta t)^{-\alpha_1} \times (1-\beta t)^{-\alpha_2} \\
&= (1-\beta t)^{-(\alpha_1+\alpha_2)}.
\end{aligned}$$

On conclut

$$Z \sim \mathit{Gamma}(\alpha_1+\alpha_2, \beta).$$

(b) On a $\mathcal{M}_X(t) = (q\mathrm{e}^t + 1 - q)^n$. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_Z(t) &= \left(q\mathrm{e}^t+1-q\right)^n \times \left(q\mathrm{e}^t+1-q\right)^m \\
&= \left(q\mathrm{e}^t+1-q\right)^{n+m}.
\end{aligned}$$

On conclut

$$Z \sim \mathit{Binom}(m+n, q).$$

(c) On a $\mathcal{M}_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda\left(\mathrm{e}^t-1\right)}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_Z(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_1\left(\mathrm{e}^t-1\right)} \times \mathrm{e}^{\lambda_2\left(\mathrm{e}^t-1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)\left(\mathrm{e}^t-1\right)}.
\end{aligned}$$

On conclut

$$Z \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2).$$

(d) On a $\mathcal{M}_X(t) = \left(\frac{q}{1-(1-q)e^t}\right)^r$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_Z(t) &= \left(\frac{q}{1-(1-q)\,e^t}\right)^n \times \left(\frac{q}{1-(1-q)\,e^t}\right)^m \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)\,e^t}\right)^{n+m}.\end{aligned}$$

On conclut

$$Z \sim \text{NégBin}(n+m, q).$$

Code LaTeX : sol-13001.tex

14. (a) On a

$$\begin{aligned}E[X] &= \sum_{x_i=1}^{5} x_i \Pr(X = x_i) \\ &= 200 \times 0.15 + 400 \times 0.25 + 800 \times 0.35 + 1500 \times 0.05 \\ &= 485\end{aligned}$$

(b) On a

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2.$$

On obtient

$$\begin{aligned}E[X^2] &= \sum_{x_i=1}^{5} x_i^2 \Pr(X = x_i) \\ &= 200^2 \times 0.15 + 400^2 \times 0.25 + 800^2 \times 0.35 + 1500^2 \times 0.05 \\ &= 382500.\end{aligned}$$

On conclut

$$Var(X) = 382500 - 485^2 = 147275.$$

(c) On a

$$\begin{aligned}E\left[(X-\mu)^3\right] &= E\left[X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3\right] \\ &= E\left[X^3\right] - 3E\left[X^2\right] + 2\mu^3.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}E[X^3] &= \sum_{x_i=1}^{5} x_i^3 \Pr(X = x_i) \\ &= 200^3 \times 0.15 + 400^3 \times 0.25 + 800^3 \times 0.35 + 1500^3 \times 0.05 \\ &= 365150000.\end{aligned}$$

On conclut

$$\begin{aligned}E\left[(X-\mu)^3\right] &= 36515000 - 3 \times 382500 \times 485 + 2 \times 485^3 \\ &= 36780750\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\gamma(X) = \frac{36780750}{147275^{\frac{3}{2}}} = 0.6507693.$$

(d)

$$\begin{aligned}\Pr(X < 700) &= \Pr(X = 0) + \Pr(X = 200) + \Pr(X = 400)\\ &= 0.2 + 0.15 + 0.25\\ &= 0.6.\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\Pr(X > 2E[X]) &= \Pr(X > 970)\\ &= \Pr(X = 1500)\\ &= 0.05.\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-13002.tex

15. (a) On remarque que $X_i \sim Pareto(\alpha = 3.5, \lambda = 10)$. On obtient

$$\begin{aligned}E[X_i] &= \frac{10}{3.5-1}\\ &= 4;\\ Var(X_i) &= \frac{3.5 \times 10^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\\ &= 37.33333.\end{aligned}$$

(b) Puisque les v.a. sont indépendantes, on a

$$f_{X_1,\ldots,X_{10}}(x_1,\ldots,x_{10}) = f_{X_1}(x_1) \times \cdots \times f_{X_{10}}(x_{10});$$

$$F_{X_1,\ldots,X_{10}}(x_1,\ldots,x_{10}) = F_{X_1}(x_1) \times \cdots \times F_{X_{10}}(x_{10})$$

(c) On obtient

$$\begin{aligned}\Pr\left(X_{(10)} > y\right) &= \Pr\left(\max\left(X_1,\ldots,X_{10}\right) > y\right)\\ &= 1 - \Pr\left(\max\left(X_1,\ldots,X_{10}\right) \leq y\right)\\ &= 1 - \Pr\left(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \ldots, X_{10} \leq y\right)\\ &= 1 - \Pr(X_i \leq y)^{10}\\ &= 1 - \left(1 - \left(\frac{10}{10+y}\right)^{3.5}\right)^{10}.\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}\Pr(X_{(10)} > 10) &= 1 - \left(1 - \left(\frac{10}{10+10}\right)^{3.5}\right)^{10}\\ &= 0.6036319.\end{aligned}$$

(d) On a $10E[X] = 40$. On a

$$\begin{aligned}\Pr(X_{(10)} > 40) &= 1 - \left(1 - \left(\frac{10}{10+40}\right)^{3.5}\right)^{10} \\ &= 0.03520655.\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-13003.tex

16. Soit $X \sim$ *Bêta(2,1)* et $Y \sim$ *Bêta(1,2)*. On a

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)} x^{2-1}(1-x)^{1-1} = 2x; \\ f_Y(y) &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)\Gamma(2)} y^{1-1}(1-y)^{2-1} = 2(1-y).\end{aligned}$$

Pour obtenir la fonction de densité de S, on applique la formule de convolution et on obtient

$$\begin{aligned}f_S(x) &= \int_0^x f_X(u) f_Y(x-u)du \\ &= \int_0^x 2u \times 2(1-(x-u))du \\ &= \int_0^x 4u(1-x+u)du \\ &= \int_0^x 4(u - ux + u^2)du.\end{aligned}$$

On évalue l'intégrale et on conclut que

$$\begin{aligned}f_S(x) &= 4\left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^2 x}{2} + \frac{u^3}{3})\right)\Big|_0^x \\ &= 4\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).\end{aligned}$$

On peut ainsi déduire la fonction cumulative de S. On a

$$\begin{aligned}F_S(X) &= \int_0^x 4\left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6}\right)du \\ &= 4\left(\frac{u^3}{6} - \frac{u^4}{24}\right)\Big|_0^x \\ &= 4\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}\right).\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-21002.tex

17. (a) Pour des variables aléatoires X et Y telle que $Y = \theta \times X$, on a

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_y(y) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \Pr(Y \leq y) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \Pr\left(\theta X \leq y\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \\
&= \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{y}{\theta}\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi, on déduit la fonction de densité de la v.a. X_1 comme suit

$$
\begin{aligned}
f_{X_1}(x) &= \frac{1}{2000} f_{Y_1}\left(\frac{x}{2000}\right) \\
&= \frac{1}{2000} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)} \left(\frac{x}{2000}\right)^{2-1} \left(1 - \frac{x}{2000}\right)^{1-1} \\
&= \frac{2x}{2000^2}, \quad 0 \leq x \leq 2000.
\end{aligned}
$$

Pour la v.a. X_2, on a $f_{X_2}(x) = \frac{1}{1000} \mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}$.

Ainsi, pour la fonction de densité de S, on a

$$
\begin{aligned}
f_S(x) &= \int_0^{\min(x;2000)} f_{X_1}(y) f_{X_2}(x-y) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\min(x;2000)} \frac{2y}{2000^2} \frac{\mathrm{e}^{\frac{-(x-y)}{1000}}}{1000} \mathrm{d}y \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}}{2000^2} \int_0^{\min(x;2000)} \frac{y}{1000} \mathrm{e}^{\frac{y}{1000}} \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

En intégrant par parties, on obtient

$$
\begin{aligned}
f_S(x) &= \frac{2\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}}{2000^2} \left(y\mathrm{e}^{\frac{y}{1000}} \Big|_0^{\min(x;2000)} - \int_0^{\min(x;2000)} \mathrm{e}^{\frac{y}{1000}} \mathrm{d}y \right) \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}}{2000^2} \left(\min(x;2000)\mathrm{e}^{\frac{\min(x;2000)}{1000}} - 1000\mathrm{e}^{\frac{y}{1000}} \Big|_0^{\min(x;2000)} \right) \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}}{2000^2} \left(\min(x;2000)\mathrm{e}^{\frac{\min(x;2000)}{1000}} - 1000 \left(\mathrm{e}^{\frac{\min(x;2000)}{1000}} - 1 \right) \right).
\end{aligned}
$$

(b) On a

$$
\begin{aligned}
F_S(1500) &= \int_0^{1500} \frac{2\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}}{2000^2}\left(x\mathrm{e}^{\frac{x}{1000}} - 1000\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{1000}} - 1\right)\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^{1500} \frac{2}{2000^2}\left(x - 1000 + 1000\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{2000^2}\left(\frac{x^2}{2} - 1000x - 1000^2\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}\right)\Big|_0^{1500} \\
&= 0.20093492,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
F_S(3000) &= \int_0^{2000} \frac{2\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}}{2000^2}\left(x\mathrm{e}^{\frac{x}{1000}} - 1000\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{1000}} - 1\right)\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{2000}^{3000} \frac{2\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}}{2000^2}\left(2000\mathrm{e}^2 - 1000(\mathrm{e}^2 - 1)\right)\mathrm{d}x \\
&\quad \int_0^{2000} \frac{2}{2000^2}\left(x - 1000 + 1000\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \left(2000e^2 - 1000(\mathrm{e}^2 - 1)\right) \times \frac{2}{2000^2}\int_{2000}^{3000} \mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{2000^2}\left(\frac{x^2}{2} - 1000x - 1000^2\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}\right)\Big|_0^{2000} \\
&\quad + \left(2000\mathrm{e}^2 - 1000(\mathrm{e}^2 - 1)\right) \times \frac{2}{2000^2}\left(-1000\mathrm{e}^{\frac{-x}{1000}}\right)\Big|_{2000}^{3000} \\
&= 0.791166741.
\end{aligned}
$$

Code LaTeX : sol-21003.tex

18. (a)

$$
\begin{aligned}
Cov\left(R_1, R_2\right) &= Cov\left(0.005Z_1 + 0.03, 0.2\left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2\right) + 0.06\right) \\
&= Cov\left(0.005Z_1, 0.2\left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2\right)\right) \\
&= (0.005)\,(0.2)\,(\rho)\,Var\left(Z_1\right) \\
&= (0.005)\,(0.2)\,(0.4)\,(1) \\
&= 0.0004
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{A}{P} \\
&= \frac{1100\mathrm{e}^{R_2}}{1000\mathrm{e}^{R_1}} \\
&= (1.1)\exp\left(R_2 - R_1\right) \\
&= (1.1)\exp\left(0.2\left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2\right) + 0.06 - 0.005Z_1 - 0.03\right) \\
&= (1.1)\exp\left(0.2\left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2\right) + 0.03 - 0.005Z_1\right) \\
&= (1.1)\exp\left(0.075Z_1 + 0.183303Z_2 + 0.03\right).
\end{aligned}
$$

Étant donné que Z_1 et Z_2 obéissent à une loi normale standard, on a

$$\exp\left(0.075Z_1 + 0.183303Z_2 + 0.03\right) \sim LN\left(\mu = 0.03, \sigma^2 = \left(0.075^2 + 0.1833^2\right)\right)$$

et par conséquent

$$U \sim LN\left(0.03 + \ln\left(1.1\right), \left(0.075^2 + 0.1833^2\right)\right),$$

soit

$$U \sim LN\left(\mu = 0.125310, \sigma^2 = 0.039225\right).$$

On obtient donc

$$E\left[U\right] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) = 1.15595$$

et

$$Var\left(U\right) = \exp\left(2\mu + \sigma^2\right)\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right) = 0.05345.$$

Remarque : Soit $Y = cX$ où $X \sim LN\left(\mu, \sigma^2\right)$.

$$\begin{aligned}
\Pr(Y &\leq y) = \Pr\left(cX \leq y\right) \\
&= \Pr\left(X \leq \frac{y}{c}\right) \\
&= \Pr\left(\ln X \leq \ln\left(\frac{y}{c}\right)\right) \\
&= \Pr\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln\left(\frac{y}{c}\right) - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{y}{c}\right) - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln\left(y\right) - \left(\mu + \ln\left(c\right)\right)}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

ce qui indique que $Y \sim LN\left(\mu^* = \mu + \ln\left(c\right), \sigma^2\right)$.

(c)

$$\begin{aligned}
\Pr\left(U \leq 1\right) &= \Pr\left(\ln U \leq \ln\left(1\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln\left(1\right) - 0.125310}{\sqrt{0.039225}}\right) \\
&= 0.2635.
\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-12002.tex

19. (a)

$$\begin{aligned}
\Pr\left(S = 4\right) &= \Pr\left(X_1 + X_2 = 4\right) \\
&= \sum_{k=0}^{4} \Pr\left(X_1 = k\right)\Pr\left(X_2 = 4 - k\right) \\
&= \binom{2+0-1}{0}\left(0.5\right)^2\left(0.5\right)^0\frac{2^4\mathrm{e}^{-2}}{4!} + \binom{2+1-1}{1}\left(0.5\right)^2\left(0.5\right)^1\frac{2^3\mathrm{e}^{-2}}{3!} + \binom{2+2-1}{2}\left(0.5\right)^2\left(0.5\right)^2\frac{2^2\mathrm{e}^{-2}}{2!} \\
&+ \binom{2+3-1}{3}\left(0.5\right)^2\left(0.5\right)^3\frac{2^1\mathrm{e}^{-2}}{1!} + \binom{2+4-1}{4}\left(0.5\right)^2\left(0.5\right)^4\frac{2^0\mathrm{e}^{-2}}{0!} \\
&= 0.16285;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X_1 \times 1_{\{S=4\}}\right] &= \sum_{k=0}^{4} k \times 1_{\{S=4\}} \Pr(X_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{4} k \Pr(X_1 = k) \Pr(X_2 = 4-k) \\
&= (0)\binom{2+0-1}{0}(0.5)^2(0.5)^0 \frac{2^4 \mathrm{e}^{-2}}{4!} + (1)\binom{2+1-1}{1}(0.5)^2(0.5)^1 \frac{2^3 \mathrm{e}^{-2}}{3!} \\
&+ (2)\binom{2+2-1}{2}(0.5)^2(0.5)^2 \frac{2^2 \mathrm{e}^{-2}}{2!} + (3)\binom{2+3-1}{3}(0.5)^2(0.5)^3 \frac{2^1 \mathrm{e}^{-2}}{1!} \\
&+ (4)\binom{2+4-1}{4}(0.5)^2(0.5)^4 \frac{2^0 \mathrm{e}^{-2}}{0!} \\
&= 0.29041;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X_1 | S=4] &= \sum_{k=0}^{4} k \Pr(X_1 = k | S = 4) \\
&= \sum_{k=0}^{4} k \frac{\Pr(X_1 = k, S = 4)}{\Pr(S = 4)} \\
&= \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{S=4\}}\right]}{\Pr(S = 4)} \\
&= \frac{0.29041}{0.16285} \\
&= 1.78330.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\Pr(T = 0) &= \Pr(X_1 = 0)\Pr(X_2 = 0) \\
&= 0.03383;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(T = 1000) &= \Pr(X_1 + 2X_2 = 1) \\
&= \Pr(X_1 = 1)\Pr(X_2 = 0) \\
&= 0.03383;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(T = 2000) &= \Pr(X_1 + 2X_2 = 2) \\
&= \Pr(X_1 = 0)\Pr(X_2 = 1) + \Pr(X_1 = 2)\Pr(X_2 = 0) \\
&= 0.09304;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(T = 3000) &= \Pr(X_1 + 2X_2 = 3) \\
&= \Pr(X_1 = 1)\Pr(X_2 = 1) \\
&= 0.08458;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(T = 4000) &= \Pr(X_1 + 2X_2 = 4) \\
&= \Pr(X_1 = 0)\Pr(X_2 = 2) + \Pr(X_1 = 2)\Pr(X_2 = 1) + \Pr(X_1 = 4)\Pr(X_2 = 0) \\
&= 0.12899;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X_1 \times 1_{\{T=4000\}}\right] &= \sum_{k=0}^{4} (k)\, 1_{\{T=4000\}} \Pr(X_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{4} k \Pr(X_1 = k) \Pr(X_2 = 4-k) \\
&= (0) \Pr(X_1 = 0) \Pr(X_2 = 2) + (2) \Pr(X_1 = 2) \Pr(X_2 = 1) + (4) \Pr(X_1 = 4) \Pr(X_2 = 0) \\
&= 0.14379;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X_1 \left| T = 4000\right.\right] &= \sum_{k=0}^{4} k \Pr\left(X_1 = k \left| T = 4000\right.\right) \\
&= \sum_{k=0}^{4} k \frac{\Pr(X_1 = k, T = 4000)}{\Pr(T = 4000)} \\
&= \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{T=4000\}}\right]}{\Pr(T = 4000)} \\
&= \frac{0.14379}{0.12899} \\
&= 1.11474.
\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-12003.tex

20. (a)

$$\begin{aligned}
\Pr(M_1 = k_1) &= \sum_{k_2=1}^{5} \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{5}, & k_1 = 1,2,3,4,5 \\ 0, & sinon \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(M_2 = k_2) &= \sum_{k_1=1}^{5} \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{5}, & k_2 = 1,2,3,4,5 \\ 0, & sinon \end{cases}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
Cov(M_1, M_2) &= E[M_1 M_2] - E[M_1] E[M_2] \\
&= \sum_{k_1=1}^{5} \sum_{k_2=1}^{5} (k_1)(k_2) \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) - E[M_1] E[M_2] \\
&= 0
\end{aligned}$$

M_1et M_2 ne sont pas indépendantes même si $Cov(M_1, M_2) = 0$ car

$$\Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) \neq \Pr(M_1 = k_1) \Pr(M_2 = k_2).$$

Par exemple, $\Pr(M_1 = 1, M_2 = 5) = \frac{1}{5} \neq \Pr(M_1 = 1)\Pr(M_2 = 5)$.

(c)

$$\begin{aligned}
\Pr(S = k) &= \Pr(M_1 + M_2 = k) \\
&= \sum_{k_1=1}^{k} \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k - k_1) \\
&= \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 0 & k = 1 \\ 0 & k = 2 \\ \frac{1}{5} & k = 3 \\ 0 & k = 4 \\ \frac{1}{5} & k = 5 \\ \frac{1}{5} & k = 6 \\ \frac{1}{5} & k = 7 \\ 0 & k = 8 \\ \frac{1}{5} & k = 9 \\ 0 & k = 10 \end{cases}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
F_S(k) &= \sum_{j=0}^{k} \Pr(S = j) \\
&= \begin{cases} 0 & k \leq 2 \\ \frac{1}{5} & 2 < k \leq 4 \\ \frac{2}{5} & 4 < k \leq 5 \\ \frac{3}{5} & 5 < k \leq 6 \\ \frac{4}{5} & 6 < k \leq 8 \\ 1 & 8 < k \leq 9 \end{cases}
\end{aligned}$$

(d) i.

$$\begin{aligned}
F_{X_1}(x_1) &= \lim_{x_2 \to \infty} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\
&= \lim_{x_2 \to \infty} \sum_{k_1=1}^{5} \sum_{k_2=1}^{5} \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) H\left(x_1; k_1, \frac{1}{100}\right) H\left(x_2; k_2, \frac{1}{100}\right) \\
&= \sum_{k_1=1}^{5} \sum_{k_2=1}^{5} \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) H\left(x_1; k_1, \frac{1}{100}\right)(1) \\
&= \sum_{k_1=1}^{5} H\left(x_1; k_1, \frac{1}{100}\right) \sum_{k_2=1}^{5} \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) \\
&= \sum_{k_1=1}^{5} \Pr(M_1 = k_1) H\left(x_1; k_1, \frac{1}{100}\right) \\
&= \frac{1}{5} \sum_{k_1=1}^{5} H\left(x_1; k_1, \frac{1}{100}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{X_2}(x_2) &= \lim_{x_1\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\
&= \lim_{x_1\to\infty} \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5} \Pr(M_1=k_1, M_2=k_2)\, H\left(x_1;k_1,\frac{1}{100}\right) H\left(x_2;k_2,\frac{1}{100}\right) \\
&= \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5} \Pr(M_1=k_1, M_2=k_2)\,(1)\, H\left(x_2;k_2,\frac{1}{100}\right) \\
&= \sum_{k_1=1}^{5} \Pr(M_1=k_1, M_2=k_2) \sum_{k_2=1}^{5} H\left(x_2;k_2,\frac{1}{100}\right) \\
&= \sum_{k_2=1}^{5} \Pr(M_2=k_2)\, H\left(x_2;k_2,\frac{1}{100}\right) \\
&= \frac{1}{5}\sum_{k_2=1}^{5} H\left(x_2;k_2,\frac{1}{100}\right).
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
E[X_1] &= \int_0^\infty x_1 f_{X_1}(x_1)\,\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^\infty (x_1)\left(\frac{1}{5}\right)\sum_{k_1=1}^{5} h\left(x_1;k_1,\frac{1}{100}\right)\mathrm{d}x_1 \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)\sum_{k_1=1}^{5}\int_0^\infty (x_1)\, h\left(x_1;k_1,\frac{1}{100}\right)\mathrm{d}x_1 \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)\sum_{k_1=1}^{5}\frac{k_1}{\frac{1}{100}} \\
&= 20\sum_{k_1=1}^{5} k_1 \\
&= 300;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X_2] &= \int_0^\infty x_2 f_{X_2}(x_2)\,\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^\infty (x_2)\left(\frac{1}{5}\right)\sum_{k_2=1}^{5} h\left(x_2;k_2,\frac{1}{100}\right)\mathrm{d}x_2 \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)\sum_{k_2=1}^{5}\int_0^\infty (x_2)\, h\left(x_2;k_2,\frac{1}{100}\right)\mathrm{d}x_2 \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)\sum_{k_2=1}^{5}\frac{k_2}{\frac{1}{100}} \\
&= 20\sum_{k_2=1}^{5} k_2 \\
&= 300;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X_1X_2\right] &= \int_0^\infty\int_0^\infty \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5}\left(x_1\right)\left(x_2\right)\Pr\left(M_1=k_1,M_2=k_2\right)h\left(x_1;k_1,\frac{1}{100}\right)h\left(x_2;k_2,\frac{1}{100}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\
&= \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5}\Pr\left(M_1=k_1,M_2=k_2\right)\int_0^\infty\int_0^\infty\left(x_1\right)\left(x_2\right)h\left(x_1;k_1,\frac{1}{100}\right)h\left(x_2;k_2,\frac{1}{100}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\
&= \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5}\Pr\left(M_1=k_1,M_2=k_2\right)\int_0^\infty x_1h\left(x_1;k_1,\frac{1}{100}\right)\mathrm{d}x_1\int_0^\infty x_2h\left(x_2;k_2,\frac{1}{100}\right)\mathrm{d}x_2\\
&= \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5}\Pr\left(M_1=k_1,M_2=k_2\right)\left(\frac{k_1}{\frac{1}{100}}\right)\left(\frac{k_2}{\frac{1}{100}}\right)\\
&= \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5}\Pr\left(M_1=k_1,M_2=k_2\right)\left(100k_1\right)\left(100k_2\right)\\
&= \left(100\right)^2E\left[M_1M_2\right]\\
&= \left(100\right)^2\left(\left(1\right)\left(5\right)\frac{1}{5}+\left(2\right)\left(1\right)\frac{1}{5}+\left(3\right)\left(2\right)\frac{1}{5}+\left(4\right)\left(3\right)\frac{1}{5}+\left(5\right)\left(4\right)\frac{1}{5}\right)\\
&= 90000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov\left(X_1,X_2\right) &= E\left[X_1X_2\right]-E\left[X_1\right]E\left[X_2\right]\\
&= 90000-\left(300\right)^2\\
&= 0.
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
M_T(t)=M_{X_1+X_2}\left(t\right) &= E\left[\mathrm{e}^{t\left(X_1+X_2\right)}\right]\\
&= M_{X_1,X_2}\left(t,t\right)\\
&= \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5}\Pr\left(M_1=k_1,M_2=k_2\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{k_1}\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{k_2}\\
&= \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5}\Pr\left(M_1=k_1,M_2=k_2\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{k_1+k_2}\\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^6+\frac{1}{5}\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^5+\frac{1}{5}\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^7+\frac{1}{5}\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^9,
\end{aligned}$$

où $\beta=\frac{1}{100}$. On peut donc conclure

$$\begin{aligned}
F_{X_1+X_2}\left(y\right) &= \frac{1}{5}H\left(y;6,\frac{1}{100}\right)+\frac{1}{5}H\left(y;3,\frac{1}{100}\right)+\frac{1}{5}H\left(y;5,\frac{1}{100}\right)\\
&\quad+\frac{1}{5}H\left(y;7,\frac{1}{100}\right)+\frac{1}{5}H\left(y;9,\frac{1}{100}\right).
\end{aligned}$$

On aurait également pu procéder comme suit pour trouver la distribution de $T = X_1 + X_2$:

$$\begin{aligned}
f_{X_1+X_2}(y) &= \int_0^y f_{X_1,X_2}(x) f_{X_2}(y-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5} \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) \int_0^y h\left(x; k_1, \frac{1}{100}\right) h\left(y-x; k_2, \frac{1}{100}\right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5} \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2)\, h\left(y; k_1+k_2, \frac{1}{100}\right) \\
&= \frac{1}{5}h\left(y; 6, \frac{1}{100}\right) + \frac{1}{5}h\left(y; 3, \frac{1}{100}\right) + \frac{1}{5}h\left(y; 5, \frac{1}{100}\right) + \frac{1}{5}h\left(y; 7, \frac{1}{100}\right) + \frac{1}{5}h\left(y; 9, \frac{1}{100}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_T(1000) &= \int_0^{1000} f_{X_1+X_2}(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{5}\left(\begin{array}{c} H\left(1000; 6, \frac{1}{100}\right) + H\left(1000; 3, \frac{1}{100}\right) + H\left(1000; 5, \frac{1}{100}\right) \\ + H\left(1000; 7, \frac{1}{100}\right) + H\left(1000; 9, \frac{1}{100}\right) \end{array} \right) \\
&= 0.8876
\end{aligned}$$

$$VaR_{0.99}(T) = 1495.47 \text{ (solveur Excel)}$$

Pour (e) et (f) on procède de la mème manière.

Code LaTeX : sol-12004.tex

21. On a

$$\begin{aligned}
E[S] &= E[(X+Y)Z] \\
&= E[XZ + YZ] \\
&= E[XZ] + E[YZ] \\
&\overset{\text{ind}}{=} E[X]E[Z] + E[Y]E[Z] \\
&= 100 \times 1.1 + 200 \times 1.1 \\
&= 330.
\end{aligned}$$

Ensuite, on évalue les deuxièmes moments :

$$\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= Var(X) + E[X]^2 = 300^2 + 100^2 = 100000; \\
E\left[Y^2\right] &= Var(Y) + E[Y]^2 = 500^2 + 200^2 = 290000; \\
E\left[Z^2\right] &= Var(Z) + E[Z]^2 = 1.9 + 1.1^2 = 3.11;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(S) &= Var((X+Y)Z) \\
&= Var(XZ + YZ) \\
&= Cov(XZ + YZ, XZ + YZ) \\
&= Cov(XZ, XZ) + Cov(XZ, YZ) + Cov(YZ, XZ) + Cov(YZ, YZ).
\end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned} Cov(XZ, XZ) &= Var(XZ) \\ &= E\left[(XZ)^2\right] - E[XZ]^2 \\ &\overset{\text{ind}}{=} E[X^2]E[Z^2] - E[X]^2E[Z]^2 \\ &= 100000 \times 3.11 - (100 \times 1.1)^2 \\ &= 298900; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(YZ, YZ) &= Var(YZ) \\ &= E\left[(YZ)^2\right] - E[YZ]^2 \\ &\overset{\text{ind}}{=} E[Y^2]E[Z^2] - E[Y]^2E[Z]^2 \\ &= 290000 \times 3.11 - (200 \times 1.1)^2 \\ &= 853500; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(XZ, YZ) = Cov(YZ, XZ) &= E[XZYZ] - E[XZ]E[YZ] \\ &\overset{\text{ind}}{=} E[X]E[Y]E[Z^2] - E[X]E[Z]^2E[Y] \\ &= 100 \times 200 \times 3.11 - 100 \times 1.1^2 \times 200 \\ &= 38000. \end{aligned}$$

On conclut

$$\begin{aligned} Var(S) &= Cov(XZ, XZ) + Cov(XZ, YZ) + Cov(YZ, XZ) + Cov(YZ, YZ) \\ &= 298900 + 2 \times 38000 + 853500 \\ &= 1228400. \end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-21006.tex

22. On a

$$\begin{aligned} E[R] &= 1 \times 0.5 + 1.3 \times 0.4 + 2 \times 0.1 = 1.22; \\ E\left[R^2\right] &= 1 \times 0.5 + 1.3^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.1 = 1.576; \\ Var(R) &= E\left[R^2\right] - E[R]^2 = 1.576 - 1.22^2 = 0.0876; \\ E[Y] &= \frac{1}{\Gamma(2)} 10000^{1/2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 78.53982. \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} E[X] &= E[RY] \\ &\overset{\text{ind}}{=} E[R]E[Y] \\ &= 1.22 \times 78.53982 \\ &= 95.82; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(X \leq 200) &= E_R\left[\Pr(RY \leq 200)|R\right] \\
&= E_R\left[\Pr\left(Y \leq \frac{200}{R}\right)\middle| R\right] \\
&= E_R\left[F_Y\left(\frac{200}{R}\right)\middle| R\right] \\
&= F_Y\,(200) \times \Pr(R=1) + F_Y\,(153.8462) \times \Pr(R=1.3) + F_Y\,(100) \times \Pr(R=2) \\
&= 0.9600000 \times 0.5 + 0.9117837 \times 0.4 + 0.7500000 \times 0.1 \\
&= 0.9197135;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\max(X-200;0)\right] &= E_R\left[E\left[\max(X-200;0)\right]\middle| R\right] \\
&= E\left[\max(Y \times 1 - 200;0)\right] \times \Pr(R=1) \\
&\quad + E\left[\max(Y \times 1.3 - 200;0)\right] \times \Pr(R=1.3) \\
&\quad + E\left[\max(Y \times 2 - 200;0)\right] \times \Pr(R=2).
\end{aligned}
$$

De plus, on a

$$
\begin{aligned}
E[\max(cY-d;0] &= \int_0^\infty \max(cy-d;0) f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{d}{c}} \max(cy-d;0) f_Y(y)\mathrm{d}y + \int_{\frac{d}{c}}^\infty \max(cy-d;0) f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\frac{d}{c}}^\infty (cy-d;0) f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= c\int_{\frac{d}{c}}^\infty \left(y - \frac{d}{c};0\right) f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= cE\left[\max\left(Y - \frac{d}{c};0\right)\right].
\end{aligned}
$$

On obtient

$$
E\left[\max(X-200;0)\right] = 3.182380 \times 0.5 + 7.763159 \times 0.4 + 28.539816 \times 0.1 = 7.55.
$$

Code LaTeX : sol-21007.tex

23. (a) On a $X_1 = Z_1 \sim N(0,1)$, alors on conclut que $X_1 \sim N(0,1)$. Ensuite, on utilise par la fonction génératrice des moments pour trouver la distribution marginale de X_2. On a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{X_2}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{X_2 t}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{\left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2\right)t}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{\rho Z_1 t + \sqrt{1-\rho^2} Z_2 t}\right] \\
&\overset{\text{ind}}{=} E\left[\mathrm{e}^{\rho Z_1 t}\right] E\left[\mathrm{e}^{\sqrt{1-\rho^2} t Z_2}\right] \\
&= \mathcal{M}_{Z_1}(\rho t) \times \mathcal{M}_{Z_2}\left(\sqrt{1-\rho^2} t\right).
\end{aligned}
$$

Étant donné que $Z_1 \sim Z_2 \sim N(0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{X_2}(t) &= \exp\left(\frac{\rho^2 t^2}{2}\right) \times \exp\left(\frac{\left(1-\rho^2\right) t^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\rho^2 t^2}{2} + \frac{\left(1-\rho^2\right) t^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\rho^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{\rho^2 t^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),
\end{aligned}$$

qui correspond à la fgm d'une distribution normale centrée et réduite. On conclut que $X_2 \sim N(0,1)$.

(b) On a

$$\begin{aligned}
Cov\left(X_1, X_2\right) &= E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] \\
&= E\left[Z_1 \times \left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2\right)\right] - 0 \times 0 \\
&= E\left[Z_1^2 \rho + \sqrt{1-\rho^2} Z_2 Z_1\right] \\
&\overset{\text{ind}}{=} E\left[Z_1^2 \rho\right] + 0 \\
&= \rho,
\end{aligned}$$

car $E\left[Z_1^2\right] = Var(Z_1) + E[Z_1]^2 = Var(Z_1) + 0^2 = Var(Z_1) = 1$ et $E[Z_1 Z_2] = E[Z_1]E[Z_2] = 0 \times 0 = 0$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
E\left[e^{X_1 t_1} e^{X_2 t_2}\right] &= E\left[e^{X_1 t_1 + X_2 t_2}\right] \\
&= E\left[e^{Z_1 t_1 + \rho Z_1 t_2 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2 t_2}\right] \\
&= E\left[e^{(t_1 + \rho t_2) Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} t_2 Z_2}\right] \\
&\overset{\text{ind}}{=} E\left[e^{(t_1 + \rho t_2) Z_1}\right] \times E\left[e^{\sqrt{1-\rho^2} t_2 Z_2}\right] \\
&= \mathcal{M}_{Z_1}\left(t_1 + \rho t_2\right) \times \mathcal{M}_{Z_2}\left(\sqrt{1-\rho^2} t_2\right).
\end{aligned}$$

Étant donné que $Z_1 \sim Z_2 \sim N(0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{X_1, X_2}(t) &= \exp\left(\frac{\left(t_1 + \rho t_2\right)^2}{2}\right) \times \exp\left(\frac{\left(\sqrt{1-\rho^2} t_2\right)^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{t_1^2 + 2\rho t_1 t_2 + \rho^2 t_2^2}{2}\right) \times \exp\left(\frac{t_2^2 - \rho^2 t_2}{2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{t_1^2 + 2\rho t_1 t_2 + \rho^2 t_2^2 - \rho^2 t_2^2 + t_2^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{t_1^2 + 2\rho t_1 t_2 + t_2^2}{2}\right),
\end{aligned}$$

qui correspond à la fonction génératrice des moments d'une distribution normale bivariée avec coéfficient de corrélation égal à ρ.

Code LaTeX : sol-21008.tex

24. On procède en R, voir GitHub sol-21010. On a

x	30	40	50
$F_S(x)$	0.9262879	0.9772543	0.9928069

La fonction *stop-loss* est

$$\begin{aligned}
\pi_S(d) &= \int_d^\infty (x-d) f_S(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_d^\infty x f_S(x)\mathrm{d}x - d\overline{F}_S(d) \\
&= \int_d^\infty x \sum_{k=0}^\infty p_k h\left(x;\alpha+k,\beta\right)\mathrm{d}x - d\overline{F}_S(d) \\
&= \sum_{k=0}^\infty p_k \int_d^\infty x h\left(x;\alpha+k,\beta\right)\mathrm{d}x - d\overline{F}_S(d) \\
&= \sum_{k=0}^\infty p_k \frac{\alpha+k}{\beta}\overline{H}\left(d;\alpha+k+1,\beta\right) - d\overline{F}_S(d).
\end{aligned}$$

On obtient

d	30	40	50
$\pi_S(d)$	0.63221659	0.19929104	0.06452099

Code LaTeX : sol-21010.tex

25. Les exercices se font à la main, mais les calculs ont été effectués en R, voir GitHub sol-21011.R

(a) On a

$$\begin{aligned}
F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = p_{11}&\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10}}\right) \\
&+ p_{12}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_2}{20}}\right) \\
&+ p_{21}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{20}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10}}\right) \\
&+ p_{22}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{20}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_2}{20}}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{X_1}(x) &= F_{X_1,X_2}(x,\infty) \\
&= p_{11}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\right) + p_{12}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\right) \\
&\quad + p_{21}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{20}}\right) + p_{22}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{20}}\right) \\
&= (p_{11}+p_{12})\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\right) + (p_{21}+p_{22})\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{20}}\right) \\
&= (p_{11}+p_{12})F_{Y_1}(x) + (p_{21}+p_{22})F_{Y_2}(x),
\end{aligned}$$

où $Y_1 \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$ et $Y_2 \sim Exp\left(\frac{1}{20}\right)$. De manière similaire pour X_2, on a

$$\begin{aligned}
F_{X_2}(x) &= (p_{11}+p_{21})\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\right) + (p_{12}+p_{22})\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{20}}\right) \\
&= (p_{11}+p_{21})F_{Y_1}(x) + (p_{12}+p_{22})F_{Y_2}(x).
\end{aligned}$$

Hypothèse A :

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x) &= 0.8F_{Y_1}(x) + 0.2F_{Y_2}(x) \\ F_{X_2}(x) &= 0.8F_{Y_1}(x) + 0.2F_{Y_2}(x). \end{aligned}$$

Hypothèse B :

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x) &= 0.8F_{Y_1}(x) + 0.2F_{Y_2}(x) \\ F_{X_2}(x) &= 0.8F_{Y_1}(x) + 0.2F_{Y_2}(x). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1}(20) &= 1 - 0.8\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{20}{10}}\right) - 0.2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{20}{20}}\right) \\ &= 1 - 0.8\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) - 0.2\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \\ &= 0.1818441. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\Pr(X_1 > 20, X_2 > 20) = 1 - F_{X_1}(20) - F_{X_2}(20) + F_{X_1,X_2}(20, 20),$$

où

$$F_{X_1}(20) = F_{X_2}(20) = 1 - 0.1818441 = 0.8181559$$

et

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(20, 20) = p_{11}&\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) \\ &+ (p_{12} + p_{12})\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) \\ &+ p_{22}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\Pr(X_1 > 20 | X_2 > 20) = \frac{Pr(X_1 > 20, X_2 > 20)}{\Pr(X_2 > 20)}.$$

Hypothèse A :

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(20, 20) &= 0.6753275 \\ \Pr(X_1 > 20, X_2 > 20) &= 0.03901573 \\ \Pr(X_1 > 20 | X_2 > 20) &= 0.2145559. \end{aligned}$$

Hypothèse B :

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(20, 20) &= 0.6677567 \\ \Pr(X_1 > 20, X_2 > 20) &= 0.03144498 \\ \Pr(X_1 > 20 | X_2 > 20) &= 0.1729227. \end{aligned}$$

(c) On a

$$
\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p_{ij}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10j}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p_{ij}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10j}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p_{ij}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i}}\right)\frac{1}{10j}\mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10j}}\\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p_{ij}\frac{1}{10i}\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i}}\frac{1}{10j}\mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10j}}\\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{p_{ij}}{100ij}\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i}-\frac{x_2}{10j}}.
\end{aligned}
$$

(d) On a

$$
\begin{aligned}
E[X_1] = E[X_2] &= 0.8\times 10 + 0.2\times 20\\
&= 12;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X_1^2] = E[X_2^2] &= 0.8\times(10^2+10^2) + 0.2\times(20^2+20^2)\\
&= 320;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X_1) = Var(X_2) &= E[X_1^2] - E^2[X_1]\\
&= 176.
\end{aligned}
$$

Ensuite, on a

$$
\begin{aligned}
E[X_1X_2] &= \int_0^\infty\int_0^\infty x_1x_2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_1x_2\frac{p_{ij}}{100ij}\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i}-\frac{x_2}{10j}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{p_{ij}}{100ij}\int_0^\infty\int_0^\infty x_1x_2\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i}-\frac{x_2}{10j}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{p_{ij}}{100ij}(10i)^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10j}}\mathrm{d}x_2\\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{p_{ij}}{100ij}(10i)^2(10j)^2\\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p_{ij}100ij.
\end{aligned}
$$

Hypothèse A :

$$\begin{aligned} E[X_1X_2] &= 155; \\ Cov(X_1, X_2) &= 11; \\ \rho_P(X_1, X_2) &= 0.0625. \end{aligned}$$

Hypothèse B :

$$\begin{aligned} E[X_1X_2] &= 141; \\ Cov(X_1, X_2) &= -3; \\ \rho_P(X_1, X_2) &= -0.01704545. \end{aligned}$$

(e) On a

$$\begin{aligned} E\left[X_1 1_{\{X_2>20\}}\right] &= \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 1_{\{x_2>20\}} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{p_{ij}}{100ij} \mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i} - \frac{x_2}{10j}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{p_{ij}}{100ij} \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 1_{\{x_2>20\}} \mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i} - \frac{x_2}{10j}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} \int_0^\infty \frac{x_1}{10i} \mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i}} \mathrm{d}x_1 \int_0^\infty 1_{\{x_2>20\}} \frac{1}{10j} \mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10j}} \mathrm{d}x_2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} 10i \int_{20}^\infty \frac{1}{10j} \mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10j}} \mathrm{d}x_2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} 10i \mathrm{e}^{-\frac{20}{10j}}. \end{aligned}$$

Hypothèse A :

$$E\left[X_1 1_{\{X_2>20\}}\right] = 9.562072.$$

Hypothèse B :

$$E\left[X_1 1_{\{X_2>20\}}\right] = 9.887634.$$

(f) On a

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[0.8\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\right) + 0.2\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{20}}\right)\right] \\ &= \frac{0.8}{10}\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}} + \frac{0.2}{20}\mathrm{e}^{-\frac{x}{20}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{X_1|X_2=20}(x) &= \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,20)}{f_{X_2}(20)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{p_{ij}}{100ij} \mathrm{e}^{-\frac{x}{10i} - \frac{20}{10j}}}{\frac{0.8}{10}\mathrm{e}^{-\frac{2}{10}} + \frac{0.2}{20}\mathrm{e}^{-\frac{2}{20}}}; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1|X_2=20\right] &= \int_0^\infty x \frac{\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 \frac{p_{ij}}{100ij}\mathrm{e}^{-\frac{x}{10i}-\frac{20}{10j}}}{\frac{0.8}{10}\mathrm{e}^{-\frac{2}{10}}+\frac{0.2}{20}\mathrm{e}^{-\frac{2}{20}}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\frac{0.8}{10}\mathrm{e}^{-\frac{2}{10}}+\frac{0.2}{20}\mathrm{e}^{-\frac{2}{20}}}\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 \frac{p_{ij}}{10j}\mathrm{e}^{-\frac{20}{10j}}\int_0^\infty x\frac{1}{10i}\mathrm{e}^{-\frac{x}{10i}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\frac{0.8}{10}\mathrm{e}^{-\frac{2}{10}}+\frac{0.2}{20}\mathrm{e}^{-\frac{2}{20}}}\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 \frac{p_{ij}}{10j}\mathrm{e}^{-\frac{20}{10j}}10i;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{X_1|X_2>y}(x) &= \int_y^\infty \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\overline{F}_{X_2}(y)}\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_y^\infty \frac{\sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 \frac{p_{ij}}{100ij}\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i}-\frac{x_2}{10j}}}{\overline{F}_{X_2}(y)}\mathrm{d}x_2 \\
&= \sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 p_{ij}\frac{x}{10i}\mathrm{e}^{-\frac{x}{10i}}\int_y^\infty \frac{\frac{1}{10j}\mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10j}}}{\overline{F}_{X_2}(y)}\mathrm{d}x_2 \\
&= \sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 p_{ij}\frac{x}{10i}\mathrm{e}^{-\frac{x}{10i}}\frac{\overline{F}_{X_2}(y)}{\overline{F}_{X_2}(y)} \\
&= \sum_{i=1}^2\sum_{j=1}^2 p_{ij}\frac{x}{10i}\mathrm{e}^{-\frac{x}{10i}} \\
&= f_{X_1}(x).
\end{aligned}
$$

Hypothèse A :

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1|X_2=20\right] &= 9.562072; \\
E\left[X_1|X_2>20\right] &= E[X_1] = 12.
\end{aligned}
$$

Hypothèse B :

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1|X_2=20\right] &= 9.887634; \\
E\left[X_1|X_2>20\right] &= E[X_1] = 12.
\end{aligned}
$$

(g) On a

$$
\begin{aligned}
E[S] &= E[X_1+X_2] \\
&= E[X_1]+E[X_2] \\
&= 12+12 \\
&= 24.
\end{aligned}
$$

Hypothèse A :

$$
\begin{aligned}
Var(S) &= Var(X_1+X_2) \\
&= Var(X_1)+Var(X_2)+2Cov(X_1,X_2) \\
&= 176+176+2\times 11 \\
&= 374.
\end{aligned}
$$

Hypothèse B :

$$\begin{aligned}
Var(S) &= Var(X_1 + X_2) \\
&= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\
&= 176 + 176 - 2 \times 3 \\
&= 346.
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
f_S(x) &= \int_0^x f_{X_1,X_2}(y, x-y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^x \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{p_{ij}}{100ij} \mathrm{e}^{-\frac{y}{10i}-\frac{y-x}{10j}}\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{p_{ij}}{100ij} \mathrm{e}^{\frac{x}{10j}} \int_0^x \mathrm{e}^{-y\frac{i+j}{10ij}}\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{p_{ij}}{100ij} \mathrm{e}^{\frac{x}{10j}} \frac{10ij}{i+j}\left(1-\mathrm{e}^{-x\frac{i+j}{10ij}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{p_{ij}}{10(i+j)} \mathrm{e}^{\frac{x}{10j}} \left(1-\mathrm{e}^{-x\frac{i+j}{10ij}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{p_{ij}}{10(i+j)} \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{10j}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10i}}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= \int_0^x f_S(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^x \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{p_{ij}}{10(i+j)} \left(\mathrm{e}^{\frac{y}{10j}} - \mathrm{e}^{-\frac{y}{10i}}\right)\mathrm{d}y \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{p_{ij}}{10(i+j)} \int_0^x \left(\mathrm{e}^{\frac{y}{10j}} - \mathrm{e}^{-\frac{y}{10i}}\right)\mathrm{d}y \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{p_{ij}}{10(i+j)} \left[10i\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{10i}}-1\right) - 10j\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{10j}}-1\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{p_{ij}}{i+j} \left[i\mathrm{e}^{\frac{x}{10i}} - i - j\mathrm{e}^{-\frac{x}{10j}} + j\right].
\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-21011.tex

26. (a) On calcule

$$\begin{aligned}
\Pr(S=4) &= \sum_{j=0}^{4} P(X_1=j, X_2=4-j) \\
&= \Pr(X_1=0)\times\Pr(X_2=4)+\Pr(X_1=1)\times\Pr(X_2=3)+\Pr(X_1=2)\times\Pr(X_2=2) \\
&\quad +\Pr(X_1=3)\times\Pr(X_2=1)+\Pr(X_1=4)\times\Pr(X_2=0) \\
&= 0.25\times 0.09022352+0.25\times 0.18044704+0.1875\times 0.27067057+0.125\times 0.27067057 \\
&\quad +0.078125\times 0.13533528 \\
&= 0.1628253;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X_1\times 1_{\{S=4\}}\right] &= 0\times\Pr(X_1=0, X_2=4)+1\times\Pr(X_1=1, X_2=3)+2\times\Pr(X_1=2, X_2=2) \\
&\quad +3\times\Pr(X_1=3, X_2=1)+4\times\Pr(X_1=4, X_2=0) \\
&= 0.290407;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X_1|S=4\right] &= \frac{E\left[X_1\times 1_{\{S=4\}}\right]}{\Pr(S=4)} \\
&= \frac{0.29407}{0.1628253} \\
&= 1.78355.
\end{aligned}$$

(b) On obtient

$$\Pr(T=0)=\Pr(X_1=0, X_2=0)=0.25\times 0.13533528=0.033833821;$$

$$\Pr(T=1000)=\Pr(X_1=1, X_2=0)=0.25\times 0.13533528=0.033833821;$$

$$\begin{aligned}
\Pr(T=2000) &= \Pr(X_1=0, X_2=1)+\Pr(X_1=2, X_2=0) \\
&= 0.25\times 0.27067057+0.1875\times 0.13533528 \\
&= 0.09304301;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(T=3000) &= \Pr(X_1=1, X_2=1)+\Pr(X_1=3, X_2=0) \\
&= 0.25\times 0.27067057+0.125\times 0.13533528 \\
&= 0.08458455;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(T=4000) &= \Pr(X_1=0, X_2=2)+\Pr(X_1=2, X_2=1)+\Pr(X_1=4, X_2=0) \\
&= 0.25\times 0.27067057+0.1875\times 0.27067057+0.078125\times 0.13533528 \\
&= 0.12899144;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X_1\times 1_{\{T=4000\}}\right] &= 0\times\Pr(X_1=0, X_2=2)+2\times\Pr(X_1=2, X_2=1)+4\times\Pr(X_1=4, X_2=0) \\
&= 0.1437937;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X_1|T=4000\right] &= \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{T=4000\}}\right]}{\Pr(T=4000)} \\
&= \frac{0.1437937}{0.12899144} \\
&= 1.114754.
\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-20015.tex

1.2 Exercices informatiques

1. Aucune pour le moment

Chapitre 2

Méthodes Monte-Carlo

2.1 Exercices traditionnels

1. Des fonctions de masse de probabilité fournies, on déduit que $\Pr(M = 0) = 0.3$.
   La fonction cumulative de M est

k	0	1	5	10	50
$\Pr(M \leqslant k)$	0.3	0.55	0.75	0.9	1

   Les valeurs de M sont donc
   $$M^{(1)} = 1, M^{(2)} = 5, M^{(3)} = 5$$

2. Pour $M \sim Geo(\theta)$, l'espérance de M est donnée par $\frac{1-\theta}{\theta}$. Ainsi, on a
   $$10 = \frac{1-\theta}{\theta}$$
   $$\Rightarrow \theta = \frac{1}{11}$$

   Les valeurs de la fonction cumulative sont

k	$\Pr(M \leqslant k)$
0	0.09090909
1	0.17355372
2	0.24868520
3	0.31698654
4	0.37907868
5	0.43552607
6	0.48684188
7	0.53349262
8	0.57590238
9	0.61445671
10	0.64950610
11	0.68136918
12	0.71033562
13	0.73666875
14	0.76060795

   Les valeurs de M sont donc
   $$M^{(1)} = 4, M^{(2)} = 14, M^{(3)} = 10$$

3. Pour $M \sim Poisson(s)$, les valeurs de la fonction cumulative sont,

k	$\Pr(M \leqslant k)$
0	0.1353353
1	0.4060058
2	0.6766764
3	0.8571235
4	0.9473470
5	0.9834364

   Les valeurs de M sont donc
$$M^{(1)} = 1, M^{(2)} = 3, M^{(3)} = 2.$$

4. Pour $M \sim Binomiale(n, p)$, les valeurs des paramètres n et p sont $n = 6$ et $p = 1/3$.
   Les valeurs de la fonction cumulative sont

k	$\Pr(M \leqslant k)$
0	0.0877915
1	0.3511660
2	0.6803841
3	0.8998628
4	0.9821674
5	0.9986283

   Les valeurs de M sont donc
$$M^{(1)} = 1, M^{(2)} = 3, M^{(3)} = 2.$$

5. Pour $M \sim LogNormale(\mu, \sigma)$, les valeurs des paramètres μ et σ sont

$$250 = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}};$$
$$80000 = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

   Avec de l'algèbre (ou R), on trouve que $\mu = 5.109373196$ et $\sigma^2 = 0.824175443$.
   À l'aide de R, les valeurs de M sont

$$M^{(1)} = 109.5417, M^{(2)} = 298.7090, M^{(3)} = 219.3797.$$

6. Pour $X \sim LogNormale(\mu, \sigma)$, les valeurs des paramètres μ et σ^2 sont $\mu = 2$ et $\sigma^2 = 9$.
   Il faut d'abord inverser la fonction cumulative de X. On a,

$$u = \Phi\left(\frac{ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$$
$$\rightarrow x = e^{\sigma \times \Phi^{-1}(u) + \mu}$$

   On obtient donc
$$X^{(1)} = e^{3 \times 0.7721932 + 2} = 74.4405$$
   et
$$X^{(2)} = e^{3 \times -0.7063026 + 2} = 0.8781.$$

7. Il faut d'abord inverse la fonction cumulative de X. On a,

$$
\begin{aligned}
u &= \left(1 - e^{-x/10}\right)^{0.5} \\
&\rightarrow 1 - u^{1/0.5} = e^{-x/10} \\
&\rightarrow -10 \times \ln\left(1 - u^{1/0.5}\right) = x
\end{aligned}
$$

On obtient donc

$$X^{(1)} = 9.3751437$$

et

$$X^{(2)} = 0.593254$$

8. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité sont,

k	$\Pr(N = k)$
0	$\frac{121}{\beta}$
1	$\frac{100}{\beta}$
5	$\frac{36}{\beta}$
10	$\frac{1}{\beta}$

Puisque la somme des probabilités doit être 1, on déduit que $\beta = \frac{1}{258}$. Les valeurs de la fonction cumulative sont

k	$\Pr(N \leqslant k)$
0	$\frac{121}{258}$
1	$\frac{221}{258}$
5	$\frac{257}{258}$
10	$\frac{258}{258}$

Les valeurs de N sont

$$
\begin{aligned}
N^{(1)} &= 1; \\
N^{(2)} &= 0; \\
N^{(3)} &= 1; \\
N^{(4)} &= 10; \\
N^{(5)} &= 5.
\end{aligned}
$$

9. Il faut d'abord inverse la fonction cumulative de X. Il est important de noter que pour des quantiles inférieurs à $\Pr(I = 0) = 0.8$, la valeur de la fonction de répartition de X est 0. On obtient

$$
\begin{aligned}
u &= \Pr(I = 0) + \Pr(I = 1)\left(1 - e^{-\beta x}\right) \\
&\rightarrow 1 - \frac{1 - 0.8}{0.2} = e^{\frac{-x}{10}} \\
&\rightarrow -10 \times \ln\left(1 - \frac{u - 0.8}{0.2}\right) = x, \text{ pour } x \geqslant 0.8.
\end{aligned}
$$

On obtient donc

$$
\begin{aligned}
X^{(1)} &= 0; \\
X^{(2)} &= 23.02585; \\
X^{(3)} &= 0.
\end{aligned}
$$

10. Pour $N \sim Geom(p)$, l'espérance est donnée par

$$E(N) = \frac{1-p}{p}.$$

On a

$$4 = \frac{1-p}{p}$$
$$\to p = 1/5.$$

Les valeurs de la fonction de répartition sont

k	$\Pr(N \leqslant k)$
0	0.2000000
1	0.3600000
2	0.4880000
3	0.5904000
4	0.6723200
5	0.7378560
6	0.7902848
7	0.8322278
8	0.8657823
9	0.8926258
10	0.9141007
11	0.9312805
12	0.9450244
13	0.9560195
14	0.9648156
15	0.9718525
16	0.9774820
17	0.9819856
18	0.9855885

On trouve ainsi les valeurs

$$N^{(1)} = 1$$
$$N^{(2)} = 17$$
$$N^{(3)} = 3.$$

11. Pour $M \sim Pois(1)$ les valeurs de la fonction de répartition sont

k	$\Pr(M \leqslant k)$
0	0.3678794
1	0.7357589
2	0.9196986
3	0.9810118
4	0.9963402

On trouve ainsi les valeurs

$$M^{(1)} = 0$$
$$M^{(2)} = 3$$
$$M^{(3)} = 1.$$

12. (a) Pour $M \sim BN(1, q)$, l'espérance est donnée par

$$E(M) = \frac{(1-q)}{q}.$$

On obtient

$$2 = \frac{1-p}{p}$$
$$\rightarrow p = 1/3.$$

Les valeurs de la fonction de répartition $pour M \sim BN(1, q)$ sont

k	$\Pr(M \leqslant k)$
0	0.3333333
1	0.5555556
2	0.7037037
3	0.8024691
4	0.8683128

On trouve ainsi les valeurs

$$M^{(1)} = 0;$$
$$M^{(2)} = 3;$$
$$M^{(3)} = 2.$$

(b) Pour $M \sim Pois(\lambda)$, l'espérance est donnée par

$$E(M) = \lambda$$

Les valeurs de la fonction de répartition pour $M \sim Pois(2)$ sont

k	$\Pr(M \leqslant k)$
0	0.1353353
1	0.4060058
2	0.6766764
3	0.8571235
4	0.9473470

On trouve ainsi les valeurs

$$M^{(1)} = 1$$
$$M^{(2)} = 3$$
$$M^{(3)} = 2.$$

(c) On a

$$2 = nq \text{ et } \frac{4}{3} = nq(1-q).$$

On trouve que $n = 6$ et $q = \frac{1}{3}$. Les valeurs de la fonction de répartition de $M \sim Bin\left(6, \frac{1}{3}\right)$ sont

k	$\Pr(M \leqslant k)$
0	0.0877915
1	0.3511660
2	0.6803841
3	0.8998628
4	0.9821674

On trouve ainsi les valeurs

$$M^{(1)} = 1$$
$$M^{(2)} = 3$$
$$M^{(3)} = 2.$$

13. (a) Pour $B \sim LogNormale(\mu, \sigma)$, on a

$$250 = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

et

$$80000 = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

On trouve que $\mu = 5.109373196$ et $\sigma^2 = 0.824175443$. Il faut d'ensuite inverser la fonction cumulative de B. On a,

$$u = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$$
$$\to x = e^{\sigma \times \Phi^{-1}(u) + \mu}.$$

On obtient donc

$$B^{(1)} = e^{\sigma \times (-0.4537622) + \mu} = 109.66488;$$
$$B^{(2)} = e^{\sigma \times 0.652622 + \mu} = 299.4208962;$$
$$B^{(3)} = e^{\sigma \times 0.3107377 + \mu} = 219.5259507.$$

(b) Pour $B \sim Pareto(\alpha, \lambda)$, on a

$$250 = \frac{\lambda}{\alpha - 1}$$

et

$$80000 = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}.$$

On calcule $\alpha = 9.142857$ et $\lambda = 2035.714$.
Il faut ensuite inverser la fonction cumulative de B. On a

$$u = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha}$$
$$\to x = \lambda\left((1 - u)^{\frac{-1}{\alpha}} - 1\right).$$

On obtient

$$B^{(1)} = 89.42168;$$
$$B^{(2)} = 326.15241;$$
$$B^{(3)} = 228.55801.$$

14. (a) D'abord, on a $F_{X_1}(y) = F_{Y_1}\left(\frac{y}{100}\right)$ et $F_{X_2}(y) = F_{Y_2}\left(\frac{y}{100}\right)$.

Pour Y_1, puisque $\beta = 1$, on a
$$F_{Y_1}^{-1}(u) = u^{\frac{1}{\alpha}}.$$

La première réalisation de X_1 est
$$100 \times 0.07^{\frac{1}{1.5}} = 16.98499252.$$

Les quatres autres réalisations de X_1 sont
$$X_1^{(2)} = 26.96199$$
$$X_1^{(3)} = 13.57209$$
$$X_1^{(4)} = 95.95889$$
$$X_1^{(5)} = 86.89404.$$

Pour Y_2, puisque $\alpha = 1$, on a
$$F_{Y_2}^{-2}(u) = 1 - (1-u)^{\frac{1}{\beta}}.$$
Les cinq réalisations de X_2 sont
$$X_2^{(1)} = 31.11227$$
$$X_2^{(2)} = 98.88197$$
$$X_2^{(3)} = 97.30000$$
$$X_2^{(4)} = 56.96594$$
$$X_2^{(5)} = 90.37659.$$

Les cinq réalisations de S sont
$$S^{(1)} = 48.09726$$
$$S^{(2)} = 125.84396$$
$$S^{(3)} = 110.87209$$
$$S^{(4)} = 152.92484$$
$$S^{(5)} = 177.27064.$$

(b) De façon générale, on a
$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{m}\sum_{j=jo+1}^{m} S^{[j]}$$
où $jo = \kappa m$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.6}(X_1) &= \frac{1}{1-0.6}\frac{1}{5}\sum_{j=4}^{5} X_1^{[j]} \\
&= \frac{1}{2}X_1^{[4]} + X_1^{[5]} \\
&= \frac{86.89404 + 95.95889}{2} \\
&= 91.426465; \\
TVaR_{0.6}(X_2) &= \frac{1}{1-0.6}\frac{1}{5}\sum_{j=4}^{5} X_2^{[j]} \\
&= \frac{1}{2}X_2^{[4]} + X_2^{[5]} \\
&= \frac{97.30000 + 98.88197}{2} \\
&= 98.090985; \\
TVaR_{0.6}(S) &= \frac{1}{1-0.6}\frac{1}{5}\sum_{j=4}^{5} S^{[j]} \\
&= \frac{1}{2}S^{[4]} + S^{[5]} \\
&= \frac{152.92484 + 177.27064}{2} \\
&= 165.09774.
\end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
\underset{j_1,j_2\in 1,2,\ldots,5, j_1\neq j_2}{sup}\left(\frac{X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)}}{2}\right) &= 91.426465; \\
\underset{j_1,j_2\in 1,2,\ldots,5, j_1\neq j_2}{sup}\left(\frac{X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)}}{2}\right) &= 98.090985; \\
\underset{j_1,j_2\in 1,2,\ldots,5, j_1\neq j_2}{sup}\left(\frac{S^{(j_1)} + S^{(j_2)}}{2}\right) &= 165.09774.
\end{aligned}$$

(d) Les valeurs sont les mêmes.

(e) On a

$$TVaR_{0.6}(S) \leqslant TVaR_{0.6}(X_1) + TVaR_{\kappa}(X_2)$$
$$\rightarrow 165.09774 < 98.090985 + 91.426465,$$

Ce qui démontre la propriété de sous-additivité de la $TVaR$.

2.2 Exercices informatiques

1. (a) Pour $B \sim LogNormale(\mu, \sigma)$, on a

$$250 = e^{\mu + frac\sigma^2 2}$$

et

$$80000 = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

On trouve que $\mu = 5.109373196$ et $\sigma^2 = 0.824175443$.
Il faut d'abord inverser la fonction cumulative de B. On a

$$u = \Phi\left(\frac{ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$$
$$\rightarrow x = e^{\sigma\times\Phi^{-1}(u)+\mu}$$

On obtient donc

$$B^{(1)} = e^{\sigma\times(-0.4537622)+\mu} = 109.66488$$
$$B^{(2)} = e^{\sigma\times 0.652622+\mu} = 299.4208962$$
$$B^{(3)} = e^{\sigma\times 0.3107377+\mu} = 219.5259507.$$

(b) Pour $B \sim Pareto(\alpha, \lambda)$, on a

$$250 = \frac{\lambda}{\alpha - 1}$$

et

$$80000 = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

On trouve que $\alpha = 9.142857$ et $\lambda = 2035.714$
Il faut d'abord inverser la fonction cumulative de B. On a,

$$u = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha}$$
$$\rightarrow x = \lambda\left((1-u)^{\frac{-1}{\alpha}} - 1\right)$$

On obtient donc

$$B^{(1)} = 89.42168$$
$$B^{(2)} = 326.15241$$
$$B^{(3)} = 228.55801.$$

2. (a) On procède par la méthode inverse

$$X_1^{(i)} = F_{X_1}^{-1}\left(U_1^{(j)}\right) = \texttt{qgamma}(U_1^{(j)}, \alpha, \beta)$$

et

$$X_2^{(i)} = F_{X_2}^{-1}\left(U_2^{(j)}\right) = \texttt{qgamma}(U_2^{(i)}, \mu, \sigma)$$

On obtient

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$
3	1.786501	1.842251
4	15.676749	1.115983

(b) Avec

$$S^{(i)} = X_1^{(i)} + X_2^{(i)},$$

on obtient

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
3	1.786501	1.842251	3.628752
4	15.676749	1.115983	16.792732

Plus petite : 1.101327
Plus grande : 204.6863

(c) Les calculs sont effectués avec les m réalisations de $S^{(j)}$

i. Soit l'approximation $\widetilde{\theta}_0^{(m)}$ de $\theta_0 = E[S]$. Écrire l'expression de $\widetilde{\theta}_0^{(m)}$. Calculer la valeur de $\widetilde{\theta}_0^{(m)}$.

$$\widetilde{\theta}_0^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} S^{(j)}$$

Réponse : 19.95989

ii. Soit l'approximation $\widetilde{\theta}_1^{(m)}(x)$ de $\theta_1(x) = F_S(x)$. Écrire l'expression de $\widetilde{\theta}_1^{(m)}(x)$. Calculer les valeurs de $\widetilde{\theta}_1^{(m)}(x)$, pour $x = 20, 100$. (Pour vérification : $\widetilde{\theta}_1^{(m)}(60) = 0.98983$)
On utise l'expression suivante :

$$F_S(x) \simeq \widetilde{\theta}_1^{(m)}(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} 1\left\{S^{(j)} \leq x\right\}$$

On obtient les valeurs suivantes :

x	$\widetilde{\theta}_1^{(m)}(x)$
20	0.59822
100	0.99906

iii. Soit l'approximation $\widetilde{\theta}_2^{(m)}(x)$ de $\theta_2(x) = E[\max(S - x; 0)]$. Écrire l'expression de $\widetilde{\theta}_2^{(m)}(x)$. Calculer les valeurs de $\widetilde{\theta}_2^{(m)}(x)$, pour $x = 20, 100$. (Pour vérification : $\widetilde{\theta}_2^{(m)}(60) = 0.1551939$).
On utise l'expression suivante :

$$E[\max(S-d;0)] \simeq \widetilde{\theta}_2^{(m)}(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \max\left(S^{(j)} - x; 0\right)$$

On obtient les valeurs suivantes :

x	$\widetilde{\theta}_2^{(m)}(x)$
20	4.2581
100	0.01844818

Note : On peut utiliser le code R "`Simulation_Monte-Carlo_Somme_2_va_indep_2019-02-15.R`" pour effectuer les calculs. Le code a été rédigé en classe le vendredi 2019-02-16 et il est disponible sur le site du cours.

3. (a) La v.a. X est continue et positive, ce qui implique que l'expression de la TLS de X devient

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

pour tout $t > 0$.
Or, pour tout $t > 0$, on a

$$\mathrm{e}^{-tx} \leq 1$$

pour $x \geq 0$.
Alors, on déduit

$$\mathcal{L}_X(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx} f_X(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty (1)\, f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

pour $t > 0$. Bien que l'on ne connait pas la solution fermée de l'intégrale, on sait qu'elle existe, puisqu'elle est bornée par 1. En fait, on sait que

$$\mathcal{L}_X(t) \in [0, 1]$$

pour toute v.a. positive X et pour tout $t \geq 0$.

(b) On obtient les valeurs suivantes :

j	$U^{(j)}$	$X^{(j)}$
3	0.303360	2.333567
4	0.618236	7.048215

(c) L'expression de l'approximation $\widetilde{\theta}^{(m)}(\delta)$ de $\theta(\delta)$ est

$$\widetilde{\theta}^{(m)}(\delta) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{e}^{-\delta X^{(j)}}.$$

On obtient

$$\widetilde{\theta}^{(m)}(0.05) = 0.711806.$$

Chapitre 3

Mesures de risque et mutualisation des risques

3.1 Exercices traditionnels

1. (a) On a

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} x_i \Pr(X = x_i) = 415;$$

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= \sum_{i=1}^{6} x_i^2 \Pr(X = x_i) \\ &= 100^2 \times 0.3 + 500^2 \times 0.1 + 1000^2 \times 0.05 + 5000^2 \times 0.043 + 10000^2 \times 0.007 \\ &= 1853000; \end{aligned}$$

$$Var(X) = 1853000 - 415^2 = 1680775.$$

(b) On doit calculer les valeurs de $F_X(x_i)$ et on déduit les valerus désirées

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	100	500	1000	5000	10000
$\Pr(X = x_i)$	0.5	0.3	0.1	0.05	0.043	0.007
$\Pr(X \leq x_i)$	0.5	0.8	0.9	0.95	0.993	1

(c) On a

$$TVaR_{0.40}(X) = \frac{1}{1-0.4} 415 =: 691.666666667;$$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.95}(X) &= \frac{1}{1-0.95}(5000 \times 0.043 + 10000 \times 0.007 + 1000 \times (0.95 - 0.95)) \\ &= 5700.0; \end{aligned}$$

$$TVaR_{0.995}(X) = \frac{1}{1-0.995} 10000 (1 - 0.995) = 10000.$$

(d) On a

$$\begin{aligned} E\left[\max\left(X-3000;0\right)\right] &= \sum_{i=1}^{6}\max\left(x_i-3000;0\right)\Pr\left(X=x_i\right) \\ &= 2000\times 0.043+7000\times 0.007 \\ &= 135; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[\min\left(X;7000\right)\right] &= \sum_{i=1}^{6}\max\left(x_i-3000;0\right)\Pr\left(X=x_i\right) \\ &= 100\times 0.3+500\times 0.1+1000\times 0.05+5000\times 0.043+7000\times 0.007 \\ &= 394. \end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-11001.tex

2. Voir annexe.
   Code LaTeX : sol-11002.tex
3. On sait que

$$VaR_{0.995}\left(X\right)=-\frac{1}{\beta}\ln\left(0.005\right)=2000,$$

ce qui implique

$$\beta=\frac{-\ln\left(0.005\right)}{2000}=2.64915868327\times 10^{-3}.$$

On déduit (voir annexes)

$$TVaR_{0.995}\left(X\right)=VaR_{0.995}\left(X\right)+E\left[X\right]=2000+\frac{2000}{-\ln\left(0.005\right)}=2377.47833164.$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} VaR_{0.995}\left(Y\right) &= 2VaR_{0.995}\left(-X\right)+500 \\ &= -2VaR_{0.005}\left(X\right)+500=... \\ TVaR_{0.995} &= 2TVaR_{0.995}\left(-X\right)+500 \\ &= 2\times\left(\frac{-1}{1-0.995}\left(E\left[X\right]-0.995\times TVaR_{1-0.995}\left(X\right)\right)\right)+500 \\ &= ... \end{aligned}$$

4. Pour chaque question, on isole les 2 paramètres des lois à partir d'un système de 2 équations avec 2 inconnues. On calcule les valeurs de VaR et $TVaR$ à partir des expressions fournies en annexe.

(a) Pour la loi gamma, on a

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} &= 2000 \\ \frac{\alpha}{\beta^2} &= 84000000. \end{aligned}$$

On déduit analytiquement $\alpha=\frac{1}{21}$ et $\beta=\frac{1}{42000}$.

(b) On a

$$\begin{aligned} e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} &= 2000 \\ e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) &= 84000000. \end{aligned}$$

Les réponses sont déduites analytiquement en divisant $Var(X)$ par $E[X]^2$. On a

$$\frac{Var(X)}{E[X]^2} = \frac{84000000}{2000^2} = 21 = \left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

Alors, on a

$$\sigma^2 = \ln(21+1) = 3.09104245336.$$

Puis, on obtient

$$\mu = \ln(2000) - \frac{3.09104245336}{2} = 6.05538123286.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} VaR_{0.995}(X) &= e^{6.05538123286+\sqrt{3.09104245336}\Phi^{-1}(0.995)} \\ &= e^{6.05538123286+2.575829\times\sqrt{3.09104245336}} \\ &= 39499.3350762 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} TVaR_{0.995}(X) &= \frac{1}{1-0.995}\exp(\mu+\sigma^2/2)(1-\Phi(VaR_{0.995}(Z)-\sigma)) \\ &= \frac{1}{1-0.995}2000\times\left(1-\Phi\left(2.575829-\sqrt{3.09104245336}\right)\right) \\ &= \frac{1}{1-0.995}2000\times(1-\Phi(0.817692926381)) \\ &= \frac{1}{1-0.995}2000\times(1-0.7932337) \\ &= 82706.52. \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu = 2000 \\ Var(X) &= \mu\beta = 84000000 \end{aligned}$$

Les réponses sont déduites analytiquement.

(d) On a

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{\lambda}{\alpha-1} = 2000 \\ Var(X) &= \left(\frac{\alpha}{\lambda-1}\right)^2\frac{\alpha}{\alpha-2} = 84000000 \end{aligned}$$

Les réponses sont déduites analytiquement en divisant $Var(X)$ par $E[X]^2$. On isole α. Puis, on a $\lambda = 2000\times(\alpha-1)$.

(e) On a

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{2\times\lambda}{\alpha-1} = 2000; \\ Var(X) &= \frac{\lambda^2 2(2-\alpha+1)}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = 84000000. \end{aligned}$$

Les réponses sont déduites analytiquement en divisant $Var(X)$ par $E[X]^2$. On isole α. Puis, on a $\lambda = \frac{2000}{2}\times(\alpha-1)$.

5. — $VaR_{0.995}(X)$: On a

$$\begin{aligned} VaR_{0.995}(Y) &= 200000 \times VaR_{0.995}(X) \\ &= 200000 \times (0.995)^{\frac{1}{2}} \\ &= 199499.373433 \end{aligned}$$

— $TVaR_{0.995}(X)$: On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.995}(Y) &= 200000 \times TVaR_{0.995}(X) \\ &= 200000 \times \frac{1}{(1-0.995)} \frac{2}{(2+1)} (1 - 0.995^{(2+1)/2}) \\ &= 199749.791275 \end{aligned}$$

6. On a

$$F_X(x) = \frac{4}{5}\left(1 - e^{-\frac{x}{1000}}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - e^{-\frac{x}{6000}}\right)$$

qui correspond à la fonction de répartition d'un mélange de 2 distributions exponentielles.

On déduit que

$$f_X(x) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6000} e^{-\frac{x}{6000}}\right),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{4}{5}1000 + \frac{1}{5}6000 \\ E\left[X^2\right] &= \frac{4}{5}2 \times 1000^2 + \frac{1}{5}2 \times 6000^2 \end{aligned}$$

— Espérance : On a

$$E[X] = \frac{4}{5}1000 + \frac{1}{5}6000 = 2000$$

— 2emoment : On a

$$E\left[X^2\right] = \frac{4}{5}2 \times 1000^2 + \frac{1}{5}2 \times 6000^2 =: 16000000.0$$

— Variance : On a

$$Var(X) = 16000000 - 2000^2 = 12000000.$$

— $VaR_{0.995}(X)$: On calcule la valeur de $VaR_{0.995}(X)$ sur un ordinateur avec un outil d'optimisation. en e.g. EXCEL et R Pour des fins de vérification, on obtient

$$1 - \left(\frac{4}{5} e^{-\frac{22133.28}{1000}} + \frac{1}{5} e^{-\frac{22133.28}{6000}}\right) =: 0.995\,000\,002\,534$$

— $TVaR_{0.995}(X)$: On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.995}(X) &= \frac{1}{1-0.995} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_{0.995}(X)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-0.995}\left(\frac{4}{5}\left(1000 e^{-\frac{22133.28}{1000}} + 22133.28 e^{-\frac{22133.28}{1000}}\right) + \frac{1}{5}\left(6000 e^{-\frac{22133.28}{6000}} + 22133.28 e^{-\frac{22133.28}{6000}}\right)\right) \\ &= 28133.2655461 \end{aligned}$$

— $E\left[\max\left(X-10000;0\right)\right]$: On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.995}\left(X\right) &= \left(\frac{4}{5}1000e^{-\frac{10000}{1000}}+\frac{1}{5}6000e^{-\frac{10000}{6000}}\right) \\ &= 226.687043349 \end{aligned}$$

7. (a) Une mesure de risque satisfait la propriété d'invariance à la translation si

$$\rho(X+a)=\rho(X)+a.$$

Pour la mesure de risque $\rho_1(X)$, on a

$$\begin{aligned} \rho_1(X+a) &= \sqrt{Var\left(X+a\right)} \\ &= \sqrt{Cov(X+a,X+a)} \\ &= \sqrt{Cov(X,X)+Cov(X,a)+Cov(a,X)+Cov(a,a)} \\ &= \sqrt{Var(X)+0+0+0} \\ &= \rho_1(X) \\ &\neq \rho_1(X)+a, \end{aligned}$$

et on conclut que $\rho_1(X)$ n'est pas invariante à la translation.
Pour la mesure de risque $\rho_2(X)$, on a

$$\begin{aligned} \rho_2(X+a) &= \frac{1}{\eta}\ln\left(E\left[e^{\eta X+\eta a}\right]\right) \\ &= \frac{1}{\eta}\ln\left(E\left[e^{\eta X}\right]e^{\eta a}\right) \\ &= \frac{1}{\eta}\left(\ln E\left[e^{\eta X}\right]+\eta a\right) \\ &= \frac{1}{\eta}\left(\ln E\left[e^{\eta X}\right]\right)+a \\ &= \rho_2(X)+a, \end{aligned}$$

et on conclut que c'est la mesure de risque $\rho_2(X)$ qui est invariante à la translation.

(b) Une mesure de risque est homogène si $\rho(aX)=a\rho(X)$. Pour la mesure de risque $\rho_1(X)$, on a

$$\begin{aligned} \rho_1(aX) &= \sqrt{Var\left(aX\right)} \\ &= \sqrt{a^2Var\left(X\right)} \\ &= a\rho_1(X), \end{aligned}$$

et on conclut que $\rho_1(X)$ est une mesure de risque homogène. Pour la mesure de risque $\rho_2(X)$, on a

$$\begin{aligned} \rho_2(aX) &= \frac{1}{\eta}\ln\left(E\left[e^{\eta aX}\right]\right) \\ &= \frac{1}{\eta}\ln\left(E\left[\left(e^{\eta X}\right)^a\right]\right) \\ &\neq \frac{1}{\eta}\ln\left(E\left[e^{\eta X}\right]^a\right) \\ &\neq \frac{a}{\eta}\ln\left(E\left[e^{\eta X}\right]\right) \\ &\neq a\rho_2(X), \end{aligned}$$

alors, on conclut que la mesure de risque $\rho_2(X)$ n'est mas homogène.

8. (a) On a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X) + VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_u(X) - VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 (VaR_\kappa(X))\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \left(F_X^{-1}(u) - VaR_\kappa(X)\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X)(1-\kappa) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[\max\left(F_X^{-1}(U) - VaR_\kappa(X);0\right)\right] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[\max(X - VaR_\kappa(X);0)\right] + VaR_\kappa(X) \text{ (Quantile Function Theorem)}
\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

(b) On a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}E\left[\max(X - VaR_\kappa(X);0)\right] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[(X - VaR_\kappa(X)) \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] \\
&\quad -\frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X) \times E\left[1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] \\
&\quad -\frac{1}{1-\kappa}\left(VaR_\kappa(X) \times (1 - F_X(VaR_\kappa(X))) - (1-\kappa)VaR_\kappa(X)\right) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)\right\}
\end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

9. (a) On définit $\mathcal{A} = \{0, 80, 1000\}$. On a

x	0	80	100
$\Pr(X = x)$	0.2625	0.6875	0.05
$\Pr(X \leq x)$	0.2625	0.95	1

Alors, on calcule

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} x \Pr(X = x) \\
&= 0 \times 0.2625 + 80 \times 0.6875 + 100 \times 0.05 \\
&= 60;
\end{aligned}$$

$$VaR_{0.95}(X) = 80;$$

$$\begin{aligned}TVaR_{0.95}(X) &= \frac{1}{1-0.95}\left(0.05\times 100 + 80\times(0.95-0.95)\right)\\ &= \frac{1}{0.05}\times 100\times 0.05\\ &= 100.\end{aligned}$$

(b) On a

x	0	80	100
$\Pr(Y=x)$	0.825	0.125	0.05
$\Pr(Y\leq x)$	0.825	0.95	1

et on déduit

$$\begin{aligned}E[Y] &= \sum_{x\in\mathcal{A}} x\Pr(Y=x)\\ &= 0\times 0.825 + 80\times 0.125 + 100\times 0.05\\ &= 15;\end{aligned}$$

$$VaR_{0.95}(Y) = 80;$$

$$\begin{aligned}TVaR_{0.95}(Y) &= \frac{1}{1-0.95}\left(0.05\times 100 + 80\times(0.95-0.95)\right)\\ &= \frac{1}{0.05}\times 100\times 0.05\\ &= 100.\end{aligned}$$

(c) On remarque que les deux variables aléatoires n'ont pas la même moyenne. Par contre, les deux variables aléatoires ont les mêmes VaR et $TVaR$. Si on regardait seulement l'espérance des variables aléatoires, on pourrait croire que la variable X est plus risquée que Y. Par contre, les deux variables aléatoires ont le même risque pour les quantiles élevés.

10. On a

$$\begin{aligned}TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u\\ &\geq \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_\kappa(X)\mathrm{d}u\\ &\geq \frac{1}{1-\kappa}\times(1-\kappa)\times VaR_\kappa(X)\\ &\geq VaR_\kappa(X),\end{aligned}$$

car $VaR_u(X)$ est une fonction non décroissante.

11. (a) On a les informations suivantes :

$$\begin{aligned}E[X] &= \frac{\lambda}{\alpha-1} = 100\\ VaR_{0.992}(X) &= \lambda\left((1-0.992)^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right) = 12000\end{aligned}$$

À l'aide d'Excel (ou R), on résoud le système de 2 équations-2 inconnus et on obtient $\alpha = 1.5$, $\lambda = 500$. On refait la même chose pour Y

$$\begin{aligned}E[Y] &= 100\\ VaR_{0.992}(Y) &= 12000\end{aligned}$$

et l'on obtient $\mu = 1.391118$, $\sigma = 3.321637$.

$$\begin{aligned} TVaR_{0.992}(X) &= \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}(1-\kappa)^{\frac{-1}{\alpha}}-1\right) \\ &= 500\left(\frac{1.5}{1.5-1}(1-0.992)^{\frac{-1}{1.5}}-1\right) \\ &= 37000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.992}(Y) &= \frac{1}{1-\kappa}e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left(1-\Phi\left(VaR_\kappa(Z)-\sigma\right)\right) \\ &= \frac{1}{1-0.992}e^{1.391118+\frac{(3.321637)^2}{2}}\left(1-\Phi\left(VaR_{0.992}(Z)-3.321637\right)\right) \\ &= 102413. \end{aligned}$$

12. (a) On a

$$\begin{aligned} \pi_X(VaR_\kappa(X)) &= \int_{VaR_\kappa(X)}^{\infty} \overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{1-\kappa} VaR_{1-u}(X)\,\mathrm{d}u - (1-\kappa)VaR_\kappa(X) \\ &= \int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u - (1-\kappa)VaR_\kappa(X), \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) &= TVaR_\kappa(X) - VaR_\kappa(X) \\ TVaR_\kappa(X) &= VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)). \end{aligned}$$

(b) On obtient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) \\ &= VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa}E\left[\max\left(X - VaR_\kappa(X); 0\right)\right] \\ &= VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa}\left(E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] - VaR_\kappa(X)\overline{F}_X(VaR_\kappa(X))\right) \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left\{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X) \times (1-\kappa-1+F_X(VaR_\kappa(X)))\right\} \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left\{E[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X) \times (F_X(VaR_\kappa(X))-\kappa)\right\}. \end{aligned}$$

(c) Si la variable aléatoire X est continue, on a que

$$F_X(VaR_\kappa(X)) = F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right) = \kappa,$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X) \times (F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)\right\} \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X) \times (\kappa - \kappa)\right\} \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]
\end{aligned}$$

(d) En effet.

(e) On doit simplement appliquer les résultats de la question **??** et diviser par $1-\kappa$.

13. On s'inspire du résultat de la question 10c et on obtient

$$VaR_\kappa(N) = \begin{cases} 8, & \kappa = 0.931907, \\ 9, & \kappa = 0.968172, \\ 10, & \kappa = 0.986304, \\ 11, & \kappa = 0.998119. \end{cases}$$

On calcule

(a) $VaR_{0.95}(N) = 9$ et $TVaR_{0.95}(N) = 9 + \frac{1}{1-0.95} \times 0.054016 = 10.08032$.

(b) $VaR_{0.96}(N) = 9$ et $TVaR_{0.96}(N) = 9 + \frac{1}{1-0.96} \times 0.054016 = 10.35040$.

(c) $VaR_{0.99}(N) = 11$ et $TVaR_{0.99}(N) = 11 + \frac{1}{1-0.99} \times 0.003039 = 11.30390$.

14. On prouve l'homogénéité de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda X) &= E[\lambda X] + \sqrt{Var(\lambda X)}\Phi^{-1}(X) \\
&= \lambda E[X] + \sqrt{\lambda^2 Var(X)}\Phi^{-1}(X) \\
&= \lambda E[X] + \lambda\sqrt{Var(X)}\Phi^{-1}(X) \\
&= \lambda\rho(X).
\end{aligned}$$

Ensuite, on prouve l'invariance à la translation de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\rho(a + X) &= E[X + a] + \sqrt{Var(X + a)}\Phi^{-1}(\kappa) \\
&= E[X] + a + \sqrt{Var(X)}\Phi^{-1}(\kappa) \\
&= \rho(X) + a.
\end{aligned}$$

15. Soit $c_\kappa = \frac{1}{(1-\kappa)\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\Phi^{-1}(\kappa))^2}$. Alors, on prouve l'homogénéité de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda X) &= E[\lambda X] + \sqrt{Var(\lambda X)} \times c_\kappa \\
&= \lambda E[X] + \sqrt{\lambda^2 Var(X)} \times c_\kappa \\
&= \lambda E[X] + \lambda\sqrt{Var(X)} \times c_\kappa \\
&= \lambda\rho(X).
\end{aligned}$$

Ensuite, on prouve l'invariance à la translation de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\rho(a+X) &= E[X+a] + \sqrt{Var(X+a)}c_\kappa \\ &= E[X] + a + \sqrt{Var(X)}c_\kappa \\ &= \rho(X) + a.\end{aligned}$$

16. (a) On a

$$\begin{aligned}LTVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa VaR_u(X)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\kappa}\left[\int_0^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u - \int_\kappa^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u\right] \\ &= \frac{1}{\kappa}\left[E[X] - (1-\kappa)TVaR_\kappa(X)\right] \\ &= \frac{E[X]}{\kappa} - \frac{1-\kappa}{\kappa}TVaR_\kappa(X).\end{aligned}$$

(b) On obtient

$$\begin{aligned}LTVaR_\kappa(X) &= \frac{E[X]}{\kappa} - \frac{1-\kappa}{\kappa}TVaR_\kappa(X) \\ &= \frac{E[X]}{\kappa} - \frac{1-\kappa}{\kappa}\frac{1}{1-\kappa}\left[E[X\times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] - VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)-\kappa))\right] \\ &= \frac{1}{\kappa}\left\{E[X] - E[X\times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] + VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)-\kappa))\right\}.\end{aligned}$$

Ensuite, puisque

$$E[X] - E[X\times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] = E[X\times 1_{\{X\leq VaR_\kappa(X)\}}],$$

on a

$$LTVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa}\left\{E[X\times 1_{\{X\leq VaR_\kappa(X)\}}] - VaR_\kappa(X)(\kappa - F_X(VaR_\kappa(X)))\right\}.$$

(c) Si X est une v.a. continue, on a

$$F_X(F_X^{-1}(\kappa)) = \kappa \forall \kappa \in (0,1).$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}LTVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{\kappa}\left\{E[X\times 1_{\{X\leq VaR_\kappa(X)\}}] - VaR_\kappa(X)(\kappa - F_X(VaR_\kappa(X)))\right\} \\ &= \frac{1}{\kappa}\left\{E[X\times 1_{\{X\leq VaR_\kappa(X)\}}] - VaR_\kappa(X)(\kappa-\kappa)\right\} \\ &= \frac{1}{\kappa}E[X\times 1_{\{X\leq VaR_\kappa(X)\}}]\end{aligned}$$

(d) On trouve les expressions de $E[X\times 1_{\{X\leq VaR_\kappa(X)\}}]$ par

$$E[X\times 1_{\{X\leq VaR_\kappa(X)\}}] = E[X] - E[X\times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}]$$

qui ont été développées dans la question **??** précédemment. Ensuite, il faut diviser par κ.

17. (a) On a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(-X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(-X)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 -VaR_{1-u}(X)\mathrm{d}u \\ &= \frac{-1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_{1-u}(X)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $w = 1-u$, puis, on obtient

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{1-\kappa}^0 VaR_w(X)\mathrm{d}w \\ &= \frac{-1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_w(X)\mathrm{d}w \\ &= -ES_{1-\kappa}(X) \end{aligned}$$

pour $k \in (0,1)$

(b) À l'aide des propriétés d'invariance à la multiplication par un scalaire positif et d'invariance à la translation pour la VaR, on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(a-bX) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(a-bX)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 a + VaR_u(-bX)\mathrm{d}u \\ &= \frac{a}{1-\kappa}\times(1-\kappa) - \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 bVaR_{1-u}(X)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $w = 1-u$, puis, on obtient

$$\begin{aligned} &= a - \frac{b}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_w(X)\mathrm{d}w \\ &= a - bES_{1-\kappa}(X) \end{aligned}$$

pour $k \in (0,1)$.

18. (a) On a

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa\to 0} TVaR_\kappa(X) &= \lim_{\kappa\to 0}\frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-0}\int_0^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 F_X^{-1}(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 F_X^{-1}(u)f_U(u)\mathrm{d}u \\ &= E[F_X^{-1}(U)] \\ &= E[X]. \end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to 1} TVaR_\kappa(X) &= \lim_{\kappa\to 1}\frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u\\ &= \frac{0}{0}.\end{aligned}$$

On applique alors la règle de l'Hôpital pour trouver

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to 1} TVaR_\kappa(X) &= \lim_{\kappa\to 1}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}(1-\kappa)}\\ &= -\lim_{\kappa\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

On applique la règle d'intégration de Leibniz et on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to 1} TVaR_\kappa(X) &= -\lim_{\kappa\to 1}\left[VaR_1(X)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}1 - VaR_\kappa(X)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\kappa + \int_\kappa^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}VaR_u(X)\mathrm{d}u\right]\\ &= -\lim_{\kappa\to 1}\left[0 - VaR_\kappa(X) + \int_\kappa^1 0\mathrm{d}u\right]\\ &= \lim_{\kappa\to 1} VaR_\kappa(X)\\ &= b\end{aligned}$$

Méthode alternative : on part d'une formule équivalente pour la $TVaR$ et on développe :

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to 1} TVaR_\kappa(X) &= \lim_{\kappa\to 1}\left[VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X);0)]\right]\\ &= \lim_{\kappa\to 1} VaR_\kappa(X) + \lim_{\kappa\to 1}\frac{1}{1-\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X);0)]\\ &= b + \frac{0}{0}\\ &= b+\zeta.\end{aligned}$$

On doit prouver que le terme ζ est égal à 0. On applique la règle de l'Hôpital et on a

$$\begin{aligned}\zeta &= \lim_{\kappa\to 1}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X);0)]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}(1-\kappa)}\\ &= -\lim_{\kappa\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}E[\max(X - VaR_\kappa(X);0)]\\ &= -\lim_{\kappa\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\int_a^b \max(y - VaR_\kappa(X);0)f_X(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Puis, par le théorème de convergence dominée (détails non fournis), on peut entrer la limite dans l'intégrale. On obtient

$$\begin{aligned}\zeta &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\int_a^b \max(y - \lim_{\kappa\to 1} VaR_\kappa(X); 0) f_X(y)\mathrm{d}y \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\int_a^b \max(y - b; 0) f_X(y)\mathrm{d}y \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\int_a^b 0 f_X(y)\mathrm{d}y \\ &= 0,\end{aligned}$$

car la variable y est toujours plus petite ou égale à b.

(b) On déduit

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to 0} LTVaR_\kappa(X) &= \lim_{\kappa\to 0}\frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa VaR_u(X)\mathrm{d}u \\ &= \frac{0}{0}.\end{aligned}$$

On applique la règle de l'Hôpitale et on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to 0} LTVaR_\kappa(X) &= \lim_{\kappa\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\int_0^\kappa VaR_u(X)\mathrm{d}u}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\kappa} \\ &= \lim_{\kappa\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\int_0^\kappa VaR_u(X)\mathrm{d}u \\ &= \lim_{\kappa\to 0}\left[VaR_\kappa(X)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}\kappa - VaR_0(X)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}0 + \int_0^\kappa \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\kappa}VaR_u(X)\mathrm{d}u\right] \\ &= \lim_{\kappa\to 0}\left[VaR_\kappa(X) - 0 + \int_0^\kappa 0\mathrm{d}u\right] \\ &= \lim_{\kappa\to 0} VaR_\kappa(X) \\ &= a.\end{aligned}$$

Ensuite, on cherche

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa\to 1} LTVaR_\kappa(X) &= \lim_{\kappa\to 1}\frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa VaR_u(X)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u \\ &= E[X].\end{aligned}$$

19. (a) À l'aide des propriétés de l'invariance à la multiplication par un scalaire positif et de l'invariance à la translation de la VaR_κ, on a

$$\begin{aligned}VaR_{0.01}(Y) &= VaR_{0.01}(0.3 + 2X) \\ &= 0.3 + 2VaR_{0.01}(X) \\ &= 0.3 + (2)(-0.35) \\ &= -0.4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(Y) &= VaR_{0.99}(0.3+2X) \\ &= 0.3+2VaR_{0.99}(X) \\ &= 0.3+(2)(0.18) \\ &= 0.66. \end{aligned}$$

(b) À l'aide des propriétés de l'invariance à la multiplication par un scalaire positif et de l'invariance à la translation de la VaR_κ, on a

$$\begin{aligned} VaR_{0.01}(Y) &= VaR_{0.01}(0.3-2X) \\ &= 0.3+2VaR_{0.01}(-X) \\ &= 0.3-2VaR_{1-0.01}(X) \\ &= 0.3-(2)(0.18) \\ &= -0.06; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(Y) &= VaR_{0.99}(0.3-2X) \\ &= 0.3+2VaR_{0.99}(-X) \\ &= 0.3-2VaR_{1-0.99}(X) \\ &= 0.3-(2)(-0.35) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(c) Étant donné que la fonction exponentielle est croissante et continue, on a

$$\begin{aligned} VaR_{0.01}(Y) &= VaR_{0.01}(\exp(2X)) \\ &= \exp(2VaR_{0.01}(X)) \\ &= \exp((2)(-0.35)) \\ &= 0.4965; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(Y) &= VaR_{0.99}(\exp(2X)) \\ &= \exp(2VaR_{0.99}(X)) \\ &= \exp((2)(0.18)) \\ &= 1.4333. \end{aligned}$$

(d) Soit $Z=-X$ et par conséquent $Y=\exp(2Z)$. Étant donné que la fonction exponentielle est croissante et continue, on a

$$\begin{aligned} VaR_{0.01}(Y) &= VaR_{0.01}(\exp(-2X)) \\ &= \exp(2VaR_{0.01}(Z)) \\ &= \exp((-2)VaR_{1-0.01}(X)) \\ &= \exp((-2)(0.18)) \\ &= 0.6977; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(Y) &= VaR_{0.99}(\exp(-2X)) \\ &= \exp(2VaR_{0.99}(Z)) \\ &= \exp((-2)VaR_{1-0.99}(X)) \\ &= \exp((-2)(-0.35)) \\ &= 2.0138. \end{aligned}$$

(e) À l'aide des propriétés de l'invariance à la multiplication par un scalaire positif et de l'invariance à la translation de la VaR_κ ainsi que le fait que la une fonction exponentielle est croissante et continue, on a

$$\begin{aligned} VaR_{0.01}(Y) &= VaR_{0.01}(1000 - 1000\exp(2X)) \\ &= 1000 + 1000VaR_{0.01}(-\exp(2X)) \\ &= 1000 - 1000VaR_{1-0.01}(\exp(2X)) \\ &= 1000 - 1000\exp(2VaR_{0.99}(X)) \\ &= 1000 - 1000\exp((2)(0.18)) \\ &= -433.3294; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(Y) &= VaR_{0.99}(1000 - 1000\exp(2X)) \\ &= 1000 + 1000VaR_{0.99}(-\exp(2X)) \\ &= 1000 - 1000VaR_{1-0.99}(\exp(2X)) \\ &= 1000 - 1000\exp(2VaR_{0.01}(X)) \\ &= 1000 - 1000\exp((2)(-0.35)) \\ &= 503.4147. \end{aligned}$$

(f) À l'aide des propriétés de l'invariance à la multiplication par un scalaire positif et de l'invariance à la translation de la VaR_κ ainsi que le fait que la une fonction exponentielle est croissante et continue, on a

$$\begin{aligned} VaR_{0.01}(Y) &= VaR_{0.01}(1000 - 1000\exp(-2X)) \\ &= 1000 + 1000VaR_{0.01}(-\exp(-2X)) \\ &= 1000 - 1000VaR_{1-0.01}(\exp(-2X)) \\ &= 1000 - 1000\exp(2VaR_{0.99}(-X)) \\ &= 1000 - 1000\exp(-2VaR_{1-0.99}(X)) \\ &= 1000 - 1000\exp((-2)(-0.35)) \\ &= -1013.7527; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(Y) &= VaR_{0.99}(1000 - 1000\exp(-2X)) \\ &= 1000 + 1000VaR_{0.99}(-\exp(-2X)) \\ &= 1000 - 1000VaR_{1-0.99}(\exp(-2X)) \\ &= 1000 - 1000\exp(2VaR_{0.01}(-X)) \\ &= 1000 - 1000\exp(-2VaR_{1-0.01}(X)) \\ &= 1000 - 1000\exp((-2)(0.18)) \\ &= 302.3237. \end{aligned}$$

(g) À l'aide des propriétés de l'invariance à la multiplication par un scalaire positif et de l'invariance à la translation de la VaR_κ ainsi que le fait que la une fonction exponentielle est croissante et continue, on a

$$\begin{aligned}
VaR_{0.01}(Y) &= VaR_{0.01}(1000 + 1000\exp(2X)) \\
&= 1000 + 1000 VaR_{0.01}(\exp(2X)) \\
&= 1000 + 1000\exp(2VaR_{0.01}(X)) \\
&= 1000 + 1000\exp((2)(-0.35)) \\
&= 1496.5853;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VaR_{0.99}(Y) &= VaR_{0.99}(1000 + 1000\exp(2X)) \\
&= 1000 + 1000 VaR_{0.99}(\exp(2X)) \\
&= 1000 + 1000\exp(2VaR_{0.99}(X)) \\
&= 1000 + 1000\exp((2)(0.18)) \\
&= 2433.3294.
\end{aligned}$$

(h) À l'aide des propriétés de l'invariance à la multiplication par un scalaire positif et de l'invariance à la translation de la VaR_κ ainsi que le fait que la une fonction exponentielle est croissante et continue, on a

$$\begin{aligned}
VaR_{0.01}(Y) &= VaR_{0.01}(1000 + 1000\exp(-2X)) \\
&= 1000 + 1000 VaR_{0.01}(\exp(-2X)) \\
&= 1000 + 1000\exp(2VaR_{0.01}(-X)) \\
&= 1000 + 1000\exp(-2VaR_{1-0.01}(X)) \\
&= 1000 + 1000\exp((-2)(0.18)) \\
&= 1697.6763;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VaR_{0.99}(Y) &= VaR_{0.99}(1000 + 1000\exp(-2X)) \\
&= 1000 + 1000 VaR_{0.99}(\exp(-2X)) \\
&= 1000 + 1000\exp(2VaR_{0.99}(-X)) \\
&= 1000 + 1000\exp(-2VaR_{1-0.99}(X)) \\
&= 1000 + 1000\exp((-2)(-0.35)) \\
&= 3013.7527.
\end{aligned}$$

20. (a) On définit d'abord les domaines des variables aléatoires. On a

$$\begin{aligned}
&X \in (0,1,2); \\
&Y \in (0,1,2); \\
&S \in (0,1,2,3,4); \\
&T \in (-2,-1,0,1,2).
\end{aligned}$$

Pour ce qui est des fonctions de masse de probabilité de la v.a. S, on a

$$\begin{aligned}
&\Pr(S=0) = \Pr(X=0)\times\Pr(Y=0) = 0.3136;\\
&\Pr(S=1) = \Pr(X=0)\times\Pr(Y=1) + P(X=1)\times\Pr(Y=0) = 0.4256;\\
&\Pr(S=2) = \Pr(X=1)\times\Pr(Y=1) + \Pr(X=0)\times\Pr(Y=2) + P(X=2)\times\Pr(Y=0) = 0.2116;\\
&\Pr(S=3) = \Pr(X=2)\times\Pr(Y=1) + \Pr(X=1)\times\Pr(Y=2) = 0.0456;\\
&\Pr(S=4) = \Pr(X=2)\times\Pr(Y=2) = 0.0036.
\end{aligned}$$

De manière similaire, pour la v.a T, on a

$$\begin{aligned}
&\Pr(T=-2) = \Pr(X=0)\times\Pr(Y=2) = 0.0576;\\
&\Pr(T=-1) = \Pr(X=0)\times\Pr(Y=1) + P(X=1)\times\Pr(Y=2) = 0.2976;\\
&\Pr(T=0) = \Pr(X=0)\times\Pr(Y=0) + P(X=1)\times\Pr(Y=1) + P(X=2)\times\Pr(Y=2) = 0.4516;\\
&\Pr(T=1) = \Pr(X=2)\times\Pr(Y=1) + P(X=1)\times\Pr(Y=0) = 0.1736;\\
&\Pr(T=2) = \Pr(X=2)\times\Pr(Y=0) = 0.0196.
\end{aligned}$$

(b) À l'aide des fonctions de masse de probabilité, on obtient

$$\begin{aligned}
E(S) &= 1\times 0.4256 + 2\times 0.2116 + 3\times 0.0456 + 4\times 0.0036\\
&= 1;\\
E(S^2) &= 1\times 0.4256 + 4\times 0.2116 + 9\times 0.0456 + 16\times 0.0036\\
&= 1.74;\\
E(T) &= -2\times 0.0576 - 1\times 0.2976 + 1\times 0.1736 + 2\times 0.0196\\
&= -0.2;\\
E(T^2) &= 4\times 0.0576 + 1\times 0.2976 + 1\times 0.1736 + 4\times 0.0196\\
&= 0.78.
\end{aligned}$$

À l'aide des deux premiers moments, on calcule les variances. On a

$$\begin{aligned}
V(S) &= E(S^2) - E^2(S) = 1.74 - 1^2 = 0.74;\\
V(T) &= E(T^2) - E^2(T) = 0.78 - (-0.2)^2 = 0.74.
\end{aligned}$$

(c) On calcule les fonctions cumulatives de S et T. On a

x	0	1	2	3	4
$\Pr(S \leq x)$	0.3136	0.7392	0.9508	0.9964	1

et

x	-2	-1	0	1	2
$\Pr(T \leq x)$	0.0576	0.3552	0.8068	0.9804	1

Pour les *Value at Risk*, on a

$$\begin{aligned}
VaR_{0.9}(S) &= 2;\\
VaR_{0.9}(T) &= 1.
\end{aligned}$$

Pour les *Tail Value at Risk*, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.9}(S) &= \frac{E[S \times 1_{\{S>VaR_{0.9}(S)\}}] + VaR_{0.9}(S) \times (F_S(VaR_{0.9}(S) - 0.9))]}{1-\kappa} \\
&= \frac{(3 \times 0.0456 + 4 \times 0.0036) + 2 \times (0.9508 - 0.9)}{1 - 0.9} \\
&= 2.528; \\
TVaR_{0.9}(T) &= \frac{E[T \times 1_{\{S>VaR_{0.9}(T)\}}] + VaR_{0.9}(T) \times (F_T(VaR_{0.9}(T) - 0.9))]}{1-\kappa} \\
&= \frac{(2 \times 0.0196) + 1 \times (0.9804 - 0.9)}{1 - 0.9} \\
&= 1.196.
\end{aligned}$$

21. (a) Dans cet exemple, on a le mélange suivant :

$$\begin{aligned}
(R\,|\Theta = 1) &\sim N(\mu = 0.1, \sigma = 0.15); \\
(R\,|\Theta = 2) &\sim N(\mu = -0.2, \sigma = 0.3); \\
\Pr(\Theta = 1) &= 0.8; \\
\Pr(\Theta = 2) &= 0.2.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
E[R] &= E[R\,|\Theta = 1]\Pr(\Theta = 1) + E[R\,|\Theta = 2]\Pr(\Theta = 2) \\
&= (0.8)(0.10) + (0.2)(-0.2) \\
&= 0.04.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(R) &= E\left[R^2\right] - E^2[R] \\
&= (0.8)\left((0.15)^2 + (0.1)^2\right) + (0.2)\left((0.3)^2 + (-0.2)^2\right) - (0.04)^2 \\
&= 0.052 - (0.04)^2 \\
&= 0.0504.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
E[V(1)] &= E\left[V(0)\,\mathrm{e}^R\right] \\
&= V(0)\,E\left[\mathrm{e}^R\right] \\
&= V(0)\left(E\left[\mathrm{e}^R\,|\Theta = 1\right]\Pr(\Theta = 1) + E\left[\mathrm{e}^R\,|\Theta = 2\right]\Pr\Theta = 2\right) \\
&= V(0)\left(\left(\mathrm{e}^{0.10+\frac{(0.15)^2}{2}}\right)(0.8) + \left(\mathrm{e}^{-0.20+\frac{(0.30)^2}{2}}\right)(0.2)\right) \\
&= (10000)(1.065422) \\
&= 10654.22.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[(V(1))^2\right] &= E\left[(V(0))^2 \mathrm{e}^{2R}\right] \\
&= (V(0))^2 E\left[\mathrm{e}^{2R}\right] \\
&= (V(0))^2 E\left[\mathrm{e}^{2R} | \Theta = 1\right] \Pr(\Theta = 1) + E\left[\mathrm{e}^{2R} | \Theta = 2\right] \Pr(\Theta = 2) \\
&= (V(0))^2 \left(\left(\mathrm{e}^{(2)(0.10)+\frac{2^2(0.15)^2}{2}}\right)(0.8) + \left(\mathrm{e}^{(2)(-0.20)+\frac{2^2(0.30)^2}{2}}\right)(0.2)\right) \\
&= (10000)^2 (1.182600).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(V(1)) &= E\left[V(1)^2\right] - E^2[V(1)] \\
&= (10000)^2 (1.182600) - (10000)^2 (1.065422)^2 \\
&= 4747596.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[L] &= E[V(0) - V(1)] \\
&= V(0) - E[V(1)] \\
&= 10000 - 10654.22 \\
&= -654.22.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(L) &= Var(V(0) - V(1)) \\
&= Var(V(1)) \\
&= 4747596.
\end{aligned}$$

Une perte négative signifie que le montant dans le fonds après une période $V(1)$ est plus élevé que la mise de fonds initiale $V(0)$. Il y a donc un gain. Une perte positive signifie que l'investissement après une période a une valeur moindre qu'au départ.

(c)

$$\begin{aligned}
F_{V(1)}(x) &= \Pr(V(1) \leq x) \\
&= \Pr\left(V(0)\mathrm{e}^R \leq x\right) \\
&= F_R\left(\ln\left(\frac{x}{10000}\right)\right) \\
&= 0.8\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{10000}\right) - 0.1}{0.15}\right) + 0.2\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{10000}\right) + 0.2}{0.3}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_L(x) &= \Pr(V(0) - V(1) \leq x) \\
&= \Pr(V(1) \geq V(0) - x) \\
&= \Pr\left(V(0)\mathrm{e}^R \geq V(0) - x\right) \\
&= \Pr\left(\mathrm{e}^R \geq 1 - \frac{x}{V(0)}\right) \\
&= 1 - F_R\left(\ln\left(\frac{V(0) - x}{10000}\right)\right) \\
&= .1 - F_R\left(\ln\left(\frac{10000 - x}{10000}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{perte } \textit{positive}) &= \Pr(L>0) \\
&= 1-\Pr(L\leq 0) \\
&= 1-F_L(0) \\
&= 1-\left(1-F_R\left(\ln\left(\frac{10000-x}{10000}\right)\right)\right) \\
&= F_R(0) \\
&= 0.8\Phi\left(\frac{-0.1}{0.15}\right)+0.2\Phi\left(\frac{0.2}{0.3}\right) \\
&= 0.35150.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
VaR_\kappa(V(1)) &= VaR_\kappa\left(V(0)\,\mathrm{e}^R\right) \\
&= V(0)\exp\left(VaR_\kappa(R)\right) \\
&= \begin{cases} 4548 & \kappa=0.005 \\ 16493 & \kappa=0.995 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(V(1)) &= TVaR_\kappa\left(V(0)\,\mathrm{e}^R\right) \\
&= V(0)\,TVaR_\kappa\left(\mathrm{e}^R\right) \\
&= V(0)\,\frac{1}{1-\kappa}E\left[\mathrm{e}^R\times 1_{\{\mathrm{e}^R>VaR_\kappa(\mathrm{e}^R)\}}\right] \\
&= V(0)\,\frac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[\mathrm{e}^R\times 1_{\{\mathrm{e}^R>VaR_\kappa(\mathrm{e}^R)\}}\,|\Theta=1\right]\Pr(\Theta=1)+E\left[\mathrm{e}^R\times 1_{\{\mathrm{e}^R>VaR_\kappa(\mathrm{e}^R)\}}\,|\Theta=2\right]\Pr(\Theta\right. \\
&= V(0)\,\frac{1}{1-\kappa}\left\{0.8E\left[\mathrm{e}^{R_1}\times 1_{\left\{\mathrm{e}^{R_1}>VaR_\kappa(\mathrm{e}^R)\right\}}\right]+0.2E\left[\mathrm{e}^{R_2}\times 1_{\left\{\mathrm{e}^{R_2}>VaR_\kappa(\mathrm{e}^R)\right\}}\right]\right\}
\end{aligned}$$

où $R_1\sim N(\mu=0.1,\sigma=0.15)$ et $R_2\sim N(\mu=-0.2,\sigma=0.3)$

(e) Développer les expressions de $VaR_\kappa(L)$ et $TVaR_\kappa(L)$. Calculer les valeurs pour $\kappa=0.005$ et 0.995.

$$\begin{aligned}
VaR_\kappa(L) &= VaR_\kappa(V(0)-V(1)) \\
&= VaR_\kappa\left(V(0)-V(0)\,\mathrm{e}^R\right) \\
&= V(0)+V(0)\,VaR_\kappa\left(-\mathrm{e}^R\right) \\
&= V(0)-V(0)\,VaR_{1-\kappa}\left(\mathrm{e}^R\right) \\
&= V(0)-V(0)\left(\mathrm{e}^{VaR_{1-\kappa}(R)}\right)
\end{aligned}$$

et

$$TVaR_\kappa(L)=V(0)-\frac{1}{1-\kappa}\left(E(V(1))-\kappa\times TVaR_{1-\kappa}(V(1))\right)$$

22. (a) On a

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x) &= 1, x\in[0,1]; \\
f_{X_2}(x) &= \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}, x>0.
\end{aligned}$$

On déduit

$$f_S(x) = \int_0^{\min(x;1)} 1 \times \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x - y)^{\alpha+1}} \mathrm{d}y.$$

On fixe $u = \lambda + x - y$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
f_S(x) &= -\alpha\lambda^\alpha \int_{\lambda+x}^{\lambda+x-\min(x;1)} u^{-\alpha-1} \mathrm{d}u \\
&= \alpha\lambda^\alpha \left. \frac{u^{-\alpha}}{\alpha} \right|_{\lambda+x}^{\lambda+x-\min(x;1)} \\
&= \alpha\lambda^\alpha \left(\frac{(\lambda + x - \min(x;1))^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{(\lambda + x)^{-\alpha}}{\alpha} \right).
\end{aligned}$$

On remplace avec $\alpha = 2$ et $\lambda = 1$ et on déduit

$$\begin{aligned}
f_S(x) &= 2 \left(\frac{(1 + x - \min(x;1))^{-2}}{2} - \frac{(1 + x)^{-2}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{(1 + x - \min(x;1))^2} - \frac{1}{(1 + x)^2}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on calcule la fonction de répartition. On a

$$\begin{aligned}
F_S(y) &= \int_0^y f_S(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^y \frac{1}{(1 + x - \min(x;1))^2} - \frac{1}{(1 + x)^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^y \frac{1}{(1 + x - \min(x;1))^2} \mathrm{d}x - \int_0^y \frac{1}{(1 + x)^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^y \frac{1}{(1 + x - \min(x;1))^2} \mathrm{d}x + \left. \frac{1}{1 + y} \right|_{x=0}^{y}.
\end{aligned}$$

On résoud le premier intégrale. Si $y < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{1}{(1 + x - \min(x;1))^2} \mathrm{d}x &= \int_0^y \frac{1}{(1 + x - x)^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^y 1 \mathrm{d}x \\
&= y.
\end{aligned}$$

Si $y > 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{1}{(1 + x - \min(x;1))^2} \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{(1 + x - x)^2} \mathrm{d}x + \int_1^y \frac{1}{(1 + x - 1)^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 1 \mathrm{d}x + \int_1^y \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x \\
&= 1 - x^{-1}\big|_{x=1}^{y} \\
&= 1 - \frac{1}{y} + 1
\end{aligned}$$

On conclut

$$F_S(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{1+y} - 1 & ,0 \leq y \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{1+y} & ,y \geq 1. \end{cases}$$

(b) Pour $0.5 < \kappa < 1$, on es dans le deuxième cas de la fonction de répartition. On isole pour x dans $F_S(x) = u$ et on obtient

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{1+y} &= u \\ \frac{1}{1+y} - \frac{1}{y} &= u - 1 \\ \frac{y}{(1+y)\,y} - \frac{(1+y)}{(1+y)\,y} &= u - 1 \\ -\frac{1}{(1+y)\,y} &= u - 1 \\ y + y^2 + (u-1)^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

On applique la formule quadratique et on obtient

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\,(u-1)^{-1}}}{2} \\ y_2 &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\,(u-1)^{-1}}}{2} \end{aligned}$$

On sélectionne la valeur y_1 car y_2 est négatif pour tout u. On conclut que

$$VaR_\kappa(S) = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\kappa - 1}}}{2}.$$

(c) On calcule

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(S) &= \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4}{0.99-1}}}{2} \\ &= 9.512492. \end{aligned}$$

23. (a) On a

$$E[X] = \mu = \frac{\lambda}{\alpha - 1}.$$

Ensuite, de l'annexe, on a

$$\pi_X(d) = \frac{\lambda}{\alpha+1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha-1}.$$

On remarque que $\lambda = \mu(\alpha - 1)$. On manipule les termes et on obtient

$$\begin{aligned} \pi_X(d) &= \frac{\lambda}{\alpha-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha-1} \\ &= \mu\left(\frac{\mu(\alpha-1)}{\mu(\alpha-1)+d}\right)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Pour la $TVaR_\kappa$, on a la formule suivante selon l'annexe :

$$TVaR_\kappa(X) = \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\,(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right).$$

Alors, on remplace λ par $\mu(\alpha-1)$ et on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right) \\ &= \mu(\alpha-1)\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right) \\ &= \mu\left(\alpha(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}}\right)-\mu(\alpha-1) \\ &= \mu\left(\alpha(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)+\mu. \end{aligned}$$

(b) Les calculs se font à main mes les codes sont dans GitHub sol-21005.R. On obtient les valeurs suivantes :

α	1.1	2.5	5	100
$TVaR_{0.995}(X)$	135805.85	19313.83	10427.00	6441.19
$\pi_X(10000)$	630.32983330	47.10750773	6.66389005	0.07288883

(c) On obtient

$$\begin{aligned} TVaR_{0.995}(X) &= 6298.317; \\ \pi_X(10000) &= 0.04539993. \end{aligned}$$

24. (a) La proposition (1.63) de [Marceau, 2013] affirme que

$$f_S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k h(x;\alpha+k,\beta).$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \int_0^x f_S(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}p_k h(y;\alpha+k,\beta)\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}p_k\int_0^x h(y;\alpha+k,\beta)\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}p_k H(x;\alpha+k,\beta). \end{aligned}$$

(b) On procède en R, voir GitHub sol-21009. On obtient les paramètres

$$\begin{aligned} \alpha &= 7.5; \\ \beta &= 0.2; \\ \sigma &= 0.1767767; \\ p_1 &= 0.22097087; \\ p_5 &= 0.06480230. \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} F_S(100) &= 0.9828326; \\ VaR_{0.99}(X) &= 106.9051. \end{aligned}$$

25. (a) On a

k	0	1	2	3	4	5
$\Pr(X_1 = 1000k)$	0.3	0.2	0.25	0.15	0.06	0.04
$\Pr(X_2 = 1000k)$	0.2	0.3	0.35	0.1	0.03	0.02

Alors, on obtient

$$f_S(0) = \Pr(X_1 = 0, X_2 = 0) = \Pr(X_1 = 0) \times \Pr(X_2 = 0) = 0.3 \times 0.2 = 0.06$$

et

$$\begin{aligned} f_S(1000) &= \Pr(X_1 = 0) \times \Pr(X_2 = 1000) + \Pr(X_1 = 1000) \times \Pr(X_2 = 0) \\ &= 0.3 \times 0.3 + 0.2 \times 0.2 \\ &= 0.13. \end{aligned}$$

Avec la formule d'agrégation

$$f_S(s) = \sum_{j=0}^{s} P(X_1 = j, X_2 = s - j),$$

on déduit que la fonction de masse de probabilité de S et ainsi la fonction de répartition

k	0	1	2	3	4	5
$\Pr(S = 1000k)$	0.06	0.13	0.215	0.205	0.1735	0.1155
$\Pr(S \leq 1000k)$	0.06	0.19	0.405	0.61	0.7835	0.899
k	6	7	8	9	10	>10
$\Pr(S = 1000k)$	0.0595	0.0295	0.0088	0.0024	0.0008	0
$\Pr(S \leq 1000k)$	0.9585	0.988	0.9968	0.9992	1.0000	1

(b) A partir des fonctions de répartition de X_1, X_2 et de S, on a

$$\begin{aligned} VaR_{0.25}(X_1) &= 0, VaR_{0.995}(X_1) = 5000; \\ VaR_{0.25}(X_2) &= 1000, VaR_{0.995}(X_2) = 5000; \\ VaR_{0.25}(S) &= 2000, VaR_{0.995}(S) = 8000. \end{aligned}$$

(c) Avec la formule

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} E\left[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)\right] + VaR_\kappa(X),$$

on calcule

$$\begin{aligned} TVaR_{0.25}(X_1) &= \frac{1}{1-0.25} E\left[\max(X_1 - VaR_{0.25}(X_1); 0)\right] + VaR_{0.25}(X_1) \\ &= \frac{1}{0.75}(0 \times 0.3 + 1000 \times 0.2 + 2000 \times 0.25 + 3000 \times 0.15 + 4000 \times 0.06 \\ &\quad + 5000 \times 0.04) + 0 \\ &= 2120; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.25}(X_2) &= \frac{1}{1-0.25} E\left[\max(X_2 - VaR_{0.25}(X_2);0)\right] + VaR_{0.25}(X_2) \\
&= \frac{1}{0.75}(0\times 0.2 + 0\times 0.3 + 1000\times 0.35 + 2000\times 0.1 + 3000\times 0.03 + 4000\times 0.02) \\
&\quad + 1000 \\
&= 1960;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.25}(S) &= \frac{1}{1-0.25} E\left[\max(S - VaR_{0.25}(S);0)\right] + VaR_{0.25}(S) \\
&= \frac{1}{0.75}(0\times 0.06 + 0\times 0.13 + 0\times 0.215 + (3000-2000)\times 0.205 \\
&\quad + (4000-2000)\times 0.1735 + (5000-2000)\times 0.1155 + (6000-2000)\times 0.10595 \\
&\quad + (7000-2000)\times 0.0295 + (8000-2000)\times 0.0088 + (9000-2000)\times 0.0024 \\
&\quad + (10000-2000)\times 0.0008) + 2000 \\
&= 3813.133;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.995}(X_1) &= \frac{1}{1-0.995} E\left[\max(X_1 - VaR_{0.995}(X_1);0)\right] + VaR_{0.995}(X_1) \\
&= \frac{1}{0.005}(0\times 0.3 + 0\times 0.2 + 0\times 0.25 + 0\times 0.15 + 0\times 0.06 \\
&\quad + 5000\times 0.04) + 5000 \\
&= 5000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.995}(X_2) &= \frac{1}{1-0.995} E\left[\max(X_2 - VaR_{0.995}(X_2);0)\right] + VaR_{0.995}(X_2) \\
&= \frac{1}{0.005}(0\times 0.2 + 0\times 0.3 + 0\times 0.35 + 0\times 0.1 + 0\times 0.03 + 0\times 0.02) \\
&\quad + 5000 \\
&= 5000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.995}(S) &= \frac{1}{1-0.995} E\left[\max(S - VaR_{0.995}(S);0)\right] + VaR_{0.995}(S) \\
&= \frac{1}{0.005}(0\times 0.06 + 0\times 0.13 + 0\times 0.215 + 0\times 0.205 \\
&\quad + 0\times 0.1735 + 0\times 0.1155 + 0\times 0.10595 \\
&\quad + (0\times 0.0295 + 0\times 0.0088 + (9000-8000)\times 0.0024 \\
&\quad + (10000-8000)\times 0.0008) + 8000 \\
&= 8800.
\end{aligned}$$

26. (a) On a

k	0	1	2	3	4	5
$\Pr(X_1 = 1000k)$	0.3	0.2	0.25	0.15	0.06	0.04
$\Pr(X_2 = 1000k)$	0.2	0.3	0.35	0.1	0.03	0.02

Alors, on obtient

$$f_S(0) = \Pr(X_1 = 0, X_2 = 0) = \Pr(X_1 = 0) \times \Pr(X_2 = 0) = 0.3 \times 0.2 = 0.06$$

et

$$\begin{aligned} f_S(1000) &= \Pr(X_1 = 0) \times \Pr(X_2 = 1000) + \Pr(X_1 = 1000) \times \Pr(X_2 = 0) \\ &= 0.3 \times 0.3 + 0.2 \times 0.2 \\ &= 0.13. \end{aligned}$$

Avec la formule d'agrégation

$$f_S(s) = \sum_{j=0}^{s} P(X_1 = j, X_2 = s - j),$$

on déduit que la fonction de masse de probabilité de S et ainsi la fonction de répartition

k	0	1	2	3	4	5
$\Pr(S = 1000k)$	0.06	0.13	0.215	0.205	0.1735	0.1155
$\Pr(S \leq 1000k)$	0.06	0.19	0.405	0.61	0.7835	0.899
k	6	7	8	9	10	>10
$\Pr(S = 1000k)$	0.0595	0.0295	0.0088	0.0024	0.0008	0
$\Pr(S \leq 1000k)$	0.9585	0.988	0.9968	0.9992	1.0000	1

(b) A partir des fonctions de répartition de X_1, X_2 et de S, on a

$$\begin{aligned} VaR_{0.25}(X_1) &= 0, VaR_{0.995}(X_1) = 5000; \\ VaR_{0.25}(X_2) &= 1000, VaR_{0.995}(X_2) = 5000; \\ VaR_{0.25}(S) &= 2000, VaR_{0.995}(S) = 8000. \end{aligned}$$

(c) Avec la formule

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} E\left[\max(X - VaR_\kappa(X); 0)\right] + VaR_\kappa(X),$$

on calcule

$$\begin{aligned} TVaR_{0.25}(X_1) &= \frac{1}{1-0.25} E\left[\max(X_1 - VaR_{0.25}(X_1); 0)\right] + VaR_{0.25}(X_1) \\ &= \frac{1}{0.75}(0 \times 0.3 + 1000 \times 0.2 + 2000 \times 0.25 + 3000 \times 0.15 + 4000 \times 0.06 \\ &\quad + 5000 \times 0.04) + 0 \\ &= 2120; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.25}(X_2) &= \frac{1}{1-0.25} E\left[\max(X_2 - VaR_{0.25}(X_2); 0)\right] + VaR_{0.25}(X_2) \\ &= \frac{1}{0.75}(0 \times 0.2 + 0 \times 0.3 + 1000 \times 0.35 + 2000 \times 0.1 + 3000 \times 0.03 + 4000 \times 0.02) \\ &\quad + 1000 \\ &= 1960; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.25}(S) &= \frac{1}{1-0.25}E\left[\max(S - VaR_{0.25}(S); 0)\right] + VaR_{0.25}(S) \\
&= \frac{1}{0.75}(0 \times 0.06 + 0 \times 0.13 + 0 \times 0.215 + (3000 - 2000) \times 0.205 \\
&\quad + (4000 - 2000) \times 0.1735 + (5000 - 2000) \times 0.1155 + (6000 - 2000) \times 0.10595 \\
&\quad + (7000 - 2000) \times 0.0295 + (8000 - 2000) \times 0.0088 + (9000 - 2000) \times 0.0024 \\
&\quad + (10000 - 2000) \times 0.0008) + 2000 \\
&= 3813.133;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.995}(X_1) &= \frac{1}{1-0.995}E\left[\max(X_1 - VaR_{0.995}(X_1); 0)\right] + VaR_{0.995}(X_1) \\
&= \frac{1}{0.005}(0 \times 0.3 + 0 \times 0.2 + 0 \times 0.25 + 0 \times 0.15 + 0 \times 0.06 \\
&\quad + 5000 \times 0.04) + 5000 \\
&= 5000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.995}(X_2) &= \frac{1}{1-0.995}E\left[\max(X_2 - VaR_{0.995}(X_2); 0)\right] + VaR_{0.995}(X_2) \\
&= \frac{1}{0.005}(0 \times 0.2 + 0 \times 0.3 + 0 \times 0.35 + 0 \times 0.1 + 0 \times 0.03 + 0 \times 0.02) \\
&\quad + 5000 \\
&= 5000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.995}(S) &= \frac{1}{1-0.995}E\left[\max(S - VaR_{0.995}(S); 0)\right] + VaR_{0.995}(S) \\
&= \frac{1}{0.005}(0 \times 0.06 + 0 \times 0.13 + 0 \times 0.215 + 0 \times 0.205 \\
&\quad + 0 \times 0.1735 + 0 \times 0.1155 + 0 \times 0.10595 \\
&\quad + (0 \times 0.0295 + 0 \times 0.0088 + (9000 - 8000) \times 0.0024 \\
&\quad + (10000 - 8000) \times 0.0008) + 8000 \\
&= 8800.
\end{aligned}$$

27. (a) On calcule

$$\begin{aligned}
\Pr(S = 4) &= \sum_{j=0}^{4} P(X_1 = j, X_2 = 4 - j) \\
&= \Pr(X_1 = 0) \times \Pr(X_2 = 4) + \Pr(X_1 = 1) \times \Pr(X_2 = 3) + \Pr(X_1 = 2) \times \Pr(X_2 = 2) \\
&\quad + \Pr(X_1 = 3) \times \Pr(X_2 = 1) + \Pr(X_1 = 4) \times \Pr(X_2 = 0) \\
&= 0.25 \times 0.09022352 + 0.25 \times 0.18044704 + 0.1875 \times 0.27067057 + 0.125 \times 0.27067057 \\
&\quad + 0.078125 \times 0.13533528 \\
&= 0.1628253;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X_1 \times 1_{\{S=4\}}\right] &= 0 \times \Pr(X_1 = 0, X_2 = 4) + 1 \times \Pr(X_1 = 1, X_2 = 3) + 2 \times \Pr(X_1 = 2, X_2 = 2) \\
&\quad + 3 \times \Pr(X_1 = 3, X_2 = 1) + 4 \times \Pr(X_1 = 4, X_2 = 0) \\
&= 0.290407;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1|S=4\right] &= \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{S=4\}}\right]}{\Pr(S=4)} \\
&= \frac{0.29407}{0.1628253} \\
&= 1.78355.
\end{aligned}
$$

(b) On obtient

$$\Pr(T=0) = \Pr(X_1=0, X_2=0) = 0.25 \times 0.13533528 = 0.033833821;$$

$$\Pr(T=1000) = \Pr(X_1=1, X_2=0) = 0.25 \times 0.13533528 = 0.033833821;$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(T=2000) &= \Pr(X_1=0, X_2=1) + \Pr(X_1=2, X_2=0) \\
&= 0.25 \times 0.27067057 + 0.1875 \times 0.13533528 \\
&= 0.09304301;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(T=3000) &= \Pr(X_1=1, X_2=1) + \Pr(X_1=3, X_2=0) \\
&= 0.25 \times 0.27067057 + 0.125 \times 0.13533528 \\
&= 0.08458455;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(T=4000) &= \Pr(X_1=0, X_2=2) + \Pr(X_1=2, X_2=1) + \Pr(X_1=4, X_2=0) \\
&= 0.25 \times 0.27067057 + 0.1875 \times 0.27067057 + 0.078125 \times 0.13533528 \\
&= 0.12899144;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1 \times 1_{\{T=4000\}}\right] &= 0 \times \Pr(X_1=0, X_2=2) + 2 \times \Pr(X_1=2, X_2=1) + 4 \times \Pr(X_1=4, X_2=0) \\
&= 0.1437937;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1|T=4000\right] &= \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{T=4000\}}\right]}{\Pr(T=4000)} \\
&= \frac{0.1437937}{0.12899144} \\
&= 1.114754.
\end{aligned}
$$

Code LaTeX : sol-20015.tex

28. (a) On a

$$
\begin{aligned}
E\left[X_i\right] &= E\left[b_i I_i\right] = bi \times E\left[I_i\right] \\
&= 10000 \times 0.0012 = 12;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
VaR_{0.995}(X_i) &= VaR_{0.995}(b_i I_i) = bi \times VaR_{0.995}(I_i) \\
&= 0;
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.995}(X_i) &= TVaR_{0.995}(b_i I_i) = bi \times TVaR_{0.995}(I_i) \\
&= b_i \times (\frac{1}{1-0.995} E\left[\max(I_i - VaR_{0.995}(I_i);0)\right] + VaR_{0.995}(I_i)) \\
&= 10000 \times (\frac{1}{0.005}(0 \times 0.9988 + 1 \times 0.0012) + 0) \\
&= 2400.
\end{aligned}$$

(b) On a

$$E\left[S\right] = E\left[\sum_{i=1}^{200} X_i\right] = E\left[\sum_{i=1}^{200} b_i I_i\right] = bi \times E\left[\sum_{i=1}^{200} I_i\right].$$

On sait que $\sum_{i=1}^{200} I_i \sim Binom(n = 200, q = 0.0012)$, alors, on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[S\right] &= b_i \times E\left[\sum_{i=1}^{200} I_i\right] \\
&= 10000 \times 200 \times 0.0012 = 2400;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VaR_{0.995}(S) &= VaR_{0.995}(b_i \sum_{i=1}^{200} I_i) = bi \times VaR_{0.995}(\sum_{i=1}^{200} I_i) \\
&= 10000 \times 2 = 20000;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.995}(S) &= TVaR_{0.995}(b_i \sum_{i=1}^{200} I_i) = bi \times TVaR_{0.995}(\sum_{i=1}^{200} I_i) \\
&= b_i \times (\frac{1}{1-0.995} E\left[\max(\sum_{i=1}^{200} I_i - VaR_{0.995}(\sum_{i=1}^{200} I_i);0)\right] + VaR_{0.995}(\sum_{i=1}^{200} I_i)) \\
&= b_i \times (\frac{1}{0.005}(E\left[\sum_{i=1}^{200} I_i - 2\right] - Pr(\sum_{i=1}^{200} I_i = 0) \times (0-2) - Pr(\sum_{i=1}^{200} I_i = 1) \times (1-2)) \\
&\quad + 2) \\
&= 10000 \times (\frac{1}{0.005}(200 \times 0.0012 - 2 + 0.7865 \times 2 + 0.1890 \times 1) + 2) \\
&= 24000.
\end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
B_{0.995}^{VaR}(X_1, ...Xn) &= \sum_{i=1}^{200} VaR_{0.995}(X_i) - VaR_{0.995}(S) \\
&= 200 \times 0 - 20000 = -20000.
\end{aligned}$$

Selon la VaR, il n'y a pas de bénéfice de mutualisation.

(d)

$$\begin{aligned} B^{TVaR}_{0.995}(X_1,...Xn) &= \sum_{i=1}^{200} TVaR_{0.995}(X_i) - TVaR_{0.995}(S) \\ &= 200 \times 2400 - 24000 = 456000 \end{aligned}$$

Selon la TVaR, le bénéfice de mutualisation est positif.

(e) On utilise l'approche B. Le bénéfice de mutualisation permet de baisser le niveau de capital nécessaire.

29. (a) On a

$$E(W_n) = E\Big(\frac{1}{n}S_n\Big) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E\left(\frac{1}{n} n \times X_i\right) = E(X_i);$$

$$V(W_n) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}V(X_i).$$

(b) Pour $X_i \sim Gamma(\alpha, \beta)$, $i = 1, \ldots, n$, on a

$$\begin{aligned} M_{S_n}(t) &= E[e^{tS_n}] = E[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}] \\ &= E[e^{tX_1}e^{tX_2}\ldots e^{tX_n}] \\ &= E[e^{tX_1}]E[e^{tX_2}]\ldots E[e^{tX_n}] \\ &= (M_X(t))^n \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha n}. \end{aligned}$$

On conclut que $S_n \sim Gamma(\alpha \times n, \beta)$

(c) En utlisant la propriété de l'homogénéité, on a

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(W_n) &= VaR_\kappa\left(\frac{S_n}{n}\right) \\ &= \frac{VaR_\kappa(S_n)}{n}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(W_n) &= TVaR_\kappa\left(\frac{S_n}{n}\right) \\ &= \frac{TVaR_\kappa(S_n)}{n}. \end{aligned}$$

(d) On obtient

$$\begin{aligned} VaR_{0.05}(X_1) - VaR_{0.05}(W_{10}) &= VaR_{0.05}(X_1) - \frac{VaR_{0.05}(S_{10})}{10} \\ &= -1.315776; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VaR_{0.95}(X_1) - VaR_{0.95}(W_{1000}) &= VaR_{0.95}(X_1) - \frac{VaR_{0.95}(S_{10})}{1000} \\ &= 91.90491. \end{aligned}$$

(e) On a

$$\begin{aligned}TVaR_{0.05}(X_1) - TVaR_{0.05}(W_{10}) &= TVaR_{0.05}(X_1) - \frac{TVaR_{0.05}(S_{10})}{10} \\ &= \left(\frac{1}{1-0.05}\right)\frac{\alpha}{\beta}\Big(\overline{H}(VaR_{0.05}(X_1);\alpha+1,\beta) \\ &\quad - \overline{H}(VaR_{0.05}(S_{10};\alpha\times 10+1,\beta))\Big) \\ &= 0.03604209;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}TVaR_{0.95}(X_1) - TVaR_{0.95}(W_{1000}) &= TVaR_{0.95}(X_1) - \frac{TVaR_{0.95}(S_{1000})}{1000} \\ &= 207.9125.\end{aligned}$$

30. (a) On a

$$E(W_n) = E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E\left(\frac{1}{n}n \times X_i\right) = E(X_i);$$

$$V(W_n) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}V(X_i).$$

(b) On a

$$VaR_\kappa(W_n) = VaR_\kappa\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{VaR_\kappa(S_n)}{n};$$

$$TVaR_\kappa(W_n) = TVaR_\kappa\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{VaR_\kappa(S_n)}{n}.$$

Les résultats précédents sont de par la propriété d'invariance à la multiplication par un scalaire positif de la VaR et la $TVaR$.

(c) Selon le théorème central limite, on obtient

$$\frac{W_n - E(W_n)}{\sqrt{Var(W_n)}} \to Z$$

où $Z \sim N(0,1)$ et pour n grand.

Ainsi, pour W_1, on a

$$\begin{aligned}VaR_{0.05}(W_1) &\simeq VaR_{0.05}(Z) \times \sqrt{Var(W_1)} + E(W_1) \\ &= VaR_{0.05}(Z) \times \sqrt{Var(X_1)} + E(X_1) \\ &= \Phi^{-1}(0.05) \times 60 + 20 \\ &= -1.645 \times 60 + 20 \\ &= -78.7.\end{aligned}$$

Pour W_{100}, on a

$$\begin{aligned}
VaR_{0.05}(W_{100}) &\simeq VaR_{0.05}(Z) \times \sqrt{Var(W_{100})} + E(W_{100}) \\
&= VaR_{0.05}(Z) \times \sqrt{\frac{Var(X_1)}{100}} + E(X_1) \\
&= \Phi^{-1}(0.05) \times 6 + 20 \\
&= -1.645 \times 6 + 20 \\
&= 10.13.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$VaR_{0.05}(W_1) - VaR_{0.05}(W_{100}) = -78.7 - 10.13 = -88.83.$$

De façon similaire, pour W_1, on a

$$\begin{aligned}
VaR_{0.95}(W_1) &\simeq VaR_{0.95}(Z) \times \sqrt{Var(W_1)} + E(W_1) \\
&= VaR_{0.95}(Z) \times \sqrt{Var(X_1)} + E(X_1) \\
&= \Phi^{-1}(0.95) \times 60 + 20 \\
&= 1.645 \times 60 + 20 \\
&= 118.7.
\end{aligned}$$

Pour W_{1000}, on a

$$\begin{aligned}
VaR_{0.95}(W_{1000}) &\simeq VaR_{0.95}(Z) \times \sqrt{Var(W_{1000})} + E(W_{1000}) \\
&= VaR_{0.95}(Z) \times \sqrt{\frac{Var(X_1)}{1000}} + E(X_1) \\
&= \Phi^{-1}(0.95) \times \sqrt{3.6} + 20 \\
&= 1.645 \times \sqrt{3.6} + 20 \\
&= 23.12117.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$VaR_{0.95}(W_1) - VaR_{0.95}(W_{1000}) = 118.7 - 23.12117 = 95.57883.$$

(d) Pour W_1, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.05}(W_1) &\simeq TVaR_{0.05}(Z) \times \sqrt{Var(W_1)} + E(W_1) \\
&= \frac{1}{1-0.05} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.05)\right)^2}{2}} \times \sqrt{Var(X_1)} + E(X_1) \\
&= \frac{1}{0.95} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-1.645)^2}{2}} \times 60 + 20 \\
&= \frac{1}{0.95} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-1.3530125} \times 60 + 20 \\
&= 26.512262.
\end{aligned}$$

Pour W_{100}, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.05}(W_{100}) &\simeq TVaR_{0.05}(Z) \times \sqrt{Var(W_{100})} + E(W_1) \\
&= \frac{1}{1-0.05} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.05)\right)^2}{2}} \times \sqrt{\frac{Var(X_1)}{100}} + E(X_1) \\
&= \frac{1}{0.95} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-1.645)^2}{2}} \times 6 + 20 \\
&= \frac{1}{0.95} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-1.3530125} \times 6 + 20 \\
&= 20.651226.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$TVaR_{0.05}(W_1) - TVaR_{0.05}(W_{100}) = 26.512262 - 20.651226 = 5.861036.$$

De façon similaire, pour W_1, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.95}(W_1) &\simeq TVaR_{0.95}(Z) \times \sqrt{Var(W_1)} + E(W_1) \\
&= \frac{1}{1-0.95} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.95)\right)^2}{2}} \times \sqrt{Var(X_1)} + E(X_1) \\
&= \frac{1}{0.05} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1.645)^2}{2}} \times 60 + 20 \\
&= \frac{1}{0.05} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-1.3530125} \times 60 + 20 \\
&= 143.73297.
\end{aligned}$$

Pour W_{1000}, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.95}(W_{1000}) &\simeq TVaR_{0.95}(Z) \times \sqrt{Var(W_{1000})} + E(W_1) \\
&= \frac{1}{1-0.95} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.95)\right)^2}{2}} \times \sqrt{\frac{Var(X_1)}{1000}} + E(X_1) \\
&= \frac{1}{0.05} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1.645)^2}{2}} \times \sqrt{3.6} + 20 \\
&= \frac{1}{0.05} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-1.3530125} \times \sqrt{3.6} + 20 \\
&= 23.91278.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$TVaR_{0.95}(W_1) - TVaR_{0.95}(W_{1000}) = 143.73297 - 23.91278 = 119.82019.$$

31. (a) On a

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= M_{X_1,X_2}(t,t) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{2}\mu_i t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sigma_i\sigma_j\rho_{i,j}tt\right) \\
&= \exp\left(t\sum_{i=1}^{2}\mu_i + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sigma_i\sigma_j\rho_{i,j}\right) \\
&= \exp\left(t\sum_{i=1}^{2}\mu_i + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sigma_i\sigma_j\rho_{i,j}\right) \\
&= \exp\left(0.08t + \frac{t^2}{2}\left(0.085 + 0.075\rho_{1,2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Alors, on conclut que $S \sim Norm(\mu^*, \sigma^*)$, où $\mu^* = 0.08$ et $\sigma^* = \sqrt{0.085 + 0.075\rho_{1,2}}$. On obtient

$$VaR_\kappa(S) = 0.08 + \sqrt{0.085 + 0.075\rho_{1,2}}VaR_\kappa(Z);$$

$$\begin{aligned}
ES_\kappa(S) &= \frac{1}{\kappa}E\left[S\mathbb{1}_{\{S<VaR_\kappa(S)\}}\right] \\
&= \frac{1}{\kappa}\left(0.08 \times \Phi\left(\frac{VaR_\kappa(S) - \mu^*}{\sigma^*}\right) - \sigma^*\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Phi^{-1}(\kappa)^2}{2}}\right) \\
&= 0.08 - \sqrt{0.085 + 0.075\rho_{1,2}}TVaR_\kappa(Z).
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
T &= L_1 + L_2 \\
&= 1000 - 1000X_1 + 1000 - 1000X_2 \\
&= 2000 - 1000S.
\end{aligned}$$

Par les propriétés de la multiplication par un scalaire négatif pour la VaR_κ, on obtient

$$\begin{aligned}
VaR_\kappa(T) &= 2000 - 1000 \times VaR_{1-\kappa}(S) \\
&= 2000 - 1000\left(0.08 + \sqrt{0.085 + 0.075\rho_{1,2}}VaR_{1-\kappa}(Z)\right) \\
&= 1920 + 1000\sqrt{0.085 + 0.075\rho_{1,2}}VaR_\kappa(Z).
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(T) &= TVaR_\kappa(L_1+L_2)\\
&= TVaR_\kappa(2000-1000S)\\
&= 2000+1000\times TVaR_\kappa(-S)\\
&= 2000-\frac{1000}{1-\kappa}\times(E[S]-\kappa TVaR_{1-\kappa}(S))\\
&= 2000-\frac{1000}{1-\kappa}\times\left(0.08-\kappa\left[0.08+\frac{\sigma^*}{\kappa\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Phi^{-1}(\kappa)^2}{2}}\right]\right)\\
&= 2000-\frac{1000}{1-\kappa}\times\left(0.08(1-\kappa)-\frac{\sigma^*}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Phi^{-1}(\kappa)^2}{2}}\right)\\
&= 2000-80+\frac{1000}{1-\kappa}\frac{\sigma^*}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Phi^{-1}(\kappa)^2}{2}}\\
&= 1920+1000\sqrt{0.085+0.075\rho_{1,2}}\times TVaR_\kappa(Z).
\end{aligned}$$

(c) On remplace les paramètres et on obtient

$VaR_\kappa(S)$	$\kappa=0.01$	$\kappa=0.99$
$\rho=-0.6$	-0.3852696	0.5452696
$\rho=0.6$	-0.7587767	0.9187767

$ES_\kappa(S)$	$\kappa=0.01$	$\kappa=0.99$
$\rho=-0.6$	0.07461573	-0.4530428
$\rho=0.6$	0.07029337	-0.8809567

(d) On remplace les paramètres et on obtient

$VaR_\kappa(T)$	$\kappa=0.01$	$\kappa=0.99$
$\rho=-0.6$	1454.730	2385.270
$\rho=0.6$	1081.223	2758.777

$TVaR_\kappa(T)$	$\kappa=0.01$	$\kappa=0.99$
$\rho=-0.6$	1925.384	2453.043
$\rho=0.6$	1929.707	2880.957

(e) On cherche le paramètre ρ qui maximise

$$ES_\kappa(S)=0.08-\sqrt{0.085+0.075\rho_{1,2}}TVaR_\kappa(Z).$$

Vu que $TVaR_\kappa(Z)$ ne dépend pas du paramètre ρ, $ES_\kappa(S)$ est maximal lorsque $\sigma^*=\sqrt{0.085+0.075\rho}$ est minimal. On remarque que l'écart-type minimal est 0, alors, on cherche ρ tel que $\sigma^*=0$. On obtient

$$\begin{aligned}
\sqrt{0.085+0.075\rho}&=0\\
0.085+0.075\rho&=0\\
\rho&=-\frac{0.085}{0.075}.
\end{aligned}$$

(f) On cherche le paramètre ρ qui minimise

$$ES_\kappa(S)=0.08-\sqrt{0.085+0.075\rho_{1,2}}TVaR_\kappa(Z).$$

Vu que $TVaR_\kappa(Z)$ ne dépend pas du paramètre ρ, $ES_\kappa(S)$ est minimal lorsque $\sigma^* = \sqrt{0.085 + 0.075\rho}$ est maximal. On remarque que l'écart-type maximal se produit lorsque $\rho = 1$.

(g) On cherche le paramètre ρ qui maximise

$$TVaR_\kappa(T) = 1920 + 1000 \times \sqrt{0.085 + 0.075\rho_{1,2}} TVaR_\kappa(Z).$$

Vu que $TVaR_\kappa(Z)$ ne dépend pas du paramètre ρ, $TVaR_\kappa(T)$ est maximal lorsque $\sigma^* = \sqrt{0.085 + 0.075\rho}$ est maximal. On remarque que l'écart-type maximal se produit lorsque $\rho = 1$.

(h) On cherche le paramètre ρ qui minimise

$$TVaR_\kappa(T) = 1920 + 1000 \times \sqrt{0.085 + 0.075\rho_{1,2}} TVaR_\kappa(Z).$$

Vu que $TVaR_\kappa(Z)$ ne dépend pas du paramètre ρ, $TVaR_\kappa(T)$ est minimal lorsque $\sigma^* = \sqrt{0.085 + 0.075\rho}$ est minimal. On remarque que l'écart-type minimal est 0, alors, on cherche ρ tel que $\sigma^* = 0$. On obtient

$$\begin{aligned}\sqrt{0.085 + 0.075\rho} &= 0 \\ 0.085 + 0.075\rho &= 0 \\ \rho &= -\frac{0.085}{0.075}.\end{aligned}$$

32. (a) Calculer Π, $\psi_{1000}(u)$ et $\psi_{3000}(u)$.
On a $\Pi = 0.5(0.1(10000)) = 500$.
De plus, on calcule

$$\begin{aligned}\psi_{1000}(u) &= P\left(S_n > u + \sum_{i=1}^{n} \Pi_i\right) \\ &+ P(S > 1000000 + 500000) \\ &= 1 - P\left(\frac{S}{1000} \leq 150\right) = 1 - 0.999994 = 0.000006\end{aligned}$$

car S_{1000} suit une $Gamma(1000\alpha; \beta)$.
Finalement, on a

$$\begin{aligned}\psi_{3000}(u) &= P(S > 1000000 + 1500000) \\ &= 1 - P\left(\frac{S}{1000} \leq 250\right) = 1 - 0.001162394 = 0.998837606\end{aligned}$$

car S_{3000} suit une $Gamma(3000\alpha; \beta)$.

(b) En utilisant l'approximation normale, déterminer le nombre n de contrats de telle sorte que $\psi_n(u) = 50\%$.
On a $E(S_n) = 1000n$ et $Var(S_n) = (0.1)(10000^2)n$

$$\begin{aligned}\psi_n(u) &= P\left(\frac{S_n - nE(X)}{\sqrt{nVar(X)}} > \frac{u + 500n - nE(X)}{\sqrt{nVar(X)}}\right) \\ 0.5 &= 1 - \Phi\left(\frac{u - 500n}{\sqrt{nVar(X)}}\right) \\ 0 &= \frac{1000000 - 500n}{\sqrt{nVar(X)}} \\ n &= 2000\end{aligned}$$

(c) En utilisant l'approximation normale, déterminer $\lim_{n\to\infty} \psi_n$.

On a

$$\begin{aligned}\psi_n(u) &= P\left(\frac{S_n - nE(X)}{\sqrt{nVar(X)}} > \frac{u + 500n - nE(X)}{\sqrt{nVar(X)}}\right)\\ &= 1 - \Phi\left(\frac{u + 500n - nE(X)}{\sqrt{nVar(X)}}\right)\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \Phi\left(\frac{u + 500n - nE(X)}{\sqrt{nVar(X)}}\right)\right) &= 1 - \lim_{n\to\infty}\Phi\left(\frac{u + 500n - nE(X)}{n\sqrt{Var(X)}}\right)\\ &= 1 - \lim_{n\to\infty}\Phi\left(\frac{u}{n\sqrt{Var(X)}} - \frac{500n)}{n\sqrt{Var(X)}}\right)\\ &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

(d) Qu'advient-il pour les activités du portefeuille si la compagnie vend un nombre trop important de contrats ?
Observation : L'augmentation du nombre de participants augmente la probabilité de ruine, qui tend vers 1 ultimement.

33. (a) Calculer $BM_{0.99,0.3}(W_1, W_2)$, $BM_{0.99,-1}(W_1, W_2)$ et $BM_{0.99,1}(W_1, W_2)$.
On a

$$\begin{aligned}BM_{\kappa,\rho}(W_1, W_2) &= \mu_1 + \sigma_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\kappa)} e^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}\\ &\quad + \mu_2 + \sigma_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\kappa)} e^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}\\ &\quad - (\mu_1 + \mu_2) - \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\kappa)} e^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\kappa)} e^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \left(\sigma_1 + \sigma_2 - \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}BM_{0.99,0.3}(W_1, W_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-0.99)} e^{-\frac{(2.326347874)^2}{2}} \left(25 + 10 - \left(25^2 + 10^2 + 2\times 0.3 \times 25 \times 10\right)^{0.5}\right)\\ &= 14.4443978804\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BM_{0.99,1}(W_1, W_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-0.99)} e^{-\frac{(2.326347874)^2}{2}} \left(25 + 10 - \left(25^2 + 10^2 + 2\times 1 \times 25 \times 10\right)^{0.5}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BM_{0.99,-1}(W_1, W_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-0.99)} e^{-\frac{(2.326347874)^2}{2}} \left(25 + 10 - \left(25^2 + 10^2 - 2 \times 25 \times 10\right)^{0.5}\right)\\ &= 53.3042844120\end{aligned}$$

Note : $BM_{\kappa,1}(W_1, W_2) = 0$ peu importe κ.

(b) Pour κ fixé, montrer comment se comporte $BM_{\kappa,\rho}(W_1, W_2)$ en fonction de ρ. Expliquer brièvement ce comportement en fonction de ρ (en précisant aussi ce que représente le coefficient ρ).
Benifice de mutualisation diminue avec ρ. Etc.

Il suffit de dériver p/r à ρ. On constate que $BM_{\kappa,\rho}(W_1, W_2) \downarrow$ avec $\rho \uparrow$

34. (a) Calculer $\Pr(S = 10000k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

On a

$$\begin{aligned}
\Pr(S=0) &= \binom{10}{0}\left(0.002^0\right)\left(0.998^{10}\right)\binom{10}{0}\left(0.001^0\right)\left(0.999^{10}\right) \\
&= : 0.970\,421\,243\,559
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(S=10000) &= \binom{10}{1}\left(0.002^1\right)\left(0.998^{9}\right)\binom{10}{0}\left(0.001^0\right)\left(0.999^{10}\right) \\
&= : 1.\,944\,731\,951\,02 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(S=20000) &= \binom{10}{2}\left(0.002^2\right)\left(0.998^{8}\right)\binom{10}{0}\left(0.001^0\right)\left(0.999^{10}\right) \\
&\quad +\binom{10}{0}\left(0.002^0\right)\left(0.998^{10}\right)\binom{10}{1}\left(0.001^1\right)\left(0.999^{9}\right) \\
&= : 9.\,889\,302\,990\,81 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(S=30000) &= \binom{10}{3}\left(0.002^3\right)\left(0.998^{7}\right)\binom{10}{0}\left(0.001^0\right)\left(0.999^{10}\right) \\
&\quad +\binom{10}{1}\left(0.002^1\right)\left(0.998^{9}\right)\binom{10}{1}\left(0.001^1\right)\left(0.999^{9}\right) \\
&= 1.956\,050\,794\,19 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(S=40000) &= \binom{10}{4}\left(0.002^4\right)\left(0.998^{6}\right)\binom{10}{0}\left(0.001^0\right)\left(0.999^{10}\right) \\
&\quad +\binom{10}{2}\left(0.002^2\right)\left(0.998^{8}\right)\binom{10}{1}\left(0.001^1\right)\left(0.999^{9}\right) \\
&\quad +\binom{10}{0}\left(0.002^0\right)\left(0.998^{10}\right)\binom{10}{2}\left(0.001^2\right)\left(0.999^{8}\right) \\
&= 4.\,551\,523\,369\,54 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

(b) Calculer $E[\min(S; 40000)]$.

On a

$$\begin{aligned}
E[\min(S;40000)] &= 10000 \times 0.019947 + 20000 \times 0.009889 \\
&\quad +30000 \times 0.000196 \\
&\quad +40000\,(1 - 0.970421 - 0.019947 - 0.009889 - 0.000196) \\
&= 385.01
\end{aligned}$$

35. On a

x	0	10
$\Pr(X_i = x)$	0.9	0.1
$\Pr(X_i \leq x)$	0.9	1

De plus, on a

$$Pr(X_1 + X_2 = x) = \begin{cases} 0.9^2 = 0.81, & x = 0 \\ 2 \times 0.9 \times 0.1 = 0.18, & x = 10 \\ 0.1^2 = 0.01, & x = 20 \end{cases}$$

x	0	10	20
$\Pr(X_1 + X_2 = x)$	0.81	0.18	0.01
$\Pr(X_1 + X_2 \leq x)$	0.81	0.99	1

(a) On obtient

κ	$VaR_\kappa(X_i)$
0.5	0
0.85	10
0.99	10

et

κ	$VaR_\kappa(X_1 + X_2)$
0.5	0
0.85	10
0.99	20

(b) On obtient

36. On a

$$TVaR_\kappa(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{\varphi(x)\}$$

ce qui signifie

$$TVaR_\kappa(X) \leq \varphi(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour $\alpha \in (0, 1)$, on a

$$TVaR_\kappa(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y) \leq x + \frac{1}{1 - \kappa}\pi_{\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y}(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On choisit

$$x_\alpha = \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1 - \alpha) \times VaR_\kappa(Y)$$

et on a

$$\begin{aligned} & TVaR_\kappa(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y) \\ \leq\ & x_0 + \frac{1}{1 - \kappa}\pi_{\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y}(x_0) \\ =\ & x_0 + \frac{1}{1 - \kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y - x_0; 0)] \\ =\ & \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1 - \alpha) \times VaR_\kappa(Y) \\ & + \frac{1}{1 - \kappa} \times E[\max(\alpha \times X + (1 - \alpha) \times Y - \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1 - \alpha) \times VaR_\kappa(Y); 0)]. \end{aligned}$$

La fonction

$$E[\max(W; 0)]$$

est convexe.

Alors, on a

$$\begin{aligned}
& TVaR_\kappa(\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y) \\
\leq\ & \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y) \\
& + \frac{1}{1-\kappa} \times E\left[\max\left(\alpha \times X + (1-\alpha) \times Y - \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y); 0\right)\right] \\
=\ & \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y) \\
& + \frac{1}{1-\kappa} \times E\left[\max\left(\alpha \times (X - VaR_\kappa(X)) + (1-\alpha) \times (Y - VaR_\kappa(Y)); 0\right)\right] \\
\leq\ & \alpha \times VaR_\kappa(X) + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y) \\
& + \frac{1}{1-\kappa} \times \alpha E\left[\max\left(X - VaR_\kappa(X); 0\right)\right] \\
& + \frac{1}{1-\kappa} \times (1-\alpha) E\left[\max\left(Y - VaR_\kappa(Y); 0\right)\right] \\
=\ & \alpha \times VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} \times \alpha E\left[\max\left(X - VaR_\kappa(X); 0\right)\right] \\
& + (1-\alpha) \times VaR_\kappa(Y) + \frac{1}{1-\kappa} \times (1-\alpha) E\left[\max\left(Y - VaR_\kappa(Y); 0\right)\right]
\end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in (0,1)$.

La relation est vraie pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
& TVaR_\kappa\left(\frac{1}{2} \times X + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times Y\right) \\
\leq\ & \frac{1}{2} \times VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} \times \frac{1}{2} E\left[\max\left(X - VaR_\kappa(X); 0\right)\right] \\
& + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times VaR_\kappa(Y) + \frac{1}{1-\kappa} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) E\left[\max\left(Y - VaR_\kappa(Y); 0\right)\right]
\end{aligned}$$

Avec la propriété d'homoénéité de la TVaR, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} TVaR_\kappa(X+Y) \leq\ & \frac{1}{2} \times VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} \times \frac{1}{2} E\left[\max\left(X - VaR_\kappa(X); 0\right)\right] \\
& + \frac{1}{2} \times VaR_\kappa(Y) + \frac{1}{1-\kappa} \times \frac{1}{2} E\left[\max\left(Y - VaR_\kappa(Y); 0\right)\right]
\end{aligned}$$

On multiplie par "2" et on obtient le résultat désiré.

37. (a) Identifier les valeurs des fonctions de masse de probabilité de f_{X_1}, f_{X_2}, f_{Y_1} et f_{Y_2}. Calculer $Var(X_i)$ et $Var(Y_i)$, $i = 1, 2$.

On a

$$f_{X_1}(0) = f_{Y_1}(0) = 0.8 \text{ et } f_{X_1}(20) = f_{Y_1}(20) = 0.2$$

$$f_{X_2}(10) = f_{Y_2}(10) = 0.7 \text{ et } f_{X_2}(25) = f_{Y_2}(25) = 0.3$$

On obtient

$$Var(X_1) = 64 \text{ et } Var(X_2) = 47.25$$

(b) Calculer les valeurs de $\Pr(X_1 \leq X_2)$ et $\Pr(Y_1 \leq Y_2)$. Est-ce que les deux probabilités sont égales à 1 ?

On obtient

$$\Pr(X_1 \leq X_2) = \sum_{k_1=1}^{2} \sum_{k_2=1}^{2} f_{X_1,X_2}(k_1, k_2) \times 1_{\{k_1 \leq k_2\}} = 0.86$$

On obtient

$$\Pr\left(Y_1 \leq Y_2\right) = \sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=1}^{2} f_{Y_1,Y_2}\left(k_1,k_2\right) \times 1_{\{k_1 \leq k_2\}} = 1.$$

Réponse à la question : non

(c) Soit une v.a. W où $E[W] < \infty$ et $Var(W) < \infty$. Soit la mesure de risque $\rho(W) = \sqrt{Var(W)}$. Choisir un seul couple parmi (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) pour construire un contre-exemple servant à confirmer que la mesure ρ ne satisfait pas à la propriété de monotonicité. Justifier clairement votre choix.

Propriété de la monotonicité. Soit un couple de v.a. (W_1, W_2) tel que $\Pr(W_1 \leq W_2) = 1$. Une mesure ρ est monotone si $\rho(W_1) \leq \rho(W_2)$.

La condition pour cette propriété est satisfaite pour le couple (Y_1, Y_2). Toutefois, on observe que $\rho(Y_1) \geq \rho(Y_2)$. Donc, la mesure ρ n'est pas monotone.

(d) Calculer $E[\max(X_1 + X_2 - 40; 0)]$ et $E\left[Y_1 \times 1_{\{Y_2>20\}}\right]$.

On obtient

$$\begin{aligned}
& E\left[\max\left(X_1 + X_2 - 40; 0\right)\right] \\
= \ & \sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=1}^{2} f_{X_1,X_2}\left(k_1,k_2\right) \times \max\left(k_1 + k_2 - 40\right) = 5 \times 0.06 = 0.3
\end{aligned}$$

et

$$E\left[Y_1 \times 1_{\{Y_2>20\}}\right] = \sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=1}^{2} f_{Y_1,Y_2}\left(k_1,k_2\right) \times k_1 \times 1_{\{k_2>20\}} = 20 \times 0.2 = 4.$$

38. Pour tout $\kappa \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
& (1-\kappa)\,TVaR_\kappa(X) + (1-\kappa)\,TVaR_\kappa(Y) - (1-\kappa)\,TVaR_\kappa(X+Y) \\
= \ & E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + E\left[Y \times 1_{\{Y>VaR_\kappa(Y)\}}\right] \\
& -E\left[(X+Y) \times 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right] \\
= \ & E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] - E\left[X \times 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right] \\
& +E\left[Y \times 1_{\{Y>VaR_\kappa(Y)\}}\right] - E\left[Y \times 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right] \\
= \ & E\left[X \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \\
& -E\left[Y \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right].
\end{aligned}$$

On commence par montrer que

$$E\left[X \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \geq 0.$$

On introduit le terme auxiliaire

$$E\left[VaR_\kappa(X) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right],$$

où

$$\begin{aligned}
& E\left[VaR_\kappa(X) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \\
= \ & VaR_\kappa(X) \times E\left[\left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \\
= \ & VaR_\kappa(X) \times ((1-\kappa) - (1-\kappa)) = 0.
\end{aligned}$$

On y va :

$$\begin{aligned}
& E\left[VaR_\kappa(X) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \\
= \ & E\left[(X - VaR_\kappa(X)) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right]
\end{aligned}$$

On observe

$$\begin{array}{lll}(X - VaR_\kappa(X))\left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right) \geq 0 & \text{si} & X < VaR_\kappa(X) \\ (X - VaR_\kappa(X))\left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right) = 0 & \text{si} & X = VaR_\kappa(X) \\ (X - VaR_\kappa(X))\left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right) \geq 0 & \text{si} & X > VaR_\kappa(X).\end{array}$$

Alors, on déduit

$$\begin{aligned} & E\left[VaR_\kappa(X) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \\ = \; & E\left[(X - VaR_\kappa(X)) \times \left(1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} - 1_{\{X+Y>VaR_\kappa(X+Y)\}}\right)\right] \geq 0.\end{aligned}$$

On refait le même développement pour le terme en fonction de la v.a. Y.

Il en résulte que

$$(1-\kappa)\,TVaR_\kappa(X) + (1-\kappa)\,TVaR_\kappa(Y) - (1-\kappa)\,TVaR_\kappa(X+Y) \geq 0$$

ou

$$TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y) - TVaR_\kappa(X+Y) \geq 0, \quad \text{pour } \kappa \in (0,1).$$

39. Pour la démonstration, on a recours aux Lemmes **??** et **??**. Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ dont la fonction de répartition est désignée par $F_{\underline{X}}$.

Soient la suite de couple de v.a. i.i.d. $\underline{X}^{(j)}$, j pour $j = 1, 2, ...m$.

On définit $S = X_1 + ... + X_n$ et $S^{(j)} = X_1^{(j)} + ... + X_n^{(j)}$, pour $j = 1, 2, ..., m$.

Par le **Lemme ??**, on a

$$TVaR_\kappa(S) = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=\lfloor m\kappa\rfloor+1}^{m} S^{[j]}}{\lfloor m(1-\kappa)\rfloor} \text{ (p.s.)},$$

où $Y^{[1]} \leq Y^{[2]} \leq ... \leq Y^{[m-1]} \leq Y^{[m]}$ sont les statistiques d'ordre de $S^{(1)}$, ..., $S^{(m)}$ et $[u]$ correspond à la partie entière de u.

On fixe $j_0 = \lfloor m\kappa \rfloor$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{j=\lfloor m\kappa\rfloor+1}^{m} S^{[j]} &= \sum_{j=j_0+1}^{m} S^{[j]} \\ &= \sup\left\{S^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + S^{(i_m)}; 1 \leq i_{j_0+1} < ... < i_m \leq m\right\} \text{ (**Lemme ??**)} \\ &= \sup\left\{\begin{array}{c}\left(X_1^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + X_n^{\left(i_{j_0+1}\right)}\right) + ... \\ + \left(X_1^{(i_m)} + ... + X_n^{(i_m)}\right); 1 \leq i_{j_0+1} < ... < i_m \leq m\end{array}\right\} \\ &= \sup\left\{\begin{array}{c}\left(X_1^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + X_1^{(i_m)}\right) + ... \\ + \left(X_n^{\left(i_{j_0+1}\right)} + ... + X_n^{(i_m)}\right); 1 \leq i_{j_0+1} < ... < i_m \leq m\end{array}\right\}\end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=\lfloor m\kappa\rfloor+1}^{m} S^{[j]} &\leq \sup\left\{\left(X_1^{\left(i_{j_0+1}\right)}+...+X_1^{(i_m)}\right);1\leq i_{j_0+1}<...<i_m\leq m\right\}\\
&+...\\
&+\sup\left\{\left(X_n^{\left(i_{j_0+1}\right)}+...+X_n^{(i_m)}\right);1\leq i_{j_0+1}<...<i_m\leq m\right\}\\
&= \sum_{j=[m\kappa]+1}^{m} X_1^{[j]}+...+\sum_{j=[m\kappa]+1}^{m} X_n^{[j]}.
\end{aligned}$$

Il suffit de diviser par $[m(1-\kappa)]$ et de faire tendre $m\to\infty$ et on déduit le résultat voulu en appliquant le **Lemme ??**.

40. (a) En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est invariante à la translation.

Soit $a\in\mathbb{R}$. Comme la mesure VaR est invariante à la translation, on a

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa(X+a) &= \frac{1}{4}VaR_{1-\frac{1}{4}(1-\kappa)}(X+a)+\frac{2}{4}VaR_{1-\frac{2}{4}(1-\kappa)}(X+a)+\frac{1}{4}VaR_{1-\frac{3}{4}(1-\kappa)}(X+a)\\
&= \frac{1}{4}\left(VaR_{1-\frac{1}{4}(1-\kappa)}(X)+a\right)+\frac{2}{4}\left(VaR_{1-\frac{2}{4}(1-\kappa)}(X)+a\right)\\
&\quad+\frac{1}{4}\left(VaR_{1-\frac{3}{4}(1-\kappa)}(X)+a\right)\\
&= \frac{1}{4}VaR_{1-\frac{1}{4}(1-\kappa)}(X)+\frac{2}{4}VaR_{1-\frac{2}{4}(1-\kappa)}(X)\\
&\quad+\frac{1}{4}VaR_{1-\frac{3}{4}(1-\kappa)}(X)+a\\
&= \rho_\kappa(X)+a
\end{aligned}$$

(b) En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est positive homogène.

Soit $c\in\mathbb{R}^+$. Comme la mesure VaR est homogène, on a

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa(cX) &= \frac{1}{4}VaR_{1-\frac{1}{4}(1-\kappa)}(cX)+\frac{2}{4}VaR_{1-\frac{2}{4}(1-\kappa)}(cX)+\frac{1}{4}VaR_{1-\frac{3}{4}(1-\kappa)}(cX)\\
&= \frac{1}{4}\left(cVaR_{1-\frac{1}{4}(1-\kappa)}(X)\right)+\frac{2}{4}\left(cVaR_{1-\frac{2}{4}(1-\kappa)}(X)\right)+\frac{1}{4}\left(cVaR_{1-\frac{3}{4}(1-\kappa)}(X)\right)\\
&= c\times\left(\frac{1}{4}VaR_{1-\frac{1}{4}(1-\kappa)}(X)+\frac{2}{4}VaR_{1-\frac{2}{4}(1-\kappa)}(X)+\frac{1}{4}VaR_{1-\frac{3}{4}(1-\kappa)}(X)\right)\\
&= c\times\rho_\kappa(X)
\end{aligned}$$

(c) En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est monotone.

Soit X et Y tq $\Pr(X\leq Y)=1$. Alors, on a

$$VaR_\kappa(X)\leq VaR_\kappa(Y).$$

On applique

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa(X) &= \frac{1}{4}VaR_{1-\frac{1}{4}(1-\kappa)}(X)+\frac{2}{4}VaR_{1-\frac{2}{4}(1-\kappa)}(X) \\
&\quad +\frac{1}{4}VaR_{1-\frac{3}{4}(1-\kappa)}(X) \\
&\leq \frac{1}{4}VaR_{1-\frac{1}{4}(1-\kappa)}(Y)+\frac{2}{4}VaR_{1-\frac{2}{4}(1-\kappa)}(Y) \\
&\quad +\frac{1}{4}VaR_{1-\frac{3}{4}(1-\kappa)}(Y) \\
&= \rho_\kappa(Y)
\end{aligned}$$

pour tout $\kappa \in (0,1)$

(d) Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim Exp(1)$ et $X_2 \sim Gamma(2,1)$.

i. Calculer $\rho_0(X_1)$, $\rho_0(X_2)$ et $\rho_0(X_1+X_2)$. Interpréter la mesure.

On obtient : 0.7650677 ; 1.752652 ; 2.748956

ii. Calculer $\rho_{0.9}(X_1)$, $\rho_{0.9}(X_2)$ et $\rho_{0.9}(X_1+X_2)$. Interpréter la mesure.

On obtient : 3.067653 ; 4.826878 ; 6.387312

iii. Utiliser un seul exemple parmi (**??**) et (**??**) à titre de contre-exemple pour déduire que la mesure ρ_κ n'est pas sous-additive.

On observe : $\rho_0(X_1)+\rho_0(X_2) = 2.51772 \leq \rho_0(X_1+X_2) = 2.748956 =$ contre-exemple

$\Rightarrow$la mesure n'est pas sous-additive.

41. (a) Utiliser l'inégalité en (**??**) pour démontrer que

$$VaR_\kappa(X) \leq \varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{M_X(t)}{1-\kappa}\right),$$

pour $0 < t < t^*$.

Suggestion : poser $\overline{F}_X(x) = 1-\kappa$ et isoler x (qui se trouve dans la borne).

On précise que $\varphi_\kappa(t)$ est convexe pour $0 < t < t^*$.

On a

$$\overline{F}_X(x) = \Pr(X > x) = 1-\kappa \leq e^{-tx}M_X(t)$$

On isole x

$$e^{-tx} \geq \frac{1-\kappa}{M_X(t)}$$

et on trouve

$$x \leq -\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1-\kappa}{M_X(t)}\right) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{M_X(t)}{1-\kappa}\right)$$

On obtient le résultat souhaité :

$$VaR_\kappa(X) \leq \varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{M_X(t)}{1-\kappa}\right),$$

(b) Soit $X \sim Norm(\mu,\sigma^2)$. On définit $\varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{M_X(t)}{1-\kappa}\right)$, $t > 0$.

i. Identifier l'expression de $\varphi_\kappa(t)$ selon ces hypothèses.

On a

$$\begin{aligned}\varphi_\kappa(t) &= \frac{1}{t}\left(\ln\left(e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\right)-\ln(1-\kappa)\right)\\ &= \frac{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}{t}-\frac{\ln(1-\kappa)}{t}\\ &= \mu+\frac{1}{2}\sigma^2t-\frac{\ln(1-\kappa)}{t}\end{aligned}$$

ii. Identifier $t_\kappa \in (0,1)$ où

$$t_\kappa = \underset{t>0}{\arg\min}\varphi_\kappa(t),$$

i.e. trouver l'expression du $t>0$ qui minimise la fonction φ_κ.
On identifier $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\sigma^2+\frac{\ln(1-\kappa)}{t^2} = 0.$$

On obtient

$$t_\kappa = \frac{1}{\sigma}\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}.$$

iii. On définit la mesure de risque ρ_κ par

$$\rho_\kappa(X) = \varphi_\kappa(t_\kappa).$$

Démontrer que

$$\rho_\kappa(X) = \mu+\sigma\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}.$$

On remplace t_κ dans $\varphi_\kappa(t)$:

$$\begin{aligned}\rho_\kappa(X) &= \varphi_\kappa(t_\kappa)\\ &= \mu+\frac{1}{2}\sigma^2t_\kappa-\frac{\ln(1-\kappa)}{t_\kappa}\\ &= \mu+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{\sigma}\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}-\frac{\ln(1-\kappa)}{\frac{1}{\sigma}\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}}\\ &= \mu+\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma\sqrt{-\ln(1-\kappa)}+\sigma\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-\ln(1-\kappa)}\\ &= \mu+\frac{2}{\sqrt{2}}\sigma\sqrt{-\ln(1-\kappa)}\\ &= \mu+\sigma\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}\end{aligned}$$

(c) Soit $X \sim PoisComp(\lambda=1,B)$ avec $B \sim Exp(1)$. On définit $\varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{M_X(t)}{1-\kappa}\right)$, $0<t<1$.

i. Identifier l'expression de $\varphi_\kappa(t)$ selon ces hypothèses.
On a

$$\begin{aligned}\varphi_\kappa(t) &= \frac{1}{t}\left(\ln\left(e^{\lambda(M_B(t)-1)}\right)-\ln(1-\kappa)\right)\\ &= \frac{\lambda(M_B(t)-1)}{t}-\frac{\ln(1-\kappa)}{t}\\ &= \frac{\lambda M_B(t)-1-\ln(1-\kappa)}{t}\end{aligned}$$

avec

$$M_B(t) = \frac{1}{1-t}.$$

ii. Identifier $t_\kappa \in (0,1)$ où

$$t_\kappa = \arg\min_{t\in(0,1)} \varphi_\kappa (t)$$

i.e. trouver l'expression du t qui minimise la fonction φ_κ sur l'intervalle ouvert $(0,1)$.
On dérive

$$\varphi\prime (t) = \frac{1}{t}\lambda M_B' (t) - \frac{1}{t^2}\left(\lambda M_B (t) - 1 - \ln (1-\kappa)\right)$$

On cherche t tel que

$$\varphi\prime (t) = 0.$$

On a

$$\lambda t M_B' (t) - \left(\lambda M_B (t) - 1 - \ln (1-\kappa)\right) = 0$$

L'expression devient

$$\lambda t \frac{1}{(1-t)^2} - \left(\lambda \frac{1}{1-t} - 1 - \ln (1-\kappa)\right) = 0$$

$$\lambda t - \left(\lambda (1-t) - (1-t)^2 - (1-t)^2 \ln (1-\kappa)\right) = 0$$

On pose

$$u = 1-t.$$

On a

$$\lambda (1-u) - \left(\lambda u - u^2 - u^2 \ln (1-\kappa)\right) = 0$$

$$(1+\ln (1-\kappa))\, u^2 - 2\lambda u + \lambda = 0$$

On obtient

$$\begin{aligned} t_\kappa &= 1 - \frac{2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda (1+\ln (1-\kappa))}}{2\times (1+\ln (1-\kappa))} \\ &= 1 - \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda (1+\ln (1-\kappa))}}{2\times (1+\ln (1-\kappa))} \end{aligned}$$

iii. On définit la mesure de risque ρ_κ par

$$\rho_\kappa (X) = \varphi_\kappa (t_\kappa).$$

Calculer $\rho_{0.9} (X)$.
On calcule

$$t_{0.9} = 1 - \frac{1-\sqrt{1-(1+\ln (1-0.9))}}{2\times (1+\ln (1-0.9))} = 0.801384519074$$

On obtient

$$\begin{aligned} \rho_{0.9} (X) &= \varphi_\kappa (t_{0.9}) \\ &= \frac{\lambda M_B (t_{0.9}) - 1 - \ln (1-0.9)}{t_{0.9}} \\ &= \frac{\lambda \frac{1}{1-t_{0.9}} - 1 - \ln (1-0.9)}{t_{0.9}} \\ &= \frac{\frac{1}{1-0.801384519074} - 1 - \ln (1-0.9)}{0.801384519074} \\ &= 7.90811302307 \end{aligned}$$

42. (a) On a

$$\begin{aligned}
LTVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa VaR_u(Y)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa VaR_u(Y) + VaR_\kappa(Y) - VaR_\kappa(Y)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\kappa}\left(\int_0^\kappa VaR_\kappa(Y)\mathrm{d}u + \int_0^\kappa VaR_u(Y) - VaR_\kappa(Y)\mathrm{d}u\right)
\end{aligned}$$

On pose $u = F_Y(y) \Leftrightarrow \mathrm{d}u = f_Y(y)\mathrm{d}y$. On a,

$$\begin{aligned}
LTVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{\kappa}\left(\kappa VaR_\kappa(Y) + \int_0^{VaR_\kappa(Y)} y f_Y(y)\mathrm{d}y - \int_0^{VaR_\kappa(Y)} VaR_\kappa(Y) f_Y(y)\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{\kappa}\left(\kappa VaR_\kappa(Y) + E\left[Y \times 1_{(y\leqslant VaR_\kappa(Y))}\right] - VaR_\kappa(Y) \times (F_Y(VaR_\kappa(Y)))\right) \\
&= \frac{1}{\kappa}\left(E\left[Y \times 1_{(y\leqslant VaR_\kappa(Y))}\right] + VaR_\kappa(Y) \times (\kappa - F_Y(VaR_\kappa(Y)))\right)
\end{aligned}$$

(b) Pour une v.a. continue, $F_Y(VaR_\kappa(Y)) = \kappa$. On obtient ainsi,

$$LTVaR_\kappa(Y) = \frac{1}{\kappa}\left(E\left[Y \times 1_{(y\leqslant VaR_\kappa(Y))}\right]\right)$$

43. Puisque Y est une v.a. continue, on a

$$VaR_u(X) = -VaR_{1-u}(Y),$$

pour $u \in (0,1)$. De la définition de la $TVaR$, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= -\frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_{1-u}(Y)\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{1-\kappa}\int_{1-\kappa}^0 (-1)\, VaR_s(Y)\mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_s(Y)\mathrm{d}s \\
&= -LTVaR_{1-\kappa}(Y).
\end{aligned}$$

44. (a) On sait que

$$f_{X_1}(x) = \sum_{k\in\{1,3,5\}} f_{X_1,X_2}(x,k).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 = 0) = 0.8; \\
&\Pr(X_1 = 2) = 0.15; \\
&\Pr(X_1 = 5) = 0.05.
\end{aligned}$$

On procède de manière similaire pour X_2. En effet, on trouve

$$f_{X_2}(x) = \sum_{k\in\{0,2,5\}} f_{X_1,X_2}(k,x).$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\Pr(X_2 = 1) &= 0.8;\\ \Pr(X_2 = 3) &= 0.15;\\ \Pr(X_2 = 5) &= 0.05.\end{aligned}$$

Pour Y_1, on a

$$f_{Y_1}(x) = \sum_{k\in\{1,3,5\}} f_{Y_1,Y_2}(x,k).$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned}\Pr(Y_1 = 0) &= 0.8;\\ \Pr(Y_1 = 2) &= 0.15;\\ \Pr(Y_1 = 5) &= 0.05.\end{aligned}$$

Pour Y_2, on a

$$f_{Y_2}(x) = \sum_{k\in\{0,2,5\}} f_{Y_1,Y_2}(k,x).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\Pr(Y_2 = 1) &= 0.8;\\ \Pr(Y_2 = 3) &= 0.15;\\ \Pr(Y_1 = 5) &= 0.05.\end{aligned}$$

Pour les premiers moments, on a

$$\begin{aligned}E[X_1] &= 0 \times 0.8 + 0.15 \times 2 + 0.05 \times 5 = 0.55;\\ E[X_2] &= 1 \times 0.8 + 3 \times 0.15 + 5 \times 0.05 = 1.5;\\ E[Y_1] &= 0 \times 0.8 + 0.15 \times 2 + 0.05 \times 5 = 0.55;\\ E[Y_2] &= 1 \times 0.8 + 3 \times 0.15 + 5 \times 0.05 = 1.5.\end{aligned}$$

Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned}E[X_1^2] = E[Y_1^2] &= 0 \times 0.8 + 0.15 \times 2^2 + 0.05 \times 5^2 = 1.85;\\ E[X_2^2] = E[Y_2^2] &= 1 \times 0.8 + 3^2 \times 0.15 + 5^2 \times 0.05 = 3.4.\end{aligned}$$

On calcule ainsi les variances :

$$\begin{aligned}V[X_1] = V[Y_1] &= 1.85 - 0.55^2 = 1.5475;\\ V[X_2] = V[Y_2] &= 3.4 - 1.5^2 = 1.15.\end{aligned}$$

(b) On calcule

$$\begin{aligned}P(X_1 \leq X_2) = \Pr(X_1 = 0) \times \Big(&\Pr(X_2 = 1) + \Pr(X_2 = 3) + \Pr(X_2 = 5)\Big)\\ &+ \Pr(X_1 = 1) \times \Big(\Pr(X_2 = 3) + \Pr(X_2 = 5)\Big)\\ &+ \Pr(X_1 = 5) \times \Pr(X_2 = 5)\\ =\ & 0.8325;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Y_1 \leq Y_2) &= \Pr(Y_1 = 0) \times \Big(P(Y_2 = 1) + \Pr(Y_2 = 3) + \Pr(Y_2 = 5)\Big) \\ &\quad + \Pr(Y_1 = 1) \times \Big(\Pr(Y_2 = 3) + \Pr(Y_2 = 5)\Big) \\ &\quad + \Pr(Y_1 = 5) \times \Pr(Y_2 = 5) \\ &= 1,\end{aligned}$$

alors, on conclut que seulement la probabilité que $Y_1 \leq Y_2$ est égale à 1.

(c) Soit un couple de variables aléatoires (W_1, W_2) tel que $\Pr(W_1 \leq W_2) = 1$. Une mesure $\rho(W)$ est monotone si $\rho(W_1) \leq \rho(W_2)$. Pour le couple de v.a. (Y_1, Y_2), la propriété est insatisfaite puisque $\rho(W_1) > \rho(W_2)$.

(d) Pour X_1, on a

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 \leq 0) &= 0.8; \\ \Pr(X_1 \leq 2) &= 0.95; \\ \Pr(X_1 \leq 5) &= 1.\end{aligned}$$

Pour X_2, on a

$$\begin{aligned}\Pr(X_2 \leq 1) &= 0.8; \\ \Pr(X_2 \leq 3) &= 0.95; \\ \Pr(X_2 \leq 5) &= 1.\end{aligned}$$

Pour toute valeur de x, on a $F_{X_1}(x) \geq F_{X_2}(x)$. Similairement pour Y_1, on a

$$\begin{aligned}\Pr(Y_1 \leq 0) &= 0.8; \\ \Pr(Y_1 \leq 2) &= 0.95; \\ \Pr(Y_1 \leq 5) &= 1.\end{aligned}$$

Pour Y_2, on a

$$\begin{aligned}\Pr(Y_2 \leq 1) &= 0.8; \\ \Pr(Y_2 \leq 3) &= 0.95; \\ \Pr(Y_2 \leq 5) &= 1.\end{aligned}$$

Pour toute valeur de x, on a $F_{Y_1}(x) \geq F_{Y_2}(x)$.

(e) Soit $U \sim Unif(0, 1)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}F_{X_1'} &= \Pr(X_1' \leq x) \\ &= \Pr(F_{X_1}^{-1}(U) \leq x) \\ &= \Pr(U \leq F_{X_1}(x)) \\ &= F_{X_1}(x).\end{aligned}$$

Le développement est identique pour la v.a. X_2. On déduit que les valeurs des fonctions de masse de probabilité de (X_1', X_2') sont les mêmes que les fonctions de masse de probabilité de (Y_1, Y_2).

3.2 Exercices informatiques

1. Soit la v.a. $X \sim Pois\,(10)$.
   (a) En R, on utilise `qpois()` : 5.0000000 et 15.0000000
   (b) **Faux** :
      i. $\varphi = 0.8841736$
      ii. X obéit à une loi discrète. Il en résulte que $F_X\,(VaR_\kappa\,(X)) > \kappa$, pour $\kappa \in (0,1)$ (sauf pour $\kappa = F_X\,(j)$, $j \in \mathbb{N}$). Sauf pour un nombre dénombrable de combinaisons de (κ_1, κ_2), on observe généralement
$$\begin{aligned}\varphi &= \Pr\left(VaR_{\kappa_2}\,(X) < X \leq VaR_{\kappa_1}\,(X)\right) \\ &\neq \kappa_2 - \kappa_1,\end{aligned}$$
      comme c'est la cas pour cet exercice.
2. Soit la v.a. $X \sim BN\left(r = 0.5, q = \frac{1}{21}\right)$.
   (a) La prime pure $PP\,(X)$ est donnée par
$$PP\,(X) = E\,[X] = r\frac{1-q}{q} = 0.5 \times \frac{1-\frac{1}{21}}{\frac{1}{21}} = 10.$$
   (b) Calculer $VaR_{0.99}\,(X)$. En R, on utilise `qnbinom()` : 68.
   (c) On a $\eta = VaR_{0.99}\,(X) - PP\,(X) = 58$. On observe la grande différence entre la $VaR_{0.99}\,(X)$ et la prime pure.
   (d) Calculer la probabilité φ_1 que les coûts excèdent la prime pure. On a
$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \Pr\left(X > E\,[X]\right) \\ &= 1 - F_X\left(E\,[X]\right).\end{aligned}$$
   En R, on calcule les valeurs de F_X avec `pnbinom()` :
$$\varphi_1 = 0.305652.$$
   (e) Calculer la probabilité φ_2 que les coûts excèdent la $VaR_{0.99}\,(X)$. On a
$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \Pr\left(X > VaR_{0.99}\,(X)\right) \\ &= 1 - F_X\left(VaR_{0.99}\,(X)\right).\end{aligned}$$
   Par la définition générale de fonction quantile F_X^{-1}, on sait que
$$1 - F_X\,(VaR_\kappa\,(X)) \leq 1 - \kappa.$$
   En R, on calcule les valeurs de F_X avec `pnbinom()` :
$$\varphi_2 = 0.009593874.$$
3. Soit la v.a. $X \sim Gamma\left(\alpha = 0.5, \beta = \frac{1}{20}\right)$ représentant les coûts pour un contrat.
   (a) La prime pure $PP\,(X)$ est donnée par
$$PP\,(X) = E\,[X] = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{0.5}{\frac{1}{20}} = 10.$$
   (b) Calculer $VaR_\kappa\,(X)$, pour $\kappa = 0.005$ et 0.995. En R, on utilise `qgamma()` : 0.0003927042 et 78.79439.

(c) **Vrai. Justification :** Puisque X est une v.a. continue, on a

$$F_X\left(VaR_\kappa\left(X\right)\right) = \kappa.$$

Alors, il en suit que

$$\begin{aligned}\eta &= \Pr\left(VaR_{\kappa_2}\left(X\right) < X \leq VaR_{\kappa_1}\left(X\right)\right) \\ &= F_X\left(VaR_{\kappa_2}\left(X\right)\right) - F_X\left(VaR_{\kappa_1}\left(X\right)\right) \\ &= \kappa_2 - \kappa_1,\end{aligned}$$

pour $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < 1$.

(d) Calculer la probabilité φ_1 que les coûts excèdent la prime pure. On a

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \Pr\left(X > E\left[X\right]\right) \\ &= 1 - F_X\left(E\left[X\right]\right).\end{aligned}$$

En `R`, on calcule les valeurs de F_X avec `pgamma()` :

$$\varphi_1 = 0.3173105.$$

(e) Calculer la probabilité φ_2 que les coûts excèdent la $VaR_{0.995}\left(X\right)$. On a

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \Pr\left(X > VaR_{0.995}\left(X\right)\right) \\ &= 1 - F_X\left(VaR_{0.995}\left(X\right)\right).\end{aligned}$$

Par la définition générale de fonction quantile F_X^{-1} et puisque la v.a. X est continue, on sait que

$$1 - F_X\left(VaR_\kappa\left(X\right)\right) = 1 - \kappa.$$

On déduit (sans calculs) que

$$\varphi_2 = 1 - F_X\left(VaR_{0.995}\left(X\right)\right) = 0.005.$$

4. Voir GitHub

5. Voir GitHub

(a) On a

$$\begin{aligned}E[X] &= \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \\ &= 1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(X) &= \frac{\alpha}{\beta^2} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \\ &= 4.\end{aligned}$$

(b) À l'aide de R, on obtient

$$VaR_{0.9995}(X) = 19.94307$$

(c) Selon l'exercice 11b, on obtient

$$\pi_X(x) = \frac{\alpha}{\beta}\overline{H}(x;\alpha+1,\beta) - x\overline{H}(x;\alpha,\beta).$$

À l'aide de R, on obtient

$$\pi_X\left(VaR_{0.9995}(X)\right) = 0.00179577.$$

(d) À l'aide des résultats de (b) et (c), on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_{0.9995}(X) &= VaR_{0.9995}(X) + \frac{1}{1-0.9995}\pi_X(VaR_{0.9995}(X)) \\ &= 19.94487. \end{aligned}$$

6. Voir GitHub sol-10018

(a) On a

$$\begin{aligned} E[X] &= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma^2}{2}} \\ &= e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Avec la distribution log-normale, on a

$$\begin{aligned} Var(X) &= e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) \\ &= \left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2\left(e^{\sigma^2}-1\right) \\ &= E[X]^2\left(e^{\sigma^2}-1\right) \\ &= 1^2\left(e^{\sigma^2}-1\right) \\ &= \left(e^{\sigma^2}-1\right). \end{aligned}$$

On conclut donc

$$\begin{aligned} 4 &= e^{\sigma^2}-1 \\ \sigma^2 &= \log(5) \\ \sigma &= \sqrt{\log(5)} \\ \sigma &= 1.268636. \end{aligned}$$

(b) On a $VaR_{0.9995}(Z)$ =3.290527. On conclut

$$\begin{aligned} VaR_{0.9995}(X) &= e^{\mu+\sigma VaR_{0.9995}(X)} \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma VaR_{0.9995}(X)} \\ &= e^{-\frac{\log(5)}{2}+\sqrt{\log(5)}\times 3.290527} \\ &= 29.07162. \end{aligned}$$

(c) Selon l'exercice 11d, on obtient

$$\pi_X(x) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln x-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)\right) - x\left(1-\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)\right).$$

À l'aide de R, on obtient

$$\pi_X(VaR_{0.9995}(X)) = 0.007058022.$$

(d) À l'aide des résultats de (b) et (c), on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_{0.9995}(X) &= VaR_{0.9995}(X) + \frac{1}{1-0.9995}\pi_X(VaR_{0.9995}(X)) \\ &= 43.18767. \end{aligned}$$

7. Voir Voir GitHub

(a) On a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_X(x) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(0.8\Phi\left(\frac{x-0.1}{0.2}\right) + 0.2\Phi\left(\frac{x+0.3}{0.1}\right)\right) \\ &= 0.8\phi\left(\frac{x-0.1}{0.2}\right) + 0.2\phi\left(\frac{x+0.3}{0.1}\right), \end{aligned}$$

où $\phi(x)$ est la fonction de densité d'une loi normale centrée et réduite. On a

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(0.8\phi\left(\frac{x-0.1}{0.2}\right) + 0.2\phi\left(\frac{x+0.3}{0.1}\right)\right)\mathrm{d}x \\ &= 0.8\int_{-\infty}^{\infty} x\phi\left(\frac{x-0.1}{0.2}\right)\mathrm{d}x + 0.2\int_{-\infty}^{\infty} x\phi\left(\frac{x+0.3}{0.1}\right)\mathrm{d}x \\ &= 0.8\times 0.1 + 0.2\times(-0.3) \\ &= 0.02; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(0.8\phi\left(\frac{x-0.1}{0.2}\right) + 0.2\phi\left(\frac{x+0.3}{0.1}\right)\right)\mathrm{d}x \\ &= 0.8\int_{-\infty}^{\infty} x^2\phi\left(\frac{x-0.1}{0.2}\right)\mathrm{d}x + 0.2\int_{-\infty}^{\infty} x^2\phi\left(\frac{x+0.3}{0.1}\right)\mathrm{d}x \\ &= 0.8\times(0.2^2+0.1^2) + 0.2\times(0.1^2+(-0.3)^2) \\ &= 0.06; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(x) &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= 0.206 - 0.02^2 \\ &= 0.0596. \end{aligned}$$

(b) On calcule

$$F_X(x) = 0.4465601.$$

(c) Avec l'aide de R, on obtient

κ	0.0001	0.01	0.5	0.99	0.9999
$VaR_\kappa(X)$	-0.65593151	-0.47315173	0.03632291	0.54828054	0.83245199

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_\kappa(X)}^{\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_\kappa(X)}^{\infty} x\left(0.8\phi\left(\frac{x-0.1}{0.2}\right)+0.2\phi\left(\frac{x+0.3}{0.1}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1-\kappa}0.8\int_{VaR_\kappa(X)}^{\infty} x\phi\left(\frac{x-0.1}{0.2}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{1-\kappa}0.2\int_{VaR_\kappa(X)}^{\infty} x\phi\left(\frac{x+0.3}{0.1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1-\kappa}0.8\times\left[0.1\times\left(1-\Phi\left(\frac{VaR_\kappa(X)-0.1}{0.2}\right)\right)+0.2\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(VaR_\kappa(X)-0.1)^2}{2(0.2)^2}}\right] \\
&\quad \frac{1}{1-\kappa}0.2\times\left[-0.3\times\left(1-\Phi\left(\frac{VaR_\kappa(X)+0.3}{0.1}\right)\right)+0.1\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(VaR_\kappa(X)+0.3)^2}{2(0.1)^2}}\right].
\end{aligned}$$

On obtient

κ	0.0001	0.01	0.5	0.99	0.9999
$TVaR_\kappa(X)$	0.02007149	0.02542178	0.22134648	0.61773441	0.88094262

Pour $LTVaR_\kappa(X)$, on applique le résultat de l'exercice 16a :

$$LTVaR_\kappa(X) = \frac{E[X]}{\kappa} - \frac{1-\kappa}{\kappa}TVaR_\kappa(X).$$

On obtient

κ	0.0001	0.01	0.5	0.99	0.9999
$LTVaR_\kappa(X)$	-0.69484766	-0.51675663	-0.18134648	0.01396228	0.01991390

8. Voir GitHub sol-20039.

   (a) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{S_n}(t) &= E\left[e^{-tS_n}\right] \\
&= E\left[e^{-tS_n}\right] \\
&= E\left[e^{-t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right] \\
&= E\left[e^{-tX_1}\times e^{-tX_n}\times\cdots\times e^{-tX_n}\right] \\
&\overset{\text{ind}}{=} E\left[e^{-tX_1}\right]\times E\left[e^{-tX_2}\right]\times\cdots\times E\left[e^{-tX_n}\right] \\
&= \mathcal{L}_{X_1}(t)\times\mathcal{L}_{X_2}(t)\times\cdots\times\mathcal{L}_{X_n}(t) \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)\times\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)^n,
\end{aligned}$$

qui correspond à la TLS d'une loi *Gamma* avec paramètres $\alpha^* = n$ et $\beta^* = \beta$. Ensuite, on obtient

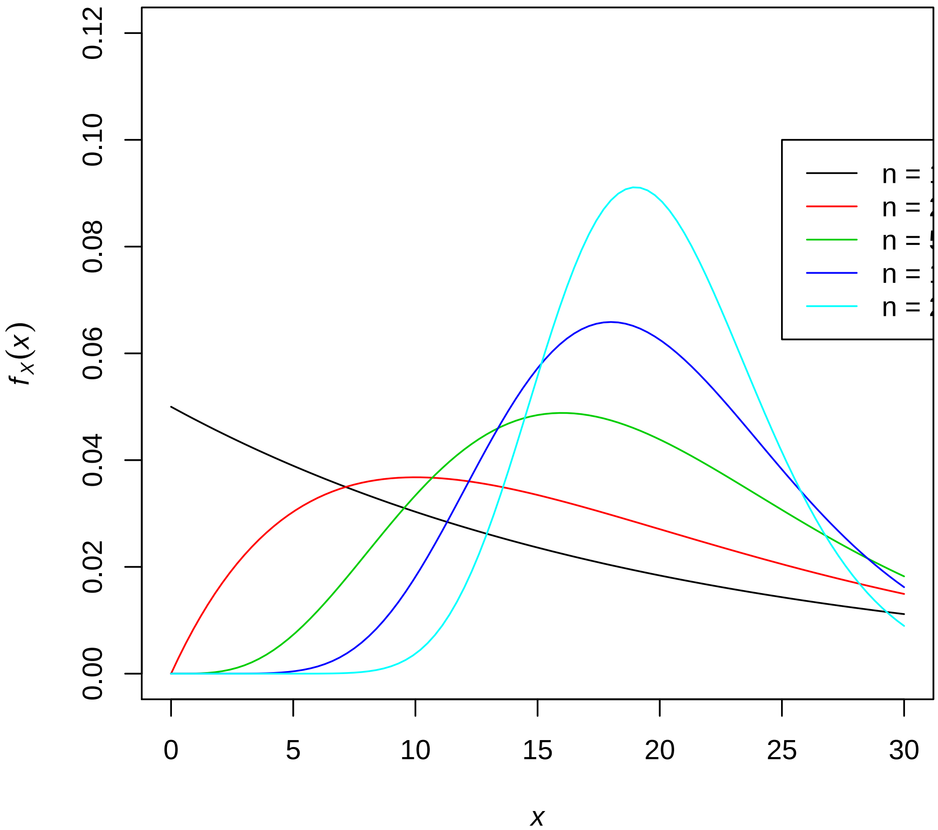
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= E\left[e^{-tW_n}\right] \\
&= E\left[e^{-t\frac{S_n}{n}}\right] \\
&= \mathcal{L}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta n}}\right)^n,
\end{aligned}$$

qui correspond à la TLS d'une loi *Gamma* avec paramètres $\alpha^* = n$ et $\beta^* = n\beta$.

(b) Voir l'annexe pour la distribution *Gamma*.

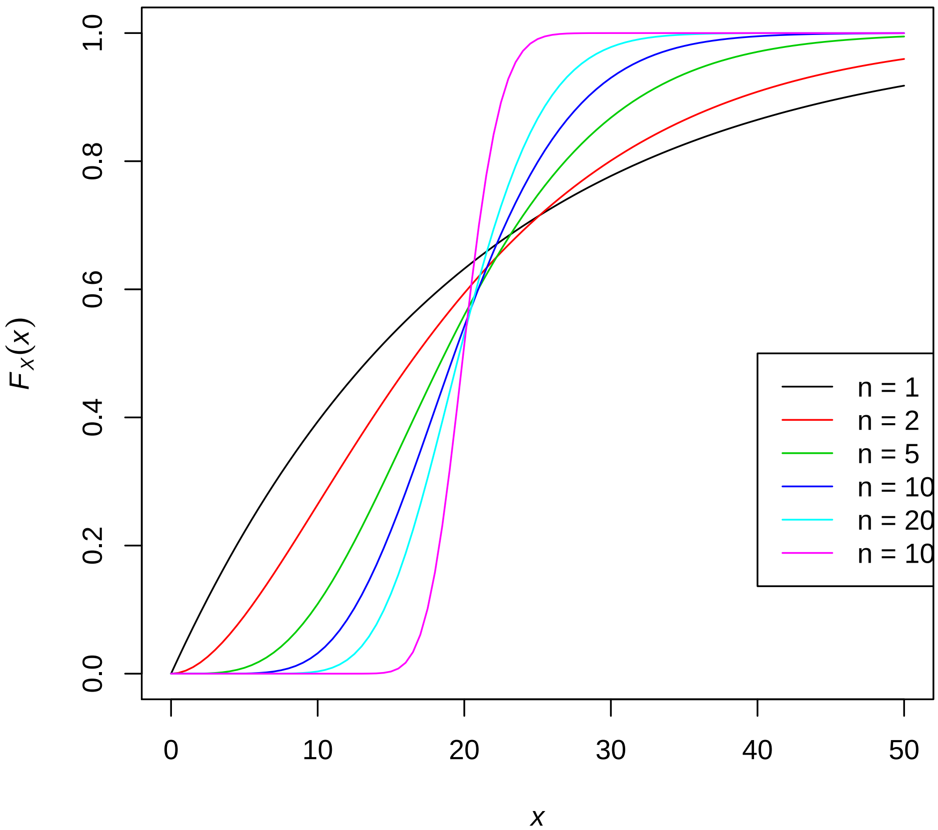
(c) On obtient

```
> rate <- 1 / 20
> n <- c(1, 2, 5, 10, 20)
> len.n <- length(n)
> plot(0:30, seq(0, 0.12, length.out = 31), type = "n"
+      , ylab = expression(italic(f)[italic(X)](italic(x)))
+      , xlab = expression(italic(x)))
> for(i in 1:len.n) {
        +   curve(dgamma(x, n[i], n[i] * rate), 0, 30, col = i, add = TRUE)
        + }
> legend(25, 0.1, paste("n =", n), lty = rep(1, len.n), col = 1:len.n)
```



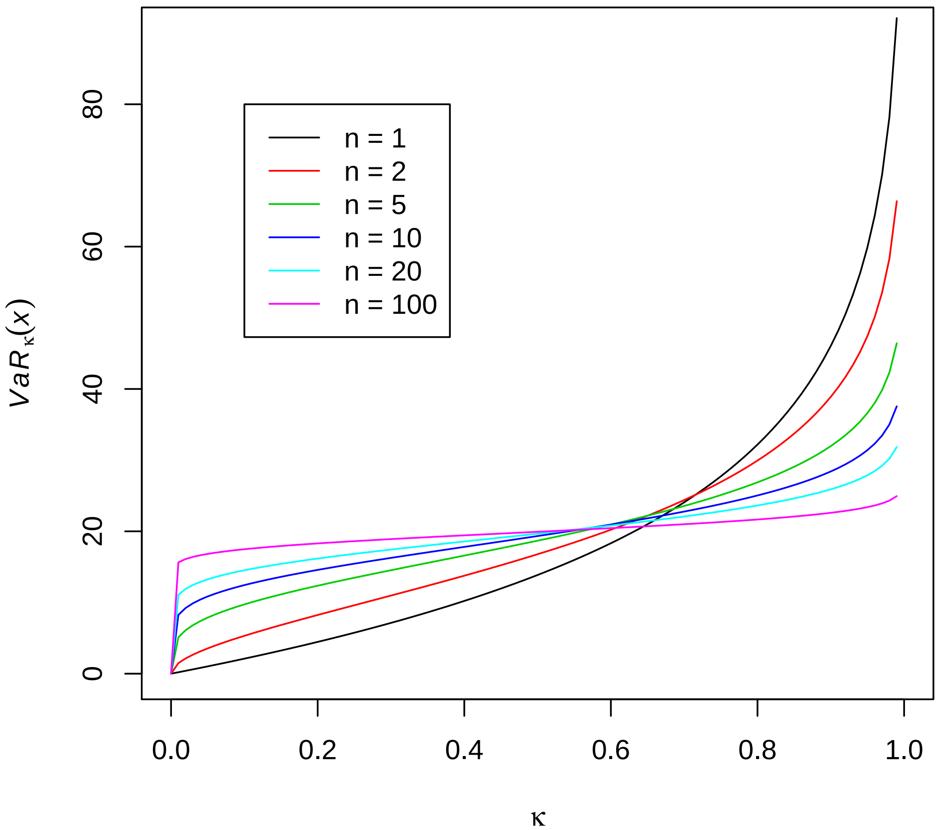
(d) On a

```
> n <- c(1, 2, 5, 10, 20, 100)
> len.n <- length(n)
> plot(0:50, seq(0, 1, length.out = 51), type = "n"
+      , ylab = expression(italic(F)[italic(X)](italic(x)))
+      , xlab = expression(italic(x)))
> for(i in 1:len.n) {
        +   curve(pgamma(x, n[i], n[i] * rate), 0, 50, col = i, add = TRUE)
        + }
> legend(40, 0.5, paste("n =", n), lty = rep(1, len.n), col = 1:len.n)
```



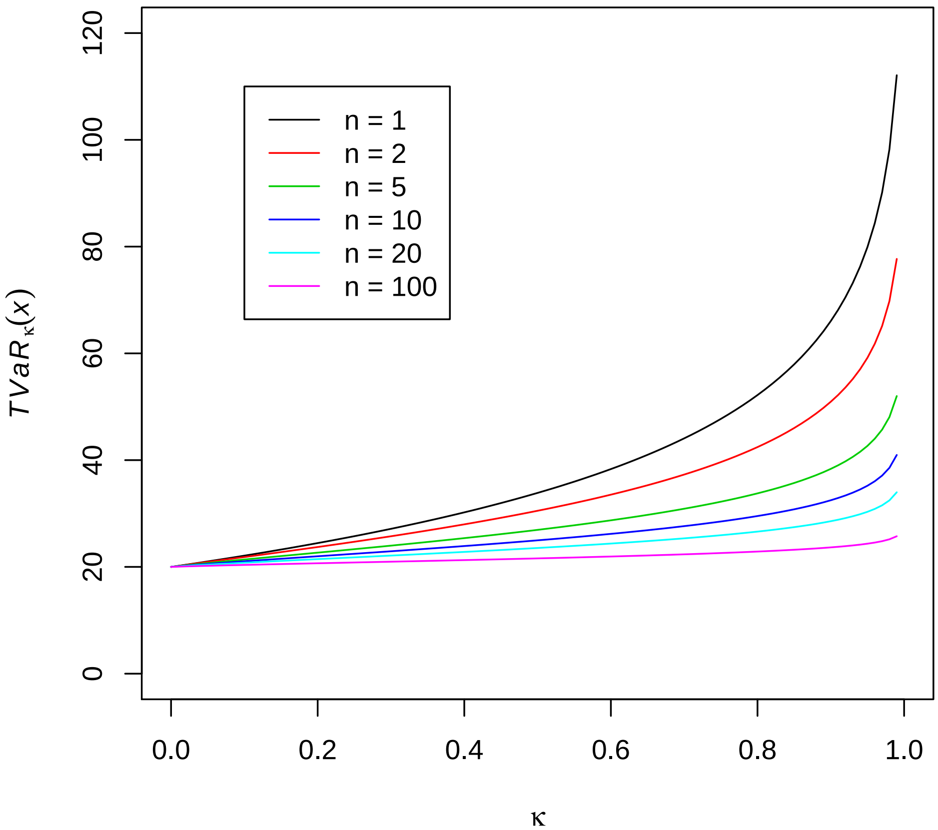
(e) On obtient

```
> plot(seq(0, 1, length.out = 91), 0:90, type = "n"
+      , ylab = expression(italic(VaR)[kappa](italic(x)))
+      , xlab = expression(kappa))
> for(i in 1:len.n) {
        +   curve(qgamma(x, n[i], n[i] * rate), 0, 1, col = i, add = TRUE)
        + }
> legend(0.1, 80, paste("n =", n), lty = rep(1, len.n), col = 1:len.n)
```



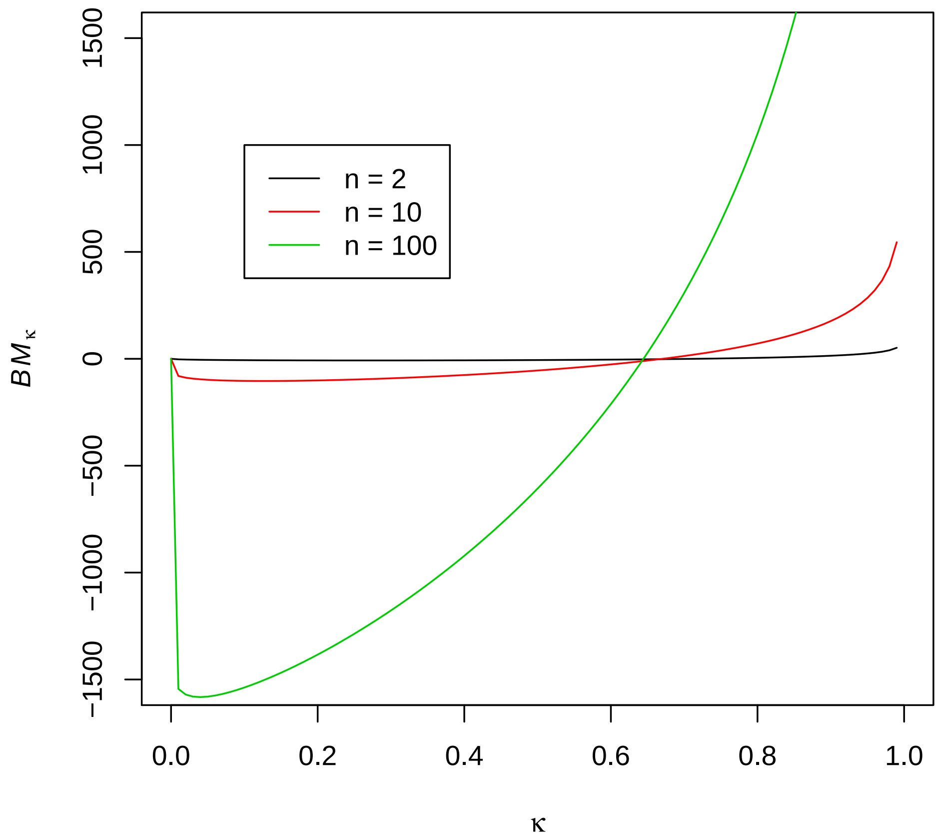
(f) On déduit

```
> TVaRgamma <- function(x, params) {
        +   VaR <- qgamma(x, params[1], params[2])
        +   1 / (1 - x) * params[1] / params[2] *
        +   (1 - pgamma( VaR, params[1] + 1, params[2]))
+ }
> plot(seq(0, 1, length.out = 121), 0:120, type = "n",
+      ylab = expression(italic(TVaR)[kappa](italic(x)))
+      , xlab = expression(kappa))
> for(i in 1:len.n) {
        +   params.n <- c(n[i], n[i] * rate)
        +   curve(TVaRgamma(x, params.n), 0, 1, col = i, add = TRUE)
+ }
> legend(0.1, 110, paste("n =", n), lty = rep(1, len.n), col = 1:len.n)
```



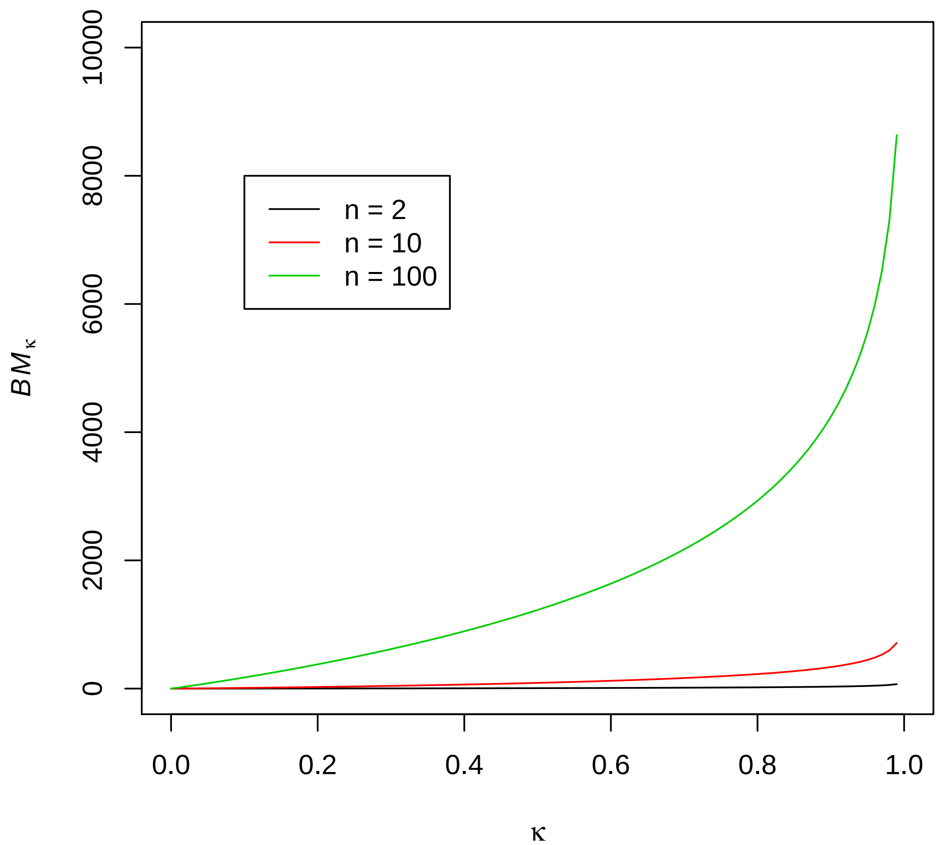
(g) On déduit

```
> n <- c(2, 10, 100)
> len.n <- length(n)
> plot(seq(0, 1, length.out = 3001), -1500:1500, type = "n",
+       ylab = expression(italic(BM)[kappa])
+       , xlab = expression(kappa))
> for(i in 1:len.n) {
        +   curve(n[i] * qgamma(x, 1, rate) - qgamma(x, n[i], rate) ,
                  0, 1, col = i, add = TRUE)
+ }
> legend(0.1, 1000, paste("n =", n), lty = rep(1, len.n), col = 1:len.n)
```



(h) On a

```
> n <- c(2, 10, 100)
> len.n <- length(n)
> plot(seq(0, 1, length.out = 10001), 0:10000, type = "n",
+      ylab = expression(italic(BM)[kappa])
+      , xlab = expression(kappa))
> for(i in 1:len.n) {
        +   params.1 <- c(1, rate)
        +   params.n <- c(n[i], rate)
        +   curve(n[i] * TVaRgamma(x, params.1) - TVaRgamma(x, params.n),
                  0, 1, col = i, add = TRUE)
+ }
> legend(0.1, 8000, paste("n =", n), lty = rep(1, len.n), col = 1:len.n)
```



9. Voir GitHub sol-20020 pour une solution alternative. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= E\left[e^{-tS}\right] \\
&= E\left[e^{-t(X_1+X_2)}\right] \\
&= E\left[e^{-tX_1}e^{-tX_2}\right] \\
&\overset{\text{ind}}{=} E\left[e^{-tX_1}\right]E\left[e^{-tX_2}\right] \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)^1 \times \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)^3.
\end{aligned}$$

On remarque que $S \sim Gamma(\alpha = 3, \beta = \frac{1}{2000000})$.

(a) On calcule

```
> alpha <- 1:3
> beta <- 2000000 ^ -1
> qgamma(0.995, alpha, beta)

[1] 10596635 14860259 18547584
```

(b) On obtient

```
> TVaRgamma <- function(x, params) {
+     VaR <- qgamma(x, params[1], params[2])
+     1 / (1 - x) * params[1] / params[2] *
+     (1 - pgamma( VaR, params[1] + 1, params[2]))
+ }
> sapply(alpha, function(t) {
+   params <- c(t, beta)
+   TVaRgamma(0.995, params)
+ })

[1] 12596635 17097503 20970811
```

(c) Commenter

10. Voir GitHub sol-20021. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(t) &= E\left[e^{-tS}\right] \\
&= E\left[e^{-t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right] \\
&= E\left[e^{-tX_1} \times e^{-tX_2} \times \cdots \times e^{-tX_n}\right] \\
&\overset{\text{ind}}{=} E\left[e^{-tX_1}\right] \times E\left[e^{-tX_2}\right] \times \cdots \times E\left[e^{-tX_n}\right] \\
&= \mathcal{L}_X(t)^n.
\end{aligned}$$

On conclut que $S = b \times Y$, où $Y \sim Bin(400, 0.008)$.

Chapitre 4

Modélisation des risques non-vie

4.1 Exercices traditionnels

1. (a) Soit X, la variable aléatoire qui représente le coût (d'un point de vue de l'assureur), du contrat d'assurance. Définition des coûts pour le contrat selon l'approche indemnitaire

$$X = bI$$

avec $I \sim Bern\,(q)$, $q = 0.013$ et $b = 100000$. On a

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 0.987 & x = 0 \\ 0.013 & x = 100000 \end{cases}$$

On déduit

$$\begin{aligned} E[X] &= 0.987 \times 0 + 0.013 \times 100000 \\ &= 1300; \\ E[X^2] &= 0.987 \times 0 + 0.013 \times 100000^2 \\ &= 130000000; \\ Var(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= 130000000 - 1300^2 \\ &= 128310000. \end{aligned}$$

(b) La probabilité que les couts du contrats soient nuls est la probabilité que l'assuré survive, i.e. 0.987.

2. (a) Soit X, la variable aléatoire qui représente le coût du contrat d'assurance. On a

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 0.975 & x = 0 \\ 0.02 & x = 100000 \\ 0.005 & x = 300000 \end{cases}$$

On déduit

$$\begin{aligned} E[X] &= 0.975 \times 0 + 0.02 \times 100000 + 0.005 \times 500000 \\ &= 3500; \\ E[X^2] &= 0.975 \times 0 + 0.02 \times 100000^2 + 0.005 \times 500000^2 \\ &= 650000000; \\ Var(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= 650000000 - 3500^2 \\ &= 637750000. \end{aligned}$$

(b) On calcule

$$\begin{aligned} \Pr(X = 300000 | X > 0) &= \frac{\Pr(X = 300000)}{\Pr(X > 0)} \\ &= \frac{\Pr(X = 300000)}{\Pr(X = 100000) + \Pr(X = 300000)} \\ &= \frac{0.005}{0.02 + 0.005} \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

(c) On a

$$F_X(x) = \begin{cases} 0.975 & x = 0 \\ 0.995 & x = 100000 \\ 1 & x = 300000 \end{cases}$$

On déduit

$$\begin{aligned} VaR_{0.95}(X) &= 0; \\ VaR_{0.99}(X) &= 100000; \\ VaR_{0.995}(X) &= 100000. \end{aligned}$$

3. (a) On a définit la v.a.

$$I = 1_{\{R \leq -0.1\}}$$

On a

$$F_X(x) = 1 - q + qF_B(x)$$

où

$$\begin{aligned} \Pr(I = 1) &= \Pr(R \leq -0.1) \\ &= 0.2118554 \text{ (calculé en R)} \end{aligned}$$

et

$$F_B(x) = 1 - \left(\frac{1000}{1000 + x}\right)^{1.5}, \ x \geq 0$$

Interprétation : la v.a. I sera égale à 1, quand le rendement prendra une valeur inférieure à -10%

(b) On a

$$\begin{aligned} E[X] &= E[I]\,E[B] \\ &= 0.2118554 \times \left(\frac{1000}{1.5 - 1}\right) \\ &= 423.7108 \end{aligned}$$

(c) On a

$$F_X(0) = 1 - q = 1 - 0.2118554 = 0.7881446$$

et

$$\begin{aligned} F_X(10\,000) &= 1 - q + qF_B(10\,000) \\ &= 1 - 0.2118554 + 0.2118554 \times \left(1 - \left(\frac{1000}{1000 + 10000}\right)^{1.5}\right) \\ &= : 0.994\,193\,017\,590 \end{aligned}$$

(d) Comme $\kappa = 0.999 > 1 - q = 0.7881446$, on a

$$\begin{aligned} VaR_{0.999}(X) &= VaR_{\frac{0.999-(1-q)}{q}}(B) \\ &= 1000 \times \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{0.999-(1-q)}{q}\right)^{\frac{1}{1.5}}} - 1\right) \\ &= 1000 \times \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{0.999-(1-0.2118554)}{0.2118554}\right)^{\frac{1}{1.5}}} - 1\right) \\ &= 34538.003476 \end{aligned}$$

De plus, comme B est continue, on a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.999}(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_{0.999}(X)\}}\right]}{1 - 0.999} \\ &= \frac{qE\left[B \times 1_{\{B > VaR_{0.999}(X)\}}\right]}{1 - 0.999} \\ &= \frac{q}{1 - 0.999}\left(\frac{1000}{1.5 - 1}\left(\frac{1000^{1.5-1}}{(1000 + VaR_{0.999}(X))^{1.5-1}}\right) + 34538.003476\left(\frac{1000}{1000 + VaR_{0.999}(X)}\right) \right. \\ &= \frac{0.2118554}{1 - 0.999}\left(\frac{1000}{1.5 - 1}\left(\frac{1000^{0.5}}{(1000 + 34538.003476)^{0.5}}\right) + 34538.003476\left(\frac{1000}{1000 + 34538.003476}\right)^{1.} \right. \\ &= 105614.010\,426 \end{aligned}$$

4. (a)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq x) \\ &= \Pr\left(B \times 1_{\{R \leq -0.1\}} \leq x\right) \\ &= \Pr\left(B \times 1_{\{R \leq -0.1\}} \leq x \,|R \leq -0.1\right) \Pr(R \leq -0.1) + \Pr\left(B \times 1_{\{R \leq -0.1\}} \leq x \,|R > -0.1\right) \Pr(R > -0.1 \\ &= \Pr(B \leq x) \Pr(R \leq -0.1) + \Pr(R > -0.1) \\ &= \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha}\right) \Phi\left(\frac{-0.1 - 0.08}{0.2}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{-0.1 - 0.08}{0.2}\right) \end{aligned}$$

$F_X(5000) = 0.9875.$

$$\begin{aligned}
F_X(5000) &= \left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}\right)\Phi\left(\frac{-0.1-0.08}{0.2}\right)+1-\Phi\left(\frac{-0.1-0.08}{0.2}\right)\\
&= \left(1-\left(\frac{1000}{1000+5000}\right)^{1.5}\right)(1-\Phi(0.9))+1-(1-\Phi(0.9))\\
&= \left(1-\left(\frac{1000}{1000+5000}\right)^{1.5}\right)(1-0.815939875)+0.815939875\\
&= 0.9875.
\end{aligned}$$

Autre solution :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \Pr(X\le x)\\
&= 1-\Pr\left(B\times 1_{\{R\le -0.1\}}>x\right)\\
&= 1-\Pr(B>x)\Pr(R\le -0.1)\\
&= 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}\Phi\left(\frac{-0.1-0.08}{0.2}\right)\\
&= 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}(1-\Phi(0.9))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_X(5000) &= 1-\left(\frac{1000}{1000+5000}\right)^{1.5}(1-\Phi(0.9))\\
&= 1-\left(\frac{1000}{1000+5000}\right)^{1.5}(1-0.815939875)\\
&= 0.9875.
\end{aligned}$$

(b) On cherche le x pour lequel $F_X(x)=\kappa$ i.e.

$$\begin{aligned}
\Pr(B\le x)\Pr(R\le -0.1)+\Pr(R>-0.1) &= \kappa\\
\Pr(B\le x) &= \frac{\kappa-\Pr(R>-0.1)}{\Pr(R\le -0.1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VaR_\kappa(X) &= F_B^{-1}\left(\frac{k-\Pr(R>-0.1)}{\Pr(R\le -0.1)}\right)\\
VaR_{0.99}(X) &= 5971.17
\end{aligned}$$

5. (a)

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[IB]\\
&= E[I]\,E[B]\\
&= (0.2)\left(\mathrm{e}^{5+\frac{2^2}{2}}\right)\\
&= 219.3266
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E[I]\,Var(B) + Var(I)\,E^2[B] \\
&= (q)\,\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right) + q(1-q)\left(\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2 \\
&= (0.2)\left(\mathrm{e}^{(2)(5)+2^2}\left(\mathrm{e}^{2^2}-1\right)\right) + (0.2)(0.8)\left(\mathrm{e}^{5+\frac{2^2}{2}}\right)^2 \\
&= 13083890.
\end{aligned}$$

(b) On sait que

$$\begin{aligned}
F_X(y) &= \Pr(X \leq y) \\
&= 1 - q + qF_B(y)
\end{aligned}$$

et on a

$$1 - q = 0.8.$$

Donc, pour $\kappa = 0.5 < 0.8$ on a

$$VaR_{0.5}(X) = 0$$

et

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.5}(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\left(E\left[X \times 1_{X>VaR_{0.5}(X)}\right] + VaR_{0.5}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.5}(X)\right)-\kappa\right)\right) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{X>0}\right] \\
&= \frac{E[X]}{1-0.5} \\
& \quad \frac{219.3266}{0.5} \\
&= 438.6533
\end{aligned}$$

Pour $\kappa = 0.99 > 0.8$:

$$\begin{aligned}
F_X(y) &= 1 - q + qF_B(y) = 0.99 \\
F_B(y) &= \frac{0.99-(1-q)}{q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VaR_{0.99}(X) &= F_B^{-1}\left(\frac{0.99-(1-q)}{q}\right) \\
&= F_B^{-1}(0.95) \\
&= \mathrm{e}^{5+2VaR_{0.95}(Z)} \\
&= 3983.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.99}(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{0.99}(X)\}}\right] + VaR_{0.99}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.99}(X)\right)-0.99\right)}{1-0.99} \\
&= \frac{E\left[IB \times 1_{\{X>VaR_{0.99}(X)\}}\right]}{1-0.99} \\
&= \frac{E\left[IB \times 1_{\{X>VaR_{0.99}(X)\}}\,|I=0\right]\Pr(I=0) + E\left[IB \times 1_{\{X>VaR_{0.99}(X)\}}\,|I=1\right]\Pr(I=1)}{1-0.99} \\
&= \frac{E\left[B \times 1_{\{B>VaR_{0.99}(X)\}}\right]\Pr(I=1)}{1-0.99}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[B \times 1_{\{B>VaR_{0.99}(X)\}}\right] &= E\left[B\right] - E\left[B \times 1_{\{B\leq VaR_{0.99}(X)\}}\right] \\
&= \left(\mathrm{e}^{5+\frac{2^2}{2}}\right) - \left(\mathrm{e}^{5+\frac{2^2}{2}}\right)\Phi\left(\frac{\ln\left(3983\right)-5-2^2}{2}\right) \\
&= 1096.633158 - \left(1096.633158\right)\Phi\left(-0.355104708\right) \\
&= 1096.633158\left(1-0.361255575\right) \\
&= 700.468316
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.99}\left(X\right) &= \frac{E\left[B \times 1_{\{B>VaR_{0.99}(X)\}}\right]\Pr\left(I=1\right)}{1-0.99} \\
&= \frac{\left(700.468316\right)\left(0.2\right)}{1-0.99} \\
&= 14009
\end{aligned}$$

6. (a) On a $B = C+D$ où $C \in \{100, 200\}$ et $D \in \{100, 200, 300, 400\}$. Alors, $B \in \{200, 300, 400, 500, 600\}$ où

$$\Pr(B=k) = \begin{cases} 0.25, \ k=200 \\ 0.05+0.2273 = 0.2773, \ k=300 \\ 0.0852+0.1727 = 0.2579, \ k=400 \\ 0.0375+0.1148 = 0.1523, \ k=500 \\ 0.0625, \ k=600. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X=0\right) &= 0.875 \\
\Pr\left(X=200\right) &= \Pr\left(X=200\left|I=1\right.\right)\Pr\left(I=1\right) + \Pr\left(X=200\left|I=0\right.\right)\Pr\left(I=0\right) \\
&= \Pr\left(B=200\right)\Pr\left(I=1\right) \\
&= \left(0.25\right)\left(0.125\right) \\
&= 0.03125
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X=300\right) &= \Pr\left(B=300\right)\Pr\left(I=1\right) \\
&= \left(0.2773\right)\left(0.125\right) \\
&= 0.0346625
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X=400\right) &= \Pr\left(B=400\right)\Pr\left(I=1\right) \\
&= \left(0.2579\right)\left(0.125\right) \\
&= 0.0346625
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X=500\right) &= \Pr\left(B=500\right)\Pr\left(I=1\right) \\
&= \left(0.1523\right)\left(0.125\right) \\
&= 0.0190375
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X=600\right) &= \Pr\left(B=600\right)\Pr\left(I=1\right) \\
&= \left(0.0625\right)\left(0.125\right) \\
&= 0.0078125
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= (1-q) + qF_B(x) = \kappa \\ F_B(x) &= \frac{\kappa - (1-q)}{q} \\ VaR_\kappa(X) &= F_B^{-1}\left(\frac{\kappa-(1-q)}{q}\right) \end{aligned}$$

Pour $\kappa < 1 - 0.125$, on a $VaR_\kappa(X) = 0$ et pour $\kappa > 1 - 0.125$

$$VaR_\kappa(X) = VaR_{\frac{\kappa-(1-q)}{q}}(B).$$

Pour $\kappa = 0.95$ on a $\frac{\kappa-(1-q)}{q} = 0.6$ et

$$F_B(x) = \begin{cases} 0.25, & 200 \leq x < 300 \\ 0.5273, & 300 \leq x < 400 \\ 0.7852, & 400 \leq x < 500 \\ 0.9375, & 500 \leq x < 600 \\ 1, & x > 600 \end{cases}$$

Donc

$$VaR_{0.95}(X) = F_B^{-1}(0.6) = 400.$$

Pour vérifier

$$\begin{aligned} F_X(400) &= \Pr(X \leq 400) \\ &= \Pr(X \leq 400 \,|I=1) \Pr(I=1) + \Pr(X \leq 400 \,|I=0) \Pr(I=0) \\ &= \Pr(B \leq 400) \Pr(I=1) + \Pr(I=0) \\ &= (0.7852)(0.125) + (1-0.125) \\ &= 0.97315 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} F_X(400) = 0.97315 \\ F_X(300) = 0.94091 \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.95}(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_{0.95}(X)\}}\right] + VaR_{0.95}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.95}(X)\right) - 0.95\right)}{1-0.95} \\ &= \frac{qE\left[B \times 1_{\{B > VaR_{0.95}(X)\}}\right] + VaR_{0.95}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.95}(X)\right) - 0.95\right)}{1-0.95} \\ &= \frac{qE\left[B \times 1_{\{B > VaR_{0.95}(X)\}}\right] + VaR_{0.95}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.95}(X)\right) - 0.95\right)}{1-0.95} \\ &= \frac{(0.125)\,E\left[B \times 1_{\{B>400\}}\right] + (400)\left(F_X(400) - 0.95\right)}{1-0.95} \\ &= \frac{(0.125)\left((500)(0.1523) + (600)(0.0625)\right) + (400)(0.97315 - 0.95)}{1-0.95} \\ &= 469.325 \end{aligned}$$

(d)

$$\Pr(B=k)=\begin{cases} 0.25,\ k=200 \\ 0.05+0.2273=0.2773,\ k=300 \\ 0.0852+0.1727=0.2579,\ k=400 \\ 0.0375+0.1148=0.1523,\ k=500 \\ 0.0625,\ k=600. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[B] &= (200)(0.25)+(300)(0.2773)+(400)(0.2579)+(500)(0.1523)+(600)(0.0625) \\ &= 350 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(B) &= E\left[B^2\right]-E^2[B] \\ &= \Big((200)^2(0.25)+(300)^2(0.2773)+(400)^2(0.2579)+(500)^2(0.1523)+(600)^2(0.0625)\Big)-(350)^2 \\ &= 14296. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= E[I]\,E[B] \\ &= (0.125)(350) \\ &= 43.75. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[I]\,Var(B)+Var(I)\,E[B]^2 \\ &= (0.125)(14296)+(0.125)(1-0.125)(350)^2 \\ &= 15185.44. \end{aligned}$$

7. (a) Les coûts pour le contrat sont définis selon l'approche indemnitaire, soit

$$X=bI_x$$

avec $I_x\sim Bern(q_x)$, $x=50$ et $b=2000$. La probabilité de décès q_x est

$$q_x=1-\exp\{-0.000055\times 1.1^x\}$$

Pour un assuré de 50 ans, la probabilité de décès est

$$\begin{aligned} q_{50} &= 1-\exp\left\{-0.000055\times 1.1^{50}\right\} \\ &= 0.006435 \end{aligned}$$

$$E[X]=bE[I_{50}]=2000q_{50}=(2000)(0.006435698)=12.8714$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= b^2Var(I_{50})=(2000)^2\,q_{50}(1-q_{50}) \\ &= (2000)^2(0.006436)(1-0.006436) \\ &= 25578. \end{aligned}$$

$$\Pr(X=0)=\Pr(I_{50}=0)=1-q_{50}=(1-0.006436)=0.993564.$$

(b) Fonction génératrice des probabilités

$$\begin{aligned}
P_X(t) &= M_X(\ln(t)) = E\left[t^X\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{X\ln(t)}\right] = E\left[\mathrm{e}^{bI_{50}\ln(t)}\right] \\
&= \Pr(I_{50}=0) + \Pr(I_{50}=1)\,\mathrm{e}^{b\ln(t)} \\
&= (1-q_{50}) + q_{50}t^b.
\end{aligned}$$

8. (a) On a $U \in \left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}\right\}$ et $c = 200000$ et donc $B \in \{0, 40000, ..., 200000\}$ et $X \in \{0, 40000, ..., 200000\}$. On a

$$\begin{aligned}
\Pr\left(U=\frac{1}{5}\right) &= \Pr\left(\frac{J+1}{5}=\frac{1}{5}\right) \\
&= \Pr(J=0) \\
&= \binom{4}{0}(0.25)^0(0.75)^4 \\
&= (0.75)^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(U=\frac{2}{5}\right) &= \Pr\left(\frac{J+1}{5}=\frac{2}{5}\right) \\
&= \Pr(J=1) \\
&= \binom{4}{1}(0.25)^1(0.75)^3
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Alors, la fmp de U est

$$\Pr(U=k) = \begin{cases}
(0.75)^4\,, & k=\frac{1}{5} \\
\binom{4}{1}(0.25)^1(0.75)^3\,, & k=\frac{2}{5} \\
\binom{4}{2}(0.25)^2(0.75)^2\,, & k=\frac{3}{5} \\
\binom{4}{3}(0.25)^3(0.75)^1\,, & k=\frac{4}{5} \\
(0.25)^4\,, & k=\frac{5}{5}
\end{cases}$$

Les probabilités associées aux valeurs possibles de X sont

$\Pr(X=0) = \Pr(I=0) = 0.95$

$\Pr(X=40000) = \Pr(I=1)\Pr(B=40000) = (0.05)(0.75)^4 = 0.01582$

$\Pr(X=80000) = \Pr(I=1)\Pr(B=80000) = (0.05)\binom{4}{1}(0.25)^1(0.75)^3 = 0.021094$

$\Pr(X=120000) = \Pr(I=1)\Pr(B=120000) = (0.05)\binom{4}{2}(0.25)^2(0.75)^2 = 0.010547$

$\Pr(X=160000) = \Pr(I=1)\Pr(B=160000) = (0.05)\binom{4}{3}(0.25)^3(0.75)^1 = 0.002344$

$\Pr(X=200000) = \Pr(I=1)\Pr(B=200000) = (0.05)(0.25)^4 = 0.000195$

(b) Espérance et variance :

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[I]\,E[B] = E[I]\,E[cU] = E[I]\,E\left[c\left(\frac{J+1}{5}\right)\right] \\
&= (0.05)\left(\frac{200000}{5}\right)(E[J]+1) \\
&= (0.05)\left(\frac{200000}{5}\right)((4)(0.25)+1) \\
&= 4000
\end{aligned}$$

$$Var(X) = E[Var(X|I)] + Var(E[X|I])$$

$$E[X|I] = IE[B] = IE\left[c\left(\frac{J+1}{5}\right)\right] = I\left(\frac{200000}{5}\right)(E[J]+1)$$

$$Var(X|I) = IVar(B) = IVar\left(c\left(\frac{J+1}{5}\right)\right) = I\left(\frac{200000}{5}\right)^2 Var(J)$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E[Var(X|I)] + Var(E[X|I]) \\
&= E\left[I\left(\frac{200000}{5}\right)^2 Var(J)\right] + Var\left(I\left(\frac{200000}{5}\right)(E[J]+1)\right) \\
&= Var(J)\left(\frac{200000}{5}\right)^2 E[I] + \left(\frac{200000}{5}\right)^2 (E[J]+1)^2 Var(I) \\
&= (4)(0.25)(0.75)\left(\frac{200000}{5}\right)^2 (0.05) + \left(\frac{200000}{5}\right)^2 ((4)(0.25)+1)^2 ((0.05)(0.95)) \\
&= 19079.
\end{aligned}$$

9. (a) Espérance et variance :

$$E[U] = \int_0^1 x f_U(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x1.2x^{0.2}\mathrm{d}x = 0.5454$$

$$E\left[U^2\right] = \int_0^1 x^2 f_U(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 1.2x^{0.2}\mathrm{d}x = 0.375$$

$$E[B] = 200E[U] = (200)(0.5454) = 109.08$$

$$Var(B) = (200)^2 Var(U) = (200)^2\left(0.375 - (0.5454)^2\right) = 3102$$

Espérance de X :

$$E[X] = E[I]E[B] = (0.1)(109.08) = 10.909$$

Variance de X :

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E[I]Var(B) + Var(I)E[B]^2 \\
&= (0.1)(3102) + (0.1)(0.9)(109.08)^2 \\
&= 1381.
\end{aligned}$$

Fonction de répartition de X :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= 1 - q + qF_B(x) \\
&= 0.9 + (0.1)F_U\left(\frac{x}{200}\right)
\end{aligned}$$

avec $F_U(y) = \int_0^y 1.2x^{0.2}\mathrm{d}x = y^{1.2}, \qquad 0 < y < 1$

(b) Probabilité que $X > 150$:

$$\begin{aligned}
\Pr(X > 150) &= 1 - F_X(150) \\
&= 0.1 - (0.1)F_U\left(\frac{150}{200}\right) \\
&= 0.1 - (0.1)\left(\frac{150}{200}\right)^{1.2} \\
&= 0.0292
\end{aligned}$$

10. (a) Probabilité nulle :

$$\begin{aligned}\Pr(X=0) &= \Pr(M=0)\\ &= \exp(-2)\\ &= 0.13534\end{aligned}$$

(b) Espérance et variance :

$$\begin{aligned}E[X] &= E[M]\,E[B]\\ &= (2)\left(\frac{5}{4-1}\right)\\ &= 10.0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E^2[B]\\ &= (2)\left(\frac{15}{4-1}\right)^2\left(\frac{4}{4-2}\right) + (2)\left(\frac{15}{4-1}\right)^2\\ &= 150.\end{aligned}$$

(c) Probabilité que les coûts pour le contrat soient supérieurs à 10 :

$$\begin{aligned}\Pr(X>10|M=1) &= \Pr(B>10)\\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+10}\right)^{\alpha}\\ &= \left(\frac{15}{15+10}\right)^{4}\\ &= \frac{81}{625}\\ &= 0.1296\end{aligned}$$

11. (a) Afin de calculer $\Pr(B\leq 5000)$, nous devons identifier les paramètres de la loi lognormale de B_0

$$\begin{aligned}E[B_0] &= \exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right) = 1000\\ E\left[B_0^2\right] &= \exp\left(2\mu+\frac{2^2}{2}\sigma^2\right) = 1690000+1000^2\end{aligned}$$

avec

$$\frac{\exp\left(2\mu+\frac{2^2}{2}\sigma^2\right)}{\exp(2\mu+\sigma^2)} = \frac{1690000+1000^2}{1000^2} = \exp(\sigma^2)$$

Alors

$$\sigma = \sqrt{\ln\left(\frac{1690000+1000^2}{1000^2}\right)} = 0.994757$$

et

$$\mu = \ln(1000) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1690000+1000^2}{1000^2}\right) = 6.4130$$

On a

$$\begin{aligned}\Pr(B\leq 5000) &= \Pr(1.6B_0\leq 5000)\\ &= \Pr\left(B_0\leq\frac{5000}{1.6}\right)\end{aligned}$$

Comme $B_0 = \mathrm{e}^Y$ avec $Y \sim Norm\left(\mu, \sigma^2\right)$, il en résulte que

$$\begin{aligned}
\Pr\left(B_0 \leq \frac{5000}{1.6}\right) &= \Pr\left(Y \leq \ln\left(\frac{5000}{1.6}\right)\right) \\
&= \Pr\left(Z \leq \frac{\ln\left(\frac{5000}{1.6}\right) - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Pr\left(Z \leq \frac{\ln\left(\frac{5000}{1.6}\right) - 6.4130}{0.994757}\right) \\
&= \Pr\left(Z \leq 1.6428\right) \\
&= 0.9498
\end{aligned}$$

(b) On sait que la probabilité qu'une réclamation se produise est de 10%. Donc $I \sim Bern(q)$ où $q = 0.1$.

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X \leq 5000\right) &= \Pr\left(I = 0\right) + \Pr\left(I = 1\right)\Pr\left(B \leq 5000\right) \\
&= 1 - q + q\Pr\left(B \leq 5000\right) \\
&= 1 - q + q\Pr\left(B_0 \leq \frac{5000}{1.6}\right) \\
&= 0.9 + (0.1)\,(0.9498) \\
&= 0.99498
\end{aligned}$$

(c) Afin de calculer $\Pr\left(B \leq 5000\right)$, nous devons identifier les paramètres de la loi Pareto de B_0 :

$$\begin{aligned}
E\left[B_0\right] &= \frac{\lambda}{\alpha - 1} = 1000 \\
Var\left(B_0\right) &= \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha - 1)^2\,(\alpha - 2)} = 1690000
\end{aligned}$$

$$\frac{Var\left(B_0\right)}{\left(E\left[B_0\right]\right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha - 2} = \frac{1690000}{(1000)^2} = 1.69$$

On obtient donc

$$\alpha = \frac{(2)\,(1.69)}{0.69} = 4.899$$

et

$$\lambda = (1000)\,(4.899 - 1) = 3899.$$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(B \leq 5000\right) &= 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 5000}\right)^{\alpha} \\
&= \Pr\left(B_0 \leq \frac{5000}{1.6}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{3899}{3899 + \frac{5000}{1.6}}\right)^{4.899} \\
&= 0.944.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X \leq 5000\right) &= \Pr\left(I = 0\right) + \Pr\left(I = 1\right)\Pr\left(B \leq 5000\right) \\
&= 0.9 + (0.1)\,(0.944) \\
&= 0.9944
\end{aligned}$$

12. (a) Espérance et variance :

$$\begin{aligned} E[M] &= \sum_{k=0}^{2} k \Pr(M=k) \\ &= (0)(0.7) + (1)(0.2) + (2)(0.1) \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[M^2\right] &= \sum_{k=0}^{2} k^2 \Pr(M=k) \\ &= (0)^2(0.7) + (1)^2(0.2) + (2)^2(0.1) \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$Var(M) = E\left[M^2\right] - E^2[M] = 0.6 - (0.4)^2 = 0.44$$

$$\begin{aligned} E[B] &= \frac{2}{\frac{1}{5}} = 10 \\ Var(B) &= \frac{2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 50 \end{aligned}$$

$$E[X] = E[M]\,E[B] = (0.4)(10) = 4$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E^2[B] \\ &= (0.4)(50) + (0.44)(10)^2 \\ &= 64 \end{aligned}$$

(b) Fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = \Pr(M=0) + \sum_{k=1}^{2} \Pr(M=k) \Pr(B_1 + ... + B_k \leq x)$$

où

$$B_1 + ... + B_k \sim Erlang(2k; \beta)$$

avec $\beta = \frac{1}{5}$. Ainsi,

$$F_{B_1+...+B_k}(x) = 1 - \sum_{j=0}^{2k-1} \frac{(\beta x)^j}{j!} e^{-\beta x}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X > 20) &= 1 - F_X(20) \\ &= 1 - (0.7 + (0.2)(0.908) + (0.1)(0.567)) \\ &= 0.0617. \end{aligned}$$

13. Espérance de X :

$$E[X] = E[M]\,E[B]$$

Variance de X :

$$Var(X) = E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E[B]^2$$

Espérance et variance de B :

$$\begin{aligned} E[B] &= \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = \mathrm{e}^{3+\frac{(1.5)^2}{2}} = 61.8678 \\ Var(B) &= \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right) = \mathrm{e}^{(2)(3)+(1.5)^2}\left(\mathrm{e}^{(1.5)^2}-1\right) = 32487.88 \end{aligned}$$

(a) $M \sim Bin(6, 0.08)$

Espérance et variance de M :

$$\begin{aligned} E[M] &= (6)(0.08) = 0.48 \\ Var(M) &= (6)(0.08)(0.92) = 0.4416 \end{aligned}$$

Espérance de X :

$$E[X] = E[M]E[B] = (0.48)(61.8678) = 29.70$$

Variance de X :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]Var(B) + Var(M)E^2[B] \\ &= (0.48)(32487.88) + (0.4416)(61.8678)^2 \\ &= 17284.46 \end{aligned}$$

Calcul de $\Pr(X=0)$:

$$\Pr(X=0) = \Pr(M=0) = (1-0.08)^6 = 0.6064$$

(b) $M \sim Pois(0.48)$

Espérance et variance de M :

$$\begin{aligned} E[M] &= 0.48 \\ Var(M) &= 0.48 \end{aligned}$$

Espérance de X :

$$E[X] = E[M]E[B] = (0.48)(61.8678) = 29.6965$$

Variance de X :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]Var(B) + Var(M)E[B]^2 \\ &= (0.48)(32487.88) + (0.48)(61.8678)^2 \\ &= 17431.44 \end{aligned}$$

Calcul de $\Pr(X=0)$:

$$\Pr(X=0) = \Pr(M=0) = \mathrm{e}^{-0.48} = 0.6188.$$

(c) $M \sim BinNeg(r=2, \beta=0.24)$ (ou $\sim BinNeg\left(r=2, q=\frac{1}{1+0.24}\right)$ avec $q = 0.8064516129$)

Espérance et variance de M :

$$\begin{aligned} E[M] &= (2)(0.24) = 0.48 \\ Var(M) &= (2)(0.24)(1+0.24) = 0.5952 \end{aligned}$$

Espérance de X :

$$E[X] = E[M]E[B] = (0.48)(61.8678) = 29.69654844$$

Variance de X :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E^2[B] \\ &= (0.48)(32487.88) + (0.5952)(61.8678)^2 \\ &= 17872.38. \end{aligned}$$

Calcul de $\Pr(X=0)$:

$$\begin{aligned} \Pr(X=0) &= \Pr(M=0) = \frac{\Gamma(r+0)}{\Gamma(r)0!}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^0 \\ &= \left(\frac{1}{1.24}\right) = 0.6504. \end{aligned}$$

14. (a) Espérance de X :

$$E[X] = E[M]\,E[B] = (0.2)(1000) = 200$$

Variance de X :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E^2[B] \\ &= (0.2)(1000)^2 + (0.2)(1000)^2 \\ &= 400000 \end{aligned}$$

(b) Fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = \Pr(M=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M=k)\Pr(B_1 + ... + B_k \le x)$$

où

$$B_1 + ... + B_k \sim Erlang(k;\beta)$$

avec $\beta = \frac{1}{1000}$. Ainsi,

$$F_{B_1+...+B_k}(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\beta x)^j}{j!} e^{-\beta x}$$

Pour cet exercice, on sait $\Pr(M>4)=0$, ce qui implique que $\Pr(M=k)=0$ pour $k=5,6,...$

$$\begin{aligned} \Pr(X>3000) &= 1 - F_X(3000) \\ &= 0.01194641 \end{aligned}$$

15. (a) Espérance de X :

$$E[X] = E[M]\,E[B] = (1.4)(1000) = 1400$$

Paramètre de la loi géométrique :

$$E[M] = \frac{1-\theta}{\theta} = 1.4$$

ce qui implique

$$\theta = \frac{1}{2.4}$$

Variance de M :

$$Var(M) = \frac{E[M]}{\theta} = (1.4)(2.4)$$

Variance de X :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E^2[B] \\ &= (1.4)(1000)^2 + (1.4)(2.4)(1000)^2 \\ &= 4760000. \end{aligned}$$

(b) Pour identifier la forme analytique de F_X et pour nous aider à répondre à (b), on a recours à la f.g.m. de X :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= P_M(M_B(t)) \\ &= \frac{\theta}{(1-(1-\theta)M_B(t))} \\ &= \frac{\theta}{\left(1-(1-\theta)\frac{\beta}{\beta-t}\right)} \end{aligned}$$

On veut montrer que

$$M_X(t) = 1-q+qM_C(t) = \frac{\theta}{\left(1-(1-\theta)\frac{\beta}{\beta-t}\right)}$$

On sait que

$$\Pr(M=0) = \Pr(I=0)$$

où

$$\begin{aligned} \Pr(M=0) &= \theta \\ \Pr(I=0) &= 1-q \end{aligned}$$

Cela implique

$$1-q=\theta \text{ ou } q=1-\theta$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \Pr(M=0) + \sum_{k=1}^{\infty}\Pr(M=k)\left\{M_B(t)\right\}^k \\ &= \theta + \sum_{k=1}^{\infty}\theta(1-\theta)^k\left\{M_B(t)\right\}^k \\ &= \theta + \sum_{k=1}^{\infty}\theta(1-\theta)^k\left\{\frac{\beta}{\beta-t}\right\}^k \\ &= \theta + (1-\theta)\sum_{k=1}^{\infty}\theta(1-\theta)^{k-1}\left\{\frac{\beta}{\beta-t}\right\}^k \\ &= \theta + (1-\theta)\left(\theta\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(1-\theta)^{k-1}\left\{\frac{\beta}{\beta-t}\right\}^{k-1}\right) \\ &= \theta + (1-\theta)\left(\theta\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)\frac{1}{1-(1-\theta)\frac{\beta}{\beta-t}}\right) \\ &= \theta + (1-\theta)\left(\theta\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)\frac{\beta-t}{\beta-t-(1-\theta)\beta}\right) \\ &= \theta + (1-\theta)\left(\frac{\beta\theta}{\beta\theta-t}\right) \end{aligned}$$

On obtient

$$M_X(t) = \theta + (1-\theta)\left(\frac{\beta\theta}{\beta\theta - t}\right)$$

Alors on peut écrire

$$X = \begin{cases} C, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases}$$

avec $I \sim Bern(q^*)$ où $q^* = 1 - \theta = 1 - \frac{1}{2.4} = \frac{1.4}{2.4} = 0.583333$ et la v.a. C obéit à une loi exponentielle de moyenne $\frac{1}{\beta\theta} = \frac{1}{\beta'} = (1000)(2.4) = 2400$ d'où $\beta^* = \frac{1}{2400}$.

(c) Expression analytique de $F_X(x)$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(I=0) + \Pr(I=1) F_C(x) \\ &= 1 - q + qF_C(x) \\ &= \frac{1}{2.4} + \frac{1.4}{2.4}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2400}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X > 3000) &= 1 - F_X(3000) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2.4} + \frac{1.4}{2.4}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3000}{2400}}\right)\right) \\ &= 0.1671. \end{aligned}$$

16. (a) Espérance de M :

$$E[M] = r\left(\frac{1-q}{q}\right) = 3\left(\frac{1-0.2}{0.2}\right) = 12$$

Variance de M :

$$Var(M) = \frac{E[M]}{q} = \frac{12}{0.2} = 60$$

Espérance de X :

$$E[X] = E[M]\,E[B] = (12)(1000) = 12000$$

Variance de X :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E^2[B] \\ &= (12)(1000)^2 + (60)(1000)^2 \\ &= 72000000. \end{aligned}$$

(b) Pour identifier la forme analytique de F_X et pour nous aider à répondre à (b), on a recours de à la f.g.m. de X.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= P_M(M_B(t)) \\ &= \left(\frac{q}{(1-(1-q)M_B(t))}\right)^r \\ &= \left(\frac{q}{\left(1-(1-q)\frac{\beta}{\beta-t}\right)}\right)^r \end{aligned}$$

On veut montrer que la f.g.m. de X peut aussi s'écrire sous la forme

$$M_X(t) = (1 - q^* + q^* M_{B^*}(t))^r. \tag{4.1}$$

A l'aide de la solution de la question **??**, on déduit que

$$\begin{aligned} 1-q^* &= q \\ M_{B^*}(t) &= \left(\frac{\beta q}{\beta q - t}\right) = \left(\frac{\beta^*}{\beta^* - t}\right). \end{aligned}$$

Il découle de (4.1) que la v.a. X obéit à une loi binomiale composée où $M^* \sim Binom(r, q^*)$ avec $q^* = 0.8$ et $B^* \sim Exp(\beta^*)$ avec $\beta^* = \left(\frac{1}{1000}\right)(0.2)$.

(c) Fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = \Pr(M^* = 0) + \sum_{k=1}^{r} \Pr(M^* = k) \Pr(B_1^* + ... + B_k^* \leq x)$$

où

$$B_1^* + ... + B_k^* \sim Erlang(k; \beta^*)$$

avec $r = 3$ et $\beta^* = \left(\frac{1}{1000}\right)(0.2)$. Ainsi,

$$F_{B_1^*+...+B_k^*}(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\beta^* x)^j}{j!} e^{-\beta^* x}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X > 3000) &= 1 - F_X(3000) \\ &= 1 - 0.1099592 \\ &= 0.890. \end{aligned}$$

17. On définit X par l'approche forfaitaire

$$X = \begin{cases} B, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases}$$

avec $I \sim Bern(q)$, $q = 0.2$ et $B \sim \exp(\lambda = 0.01)$.

(a) Espérance de B :

$$E[B] = \frac{1}{0.01} = 100$$

Variance de B :

$$Var[B] = \frac{1}{(0.01)^2} = 10000$$

Probabilité que $B > 200$

$$\begin{aligned} \Pr(B > 200) &= 1 - \Pr(B \leq 200) \\ &= 1 - (1 - \exp(-0.01 \times 200)) \\ &= 0.135\,335\,283\,2 \end{aligned}$$

(b) Espérance de X :

$$\begin{aligned} E[X] &= E[B]\,E[I] \\ &= (100)(0.2) = 20 \end{aligned}$$

Variance de X :

$$Var(X) = E^2[B]\,Var(I) + Var(B)\,E[I]$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= (100)^2 (0.2)(1-0.2) + (10000)(0.2) \\ &= 3600 \end{aligned}$$

Probabilité que $X = 0$

$$\begin{aligned} \Pr(X=0) &= \Pr(I=0) \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

Probabilité que $X \leq 100$

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq 100) &= \Pr(B \leq 100 \,| I=1) \Pr(I=1) + \Pr(B \leq 100 \,| I=0) \Pr(I=0) \\ &= \Pr(B \leq 100)(q) + (1)(1-q) \\ &= (1 - \exp(-(0.01)(100)))(0.2) + (1)(0.8) \\ &= 0.9264 \end{aligned}$$

Probabilité que $X > 200$

$$\begin{aligned} \Pr(X > 200) &= 1 - \Pr(X \leq 200) \\ &= 1 - (\Pr(B \leq 200 \,| I=1) \Pr(I=1) + \Pr(B \leq 200 \,| I=0) \Pr(I=0)) \\ &= 1 - (\Pr(B \leq 200)(q) + (1)(1-q)) \\ &= 1 - ((1 - \exp(-(0.01)(200)))(0.2) + (1)(0.8)) \\ &= 0.027067. \end{aligned}$$

(c) On cherche X_{99} tel que $\Pr(X \leq X_{99}) = 99\%$.

$$\Pr(X \leq X_{99}) = \Pr(B \leq X_{99} \,| I=1) \Pr(I=1) + \Pr(B \leq X_{99} \,| I=0) \Pr(I=0) = 0.99$$

$$\begin{aligned} \Pr(B \leq X_{99} \,| I=1) \Pr(I=1) + \Pr(B \leq X_{99} \,| I=0) \Pr(I=0) &= 0.99 \\ \Pr(B \leq X_{99})(q) + \Pr(B \leq X_{99})(1-q) &= 0.99 \\ \Pr(B \leq X_{99})(0.2) + (1)(0.8) &= 0.99 \\ \Pr(B \leq X_{99}) &= 0.95 \end{aligned}$$

On cherche maintenant X_{99} tel que $\Pr(B \leq X_{99}) = 0.95$:

$$\begin{aligned} \Pr(B \leq X_{99}) &= 0.95 \\ 1 - \exp(-0.01 \times X_{99}) &= 0.95 \\ X_{99} &= 299.5732. \end{aligned}$$

(d) Soit Y_{100} le montant de la réclamation maximale pour 100 contrats.

$$\begin{aligned} \Pr(Y_{100} > 500) &= 1 - \Pr(Y_{100} \leq 500) \\ &= 1 - \Pr(X_1 \leq 500, X_2 \leq 500, X_3 \leq 500 ... X_{100} \leq 500). \end{aligned}$$

Les risques sont supposés indépendants alors

$$\begin{aligned} \Pr(Y_{100} > 500) &= 1 - (\Pr(X \leq 500))^{100} \\ &= 1 - (\Pr(B \leq 500 \,| I=1) \Pr(I=1) + \Pr(B \leq 500 \,| I=0) \Pr(I=0))^{100} \\ &= 1 - ((1 - \exp(-(0.01)(500)))(0.2) + (1)(0.8))^{100} \\ &= 0.12615. \end{aligned}$$

(e) On suppose maintenant que B obéit à une loi de Pareto ($\alpha = 3$ et $\lambda = 200$).

On cherche X_{99} tel que $\Pr(X \leq X_{99}) = 99\%$. On sait, à partir de (c), que cette probabilité est

$$\Pr(B \leq X_{99}) = 0.95.$$

$$\begin{aligned}
\Pr(B \leq X_{99}) &= 0.95 \\
&= 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + X_{99}}\right)^{\alpha}
\end{aligned}$$

En solutionnant pour X_{99}, on obtient

$$X_{99} = 342.8835.$$

On cherche $\Pr(\text{réclamation maximale} > 500)$ pour la loi de Pareto. On définit W_{100} comme étant le montant de la réclamation maximale pour 100 contrats. À partir de (d), on obtient

$$\begin{aligned}
\Pr(W_{100} > 500) &= 1 - (\Pr(X \leq 500))^{100} \\
&= 1 - (\Pr(B \leq 500)(q) + (1)(1-q))^{100}
\end{aligned}$$

où la probabilité que $B \leq 500$ est

$$\Pr(B \leq 500) = 1 - \left(\frac{200}{200 + 500}\right)^{3} = 0.9767.$$

On trouve que

$$\begin{aligned}
\Pr(W_{100} > 500) &= 1 - ((0.976676)(0.2) + (1)(0.8))^{100} \\
&= 0.3735.
\end{aligned}$$

On regarde le probabilité que la réclamation maximale dépasse la somme des primes chargées à 100 contrats.
Pour la modélisation des montants de sinistres avec la loi exponentielle, où $E[X] = 20$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Pr(Y_{100} > 100 \times E[X]) &= \Pr(Y_{100} > (100)(20)) \\
&= 1 - \Pr(Y_{100} \leq 2000) \\
&= 1 - (\Pr(X \leq 2000))^{100} \\
&= 4.122307161 \times 10^{-8}
\end{aligned}$$

Pour des montants de sinistres qui obéissent à une loi de Pareto, on a

$$E[X] = E[B]\,E[I] = (100)(0.2) = 20$$

$$\begin{aligned}
\Pr(Y_{100} > (100)\,E[X]) &= \Pr(Y_{100} > (100)(20)) \\
&= 1 - (\Pr(X \leq 2000))^{100} \\
&= 0.014915.
\end{aligned}$$

18. Il y a 4 ans, les montants d'un sinistre obéissait à un loi Gamma de paramètres $(0.2, 0.01)$.

(a) Espérance :

$$E[X] = E[1+R]\,E[Y]$$

$$E[Y] = E[M]\,E[B] = (3)(0.2)\left(\frac{0.2}{0.01}\right) = 12$$

$$E[1+R] = (1+0)(0.75) + (1+0.5)(0.25) = 1.125$$
$$E[X] = E[1+R]\,E[Y] = (1.125)(12) = 13.5$$

Variance :

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - E^2[X]$$
$$E\left[X^2\right] = E\left[(1+R)^2 Y^2\right] = E\left[(1+R)^2\right] E\left[Y^2\right]$$
$$E\left[(1+R)^2\right] = (1+0)^2(0.75) + (1+0.5)^2(0.25) = 1.3125$$
$$E\left[Y^2\right] = Var(Y) + E^2[Y] = 1392 + 12^2 = 1536$$

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E^2[B]\,Var(M) + Var(B)\,E[M] \\ &= \left(\frac{0.2}{0.01}\right)^2 (3)(0.2)(0.8) + \left(\frac{0.2}{0.01^2}\right)(3)(0.2) \\ &= 1392. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[(1+R)^2\right] E\left[Y^2\right] - E^2[X] \\ &= (1.3125)(1536) - (13.5)^2 \\ &= 1833.75. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \Pr(X > 30) &= 1 - \Pr(X \leq 30) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{2} \Pr(X \leq 30 \,|R = r_i\,) \\ &= 1 - (\Pr(Y \leq 30 \,|R = 0\,)\Pr(R=0) + \Pr(1.5Y \leq 30 \,|R = 0.5\,)\Pr(R = 0.5)) \\ &= 1 - (\Pr(Y \leq 30)\Pr(R=0) + \Pr(Y \leq 20)\Pr(R=0.5)) \end{aligned}$$

$$\Pr(Y \leq y) = \Pr(M=0) + \sum_{i=1}^{3} \Pr(M=i)\,H(y; 0.2i; 0.01)$$

$$\begin{aligned} \Pr(Y \leq 30) &= \begin{pmatrix} \Pr(M=0) + \Pr(M=1)\,H(30;0.2;0.01) \\ +\Pr(M=2)\,H(30;0.4;0.01) \\ +\Pr(M=3)\,H(30;0.6;0.01) \end{pmatrix} \\ &= (0.8)^3 + (0.384)(0.817) + (0.096)(0.642) + (0.008)(0.488) \\ &= 0.89126. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(Y \leq 20) &= \begin{pmatrix} \Pr(M=0) + \Pr(M=1)\,H(20;0.2;0.01) \\ +\Pr(M=2)\,H(20;0.4;0.01) \\ +\Pr(M=3)\,H(20;0.6;0.01) \end{pmatrix} \\ &= (0.8)^3 + (0.384)(0.764) + (0.096)(0.560) + (0.008)(0.396) \\ &= 0.86230 \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\Pr(X>30) &= 1-(\Pr(Y\leq 30)\Pr(R=0)+\Pr(Y\leq 20)\Pr(R=0.5)) \\
&= 1-((0.89126)(0.75)+(0.86230)(0.25)) \\
&= 0.11598.
\end{aligned}$$

19. (a) On définit la perte L en adaptant l'approche indemnitaire :

$$L=\begin{cases} 2000000, & I=1 \\ 2000000-10000000, & I=0 \end{cases}$$

où $I=1$ si le prix S_1 au 1.1. 2007 est inférieur à 200 et $I=0$ si le prix S_1 au 1.1. 2007 est supérieur à 200.

(b) (a) implique que

$$I\sim Bern(q)$$

avec

$$\begin{aligned}
q &= \Pr(S_1\leq 200) \\
&= \Pr(250\exp(Y)\leq 200) \\
&= \Pr\left(Y\leq \ln\left(\frac{200}{250}\right)\right) \\
&= 0.053078.
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut faire une perte positive avec une probabilité $\Pr(I=1)=0.053078$.

(c) On a

$$\begin{aligned}
L &= 2000000-10000000(1-I) \\
&= 10000000I-8000000
\end{aligned}$$

$$E[L]=10000000E[I]-2000000=-7469223.25$$

$$\begin{aligned}
Var(L) &= (10000000)^2\,Var(I) \\
&= (10000000)^2(0.053078)(1-0.053078) \\
&= 5.0260725916\times 10^{12}
\end{aligned}$$

20. (a) On a $B=C+D$ où $C\in\{100,200\}$ et $D\in\{100,200,300,400\}$. Alors, $B\in\{200,300,400,500,600\}$ où

$$\Pr(B=k)=\begin{cases} 0.25,\ k=200 \\ 0.05+0.2273=0.2773,\ k=300 \\ 0.0852+0.1727=0.2579,\ k=400 \\ 0.0375+0.1148=0.1523,\ k=500 \\ 0.0625,\ k=600. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\Pr(X=0) &= 0.875 \\
\Pr(X=200) &= \Pr(X=200\,|I=1)\Pr(I=1)+\Pr(X=200\,|I=0)\Pr(I=0) \\
&= \Pr(B=200)\Pr(I=1) \\
&= (0.25)(0.125) \\
&= 0.03125
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X=300) &= \Pr(B=300)\Pr(I=1)\\ &= (0.2773)(0.125)\\ &= 0.0346625\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X=400) &= \Pr(B=400)\Pr(I=1)\\ &= (0.2579)(0.125)\\ &= 0.0346625\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X=500) &= \Pr(B=500)\Pr(I=1)\\ &= (0.1523)(0.125)\\ &= 0.0190375\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X=600) &= \Pr(B=600)\Pr(I=1)\\ &= (0.0625)(0.125)\\ &= 0.0078125\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}F_X(x) &= (1-q)+qF_B(x)=\kappa\\ F_B(x) &= \frac{\kappa-(1-q)}{q}\\ VaR_\kappa(X) &= F_B^{-1}\left(\frac{\kappa-(1-q)}{q}\right)\end{aligned}$$

Pour $\kappa < 1-0.125$, on a $VaR_\kappa(X)=0$ et pour $\kappa > 1-0.125$

$$VaR_\kappa(X) = VaR_{\frac{\kappa-(1-q)}{q}}(B).$$

Pour $\kappa = 0.95$ on a $\frac{\kappa-(1-q)}{q} = 0.6$ et

$$F_B(x) = \begin{cases}0.25, & 200\le x<300\\ 0.5273, & 300\le x<400\\ 0.7852, & 400\le x<500\\ 0.9375, & 500\le x<600\\ 1, & x>600\end{cases}$$

Donc

$$VaR_{0.95}(X) = F_B^{-1}(0.6) = 400.$$

Pour vérifier

$$\begin{aligned}F_X(400) &= \Pr(X\le 400)\\ &= \Pr(X\le 400\,|I=1)\Pr(I=1)+\Pr(X\le 400\,|I=0)\Pr(I=0)\\ &= \Pr(B\le 400)\Pr(I=1)+\Pr(I=0)\\ &= (0.7852)(0.125)+(1-0.125)\\ &= 0.97315\end{aligned}$$

$$F_X(400) = 0.97315$$
$$F_X(300) = 0.94091$$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.95}(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_{0.95}(X)\}}\right] + VaR_{0.95}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.95}(X)\right) - 0.95\right)}{1-0.95} \\ &= \frac{qE\left[B \times 1_{\{B > VaR_{0.95}(X)\}}\right] + VaR_{0.95}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.95}(X)\right) - 0.95\right)}{1-0.95} \\ &= \frac{qE\left[B \times 1_{\{B > VaR_{0.95}(X)\}}\right] + VaR_{0.95}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.95}(X)\right) - 0.95\right)}{1-0.95} \\ &= \frac{(0.125)\,E\left[B \times 1_{\{B > 400\}}\right] + (400)\left(F_X(400) - 0.95\right)}{1-0.95} \\ &= \frac{(0.125)\left((500)(0.1523) + (600)(0.0625)\right) + (400)(0.97315 - 0.95)}{1-0.95} \\ &= 469.325 \end{aligned}$$

(d)

$$\Pr(B = k) = \begin{cases} 0.25,\ k = 200 \\ 0.05 + 0.2273 = 0.2773,\ k = 300 \\ 0.0852 + 0.1727 = 0.2579,\ k = 400 \\ 0.0375 + 0.1148 = 0.1523,\ k = 500 \\ 0.0625,\ k = 600. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[B] &= (200)(0.25) + (300)(0.2773) + (400)(0.2579) + (500)(0.1523) + (600)(0.0625) \\ &= 350 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(B) &= E\left[B^2\right] - E^2[B] \\ &= \Big((200)^2(0.25) + (300)^2(0.2773) + (400)^2(0.2579) + (500)^2(0.1523) + (600)^2(0.0625)\Big) - (350)^2 \\ &= 14296. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= E[I]\,E[B] \\ &= (0.125)(350) \\ &= 43.75. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[I]\,Var(B) + Var(I)\,E[B]^2 \\ &= (0.125)(14296) + (0.125)(1-0.125)(350)^2 \\ &= 15185.44. \end{aligned}$$

21. (a)

$$E[S] = \frac{\alpha}{\beta} = 10000$$

$$\begin{aligned} E\left[e^R\right] &= \sum_r e^r \Pr(R = r) \\ &= 1.006614 \end{aligned}$$

$$V(0) = \frac{E[S]}{E\left[e^R\right]} = 9934.298$$

(b) $L_A = E[S] - V(1) = E[S]\left(1 - \frac{e^R}{E[e^R]}\right)$

i.

$$\begin{aligned} E[L_A] &= E\left[E[S]\left(1 - \frac{e^R}{E[e^R]}\right)\right] \\ &= E[S]\left(1 - \frac{E[e^R]}{E[e^R]}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(L_A) &= Var\left(E[S] - V(0)\, e^R\right) \\ &= (V(0))^2\, Var\left(e^R\right) \\ &= (V(0))^2 \left(\sum_r e^{2r} \Pr(R=r) - \left(\sum_r e^r \Pr(R=r)\right)^2\right) \\ &= 289932.6 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} \Pr(L_A > 0) &= \Pr(E[S] - V(1) > 0) \\ &= \Pr\left(E[S] - V(0)e^R > 0\right) \\ &= \Pr\left(e^R < \frac{E[S]}{V(0)}\right) \\ &= \Pr\left(R < \ln\left(\frac{E[S]}{V(0)}\right)\right) \\ &= \Pr\left(R < \ln\left(\frac{10000}{9934.298}\right)\right) \\ &= \Pr(R < 0.006592) \\ &= 0.28 \end{aligned}$$

(c) $L_B = S - V(1)$.

i.

$$\begin{aligned} E[L_B] &= E[S] - E[V(1)] \\ &= E[S] - E\left[V(0)\, e^R\right] \\ &= E[S] - V(0)\, E\left[e^R\right] \\ &= E[S] - E[S] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(L_B) &= Var(S) + Var(V(1)) - 2Cov(S, V(1)) \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2} + Var(L_A) \\ &= 50289933 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\Pr(L_B > 0) &= \Pr(S - V(1) > 0) \\
&= \Pr\left(R \leq \ln\left(\frac{S}{V(0)}\right)\right) \\
&= \sum_r \Pr(R = r) \Pr\left(r < \ln\left(\frac{S}{V(0)}\right)\right) \\
&= \sum_r \Pr(R = r) \Pr\left(S > V(0)\, \mathrm{e}^r\right) \\
&= \sum_r \Pr(R = r)\, \overline{H}\left(V(0)\, \mathrm{e}^r; \alpha, \beta\right) \\
&= 0.4067836
\end{aligned}$$

(d) Selon vous, quelle approche (A ou B) serait la plus appropriée pour donner une bonne idée du risque global auquel est exposé l'individu ? Expliquez brièvement.
La probabilité que l'assureur ne remplisse pas ses engagements en A est inférieure à celle de B donc A est plus avantageuse que B.

22. (a)

$$\begin{aligned}
\Pr(L \leq x) &= \Pr(S - V(0)\, Y \leq x) \\
&= \Pr\left(bN - 10n\mathrm{e}^R \leq x\right) \\
&= \Pr\left(bN \leq 10n\mathrm{e}^R + x\right) \\
&= \Pr(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N = k) \Pr\left(x + 10n\mathrm{e}^R \geq kb\right) \\
&= \Pr(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N = k) \Pr\left(R > \ln\left(\frac{kb - x}{10n}\right)\right)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
F_L(0) &= \Pr(L \leq 0) = \Pr(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N = k) \Pr(R > \ln(10k)) \\
&= F_L(0) = 0.5946355.
\end{aligned}$$

(c) On dit dans ce cas que la probabilité que l'assureur ne remplisse pas ses engagements est de 40.54% car $\Pr(L > 0) = 0.405364$.

23. On déduit

$$F_X(x) = 1 - q + qF_B(x).$$

(a) On a

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[M]\, E[B] \\
&= q \times e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \\
&= 0.3 \times e^{7 + \frac{1}{2} 1.1^2} \\
&= 602.463568113
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]Var(B) + Var(M)E[B]^2 \\ &= 0.3 \times \left(e^{2\times 7+2\times 1.1^2} - e^{2\times 7+1\times 1.1^2}\right) + 0.7 \times 0.3 \times e^{2\times 7+1\times 1.1^2} \\ &= 3694333.22645 \end{aligned}$$

Alors,

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{3694333.22645} = 1922.06483409$$

(ATTENTION : $\sigma = 1.1$)

(b) On a

$$\begin{aligned} F_X(10000) &= 1 - q + qF_B(10000) \\ &= 1 - 0.3 + 0.3 \times 0.9777527 \text{ (avec R)} \\ &= 0.99332581 \end{aligned}$$

(c) Comme $\kappa = 0.99 > 1 - q = 0.7$, on a

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(X) &= VaR_{\frac{0.99-(1-q)}{q}}(B) \\ &= \exp\left(7 + 1.1 \times \Phi^{-1}\left(\left(\frac{0.99 - (1-0.3)}{0.3}\right)\right)\right) \\ &= \exp(7 + 1.1 \times 1.833915) \text{ (avec R)} \\ &= 8244.540478 \end{aligned}$$

De plus, comme B est continue, on a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.999}(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_{0.999}(X)\}}\right]}{1 - 0.99} \\ &= \frac{qE\left[B \times 1_{\{B > VaR_{0.999}(X)\}}\right]}{1 - 0.99} \\ &= ... \end{aligned}$$

24. Définition de X : Approche fréquence-sévérité avec $M \sim Bern(q)$ où $q = 0.1$
Définition de B : $B = c \times U = 200 \times U$ où U correspond à la proportion des dommages avec

$$f_U(x) = 1.2x^{0.2}, \qquad 0 < x < 1$$

Espérance de U :

$$E[U] = \int_0^1 x f_U(x)\,dx = \int_0^1 x1.2x^{0.2}dx = 0.5454545455$$

Espérance de U^2 :

$$E\left[U^2\right] = \int_0^1 x^2 f_U(x)\,dx = \int_0^1 x^2 1.2x^{0.2}dx = 0.375$$

Espérance de B :

$$E[B] = 200E[U] = 200 \times 0.5454545455 = 109.0909091$$

Variance de B :

$$Var(B) = 200^2 Var(U) = 200^2 \times \left(0.375 - 0.5454545455^2\right) = 3099.173552$$

Espérance de X :

$$E[X] = E[I]E[B] = 10.909$$

Variance de X :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E[B]^2 \\ &= 0.1 \times 3099.173552 + 0.1 \times 0.9 \times 109.0909^2 \\ &= 1380.991\,557 \end{aligned}$$

Fonction de répartition de X :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - q + qF_B(x) \\ &= 0.9 + 0.1F_U\left(\frac{x}{200}\right) \end{aligned}$$

avec

$$F_U(y) = \int_0^y 1.2x^{0.2}dx = y^{1.2}, \qquad 0 < y < 1$$

Probabilité que $X > 150$:

$$\begin{aligned} \Pr(X > 150) &= 1 - F_X(150) \\ &= 0.1 - 0.1F_U\left(\frac{150}{200}\right) \\ &= 0.1 - 0.1 \times \left(\frac{150}{200}\right)^{1.2} \\ &= 0.02919343665 \end{aligned}$$

c) À venir.

25. (a) On a

$$\begin{aligned} E[X] &= E[M]\,E[B] \\ &= \lambda \times \frac{1}{\beta} = 0.2 \times 1000 = 200 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E[B]^2 \\ &= \lambda E\left[B^2\right] \\ &= 0.2 \times \frac{2}{\left(\frac{1}{1000}\right)^2} \\ &= 400000. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\Pr(X > 3000) = 1 - F_X(3000)$$

avec

$$\begin{aligned} F_X(3000) &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\,F_{B_1+\ldots+B_k}(3000) \\ &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\,H\left(3000; k, \frac{1}{1000}\right) \\ &= 0.9880874. \end{aligned}$$

Il suffit d'effectuer la somme pour $k = 1, 2, ..., k_0$, où k_0 est choisie à une valeur suffisamment élevée de telle sorte que $\sum_{k=1}^{k_0} f_M(k) = 1$ (pour cet exercice $k_0 = 100$)
Note : $\Pr(X \leq 0) = \Pr(M = 0) = 0.8187308$

(c) On observe que $\kappa = 0.99 > \Pr(X \leq 0)$, on a $VaR_{0.99}(X) > 0$. On doit utiliser un outil d'optimisation pour évaluer $VaR_{0.99}(X)$. On obtient 3192.006. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(X) &= \frac{1}{0.99}\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\frac{k}{\frac{1}{1000}}\left(1 - H\left(VaR_{0.99}(X); k+1, \frac{1}{1000}\right)\right) \\ &= 4286.101 \end{aligned}$$

Il suffit d'effectuer la somme pour $k = 1, 2, ..., k_0$, où k_0 est choisie à une valeur suffisamment élevée de telle sorte que $\sum_{k=1}^{k_0} f_M(k) = 1$ (pour cet exercice $k_0 = 100$)

26. (a) Définition de X : Approche fréquence-sévérité

Espérance de X :

$$E[X] = E[M]E[B]$$

Variance de X :

$$Var(X) = E[M]Var(B) + Var(M)E[B]^2$$

Espérance et variance de B :

$$\begin{aligned} E[B] &= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = e^{3+\frac{1.5^2}{2}} = 61.86780925 \\ Var(B) &= e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) = e^{2\times 3+1.5^2}\left(e^{1.5^2} - 1\right) = 32487.87685 \end{aligned}$$

Loi de M : On définit par la v.a. Θ les caractéristiques non-observables de l'assuré. On a

$$\begin{aligned} \Theta &= 0\text{, si l'assuré est un bon conducteur} \\ \Theta &= 1\text{, si l'assuré est un mauvais conducteur} \end{aligned}$$

(Note : le choix de 0 et 1 pour les valeurs de Θ est arbitraire). Si l'on sait que l'assuré est un bon (mauvais) conducteur, alors on sait que le nombre de sinistres pour cet assuré obéit à une loi de Poisson de moyenne 0.1 (0.25) e.g.

$$\begin{aligned} (M|\Theta = 0) &\sim Pois(0.1) \\ (M|\Theta = 1) &\sim Pois(0.25) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Pr(\Theta = 0) &= 0.8 \\ \Pr(\Theta = 1) &= 0.2 \end{aligned}$$

Il en résulte que la loi de M est une loi mélange avec

$$\Pr(M = k) = \Pr(\Theta = 0)\frac{0.1^k e^{-0.1}}{k!} + \Pr(\Theta = 1)\frac{0.25^k e^{-0.25}}{k!}$$

En particulier, on a

$$\Pr(M = 0) = 0.8\frac{0.1^0 e^{-0.1}}{0!} + 0.2\frac{0.25^0 e^{-0.25}}{0!} = 0.879630091$$

$$\Pr(M = 1) = 0.8\frac{0.1^1 e^{-0.1}}{1!} + 0.2\frac{0.25^1 e^{-0.25}}{1!} = 0.1113270326$$

et

$$\begin{aligned}\Pr(M>1) &= 1-\Pr(M=0)-\Pr(M=1)\\ &= 1-0.879630091-0.1113270326\\ &= 0.009\,042\,876\,4\end{aligned}$$

(b) Espérance de M :

$$\begin{aligned}E[M] &= E_\Theta\left[E[M|\Theta]\right]\\ &= \Pr(\Theta=0)\,E[M|\Theta=0]+\Pr(\Theta=1)\,E[M|\Theta=1]\\ &= 0.8\times 0.1+0.2\times 0.25\\ &= 0.13\end{aligned}$$

Variance de M :

$$Var(M)=E_\Theta\left[Var(M|\Theta)\right]+Var_\Theta\left(E[M|\Theta]\right)$$

avec

$$\begin{aligned}E_\Theta\left[Var(M|\Theta)\right] &= \Pr(\Theta=0)\,Var(M|\Theta=0)+\Pr(\Theta=1)\,Var(M|\Theta=1)\\ &= 0.8\times 0.1+0.2\times 0.25\\ &= 0.13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var_\Theta\left(E[M|\Theta]\right) &= E_\Theta\left[E[M|\Theta]^2\right]-E_\Theta\left[E[M|\Theta]\right]^2\\ &= 0.8\times 0.1^2+0.2\times 0.25^2-0.13^2\\ &= 0.0036\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$Var(M)=0.13+0.0036=0.1336$$

(c) Calcul de la probabilité que les coûts d'un sinistre soient inférieurs 5000 : Comme $B\sim Erlang(2,\beta)$ (où $\beta=\frac{\alpha}{E[B]}=\frac{2}{3000}$), cette probabilité est donnée par

$$\begin{aligned}\Pr(B\le 5000) &= 1-\sum_{j=0}^{2-1}\frac{(\beta x)^j}{j!}e^{-\beta x}\\ &= 1-\sum_{j=0}^{2-1}\frac{\left(\frac{2}{3000}\times 5000\right)^j}{j!}e^{-\frac{2}{3000}\times 5000}\\ &= 0.8454126955\end{aligned}$$

Espérance et variance de B :

$$E[B]=3000 \text{ et } Var(B)=\frac{3000}{\frac{2}{3000}}=\frac{3000^2}{2}$$

Espérance de X :

$$\begin{aligned}E[X] &= E[M]\,E[B]\\ &= 0.13\times 3000\\ &= 390.\end{aligned}$$

Variance de X :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E[B]^2 \\ &= 0.13 \times \frac{3000^2}{2} + 0.1336 \times 3000^2 \\ &= 1787400. \end{aligned}$$

27. (a) On trouve $E[\Theta]$ et $Var[\Theta]$.

$$\begin{aligned} E[\Theta] &= \sum_\theta \theta \Pr[\Theta = \theta] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[\Theta] &= \sum_\theta \theta^2 \Pr[\Theta = \theta] - E^2[\Theta] \\ &= 0.28 \end{aligned}$$

(b) On trouve $E[M]$ et $Var[M]$.

$$\begin{aligned} E[M] &= E[E[M|\Theta]] \\ &= E[0.2\Theta] \\ &= 0.2E[\Theta] \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[M] &= E[Var[M|\Theta]] + Var[E[M|\Theta]] \\ &= E[0.2\Theta] + Var[0.2\Theta] \\ &= 0.2E[\Theta] + 0.04[\Theta] \\ &= 0.2112 \end{aligned}$$

(c) Pour trouver $VaR_\kappa(M)$ et $TVaR_\kappa(M)$, on doit d'abord trouver la fonction de masse de probabilité et la fonction de répartition de M.

$$\begin{aligned} Pr[M = k] &= \sum_\theta \Pr[M = k, \Theta = \theta] \\ &= \sum_\theta \Pr[M = k|\Theta = \theta] \Pr[\Theta = \theta] \\ &= \sum_\theta \frac{(0.2\theta)^k e^{-0.2\theta}}{k!} \Pr[\Theta = \theta] \end{aligned}$$

On obtient

k	$\Pr[M = k]$	$\Pr[M \leq k]$
0	0.82318	0.82318
1	0.15586	0.97904
2	0.01893	0.99797
3	0.00186	0.99983

On peut maintenant calculer la $VaR_\kappa(M)$ et la $TVaR_\kappa(M)$

$$VaR_\kappa(M) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_M(x) > \kappa\}$$

$$TVaR_\kappa(M) = \frac{1}{1-\kappa}\left(E\left[M \times 1_{\{M > VaR_\kappa(M)\}}\right] + VaR_\kappa(M)\left(F_M(VaR_\kappa(M)) - \kappa\right)\right)$$

Exemple de calcul pour $TVaR_{0.9}(M)$:

$$TVaR_{0.9}(M) = 10\,(2 \times 0.01893 + 3 \times 0.00186 + 1 \times (0.97904 - 0.9))$$

On obtient

κ	$VaR_\kappa(M)$	$TVaR_\kappa(M)$
0.9	1	1.2318
0.99	2	2.2219
0.999	3	3.1851

(d) On s'intéresse maintenant à une loi composée avec M comme fréquence et B comme sévérité. On a

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

où

$$B_j \sim B \sim Gamma\left(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{1000}\right)$$

i. On calcule $E[X]$ et $Var[X]$.

$$\begin{aligned} E[X] &= E[M]\,E[B] \\ &= E[M]\,\frac{\alpha}{\beta} \\ &= 400 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[M]\,Var[B] + Var[M]\,E^2[B] \\ &= E[M]\,\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta}^2 \\ &= 1244800 \end{aligned}$$

ii. On trouve $F_X(x)$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr[X \leq x] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \Pr[X \leq x, M = m] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \Pr[X \leq x | M = m]\Pr[M = m] \\ &= \Pr[M = 0] \times 1_{\{x \geq 0\}} + \sum_{m=1}^{\infty} \Pr\left[\sum_{j=1}^{m} B_j \leq x\right]\Pr[M = m] \end{aligned}$$

On sait que

$$\sum_{j=1}^{m} B_j \sim Gamma(\alpha m, \beta)$$

Donc, on a

$$F_X(x) = \Pr[M=0] \times 1_{\{x \geq 0\}} + \sum_{m=1}^{\infty} H(x; \alpha m, \beta) \Pr[M=m]$$

On trouve $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$.

$$VaR_\kappa(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \kappa\}$$

À l'aide d'un outil d'optimisation,

$$VaR_{0.99}(X) = 5354$$

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m=0}^{\infty} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}, M=m\right] \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m=0}^{\infty} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} | M=m\right] \Pr[M=m] \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^{m} B_j \times 1_{\{\sum_{j=1}^{m} B_j > VaR_\kappa(X)\}} \middle| M=m\right] \Pr[M=m] \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha m}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(X); \alpha m+1, \beta) \, Pr[M=m]
\end{aligned}$$

À l'aide de cette formule, on calcule :

$$TVaR_{0.99}(X) = 6852$$

iii. On calcule les parts allouées de la $TVaR_\kappa(X)$ à M et à B selon les règles de la variance et de la TVaR.

$$C_\kappa^{VaR}(M) = \frac{Var[M] E^2[B]}{Var[X]} TVaR_\kappa(X)$$

$$C_\kappa^{VaR}(B) = \frac{E[M] Var[B]}{Var[X]} TVaR_\kappa(X)$$

$$\begin{aligned}
C_\kappa^{TVaR}(M) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[E[X|M] \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} m E[B] \Pr[M=m] \Pr\left[\sum_{j=1}^{m} B_j > VaR_\kappa(X)\right] \\
&= \frac{E[B]}{1-\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} m \Pr[M=m] \, \overline{H}(VaR_\kappa(X); \alpha m, \beta)
\end{aligned}$$

$$C_\kappa^{TVaR}(B) = TVaR_\kappa(X) - C_\kappa^{TVaR}(M)$$

On obtient

	VaR	TVaR
$C_{0.99}(M)$	4650	3330
$C_{0.99}(B)$	2202	3522

28. (a) On a

$$E[M] = \lambda = 0.25$$

et

$$\mathrm{Var}(M) = \frac{\lambda}{(1-\tau)^2} = \frac{0.25}{(1-0.5)^2} = 1$$

(b) On calcule les valeurs de $f_M(k)$ et $F_M(k)$:

k	$f_M(k)$	$F_M(k)$
0	0.882497	0.882497
1	0.066908	0.949405
2	0.022827	0.972232
3	0.010833	0.983064
4	0.005969	0.989033
5	0.003583	0.992616
6	0.002273	0.994889
7	0.001500	0.996389
8	0.001018	0.997408
9	0.000707	0.998115
10	0.000500	0.998614
11	0.000358	0.998972
12	0.000260	0.999232
13	0.000190	0.999423
14	0.000141	0.999563
15	0.000105	0.999668
16	0.000079	0.999747
17	0.000059	0.999806
18	0.000045	0.999851
19	0.000034	0.999885
20	0.000026	0.999911

Les valeurs ont été calculées en `R`.

On déduit

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(M) &= 5 \\ VaR_{0.999}(M) &= 12 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(M) &= \frac{1}{1-0.99}\left\{E[M] - E\left[M \times 1_{\{M\leq 5\}}\right] + 5 \times (F_M(5) - 0.99)\right\} \\ &= \frac{1}{1-0.99}\{0.25 - 0.186850 + 5 \times (0.992616 - 0.99)\} \\ &= 7.6231 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.999}(M) &= \frac{1}{1-0.999}\left\{E[M] - E\left[M \times 1_{\{M\leq 12\}}\right] + 12 \times (F_M(12) - 0.999)\right\} \\ &= \frac{1}{1-0.99}\{0.25 - 0.237551 + 12 \times (0.999232 - 0.999)\} \\ &= 15.23454 \end{aligned}$$

(c) Soit une v.a. X représentant les coûts d'un contrat où

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

selon les hypothèses habituelles avec $B_j \sim B \sim Ga\left(2, \frac{1}{1000}\right)$, $j \in \mathbb{N}^+$.

i. Calculer $E[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.
On a
$$E[X] = E[M]\,E[B] = 0.25 \times 2000 = 500$$
et
$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E[B]^2 \\ &= 0.25 \times \frac{2}{\left(\frac{1}{1000}\right)^2} + 1 \times 2000^2 \\ &= 4\ 500\ 000 \end{aligned}$$

ii. Calculer $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.
On a avec
$$\begin{aligned} F_X(x) &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\,F_{B_1+\ldots+B_k}(x) \\ &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\,H\left(x; 2k, \frac{1}{1000}\right) \end{aligned}$$
Il suffit d'effectuer la somme pour $k = 1, 2, ..., k_0$, où k_0 est choisie à une valeur suffisamment élevée de telle sorte que $\sum_{k=1}^{k_0} f_M(k) = 1$ (pour cet exercice $k_0 = 100$)
Note : $\Pr(X \leq 0) = \Pr(M = 0) = 0.882497$
Les valeurs ont été calculées en `R`.
On observe que $\kappa = 0.99 > \Pr(X \leq 0)$, on a $VaR_{0.99}(X) > 0$. On doit utiliser un outil d'optimisation pour évaluer $VaR_{0.99}(X)$. On obtient 10 193.43. Ensuite, on a
$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(X) &= \frac{1}{0.99} \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\,\frac{2k}{\frac{1}{1000}} \left(1 - H\left(VaR_{0.99}(X); 2k+1, \frac{1}{1000}\right)\right) \\ &= 16\ 274.93 \end{aligned}$$
Il suffit d'effectuer la somme pour $k = 1, 2, ..., k_0$, où k_0 est choisie à une valeur suffisamment élevée de telle sorte que $\sum_{k=1}^{k_0} f_M(k) = 1$ (pour cet exercice $k_0 = 100$)

iii. Calculer les parts allouées de $TVaR_{0.99}(X)$ aux v.a. M et B selon les règles de la variance et de la TVaR.
On applique les expressions fournies dans le livre et on obtient les résultats. Les valeurs ont été calculées en `R`.

29. (a) On a

$$\begin{aligned} E[X] &= E[(1+R)\,Y] \\ &= E[(1+R)]\,E[Y] \\ &= (0.05 \times 0.9 + 0.2 \times 0.1) \times E[M]\,E[B] \\ &= (1.05 \times 0.9 + 1.2 \times 0.1) \times \frac{2\left(1 - \frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{3}} \times 10000 \\ &= 10650 \end{aligned}$$

On a
$$Var(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2$$
avec
$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= E\left[(1+R)^2 Y^2\right] \\ &= E\left[(1+R)^2\right] E\left[Y^2\right] \\ &= E\left[(1+R)^2\right] \times \left(Var(Y) + E[Y]^2\right) \\ &= \left(1.05^2 \times 0.9 + 1.2^2 \times 0.1\right) \times \left(\frac{2\left(1-\frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{3}} 10000^2 + \frac{2\left(1-\frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{3}^2} 10000^2 + \left(\frac{2\left(1-\frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{3}} \times 10000\right)^2\right) \\ &= 397\ 687\ 500 \end{aligned}$$
Alors, on obtient
$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= 397\ 687\ 500 - 10\ 650^2 \\ &= 284\ 265\ 000 \end{aligned}$$

(b) On a
$$\Pr(X > x) = 1 - F_X(x)$$
avec
$$F_X(x) = \sum_{r \in \{0.05, 0.2\}} \Pr(R = r) F_Y\left(\frac{x}{1+r}\right)$$
De plus, on a
$$\begin{aligned} F_Y(x) &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) F_{B_1+\ldots+B_k}(x) \\ &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) H\left(x; k, \frac{1}{10000}\right) \end{aligned}$$
Il suffit d'effectuer la somme pour $k = 1, 2, ..., k_0$, où k_0 est choisie à une valeur suffisamment élevée de telle sorte que $\sum_{k=1}^{k_0} f_M(k) = 1$ (pour cet exercice $k_0 = 100$). Les valeurs ont été calculées en `R`.

Alors, on obtient
$$\Pr(X > E[X]) = 1 - F_X(E[X]) = 0.528742143$$

30. (a) On a
$$\begin{aligned} M_X(t) &= \Pr(M = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M = k) \{M_B(t)\}^k \\ &= q + \sum_{k=1}^{\infty} q(1-q)^k \{M_B(t)\}^k \\ &= q + \sum_{k=1}^{\infty} q(1-q)^k \left\{\frac{\beta}{\beta - t}\right\}^k \\ &= q + (1-q) \sum_{k=1}^{\infty} q(1-q)^{k-1} \left\{\frac{\beta}{\beta - t}\right\}^k \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} M_X(t) &= q+(1-q)\left(q\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(1-q)^{k-1}\left\{\frac{\beta}{\beta-t}\right\}^{k-1}\right) \\ &= q+(1-q)\left(q\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)\frac{1}{1-(1-q)\frac{\beta}{\beta-t}}\right) \\ &= q+(1-q)\left(q\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)\frac{\beta-t}{\beta-t-(1-q)\beta}\right) \\ &= q+(1-q)\left(\frac{\beta q}{\beta q-t}\right). \end{aligned}$$

Alors, on a

$$M_X(t) = 1-q^*+q^*M_{B^*}(t)$$

où

$$\Pr(I=1) = q^* = 1-q$$

et

$$M_{B^*}(t) = \left(\frac{\beta^*}{\beta^*-t}\right) = \left(\frac{\beta q}{\beta q-t}\right)$$

ce qui signifie X peut être représenté sous la forme

$$X = \begin{cases} B^*, & I=1 \\ 0, & I=0 \end{cases},$$

où $I \sim Bern(q^*)$ et $B^* \sim Exp(\beta^*)$, où $q^* = 1-q$ et $\beta^* = \beta q$

(b) On sait

$$E[M] = 1.4 = \frac{1-q}{q}$$

i.e.

$$q = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12}$$

Alors, on a

$$q^* = 1-q = \frac{7}{12} = 0.583333$$

Puis, comme

$$E[B] = 1000 = \frac{1}{\beta}$$

ce qui implique

$$\beta^* = \beta q = \frac{1}{1000}\frac{5}{12} = \frac{1}{2400}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} \Pr(X>3000) &= 1-F_X(3000) \\ &= 1-(1-q^*+q^*F_{B^*}(3000)) \\ &= q^*-q^*F_{B^*}(3000) \\ &= q^*-q^*(1-\exp(-\beta^*3000)) \\ &= q^*\exp(-\beta^*3000) \\ &= \frac{7}{12}\exp\left(-\frac{1}{2400}\times 3000\right) \\ &= 0.167128 \end{aligned}$$

31. (a) Voir dépannage

    (b) Voir dépannage

    (c) On a $B \sim Pareto(\alpha, \lambda)$.
    Les paramètres α et β ont été trouvés en classe :

$$\alpha = 10.067750933, \lambda = 9067.50933$$

Pour l'espérance et la variance, on a

$$\begin{aligned} E(X) &= E(I)E(B) = 200; \\ V(X) &= E(I)V(B) + V(I)E^2(B) = 409581.5974. \end{aligned}$$

Pour trouver les valeurs des VaR_κ, on trouve d'abord la fonction cumulative de X. On a

$$F_X(x) = 0.8 + 0.2F_B(x).$$

Ainsi, pour $\kappa = 0.5$, on obtient les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} VaR_{0.5}(X) &= 0; \\ TVaR_{0.5}(X) &= \frac{1}{1-0.5} * 0.2 * E(B) = 400. \end{aligned}$$

Pour $\kappa = 0.99$, on a

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(X) =& ? \\ &\Rightarrow 0.99 = 0.8 + 0.2F_B(x) \\ &\Rightarrow \frac{0.99-0.8}{0.2} = F_B(x) = \left(1 - \left(\frac{9067.50933}{9067.50933+x}\right)^{10.06775}\right) \\ &\Rightarrow 0.05 = \left(\frac{9067.50933}{9067.50933+x}\right)^{10.06775} \\ &\Rightarrow 0.742630047 = \frac{9067.50933}{9067.50933+x} \\ &\Rightarrow x = 3142.485903. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(X) =& ? \\ TVaR_{0.99}(X) =& \frac{1}{1-0.99} \times P(I=1) \times E(B \times 1_{B>3142.485903}) \\ =& 20 \times (E(B) - E(B \times 1_{B<3142.485903})) \\ =& 1000 - 1000 \times \left(1 - \left(\frac{9067.50933}{9067.50933+3142.4859032}\right)^{9.06750933}\right) \\ &+ 3142.485903 \left(\frac{9067.50933}{9067.50933+3142.485903}\right)^{10.06750933} \\ =& 1000 - 1000(1-0.067333097) + (3142.485903)(0.05001159) \\ =& 224.4924592. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow TVaR_{0.99}(X) = \frac{1}{1-0.99} \times (0.2) \times (224.4924592) = 4489.849183.$$

32. (a) On a

$$\begin{aligned}E(X) &= E(M) \times E\left(c \times 1_{(B_k > b)}\right) \\ &= 1800 S_B(10000) \\ &= 1800\left(\frac{\lambda}{\lambda + 10000}\right)^{1.5} \\ &= 1800\left(\frac{1500}{1500 + 10000}\right)^{1.5} \\ &= 84.79351391.\end{aligned}$$

Pour ce qui est de la variance, on a

$$\begin{aligned}Var(X) &= E(M) \times \left[E\left(c^2 \times 1_{(B_k>10000)}\right) - E^2\left(c \times 1_{(B_k>10000)}\right)\right] + Var(M) \times E^2\left(c \times 1_{(B_k>10000)}\right) \\ &= 3 \times 0 + 3 \times c^2 \times S_B(10000) \\ &= 3 \times 600^2 \times 0.047107508 \\ &= 50876.10835.\end{aligned}$$

Pour la fonction de répartition de X évaluée à 1000, on a

$$\begin{aligned}\Pr(X \leqslant 1000) &= \Pr(M=0) + \Pr(M=1) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \Pr(M=k)\left[\binom{k}{k}\Pr(B<b)^k \Pr(B>b)^0 + \binom{k}{k-1}\Pr(B<b)^{k-1}\Pr(B>b)\right] \\ &= \Pr(M=0) + \Pr(M=1) + \sum_{k=2}^{\infty}\Pr(M=k)\left[\Pr(B<b)^k + k\Pr(B<b)^{k-1}\Pr(B>b)\right] \\ &= 0.9909068.\end{aligned}$$

Il est à noter que cette valeur a été trouvé numériquement.

On remarque que $Pr(X \leqslant 1000) = \Pr(X < 1200)$ On trouve ainsi $Pr(X \leqslant 1200)$. On a

$$\begin{aligned}&\Pr(X \leqslant 1200) = \Pr(M=0) + \Pr(M=1) \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty}\Pr(M=k)\left[\Pr(B<b)^k + k\Pr(B<b)^{k-1}\Pr(B>b) + \binom{k}{k-2}\Pr(B<b)^{k-2}\Pr(B>b)^2\right]\end{aligned}$$

On trouve que $\Pr(X \leqslant 1200) = 0.9995767$. Ainsi, $VaR_{0.995}(X) = 1200$

33. (a) On a

$$\begin{aligned}
E(X) &= E\left(E\left(X|\Theta\right)\right) \\
&= E\left(\lambda\Theta E(B)\right) \\
&= E\left(\lambda\Theta\frac{\alpha}{\beta}\right) \\
&= \frac{\lambda\alpha}{\beta}E\left(\Theta\right) \\
&= \frac{10\times 1.5}{1/100}e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\
&= 1500; \\
Var(X) &= E\left(Var\left(X|\Theta\right)\right) + Var\left(E\left(X|\Theta\right)\right) \\
&= E\left(\lambda\Theta\left(Var(B)+E^2(B)\right)\right) + Var\left(\lambda\Theta E(B)\right) \\
&= \lambda\left(\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\alpha}{\beta}\right)E\left(\Theta\right) + \lambda^2E^2(B)Var(\Theta) \\
&= 10\left(\frac{1.5}{(1/100)^2}+\frac{1.5}{1/100}\right)e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} + 10^2\left(\frac{1.5}{1/100}\right)^2e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) \\
&= (10)(15150) + (100)(22500)\left(e^1-1\right) \\
&= 4017634.114.
\end{aligned}$$

(b) Pour ce qui est de $C_{0.99}(X)$, on a

$$\begin{aligned}
C_{0.99}(X) &= \frac{E_\Theta\left[Var(X|\Theta)\right]}{Var(X)}\frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(X)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\
&= \frac{E_\Theta\left[\lambda\Theta\left(Var(B)+E^2(B)\right)\right]}{\sqrt{Var(X)}}\frac{1}{1-0.99}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.99)\right)^2}{2}} \\
&= \frac{10\left(\frac{1.5}{(1/100)^2}+\frac{1.5}{1/100}\right)e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{4017634.114}}\frac{1}{0.01}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2.326348)^2}{2}} \\
&= \frac{151500}{\sqrt{4017634.114}}\frac{1}{0.01}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2.326348)^2}{2}} \\
&= 201.4463653.
\end{aligned}$$

Pour $D_{0.99}(X)$, on a

$$\begin{aligned}
D_{0.99}(X) &= \frac{Var_{\Theta}\left[E(X|\Theta)\right]}{Var(X)}\frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(X)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\
&= \frac{Var_{\Theta}\left[\lambda\Theta E(B)\right]}{\sqrt{Var(X)}}\frac{1}{1-0.99}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(0.99)\right)^2}{2}} \\
&= \frac{10\left(\frac{1.5}{(1/100)^2}\right)e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)}{\sqrt{4017634.114}}\frac{1}{0.01}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2.326348)^2}{2}} \\
&= \frac{150000\left(e^{\sigma^2}-1\right)}{\sqrt{4017634.114}}\frac{1}{0.01}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2.326348)^2}{2}} \\
&= 342.7144841.
\end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
\rho_{0.99}(X) &= E(X) + C_{0.99}(X) + D_{0.99}(X) \\
&= 1500 + 201.4463653 + 342.7144841 \\
&= 2044.160849.
\end{aligned}$$

34. (a) Pour que les coûts soient de 0, il faut que $M = 0$. On a

$$\Pr(M = 0) = e^{-2} = 0.135335283.$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
E(X) &= E(M)E(B) \\
&= (2)\frac{5}{1.5-1} = 20.
\end{aligned}$$

(c) Pour la fonction de répartition, on a

$$\begin{aligned}
\Pr\left(B > 700|M = 1\right) &= \overline{F}_B(700) \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda+700}\right)^{1.5} \\
&= 0.000597271.
\end{aligned}$$

Pour trouver la VaR, il faut résoudre pour x,

$$0.999 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{1.5}$$

On a

$$0.001 = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{1.5}$$
$$\to x = 495.$$

(d) À venir

4.2 Exercices informatiques

1. (a) Calculer $E[X]$.

i. Indiquer l'expression de $E[X]$.

$$\begin{aligned} E[X] &= E[B]\,E[M] \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\frac{r(1-q)}{q} \end{aligned}$$

ii. Indiquer la valeur de $E[X]$.

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{\alpha}{\beta}\frac{r(1-q)}{q} \\ &= 200000 \end{aligned}$$

(b) Calculer $Var(X)$.

i. Indiquer l'expression de $Var(X)$.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(M)V(B) + E(B)^2 V(M) \\ &= \frac{r(1-q)}{q}\frac{\alpha}{\beta^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{r(1-q)}{q^2} \end{aligned}$$

ii. Indiquer la valeur de $Var(X)$.

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{r(1-q)}{q}\frac{\alpha}{\beta^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{r(1-q)}{q^2} \\ &= 1.1 \times 10^{10} \end{aligned}$$

(c) Calculer $\Pr(X \leq 500000)$. (Vérification : $\Pr(X \leq 600000) = 0.9973601$)

i. Indiquer l'expression de $\Pr(X \leq 500000)$.

$$\Pr(X \leq 500000) = \Pr(M = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(M = k) F_{B_1 + .. + B_k}(500000)$$

ii. Indiquer la valeur de $\Pr(X \leq 500000)$.

$$\Pr(X \leq 500000) = 0.9882276$$

(d) Calculer $\Pi_{0.99}$.

i. Indiquer l'expression de $\Pi_{0.99}$.

$$\begin{aligned} \Pi_{0.99} &= TVaR_{0.99}(X) \\ &= \frac{1}{0.01}(E(X.1_{X > VaR_{0.99}(X)}) + VaR_{0.99}(X)(F_X(VaR_{0.99}(X)) - 0.99)) \\ &= \frac{1}{0.01}(E(X) - E(X.1_{X \leq VaR_{0.99}(X)}) + VaR_{0.99}(X)(F_X(VaR_{0.99}(X)) - 0.99)) \\ &= \frac{1}{0.01}(E(X) - \sum_{k=1}^{\infty} E(B_1 + .. + B_k.1_{B_1 + .. + B_k \leq VaR_{0.99}(X)} \Pr(M = k) + VaR_{0.99}(X)(F_X(VaR_{0.99}(X) \end{aligned}$$

ii. Indiquer la valeur de $\Pi_{0.99}$.

$$\Pi_{0.99} = 577261.9$$

iii. Calculer $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}_{0.99}$ et $\Pi^{(3)}_{0.99}$.

$$\Pi^{(1)} = 200000$$
$$\Pi^{(2)}_{0.99} = 34296.53$$
$$\Pi^{(3)}_{0.99} = 342965.3$$

iv. Expliquer brièvement ce que représente chacune des composantes $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}_{\kappa}$ et $\Pi^{(3)}_{\kappa}$ de la prime Π_n. (Suggestion : penser à fréquence et sévérité).
La prime est composée de la prime pure $\Pi^{(1)}$, d'une prime en fonction de la fréquence des sinistres $\Pi^{(2)}_{0.99}$ et une prime autre prime en fonction de la séverité des sinistres $\Pi^{(3)}_{0.99}$

2. (a) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.
Calculer $E[X]$. On a

$$\begin{aligned} E[X] &= E[I]\,E[B] \\ &= 0.2 \times 2500 \\ &= 500 \end{aligned}$$

Calculer $Var(X)$. On a

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[I]\,Var(B) + Var(I)\,E[B]^2 \\ &= 0.2 \times 2500^2 + 0.2 \times 0.8 \times 2500^2 \\ &= : 2250000.0 \end{aligned}$$

(b) Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{0.5}(X)$. Calculer $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.
On a

$$VaR_{0.5}(X) = 0$$

On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.5}(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>0\}}\right] + VaR_{0.5}(X)(0.8 - 0.5)}{1 - 0.5} \\ &= \frac{0.2E\left[B \times 1_{\{B>0\}}\right]}{1 - 0.5} = \frac{0.2E[B]}{1 - 0.5} = 1000 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(X) &= VaR_{\frac{0.99-0.8}{0.2}}(B) \\ &= -2500 \times \ln\left(1 - \frac{0.99 - 0.8}{0.2}\right) =: 7489.330\,683\,88 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>7489.330\,683\,88\}}\right] + 7489.330\,683\,88\,(0.99 - 0.99)}{1 - 0.99} \\ &= \frac{0.2E\left[B \times 1_{\{B>7489.330\,683\,88\}}\right]}{1 - 0.99} \\ &= \frac{0.2\left(E[B] - E\left[B \times 1_{\{B\leq 7489.330\,683\,88\}}\right]\right)}{1 - 0.99} \\ &= \frac{0.2 \times \left(2500 + 7489.33e^{-\frac{7489.33}{2500}} - 2500 \times \left(1 - e^{-\frac{7489.33}{2500}}\right)\right)}{1 - 0.99} = 9989.332\,732\,62 \end{aligned}$$

(c) On suppose que 3 contrats seront émis. Les coûts des contrats sont indépendants et identiquements distribués. Les coûts pour le portefeuille sont représentés par la v.a. S_{TOT}. La mesure $VaR_{0.99}(S_{TOT})$ associée à S_{TOT} est 11658.566. Calculer la mesure $TVaR_{0.99}(S_{TOT})$ associée à S_{TOT}. Informations supplémentaires : valeurs de la fonction de répartition pour la loi Gamma avec paramètre $\alpha = k$ et $\beta = \frac{1}{2500}$ (notée $G(;k;0.001)$) :

k	$G\left(11658.566; k; \frac{1}{2500}\right)$
1	0.9905659
2	0.9465708
3	0.8439867
4	0.6845223
5	0.4986097

On a

$$S_{TOT} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_{TOT}} C_k, N_{TOT} > 0 \\ 0, N_{TOT} = 0 \end{cases}$$

On déduit

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(S) &= \frac{E\left[S \times 1_{\{S > VaR_{0.99}(S)\}}\right] + VaR_{0.99}(S)(0.99 - 0.99)}{1 - 0.99} \\ &= \frac{E\left[S \times 1_{\{S > VaR_{0.99}(S)\}}\right]}{1 - 0.99} \\ &= 100 \sum_{k=1}^{3} \Pr(N = k) E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1 + ... + B_k > VaR_{0.99}(S)\}}\right] \\ &= 100 \sum_{k=1}^{3} \Pr(N = k) kE[B](1 - H(VaR_{0.99}(S); k + 1, \beta)) \\ &= 100 \begin{pmatrix} \binom{3}{1} 0.2 \times 0.8^2 \times 2500 \times (1 - 0.9465708) \\ +\binom{3}{2} 0.2^2 \times 0.8^1 \times 2 \times 2500 \times (1 - 0.8439867) \\ +\binom{3}{3} 0.2^3 \times 0.8^0 \times 3 \times 2500 \times (1 - 0.6845223) \end{pmatrix} \\ &= 14510.7078 \end{aligned}$$

3. (a) On a $f_S(0) = 0.3 \times 0.2 =$0.06et

$$f_S(1000) = 0.3 \times (0.5 - 0.2) + 0.2 \times (0.5 - 0.3) =: 0.13$$

On déduit que $F_S(0) = 0.06$ et $F_S(1000) = 0.19$

(b) $VaR_{0.25}(X_1) = 0$, $VaR_{0.25}(X_2) = 1000$ et $VaR_{0.25}(S) = 200\dot{0}$. On observe le problème relativement à la sous-additivité.

$VaR_{0.995}(X_1) = 5000$, $VaR_{0.995}(X_2) = 5000$ et $VaR_{0.995}(S) = 800\dot{0}$.

(c)

$$TVaR_{0.25}(X_1) = \frac{1000 \times 1.59 + 0 \times (0.3 - 0.25)}{0.75} = 2120.0$$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.25}(X_2) &= \frac{1000 \times 1.22 + 1000 \times (0.5 - 0.25)}{0.75} \\ &= 1626.66666667 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.25}(S) &= \frac{1000 \times 2.55 + 2000 \times (0.4050 - 0.25)}{0.75} \\ &= : 3813.33333333 \end{aligned}$$

$$TVaR_{0.995}\left(X_1\right) = \frac{0 + 5000 \times (1 - 0.995)}{0.005} = 5000$$
$$TVaR_{0.995}\left(X_2\right) = \frac{0 + 5000 \times (1 - 0.995)}{0.005} = 5000$$
$$TVaR_{0.995}\left(S\right) = \frac{1000 \times 0.0296 + 8000 \times (0.9968 - 0.995)}{0.005} =: 8800.0$$

4. (a) Calculer $E\left[X\right]$ et $Var\left(X\right)$.
   Espérance :

$$\begin{aligned} E\left[X\right] &= E\left[I\right]E\left[B\right] = E\left[I\right]\left(E\left[C\right] + E\left[D\right]\right) \\ &= 0.12\left(1000 + 2000\right) =: 360.0 \end{aligned}$$

   Variance :

$$\begin{aligned} Var\left(X\right) &= E\left[I\right]Var\left(B\right) + Var\left(I\right)E^2\left[B\right] \\ &= E\left[I\right]\left(Var\left(C\right) + Var\left(D\right) + 2Cov\left(C, D\right)\right) \\ &\quad + Var\left(I\right)\left(E\left[C\right] + E\left[D\right]\right)^2 \\ &= 0.12\left(1500^2 + 4000^2 + 2 \times 1800000\right) \\ &\quad + 0.12 \times 0.88\left(1000 + 2000\right)^2 \\ &= 3572400.0 \end{aligned}$$

   (b) Utiliser l'approximation normale pour évaluer la prime majorée $\Pi_n^{VaR}\left(X\right) = VaR_{0.95}\left(\overline{X}_n\right)$ pour $n = 500$. Quel est le comportement $\Pi_n^{VaR}\left(X\right)$ lorsque n augmente ? Expliquer brièvement ce comportement.
   Prime majorée

$$\begin{aligned} \Pi_n^{VaR}\left(X\right) &= VaR_{0.95}\left(\overline{X}_n\right) \\ &\simeq E\left(\overline{X}_n\right) + 1.645 \times \sqrt{Var\left(\overline{X}_n\right)} \\ &= E\left(X\right) + \frac{1.645}{\sqrt{500}} \times \sqrt{Var\left(X\right)} \\ &= 360 + \frac{1.645}{\sqrt{500}}\sqrt{3572400} =: 499.046\,781\,408 \end{aligned}$$

   La prime diminue avec n qui augmente. Le risque global est réparti sur un plus grand nombre de contrats.

   (c) Utiliser l'approximation normale pour évaluer la prime majorée $\Pi_n^{TVaR}\left(X\right) = TVaR_{0.95}\left(\overline{X}_n\right)$ pour $n = 500$. Quel est le comportement $\Pi_n^{VaR}\left(X\right)$ lorsque n augmente ? Expliquer brièvement ce comportement

$$\begin{aligned} \Pi_n^{TVaR}\left(X\right) &= TVaR_{0.95}\left(\overline{X}_n\right) \\ &\simeq E\left(\overline{X}_n\right) + \frac{e^{-\frac{1.6452}{2}}}{\left(1 - 0.95\right)\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{Var\left(\overline{X}_n\right)} \\ &= E\left(X\right) + \frac{e^{-\frac{1.645^2}{2}}}{\left(1 - 0.95\right)\sqrt{2\pi}} \times \frac{\sqrt{Var\left(X\right)}}{\sqrt{500}} \\ &= 360 + \frac{\exp\left(-\frac{1.645^2}{2}\right)}{\left(1 - 0.95\right) \times \sqrt{2\pi}} \times \frac{\sqrt{3572400}}{\sqrt{500}} \\ &= 534.312\,783\,109 \end{aligned}$$

La prime diminue avec n qui augmente. Le risque global est réparti sur un plus grand nombre de contrats.

Chapitre 5

Mutualisation des risques non-vie

5.1 Exercices traditionnels

1. (a) On a $Y \sim Erl(n,\beta)$. En faisant deux intégrations par partie, on réussit à trouver un "*pattern*". On a,

$$\begin{aligned}
E\left[Y \times 1_{(y,\infty)}(Y)\right] &= \int_y^\infty y f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_y^\infty \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^n exp(-\beta x)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

On pose $u = x^n \to \mathrm{d}u = nx^{n-1}$ et $dv = exp(-\beta x)\mathrm{d}x \to v = \frac{e^{-\beta x}}{x}$. On a,

$$\begin{aligned}
E\left[Y \times 1_{(y,\infty)}(Y)\right] &= \frac{\beta^n}{\Gamma(n)}\left(\frac{-x^n e^{-\beta x}}{\beta}\bigg|_y^\infty + \int_y^\infty \frac{e^{-\beta x}}{\beta} n x^{n-1}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{\beta^n}{\Gamma(n)}\left(\frac{y^n e^{-\beta y}}{\beta} + \int_y^\infty \frac{e^{-\beta x}}{\beta} n x^{n-1}\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

On pose $u = nx^{n-1} \to \mathrm{d}u = n(n-1)x^{n-2}\mathrm{d}x$ et $dv = \frac{e^{-\beta x}}{\beta}\mathrm{d}x \to v = \frac{e^{-\beta x}}{\beta^2}$ On a,

$$\begin{aligned}
E\left[Y \times 1_{(y,\infty)}(Y)\right] &= \frac{\beta^n}{\Gamma(n)}\left(\frac{y^n e^{-\beta y}}{\beta} + \frac{-n \times x^{n-1} e^{-\beta x}}{\beta^2}\bigg|_y^\infty + \int_y^\infty \frac{e^{-\beta x}}{\beta^2} n \times (n-1)x^{n-2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{\beta^n}{\Gamma(n)}\left(\frac{y^n e^{-\beta y}}{\beta} + \frac{n y^{n-1} e^{-\beta y}}{\beta^2} + \int_y^\infty \frac{e^{-\beta x}}{\beta^2} n \times (n-1)x^{n-2}\mathrm{d}x\right) \\
&= \ldots \\
&= e^{-\beta y}\frac{n}{\beta}\sum_{j=0}^{n}\frac{\beta^j \times y^j}{j!}
\end{aligned}$$

(b) Puisqu'on suppose que $\Pr(N^{TOT} > 3) = 0$, N^{TOT} peut prendre les valeurs 0,1,2 et 3. On déduit que $N^{TOT} \sim Poisson(10 * \lambda) \sim Poisson(0.1)$ On a,

$$
\begin{aligned}
CE_{0.99}^{TVaR}(S^{TOT}) &= TVaR_{0.99}\left(S^{TOT}\right) - E(S^{TOT}) \\
&= \frac{1}{1-0.99} E\left[X \times 1_{(X>23673)}\right] - E\left[S^{TOT}\right]
\end{aligned}
$$

On a ainsi,

$$
\begin{aligned}
E\left[X \times 1_{(X>23673)}\right] = E\left[B \times 1_{(B>23673)}\right] \times \Pr(N^{TOT}=1) + E\left[B + B \times 1_{(B+B>23673)}\right] \times \Pr(N^{TOT}=2) \\
+ E\left[B + B + B \times 1_{(B+B+B>23673)}\right] \times \Pr(N^{TOT}=3)
\end{aligned}
$$

En utilisant le résultat obtenu plus haut, on obtient

$$
\begin{aligned}
E\left[B \times 1_{(B>23673)}\right] \times \Pr(N^{TOT}=1) &= e^{-2.3673} \frac{1}{0.0001} \sum_{j=0}^{1} \frac{0.0001^j 23673^j}{j!} \times \Pr(N^{TOT}=1) \\
&= \frac{e^{-2.3673} \times 0.1 \times e^{-0.1}}{0.0001} (1 + 0.0001 \times 23673) \\
&= 285.5926558.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[B + B \times 1_{(B+B>23673)}\right] \times \Pr(N^{TOT}=2) &= e^{-2.3673} \frac{2}{0.0001} \sum_{j=0}^{2} \frac{0.0001^j 23673^j}{j!} \times \Pr(N^{TOT}=2) \\
&= \frac{e^{-2.3673} \times 0.1^2 \times e^{-0.1} \times 2}{2 \times 0.0001} \left(1 + 2.3673 + \frac{0.0001^2 \times 23673^2}{2!}\right) \\
&= 52.32448484.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left[B + B + B \times 1_{(B+B+B>23673)}\right] \times \Pr(N^{TOT}=3) = ... \\
&\quad = e^{-2.3673} \frac{3}{0.0001} \sum_{j=0}^{3} \frac{0.0001^j 23673^j}{j!} \times \Pr(N^{TOT}=3) \\
&\quad = \frac{e^{-2.3673} \times 0.1^3 \times e^{-0.1} \times 3}{3! \times 0.0001} \left(1 + 2.3673 + \frac{0.0001^2 \times 23673^2}{2!} + \frac{0.0001^3 \times 23673^3}{3!}\right) \\
&\quad = 3.553880967.
\end{aligned}
$$

On a donc,

$$
TVaR_{0.99}(S^{TOT}) = \frac{1}{1-0.99} (285.5926558 + 52.32448484 + 3.553880967) \quad = 34147.10216
$$

Il reste plus qu'à trouver $E\left[S^{TOT}\right]$. On a,

$$
\begin{aligned}
E\left[S^{TOT}\right] &= \Pr(N^{TOT}=1) E[B] + \Pr(N^{TOT}=2) E[B+B] + \Pr(N^{TOT}=3) E[B+B+B] \\
&= \frac{0.1 \times e^{-0.1}}{0.0001} + \frac{0.1^2 \times e^{-0.1} \times 2}{0.0001 * 2!} + \frac{0.1^3 \times e^{-0.1} \times 3}{0.0001 * 3!} \\
&= 904.837418 + 90.4837418 + 4.52418709 = 999.8449.
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi le résultat désiré,

$$CE_{0.99}^{TVaR} = 34147.10216 - 1112.950024 = 33034.15214.$$

2. (a) On a,

$$E(X_1) = E(M)E(B) = 0.01 * 4000 = 40$$
$$Var(X_1) = E(M)Var(B) + Var(M)E^2(B) = 0.01(4000^2 + 4000^2) = 320000$$

On cherche la probabilité que la variable aléatoire X_1 soit plus élevée que 8000. On a,

$$\Pr(X_1 > 8000) = 1 - \Pr(X_1 \leq 8000)$$

On trouve la fonction cumulative de X_1. On a

$$F_X(x) = f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) F_{(B_1+B_2+\ldots+B_k)}(x)$$

On obtient,

$$F_X(8000) = e^{-0.01} + 0.01 \times e^{-0.01} \times H(8000, 1, 1/4000) + \frac{0.01^2 \times e^{-0.01}}{2} \times H(8000, 2, 1/4000)$$

On sait que $H(8000, 1, 1/4000) = H(2, 1, 1)$ et $H(8000, 2, 1/4000) = H(2, 2, 1)$. On obtient donc,

$$\begin{aligned} F_X(8000) &= e^{-0.01} + 0.01 \times e^{-0.01} \times 0.8647 + \frac{0.01^2 \times e^{-0.01}}{2} \times 0.5940 \\ &= 0.998640199. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$1 - F_X(8000) = 1 - 0.998640199 = 0.001359801$$

(b) On a,

$$E(S) = 20 \times E(X) = 800$$
$$Var(S) = 20 \times Var(X) = 6400000$$

Pour trouver la fonction cumulative de S, on déduit que $S \sim PoissonComp(0.2; F_B)$
On a,

$$F_X(x) = f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) F_{(B_1+B_2+\ldots+B_k)}(x)$$

où $M \sim Pois(0.2)$ et $B \sim Exp(1/4000)$
On obtient ainsi,

$$\begin{aligned} F_S(x) = f_M(0) &+ f_M(1)H(x, 1, 1/4000) + f_M(2)H(x, 2, 1/4000) + f_M(3)H(x, 3, 1/4000) \\ &+ f_M(4)H(x, 4, 1/4000) \end{aligned}$$

De la même manière que pour X_1, on trouve

$$1 - F_S(8000) = 1 - 0.9703957 = 0.02960435$$

3. (a) Contexte : $B_i \sim Gamma(2, 0.01)$ (i=1,2), $M_i \sim Bin(2, 0.05i)$ (i=1,2), et $S = X_1 + X_2$
On trouve

$$\begin{aligned}\Pr(S_2 = 0) &= \Pr(X_1 = 0) \times \Pr(X_2 = 0) \\ &= \binom{2}{0} 0.05^0 (0.95)^2 \times \binom{2}{0} 0.1^0 (0.9)^2 \\ &= 0.731025.\end{aligned}$$

(b) Espérance de S :

$$\begin{aligned}E(S_2) &= E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \\ &= E(M_1)E(B_1) + E(M_2)E(B_2) \\ &= 2 \times 0.05 \times \frac{2}{0.01} + 2 \times 0.1 \times \frac{2}{0.01} \\ &= 60.\end{aligned}$$

Variance de S :

$$\begin{aligned}Var(S_2) &= Var(X_1) + Var(X_2) \\ &= E(M_1)Var(B_1) + Var(M_1)E^2(B_1) + E(M_2)Var(B_2) + Var(M_2)E^2(B_2) \\ &= 2 \times 0.05 \times \frac{2}{0.01^2} + 2 \times 0.05 \times 0.95 \times \frac{4}{0.01^2} + 2 \times 0.1 \times \frac{2}{0.01^2} + 2 \times 0.1 \times 0.9 \times \frac{4}{0.01^2} \\ &= 17000.\end{aligned}$$

(c) On obtient

$$\begin{aligned}\Pr(M_1 + M_2 = 2) &= \Pr(M_1 = 2) \times \Pr(M_2 = 0) + \Pr(M_1 = 1) \times \Pr(M_2 = 1) + \Pr(M_1 = 2) \times \Pr(M_2 = 2) \\ &= \binom{2}{2} 0.05^2 \binom{2}{0} 0.1^0 0.9^2 + \binom{2}{1} 0.05 \times 0.95 \binom{2}{1} 0.1^1 0.9 + \binom{2}{0} 0.95^2 \binom{2}{2} 0.1^2 0.9^0 \\ &= 0.02815\end{aligned}$$

(d) On sait que

$$\Pr(S_2 > 150) = \Pr(X_1 + X_2 > 150) = 1 - \Pr(X_1 + X_2 \leq 150)$$

On déduit

$$\Pr(S_2 > 150) = \sum_{j=1}^{4} a_j \times \overline{H}(150, 2j, 0.01),$$

où

$$a_j = \Pr(M_1 + M_2 = j)$$

pour $j = 1, 2, 3, 4$.
On obtient :

— $a_1 = \Pr(M_1 = 0) \Pr(M_2 = 1) + \Pr(M_1 = 1) \Pr(M_2 = 0) = 0.239400$;

— $a_2 = \Pr(M_1 = 0) \Pr(M_2 = 2) + \Pr(M_1 = 1) \Pr(M_2 = 1) + \Pr(M_1 = 2) \Pr(M_2 = 0) = 0.028150$;

— $a_3 = \Pr(M_1 = 1) \Pr(M_2 = 2) + \Pr(M_1 = 2) \Pr(M_2 = 1) = 0.001400$;

— $a_4 = \Pr(M_1 = 2) \Pr(M_2 = 2) = 0.000025$.

Finalement, le résultat souhaité est

$$\Pr(S_2 > 150) = \sum_{j=1}^{4} a_j \times \overline{H}(150, 2j, 0.01) = 0.1612643.$$

4. (a) Pour le premier portefeuille, on dénote la classe 1 par X_1 et la classe 2 par X_2. On a,

$$\begin{aligned} E\left[X_{PTF_1}\right] &= E\left[\sum_{k=1}^{600} X_{1,k} + \sum_{k=1}^{400} X_{2,k}\right] \\ &= 600 \times E[X_1] + 400 \times E[X_2] \\ &= 3600; \\ Var\left[X_{PTF_1}\right] &= Var\left[\sum_{k=1}^{600} X_{1,k} + \sum_{k=1}^{400} X_{2,k}\right] \\ &= 600 \times Var[X_1] + 400 \times Var[X_2] \\ &= 166560 \end{aligned}$$

Pour le deuxième portefeuille, on dénote la classe 1 par X_1 et la classe 2 par X_2. On a,

$$\begin{aligned} E\left[X_{PTF_1}\right] &= E\left[\sum_{k=1}^{600} X_{1,k} + \sum_{k=1}^{900} X_{2,k}\right] \\ &= 600 \times E[X_1] + 900 \times E[X_2] \\ &= 600; Var\left[X_{PTF_1}\right] & &= Var\left[\sum_{k=1}^{600} X_{1,k} + \sum_{k=1}^{900} X_{2,k}\right] \\ &= 600 \times Var[X_1] + 900 \times Var[X_2] \\ &= 21600. \end{aligned}$$

Pour le portefeuille en entier, on a

$$\begin{aligned} E\left[X_{PTF}\right] &= E\left[\sum_{k=1}^{600} X_{1,k}^{PTF_1} + \sum_{k=1}^{400} X_{2,k}^{PTF_1} + \sum_{k=1}^{600} X_{1,k}^{PTF_2} + \sum_{k=1}^{900} X_{1,k}^{PTF_2}\right] \\ &= 4200; \\ Var\left[X_{PTF}\right] &= Var\left[\sum_{k=1}^{600} X_{1,k}^{PTF_1} + \sum_{k=1}^{400} X_{2,k}^{PTF_1} + \sum_{k=1}^{600} X_{1,k}^{PTF_2} + \sum_{k=1}^{900} X_{1,k}^{PTF_2}\right] \\ &= 188160. \end{aligned}$$

On sait que, par l'approximation normale,

$$VaR_\kappa(X) = E(X) + \sqrt{Var(X)} \times VaR_\kappa(Z)$$

et

$$TVaR_\kappa(X) = E(X) + \sqrt{Var(X)} \times TVaR_\kappa(Z)$$

Ainsi, le capital économique selon la *VaR* est donné par

$$\begin{aligned}
CE_{0.95}^{VaR}(X_{PTF_1}) &= \sqrt{Var(X^{PTF_1})} \times VaR_{0.95}(Z) \\
&= \sqrt{166560} \times \Phi^{-1}(0.95) \\
&= 409.7625; \\
CE_{0.95}^{VaR}(X_{PTF_2}) &= \sqrt{Var(X^{PTF_2})} \times VaR_{0.95}(Z) \\
&= \sqrt{21600} \times \Phi^{-1}(0.95) \\
&= 148.6142; \\
CE_{0.95}^{VaR}(X_{PTF}) &= \sqrt{Var(X^{PTF})} \times VaR_{0.95}(Z) \\
&= \sqrt{188160} \times \Phi^{-1}(0.95) \\
&= 435.419.
\end{aligned}$$

Le capital économique selon la $TVaR$ est donné par

$$\begin{aligned}
CE_{0.95}^{TVaR}(X_{PTF_1}) &= \frac{\sqrt{Var(X^{PTF_1})}}{(1-0.95)\times 2\pi} \times e^{\frac{(-\Phi^{-1}(0.95))^2}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{166560}}{0.05 \times 2\pi} \times \Phi^{-1}(0.95) \\
&= 2136.794;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CE_{0.95}^{TVaR}(X_{PTF_2}) &= \frac{\sqrt{Var(X^{PTF_2})}}{(1-0.05)\times 2\pi} \times e^{\frac{(-\Phi^{-1}(0.95))^2}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{21600}}{0.05 \times 2\pi} \times \Phi^{-1}(0.95) \\
&= 769.4923; \\
CE_{0.95}^{TVaR}(X_{PTF}) &= \frac{\sqrt{Var(X^{PTF})}}{(1-0.05)\times 2\pi} \times e^{\frac{(-\Phi^{-1}(0.95))^2}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{188160}}{0.05 \times 2\pi} \times \Phi^{-1}(0.95) \\
&= 2271.125.
\end{aligned}$$

5. (a) On a

$$\begin{aligned}
E(X) &= E(M) \times E(B) \\
&= 0.2 \times E(C+D) \\
&= 0.2 \times (1000 + 2000) \\
&= 360; \\
Var(X) &= E(M) \times Var(B) + Var(M) \times E^2(B) \\
&= E(M) \times (Var(C+D)) + Var(M) \times E^2(B) \\
&= E(M) \times (Var(C) + Var(D) + 2 \times Cov(C,D)) + Var(M) \times E^2(B) \\
&= 0.12 \times \left(1500^2 + 4000^2 + 2 \times 1800000\right) + 0.12 \times 0.88 \times 3000^2 \\
&= 3572400.
\end{aligned}$$

Pour ce qui est de la variable S_{TOT}, on a

$$\begin{aligned}
E(S^{TOT}) &= E\left(\sum_{i=1}^{500} X_i\right) \\
&= 500 \times E(X) \\
&= 500 \times 360 \\
&= 180000; \\
Var(S^{TOT}) &= Var\left(\sum_{i=1}^{500} X_i\right) \\
&= 500 \times Var(X_i) \\
&= 500 \times 3572400 \\
&= 1786200000.
\end{aligned}$$

(b) Pour $Z \sim N(0,1)$, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{\kappa} \int_{VaR_\kappa(Y)}^{\infty} z \mathrm{d}F_Z(z) \\
&= \frac{1}{\kappa} \int_{VaR_\kappa(Z)}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \mathrm{d}F_Z(z) \\
&= \frac{e^{-VaR_\kappa^2(Z)}}{\sqrt{2\pi \times \ (1-\kappa)}}
\end{aligned}$$

D'après le théorème central limite, on a que

$$TVaR_\kappa(Y) \simeq E(Y) + \sqrt{Var(Y)} \times TVaR_\kappa(Z)$$

On déduit ainsi que

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(Y) &\simeq E(Y) + \sqrt{Var(Y)} \times TVaR_\kappa(Z) \\
&= E(Y) + \sqrt{Var(Y)} \times \frac{e^{-VaR_\kappa^2(Z)}}{\sqrt{2\pi} \times \ (1-\kappa)} \\
&= \mu + \sigma \times \frac{e^{-VaR_\kappa^2(Z)}}{\sqrt{2\pi} \times \ (1-\kappa)}
\end{aligned}$$

(c) Pour $\kappa = 0.95$, on a

$$CE_\kappa(S_{TOT}) = VaR_\kappa(S_{TOT}) - E(S_{TOT})$$

On obtient

$$\begin{aligned}
CE_{0.995}^{VaR}(S_{TOT}) &= E(S_{TOT}) + \sqrt{Var(S_{TOT})} \times VaR_{0.995}(Z) - E(S_{TOT}) \\
&= 180000 + \sqrt{(}1786200000) \times 2.57582 - 180000 \\
&= 108863.4443.
\end{aligned}$$

(d) En utilisant la mesure $TVaR$, on a

$$\begin{aligned}
CE_{0.995}^{TVaR}(S_{TOT}) &= E(S_{TOT}) + \sqrt{Var(S_{TOT})} \times TVaR_{0.995}(Z) - E(S_{TOT}) \\
&= 180000 + \sqrt{1786200000} \times \frac{e^{\frac{(-2.575829)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} \times (1 - 0.995)} - 180000 \\
&= 122223.8478.
\end{aligned}$$

6. (a) Calculer l'espérance et la variance du montant total des coûts pour l'ensemble du portefeuille.
Espérance :

$$\begin{aligned} E\left[S_{TOT}\right] &= 700E\left[X^{(h1)}\right]+500E\left[X^{(h2)}\right]+900E\left[X^{(a1)}\right]+400E\left[X^{(a2)}\right] \\ &= 700\times 3+500\times 6+900\times 8+400\times 12 \\ &= 17100 \end{aligned}$$

Variance :

$$\begin{aligned} Var\left(S_{TOT}\right) &= 700Var\left(X^{(h1)}\right)+500Var\left(X^{(h2)}\right)+900Var\left(X^{(a1)}\right)+400Var\left(X^{(a2)}\right) \\ &= (700\times 80+500\times 320+900\times 20+400\times 15) \\ &= 240000 \end{aligned}$$

(b) Calculer le capital économique pour l'ensemble du portefeuille en ayant recours à la mesure VaR avec $\kappa = 99\%$.
Mesure VaR. Avec l'approximation normale, on a

$$\begin{aligned} VaR_{\kappa}\left(S_{TOT}\right) &\simeq E\left[S_{TOT}\right]+VaR_{\kappa}\left(Z\right)\sqrt{Var\left(S_{TOT}\right)} \\ &= 17100+2.326348\times\sqrt{240000} \\ &= 18239.673\,112\,8 \end{aligned}$$

où $Z \sim Norm\,(0,1)$
Capital économique

$$CE_{\kappa}\left(S_{TOT}\right)=VaR_{\kappa}\left(S_{TOT}\right)-E\left[S_{TOT}\right]=1139.673\,112\,83$$

(c) Calculer le capital économique pour l'ensemble du portefeuille en ayant recours à la mesure $TVaR$ avec $\kappa = 99\%$.
Avec l'approximation normale, on a

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}\left(S_{TOT}\right) &\simeq E\left[S_{TOT}\right]+TVaR_{\kappa}\left(Z\right)\sqrt{Var\left(S_{TOT}\right)} \\ &= E\left[S_{TOT}\right]+\frac{1}{1-\kappa}\frac{e^{-\frac{VaR_{\kappa}(Z)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{Var\left(S_{TOT}\right)} \\ &= 17100+\frac{1}{1-0.99}\frac{e^{-\frac{2.326348^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{240000} \\ &= 18405.682\,5964 \end{aligned}$$

où $Z \sim Norm\,(0,1)$
Capital économique

$$CE_{\kappa}\left(S_{TOT}\right)=TVaR_{\kappa}\left(S_{TOT}\right)-E\left[S_{TOT}\right]\simeq 1305.682\,596\,41$$

7. (a) On sait que $S = 1000N$ où $N \sim Bin\,(400, 0.008)$

$$\begin{aligned}
CE_\kappa\,(S) &= VaR_\kappa\,(S) - E\,[S] \\
&= VaR_\kappa\,(1000N) - E\,[1000N] \\
&= 1000\,(VaR_\kappa\,(N) - E\,[N]) \\
&= \begin{cases} (1000)\,(6 - (400)\,(0.008)) = 2800, & \kappa = 0.9, 0.95 \\ (1000)\,(8 - (400)\,(0.008)) = 4800, & \kappa = 0.99 \\ (1000)\,(9 - (400)\,(0.008)) = 5800, & \kappa = 0.995 \end{cases} - \\
&= \begin{cases} 2800, & \kappa = 0.9, 0.95 \\ 4800, & \kappa = 0.99 \\ 5800, & \kappa = 0.995 \end{cases}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
CE_\kappa\,(S) &= TVaR_\kappa\,(S) - E\,[S] \\
&= TVaR_\kappa\,(1000N) - E\,[1000N] \\
&= (1000)\,(TVaR_\kappa\,(N) - E\,[N]) \\
&= (1000)\left(\frac{E\left[N \times 1_{\{N > VaR_\kappa(N)\}}\right] + VaR_\kappa\,(N)\,(F\,(VaR_\kappa\,(N)) - \kappa)}{1-\kappa} - E\,[N]\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.9}\,(N) &= \frac{1}{1-0.9}\left(E\left[N \times 1_{\{N > VaR_{0.9}(N)\}}\right] + VaR_{0.9}\,(N)\,(F_N\,(VaR_{0.9}\,(N)) - 0.9)\right) \\
&= \frac{1}{1-0.9}\left(E\left[N \times 1_{\{N>6\}}\right] + (6)\,(F_N\,(6) - 0.9)\right) \\
&= \frac{1}{1-0.9}\left(E\,[N] - E\left[N \times 1_{\{N \leq 6\}}\right] + (6)\,(F_N\,(6) - 0.9)\right) \\
&= \frac{1}{1-0.9}\,((400)\,(0.008) - (2.868245708) + (6)\,(0.956063484 - 0.9)) \\
&= 6.68135196
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.95}\,(N) &= \frac{1}{1-0.95}\left(E\left[N \times 1_{\{N > VaR_{0.95}(N)\}}\right] + VaR_{0.95}\,(N)\,(F_N\,(VaR_{0.95}\,(N)) - 0.95)\right) \\
&= \frac{1}{1-0.95}\left(E\left[N \times 1_{\{N>6\}}\right] + (6)\,(F_N\,(6) - 0.95)\right) \\
&= \frac{1}{1-0.95}\left(E\,[N] - E\left[N \times 1_{\{N \leq 6\}}\right] + (6)\,(F_N\,(6) - 0.95)\right) \\
&= \frac{1}{1-0.95}\,((400)\,(0.008) - (2.868245708) + (6)\,(0.956063484 - 0.95)) \\
&= 7.36270392
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.99}\,(N) &= \frac{1}{1-0.99}\left(E\left[N \times 1_{\{N > VaR_{0.95}(N)\}}\right] + VaR_{0.95}\,(N)\,(F_N\,(VaR_{0.95}\,(N)) - 0.95)\right) \\
&= \frac{1}{1-0.99}\left(E\left[N \times 1_{\{N>8\}}\right] + (8)\,(F_N\,(8) - 0.99)\right) \\
&= \frac{1}{1-0.99}\left(E\,[N] - E\left[N \times 1_{\{N \leq 8\}}\right] + (8)\,(F_N\,(8) - 0.99)\right) \\
&= \frac{1}{1-0.99}\,((400)\,(0.008) - (3.148192116) + (8)\,(0.99449784 - 0.99)) \\
&= 8.7790604
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.995}(N) &= \frac{1}{1-0.995}\left(E\left[N\times 1_{\{N>VaR_{0.995}(N)\}}\right]+VaR_{0.995}(N)\left(F_N\left(VaR_{0.95}(N)\right)-0.995\right)\right) \\ &= \frac{1}{1-0.995}\left(E\left[N\times 1_{\{N>9\}}\right]+(9)\left(F_N(9)-0.995\right)\right) \\ &= \frac{1}{1-0.995}\left(E[N]-E\left[N\times 1_{\{N\leq 9\}}\right]+(9)\left(F_N(9)-0.995\right)\right) \\ &= \frac{1}{1-0.995}\left((400)(0.008)-(3.182668901)+(9)(0.998328593-0.995)\right) \\ &= 9.4576872 \end{aligned}$$

$$CE_\kappa(S)=\begin{cases}(1000)(6.68135196-3.2)=3481.35, & \kappa=0.9\\ (1000)(7.36270392-3.2)=4162.70, & \kappa=0.95\\ (1000)(8.7790604-3.2)=5579.06, & \kappa=0.99\\ (1000)(9.4576872-3.2)=6257.69, & \kappa=0.995\end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{400} VaR_\kappa(X_i) &= 400 VaR_\kappa(X) \\ &= \begin{cases}0<6000=VaR_\kappa(S), & \kappa=0.9\\ 0<6000=VaR_\kappa(S), & \kappa=0.95\\ 0<8000=VaR_\kappa(S), & \kappa=0.99\\ 1000\times 400>9000=VaR_\kappa(S), & \kappa=0.995\end{cases}\end{aligned}$$

En comparant $\sum_{i=1}^{400} VaR_\kappa(X_i)$ et $VaR_\kappa(S_{TOT})$ on déduit que la VaR n'est pas sous-additive.

(d)

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X_i) &= (1000)\frac{E\left[I\times 1_{\{I>VaR_\kappa(I)\}}\right]+VaR_\kappa(I)\times\left(F\left(VaR_\kappa(I)\right)-\kappa\right)}{1-\kappa} \\ &= (1000)\begin{cases}0.08, & \kappa=0.9\\ 0.16, & \kappa=0.95\\ 0.8, & \kappa=0.99\\ 1, & \kappa=0.995\end{cases}\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{400} TVaR_\kappa(X_i)=\begin{cases}80\times 400, & \kappa=0.9\\ 160\times 400, & \kappa=0.95\\ 800\times 400, & \kappa=0.99\\ 1000\times 400, & \kappa=0.995\end{cases} > TVaR_\kappa(S)$$

On dit que la mesure $TVaR$ est sous-additive

8. (a)

$$\begin{aligned}
E[S] &= E\left[\sum_{i=1}^{3} X_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{3} E[X_i] \\
&= \sum_{i=1}^{3} q_i E[B_i] \\
&= (0.05)\left(\frac{2.5}{\frac{1}{1000}}\right) + (0.1)\left(\frac{1.5}{\frac{1}{1000}}\right) + (0.15)\left(\frac{0.5}{\frac{1}{1000}}\right) \\
&= 350
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(S) &= \sum_{i=1}^{3} Var(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left(E[I_i]\, Var(B_i) + Var(I_i)\, E[B_i]^2\right) \\
&= \left((0.05)\left(\frac{2.5}{\left(\frac{1}{1000}\right)^2}\right) + (0.05)(1-0.05)\left(\frac{2.5}{\left(\frac{1}{1000}\right)}\right)^2\right) \\
&+ \left((0.1)\left(\frac{1.5}{\left(\frac{1}{1000}\right)^2}\right) + (0.1)(1-0.1)\left(\frac{1.5}{\left(\frac{1}{1000}\right)}\right)^2\right) \\
&+ \left((0.15)\left(\frac{0.5}{\left(\frac{1}{1000}\right)^2}\right) + (0.15)(1-0.15)\left(\frac{0.5}{\left(\frac{1}{1000}\right)}\right)^2\right) \\
&= 421875 + 352500 + 106875 \\
&= 881250.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\Pr(S=0) &= \Pr(X_1+X_2+X_3=0) \\
&= \Pr(X_1=0, X_2=0, X_3=0) \\
&= \Pr(X_1=0)\Pr(X_2=0)\Pr(X_3=0) \\
&= \Pr(I_1=0)\Pr(I_2=0)\Pr(I_3=0) \\
&= (1-0.05)(1-0.10)(1-0.15) \\
&= 0.72675.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\Pr(S > 1000k) &= \Pr(X_1+X_2+X_3 > 1000k) \\
&= \sum_i \sum_j \sum_l \Pr(X_1+X_2+X_3 > 1000k \mid I_1=i, I_2=j, I_3=l)\Pr(I_1=i)\Pr(I_2=j)\Pr(I_3=l)
\end{aligned}$$

$$\Pr\left(S=x\right)=\begin{cases}0.726750, & x=0\\ 0.03825, & x=b_1\\ 0.08075, & x=b_2\\ 0.12825, & x=b_3\\ 0.00425, & x=b_1+b_2\\ 0.00675, & x=b_1+b_3\\ 0.01425, & x=b_2+b_3\\ 0.00075, & x=b_1+b_2+b_3\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Pr(S &> 1000k)=\Pr\left(B_1>1000k\right)\Pr\left(I_1=1\right)\Pr\left(I_2=0\right)\Pr\left(I_3=0\right)\\ &+\Pr\left(B_2>1000k\right)\Pr\left(I_1=0\right)\Pr\left(I_2=1\right)\Pr\left(I_3=0\right)\\ &+\Pr\left(B_3>1000k\right)\Pr\left(I_1=0\right)\Pr\left(I_2=0\right)\Pr\left(I_3=1\right)\\ &+\Pr\left(B_1+B_2>1000k\right)\Pr\left(I_1=1\right)\Pr\left(I_2=1\right)\Pr\left(I_3=0\right)\\ &+\Pr\left(B_1+B_3>1000k\right)\Pr\left(I_1=1\right)\Pr\left(I_2=0\right)\Pr\left(I_3=1\right)\\ &+\Pr\left(B_2+B_3>1000k\right)\Pr\left(I_1=0\right)\Pr\left(I_2=1\right)\Pr\left(I_3=1\right)\\ &+\Pr\left(B_1+B_2+B_3>1000k\right)\Pr\left(I_1=1\right)\Pr\left(I_2=1\right)\Pr\left(I_3=1\right)\end{aligned}$$

$$\Pr\left(S>1000k\right)=\begin{cases}0.1204806, & k=1\\ 0.0073844, & k=5\\ 0.0001456, & k=10\end{cases}$$

(d) (Voir Fichier Excel)

$$VaR_{0.99}\left(S\right)=4592.58.$$

9. (a)

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(L_1 > 0\right) &= \Pr\left(S - P > 0\right) \\
&= \Pr\left(S > P\right) \\
&= \Pr\left(\sum_{i=1}^{100} 1000 \times I_i > P\right) \\
&= \Pr\left(\sum_{i=1}^{100} I_i > \frac{P}{1000}\right) \\
&= \Pr\left(\sum_{i=1}^{100} I_i > \frac{5000}{1000}\right)
\end{aligned}
$$

On sait que $I_i \sim Bern\left(\frac{1}{20}\right)$ donc $N = \sum\limits_{i=1}^{100} I_i \sim Bin\left(100, \frac{1}{20}\right)$. On obtient,

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(L_1 > 0\right) &= \Pr\left(N > 5\right) \\
&= 1 - (\Pr(N=0) + \Pr(N=1) + \Pr(N=2) + \Pr(N=3) + \Pr(N=4) + \Pr(N=5)) \\
&= 1 - \left(\begin{array}{c} \left(\frac{19}{20}\right)^{100} + \binom{100}{1}\left(\frac{1}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^{99} + \binom{100}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^{2}\left(\frac{19}{20}\right)^{98} + \\ \binom{100}{3}\left(\frac{1}{20}\right)^{3}\left(\frac{19}{20}\right)^{97} + \binom{100}{4}\left(\frac{1}{20}\right)^{4}\left(\frac{19}{20}\right)^{96} + \binom{100}{5}\left(\frac{1}{20}\right)^{5}\left(\frac{19}{20}\right)^{95} \end{array} \right) \\
&= 0.384009
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(L_2 > 0\right) &= \Pr\left(D - T > 0\right) \\
&= \Pr\left(\sum_{i=1}^{6} 1000 \times J_i < D\right) \\
&= \Pr\left(\sum_{i=1}^{6} J_i < \frac{D}{1000}\right) \\
&= \Pr\left(M < \frac{5000}{1000}\right) \\
&= \Pr\left(M \leq 4\right) \\
&= \Pr(M=0) + \Pr(M=1) + \Pr(M=2) + \Pr(M=3) + \Pr(M=4) \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 \\
&= 0.2632245
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
L &= L_1 + L_2 \\
&= (S - P) + (D - T) \\
&= (S - 5000) + (5000 - T) \\
&= S - T \\
&= \left(\sum_{i=1}^{100} 1000 \times I_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{6} 1000 \times J_i \right) \\
&= 1000 \left(\sum_{i=1}^{100} I_i - \sum_{i=1}^{6} J_i \right) \\
&= 1000 \, (N - M) \\
L &\in \{-6000, -5000, \ldots, 0, \ldots, 100000\}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\Pr(L = 1000k) &= \Pr(L_1 + L_2 = 1000k) \\
&= \Pr(S - P + D - T = 1000k) \\
&= \Pr\left(\sum_{i=1}^{100} X_i - 5000 + 5000 - \sum_{i=1}^{6} Y_i = 1000k \right) \\
&= \Pr\left(\sum_{i=1}^{100} X_i - 5000 + 5000 - \sum_{i=1}^{6} Y_i = 1000k \right) \\
&= \Pr\left(\sum_{i=1}^{100} 1000 I_i - \sum_{i=1}^{6} 1000 J_i = 1000k \right) \\
&= \Pr\left(\sum_{i=1}^{100} I_i - \sum_{i=1}^{6} J_i = k \right) \\
&= \Pr(N - M = k)
\end{aligned}
$$

où $N \sim Bin\left(n = 100, q = \frac{1}{20}\right)$ et $M \sim Bin\left(n = 6, q = \frac{5}{6}\right)$.

(d)

$$
\begin{aligned}
\Pr(L = -6000) &= \Pr(N = 0) \Pr(M = 6) \\
&= (0.005920529)\,(0.334897977) \\
&= 0.001982773
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(L = -5000) &= \Pr(N = 0) \Pr(M = 5) + \Pr(N = 1) \Pr(M = 6) \\
&= (0.005920529)\,(0.401877572) + (0.03116068)\,(0.334897977) \\
&= 0.01281498
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(L = -4000) &= \Pr(N = 0) \Pr(M = 4) + \Pr(N = 1) \Pr(M = 5) + \Pr(N = 2) \Pr(M = 6) \\
&= (0.005920529)\,(0.200938786) + (0.03116068)\,(0.401877572) + (0.081181772)\,(0.334897977) \\
&= 0.04090005
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Pr(L=-3000) &= \Pr(N=0)\Pr(M=3)+\Pr(N=1)\Pr(M=4)+\Pr(N=2)\Pr(M=5)+\Pr(N=3)\Pr(\\
&= (0.005920529)(0.053583676)+(0.03116068)(0.200938786)+(0.081181772)(0.401877572) \\
&\quad +(0.139575678)(0.334897977) \\
&= 0.08594738
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Pr(L=-2000) \\
&= 0.1337818
\end{aligned}$$

$$\Pr(L=-1000)=0.1645296$$

$$\Pr(L=0)=0.1665322$$

(e)

$$\begin{aligned}
\Pr(L\leq 0) &= \sum_{k=-6}^{0}\Pr(L=1000k) \\
&= 0.606488
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\Pr(L>0) &= 1-\Pr(L\leq 0) \\
&= 1-0.606488 \\
&= 0.3935112
\end{aligned}$$

La probabilité que l'institut ne remplisse pas ses engagements est de 39.35%.

10. (a)

$$\begin{aligned} E[X] &= E[I]\,E[B] \\ &= E[I]\,(E[C]+E[D]) \\ &= (0.12)\,(1000+2000) \\ &= 360 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[I]\,Var(B) + Var(I)\,E[B]^2 \\ &= E[I]\,(Var(C)+Var(D)+2Cov(C,D)) + Var(I)\,(E[C]+E[D])^2 \\ &= (0.12)\left((1500)^2+(4000)^2+(2)\,(1800000)\right) + (0.12)\,(1-0.12)\,(1000+2000)^2 \\ &= 3572400 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E[S] &= 500E[X] \\ &= (500)\,(360) \\ &= 180000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(S) &= 500Var(X) \\ &= (500)\,(3572400) \\ &= 1786200000 \end{aligned}$$

(c) On sait que

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= TVaR_\kappa(\mu+\sigma Z) \\ &= \mu+\sigma TVaR_\kappa(Z) \end{aligned}$$

et on sait que

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Z) &= \frac{E\left[Z\times 1_{\{Z>VaR_\kappa(Z)\}}\right]}{1-\kappa} \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \end{aligned}$$

d'où le resultat désiré

$$TVaR_\kappa(Y) = \mu + \frac{1}{1-\kappa}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$

(d) On approxime S par une v.a de loi normale T tel que $T\sim N(E[S],Var(S))$.

$$\begin{aligned} VaR_{0.995}(S) &= VaR_{0.995}(T) \\ &= VaR_{0.995}(\mu+\sigma Z) \\ &= \mu+\sigma VaR_{0.995}(Z) \\ &= E[S]+\sqrt{Var(S)}VaR_{0.995}(Z) \\ &= 180000+\sqrt{1786200000}\,(2.575829304) \\ &= 288863.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CE_{0.995}(S) &= VaR_{0.995}(S) - E[S] \\ &= 288863.5 - 180000 \\ &= 108863.5 \end{aligned}$$

(e) On approxime S par une v.a de loi normale T tel que $T \sim N(E[S], Var(S))$.

$$\begin{aligned} TVaR_{0.995}(S) &\approx TVaR_{0.995}(T) \\ &= E[S] + \frac{1}{1-0.995}\sqrt{Var(S)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(0.995)\right)^2}{2}} \\ &= 180000 + \frac{1}{1-0.995}\sqrt{1786200000}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2.575829304)^2}{2}} \\ &= 302223.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CE_{\kappa}(S) &= TVaR_{0.995}(S) - E[S] \\ &= 122223.8 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} \Pi_n^{VaR}(X) &= VaR_{0.95}\left(\overline{X}_n\right) \\ &\simeq E\left(\overline{X}_n\right) + 1.645\sqrt{Var\left(\overline{X}_n\right)} \\ &= E(X) + \frac{1.645}{\sqrt{n}}\sqrt{Var(X)} \\ &= 360 + \frac{1.645}{\sqrt{n}}\sqrt{3572400} \\ \Pi_{500}^{VaR}(X) &= 360 + \frac{1.645}{\sqrt{500}}\sqrt{3572400} \\ &= 499.05 \end{aligned}$$

La prime diminue lorsque n augmente car le risque global est réparti sur un plus grand nombre de contrats.

(g)

$$\begin{aligned} \Pi_n^{TVaR}(X) &= TVaR_{0.95}\left(\overline{X}_n\right) \\ &\simeq E\left(\overline{X}_n\right) + \frac{1}{1-0.95}\sqrt{Var\left(\overline{X}_n\right)}\frac{e^{-\frac{(1.6452)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= E(X) + \frac{1}{1-0.95}\frac{\sqrt{Var(X)}}{\sqrt{n}}\frac{e^{-\frac{(1.6452)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= 360 + \frac{1}{1-0.95}\frac{\sqrt{3572400}}{\sqrt{n}}\frac{e^{-\frac{(1.6452)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\ \Pi_{500}^{TVaR}(X) &= 360 + \frac{1}{1-0.95}\frac{\sqrt{3572400}}{\sqrt{500}}\frac{e^{-\frac{(1.6452)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= 534.26. \end{aligned}$$

La prime diminue lorsque n augmente car le risque global est réparti sur un plus grand nombre de contrats.

11. (a)

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(S) &= VaR_{.99}(5000N) \\ &= 5000VaR_{.99}(N) \\ &= (5000)(5) \\ &= 25000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CE_{0.99}(S) &= VaR_{0.99}(S) - E[S] \\ &= 25000 - (5000)((60)(0.01) + (40)(0.02)) \\ &= 18000 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(S) &= TVaR_{0.99}(5000N) \\ &= 5000TVaR_{.99}(N) \\ &= (5000)\left(\frac{E\left[N \times 1_{\{N>5\}}\right] + VaR_{0.99}(N)(F_N(VaR_{0.99}(N)) - 0.99)}{1-0.99}\right) \\ &= (5000)\left(\frac{\sum_{k=6}^{10} k\Pr(N=k) + (5)(0.997105 - 0.99)}{1-0.99}\right) \\ &= (5000)\left(\frac{0.018001 + (5)(0.997105 - 0.99)}{1-0.99}\right) \\ &= (5000)(5.3526) \\ &= 26763 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CE_{0.99}(S) &= TVaR_{0.99}(S) - E[S] \\ &= 26763 - (5000)((60)(0.01) + (40)(0.02)) \\ &= 19763 \end{aligned}$$

12. (a)

$$\begin{aligned} E\left[S_{1000}\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{1000} X_i\right] \\ &= (1000)(2) \\ &= 2000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\left(S_{1000}\right) &= Var\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) \\ &= (1000)(49) \\ &= 49000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{1000}(u) &= \Pr\left(S_{1000} > u + \sum_{i=1}^{1000} \pi_i\right) \\ \psi_{1000}(0) &= \Pr\left(S_{1000} > \sum_{i=1}^{1000} (1+0.1)\, E\left[X_i\right]\right) \\ &= \Pr\left(S_{1000} > \sum_{i=1}^{1000} (1+0.1)(2)\right) \\ &= \Pr\left(\frac{S_{1000} - E\left[S_{1000}\right]}{\sqrt{Var\left(S_{1000}\right)}} > \frac{2200-2000}{\sqrt{49000}}\right) \\ &= \Pr\left(Z > 0.903508\right) \\ &= 0.1831. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Var\left(S_{1000}\right) &= Var\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{1000} Var\left(X_i\right) + (200)(5)(4)\, Cov\left(X_i, X_j\right) \\ &= (1000)(49) + (200)(5)(4)(25) \\ &= 149000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\left(S_{1000}\right) &= Var\left(Y_1 + ... + Y_{200}\right) \\ &= (200)\, Var\left(Y_i\right) \\ &= (200)\, Var\left(X_1^{(i)} + ... + X_5^{(i)}\right) \\ &= (200)\left(\left(5Var(X_1^{(i)}\right) + (5)(4)\, Cov\left(X_j^{(i)}, X_k^{(i)}\right)\right) \\ &= (200)\left((5)(49) + (5)(4)(25)\right) \\ &= 149000 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{1000}(u) &= \Pr\left(S_{1000} > u + \sum_{i=1}^{1000} \pi_i\right) \\
\psi_{1000}(0) &= \Pr\left(S_{1000} > \sum_{i=1}^{1000} (1+0.1)\, E\left[X_i\right]\right) \\
&= \Pr\left(S_{1000} > \sum_{i=1}^{1000} (1+0.1)\,(2)\right) \\
&= \Pr\left(\frac{S_{1000} - E\left[S_{1000}\right]}{\sqrt{Var\left(S_{1000}\right)}} > \frac{2200-2000}{\sqrt{149000}}\right)_j \\
&= \Pr\left(Z > 0.51812776\right) \\
&= 0.3022.
\end{aligned}
$$

13. (a) Étant donné que $\Pr(I_1 = 1) = 0.1$ et $\Pr(I_2 = 1) = 0.2$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 1, I_2 = 0) = \Pr(I_1 = 1) - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= 0.1 - 0.06 \\ &= 0.04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) = \Pr(I_2 = 1) - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= 0.2 - 0.06 \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 0) = 1 - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) - \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= 1 - 0.04 - 0.14 - 0.06 \\ &= 0.76 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_S(4000) &= \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) H\left(4000; 1; \frac{1}{1000}\right) \\ + \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) H\left(4000; 2; \frac{1}{1000}\right) + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) H\left(4000; 3; \frac{1}{1000}\right) \\ &= (0.76) + (0.04)\,(0.9817) + (0.14)\,(0.9084) + (0.06)\,(0.7619) \\ &= 0.972158 \end{aligned}$$

(b) À noter que pour $X \sim Gamma\,(\alpha, \beta)$, on a

$$E[\min(X; d)] = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) H\,(d; \alpha + 1, \beta) + d\overline{H}\,(d; \alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned} E[\min(S; 4000)] &= E[\min(S; 4000)\,|(I_1 = 0, I_2 = 0)]\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) \\ + E[\min(S; 4000)\,|(I_1 = 0, I_2 = 1)]\Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) \\ + E[\min(S; 4000)\,|(I_1 = 1, I_2 = 0)]\Pr(I_1 &= 1, I_2 = 0) \\ + E[\min(S; 4000)\,|(I_1 = 1, I_2 = 1)]\Pr(I_1 &= 1, I_2 = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\min(S; 4000)] &= (0)\Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) \\ + \left(\left(\frac{2}{\frac{1}{1000}}\right) H\left(4000; 3, \frac{1}{1000}\right) + 4000\overline{H}\left(4000; 2, \frac{1}{1000}\right)\right)\Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) \\ + \left(\left(\frac{1}{\frac{1}{1000}}\right) H\left(4000; 2, \frac{1}{1000}\right) + 4000\overline{H}\left(4000; 1, \frac{1}{1000}\right)\right)\Pr(I_1 &= 1, I_2 = 0) \\ + \left(\left(\frac{3}{\frac{1}{1000}}\right) H\left(4000; 4, \frac{1}{1000}\right) + 4000\overline{H}\left(4000; 3, \frac{1}{1000}\right)\right)\Pr(I_1 &= 1, I_2 = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\min(S; 4000)] &= ((2000)\,(0.7619) + (4000)\,(1 - 0.9084))\,(0.14) + ((1000)\,(0.9084) + (4000)\,(1 - 0.9817))\,(0.04 \\ &\quad + ((3000)\,(0.5665) + (4000)\,(1 - 0.7619))\,(0.06) \\ &= 463.006 \end{aligned}$$

14. (a)

$$\begin{aligned}\pi^{ABC} &= (1.2)\,E[X]\\ &= (1.2)(1000)(0.016740)\\ &= 20.088\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi^{EDF,1} &= (1.2)\,E\left[X^{classe\ 1}\right]\\ &= (1.2)(1000)(0.008592)\\ &= 10.3104\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi^{EDF,2} &= (1.2)\,E\left[X^{classe\ 2}\right]\\ &= (1.2)(1000)(0.025174)\\ &= 30.2088\end{aligned}$$

L'approche de l'actuaire de la compagnie EDF est plus appropriée car le niveau de risque des deux classes est très différent.

(b) Seul les risques de la classe 2 vont choisir la compagnie ABC car le prix est plus avantageux pour eux :

$$\begin{aligned}REV^{ABC} &= (200)(20.088)\\ &= 4017.6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{200}^{ABC}(0) &= \Pr(S > REV^{ABC})\\ &= \Pr(\#\text{ de décès} > 4)\\ &= 1-(\Pr(N=0)+\Pr(N=1)+\Pr(N=2)+\Pr(N=3)+\Pr(N=4))\\ &= 1-\binom{100}{0}(0.025174)^0(1-0.025174)^{100}\\ &\quad -\binom{100}{1}(0.025174)^1(1-0.025174)^{99}\\ &\quad -\binom{100}{2}(0.025174)^2(1-0.025174)^{98}\\ &\quad -\binom{100}{3}(0.025174)^3(1-0.025174)^{97}\\ &\quad -\binom{100}{4}(0.025174)^4(1-0.025174)^{96}\\ &= 1-0.891409\\ &= 0.108591\end{aligned}$$

où $N^{ABC} \sim Binom\,(200, 0.025174)$. Il faut prendre la prob q pour la classe 2...

(c) Seul les risques de la classe 1 vont choisir la compagnie DEF car le prix est plus avantageux pour eux :

$$\begin{aligned}REV^{DEF} &= (200)(10.3104)\\ &= 2062.08\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{200}^{DEF}(0) &= \Pr(S > REV^{DEF}) \\
&= \Pr(\# \text{ de décès} > 2) \\
&= 1 - (\Pr(N=0) + \Pr(N=1) + \Pr(N=2)) \\
&= 1 - \binom{100}{0}(0.008592)^0 (1-0.008592)^{100} \\
&\quad - \binom{100}{1}(0.008592)^1 (1-0.008592)^{99} \\
&\quad - \binom{100}{2}(0.008592)^2 (1-0.008592)^{98} \\
&= 1 - 0.944463 \\
&= 0.055537
\end{aligned}
$$

où $N^{DEF} \sim Binom(100, 0.008592)$. Il faut prendre la prob q pour la classe 1...

(d)

$$
\begin{aligned}
\psi_n^{ABC}(0) &= \Pr\left(S_n > n\pi^{ABC}\right) \\
&= \Pr\left(S_n - E[S_n] > n\pi^{ABC} - E[S_n]\right) \\
&= \Pr\left(S_n - E[S_n] > n\pi^{ABC} - nE[X]\right) \\
&= \Pr\left(S_n - E[S_n] > n20.088 - n(1000)(0.025174)\right) \\
&= \Pr\left(S_n - E[S_n] > -n(20.088 - 25.174)\right) \\
&\geq 1 - \Pr\left(|S_n - E[S_n]| > n\frac{(25.174-20.088)}{\sqrt{Var(S_n)}}\sqrt{Var(S_n)}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(|S_n - E[S_n]| > n\frac{(25.174-20.088)}{\sqrt{nVar(X)}}\sqrt{Var(S_n)}\right) \\
&\geq 1 - \frac{nVar(X)}{n^2(25.174-20.088)^2} \\
&= 1 - \frac{Var(X)}{n(25.174-20.088)^2}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \psi_n^{DEF}(0) = 1$. En chargeant une prime $\left(\pi^{ABC} = 20.088\right)$ inférieure à l'espérance des coûts $(E[X] = 25.174)$ pour un contrat il en résulte que la probabilité de ruine tend vers 1 lorsque le nombre de contrats $n \to \infty$.

(e)

$$
\begin{aligned}
\psi_n^{DEF}(0) &= \Pr\left(S_n > n\pi^{DEF}\right) \\
&= \Pr\left(S_n - E[S_n] > n\pi^{DEF} - E[S_n]\right) \\
&= \Pr\left(S_n - E[S_n] > n\pi^{DEF} - nE[X]\right) \\
&= \Pr\left(S_n - E[S_n] > n10.3104 - n(1000)(0.008592)\right) \\
&= \Pr\left(S_n - E[S_n] > n(10.3104 - 8.592)\right) \\
&\leq \Pr\left(|S_n - E[S_n]| > n\frac{(10.3104 - 8.592)}{\sqrt{Var(S_n)}}\sqrt{Var(S_n)}\right) \\
&= \Pr\left(|S_n - E[S_n]| > n\frac{(10.3104 - 8.592)}{\sqrt{nVar(X)}}\sqrt{Var(S_n)}\right) \\
&\leq \frac{nVar(X)}{n^2(10.3104 - 8.592)^2} \; (Par\ Tchebychev) \\
&= \frac{Var(X)}{n(10.3104 - 8.592)^2}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \psi_n^{DEF}(0) = 0$. En chargeant une prime $\left(\pi^{DEF} = 10.3104\right)$ supérieure à l'espérance des coûts $(E[X] = 8.592)$ pour un contrat il en résulte que la probabilité de ruine tend vers 0 lorsque le nombre de contrats $n \to \infty$.

15. On sait que X_1 et X_2 avec
$$\mathcal{L}_{X_1}(t) = 1 - q_1 + q_1 \times \frac{\beta_1}{\beta_1 + t}$$
et
$$\mathcal{L}_{X_2}(t) = 1 - q_2 + q_2 \times \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}$$
pour $t \geq 0$. Hypothèses : $q_1 = 0.05$, $q_2 = 0.1$, $\beta_1 = \frac{1}{2000}$ et $\beta_2 = \frac{1}{1000}$.
   (a) Calculer $E[X_1]$, $E[X_2]$ et $E[S]$.
   Espérance de X_1 :
   $$E[X_1] = q_1 \times \frac{1}{\beta_1} = 0.05 \times 2000 = 100.$$
   Espérance de X_2 :
   $$E[X_2] = q_2 \times \frac{1}{\beta_2} = 0.1 \times 1000 = 100.$$
   Espérance de S :
   $$E[S] = E[X_1] + E[X_2] = 200.$$
   (b) Développer l'expression de $F_S(x)$. On obtient
   $$F_S(x) = p_{0,0} + p_{0,1}H(x; 1, \frac{1}{1000}) + p_{1,0}H(x; 1, \frac{1}{2000}) + p_{1,1}H_{ErlG}(x; \frac{1}{1000}, \frac{1}{2000})$$
   où
   - $p_{0,1} = (1 - q_1) \times q_2$
   - $p_{1,0} = q_1 \times (1 - q_2)$
   - $p_{1,1} = q_1 \times q_2$
   - $H_{ErlG}(x; \beta_1, \beta_2) = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} H(x; 1, \beta_1) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} H(x; 1, \beta_2)$ = fonction de répartition de la loi Erlang généralisée.

   (c) Développer l'expression de $\pi_S(x) = E[\max(S - x; 0)]$ On obtient
   $$\pi_S(x) = p_{0,1}1000 \times \overline{H}(x; 1, \frac{1}{1000}) + p_{1,0}2000 \times \overline{H}(x; 1, \frac{1}{2000}) + p_{1,1}\zeta(x; \frac{1}{1000}, \frac{1}{2000})$$
   où
   - $p_{0,1} = (1 - q_1) \times q_2$
   - $p_{1,0} = q_1 \times (1 - q_2)$
   - $p_{0,1} = q_1 \times q_2$
   - $\zeta(x; \beta_1, \beta_2) = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \frac{1}{\beta_1} \overline{H}(x; 1, \beta_1) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \frac{1}{\beta_2} \overline{H}(x; 1, \beta_2)$ = fonction stop-loss de la loi Erlang généralisée.

   (d) Calculer $\kappa = F_S(5000)$ et $TVaR_\kappa(S)$.
   Valeur de $\kappa = F_S(5000)$: 0.9948789
   Valeur de $TVaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa}\pi_S(VaR_\kappa(S))$: 6881.585

16. (a) On a,

$$
\begin{aligned}
E(I_1) &= E\left[E\left[I_1|\Theta\right]\right] \\
&= E\left[\Theta\right] \\
&= 1/10; \\
Var(I_1) &= E\left[Var\left[I_1|\Theta\right]\right] + Var\left[E\left[I_1|\Theta\right]\right] \\
&= E\left[\Theta \times (1-\Theta)\right] + Var\left[\Theta\right] \\
&= E\left[\Theta\right] - E\left[\Theta^2\right] + Var\left[\Theta\right] \\
&= E\left[\Theta\right] - \left(Var\left[\Theta\right] + E^2\left[\Theta\right]\right) + Var\left[\Theta\right] \\
&= E\left[\Theta\right] - E^2\left[\Theta\right] \\
&= 1/10 - 1/100 = 9/100
\end{aligned}
$$

(b) On a,

$$
\begin{aligned}
E(X_1) &= E(I_1 B_1) = E(I_1)E(B_1) \\
&= (1/10) \times e^{2+0.9^2/2} \\
&= 1.1078; \\
Var(X_1) &= Var(I_1 B_1) \\
&= E(I_1^2 B_1^2) - E^2(I_1 B_1) \\
&= E(I_1^2)E(B_1^2) - \left(E(I_1)E(B_1)\right)^2 \\
&= \left(Var(I_1) + E^2(I_1)\right)\left(Var(B_1) + E^2(B_1)\right) - \left(E(I_1)E(B_1)\right)^2 \\
&= (9/100 + 1/100)\,(153.1577 + 122.7316) - 1.107843^2 \\
&= 26.3616.
\end{aligned}
$$

(c) On a,

$$
\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) \\
&= E(I_1 I_2 B_1 B_2) - 1.1078^2 \\
&= E_\Theta\left(E\left(I_1 I_2 B_1 B_2|\Theta\right)\right) - 1.1078^2 \\
&= E_\Theta\left(E(I_1|\Theta)E(I_2|\Theta)E(B_1|\Theta)E(B_2|\Theta)\right) - 1.1078^2 \\
&= E_\Theta\left(\Theta^2 \times 11.078^2\right) - 1.1078^2 \\
&= 11.078^2\left(Var(\Theta) + E^2(\Theta)\right) - 1.1078^2 \\
&= 11.078^2(0.0042857 + 1/100) - 1.1078^2 \\
&= 0.52595.
\end{aligned}
$$

(d) On a,

$$
\begin{aligned}
E(S_{200}) &= 200 \times E(X_1) \\
&= 200 \times 1.108 \\
&= 221.56; \\
Var(S_{200}) &= \sum_{i=1}^{200} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{200} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{200} Cov(X_i, X_j) \\
&= 200 \times Var(X_1) + 200 \times 199 \times Cov(X_1, X_2) \\
&= 200 \times 26.3616 + 200 \times 199 \times 0.52595 \\
&= 26205.13
\end{aligned}
$$

(e) Pour X_1, on a

$$
\begin{aligned}
\varphi(X_1) &= E(X_1) + \frac{\sqrt{Var(X_1)}}{(1-0.95) \times \sqrt{2\pi}} \times e^{\frac{-(\Phi(0.95))^2}{2}} \\
&= 1.1078 + \frac{\sqrt{26.3616}}{(1-0.95) \times \sqrt{2\pi}} \times e^{\frac{-(1.644854^2)}{2}} \\
&= 11.69849306; \\
\varphi(S_{200}) &= E(S_{200}) + \frac{\sqrt{Var(S_{200})}}{(1-0.95) \times \sqrt{2\pi}} \times e^{\frac{-(\Phi(0.95))^2}{2}} \\
&= 221.56 + \frac{\sqrt{26205.13}}{(1-0.95) \times \sqrt{2\pi}} \times e^{\frac{-(1.644854^2)}{2}} \\
&= 555.4717164.
\end{aligned}
$$

En ce qui a trait au bénéfice de mutualisation, on a

$$
\begin{aligned}
BE_{0.95}^{TVaR}(S_{200}) &= \sum_{i=1}^{200} TVaR(X_i) - TVaR(S_{200}) \\
&= 200 \times \varphi(X_1) - \varphi(S_{200}) \\
&= 200 \times 11.69849306 - 555.4717164 \\
&= 1784.226896.
\end{aligned}
$$

On a donc intérêt à mutualiser les risques puisque le bénéfice est positif.

17. (a) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta=0\right] &= \lim_{n\to\infty} E\left[S_n/n|\Theta=0\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i|\Theta=0\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left[X_i|\Theta=0\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} 1+5(0)=1; \\
\lim_{n\to\infty} E\left[W_n|\Theta=1\right] &= \lim_{n\to\infty} 1+5(1) \\
&= 6
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E\left[W_n\right] &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[E\left[E\left(X_1|\Theta\right)\right]...+E\left[E\left(X_n|\Theta\right)\right]\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} E\left[n\times(1+5\Theta)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} 1+5\times E\left[\Theta\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} 1+5(0.2) \\
&= 2
\end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Var\left[W_n\right] &= \lim_{n\to\infty} E\left[Var\left[W_n|\Theta\right]\right]+Var\left[E\left[W_n|\Theta\right]\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}E\left[Var\left[X|\Theta\right]\right]+Var\left[E\left[X|\Theta\right]\right] \\
&= Var\left[E\left[X|\Theta\right]\right] \\
&= Var\left[1+5\Theta\right] \\
&= 25Var(\Theta)=25\times 0.2\times 0.8=4
\end{aligned}$$

(d) Avant de commencer, il est bon de rappeler que les deux premiers termes du développement de Taylor de e^{-x} sont,

$$e^{-x} = 1 - x$$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n|\Theta=0}(t) &= \lim_{n\to\infty} \left[1 - E\left[X|\Theta=0\right]\frac{t}{n}\right]^n \\
&= e^{-tE[X|\Theta=0]}; \\
\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n|\Theta=1} &= e^{-tE[X|\Theta=1]}
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n} = e^{-tE[X|\Theta]} = \mathcal{L}_Z(t),$$

où la variable aléatoire Z est telle que

$$\Pr(Z=1) = 0.8; \Pr(Z=6) = 0.2$$

18. (a) On a

$$\begin{aligned} E\left[W_n|\Theta\right] &= E\left[\frac{S_n}{n}|\Theta\right] \\ &= E\left[X_i|\Theta\right]; \\ Var\left[W_n|\Theta\right] &= Var\left[S_n/n|\Theta\right] \\ &= \frac{1}{n}Var\left[X_i|\Theta\right]. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} E_\Theta\left[Var\left[W_n|\Theta\right]\right] &= E_\Theta\left[\frac{1}{n}Var\left[X_i|\Theta\right]\right] \\ &= \frac{1}{n}E_\Theta\left[10\Theta\right] \\ &= \frac{10}{n}E\left[\Theta\right] = \frac{10}{n}; \\ Var_\Theta\left[E\left[W_n|\Theta\right]\right] &= Var\left[E\left[X_i|\Theta\right]\right] \\ &= Var\left[5\Theta\right] \\ &= 25 \times Var\left[\Theta\right] = 12.5. \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} E\left[W_{20}\right] &= E\left[X_i\right] \\ &= E\left[E\left[X|\Theta\right]\right] \\ &= E\left[5\Theta\right] = 5; \\ Var\left[W_{20}\right] &= E\left[Var\left[W_{20}|\Theta\right]\right] + Var\left[E\left[W_{20}|\Theta\right]\right] \\ &= \frac{1}{20}E\left[Var\left[X_i|\Theta\right]\right] + Var\left[E\left[X_i|\Theta\right]\right] \\ &= \frac{1}{20}E\left[10\Theta\right] + 25Var\left[\Theta\right] = 13. \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E\left[W_n\right] &= \lim_{n\to\infty} E\left[X_i\right] \\ &= 5; \\ \lim_{n\to\infty} Var\left[W_n\right] &= Var\left(E\left(X|\Theta\right)\right) = 12.5; \\ \lim_{n\to\infty} E_\Theta\left[Var\left[W_n|\Theta\right]\right] &= \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}Var\left[X_i|\Theta\right]\right] = 0 \\ \lim_{n\to\infty} Var_\Theta\left[E\left[W_n|\Theta\right]\right] &= \lim_{n\to\infty} Var\left[5\Theta\right] \\ &= 12.5. \end{aligned}$$

(e) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(t) &= E\left[e^{-tx}\right] \\
&= E_\Theta\left[E\left[e^{-tx}|\Theta\right]\right] \\
&= \int_\theta E\left[e^{-tx}|\Theta=\theta\right] f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta; \\
\mathcal{L}_{S_n}(t) &= \int_\theta E\left[e^{-tS_n}|\Theta=\theta\right] f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_\theta \prod_{i=1}^n E\left[e^{-tx_i}|\Theta=\theta\right] f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_\theta \left[E\left[e^{-tx}|\Theta=\theta\right]\right]^n f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta; \\
\mathcal{L}_{W_n}(t) &= E\left[e^{-tW_n}\right] = E\left[e^{\frac{-tS_n}{n}}\right] \\
&= \int_\theta \left[E\left[e^{\frac{-tx}{n}}|\Theta=\theta\right]\right]^n f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\approx \int_\theta \left(1-\frac{\gamma t}{n}\right)^n f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

où $\gamma = E\left[X|\Theta\right]$. Ainsi, on déduit

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{W_n}(x) &\approx \lim_{n\to\infty} \int_\Theta \left(1-\frac{\gamma t}{n}\right)^n f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_\theta f_\Theta(\theta) e^{-\gamma t}\mathrm{d}\theta \\
&= \mathcal{L}_Z(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, Z prend les valeurs sur $E\left[X|\Theta=\theta\right] = 5\Theta$. Si $\Theta \sim \Gamma(2,2)$, alors la distribution de 5Θ est

$$\begin{aligned}
\Pr\left(5\Theta < x\right) &= \Pr\left(\Theta < x/5\right) \\
&= H(x/5;2,2) \\
&= H(x;2,2/5).
\end{aligned}$$

Donc, $Z \sim \Gamma(2,2/5)$. L'espérance de Z est donnée par

$$E\left[Z\right] = \frac{2}{2/5} = 5.$$

L'espérance de Z est la même que l'espérance de W_n. À l'aide de R, on obtient

$$VaR_{0.01}(Z) = 0.3713869;$$

$$VaR_{0.99}(Z) = 16.59588.$$

19. (a) On a

$$\begin{aligned} E(S_{10}) &= E(W_1 + ... + W_{10}) \\ &= 10 \times E\left((X+Y)\,Z\right) \\ &= 10E(X \times Z) + 10E(Y \times Z) \\ &= 3330. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} Var(S_{10}) &= 10 \times Var(XZ + YZ) \\ &= 10\left(E\left((XZ+YZ)^2\right) - E^2\left(XZ+YZ\right)\right) \\ &= 10\left(E\left(X^2Z^2 + 2XYZ^2 + Y^2Z^2\right) - E^2\left(XZ+YZ\right)\right) \\ &= 10\left(E(X^2)E(Z^2) + 2E(X)E(Y)E(Z^2) + E(Y^2)E(Z^2) - \left(E(X)E(Z) + E(Y)E(Z)\right)^2\right) \\ &= 10\left(542703 - 333^2\right) = 4318140. \end{aligned}$$

(c) On calcule d'abord $Var(S_n/n)$:

$$\begin{aligned} Var(S_n/n) &= \frac{1}{n} Var(W) \\ &= \frac{1}{n} Var(XZ+YZ) = \frac{1}{n} \times 431814. \end{aligned}$$

Pour la composante diversifiable, on obtient

$$\begin{aligned} E_Z\left(Var\left(\frac{S_n}{n}|Z\right)\right) &= E_Z\left(\frac{Z^2}{n} Var\left(X+Y\right)\right) \\ &= E_Z\left(\frac{Z^2}{n} \times 340000\right) \\ &= \frac{340000}{n} \times 1.2621 = \frac{429114}{n} \end{aligned}$$

Pour la composante non diversifiable, on obtient

$$\begin{aligned} Var_Z\left(E\left(\frac{S_n}{n}|Z\right)\right) &= Var_Z\left(E(W|Z)\right) \\ &= Var_Z\left(Z \times E(X+Y)\right) \\ &= Var_Z(Z \times 300) \\ &= 300^2 \times Var_Z(Z) \\ &= 2700. \end{aligned}$$

20. (a) Espérance du montant qui peut être versé pour un contrat

$$E[X] = 1000 \times 0.02 = 20$$

(b) La prime chargée pour chaque contrat est

$$P = 2 \times E[X] = 2 \times 20 = 40$$

Pour $n = 1$,

$$\Pr(X_1 > 40) = \Pr(X_1 = 1000) = 0.02$$

Pour $n = 2$,

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1 + X_2 > 40 \times 2) &= 1 - \Pr(X_1 + X_2 \leq 80) \\
&= 1 - \Pr(X_1 = 0, X_2 = 0) \\
&= 1 - \Pr(X_1 = 0) \times \Pr(X_2 = 0) \\
&= 1 - 0.98^2 = 0.0396
\end{aligned}$$

Pour $n = 20$,

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 40 \times 20\right) &= 1 - \Pr\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \leq 800\right) \\
&= 1 - \Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, ..., X_{20} = 0) \\
&= 1 - 0.98^{20} = 0.332\,392\,028\,2
\end{aligned}$$

Pour $n = 50$,

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 40 \times 50\right) &= 1 - \Pr\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \leq 2000\right) \\
&= 1 - \left(\begin{array}{c} \Pr(2 \text{ contrats avec décès}) + \Pr(1 \text{ contrat avec décès}) \\ + \Pr(0 \text{ contrat avec décès}) \end{array} \right) \\
&= 1 - \left(\binom{50}{2} 0.02^2 0.98^{48} + \binom{50}{1} 0.02^1 0.98^{49} + 0.98^{50} \right) \\
&= 0.07842\,774\,835
\end{aligned}$$

(c) La prime chargée pour chaque contrat est

$$P = 3 \times E[X] = 3 \times 20 = 60$$

Pour $n = 1$,

$$\Pr(X_1 > 60) = \Pr(X_1 = 1000) = 0.02$$

Pour $n = 2$,

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1 + X_2 > 60 \times 2) &= 1 - \Pr(X_1 + X_2 \leq 120) \\
&= 1 - \Pr(X_1 = 0, X_2 = 0) \\
&= 1 - \Pr(X_1 = 0) \times \Pr(X_2 = 0) \\
&= 1 - 0.98^2 = 0.0396
\end{aligned}$$

Pour $n = 20$,

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 60 \times 20\right) &= 1 - \Pr\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \leq 1200\right) \\
&= 1 - (\Pr(1 \text{ contrat avec décès}) + \Pr(0 \text{ contrat avec décès})) \\
&= 1 - \left(\binom{20}{1} 0.02^1 0.98^{19} + 0.98^{20}\right) \\
&= 0.05989\,897\,855
\end{aligned}$$

Pour $n = 50$,

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 60 \times 50\right) &= 1 - \Pr\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \leq 3000\right) \\
&= 1 - \left(\begin{array}{c} \Pr(3 \text{ contrats avec décès}) + \Pr(2 \text{ contrats avec décès}) \\ + \Pr(1 \text{ contrat avec décès}) + \Pr(0 \text{ contrat avec décès}) \end{array}\right) \\
&= 1 - \left(\binom{50}{3} 0.02^3 0.98^{47} + \binom{50}{2} 0.02^2 0.98^{48} + \binom{50}{1} 0.02^1 0.98^{49} + 0.98^{50}\right) \\
&= 0.01775\,808\,070
\end{aligned}$$

21. Pour un homme,

— La probabilité de décès est $q^H = 0.05$.

— Le montant réclamé pour le contrat i est X_i, $i = 1, ..., 10$.

Pour une femme,

— La probabilité de décès est $q^F = 0.03$.

— Le montant réclamé pour le contrat i est Y_i, $i = 1, ..., 10$.

Le montant prévu en cas de décès, peu importe le sexe, est 100 \$.

(a) Espérance du montant total réclamé par les 20 assurés

$$\begin{aligned} E[S] &= E\left[\sum_{i=1}^{10} X_i + \sum_{i=1}^{10} Y_i\right] \\ &= 10E[X] + 10E[Y] \\ &= 10(100 \times 0.05) + 10(100 \times 0.03) \\ &= 80 \end{aligned}$$

Variance du montant total réclamé par les 20 assurés

$$\begin{aligned} Var[S] &= Var\left[\sum_{i=1}^{10} X_i + \sum_{i=1}^{10} Y_i\right] \\ &= 10Var[X] + 10Var[Y] + 90Cov[X_1, X_2] + 90Cov[Y_1, Y_2] + 200Cov[X_1, Y_1] \end{aligned}$$

On suppose que les v.a. sont indépendantes. On en déduit que $Cov[X_1, X_2] = 0$, $Cov[Y_1, Y_2] = 0$, et $Cov[X_1, Y_1] = 0$.
On conclut que

$$\begin{aligned} Var[S] &= 10Var[X] + 10Var[Y] \\ &= 10\left(100^2 \times 0.05 \times (1 - 0.05)\right) + 10\left(100^2 \times 0.03 \times (1 - 0.03)\right) \\ &= 7660 \end{aligned}$$

(b) On a maintenant une nouvelle distribution de coûts pour les contrats qui sont émis à des couples. Soit W_i les coûts pour un contrat émis à un homme et une femme en couple.

$$S' = \sum_{i=1}^{10} W_i$$

où

$$W_i = \begin{cases} 200, & \text{si l'homme et la femme décèdent avec probabilité } 0.01 \\ 100, & \text{si l'homme décède et non la femme avec probabilité } 0.04 \\ 100, & \text{si la femme décède et non l'homme avec probabilité } 0.02 \\ 0, & \text{si l'homme et la femme ne décèdent pas avec probabilité } 0.93 \end{cases}$$

On calcule l'espérance et la variance d'un couple

$$E[W] = 200 \times 0.01 + 100 \times (0.04 + 0.02) = 8$$

$$Var[W] = 200^2 \times 0.01 + 100^2 \times (0.04 + 0.02) - 8^2 = 936$$

Espérance de S'

$$\begin{aligned} E[S'] &= E\left[\sum_{i=1}^{10} W_i\right] \\ &= 10 \times E[W] = 80 \end{aligned}$$

Variance de S'

$$\begin{aligned} Var[S'] &= Var\left[\sum_{i=1}^{10} W_i\right] \\ &= 10 \times Var[W] + 90 \times Cov[W_1, W_2] \\ &= 10 \times Var[W] = 9360 \end{aligned}$$

où la $Cov[W_1, W_2]$ est null car les couples sont indépendants.

22. (a) Calculer les primes pour les contrats A et B.

 — On a
$$\Pr\left(S^{TOT}=0\right)=(1-q)^{100}=0.36603234.$$
 Alors
$$\begin{aligned} q &= 1-0.36603234^{0.01} \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

 — Prime Contrat A :
$$\pi^A=1.5\times 1000\times 0.01=15$$

 — Prime Contrat B :
$$\pi^B=1.5\times 2000\times 0.01=30$$

 (b) Calculer la probabilité que la compagnie d'assurance ABC ne rencontre pas ses engagements.

 — On cherche
$$\Pr\left(S^{TOT}>60\pi^A+40\pi^A\right)=1-\Pr\left(S^{TOT}\leq 60\pi^A+40\pi^B\right)$$
 où
$$\begin{aligned} \Pr\left(S^{TOT}\leq 60\pi^A+40\pi^A\right) &= \Pr\left(S^{TOT}\leq 60\times 15+40\times 30\right) \\ &= \Pr\left(S^{TOT}\leq 60\times 15+40\times 30\right) \\ &= \Pr\left(S^{TOT}\leq 2100\right) \end{aligned}$$

 — On a
$$\begin{aligned} \Pr\left(S^{TOT}\leq 2100\right) &= \Pr\left(N^A=0,N^B=0\right) \\ &\quad +\Pr\left(N^A=1,N^B=0\right) \\ &\quad +\Pr\left(N^A=2,N^B=0\right) \\ &\quad +\Pr\left(N^A=0,N^B=1\right) \end{aligned}$$

 — On a
$$\begin{aligned} \Pr\left(S^{TOT}\leq 2100\right) &= \Pr\left(N^A=0\right)\times\Pr\left(N^B=0\right) \\ &\quad +\Pr\left(N^A=1\right)\times\Pr\left(N^B=0\right) \\ &\quad +\Pr\left(N^A=2\right)\times\Pr\left(N^B=0\right) \\ &\quad +\Pr\left(N^A=0\right)\times\Pr\left(N^B=1\right) \\ &= (0.99)^{60}\times(0.99)^{40} \\ &\quad +60\times 0.01\,(0.99)^{59}\times(0.99)^{40} \\ &\quad +\frac{60\times 59}{2}0.01^2\times(0.99)^{58}\times(0.99)^{40} \\ &\quad +(0.99)^{60}\times 40\times 0.01\,(0.99)^{39} \\ &= .36603\,234+.22183\,778+6.61031\,78\times 10^{-2}+.14789\,186 \\ &= 0.80186\,516 \end{aligned}$$

 — Il en résulte que
$$\begin{aligned} \Pr\left(S^{TOT}>60\pi^A+40\pi^A\right) &= 1-0.80186516 \\ &= 0.19813484 \end{aligned}$$

23. (a) Indiquer les valeurs possibles que peut prendre S_4. Rép :

$$S_4 \in \{0, 100000, 200000, ..., 800000\}$$

(b) Calculer l'espérance et la variance de S_4.
Espérance de S_4 :

$$\begin{aligned} E[S_4] &= E[X_1] + ... + E[X_4] \\ &= 4E[X] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E[X] &= E[I]E[B] \\ &= E[I]cE[U] \\ &= 0.1 \times 200000 \times \left(\frac{1}{2} \times 0.6 + \frac{2}{2} \times 0.4\right) \\ &= : 14000.0 \end{aligned}$$

Alors

$$E[S_4] = 4 \times 14000 = 56000.$$

Variance de S_4 :

$$\begin{aligned} Var(S_4) &= Var(X_1) + ... + Var(X_4) \\ &= 4Var(X) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[I]Var(B) + Var(I)E[B]^2 \\ &= E[I]c^2Var(U) + Var(I)c^2E[U]^2 \\ &= 0.1 \times 200000^2 \times \left(\left(\frac{1}{2} - 0.7\right)^2 \times 0.6 + \left(\frac{2}{2} - 0.7\right)^2 \times 0.4\right) \\ &\quad +0.1 \times 0.9 \times 200000^2 \times \left(\frac{1}{2} \times 0.6 + \frac{2}{2} \times 0.4\right)^2 \\ &= 2004000000.0 \end{aligned}$$

Alors

$$Var(S_4) = 4 \times 2004000000 = 8016000000.$$

(c) Calculer $\Pr(S_4 = 100000k)$, pour $k = 0, 1, 2, ...4$.
La v.a. S_4 obéit à une loi binomiale composée. En effet,

$$S_4 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_{4i}} B_k', N_4 > 0 \\ 0, N_4 = 0 \end{cases},$$

avec les hypothèses usuelles, $N_4 \sim Binom(4, 0.1)$ et $B' \sim B$.
On a

$$\begin{aligned} \Pr(S_4 = 0) &= \Pr(N_4 = 0) \\ &= \binom{4}{0}(0.1)^0(0.9)^4 \\ &= 0.6561 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Pr\left(S_4 = 100000\right) &= \Pr\left(N_4 = 1\right) \times \Pr\left(B_1' = 100000\right) \\
&= \Pr\left(N_4 = 1\right) \times \Pr\left(U_1' = \frac{1}{2}\right) \\
&= \binom{4}{1} \left(0.1\right)^1 \left(0.9\right)^3 \times \left(0.6\right) \\
&= 0.17496
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(S_4 = 200000\right) \\
= &\Pr\left(N_4 = 1\right) \times \Pr\left(B_1' = 200000\right) \\
&+ \Pr\left(N_4 = 2\right) \times \Pr\left(B_1' + B_2' = 200000\right) \\
= &\Pr\left(N_4 = 1\right) \times \Pr\left(U_1' = 1\right) + \Pr\left(N_4 = 2\right) \times \Pr\left(U_1' = \frac{1}{2}\right) \Pr\left(U_2' = \frac{1}{2}\right) \\
= &\binom{4}{1} \left(0.1\right)^1 \left(0.9\right)^3 \times \left(0.4\right) + \binom{4}{2} \left(0.1\right)^2 \left(0.9\right)^2 \times \left(0.6 \times 0.6\right) \\
= &0.134136
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(S_4 = 300000\right) \\
= &\Pr\left(N_4 = 2\right) \times \Pr\left(B_1' + B_2' = 300000\right) \\
&+ \Pr\left(N_4 = 3\right) \times \Pr\left(B_1' + B_2' + B_3' = 300000\right) \\
= &\Pr\left(N_4 = 2\right) \times \binom{2}{1} \Pr\left(U_1' = \frac{1}{2}\right)^1 \Pr\left(U_2' = 1\right)^1 \\
&+ \Pr\left(N_4 = 3\right) \times \Pr\left(U_1' = \frac{1}{2}\right) \Pr\left(U_2' = \frac{1}{2}\right) \Pr\left(U_3' = \frac{1}{2}\right) \\
= &\binom{4}{2} \left(0.1\right)^2 \left(0.9\right)^2 \times \binom{2}{1} \left(0.4\right) \left(0.6\right) \\
&+ \binom{4}{3} \left(0.1\right)^3 \left(0.9\right)^1 \times \left(0.6 \times 0.6 \times 0.6\right) \\
= &0.0163296
\end{aligned}$$

On a

$$
\begin{aligned}
& \Pr\left(S_4 = 400000\right) \\
= \; & \Pr\left(N_4 = 2\right) \times \Pr\left(B_1' + B_2' = 400000\right) \\
& + \Pr\left(N_4 = 3\right) \times \Pr\left(B_1' + B_2' + B_3' = 400000\right) \\
& + \Pr\left(N_4 = 4\right) \times \Pr\left(B_1' + B_2' + B_3' + B_4' = 400000\right) \\
= \; & \Pr\left(N_4 = 2\right) \times \Pr\left(U_1' = 1\right)^1 \Pr\left(U_2' = 1\right)^1 \\
& + \Pr\left(N_4 = 3\right) \times 3 \times \Pr\left(U_1' = 1\right) \Pr\left(U_2' = \frac{1}{2}\right) \Pr\left(U_3' = \frac{1}{2}\right) \\
& + \Pr\left(N_4 = 4\right) \times \Pr\left(U_1' = \frac{1}{2}\right) \Pr\left(U_2' = \frac{1}{2}\right) \Pr\left(U_3' = \frac{1}{2}\right) \Pr\left(U_4' = \frac{1}{2}\right) \\
= \; & \binom{4}{2} (0.1)^2 (0.9)^2 \times \left(0.4^2\right) \\
& + \binom{4}{3} (0.1)^3 (0.9)^1 \times (3 \times 0.4 \times 0.6 \times 0.6) \\
& + \binom{4}{4} (0.1)^4 (0.9)^0 \left(0.6^4\right) \\
= \; & 0.00934416
\end{aligned}
$$

24. (a) Faire le développement pour déterminer l'expression du montant prêté pour un prêt.

On fixe la montant d'un prêt de telle sorte que les revenus totaux au 1.1.2006 soient égaux à l'espérance de la valeur présente (actualisée) du montant qui peut être recourvert par l'institution ABC pour l'ensemble des n prêts

$$200 \times \frac{1000}{1.05} = n \times \frac{c}{1.05} \times \Pr(\text{non défaut}) = n \times \frac{c}{1.05} \times 0.9723$$

On déduit que

$$c = \frac{200 \times \frac{1000}{1.05}}{n \times \frac{0.9723}{1.05}} = \frac{200}{n} \times \frac{1000}{0.9723}$$

(b) Calculer c

Pour $n = 100$, on obtient

$$c = \frac{200}{100} \times \frac{1000}{0.9723} = 2056.978\,29$$

(c) Calculer les revenus réalisés résultants du remboursement des prêts par l'institution ABC au 31.12.2006 si un défaut seulement se réalise.

$$\text{Revenus} = 99 \times 2056.978299 = 203640.8516$$

Calculer la probabilité que cet évèvement se réalise.

$$\Pr(1 \text{ défaut}) = \binom{100}{1} 0.0277^1 (1 - 0.0277)^{99} = 0.171\,675\,396\,3$$

(d) Calculer la probabilité que l'institution puisse rencontrer ses engagements au 31.12.2006

Au 21.12.2006, la compagnie a l'obligation de rembourser la totalité des montants versés en dépôts (avec intérêt). Le montant total est (nb de déposants) $\times\, b = 200 \times 1000 = 200000$. Pour la banque, le montant à verser est connu à l'avance et les revenus (des prêts) pour financer ces engagements sont aléatoires. Les prêts sont un investissement pour la banque. Cet investissement est sujet à des défauts. Cela est contraire à ce que l'on a vu jusqu'à présent en assurance où les revenus sont connus et les montants à verser en prestation sont aléatoires.

La banque pourra recontrer ses engagements tant que les revenus sont supérieurs ou égal à le montant total à rembourser.

Si 0 défaut $\Longrightarrow$ revenus = 100×2056.9783= 205697. 83

Si 1 défaut $\Longrightarrow$ revenus = 99×2056.9783= 203640. 85

Si 2 défauts $\Longrightarrow$ revenus = 98×2056.9783= 201583. 873 4

Si 3 défauts $\Longrightarrow$ revenus = 97×2056.9783= 199526. 895 1

Alors la probabilité que la compagnie rencontre ses engagements = $\Pr(N_{TOT} \leq 2)$ où N_{TOT} = nb défauts $\sim Binom(100, 0.0277)$

On obtient $\Pr(N_{TOT} \leq 2) = 0.474034178$

(e) On définit le gain G pour l'institution ABC par la différence entre le montant total des remboursements des prêts et le montant total à verser pour les dépôts. Calculer l'espérance et l'écart-type de G pour $n = 1, 10$, et 100.

Au 31.12.2006, on a

$$\begin{aligned} G &= \text{Revenus-Remboursements} \\ &= c \times (n - N_{TOT}) - n_{CD} \times b \\ &= c \times (n - N_{TOT}) - 200 \times 1000 \end{aligned}$$

où n = nombre de prêts et n_{CD} = nb de dépôts.

(Important de se rappeler la définition de c en (a)).

Comme ($q = 0.0277 = \Pr$ défaut)
$$c = \frac{200 \times 1000}{n \times (1-q)}$$
on a
$$\begin{aligned} E[G] &= c\,(n - E[N_{TOT}]) - 200 \times 1000 \\ &= \frac{200 \times 1000}{n \times (1-q)}\,(n - nq) - 200 \times 1000 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puis, on a
$$\begin{aligned} Var\,(G) &= c^2 Var\,(N_{TOT}) \\ &= \left(\frac{200 \times 1000}{n \times (1-q)}\right)^2 \times n \times q \times (1-q) \\ &= \frac{(200 \times 1000)^2}{n \times (1-q)} \times q \end{aligned}$$

On déduit que $Var\,(G) \downarrow 0$ avec $n \uparrow \infty$.
On déduit que la valeur de $\sqrt{Var\,(G)}$ est 33757.4581, 10675.04556, 3375.74581 si $n = 1, 10, 100$.

25. (a) Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.
On a

$$\begin{aligned} E[S] &= E[X_1]+E[X_2] \\ &= E[I_1]E[B_1]+E[I_2]E[B_2] \\ &= 0.1\times\frac{1}{0.0005}+0.2\times\frac{1}{0.0005\times 2} \\ &= 400 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(X_1)+Var(X_2) \\ &= E[I_1]Var(B_1)+Var(I_1)E[B_1]^2 \\ &\quad +E[I_2]Var(B_2)+Var(I_2)E[B_2]^2 \\ &= 0.1\times\left(\frac{1}{0.0005}\right)^2+0.1\times 0.9\times\left(\frac{1}{0.0005}\right)^2 \\ &\quad +0.2\times\left(\frac{1}{0.001}\right)^2+0.2\times 0.8\times\left(\frac{1}{0.001}\right)^2 \\ &= 1120000. \end{aligned}$$

(b) Calculer la probabilité que les coûts totaux pour le portefeuille soient inférieurs à 4000$.
On a

$$\begin{aligned} \Pr(S\leq 4000) &= \Pr(I_1=0,I_2=0) \\ &\quad +\Pr(I_1=1,I_2=0)\Pr(B_1\leq 4000) \\ &\quad +\Pr(I_1=0,I_2=1)\Pr(B_2\leq 4000) \\ &\quad +\Pr(I_1=1,I_2=1)\Pr(B_1+B_2\leq 4000) \\ &= 0.9\times 0.8 \\ &\quad +0.1\times 0.8\times\left(1-e^{-0.0005\times 4000}\right) \\ &\quad +0.9\times 0.2\times\left(1-e^{-0.001\times 4000}\right) \\ &\quad +0.1\times 0.2\times\left(\begin{array}{c} \frac{0.001}{0.001-0.0005}\left(1-e^{-0.0005\times 4000}\right) \\ +\frac{0.0005}{0.0005-0.001}\left(1-e^{-0.001\times 4000}\right)\end{array}\right) \\ &= 0.9808292638 \end{aligned}$$

Pour évaluer $\Pr(B_1+B_2\leq 4000)$, on utilise la loi Erlang généralisée.

26. (a) Calculer $E[S_{20000}]$ et $Var[S_{20000}]$.
On a

$$\begin{aligned}
E[S_{20000}] &= 3000E\left[X^{(A,200)}\right] + 7000E\left[X^{(B,200)}\right] \\
&\quad +6000E\left[X^{(A,300)}\right] + 4000E\left[X^{(B,300)}\right] \\
&= 3000 \times 0.021 \times 200 \times 0.2 \\
&\quad +7000 \times 0.035 \times 200 \times 0.5 \\
&\quad +6000 \times 0.021 \times 300 \times 0.2 \\
&\quad +4000 \times 0.035 \times 300 \times 0.5 \\
&= 55580.0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Var[S_{20000}] &= 3000Var\left[X^{(A,200)}\right] + 7000Var\left[X^{(B,200)}\right] \\
&\quad +6000Var\left[X^{(A,300)}\right] + 4000Var\left[X^{(B,300)}\right] \\
&= 3000 \times 200^2 \times \left(0.021 \times 0.0225 + 0.024 \times 0.2^2\right) \\
&\quad +7000 \times 200^2 \times \left(0.035 \times 0.01 + 0.043 \times 0.5^2\right) \\
&\quad +6000 \times 300^2 \times \left(0.021 \times 0.0225 + 0.024 \times 0.2^2\right) \\
&\quad +4000 \times 300^2 \times \left(0.035 \times 0.01 + 0.043 \times 0.5^2\right) \\
&= 8049450.0
\end{aligned}$$

(b) On a recourt à l'approximation normale pour évaluer la somme κ_{20000} à mettre de côté de telle sorte que $\Pr(S_{20000} \leq \kappa_{20000}) = 99\%$.
NOTE : En fait, $\kappa_{20000} = VaR_{0.99}(S_{20000})$.
En vertu du TCL, on a

$$\begin{aligned}
\kappa_{20000} &= E[S_{20000}] + 2.33 \times \sqrt{Var(S_{20000})} \\
&= 55580.0 + 2.33\sqrt{8049450.0} \\
&= 62190.\,571\,77
\end{aligned}$$

:

27. Soit X_i le montant réclamé pour le contrat i où $i \in \{1,2,3\}$.

$$X_i = \begin{cases} B, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases}$$

où $B \sim Gamma\,(\alpha = 2, \beta = 1)$ pour tous les contrats. La probabilité d'une réclamation $\Pr\,(I_i = 1) = 0.15$.

Le montant total de réclamations pour les 3 contrats est $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$

(a) Espérance de S_3

$$\begin{aligned} E\,[S_3] &= E\,[X_1 + X_2 + X_3] = 3 \times E\,[X] \\ &= 3 \times E\,[B] \times E\,[I] = 3 \times \frac{2}{1} \times 0.15 = 0.9 \end{aligned}$$

Variance de S_3

$$\begin{aligned} Var\,[S_3] &= Var\,[X_1 + X_2 + X_3] = 3 \times Var\,[X] \\ &= 3 \times \left(E^2\,[B] \times Var\,[I] + Var\,[B] \times E\,[I]\right) \\ &= 3 \times \left(\left(\frac{2}{1}\right)^2 \times 0.15 \times 0.85 + \frac{2}{1^2} \times 0.15\right) = 2.43 \end{aligned}$$

(b) On sait que $Y \sim Gamma(\alpha, 1)$. On nous donne le tableau de $F_Y(y)$

y	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 6$
2	0.5939942	0.1428765	0.01656361
4	0.9084218	0.5665299	0.21486961

$\Pr\,(S_3 = 0)$

$$\begin{aligned} \Pr\,(S_3 = 0) &= \Pr\,(I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 0) = (\Pr\,(I = 0))^3 \\ &= (0.85)^3 = 0.614\,125 \end{aligned}$$

$\Pr\,(S_3 \leq 2)$

$$\begin{aligned} \Pr\,(S_3 \leq 2) &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{h=0}^{1} \Pr\,(S_3 \leq 2 \mid I_1 = i, I_2 = j, I_3 = h) \times \Pr\,(I_1 = i, I_2 = j, I_3 = h) \\ &= \Pr\,(S_3 \leq 2 \mid I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 0) \times \Pr\,(I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 0) \\ &\quad + \Pr\,(S_3 \leq 2 \mid I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 0) \times \Pr\,(I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 0) \\ &\quad + \Pr\,(S_3 \leq 2 \mid I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 0) \times \Pr\,(I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 0) \\ &\quad + \ldots \\ &= \Pr\,(I_1 = 0, I_2 = 0, I_3 = 0) + 3 \times \Pr\,(X \leq 2) \times \Pr\,(I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 0) \\ &\quad + 3 \times \Pr\,(X_1 + X_2 \leq 2) \times \Pr\,(I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 0) \\ &\quad + \Pr\,(X_1 + X_2 + X_3 \leq 2) \times \Pr\,(I_1 = 1, I_2 = 1, I_3 = 1) \\ &= 0.85^3 + 3 \times 0.5939942 \times 0.85^2 \times 0.15 \\ &\quad + 3 \times 0.1428765 \times 0.85 \times 0.15^2 + 0.01656361 \times 0.15^3 \\ &= 0.815\,500\,805\,7 \end{aligned}$$

$\Pr(S_3 > 4)$. On utilise la relation $\Pr(S_3 > 4) = 1 - \Pr(S_3 \leq 4)$.

$$\begin{aligned}
\Pr(S_3 \leq 4) &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{h=0}^{1} \Pr(S_3 \leq 4 \mid I_1 = i, I_2 = j, I_3 = h) \times \Pr(I_1 = i, I_2 = j, I_3 = h) \\
&= 0.85^3 + 3 \times 0.9084218 \times 0.85^2 \times 0.15 \\
&\quad +3 \times 0.5665299 \times 0.85 \times 0.15^2 + 0.21486961 \times 0.15^3 \\
&= 0.942\,705\,475\,7
\end{aligned}$$

et donc

$$\Pr(S_3 > 4) = 1 - \Pr(S_3 \leq 4) = 1 - 0.942\,705\,475\,7 = 0.057\,294\,524\,3$$

28. Soit X_i le montant réclamé pour le contrat i où $i \in \{1,2\}$.

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases}$$

où $B_i \sim Gamma\left(\alpha_i, \beta = 1\right)$ pour tous les contrats. La probabilité d'une réclamation $\Pr\left(I_i = 1\right) = q_i$.

On sait que $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 4$ et $q_1 = 5\%$ et $q_2 = 10\%$

Le montant total de réclamations pour les 2 contrats est $S_3 = X_1 + X_2$.

On suppose que $Y \sim Gamma(\alpha, 1)$. Tableau de $F_Y(y)$ (aussi noté $\Gamma\left(\alpha, 1; y\right)$)

y	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 6$
2	0.5939942	0.1428765	0.01656361
4	0.9084218	0.5665299	0.21486961

(a) On suppose que les I_i $(i = 1, 2)$ sont indépendantes.

i. Espérance de S_2

$$\begin{aligned} E\left[S_2\right] &= E\left[X_1 + X_2\right] = E\left[X_1\right] + E\left[X_2\right] \\ &= E\left[B_1\right] \times E\left[I_1\right] + E\left[B_2\right] \times E\left[I_2\right] \\ &= \frac{2}{1} \times 0.05 + \frac{4}{1} \times 0.10 = 0.5 \end{aligned}$$

Variance de S_2

$$\begin{aligned} Var\left[S_2\right] &= Var\left[X_1 + X_2\right] = Var\left[X_1\right] + Var\left[X_2\right] \\ &= \left(E^2\left[B_1\right] \times Var\left[I_1\right] + Var\left[B_1\right] \times E\left[I_1\right]\right) + \left(E^2\left[B_2\right] \times Var\left[I_2\right] + Var\left[B_2\right] \times E\left[I_2\right]\right) \\ &= \left(\frac{2}{1}^2 \times 0.05 \times 0.95 + \frac{2}{1^2} \times 0.05\right) + \left(\frac{4}{1}^2 \times 0.10 \times 0.90 + \frac{4}{1^2} \times 0.10\right) = 2.13 \end{aligned}$$

ii. $\Pr\left(S_2 = 0\right)$

$$\begin{aligned} \Pr\left(S_2 = 0\right) &= \Pr\left(I_1 = 0, I_2 = 0\right) = \Pr\left(I_1 = 0\right) \times \Pr\left(I_2 = 0\right) \\ &= 0.95 \times 0.90 = 0.855 \end{aligned}$$

$\Pr\left(S_2 \leq 2\right)$

$$\begin{aligned} \Pr\left(S_2 \leq 2\right) &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} \Pr\left(S_2 \leq 2 \mid I_1 = i, I_2 = j\right) \times \Pr\left(I_1 = i, I_2 = j\right) \\ &= \Pr\left(S_2 \leq 2 \mid I_1 = 0, I_2 = 0\right) \times \Pr\left(I_1 = 0, I_2 = 0\right) \\ &\quad + \Pr\left(S_2 \leq 2 \mid I_1 = 1, I_2 = 0\right) \times \Pr\left(I_1 = 1, I_2 = 0\right) \\ &\quad + \Pr\left(S_2 \leq 2 \mid I_1 = 0, I_2 = 1\right) \times \Pr\left(I_1 = 0, I_2 = 1\right) \\ &\quad + \Pr\left(S_2 \leq 2 \mid I_1 = 1, I_2 = 1\right) \times \Pr\left(I_1 = 1, I_2 = 1\right) \\ &= \Pr\left(I_1 = 0, I_2 = 0\right) + \Pr\left(X_1 \leq 2\right) \times \Pr\left(I_1 = 1, I_2 = 0\right) \\ &\quad + \Pr\left(X_2 \leq 2\right) \times \Pr\left(I_1 = 0, I_2 = 1\right) \\ &\quad + \Pr\left(X_1 + X_2 \leq 2\right) \times \Pr\left(I_1 = 1, I_2 = 1\right) \\ &= 0.95 \times 0.90 + \Gamma\left(2, 1; 2\right) \times 0.05 \times 0.9 \\ &\quad + \Gamma\left(4, 1; 2\right) \times 0.95 \times 0.1 + \Gamma\left(6, 1; 2\right) \times 0.05 \times 0.1 \\ &= 0.895\,385\,824\,6 \end{aligned}$$

$\Pr(S_2 > 4)$.

$$\begin{aligned}\Pr(S_3 \le 4) &= 0.95 \times 0.90 + \Gamma(2,1;4) \times 0.05 \times 0.9 \\ &\quad + \Gamma(4,1;4) \times 0.95 \times 0.1 + \Gamma(6,1;4) \times 0.05 \times 0.1 \\ &= 0.950\,773\,669\,6\end{aligned}$$

$$\Pr(S_2 > 4) = 1 - \Pr(S_2 \le 4) = 1 - 0.950\,773\,669\,6 = 0.049\,226\,330\,4$$

iii. $\Pr(X_1 = 0, X_2 \le 4)$. On a

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 = 0, X_2 \le 4) &= \sum_{i_2=0}^{1} \Pr(X_1 = 0, X_2 \le 4 | I_1 = 0, I_2 = i_2) \Pr(I_1 = 0, I_2 = i_2) \\ &= \sum_{i_2=0}^{1} \Pr(B_2 \le 4) \Pr(I_1 = 0, I_2 = i_2) \\ &= \sum_{i_2=0}^{1} \Pr(B_2 \le 4) \Pr(I_1 = 0) \Pr(I_2 = i_2) \qquad \text{(hyp indépendance)} \\ &= \Pr(I_1 = 0) \times \Pr(I_2 = 0) + \Pr(B_2 \le 4) \times \Pr(I_1 = 0) \times \Pr(I_2 = 1) \\ &= 0.95 \times 0.90 + \Gamma(4,1;4) \times 0.95 \times 0.1 \\ &= 0.95 \times 0.90 + 0.5665299 \times 0.95 \times 0.1 = 0.908\,820\,340\,5\end{aligned}$$

$\Pr(X_1 > 2, X_2 \le 4)$

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 > 2, X_2 \le 4) &= \sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} \Pr(X_1 > 2, X_2 \le 4 | I_1 = i_1, I_2 = i_2) \Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2) \\ &= \sum_{i_2=0}^{1} \Pr(B_1 > 2) \Pr(B_2 \le 4) \Pr(I_1 = 1, I_2 = i_2) \\ &= \sum_{i_2=0}^{1} \Pr(B_1 > 2) \Pr(B_2 \le 4) \Pr(I_1 = 1) \Pr(I_2 = i_2) \qquad \text{(hyp indépendance)} \\ &= \Pr(B_2 > 2) \Pr(I_1 = 1) \Pr(I_2 = 0) + \Pr(B_2 > 2) \Pr(B_2 \le 4) \Pr(I_1 = 1) \Pr(I_2 = 1) \\ &= (1 - \Gamma(2,1;2)) \times 0.05 \times 0.9 + (1 - \Gamma(2,1;2)) \times \Gamma(4,1;4) \times 0.05 \times 0.1 \\ &= 0.01\,942\,033\,313\end{aligned}$$

(b) On suppose que

$$\begin{aligned}\Pr(I_1 &= 0, I_2 = 0) = 0.89 \\ \Pr(I_1 &= 1, I_2 = 0) = 0.01 \\ \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) = 0.06 \\ \Pr(I_1 &= 1, I_2 = 1) = 0.04\end{aligned}$$

On a donc

$$S_2 = \begin{cases} 0, & I_1 = 0, I_2 = 0 \\ B_1, & I_1 = 1, I_2 = 0 \\ B_2, & I_1 = 0, I_2 = 1 \\ B_1 + B_2, & I_1 = 1, I_2 = 1 \end{cases}$$

i. Espérance de S_2

$$\begin{aligned} E[S_2] &= E[B_1] \times \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) + E[B_2] \times \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) + E[B_1 + B_2] \times \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= \frac{2}{1} \times 0.01 + \frac{4}{1} \times 0.06 + \frac{6}{1} \times 0.04 = 0.5 \end{aligned}$$

ou

$$E[S_2] = E[X_1] + E[X_2]$$

avec $E[X_i] = E[I_i] E[B_i]$ pour $i = 1, 2$. Remarque : La relation de dépendance entre I_1 et I_2 n'a pas d'impact sur la valeur de $E[S_2]$.

Variance de S_2

$$\begin{aligned} Var[S_2] &= E\left[S_2^2\right] - E^2[S_2] \\ &= E\left[B_1^2\right] \times \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) + E\left[B_2^2\right] \times \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) + E\left[(B_1 + B_2)^2\right] \times \Pr(I_1 = 1, I_2 = \\ &= ... \end{aligned}$$

ou

$$Var(S_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$$

avec $Cov(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2]$ et

$$E[X_1 X_2] = \Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2) E[B_1] E[B_2]$$

ii. $\Pr(S_2 = 0)$

$$\Pr(S_2 = 0) = \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) = 0.89$$

$\Pr(S_2 \leq 2)$

$$\begin{aligned} \Pr(S_2 &\leq 2) = \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) + \Pr(B_1 \leq 2) \times \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \\ + \Pr(B_2 \leq 2) \times \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) + \Pr(B_1 + B_2 \leq 2) \times \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= 0.89 + 0.5939942 \times 0.01 + 0.1428765 \times 0.06 + 0.01656361 \times 0.04 \\ &= 0.905\,175\,076\,4 \end{aligned}$$

$\Pr(S_2 > 4)$

$$\begin{aligned} \Pr(S_2 &\leq 4) = \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) + \Pr(B_1 \leq 4) \times \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \\ + \Pr(B_2 \leq 4) \times \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) + \Pr(B_1 + B_2 \leq 4) \times \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= 0.89 + 0.9084218 \times 0.01 + 0.5665299 \times 0.06 + 0.21486961 \times 0.04 \\ &= 0.941\,670\,796\,4 \end{aligned}$$

$$\Pr(S_2 > 4) = 1 - \Pr(S_2 \leq 4) = 0.058\,329\,203\,6$$

iii. $\Pr(X_1 = 0, X_2 \leq 4)$

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 = 0, X_2 \leq 4) &= \sum_{i_2=0}^{1} \Pr(X_1 = 0, X_2 \leq 4 | I_1 = 0, I_2 = i_2) \Pr(I_1 = 0, I_2 = i_2) \\ &= \sum_{i_2=0}^{1} \Pr(B_2 \leq 4) \Pr(I_1 = 0, I_2 = i_2) \\ &= \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) + \Pr(B_2 \leq 4) \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) \\ &= 0.89 + 0.5665299 \times 0.06 = 0.923\,991\,794 \end{aligned}$$

$\Pr(X_1 > 2, X_2 \leq 4)$

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1 > 2, X_2 \leq 4) &= \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1} \Pr(X_1 > 2, X_2 \leq 4 | I_1 = i_1, I_2 = i_2) \Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2) \\
&= \sum_{i_2=0}^{1} \Pr(B_1 > 2) \Pr(B_2 \leq 4) \Pr(I_1 = 1, I_2 = i_2) \\
&= \Pr(B_1 > 2) \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) + \Pr(B_1 > 2) \Pr(B_2 \leq 4) \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\
&= (1 - 0.5939942) \times 0.01 + (1 - 0.5939942) \times 0.5665299 \times 0.04 \\
&= 0.01\,326\,063\,501
\end{aligned}$$

29. Pour l'actuaire A le montant réclamé est 1000 \$

    Pour l'actuaire B le montant réclamé suit une exponentielle de moyenne 1000 \$

    (a) Pour l'actuaire A
    $$E[X_A] = E[N] \times 1000 = 50$$
    $$Var[X_A] = 1000^2 Var[N] = 47500$$
    Pour l'actuaire B
    $$E[X_B] = E[N] \times E[B] = 50$$
    $$Var[X_B] = E^2[B] \times Var[N] + Var[B] \times E[N] = 97500$$
    : 19 500 000

    (b) Pour l'actuaire A
    $$E[X_{200A}] = 200 \times E[X_A] = 10000$$
    $$Var[X_{200A}] = 200 \times Var[X_A] = 9500\,000$$
    Pour l'actuaire B
    $$E[X_{200B}] = 200 \times E[X_B] = 10000$$
    $$Var[X_{200B}] = 200 \times Var[X_B] = 19\,500\,000$$

    (c) Pour l'actuaire A
    $$\begin{aligned} \Pr(S_{200} > 1.2 \times 200 \times E[X_A]) &= 1 - \Pr(S_{200} > 1.2 \times 200 \times E[X_A]) \\ &= 1 - \Pr\left(Z > \frac{1.2 \times 200 \times E[X_A] - E[X_{200A}]}{\sqrt{Var[X_{200A}]}}\right) \\ &= 0.2582061 \end{aligned}$$
    où $Z \sim Norm(0,1)$

    Pour l'actuaire B
    $$\begin{aligned} \Pr(S_{200} > 1.2 \times 200 \times E[X_B]) &= 1 - \Pr\left(Z > \frac{1.2 \times 200 \times E[X_B] - E[X_{200B}]}{\sqrt{Var[X_{200B}]}}\right) \\ &= 0.3253065 \end{aligned}$$
    où $Z \sim Norm(0,1)$

    (d) Pour l'actuaire A
    $$\pi^A = E[X_A] + 0.02 \times \sqrt{Var[X_A]} = 54.358899$$
    $$\begin{aligned} \Pr\left(S > 200 \times \pi^A\right) &= \Pr(S > 200 \times 54.358899) \\ &= \Pr\left(Z > \frac{200 \times 54.358899 - E[X_{200B}]}{\sqrt{Var[X_{200B}]}}\right) \\ &= \Pr(Z > 0.197419249) = 0.421749734 \end{aligned}$$
    où $Z \sim Norm(0,1)$

    Pour l'actuaire B
    $$\pi^B = E[X_B] + 0.02 \times \sqrt{Var[X_B]} = 56.244998$$

$$\begin{aligned}
\Pr\left(S > 200 \times \pi^B\right) &= \Pr\left(S > 200 \times 56.244998\right) \\
&= \Pr\left(Z > \frac{200 \times 56.244998 - E\left[X_{200B}\right]}{\sqrt{Var\left[X_{200B}\right]}}\right) \\
&= \Pr\left(Z > 0.282842713\right) = 0.388648705
\end{aligned}$$

où $Z \sim Norm\left(0, 1\right)$

30. On a

$$X_i = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

où $M \sim Bin\,(3, 0.1)\,,\; B \sim Gamma\,(2, 0.002)$
De plus,

$$S = X_1 + X_2 + X_3$$

Soit W le nombre de sinistres pour le portefeuille

$$W = M_1 + M_2 + M_3$$

où $W \sim Bin\,(9, 0.1)$

(a) $\Pr(S_3 = 0)$

$$\Pr(S_3 = 0) = \Pr(W = 0) = 0.9^9 = 0.387\,420\,489$$

(b) Espérance de S_3

$$E[S_3] = E[W] \times E[B] = 900$$

Variance de S_3

$$Var[S_3] = E^2[B] \times Var[W] + Var[B] \times E[W] = 1260000$$

(c) $\Pr(W = 4)$

$$\Pr(W = 4) = \binom{9}{4} 0.1^4 0.9^5 = 0.007\,440\,174$$

(d) $\Pr(S_3 > 1500)$

$$\Pr(S_3 > 1500) = 1 - \Pr(S_3 \leq 1500) = 0.237\,735\,434$$

$$\begin{aligned} \Pr(S_3 \leq 1500) &= \Pr(W = 0) + \sum_{k=1}^{9} F_{B_1+B_2+\ldots+B_k}(1500) \Pr(W = k) \\ &= 0.387\,420\,489 + 0.374844077 = 0.762\,264\,566 \end{aligned}$$

31. (a) Calcul de $\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 \leq 20, X_4 \leq 20)$:

On obtient

$$\begin{aligned}
& \Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 \leq 20, X_4 \leq 20) \\
= \;& \Pr((1+R)Y_1 = 0, (1+R)Y_1 = 0, (1+R)Y_3 \leq 20, (1+R)Y_4 \leq 20) \\
= \;& \Pr\left(Y_1 = 0, Y_2 = 0, Y_3 \leq \frac{20}{1.1}, Y_4 \leq \frac{20}{1.1}\right) \times \Pr(R = 0.1) + \Pr\left(Y_1 = 0, Y_2 = 0, Y_3 \leq \frac{20}{1.3}, Y_4 \leq \frac{20}{1.3}\right) \times \Pr(R
\end{aligned}$$

On conditionne maintenant sur I :

$$\begin{aligned}
& \Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 \leq 20, X_4 \leq 20) \\
= \;& \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) \times \left(\Pr\left(B_3 \leq \frac{20}{1.1}\right) \times \Pr(R = 0.1) + \Pr\left(B_3 \leq \frac{20}{1.3}\right) \times \Pr(R = 0.3)\right) \\
& \times \left(\Pr\left(B_4 \leq \frac{20}{1.1}\right) \times \Pr(R = 0.1) + \Pr\left(B_4 \leq \frac{20}{1.3}\right) \times \Pr(R = 0.3)\right)
\end{aligned}$$

De la table, on a $\Pr\left(B \leq \frac{20}{1.1}\right) = 0.838$ et $\Pr\left(B \leq \frac{20}{1.3}\right) = 0.785$

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 \leq 20, X_4 \leq 20) &= (0.8)^2 \times (0.8 + 0.2 \times (0.838 \times 0.7 + 0.785 \times 0.3))^2 \\
&= 0.595\,267\,799\,3
\end{aligned}$$

(b) Pour $n = 2$, $\Pr(S_2 \leq 20)$

$$\begin{aligned}
\Pr(S_2 \leq 20) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq 20) \\
&= \Pr((1+R)Y_1 + (1+R)Y_2 \leq 20) \\
&= \Pr((1.1)Y_1 + (1.1)Y_2 \leq 20) \times \Pr(R = 0.1) \\
&\quad + \Pr((1.3)Y_1 + (1.3)Y_2 \leq 20) \times \Pr(R = 0.3)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Pr((1.1)Y_1 + (1.1)Y_2 \leq 20) &= \Pr\left(Y_1 + Y_2 \leq \frac{20}{1.1}\right) \\
&= \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \times \Pr\left(B_1 \leq \frac{20}{1.1}\right) \\
&\quad + \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) \times \Pr\left(B_2 \leq \frac{20}{1.1}\right) \\
&\quad + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \times \Pr\left(B_1 + B_2 \leq \frac{20}{1.1}\right) \\
&= 0.8^2 + 0.2 \times 0.8 \times 0.838 + 0.8 \times 0.2 \times 0.838 + 0.2^2 \times 0.542 \\
&= 0.929\,84
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
\Pr((1.3)Y_1 + (1.3)Y_2 \leq 20) &= 0.8^2 + 0.2 \times 0.8 \times 0.785 + 0.8 \times 0.2 \times 0.785 + 0.2^2 \times 0.455 \\
&= 0.909\,4
\end{aligned}$$

Il en resulte

$$\Pr(S_2 \leq 20) = 0.929\,84 \times 0.7 + 0.909\,4 \times 0.3 = 0.923\,708$$

(c) Pour $n = 100$, $\Pr(S_{100} \leq 300)$. On ultilise l'approximation normale après avoir conditionné sur

R.

$$\begin{aligned}\Pr(S_{100} \leq 300) &= \Pr((1+R)(Y_1 + ... + Y_{100}) \leq 300) \\ &= \Pr\left((Y_1 + ... + Y_{100}) \leq \frac{300}{1.1}\right) \times \Pr(R = 0.1) \\ &\quad + \Pr\left((Y_1 + ... + Y_{100}) \leq \frac{300}{1.3}\right) \times \Pr(R = 0.3)\end{aligned}$$

On cherche l'espérance et la variance de S_{100}

$$E[S_{100}] = 100 \times E[Y] = 100 \times 0.2 \times 10 = 200$$

$$Var[S_{100}] = 100 \times Var[Y] = 100 \times \left(0.2 \times 0.8 \times 10^2 + 0.2 \times 10^2\right) = 3600$$

On déduit

$$\begin{aligned}\Pr(S_{100} \leq 300) &= \Pr\left(Z \leq \frac{\frac{300}{1.1} - 200}{\sqrt{3600}}\right) \times \Pr(R = 0.1) + \Pr\left(Z \leq \frac{\frac{300}{1.3} - 200}{\sqrt{3600}}\right) \times \Pr(R = 0.3) \\ &= 0.887267007 \times 0.7 + 0.69596156 \times 0.3 \\ &= 0.829\,875\,372\,9\end{aligned}$$

où $Z \sim Norm(0, 1)$

32. (a) Espérance :

$$\begin{aligned} E[S_{TOT}] &= 700E\left[X^{(h1)}\right] + 500E\left[X^{(h2)}\right] + 900E\left[X^{(a1)}\right] + 400E\left[X^{(a2)}\right] \\ &= 700 \times 3000 + 500 \times 6000 + 900 \times 800 + 400 \times 1200 \\ &= 6300\,000 \end{aligned}$$

Variance :

$$\begin{aligned} Var(S_{TOT}) &= 700Var\left(X^{(h1)}\right) + 500Var\left(X^{(h2)}\right) + 900Var\left(X^{(a1)}\right) + 400Var\left(X^{(a2)}\right) \\ &= 1000^2 \times (700 \times 80 + 500 \times 320 + 900 \times 20 + 400 \times 15) \\ &= 240\,000\,000\,000 \end{aligned}$$

(b) On cherche le montant total, W, nécessaire tel que $\Pr(S_{TOT} \leq W) = 0.99$. On utilise l'approximation normale.

$$\begin{aligned} \Pr(S_{TOT} \leq W) &= 0.99 \\ \Pr\left(Z \leq \frac{W - E[S_{TOT}]}{\sqrt{Var(S_{TOT})}}\right) &= 0.99 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{W - E[S_{TOT}]}{\sqrt{Var(S_{TOT})}} &= 2.326347874 \\ W &= 2.326347874 \times \sqrt{240\,000\,000\,000} + 6300\,000 \\ &= 7439673.\,051 \end{aligned}$$

33. (a) Calculer la prime ainsi que l'espérance et la variance de S_n.
    Application directe des résultats des chapitres **??** et **??**.

    (b) Montrer (**??**) et (**??**).
    Application de l'inégalité de Cheby. Voir chapitre **??**.

    (c) Calculer vers quelle valeur tend la limite, lorsque $n \to \infty$, de la probabilité de ruine ψ_n. (**Suggestions :** conditionner sur la v.a. R et utiliser les résultats).

    — On a

$$\begin{aligned}\psi_n &= \Pr\left(S_n > \sum_{i=1}^{n} prime_i\right)\\ &= \Pr\left(S_n > 12n\right)\\ &= \Pr\left(R = 0.1\right)\Pr\left(T_n > \frac{12}{1.1}n\right) + \Pr\left(R = 0.3\right)\Pr\left(T_n > \frac{12}{1.3}n\right)\end{aligned}$$

    — Comme

$$\frac{12}{1.1}n > E\left[T_n\right] = 10n$$

    on obtient avec le résultat #1 que

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left(T_n > \frac{12}{1.1}n\right) = 0.$$

    — Comme

$$\frac{12}{1.3}n < E\left[T_n\right] = 10n$$

    on obtient avec le résultat #2 que

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left(T_n > \frac{12}{1.3}n\right) = 1.$$

    — Donc,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\psi_n &= 0.7\lim_{n\to\infty}\Pr\left(T_n > \frac{12}{1.1}n\right) + 0.3\lim_{n\to\infty}\Pr\left(T_n > \frac{12}{1.3}n\right)\\ &= 0.3.\end{aligned}$$

    (d) Commenter brièvement l'assertion suivante : *Plus la compagnie d'assurance émet de contrats, plus elle est certaine de renconter ses engagments.*

    — Cela n'est pas toujours vraie.

    — Elle est vérifiée à la condition que les contrats soient indépendants ET que les primes chargées soient strictement supérieures aux coûts espérés par contrat.

    — La ruine est certaine si les contrats sont indépendants et que les primes chargées sont strictement inférieures aux coûts espérés par contrat.

    — Comme dans l'exemple en (b), la probabilité de rencontrer ces engagements est inférieure à 1 si les risques sont dépendants et que les primes chargées sont strictement supérieures aux coûts espérés par contrat.

34. (a) Expliquer brièvement la distinction entre assurer des risques extraordinaires et des risques *ordinaires* comme des automobiles (assurance automobile aux particuliers).

    — Un assureur peut souscrire un grand nombre de risques ordinaires.

    — Un assureur ne peut pas souscrire un grand nombre de risques extraordinaires.

    — En chargeant des primes supérieures aux coûts espérés, une cie d'assurance peut souscrire un grand nombre de contrats et réduire son risque d'insolvabilité.

    — La cie ne peut pas procéder ainsi avec les risques extraordinaires.

    — Plusieurs cies de réassurance se regroupent et se partagent les coûts associés à plusieurs risques extraordinaires. Ainsi, elles peuvent offrir une protection tout en limitant leur risque d'insolvabilité.

    (b) Calculer la probabilité que les coûts totaux pour une plateforme de forage soient supérieurs à 2000.

    — On a

$$\begin{aligned} pp &= \Pr(X > 2000) \\ &= 1 - \Pr(X \leq 2000) \end{aligned}$$

    — On a

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq 2000) &= \Pr(M = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(M = j) \Pr(B_1 + ... + B_j \leq 2000) \\ &= e^{-0.1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(0.1)^j e^{-0.1}}{j!} \Gamma(2000; 0.2j; 0.0002) \\ &= e^{-0.1} + 0.08038 \\ &= 0.98522 \end{aligned}$$

    — On obtient

$$\begin{aligned} \Pr(X > 2000) &= 1 - 0.98522 \\ &= 0.01478 \end{aligned}$$

    (c) On suppose qu'il y a $n = 10$ compagnies de réassurance et $m = 20$ plateformes de forage. Calculer la probabilité que les coûts totaux assumés par une compagnie de réassurance soient supérieurs à 2000.

    — Part d'une cie de réassurance :

$$Part = \frac{S_{20}}{10}$$

    — Probabilité :

$$\begin{aligned} qq &= \Pr(Part > 2000) \\ &= 1 - \Pr(Part \leq 2000) \end{aligned}$$

— Probabilité (suite) :

$$\begin{aligned}
\Pr(Part \leq 2000) &= \Pr(S_{20} \leq 10 \times 2000) \\
&= \Pr(M_{20} = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(M_{20} = j) \Pr(B_1 + ... + B_j \leq 2000) \\
&= e^{-2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2)^j e^{-2}}{j!} \Gamma(10 \times 2000; 0.2j; 0.0002) \\
&= e^{-2} + 0.86010 \\
&= 0.99544
\end{aligned}$$

— Probabilité (fin) :

$$\begin{aligned}
qq &= \Pr(Part > 2000) \\
&= 1 - \Pr(Part \leq 2000) \\
&= 1 - 0.99544 \\
&= 0.00456
\end{aligned}$$

35. (a) Calculer l'espérance des coûts totaux.

— On a

$$S_{500} = \begin{cases} D_{500}, M = 1 \\ 0, M = 0 \end{cases}$$

— On a

$$E[S_{500}] = E[D_{500}]\, E[M]$$

— On a

$$\begin{aligned} E[D_{500}] &= \Pr(\Theta = 1)\, E[D_{500}|\Theta = 1] + \Pr(\Theta = 2)\, E[D_{500}|\Theta = 2] \\ &= \frac{11 - 4 \times 1}{10} E[D_{500}|\Theta = 1] \\ &\quad + \frac{11 - 4 \times 2}{10} E[D_{500}|\Theta = 2] \end{aligned}$$

— On a

$$\begin{aligned} E[D_{500}|\Theta = 1] &= (500 \times 0.3 \times 100) \\ &= 15000.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[D_{500}|\Theta = 2] &= (500 \times 0.8 \times 100) \\ &= 40000.0 \end{aligned}$$

— On a

$$\begin{aligned} E[D_{500}] &= \Pr(\Theta = 1)\, E[D_{500}|\Theta = 1] + \Pr(\Theta = 2)\, E[D_{500}|\Theta = 2] \\ &= \frac{11 - 4 \times 1}{10} 15000 + \frac{11 - 4 \times 2}{10} 40000 \\ &= 22500.0 \end{aligned}$$

— On obtient

$$\begin{aligned} E[S_{500}] &= E[D_{500}]\, E[M] \\ &= 22500.0 \times 0.15 \\ &= 3375.0 \end{aligned}$$

(b) Calculer la probabilité que les coûts totaux excèdent 20000 en utilisant l'approximation normale de façon appropriée.

— On a

$$\Pr(S_{500} > 20000) = 1 - \Pr(S_{500} \leq 20000)$$

avec

$$\Pr(S_{500} \leq 20000) = 0.85 + 0.15 \times \Pr(D_{500} \leq 20000).$$

— On trouve

$$\begin{aligned} \Pr(D_{500} \leq 20000) &= \Pr(\Theta = 1) \Pr(D_{500} \leq 20000|\Theta = 1) \\ &\quad + \Pr(\Theta = 2) \Pr(D_{500} \leq 20000|\Theta = 1) \end{aligned}$$

— On a

$$\begin{aligned} \Pr(D_{500} \leq 20000|\Theta = 1) &\cong \Pr\left(Z \leq \frac{20000 - 15000}{\sqrt{500 \times 0.04 \times 100^2}} |\Theta = 1\right) \\ &= \Pr(Z \leq 11.18034\, |\Theta = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr\left(D_{500} \leq 20000|\Theta = 2\right) &\cong \Pr\left(Z \leq \frac{20000-40000}{\sqrt{500 \times 0.01 \times 100^2}}\,|\Theta = 1\right)\\ &= \Pr\left(Z \leq -89.4427\,|\Theta = 1\,\right)\end{aligned}$$

— Alors

$$\begin{aligned}\Pr\left(S_{500} \leq 20000\right) &= 0.85 + 0.15 \times \left(\frac{11-4\times 1}{10} \times 1 + \frac{11-4\times 2}{10} \times 0\right)\\ &= 0.955.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Pr\left(S_{500} > 20000\right) &= 1 - \Pr\left(S_{500} \leq 20000\right)\\ &= 1 - 0.955\\ &= 0.0450.\end{aligned}$$

5.2 Exercices informatiques

1. (a) On a

$$S_n \sim BinNegComp\,(r \times n, q; F_B)$$

(b) On a

$$\begin{aligned} E(X) &= E(M)E(B) = 500; \\ E(S_n) &= 500 \times n. \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} F_X(10000) &= 0.9836086; \\ F_{S_{200}}(10000 \times 200) &= 1. \end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} VaR_{0.5}(X) &= 0; \\ VaR_{0.99}(X) &= 14184.01. \end{aligned}$$

(e) On obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} VaR_{0.5}(S_{200}) &= 95586.21; \\ VaR_{0.99}(S_{200}) &= 211586.3. \end{aligned}$$

(f) On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.5}(X) &= 1000; \\ TVaR_{0.99}(X) &= 23283.01. \end{aligned}$$

(g) On a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.5}(S_{200}) &= 131492; \\ TVaR_{0.99}(S_{200}) &= 233072. \end{aligned}$$

(h) On a

$$VaR_{0.5}(X_1) + ... + VaR_{0.5}(X_{200}) < VaR_{0.5}(S_{200})$$

$\rightarrow$ Il n'y a donc aucun bénéfice à mutualiser selon la VaR à $\kappa = 0.5$.

(i) On a

$$VaR_{0.99}(X_1) + ... + VaR_{0.99}(X_{200}) > VaR_{0.5}(S_{200})$$

$\rightarrow$ Il y a donc un bénéfice à mutualiser selon la VaR à $\kappa = 0.99$.

(j) On obtient

$$TVaR_{0.5}(X_1) + ... + TVaR_{0.5}(X_{200}) > TVaR_{0.5}(S_{200})$$

$\rightarrow$ Il y a donc un bénéfice à mutualiser selon la $TVaR$ à $\kappa = 0.5$.

(k) On obtient

$$TVaR_{0.99}(X_1) + ... + TVaR_{0.99}(X_{200}) > TVaR_{0.99}(S_{200})$$

$\rightarrow$ Il y a donc un bénéfice à mutualiser selon la $TVaR$ à $\kappa = 0.99$.

Code LaTeX : sol-41001.tex

2. (a) L'expression de $F_{X_1}(x)$ est donnée par

$$F_{X_1}(x) = f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) H(x, k, 1/1000),$$

où H est la fonction de répartition d'une distribution gamma.
On a

$$F_{X_1}(0) = 0.9950125; F_{X_1}(10) = 0.995062.$$

Pour obtenir la VaR, on doit utiliser *optimize* en R et inverser la fonction de répartition. Si κ est inférieur à la masse de probabilité de la distribution Poisson à 0, alors la VaR sera de 0. On a

$$VaR_{0.99}(X_1) = 0$$

Pour obtenir la $TVaR$, puisque la VaR est de 0, c'est simplement l'espérance de X_1. On a

$$TVaR_{\kappa}(X_1) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\beta} f_M(k) \left(1 - H(VaR_{0.99}(X_1), k+1, \beta)\right)$$

$$TVaR_{0.99}(X_1) = 500$$

(b) Pour $n = 1000$ contrats, $S_n \sim PoisComp(\lambda \times 1000; F_B)$
La distribution de W_n est Poisson composée. On l'identifie à l'aide de la TLS de la v.a. W_n, comme suit :

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = \mathcal{L}_{S_n}(\frac{t}{n}).$$

Or, on a

$$\mathcal{L}_{S_n}(\frac{t}{n}) = \mathcal{P}_{N_n}(\mathcal{L}_B(\frac{t}{n})).$$

On introduit la v.a. continue positive C où

$$\mathcal{L}_C(t) = \mathcal{L}_B(\frac{t}{n}) = \frac{\beta}{\beta + \frac{t}{n}} = \frac{n \times \beta}{n \times \beta + t}.$$

À partir de $\mathcal{L}_C(t)$, on déduit que $C \sim Exp(n \times \beta)$.
Puis, on a

$$\mathcal{L}_{W_n}(t) = \mathcal{L}_{S_n}(\frac{t}{n}) = \mathcal{P}_{N_n}(\mathcal{L}_C(t)),$$

d'où l'on déduit que $W_n \sim PoisComp(\lambda \times 1000; F_C)$.
L'expression de $F_{W_n}(x)$ est donnée par

$$F_{W_n}(x) = f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) H(x \times n, k, \frac{1}{1000}) = f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) H(x, k, \frac{n}{1000}),$$

où $M \sim Pois(5)$
On obtient

$$F_{W_n}(0) = 0.006737947; F_{W_n}(10) = 0.925608.$$

et

$$VaR_{0.99}(W_n) = 14.40438; TVaR_{0.99}(W_n) = 16.35278$$

(c) On obtient

$$B_{0.99,n}^{VaR} = -14.40438.$$

Puisque le bénéfice de mutualisation est négatif selon la mesure de risque VaR, il n'y a aucun bénéfice à mutualiser les risques. Le résultat confirme que la mesure VaR n'est pas sous-additive. On obtient aussi

$$B_{0.99,n}^{TVaR} = 483.6472.$$

Puisque le bénéfice de mutualisation est positif selon la mesure de risque TVaR, il y a un bénéfice à mutualiser les risques. Le bénéfice sera toujours positif, car la mesure TVaR est sous-additive.

Code LaTeX : sol-41002.tex

3. (a) On obtient

$$E(X_1) = 60.18054; VaR_{0.99}(X_1) = 0; TVaR_{0.99}(X_1) = 6018.054$$

(b) On obtient

$$E(S_{10}) = 0.06018054; E(S_{100}) = 0.6018054; E(S_{1000}) = 6.018054$$
$$VaR_{0.99}(S_{10}) = 16519.96; VaR_{0.99}(S_{100}) = 40613.09; VaR_{0.99}(S_{1000}) = 143959.1$$
$$TVaR_{0.99}(S_{10}) = 23088.68; TVaR_{0.99}(S_{100}) = 49236.98; TVaR_{0.99}(S_{1000}) = 159838.1$$

(c) Pour $n = 10, 100, 1000$, on observe que $\sum_{i=1}^{n} VaR_{0.99}(X_i)$ est inférieure $TVaR_{0.99}(S_n)$, ce qui confirme que la mesure VaR n'est pas sous-additive. Selon cette mesure, la mutualisation des risques ne conduit pas à un bénéfice positif.

(d) Comme prévu, puisque que la mesure TVaR est sous-additive, $\sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.99}(X_i)$, pour $n = 10, 100, 1000$ est plus élevér que $TVaR_{0.99}(S_n)$. Selon la mesure TVaR, il y a un bénéfice à mutualiser les n risques.

(e) Pour $n = 10$:

$$prime(A) = 1651.996; prime(B) = 2308.868$$

Pour $n = 100$:

$$prime(A) = 406.1309; prime(B) = 492.3698$$

Pour $n = 1000$:

$$prime(A) = 143.9591; prime(B) = 159.8381$$

Code LaTeX : sol-32030.tex

4. Soit un portefeuille composé de trois contrats d'assurance IARD sont les coûts sont définis par les v.a. X_1, X_2, et X_3 avec

$$X_i = \begin{cases} 0 & , \quad M_i = 0 \\ B_{i,1} & , \quad M_i = 1 \\ B_{i,1} + B_{i,2} & , \quad M_i = 2 \end{cases}$$

où I_1, I_2, I_3, $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$, $B_{3,1}$, $B_{3,2}$ sont indépendantes avec $M_i \sim Binom\left(2, \frac{1}{2}\right)$ $(i = 1, 2, 3)$, $B_{i,k} \sim Gamma\left(1.2, \frac{1}{10}\right)$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2$.
On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.

(a) On sait que la f.g.m. de X_i est donnée par

$$M_{X_i}(t) = P_{M_i}\left(M_{B_i}(t)\right)$$

La fonction génératrice des probabilité de la distribution de M est donnée par

$$P_{M_i}(t) = (qt + 1 - q)^n$$

On déduit que

$$M_{X_i}(t) = (qM_B(t) + 1 - q)^n$$

On obtient, pour $S = \sum_{i=1}^n X_i$,

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) \\ &= (qM_B(t) + 1 - q)^{\sum_{i=1}^n n_i} \\ &= (qM_B(t) + 1 - q)^{n_s} \end{aligned}$$

On déduit que $S \sim BinomComp(\sum_{i=1}^n n_i, q; F_B)$

(b) On a

$$E(S) = 36; Var(S) = 576$$

(c) On a

$$F_S(0) = 0.015625; F_S(10) = 0.1188027; F_S(50) = 0.7550784; F_S(100) = 0.9835211$$

(d) Les valeurs sont

$$VaR_{0.5}(S) = 31.98698; VaR_{0.9}(S) = 68.45221; VaR_{0.99}(S) = 108.0118;$$

$$VaR_{0.999}(S) = 142.6358; VaR_{0.9999}(S) = 174.813$$

(e) Les valeurs sont

$$TVaR_{0.5}(S) = 54.60669; TVaR_{0.9}(S) = 85.96596; TVaR_{0.99}(S) = 123.176;$$

$$TVaR_{0.999}(S) = 156.6792; TVaR_{0.9999}(S) = 188.1745$$

5. Soit un portefeuille composé de trois contrats d'assurance IARD sont les coûts sont définis par les v.a. X_1, X_2, et X_3 avec
$$X_i = \begin{cases} 0 & , \quad M_i = 0 \\ B_{i,1} & , \quad M_i = 1 \\ B_{i,1} + B_{i,2} & , \quad M_i = 2 \end{cases}$$
où (I_1, I_2, I_3), $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$, $B_{3,1}$, $B_{3,2}$ sont indépendants avec $B_{i,k} \sim Gamma\left(1.2, \frac{1}{10}\right)$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2$. De plus, on a
$$\Pr\left(M_1 = m_1, M_2 = m_2, M_3 = m_3\right) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0 \\ \frac{2}{4} & , \quad m_1 = m_2 = m_3 = 1 \\ \frac{1}{4} & , \quad m_1 = m_2 = m_3 = 2 \\ 0 & , \quad \text{autrement} \end{cases}.$$
On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Solutions aux questions
   (a) On a
$$M_1 \sim M_2 \sim M_3 \sim Binom(n = 2, p = 1/2).$$
   Important : les v.a. M_1, M_2, M_3 sont dépendantes ; alors, les v.a. X_1, X_2, X_3 sont aussi dépendantes.
   (b) La v.a. S obéit à une loi mixte dont la fonction de répartition est
$$F_S(x) = \Pr(N = 0) + \Pr(N = 3)H(x; 3 \times \alpha, \beta) + \Pr(N = 6)H(x; 6 \times \alpha, \beta), x \geq 0,$$
   où
$$\alpha = 1.2$$
$$Pr(N = 0) = Pr(M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = 0) = \frac{1}{4}$$
$$Pr(N = 3) = Pr(M_1 = 1, M_2 = 1, M_3 = 1) = \frac{2}{4}$$
$$Pr(N = 6) = Pr(M_1 = 2, M_2 = 2, M_3 = 2) = \frac{1}{4}.$$
   (c) Calculer $E\left[S\right]$ et $Var\left(S\right)$.
   Espérance de S (prise no1), avec la relation $E[S] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3]$:
$$E[S] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = 3 \times 12 = 36$$
   Espérance de S (prise no2), à partir de l'expression de F_S :
$$E[S] = \Pr(N = 3)\frac{3 \times \alpha}{\beta} + \Pr(N = 6)\frac{6 \times \alpha}{\beta} = 0.5 \times 36 + 0.24 \times 72 = 36$$
   Espérance de S^2, à partir de l'expression de F_S :
$$E[S] = \Pr(N = 3)\frac{3\alpha(3\alpha + 1)}{\beta^2} + \Pr(N = 6)\frac{6\alpha(6\alpha + 1)}{\beta^2} = 0.5 \times 4 \times 360 + 0.24 \times 7 \times 720 = 1980$$
   Variance de S :
$$Var(S) = E[S^2] - E[S]^2 = 1980 - 36^2 = 684$$
   (d) Calculer $F_S\left(x\right)$, $x = 0$, 10, 50, 100.
   On obtient les valeurs suivantes :
$$F_S(0) = 0.25; F_S(10) = 0.2673746; F_S(50) = 0.7018955; F_S(100) = 0.9603182.$$

(e) Calculer $VaR_\kappa(S)$, $\kappa = 0.1$, 0.9, 0.99, 0.9999, 0.9999.
On obtient les valeurs suivantes :

$$VaR_{0.1}(S) = 0; VaR_{0.9}(S) = 79.79339; VaR_{0.99}(S) = 125.8471;$$

$$VaR_{0.999}(S) = 163.3079; VaR_{0.9999}(S) = 197.0948.$$

(f) Calculer $TVaR_\kappa(S)$, $\kappa = 0.1$, 0.9, 0.99, 0.9999, 0.9999.

$$TVaR_{0.1}(S) = \frac{E[S]}{1-0.1} = 40; TVaR_{0.9}(S) = 100.44564; TVaR_{0.99}(S) = 142.3256;$$
$$TVaR_{0.999}(S) = 178.0822; TVaR_{0.9999}(S) = 210.9252$$

Code R : FnRsol-41006.R
Code LaTeX : sol-41006.tex

6. Note : En `R`, on utilise le générateur implicite de R avec une valeur source 20130402.
   Solutions aux questions :
   (a) Calculer $E[X_i]$ et Π_i, pour $i = 1, ..., 5$.
      i. Indiquer les expressions de $E[X_i]$ et Π_i, pour $i = 1, ..., 5$.
      Les expressions de $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ sont fournies dans les annexes.
      On sait que $E[X_4] = q_4 \times E[B_4]$, où $B_4 \sim LNorm(\mu_4 = 9.5, \sigma_4 = 1)$.
      On obtient
$$\Pi_1 = 1.25 \times E[X_1]$$
$$\Pi_2 = 1.1 \times E[X_2]$$
$$\Pi_3 = 1.2 \times E[X_3]$$
$$\Pi_4 = 1.3 \times E[X_4]$$
$$\Pi_5 = 0.995 \times 2 \times n_5 \times q_5$$
      ii. Indiquer les valeurs de $E[X_i]$ et Π_i, pour $i = 1, ..., 5$.
      Valeurs de $E[X_i]$, pour $i = 1, ..., 5$: 2000.000 ; 3110.869 ; 2221.441 ; 2202.647 ; 1940.000
      Valeurs de Π_i, pour $i = 1, ..., 5$: 2500.000 ; 3421.956 ; 2665.730 ; 2863.441 ; 1930.300
   (b) Calculer $E[L_{TOT}]$.
      — Indiquer l'expression de $E[L_{TOT}]$.
      On obtient
$$E[L_{TOT}] = E[L_1] + ... + E[L_5]$$
      où
$$E[L_i] = E[X_i] - \Pi_i$$
      pour $i = 1, 2, 3, 4$ et
$$E[L_i] = \Pi_5 - E[X_5].$$
      — Indiquer la valeur de $E[L_{TOT}]$.
      Valeur de $E[L_{TOT}]$: -2279.802
   (c) Produire $m = 100000$ réalisations de $(X_1, ..., X_5)$, $(L_1, ..., L_5)$ et L_{TOT} (**ATTENTION : UNE RÉALISATION** U **PAR V.A.** X, même pour X_4).
      — Indiquer la première réalisation de $(X_1, ..., X_5)$.
      Valeurs : 2805.765 3107.441 1624.679 0.000 1922.000
      — Indiquer la première réalisation de $(L_1, ..., L_5)$.
      Valeurs : 305.7650 -314.5155 -1041.0507 -2863.4406 8.3000
      — Indiquer la première réalisation de L_{TOT}.
      Valeur : -3904.942
   (d) Avec (c), calculer une approximation de $E[L_{TOT}]$.
      On obtient
$$E[L_{TOT}] = \varphi \approx \widetilde{\varphi} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} L_{TOT}^{(j)} = -2294.908$$
   (e) Avec (c), calculer une approximation de $\Pr(L_{TOT} > 0)$.
      i. Indiquer l'expression de l'approximation de $\Pr(L_{TOT} > 0)$.
      On définit
$$\Pr(L_{TOT} > 0) = \varphi \approx \widetilde{\varphi} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} 1_{\{L_{TOT}^{(j)} > 0\}}$$

ii. Indiquer la valeur de l'approximation de $\Pr(L_{TOT} > 0)$.
On obtient $\widetilde{\varphi} = 0.15741$.

(f) Avec (c), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de $\varphi = VaR_{\kappa}(L_{TOT})$ pour $\kappa = 0.99$.
On obtient

$$\widetilde{\varphi} = 44543.41.$$

(g) Avec (c), calculer une approximation $\widetilde{\varphi}$ de $\varphi = TVaR_{\kappa}(L_{TOT})$ pour $\kappa = 0.99$.
On obtient

$$\widetilde{\varphi} = 80393.36.$$

Code R : FnRsol-41008.R
Code LaTeX : sol-41008.tex

7. On définit $S = X + Y$.

   On utilise le générateur de base du logiciel `R` (`set.seed(2019)`). On produit dans l'ordre les $m = 100000$ réalisations $\left(X^{(1)}, Y^{(1)}\right)$, ..., $\left(X^{(100000)}, Y^{(100000)}\right)$ de (X, Y).

   Questions :

   (a) Calculer les valeurs exactes de $E[X]$, $E[Y]$ et $E[S]$.
   Valeurs : 39.88235 24.00000 63.88235

   (b) Calculer les valeurs exactes de $Var(X)$, $Var(Y)$ et $Var(S)$.

   (c) Indiquer les valeurs des réalisations $X^{(j)}$ et $Y^{(j)}$ pour $j = 1, 2, 3$. On simule dans l'ordre $M^{(1)}$ puis $X^{(1)}$, $N^{(1)}$ puis $Y^{(1)}$, et ainsi de suite.
   Valeurs de $X^{(j)}$ pour $j = 1, 2, 3$: 29.85392 3.40894 14.85685
   Valeurs de $Y^{(j)}$ pour $j = 1, 2, 3$: 16.86578 10.78374 42.37823

   (d) Indiquer les valeurs des réalisations $S^{(j)}$ pour $j = 1, 2, 3$.
   Valeurs : 46.71970 14.19268 57.23508

   (e) Utiliser les m réalisations pour calculer des valeurs approximatives de $E[X]$, $E[Y]$ et $E[S]$.
   Valeurs : 40.14755 24.01952 64.16707

   (f) Utiliser les m réalisations pour calculer des valeurs approximatives de $Var(X)$, $Var(Y)$ et $Var(S)$.
   Valeurs : 2341.780 1157.613 3506.771

   (g) Calculer les approximations de $\Pr(S > x)$ ainsi que les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance (avec un niveau de confiance de 95 %) de ces approximations :

x	borne inf.	approx. $\Pr(S > x)$	borne sup.	erreur standard
100				
200				
300				
400				
500				

   Approximation de $\Pr(S > x)$: x approx erreur borne inf. borne sup.
   Approximation de $\Pr(S > 100)$: 100 0.207920 0.001283 0.205405 0.210435
   Approximation de $\Pr(S > 200)$: 200 0.034730 0.000579 0.033595 0.035865
   Approximation de $\Pr(S > 300)$: 300 6.260e-03 2.490e-04 5.771e-03 6.749e-03
   Approximation de $\Pr(S > 400)$: 400 1.120e-03 1.060e-04 9.130e-04 1.327e-03
   Approximation de $\Pr(S > 500)$: 500 2.40e-04 4.90e-05 1.44e-04 3.36e-04

   (h) Calculer les approximations de $VaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5$, 0.75, 0.99, 0.999, 0.9999 et déterminer les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance (avec un niveau de confiance de 95 %) de ces approximations.
   Approximation de $VaR_{0.99}(S)$: 272.5937

   (i) Calculer les approximations de $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5$, 0.75, 0.99, 0.999, 0.9999.
   Approximation de $TVaR_{0.99}(S)$: 332.0866

   Code R : FnRsol-41009.R
   Code LaTeX : sol-41009.tex

8. Les v.a. X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.
   On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
   On utilise le générateur de base du logiciel `R` (`set.seed(2019)`).
   Questions :
   (a) Identifier la loi de S. Utiliser cette loi pour produire des réalisations de S. On produit dans l'ordre les réalisations $S^{(1)}$, ..., $S^{(100000)}$ de S.
   Loi de S : $S \sim PoisComp(\lambda_S; F_C)$
   Valeur de λ_S : $\lambda_S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 3 + 6$
   On définit les 3 probabilités suivantes : $p_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_S}$, $p_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_S}$, $p_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_S}$.
   Fonction de répartition de la v.a. C : $F_C(x) = p_1 F_{B_1}(x) + p_2 F_{B_2}(x) + p_3 F_{B_2}(x)$.
   On définit la v.a. Θ avec $\Pr(\Theta = \theta_l) = p_l$, pour $l = 1, 2, 3$.
   On observe : $F_C(x) = \sum_{l=1}^{3} \Pr(\Theta = \theta_l) F_{B_l}(x)$, pour $x \geq 0$.
   On introduit la v.a. $N \sim Pois(\lambda_S)$.
   (b) Indiquer les valeurs des réalisations $S^{(j)}$ pour $j = 1, 2, 3$.
   Algo de simulation :
   — Simuler un réalisation $N^(j)$ de N.
   — Si $N^{(j)} > 0$, simuler $N^{(j)}$ réalisations de la v.a.C.
   Valeurs de $S^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$: 31.39820 37.09022 45.55932
   (c) Calculer les valeurs exactes de $E[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$.
   Espérance de S : On utilise la représentation sous la forme d'une somme aléatoire, i.e.

$$E[S] = E[N]E[C] = \lambda_S \times E[C] = 10 \times 6.507843 = 65.078430.$$

   On peut vérifier que $E[S] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3]$.
   (d) Calculer les approximations de $E[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$.
   Approximation de $E[S]$: 65.39033
   Approximation de $Var(S)$: 2326.408
   (e) Calculer les approximations de $\Pr(S > x)$ ainsi que les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance (avec un niveau de confiance de 95 %) de ces approximations :

x	borne inf.	approx. $\Pr(S > x)$	borne sup.	erreur standard
100				
200				
300				
400				
500				

   Approximation de $\Pr(S > x)$: x approx erreur borne inf. borne sup.
   Approximation de $\Pr(S > 100)$: 100 0.167680 0.001181 0.165365 0.169995
   Approximation de $\Pr(S > 200)$: 200 2.157e-02 4.590e-04 2.067e-02 2.247e-02
   Approximation de $\Pr(S > 300)$: 300 3.730e-03 1.930e-04 3.352e-03 4.108e-03
   Approximation de $\Pr(S > 400)$: 400 7.10e-04 8.40e-05 5.45e-04 8.75e-04
   Approximation de $\Pr(S > 500)$: 500 2.40e-04 4.90e-05 1.44e-04 3.36e-04
   (f) Calculer les approximations de $VaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5, 0.75, 0.99, 0.999, 0.9999$ et déterminer les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance (avec un niveau de confiance de 95 %) de ces approximations.
   Approximation de $VaR_{0.99}(S)$: 241.1526
   (g) Calculer les approximations de $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5, 0.75, 0.99, 0.999, 0.9999$.
   Approximation de $TVaR_{0.99}(S)$: 302.0124

   Code R : FnRsol-41010.R Code LaTeX : sol-41010.tex

9. (a) Pour un contrat, ...

   i. ... écrire l'expression de $F_{X_1}(x)$;
   On a

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x) &= \sum_{l=1}^{2} f_\Theta(\theta_l) F_{X_1|\Theta=\theta_l}(x) \\ &= 0.75H\left(x; 0.25, \frac{1}{4000}\right) + 0.25H\left(x; 0.50, \frac{1}{4000}\right) \end{aligned}$$

   ii. ... calculer $F_{X_1}(5000)$ (vérification : $F_{X_1}(3000) = 0.8697845$) ;
   On obtient : 0.9361034

   iii. ... expliquer comment obtenir $VaR_\kappa(X_1)$;
   On utilise `optimize` ou `uniroot` pour trouver la VaR numériquement

   iv. ... calculer $VaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.99$;
   On obtient : 10945.27

   v. ... écrire l'expression de $TVaR_\kappa(X_1)$;
   On a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{l=1}^{2} f_\Theta(\theta_l) E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} | \Theta = \theta_l\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{l=1}^{2} f_\Theta(\theta_l) \frac{0.25 \times l}{\frac{1}{4000}} \overline{H}\left(VaR_\kappa(X); 0.25 \times l + 1; \frac{1}{4000}\right) \end{aligned}$$

   vi. ... calculer $TVaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.99$.
   On obtient : 14428.39

(b) Pour un portefeuille de $n = 10$ contrats, ...

   i. ... écrire l'expression de $F_{W_n}(x)$;
   On a

$$\begin{aligned} F_{W_n}(x) &= F_{S_n}(nx) \\ &= \sum_{l=1}^{2} f_\Theta(\theta_l) F_{S_n|\Theta=\theta_l}(nx) \\ &= 0.75H\left(nx; 0.25 \times n, \frac{1}{4000}\right) + 0.25H\left(nx; 0.50 \times n, \frac{1}{4000}\right) \end{aligned}$$

   ii. ... calculer $F_{W_n}(5000)$ (vérification : $F_{W_n}(3000) = 0.9592128$) ;
   On obtient : 0.9985591

   iii. ... expliquer comment obtenir $VaR_\kappa(W_n)$;
   Deux choix :
   Choix 1. On sait que

$$VaR_\kappa(W_n) = \frac{1}{n} VaR_\kappa(S_n)$$

   Puis, on utilise `optimize` ou `uniroot` pour trouver $VaR_\kappa(S_n)$ numériquement (avec F_{S_n})
   Choix 2. Ou on utilise `optimize` ou `uniroot` pour trouver $VaR_\kappa(W_n)$ numériquement (avec F_{W_n})

iv. ... calculer $VaR_{\kappa}(W_n)$ pour $\kappa = 0.99$;
On obtient : 3884.837

v. ... écrire l'expression de $TVaR_{\kappa}(W_n)$;
On a

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(W_n) &= \frac{1}{n} TVaR_{\kappa}(S_n) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{1-\kappa} E\left[S_n \times 1_{\{S_n > VaR_{\kappa}(S_n)\}}\right] \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{1-\kappa} \sum_{l=1}^{2} f_{\Theta}(\theta_l) E\left[S_n \times 1_{\{S_n > VaR_{\kappa}(S_n)\}} | \Theta = \theta_l\right] \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{1-\kappa} \sum_{l=1}^{2} f_{\Theta}(\theta_l) \frac{0.25 \times l}{\frac{1}{4000}} \overline{H}\left(VaR_{\kappa}(S_n); 0.25 \times l + 1; \frac{1}{4000}\right)
\end{aligned}$$

vi. ... calculer $TVaR_{\kappa}(W_n)$ pour $\kappa = 0.99$.
On obtient : 4461.457

Code LaTeX : sol-41011.tex

10. (a) Démontrer que

$$\Pr(I_i = 1) = E[\Theta] = \tau_1$$

et que

$$\Pr(I_i = 1, I_j = 1) = E\left[\Theta^2\right] = \tau_2.$$

On sait que

$$\Pr(I_i = 1|\Theta) = \Theta$$

et

$$\Pr(I_i = 1, I_j = 1|\Theta) = \Theta^2.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\Pr(I_i = 1) &= E_\Theta[\Pr(I_1 = 1|\Theta)] \\ &= E[\Theta] \\ &= \tau_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Pr(I_i = 1, I_j = 1) &= E_\Theta[\Pr(I_1 = 1, I_j = 1|\Theta)] \\ &= E\left[\Theta^2\right] \\ &= \tau_1\end{aligned}$$

(b) Démontrer que

$$\Pr(N_n = k) = \binom{n}{k}\frac{I(a+k, b+n-k)}{I(a,b)}, \quad (k = 0, 1, ..., n).$$

The conditional pmf of N_m is

$$\Pr(N_m = k \mid \Theta = \theta) = \binom{m}{k}\theta^k(1-\theta)^{(m-k)},$$

which corresponds to the pmf of the binomial distribution.
The expression for the unconditional pmf of N_m is given by

$$\begin{aligned}\Pr(N_m = k) &= \int_0^1 \Pr(N = k \mid \Theta = \theta) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \binom{m}{k}\int_0^1 \theta^k(1-\theta)^{(m-k)} f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \binom{m}{k}\int_0^1 \theta^k(1-\theta)^{(m-k)} \times \frac{1}{I(\alpha,\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

which becomes

$$\Pr(N_m = k) = \binom{m}{k}\frac{I(\alpha+k, \beta+m-k)}{I(\alpha,\beta)},$$

where

$$\begin{aligned}I(\alpha,\beta) &= \int_0^1 \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

(c) Calculer $\Pr(S_3 = 1000k)$, for $k = 0, 1, 2, 3$. (Pour vérifier : $\Pr(S_3 = 0) = 0.5$)
On a

$$\Pr(S_3 = 1000k) = \Pr(N_3 = k)$$

For $k=0$, on a

$$\Pr\left(N_3=0\right)=\binom{3}{0}\frac{\left(\frac{\Gamma(1+0)\Gamma(3+3-0)}{\Gamma(1+3+3)}\right)}{\left(\frac{\Gamma(1)\Gamma(3)}{\Gamma(1+3)}\right)}=0.5$$

For $k=1$, on a

$$\Pr\left(N_3=1\right)=\binom{3}{1}\frac{\left(\frac{\Gamma(1+1)\Gamma(3+3-1)}{\Gamma(1+3+3)}\right)}{\left(\frac{\Gamma(1)\Gamma(3)}{\Gamma(1+3)}\right)}=0.3$$

For $k=2$, on a

$$\Pr\left(N_3=2\right)=\binom{3}{2}\frac{\left(\frac{\Gamma(1+2)\Gamma(3+3-2)}{\Gamma(1+3+3)}\right)}{\left(\frac{\Gamma(1)\Gamma(3)}{\Gamma(1+3)}\right)}=0.15$$

For $k=3$, on a

$$\Pr\left(N_3=3\right)=\binom{3}{3}\frac{\left(\frac{\Gamma(1+3)\Gamma(3+3-3)}{\Gamma(1+3+3)}\right)}{\left(\frac{\Gamma(1)\Gamma(3)}{\Gamma(1+3)}\right)}=0.05$$

(d) Calculer $E\left[\max\left(S_3-2000;0\right)\right]$.
On obtient

$$\begin{aligned} E\left[\max\left(S_3-2000;0\right)\right] &= (3000-2000)\times 0.05 \\ &= 50 \end{aligned}$$

(e) Refaire (c) et (d) en supposant $S_3^{'}=1000N_3^{'}$ où $N_3^{'}\sim Binom\left(3,\tau_1\right)$. Comparer et commenter brièvement.
Note : on sait que

$$\tau_1=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{1}{1+3}=0.25$$

Les valeurs de

$$\Pr\left(S_3^{'}=1000N_3^{'}\right)$$

sont : 0.421875 0.421875 0.140625 0.015625
On obtient

$$\begin{aligned} E\left[\max\left(S_3^{\prime}-2000;0\right)\right] &= (3000-2000)\times 0.015625 \\ &= 15.625 \end{aligned}$$

La relation de dépendance positive introduite entre les v.a. I_1, I_2, I_3 conduit à un risque global pour le portefeuille.

On observe que la prime stop-loss est plus élevée pour le portefeuille homogène échangeable.

Code LaTeX : sol-41012.tex

11. (a) Calculer $E[X]$.
On a

$$E[X] = E[M]\,E[B]$$

On obtient

$$E[X] = 0.01\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}0.5 \times 2000 = 5$$

(b) Indiquer la loi de S_n et écrire l'expression de $F_{S_n}(x)$.
— On a $S_n \sim BNComp\,(nr, q; F_C)$ avec $C \sim B \sim Gamma\left(\alpha = 0.5, \beta = \frac{1}{2000}\right)$
— On a

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= f_M(0) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\,H(x; \alpha k, \beta) \end{aligned}$$

(c) Calculer $F_{S_{1000}}(5000)$.
On obtient : 0.5930503

(d) On définit la prime $\pi = (1+\eta)\,E[X]$ et la probabilité de ruine $\psi_n(u) = \Pr(S_n > u + n\pi)$, avec un surplus initial $u > 0$.

i. Calculer $\psi_n(2000)$, pour π_A avec $\eta = -50\%$ pour $n = 400$, 1150, 1200 et 5000. Commenter et expliquer le comportment. Indiquer la valeur de π_A.
On a $\pi_A = 2.5$
Valeurs de $\psi_n(2000)$: 0.2440786 0.4909758 0.5027401 0.8801029
Commenter et expliquer le comportment : La probabilité de ruine augmente quand le nombre de contrats augmente. Cela est dû au fait que la prime est inférieure à l'espérance des coûts pour un contrat.

ii. Pour π_A avec $\eta = -50\%$, calculer la plus petite valeur de n de telle sorte que $\psi_n(2000) \geq 50\%$. Interpréter.
Rép : le nombre n est 1189.
Interprétation : le nombre n est un pivot en quelque sorte. Lorsque le nombre de contrats est > 1189, la probabilité de ruine est $> 50\%$ et augmente avec n. Lorsque le nombre de contrats est < 1189, la probabilité de ruine est $> 50\%$.

iii. Calculer π_B et η de telle sorte que $\psi_{1000}(2000) = 1\%$.
On obtient 16.54932 et 2.309864

iv. Pour $u = 2000$, calculer π_C et η de telle sorte que $VaR_{0.99}(S_{1000}) = u + n\pi$. Quel le lien entre la prime π_C et $VaR_{0.99}(W_{1000})$? Quel est le lien etre π_C et π_B ?
On obtient 16.54932 et 2.309864
Lien entre π_C et $VaR_{0.99}(W_{1000})$: pour π_C, on tient compte de la valeur du capital initial ; pour $VaR_{0.99}(W_{1000})$, on ne tient pas compte de l'apport du capital initial ; on a

$$\pi_C = VaR_{0.99}(W_{1000}) - \frac{u}{1000}$$

Lien entre π_C et π_B : elles sont identiques. Il s'agit seulement de la façon de le demander. En (iii), cela correspond à une VaR en fait.

v. Pour $u = 2000$, calculer π_D et η de telle sorte que $TVaR_{0.99}(S_{1000}) = u + n\pi$. Quel le lien entre la prime π_D et $TVaR_{0.99}(W_{1000})$?
On obtient 19.68742 et 2.937483
Lien entre π_D et $TVaR_{0.99}(W_{1000})$: pour π_D, on tient compte de la valeur du capital initial ; pour $TVaR_{0.99}(W_{1000})$, on ne tient pas compte de l'apport du capital initial ; on a

$$\pi_D = TVaR_{0.99}(W_{1000}) - \frac{u}{1000}$$

12. (a) Calculer $p_1 = \Pr(L_1 > 0)$ et $p_2 = \Pr(L_2 > 0)$. Interpréter ces deux probabilités.
On a

$$\begin{aligned} p_1 &= \Pr(L_1 > 0) \\ &= \Pr(S - P > 0) \\ &= \Pr(1000N - P > 0) \\ &= \Pr(N > 5) \end{aligned}$$

où $N \sim Binom\left(100, q = \frac{1}{20}\right)$
On a

$$\begin{aligned} p_2 &= \Pr(L_2 > 0) \\ &= \Pr(D - T > 0) \\ &= \Pr(D - 1000K > 0) \\ &= \Pr(K < 5) \\ &= \Pr(K \leq 4) \end{aligned}$$

où $K \sim Binom\left(6, q = \frac{5}{6}\right)$
On obtient $p_1 = 0.3840009$
On obtient $p_2 = 0.2632245$
Interprétation p_1 : probabilité d'avoir une perte positive pour les activités d'assurance ; la perte sera positive si le nombre de décès excède 5 (si on a payé $S > 5 \times 1000$).
Interprétation p_2 : probabilité d'avoir une perte positive pour les activités bancaires ; la perte sera positive si le nombre de remboursements de prêts est strictement inférieur à 5 (si on reçoit seulement $T < 5 \times 1000$).

(b) Indiquer les valeurs possibles que peut prendre la v.a. L.
Valeurs possibles de L : $\{-6000, -5000, ..., -1000, 0, 1000, 2000, ..., 100000\}$

(c) Écrire l'expression de $\Pr(L = 1000k)$, pour $k = -6, -5, ..., -1, 0$.
On a

$$\begin{aligned} \Pr(L = 1000k) &= \Pr(L_1 + L_2 = 1000k) \\ &= \Pr(S - 5000 + 5000 - T = 1000k) \\ &= \Pr(S - T = 1000k) \\ &= \Pr(1000N - 1000K = 1000k) \\ &= \Pr(N - K = k) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \Pr(L = 1000 \times (-6)) &= \Pr(N = 0)\Pr(K = 6) \\ \Pr(L = 1000 \times (-5)) &= \Pr(N = 0)\Pr(K = 5) + \Pr(N = 1)\Pr(K = 6) \\ &\ldots \\ \Pr(L = 1000 \times (-k)) &= \sum_{j=0}^{6-k} (N = j)\Pr(K = j + k) \end{aligned}$$

On déduit

$$\Pr(L = 1000 \times (-k)) = \sum_{j=0}^{6-k} (N = j)\Pr(K = j + k)$$

pour $k = 6, 5, ..., 0$

(d) Calculer $\Pr(L = 1000k)$, pour $k = -6, -5, ..., -1, 0$.

On obtient :
[1,] -6 0.001982773
[2,] -5 0.012814977
[3,] -4 0.040900054
[4,] -3 0.085947378
[5,] -2 0.133781802
[6,] -1 0.164529586

(e) [7,] 0 0.166532209

(f) Calculer $\Pr(L \leq 0)$.
On a

$$\Pr(L \leq 0) = \sum_{k=0}^{6} \Pr(L = -1000k)$$

On obtient 0.6064888

(g) Calculer $\Pr(L > 0)$. Interpréter cette probabilité.
On obtient 0.3935112
Interprétation : $\Pr(L > 0)$ = probabilité de faire une perte négative = probabilité de ne pas rencontrer ses engagements

Code LaTeX : sol-info44002

Chapitre 6

Introduction aux méthodes d'allocation de capital

6.1 Exercices traditionnels

1. (a) On a

$$\sqrt{Var(X+a)} = \sqrt{Var(X)} \tag{6.1}$$

   Donc $Var(X)$ ne satisfait pas à la propriété d'invariance à la translation.

   (b) D'abord, on a que $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$. La racine carrée de la variance de X_1 est

$$\begin{aligned}\sqrt{Var(X_1)} &= \sqrt{\frac{(1-0)^2}{12}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{12}}\end{aligned}$$

   Pour la racine carrée de la variance de X_2, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{Var(X_2)} &= \sqrt{0}\\ &= 0\end{aligned}$$

   La mesure $\sqrt{Var(X_1)}$ ne satisfait pas à la mesure de monotonicité puisque

$$Var(X_1) \nleq Var(X_2)$$

Code LaTeX : sol-50001.tex

2. (a) Montrer que la fonction $\Pi_A(S)$ est homogène. On a

$$\begin{aligned}
\Pi_A\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) &= E\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) + \sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right)}\Phi^{-1}(\kappa) \\
&= \lambda E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) + \lambda\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}\Phi^{-1}(\kappa) \\
&= \lambda \Pi_A(S)
\end{aligned}$$

La fonction est donc homogène.
Utiliser le théorème d'Euler pour identifier la contribution $C^A(X_i)$. On a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\Pi_A(\lambda_1X_1+...+\lambda_iX_i+...+\lambda_nX_n) = \frac{\partial}{\partial\lambda_i}E\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right)}\Phi^{-1}(\kappa) \\
&= E(X_i) + \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{\sum_{l=1}^n \lambda_l^2 Var(X_l) + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1,l\neq k}^n \lambda_l\lambda_k Cov(X_l,X_k)}\Phi^{-1}(\kappa) \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(2\lambda_i Var(X_i) + \sum_{k=1,k\neq i}^n \lambda_k Cov(X_i,X_k) + \sum_{k=1,k\neq i}^n \lambda_k Cov(X_k,X_i)\right)}{\sqrt{\sum_{l=1}^n \lambda_l^2 Var(X_l) + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1,l\neq k}^n \lambda_l\lambda_k Cov(X_l,X_k)}}\Phi^{-1}(\kappa) + E(X_i)
\end{aligned}$$

On pose $\lambda_1 = ... = \lambda_i = ... = \lambda_n = 1$. On a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\Pi_A(\lambda_1X_1+...+\lambda_iX_i+...+\lambda_nX_n)\Big|_{\lambda_1=...=\lambda_i=...=\lambda_n=1} \\
&= \frac{2Var(X_i) + 2\sum_{k=1,k\neq l}^n Cov(X_i,X_k)}{\sqrt{\sum_{l=1}^n Var(X_l) + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1,l\neq k}^n Cov(X_l,X_k)}}\Phi^{-1}(\kappa) + E(X_i) \\
&= \frac{Cov\left(X_i, \sum_{l=1}^n X_l\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{l=1}^n X_l\right)}}\Phi^{-1}(\kappa) + E(X_i) \\
&= C^A(X_i)
\end{aligned}$$

(b) Montrer que la fonction $\Pi_B(S)$ est homogène. La démarche est similaire à (a). On a

$$\Pi_B\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right) = \lambda\Pi_B(S)$$

Utiliser le théorème d'Euler pour identifier la contribution $C^B(X_i)$. On a

$$C^B(X_i) = E(X_i) + \frac{Cov\left(X_i, \sum_{l=1}^n X_l\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{l=1}^n X_l\right)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-\kappa}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}$$

Code LaTeX : sol-50002.tex

3. (a) On remarque que ce sont des fonctions de répartition de lois exponentielles. Il s'ensuit que,
$X_1 \sim Exp(1/10), X_2 \sim Exp(1/20)$ et $X_3 \sim Exp(1/40)$ avec probabilité 0.75
et que
$X_1 \sim Exp(1/40), X_2 \sim Exp(1/80)$ et $X_3 \sim Exp(1/10)$ avec probabilité 0.25

(b) Calculer les covariances entre les X_i. On commencer par calculer les espérances de X_i. On a,

$$\begin{aligned} E(X_1) &= 0.75 \times 10 + 0.25 \times 40 = 17.5 \\ E(X_2) &= 0.75 \times 20 + 0.25 \times 80 = 35 \\ E(X_3) &= 0.75 \times 40 + 0.25 \times 10 = 32.5 \end{aligned}$$

On poursuit avec les covariances. On a,

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= (0.75 \times 10 \times 20 + 0.25 \times 40 \times 80) - E(X_1)E(X_2) \\ &= 337.5; \\ Cov(X_1, X_3) &= (0.75 \times 10 \times 40 + 0.25 \times 40 \times 10) - E(X_1)E(X_3) \\ &= -168.75; \\ Cov(X_2, X_3) &= (0.75 \times 20 \times 40 + 0.25 \times 80 \times 10) - E(X_2)E(X_3) \\ &= -337.5; \end{aligned}$$

(c) On débute par calculer les variances des X_i. On a,

$$\begin{aligned} Var(X_1) &= \left(0.75 \times 2 \times 10^2 + 0.25 \times 2 \times 40^2\right) - EX_1^2 = 643.75 \\ Var(X_2) &= \left(0.75 \times 2 \times 20^2 + 0.25 \times 2 \times 80^2\right) - EX_2^2 = 2575 \\ Var(X_3) &= \left(0.75 \times 2 \times 40^2 + 0.25 \times 2 \times 10^2\right) - EX_3^2 = 1393.75 \end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned} E(S) &= E(X_1 + X_2 + X_3) = 85; \\ Var(S) &= Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + 2Cov(X_1, X_2) + 2Cov(X_1, X_3) + 2Cov(X_2, X_3) \\ &= 4275. \end{aligned}$$

(d) Calculer la mesure $\sqrt{Var(S)}$ et les contributions $C^{\sqrt{Var}}(X_i)$ associés à cette mesure. On a,

Pour la démarche détaillée, voir la démarche de l'exercice 5.1.2. La contribution selon l'écart type est donnée par

$$C^{\sqrt{Var}}(X_i) = \frac{Cov\left(X_i, \sum_{l=1}^{n} X_l\right)}{\sqrt{Var(S)}} \tag{6.2}$$

À l'aide de (6.2), on obtient

$$\begin{aligned}
C^{\sqrt{Var}}(X_1) &= \frac{Cov\left(X_1, \sum_{l=1}^{3} X_l\right)}{\sqrt{4275}} \\
&= \frac{Cov(X_1, X_1) + Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3)}{\sqrt{4275}} \\
&= 12.42668558; \\
C^{\sqrt{Var}}(X_2) &= 39.38303431; \\
C^{\sqrt{Var}}(X_3) &= 13.57376325.
\end{aligned}$$

(e) Soit la prime $\Pi_A(S)$. Utiliser le principe d'Euler pour calculer les contributions de X_i pour $\kappa = 0.99$. Pour la démarche détaillée, voir la démarche du numéro 5.1.2. La contribution de X_i est donnée par

$$\frac{Cov\left(X_i, \sum_{l=1}^{n} X_l\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{l=1}^{n} X_l\right)}} \Phi^{-1}(\kappa) + E(X_i) \tag{6.3}$$

À l'aide de (6.3), on obtient

$$\begin{aligned}
C^A(X_1) &= 46.40879; \\
C^A(X_2) &= 126.6186; \\
C^A(X_3) &= 64.0773.
\end{aligned}$$

Pour ce qui est de $\Pi_A(S)$, on a

$$\Pi_A(S) = E(S) + \sqrt{Var(S)}\Phi^{-1}(\kappa) = 237.1047 = C^A(X_1) + C^A(X_2) + C^A(X_3)$$

(f) Soit la prime $\Pi_B(S)$. Utiliser le principe d'Euler pour calculer les contributions de X_i pour $\kappa = 0.99$. Pour la démarche détaillée, voir la démarche du numéro 5.1.2. La contribution de X_i est donnée par,

$$C^B(X_i) = E(X_i) + \frac{Cov\left(X_i, \sum_{l=1}^{n} X_l\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{l=1}^{n} X_l\right)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-\kappa} e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \tag{6.4}$$

On obtient, à l'aide de (3),

$$\begin{aligned}
C^B(X_1) &= 50.61978; \\
C^B(X_2) &= 139.9642; \\
C^B(X_3) &= 68.67699.
\end{aligned}$$

Pour ce qui est de $\Pi_B(S)$, on a

$$\Pi_B(S) = E(S) + \sqrt{Var(S)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-\kappa} e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} = 259.261 = C^B(X_1) + C^B(X_2) + C^B(X_3).$$

Code LaTeX : sol-50003.tex

6.2 Exercices informatiques

1. (a) Calculer $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$.
   On obtient : 3000, 2000, 1000 et 6000.

   (b) Utiliser les réalisations pour calculer des approximations de $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$.
   On obtient : 2996.869, 2002.107, 1000.448 et 5999.424

   (c) On obtient les valeurs suivantes :

κ	$\widetilde{C}_{\kappa}^{VaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{VaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{VaR}(X_3)$	$\widetilde{VaR_{\kappa}}(S)$
0.9	3519.61	2144.96	2571.59	8236.16
0.99	2794.33	1726.33	6307.79	10828.45
0.999	3520.68	6613.16	3237.05	13370.89

   On observe l'incohérence dans les valeurs des contributions à la VaR. Cette inconhérence n'est pas due à la méthode d'allocation basée sur le principe d'Euler, mais sur la mesure VaR elle-même. Pour un risque donné, les contributions n'augmentent pas de façon monotones avec la valeur de κ.

   (d) On obtient les valeurs suivantes :

κ	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_{\kappa}^{TVaR}(X_3)$	$\widetilde{TVaR_{\kappa}}(S)$
0.9	3872.68	3150.97	2371.33	9394.98
0.99	4142.64	3662.24	4086.29	11891.17
0.999	4521.98	4008.08	5772.37	14302.44

Code LaTeX : sol-51001.tex
Code R : FnRsol-51001.R

2. (a) Calculer les paramètres pour les 3 lois à partir des informations fournies.
   Les paramètres de X_1 sont
$$\alpha_P = 2.25, \lambda = 125$$
   Les paramètres de X_2 sont
$$\alpha_G = 1/9, \beta = 1/900$$
   Les paramères de X_3 sont
$$\mu = 3.453878, \sigma = 1.517427$$
   (b) Utiliser les m réalisations pour calculer des approximations de $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$. On obtient : 99.2866, 101.3496, 99.7257, et 300.3619.
   (c) On obtient les valeurs suivantes :

κ	$\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_3)$	$\widetilde{VaR_\kappa}(S)$
0.9	11.87	674.40	4.13	690.41
0.99	43.80	2081.83	60.47	2186.10
0.999	18.80	15.61	4920.64	4955.04

   (d) On obtient les valeurs suivantes :

κ	$\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}(X_1)$	$\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}(X_2)$	$\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}(X_3)$	$\widetilde{TVaR_\kappa}(S)$
0.9	302.44	633.45	402.48	1338.38
0.99	733.12	1389.24	1229.64	3352.00
0.999	2839.99	697.03	3548.04	7085.06

   Important : on sait que $TVaR_\kappa(S)$ augmente avec κ. Toutefois, ce n'est pas le cas des contributions à la TVaR (selon la méthode d'Euler). En effet, dans cet exemple, on observe l'impact joué par les queues des distributions *heavy tailed* telles que les distributions Pareto et lognormale. Pour $\kappa = 0.999$, la contribution au risque 2 décroît car les contributions aux risques 1 et 3 prennent des parts relatives plus importantes.

Code LaTeX : sol-51002.tex
Code R : FnRsol-51002.R

Chapitre 7

Estimation des données d'assurance

1. (a) On a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x_i!}; \\ L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}; \\ l(\lambda) &= \sum_{i=1}^{N} \left(x_i \log \lambda - \lambda - \log(x_i) \right). \end{aligned}$$

On obtient l'estimateur du maximum de vraisemblance en maximisant la fonction de vraisemblance, ou de manière équivalante maximisant la fonction log-vraisemblance.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} l(\lambda) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i \log \lambda - \lambda - \log(x_i) \right); \\ 0 &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\hat{\lambda}} - 1 \right); \\ \hat{\lambda} N &= \sum_{i=1}^{N} x_i; \\ \hat{\lambda} &= \overline{x}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \frac{14075 + 1834 \times 2 + 255 \times 3 + 34 \times 4 + 4 \times 5 + 1 \times 6}{103704 + 14075 + 1834 + 255 + 34 + 4 + 1} \\ &= 0.155704 \end{aligned}$$

(b) On optimise numériquement sur R. Voir GitHub

(c) i. On applique les intervalles $0, 1, 2, 3+$, alors on a $dl = 4 - 1 - 1 = 2$. On a $Q = 1284.339$ et $p - value = 1$. Alors, on rejette la loi.

ii. On applique les intervalles $0, 1, 2, 3, 4+$, alors on a $dl = 5 - 2 - 1 = 2$. On a $Q = 0.9898027$ et $p - value = 1 - 0.390369 = 0.609631 > 0.05$. Alors, on ne rejette pas la loi.

(d) On sélectionne la loi Binomiale Négative.

Code LaTeX : sol-101005.tex

2. (a) On obtient

$$\hat{\lambda} = \frac{2892 + 535 \times 2 + 152 \times 3 + 57 \times 4 + 12 \times 5 + 3 \times 6 + 3 \times 7}{141781 + 2892 + 535 + 152 + 57 + 12 + 3 + 3}$$
$$= 0.03262659$$

   (b) On optimise numériquement sur R. Voir GitHub On obtient

$$r = 0.0531426;$$
$$q = 0.6196212$$

   (c) i. On applique les intervalles $0, 1, 2+$, alors on a $dl = 3 - 1 - 1 = 1$. On a $Q = 6854.841$ et $p - value = 1$. Alors, on rejette la loi.

   ii. On applique les intervalles $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6+$, alors on a $dl = 7 - 2 - 1 = 4$. On a $Q = 7.375456$ et $p - value = 1 - 0.8826718 = 0.1173282 > 0.05$. Alors, on ne rejette pas la loi.

   (d) On sélectionne la loi Binomiale Négative.

Code LaTeX : sol-101006.tex

3. (a) On a
$$\hat{\lambda} = \frac{106 \times 1 + 60 \times 2 + 12 \times 3 + 6 \times 4}{307} = 0.9609121$$

(b) On regroupe les données selon {0, 1, 2, 3+} et on obtient

$$Q = \frac{(117.44 - 120)^2}{117.44} + \frac{(112.85 - 106)^2}{112.85} + \frac{(54.22 - 60)^2}{54.22} + \frac{(17.38 - 15)^2}{17.37} + \frac{(5.12 - 6)^2}{5.12} = 1.56083.$$

De plus, on a
$$\Pr(Z > z_{0.05,2}) = 5.991465,$$
alors, on accèpte la distribution $N \sim Poisson(\lambda)$.

(c) On applique la méthode delta. L'intervalle de confiance pour $g(\hat{\lambda})$ est

$$g(\hat{\lambda}) \pm t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \sqrt{g'(\hat{\lambda}) I^{-1} g'(\hat{\lambda})}.$$

On a

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \Pr(N = 1) \\ &= \lambda e^{-\lambda}; \\ g'(\lambda) &= (1 - \lambda) e^{-\lambda}; \\ I^{-1} &= Var(\hat{\lambda}) \\ &= Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \\ &= \frac{\lambda}{n}; \\ Var(g(\lambda)) &= \frac{\lambda}{n}(1 - \lambda)^2 e^{-2\lambda} \end{aligned}$$

Alors, on calcule

$$\begin{aligned} g(\hat{\lambda}) &= 0.9609121 e^{-0.9609121} = 0.367591 \\ Var(g(\hat{\lambda})) &= \frac{0.9609121}{307}(1 - 0.9609121)^2 e^{-2*0.9609121} \\ &= 0.0000006998296 \\ t_{306;\frac{0.05}{2}} &= 1.967747 \end{aligned}$$

et
$$(0.3659448, 0.3692371)$$
est un intervalle de confiance à 95% pour $\Pr(N = 1)$.

Code LaTeX : sol-101008.tex

4. (a) Voir GitHub. On obtient
   i. Gamma : $\hat{\alpha} = 0.1714; \hat{\beta} = 0.00023$
   ii. Log Normale : $\hat{\mu} = 5.055; \hat{\sigma} = 1.907$
   iii. Pareto : $\hat{\alpha} = 1.021; \hat{\lambda} = 195.85$.

   (b) On a
   i. Gamma : Valeur Q : 32.48 ; valeur critique : 11.07. On rejette.
   ii. Log Normale : Valeur Q : 4.46 ; valeur critique : 11.07. On ne rejette pas.
   iii. Pareto : Valeur Q : 8.63, valeur crique : 11.07. On ne rejette pas.

   (c) On calcule
   i. Gamma : 2630.49
   ii. Log Normale : 2605.54
   iii. Pareto : 2612.4

   On sélectionne la loi Log Normale.

Code LaTeX : sol-101009.tex

5. (a) Voir GitHub. On obtient $\hat{\mu} = 1.88509; \hat{\sigma} = 0.8594$.

   (b) On applique la méthode delta. Soit le vecteur de paramètres $\underline{\theta} = (\mu, \sigma)$. On a

$$I(\underline{\theta}) = -E\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\mu^2} \ln f_X(x;\underline{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma} \ln f_X(x;\underline{\theta}) \\ \frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma} \ln f_X(x;\underline{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} \ln f_X(x;\underline{\theta}) \end{pmatrix}\right].$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\ln f_X(x;\underline{\theta}) &= -\ln x - \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}; \\
\frac{\partial}{\partial\mu} \ln f_X(x;\underline{\theta}) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\ln x + 2\mu\right); \\
\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} \ln f_X(x;\underline{\theta}) &= -\frac{1}{\sigma^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\sigma} \ln f_X(x;\underline{\theta}) &= \frac{-2\ln x + 2\mu}{\sigma^3}; \\
\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} \ln f_X(x;\underline{\theta}) &= \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3(\ln x - \mu)^2}{\sigma^4}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\ln x + 2\mu\right)\right] &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\mu + 2\mu\right) = 0 \\
E\left[\frac{1}{\sigma^2} - \frac{3(\ln x - \mu)^2}{\sigma^4}\right] &= \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3\sigma^2}{\sigma^4} = -\frac{2}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

On conclut

$$I(\underline{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\sigma^2} \end{pmatrix}$$

et

$$I(\underline{\theta})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2n} \end{pmatrix}.$$

i. Soit $g_1(\underline{\theta}) = VaR_\kappa(X) = \exp\{\mu + \sigma VaR_\kappa(Z)\}$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g_1(\theta) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \exp\{\mu + \sigma VaR_\kappa(Z)\} \\
&= \exp\{\mu + \sigma VaR_\kappa(Z)\} \\
&= g(\theta);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} g_1(\theta) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \exp\{\mu + \sigma VaR_\kappa(Z)\} \\
&= VaR_\kappa(Z) \exp\{\mu + \sigma VaR_\kappa(Z)\} \\
&= VaR_\kappa(Z) g_1(\theta).
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
Var(g_1(\underline{\theta})) &= \begin{pmatrix} g_1(\underline{\theta}) & VaR_\kappa(Z) g_1(\underline{\theta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(\underline{\theta}) \\ VaR_\kappa(Z) g_1(\underline{\theta}) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sigma^2}{n} g_1(\underline{\theta})^2 + VaR_\kappa(Z)^2 g_1(\underline{\theta})^2 \frac{\sigma^2}{2n}.
\end{aligned}$$

L'intervalle de confiance à 95% pour $g_1(\underline{\theta})$ est

$$\begin{aligned} & g_1(\underline{\theta}) \pm t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \sigma g(\underline{\theta}) \sqrt{\frac{1 - VaR_\kappa(Z)^2}{n}} \\ & 60.26059 \pm 40.17992 \\ & (20.08068, 100.44051) \end{aligned}$$

ii. Soit $g_2(\underline{\theta}) = TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left(1 - \Phi(VaR_\kappa(Z) - \sigma)\right)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} g_2(\underline{\theta}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \frac{1}{1-\kappa} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left(1 - \Phi(VaR_\kappa(Z) - \sigma)\right) \\ &= g_2(\underline{\theta}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} g_2(\underline{\theta}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{1}{1-\kappa} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left(1 - \Phi(VaR_\kappa(Z) - \sigma)\right) \\ &= \frac{1}{1-\kappa} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \left(1 - \Phi(VaR_\kappa(Z) - \sigma)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{1}{1-\kappa} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left(1 - \Phi(VaR_\kappa(Z) - \sigma)\right) \\ &= \frac{1}{1-\kappa} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \phi(VaR_\kappa(Z) - \sigma) + \frac{\sigma}{1-\kappa} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left(1 - \Phi(VaR_\kappa(Z) - \sigma)\right) \\ &= \sigma g_2(\underline{\theta}) + \frac{1}{1-\kappa} e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \phi\left(VaR_\kappa(Z) - \sigma\right). \end{aligned}$$

L'intervalle de confiance à 95% pour $g_2(\underline{\theta})$ est

$$\begin{aligned} & g_2(\underline{\theta}) \pm t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var(g_2(\underline{\theta}))} \\ & 82.0243 \pm 61.45916 \\ & (20.56514, 143.48346). \end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-101010.tex

6. (a) L'estimateur $\hat{\gamma}$ est donné par

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\\ &= \frac{1106171}{100}\\ &= 11061.71.\end{aligned}$$

(b) On applique la méthode delta. On a

$$\begin{aligned}f_X(x;\gamma) &= \frac{1}{\gamma}e^{-\frac{x}{\gamma}};\\ \ln f_X(x;\gamma) &= -\ln\gamma - \frac{x}{\gamma};\\ \frac{\partial}{\partial\gamma}\ln f_X(x;\gamma) &= -\frac{1}{\gamma} + \frac{x}{\gamma^2};\\ \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\ln f_X(x;\gamma) &= \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2x}{\gamma^3}.\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}I &= -nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\ln f_X(x;\gamma)\right]\\ &= -nE\left[\frac{1}{\gamma^2} - \frac{2x}{\gamma^3}\right]\\ &= -n\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{2\gamma}{\gamma^3}\right)\\ &= \frac{n}{\gamma^2}\end{aligned}$$

et $I^{-1} = \frac{\gamma^2}{n}$ Alors, l'intervalle de confiance à 95% pour $\hat{\gamma}$ est

$$\begin{aligned}&\hat{\gamma} \pm t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Var(\hat{\gamma})}\\ &11061.71 \pm t_{99;0.025}\sqrt{\frac{11061.71^2}{100}}\\ &(8866.968, 13256.452)\end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}g_2(\gamma) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma} - \gamma\ln(1-\kappa)\\ &= -\ln(1-\kappa).\end{aligned}$$

Alors, un intervalle de confiance à 95% pour $g_2(\gamma)$ est

$$\begin{aligned}&g_2(\gamma) \pm t_{99;0.025}\sqrt{\ln(1-\kappa)\times\frac{11061.71^2}{100}\times\ln(1-\kappa)}\\ &50941.06 \pm 10107.81\\ &(40833.25, 61048.87).\end{aligned}$$

Code LaTeX : sol-101011.tex

Chapitre 8

Processus de comptage

8.1 Exercices traditionnels

1. (a) Selon l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{aucun sinistre pendant 2 ans}) &= 0.4 \\
\frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!} &= 0.4 \\
e^{-2\lambda} &= 0.4 \\
\lambda &= -\frac{\ln 0.4}{2} \\
\lambda &= 0.4581454.
\end{aligned}$$

(b) On a

$$N(3.6) - N(2) \sim Pois(\lambda \times (3.6 - 2)).$$

Alors, on calcule

$$\begin{aligned}
\Pr(N(3.6) - N(2) = 1) &= \frac{(\lambda \times (3.6 - 2))^1 \, e^{-\lambda \times (3.6-2)}}{1!} \\
&= 0.4581454 \times 1.5 \times e^{-0.4581454 \times 1.5} \\
&= 0.3456524.
\end{aligned}$$

(c) Par la propriété d'accroissements indépendants, il est équivalant de calculer la probabilité qu'il s'écoule au moins 24 mois entre le prochain sinistre. Approche # 1, on calcule la probabilité qu'il y a aucun sinistres en deux ans :

$$\begin{aligned}
\Pr(N(2) = 0) &= \frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!} \\
&= 0.4.
\end{aligned}$$

Approche #2, on calcule la probabilité que le prochain sinistre est dans plus que deux ans :

$$\begin{aligned}
\Pr(W > 2) &= \overline{F}_W(2) \\
&= e^{-\lambda * 2} \\
&= 0.4.
\end{aligned}$$

(d) Le temps à écouler entre deux sinistres correspond à la v.a. du temps inter-sinistres W. On a $W \sim Exp(\lambda)$ avec $E[W] = \frac{1}{\lambda} = 2.182713$.

(e) On calcule

$$E\left[N\left(\frac{18}{12}\right)\right] = \lambda \times \frac{18}{12} = 0.687218;$$
$$Var\left(N\left(\frac{18}{12}\right)\right) = \lambda \times \frac{18}{12} = 0.687218.$$

(f) Par la propriété d'accroissements indépendants, on a

$$(N(5)|N(2) = 3) \sim M,$$

où $M = 3 + N(5) - N(2)$. On obtient

$$E[M] = E[3 + N(5) - N(2)] = 3 + E[N(3)] = 3 + (5 - 2) \times \lambda = 4.374436;$$
$$Var(M) = Var(N(5) - N(2)) = Var(N(3)) = 3 \times \lambda = 1.374436.$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{aucun sinistre prendant 15 mois}) &= 0.1053992245 \\
\Pr\left(N\left(\frac{15}{12}\right) = 0\right) &= 0.1053992245 \\
\frac{\left(\frac{15}{12}\lambda\right)^0 e^{-\left(\frac{15}{12}\lambda\right)}}{0!} &= 0.1053992245 \\
\lambda &= -\frac{12}{15}\ln 0.1053992245 \\
\lambda &= 1.8.
\end{aligned}$$

(b) On remarque

$$\begin{aligned}
E[S(5) - S(2)] &= E[S(3)] \\
&= E[N(3)]E[B] \\
&= 3 \times 1.8 \times \frac{\alpha}{\beta}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
K_{S(t)}(r) &= \ln\left(M_{S(t)}(r)\right) \\
&= \ln\left(e^{-\lambda t(M_B(r) - 1)}\right) \\
&= -\lambda t\left(M_B(r) - 1\right).
\end{aligned}$$

Alors, on conclut

$$\begin{aligned}
Var(S(t)) &= \lambda t E[B^2] \\
Var(S(3)) &= 3 \times 1.8 \times \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^2}\right).
\end{aligned}$$

Ensuite, on résoud les équations définis précédemment.

$$\begin{aligned}
E[B] &= \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \frac{108}{3 \times 1.8} \\
&= 20; \\
Var(S(3)) = 2700 &= 3 \times 1.8 \times \left(20^2 + \frac{1}{\hat{\beta}} \times 20\right) \\
\hat{\beta} &= 20 \times \left[\frac{2700}{3 \times 1.8} - 20^2\right]^{-1} \\
&= 0.2; \\
\hat{\alpha} &= 20 \times \hat{\beta} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

(c) On a

$$S(4) - S(2.5) \sim PoisComp((4 - 2.5)\lambda; F_B).$$

Ainsi, on calcule

$$\begin{aligned}
\Pr(S(4) - S(2.5) > 0) &= 1 - \Pr(S(4) - S(2.5) = 0) \\
&= 1 - \Pr(N(4) - N(2.5) = 0) \\
&= 1 - \frac{((4 - 2.5) \times 1.8)^0 e^{-(4-2.5)\times 1.8}}{0!} \\
&= 0.9327945.
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(S(4) - S(2.5) > x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(4) - N(2.5) = k) \overline{F}_B^{*k}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((4 - 2.5) \times 1.8)^k e^{-(4-2.5)k\times 1.8}}{k!} \overline{H}(x; 4 \times k, 0.2).
\end{aligned}$$

On effectur les calcules en R, voir GitHub. On calcule

$$\begin{aligned}
\Pr(S(4) - S(2.5) > 300) &= 0.000004801586 \\
\Pr(S(4) - S(2.5) > 600) &= 0.0000000000000002664535.
\end{aligned}$$

(d) On obtient

$$\begin{aligned}
VaR_{0.1}(S(4) - S(2.5)) &= 10.93634 \\
VaR_{0.999}(S(4) - S(2.5)) &= 206.435 \\
TVaR_{0.1}(S(4) - S(2.5)) &= 59.70828 \\
TVaR_{0.0.999}(S(4) - S(2.5)) &= 224.9014.
\end{aligned}$$

(e) On a $(S(5)|S(2) = 200) = (S(5) - S(2)) + 200$. Alors,

$$\begin{aligned}
F_{S(5)|S(2)=200}(500) &= F_{S(5)-S(2)}(300) \\
&= \Pr(N(5) - N(2) = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(5) - N(2) = k) H(300; k \times \alpha, \beta) \\
&= e^{-(5-2)\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(5-2)^k \lambda^k e^{-(5-2)\lambda}}{k!} H(300; k \times \alpha, \beta) \\
&= 0.9985859.
\end{aligned}$$

(f) On a $(S(5)|S(2) = 200) = (S(5) - S(2)) + 200$. Alors,

$$\begin{aligned}
E\left[S(5)|S(2) = 200\right] &= E\left[S(5) - S(2) + 200\right] \\
&= (5-2) \times \lambda \times \frac{\alpha}{\beta} + 200 \\
&= 308;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var\left(S(5)|S(2) = 200\right) &= Var(S(5) - S(2) + 200) \\
&= Var(S(5) - S(2)) \\
&= 2700.
\end{aligned}$$

3. (a) On a $W_j \sim Exp(\lambda)$. La fonction de log-vraisemlance sur $(0, t_{36}]$ est

$$l(\lambda) = \sum_{i=1}^{36} \log\left(\lambda e^{-\lambda w_i}\right).$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance est

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} l(\hat{\lambda}) &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \sum_{i=1}^{36} \log\left(\hat{\lambda} e^{-\hat{\lambda} w_i}\right) &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \sum_{i=1}^{36} \left(\log\left(\hat{\lambda}\right) - \hat{\lambda} w_i\right) &= 0 \\
\frac{36}{\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^{36} w_i &= 0 \\
\hat{\lambda} &= \frac{36}{\sum_{i=1}^{36} w_i}.
\end{aligned}$$

De plus, on remarque que $\sum_{i=1}^{36} w_i = t_j$, alors, on a

$$\hat{\lambda} = \frac{36}{8.3851940} = 4.293281.$$

(b) On a

$$E[N(t)] = \lambda t.$$

Alors, on calcule

$$E\left[N\left(1\right)\right] = \lambda \times 1 = 4.293281;$$
$$E\left[N\left(\frac{3}{12}\right)\right] = \lambda \times \frac{3}{12} = 1.07332;$$
$$E\left[N\left(\frac{18}{12}\right)\right] = \lambda \times \frac{18}{12} = 6.439922.$$

(c) Le temps inter-sinistres obéit à une distribution Exponentielle avec paramètre λ. On a

$$E[W] = \frac{1}{4.293281} = 0.2329221.$$

De plus,

$$VaR_{0.01}(W) = -0.2329221\ln(1-0.01) = 0.002340945;$$
$$VaR_{0.99}(W) = -0.2329221\ln(1-0.99) = 1.072646.$$

(d) On calcule $\lambda^{'} = 2 \times 4.293281 = 8.586562$. On a

$$E[W] = \frac{1}{8.586562} = 0.116461.$$

De plus, on a

$$VaR_{0.01}(W) = -0.116461\ln(1-0.01) = 0.001170473;$$
$$VaR_{0.99}(W) = -0.116461\ln(1-0.99) = 0.5363229.$$

Ainsi, l'espérance du temps inter-sinistres est réduit de moitié, ainsi que la valeur de la VaR_κ par rapport au processus avec $\hat{\lambda}$.

(e) On calcule $\lambda^{'} = \frac{4.293281}{2} = 2.146641$. On a

$$E[W] = \frac{1}{2.146641} = 0.4658441.$$

De plus, on a

$$VaR_{0.01}(W) = -0.4658441\ln(1-0.01) = 0.004681891;$$
$$VaR_{0.99}(W) = -0.4658441\ln(1-0.99) = 2.145292.$$

Ainsi, l'espérance du temps inter-sinistres est doublée, ainsi que la valeur de la VaR_κ par rapport au processus avec $\hat{\lambda}$.

4. (a) i. On définit les temps observés écoulés par $w_1 = t_1$ et $w_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, 2, ..., 30)$. De plus, on sait que le 31 sinistre se produira au delà de 31, ce qui implique que $W_{31} > w_{31} = 15 - t_{30}$. Il en résulte que la fonction de vraisemblance est donnée par

$$\begin{aligned} L\left(\lambda\right) &= \left(\prod_{i=1}^{30} f_{W_i}\left(w_i\right)\right) \times \overline{F}_{W_{31}}\left(15-t_{30}\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{30} f_{W}\left(w_i\right)\right) \times \overline{F}_{W}\left(15-t_{30}\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{30} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda w_i}\right) \times \mathrm{e}^{-\lambda(15-t_{30})}. \end{aligned}$$

ii. Ensuite, le log de la fonction de vraisemblance est

$$l(\lambda) = \sum_{i=1}^{30} (\ln(\lambda) - \lambda \mathrm{w}_i) - \lambda(15 - t_{30}).$$

On dérive par rapport à λ et on pose le résultat égal à 0

$$\frac{30}{\lambda} - \sum_{i=1}^{30} w_i - 15 + t_{30} = 0.$$

Or, on sait que

$$\sum_{i=1}^{30} w_i = t_{30}.$$

On déduit

$$\widehat{\lambda} = \frac{30}{15} = 2.$$

(b) L'expression de la fonction de survie est

$$\begin{aligned}
\Pr(W_{31} - 15 > y | W_{31} > 15) &= \Pr(W_{31} > y + 15 | W_{31} > 15) \\
&= \frac{\overline{F}_{W_{31}}(y+15)}{\overline{F}_{W_{31}}(15)} \\
&= \frac{\exp(-\lambda(y+15))}{\exp(-\lambda 15)} \\
&= \exp(-\lambda y)
\end{aligned}$$

(propriété sans mémoire de la loi exponentielle).

On déduit que

$$(W_{31} - 15 | W_{31} > 15) \sim Exp(\lambda)$$

avec $\lambda = \widehat{\lambda} = 2$.

(c) Indépendance des accroissements de la loi de Poisson. On déduit

$$(N(25) - N(20) | N(15) = 30) \sim N(25) - N(20) \sim Pois(5\lambda)$$

avec $\lambda = \widehat{\lambda} = 2$.

5. (a) On a

$$\begin{aligned}
E[N(t)] &= \lambda t \\
E\left[N\left(\frac{3}{12}\right)\right] &= 50 \\
\lambda \times \frac{3}{12} &= 50 \\
\lambda &= 50 \times \frac{12}{3} = 200.
\end{aligned}$$

L'espérance du temps écoulé entre 2 accidents est $\frac{1}{200} = 0.005$.

(b) On a

$$\begin{aligned} E[N(t)] &= \lambda t \\ E\left[N\left(4\right)\right] &= 1 \\ \lambda \times 4 &= 1 \\ \lambda &= 1 \times \frac{1}{4} = 0.25. \end{aligned}$$

L'espérance du temps écoulé entre 2 accidents est $\frac{1}{0.25} = 4$. On remarque que le paramètre λ est très différent pour les deux périls. En effet, un grand paramètre λ correspond à un processus qui a plus de réalisations dans un intervalle de temps. Les lignes d'affaires de la compagnie IARD doivent donc avoir différents modèles pour modéliser la fréquence des réclamations.

6. (a) On a

$$\begin{aligned} M_{N(t)}(r) &= E\left[e^{N(t)r}\right] \\ &= E_{\Lambda}\left[E\left[e^{N(t)r}\right]|\Lambda\right] \\ &= E_{\Lambda}\left[e^{\Lambda t(e^r-1)}\right] \\ &= M_{\lambda}\left(t\left(e^r-1\right)\right), \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} M_{N(t)}(r) &= \left(\frac{\theta}{\theta - t\left(e^r-1\right)}\right)^m \\ &= \left(\frac{1}{1-\beta\left(e^r-1\right)}\right)^m, \end{aligned}$$

qui correspond à la f.g.m. de la loi binomiale négative avec $\beta = \frac{t}{\theta}$. On obtient

$$\begin{aligned} \Pr(N(t)=k) &= \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\theta}}\right)^r\left(\frac{\frac{t}{\theta}}{1+\frac{t}{\theta}}\right)^k \\ &= \frac{\Gamma(2.4+k)}{\Gamma(2.4)k!}\left(\frac{1.2}{1.2+t}\right)^{2.4}\left(\frac{t}{1.2+t}\right)^k; \\ \Pr(N(1)=k) &= \frac{\Gamma(2.4+k)}{\Gamma(2.4)k!}\left(\frac{1.2}{1.2+1}\right)^{2.4}\left(\frac{1}{1.2+1}\right)^k \\ &= \frac{\Gamma(2.4+k)}{\Gamma(2.4)k!}\left(\frac{1.2}{2.2}\right)^{2.4}\left(\frac{1}{2.2}\right)^k. \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \Pr(N(1)=0) &= \frac{\Gamma(2.4)}{\Gamma(2.4)}\left(\frac{1.2}{2.2}\right)^{2.4} = 0.2334643 \\ \Pr(N(1)=1) &= \frac{\Gamma(3.4)}{\Gamma(2.4)}\left(\frac{1.2}{2.2}\right)^{2.4}\left(\frac{1}{2.2}\right) = 0.2546884 \\ \Pr(N(1)=2) &= \frac{\Gamma(4.4)}{\Gamma(2.4)2!}\left(\frac{1.2}{2.2}\right)^{2.4}\left(\frac{1}{2.2}\right)^2 = 0.1968047 \\ \Pr(N(1)=3) &= \frac{\Gamma(5.4)}{\Gamma(2.4)3!}\left(\frac{1.2}{2.2}\right)^{2.4}\left(\frac{1}{2.2}\right)^3 = 0.1312031. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
M_{N(2)-N(1)}(r) &= E\left[e^{(N(2)-N(1))r}\right] \\
&= E_{\lambda}\left[E\left[e^{(N(2)-N(1))r}\right]|\Lambda\right] \\
&= E_{\lambda}\left[e^{\lambda(e^{r}-1)}\right] \\
&= M_{\lambda}\left(t\left(e^{1}-1\right)\right) \\
&= M_{N(1)}(r).
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient les mêmes valeurs que celles calculées en 6a.

(c) On présente deux approches.

i. On observe

$$\begin{aligned}
f_{N(t),N(t+s)-N(t)}(k_1,k_2) &= \int_0^{\infty} \Pr(N(t)=k_1|\Lambda=\lambda)\Pr(N(t+s)-N(t)=k_2|\Lambda=\lambda)f_{\Lambda}(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^{\infty} \frac{(t\lambda)^{k_1}e^{-t\lambda}}{k_1!}\frac{(s\lambda)^{k_2}e^{-s\lambda}}{k_2!}\frac{\beta^{\alpha}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{t^{k_1}s^{k_2}\beta^{\alpha}\Gamma(k_1+k_2+\alpha)}{k_1!k_2!\Gamma(\alpha)\left(\beta+t+s\right)^{k_1+k_2+\alpha}}\int_0^{\infty}\frac{\left(\beta+t+s\right)^{k_1+k_2+\alpha}\lambda^{k_1+k_2+\alpha-1}e^{-\lambda(\beta+t+s)}}{\Gamma(k_1+k_2+\alpha)}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{t^{k_1}s^{k_2}\beta^{\alpha}\Gamma(k_1+k_2+\alpha)}{k_1!k_2!\Gamma(\alpha)\left(\beta+t+s\right)^{k_1+k_2+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$f_{N(1),N(2)-N(1)}(k_1,k_2) = \frac{\beta^{\alpha}\Gamma(k_1+k_2+\alpha)}{k_1!k_2!\Gamma(\alpha)\left(\beta+2\right)^{k_1+k_2+\alpha}}.$$

On calcule

k_1	k_2	$f_{N(1),N(2)-N(1)}(k_1,k_2)$
0	0	0.09498938
0	1	0.07124203
1	0	0.07124203
2	0	0.03784733
0	2	0.03784733
2	1	0.05204008
1	2	0.05204008

ii. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{N(t),N(t+s)-N(t)}(r_1,r_2) &= E\left[r_1^{N(t)}r_2^{N(t+s)-N(t)}\right] \\
&= E_{\lambda}\left[E\left[r_1^{N(t)}r_2^{N(t+s)-N(t)}|\Lambda\right]\right] \\
&= E_{\Lambda}\left[e^{\Lambda t(r_1-1)}e^{\Lambda s(r_2-1)}\right] \\
&= \mathcal{M}_{\Lambda}\left(r_1t+r_2s-t-s\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{\beta}\left(r_1t+r_2s-t-s\right)\right)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\mathcal{P}_{N(1),N(2)-N(1)}(r_1,r_2) = \left(1 - \frac{1}{\beta}\left(r_1 + r_2 - 2\right)\right)^{-\alpha}.$$

On calcule

$$f_{N(1),N(2)-N(1)}(k_1,k_2) = \left.\frac{\partial^{k_1}\partial^{k_2}}{\partial r_1^{k_1}\partial r_2^{k_2}}\frac{1}{k_1!k_2!}\mathcal{P}_{N(1),N(2)-N(1)}(r_1,r_2)\right|_{r_1,=0,r_2=0}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} E[N(2)|N(1)=k_1] &= E\left[E_\Lambda\left[N(2)|N(1)=k_1,\Lambda\right]|N(1)=k_1\right] \\ &= E\left[E_\Lambda\left[N(2)-N(1)+N(1)|N(1)=k_1,\Lambda\right]|N(1)=k_1\right] \\ &= E[k_1 + (2-1)\times\Lambda|N(1)=k_1] \\ &= k_1 + E[\Lambda|N(1)=k_1]. \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} E[\Lambda|N(t)=n] &= \frac{\int_0^\infty x f_\Lambda(x)\frac{e^{-xt}(xt)^n}{n!}\mathrm{d}x}{\int_0^\infty f_\Lambda(x)\frac{e^{-xt}(xt)^n}{n!}\mathrm{d}x} \\ &= \frac{\int_0^\infty x\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}e^{-xt}(xt)^n\mathrm{d}x}{\int_0^\infty \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}e^{-xt}(xt)^n\mathrm{d}x}. \end{aligned}$$

Le résultat des deux intégrales est 1. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} E[\Lambda|N(t)=n] &= \frac{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(\beta+t)^{\alpha+n+1}}\int_0^\infty \frac{(\beta+t)^{\alpha+n+1}x^{\alpha+n}e^{x(\beta_t)}}{\Gamma(\alpha+n+1)}\mathrm{d}x}{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{(\beta+t)^{\alpha+n}}\int_0^\infty \frac{(\beta+t)^{\alpha+n}x^{\alpha+n+1}e^{-x(\beta+t)}}{\Gamma(\alpha+n)}\mathrm{d}x} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)(\beta+t)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n)(\beta+t)^{\alpha+n+1}} \\ &= \frac{\alpha+n}{\beta+t}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$E[N(2)|N(1)=k_1] = k_1 + \frac{\alpha+k_1}{\beta+1}$$

(e) On a

$$\begin{aligned} \Pr(T_1 > t) &= \Pr(N(t)=0) \\ &= \left(\frac{1.2}{1.2+t}\right)^{2.4}. \end{aligned}$$

On remarque que $W \sim Pareto(2.4, 1.2)$.

(f) On a

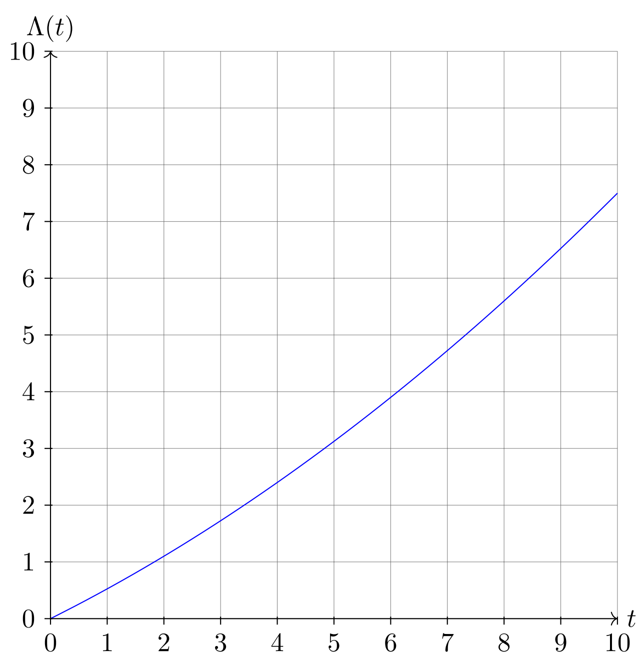
$$\begin{aligned}
\Pr(W_1 > t_1, W_2 > t_2) &= E_\lambda\left[\Pr(W_1 > t_1, W_2 > t_2|\Lambda = \lambda)\right] \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda t_2} f_{\Lambda(\lambda)} \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda t_2} \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda\beta}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{\beta^\alpha}{(\beta + t_1 + t_2)^\alpha} \int_0^\infty \frac{(\beta + t_1 + t_2)^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda(\beta+t_1+t_2)}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{d}\lambda \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta + t_1 + t_2}\right)^\alpha .
\end{aligned}$$

Le résultat correspond à une loi Pareto bivariée et n'est pas égal au produit des deux fonctions de survie univariées.

7. (a) On a

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &= \int_0^t \lambda(s) \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t a + bs \mathrm{d}s \\
&= as + b\frac{s^2}{2}\bigg|_0^t \\
&= at + \frac{bt^2}{2}.
\end{aligned}$$

(b) On a $N(t) \sim Poisson(\Lambda(t))$ pour $t > 0$. Alors, on obtient $E[N(t)] = \Lambda(t) = at + \frac{bt^2}{2}$. On observe



(c) On a

$$\begin{aligned}E[N(t+1)-N(t)] &= E[N(t+1)]-E[N(t)] \\ &= \Lambda(t+1)-\Lambda(t) \\ &= a(t+1)+\frac{b(t+1)^2}{2}-at-\frac{bt^2}{2} \\ &= a+b\frac{2t+1}{2} \\ &= 0.5+0.025(2t+1)\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}E[N(1)-N(0)] &= 0.5+0.025\times 1=0.525; \\ E[N(11)-N(10)] &= 0.5+0.025\times 21=1.025; \\ E[N(21)-N(20)] &= 0.5+0.025\times 41=1.525.\end{aligned}$$

On remarque que l'espérance de l'accroissement augmente linéairement avec le temps.

(d) Le processus de Poisson non-homogène possède la propriété d'accroissements indépendants. Alors, on obtient

$$\begin{aligned}E[N(t+s)|N(s)=k] &= E[N(t+s)-N(s)+N(s)|N(s)=k] \\ &= E[N(t+s)-N(s)]+k \\ &= at+b\frac{2ts+t^2}{2}+k.\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}E[N(6)|N(3)=2] &= 3\times 0.5+0.05\times\frac{2\times 3\times 3+3^2}{2}+2 \\ &= 2.175+2 \\ &= 4.175.\end{aligned}$$

(e) Le processus de Poisson non-homogène possède la propriété d'accroissements indépendants. Alors, on obtient

$$\begin{aligned}\Pr\left(N(t+s)=k_2|N(s)=k_1\right) &= \Pr(N(t+s)-N(s)=k_2-k_1) \\ &= \frac{(\Lambda(t+s)-\Lambda(s))^{k_2-k_1}\, e^{-(\Lambda(t+s)-\Lambda(s))}}{(k_2-k_1)!} \\ &= \frac{\left(at+b\frac{2ts+t^2}{2}\right)^{k_2-k_1} e^{-at-b\frac{2ts+t^2}{2}}}{(k_2-k_1)!},\ \text{pour } k_2\geq k_1.\end{aligned}$$

8. (a) On a $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$. Alors, on déduit

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta t)^{\tau} \\ &= \tau\beta(\beta t)^{\tau-1}\end{aligned}$$

(b) On a $\lambda(t)=\tau\beta(\beta t)^0=\tau\beta$, qui correspond à la fonction d'intensité d'un processus de Poisson homogène.

(c) Pour $\tau \in (0,1)$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t) < 0,$$

alors, on observe une décroissance de l'intensité pour t croissant.

(d) Pour $\tau > 1$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t) > 0,$$

alors, on observe une croissance de l'intensité pour t croissant.

(e) Par la propriété d'accroissements indépendants du processus de Poisson non-homogène, on a

$$N(t+s) - N(t) \sim Poisson(\Lambda(t+s) - \Lambda(t)).$$

Alors, on obtient

$$\Pr(N(t+s) - N(t) = k) = \frac{(\Lambda(t+s) - \Lambda(t))^k e^{-(\Lambda(t+s)-\Lambda(t))}}{k!}$$

(f) Par la propriété d'accroissements indépendants du processus de Poisson non-homogène, on a

$$\begin{aligned}\Pr(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2) &= \Pr(N(t_1) = k_1) \times \Pr(N(t_2) - N(t_1) = k_2) \\ &= \frac{\Lambda(t_1)^{k_1} e^{-\lambda(t_1)}}{k_1!} \times \frac{(\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1))^{k_2} e^{-(\Lambda(t_2)-\Lambda(t_1))}}{k_2!}\end{aligned}$$

(g) Soit $t_0 = 0$, avec $\Lambda(0) = 0$. Par la propriété d'accroissements indépendants du processus de Poisson non-homogène, on a

$$\begin{aligned}\Pr(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, N(t_3) - N(t_2) = k_3) &= \prod_{i=1}^{3} \Pr(N(t_i) - N(t_{i-1}) = k_i) \\ &= \prod_{i=1}^{3} \frac{(\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1}))^{k_i} e^{-(\Lambda(t_i)-\Lambda(t_{i-1}))}}{k_i!}\end{aligned}$$

(h) On a

$$\begin{aligned}\Pr(N(t) = 0) &= \frac{\Lambda(t)^{0e^{-\Lambda(t)}}}{0!} \\ &= e^{-\Lambda(t)} \\ &= e^{-(\beta t)^\tau},\end{aligned}$$

qui correspond à la fonction de survie d'une distribution de Weibull. On déduit $W_1 \sim Weibull(\tau, \beta)$.

(i) Par la propriété d'accroissements indépendants du processus de Poisson non-homogène, on a

$$\begin{aligned}\Pr(N(y+t_i) - N(t_i) = 0 | N(t_i) = i) &= \Pr(N(y+t_i) - N(t_i) = 0) \\ &= \frac{(\Lambda(y+t_i) - \Lambda(t_i))^0 e^{-(\Lambda(y+t_i)-\Lambda(t_i))}}{0!} \\ &= e^{-((\beta(y+t_i))^\tau - (\beta t_i)^\tau)}.\end{aligned}$$

(j) On a

$$\begin{aligned}
T_1^{(1)} &= \frac{1}{\beta}\left(-\ln\left(1-U_1^{(1)}\right)\right)^{\frac{1}{\tau}} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\ln\left(1-0.87\right)\right)^{\frac{1}{1.5}} \\
&= 0.8043063.
\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient $W_{i+1}^{(1)}$ en trouvant la solution à l'égalité

$$\begin{aligned}
U_i^{(1)} &= 1-\exp\left\{-\left((\beta(y+t_i))^{\tau}-(\beta t_i)^{\tau}\right)\right\} \\
(y+t_i)^{\tau}-t_i^{\tau} &= -\frac{1}{\beta^{\tau}}\ln\left(1-U_i^{(1)}\right) \\
y &= \left(t_i^{\tau}-\frac{1}{\beta^{\tau}}\ln\left(1-U_i^{(1)}\right)\right)^{\frac{1}{\tau}}-t_i.
\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}
W_2^{(1)} &= \left(0.8043063^{1.5}-\frac{1}{2^{1.5}}\ln\left(1-0.35\right)\right)^{\frac{1}{1.5}}-0.8043063 = 0.1034816; \\
T_2^{(1)} &= 0.8043063+0.1034816 = 0.9077879; \\
W_2^{(1)} &= \left(0.9077879^{1.5}-\frac{1}{2^{1.5}}\ln\left(1-0.92\right)\right)^{\frac{1}{1.5}}-0.9077879 = 0.5204273; \\
T_3^{(1)} &= 0.9077879+0.5204273 = 1.428215.
\end{aligned}$$

9. (a) On a

$$\begin{aligned}
F_{W_s}(t) &= \Pr(W_s \le t) \\
&= \Pr(W-s \le t | W > s) \\
&= \Pr(W \le t+s | W > s) \\
&= \frac{\Pr(W \le t+s, W > s)}{\Pr(W > s)} \\
&= \frac{F_W(t+s)-F_W(s)}{\overline{F}_W(s)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
F_{W_s}(t) &= \frac{1-e^{-(\beta(t+s))^{\tau}}-1+e^{-(\beta s)^{\tau}}}{e^{-(\beta s)^{\tau}}} \\
&= \frac{e^{-(\beta s)^{\tau}}-e^{-(\beta(t+s))^{\tau}}}{e^{-(\beta s)^{\tau}}} \\
&= 1-\frac{e^{-(\beta(t+s))^{\tau}}}{e^{-(\beta s)^{\tau}}}.
\end{aligned}$$

Pour trouver $F_{W_s}^{-1}(u)$, on isole la variable t dans l'égalité $F_{W_s}(t) = u$. On a

$$\begin{aligned} F_{W_s}(t) &= u \\ \log(1-u) &= -(\beta(t+s))^{\tau} + (\beta s)^{\tau} \\ (\beta s)^{\tau} - \log(1-u) &= (\beta(t+s))^{\tau} \\ \frac{1}{\beta}\left((\beta s)^{\tau} - \log(1-u)\right)^{\frac{1}{\tau}} - s &= t. \end{aligned}$$

On conclut

$$F_{W_s}^{-1}(u) = \frac{1}{\beta}\left((\beta s)^{\tau} - \log(1-u)\right)^{\frac{1}{\tau}} - s.$$

(b) On calcule

$$\begin{aligned} \text{H1}: F_{W_5}^{-1}(0.01) &= 0.001004933 \\ \text{H1}: F_{W_5}^{-1}(0.99) &= 0.441063332 \\ \text{H2}: F_{W_5}^{-1}(0.01) &= 0.0003215797 \\ \text{H2}: F_{W_5}^{-1}(0.99) &= 0.1412651354 \\ \text{H3}: F_{W_5}^{-1}(0.01) &= 0.0007321749 \\ \text{H3}: F_{W_5}^{-1}(0.99) &= 0.3269362278. \end{aligned}$$

10. On a

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= E\left[\sum_{j=1}^{\infty} B_j 1_{\{T_j \le t\}}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} E\left[B_j 1_{\{T_j \le t\}}\right] \\ &\overset{\text{ind}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} E\left[B_j\right] E\left[1_{\{T_j \le t\}}\right]. \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $B_1 \sim B_2 \sim \cdots \sim B$, on a

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= E\left[B\right] \sum_{j=1}^{\infty} E\left[1_{\{T_j \le t\}}\right] \\ &= E\left[B\right] E\left[\sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{T_j \le t\}}\right] \\ &= E\left[B\right] E[N(t)]. \end{aligned}$$

11. (a) i. Soit k_i, le nombre de sinistres dans l'année 2017 pour le contrat i. Puisque les processus sont

identiquement distribués, on a

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{20} \Pr(N_i = k_i) \\
&= \prod_{i=1}^{20} \Pr(N(1) = k_i) \\
&= \prod_{i=1}^{20} \frac{\lambda^{k_i} e^{-\lambda}}{k_i!}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
l(\lambda) &= \log L(\lambda) \\
&= \sum_{i=1}^{20} \log\left(\frac{\lambda^{k_i} e^{-\lambda}}{k_i!}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{20} k_i \log\lambda - \lambda - \log(k_i!).
\end{aligned}$$

ii. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} l(\lambda) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \sum_{i=1}^{20} k_i \log\lambda - \lambda - \log(k_i!) \\
&= \sum_{i=1}^{20} \frac{k_i}{\lambda} - 1.
\end{aligned}$$

On obtient l'estimateur du maximum de vraisamblance :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} l(\hat\lambda) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{k_i}{\hat\lambda} - 1\right) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{20} \frac{k_i}{\hat\lambda} - 20 &= 0 \\
\hat\lambda &= \frac{\sum_{i=1}^{20} k_i}{20}.
\end{aligned}$$

iii. On calcule

$$\hat\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{20} k_i}{20} = 0.6.$$

(b) Pour chaque contrat i, on sait qu'il est exposé pendant un intervalle de temps (# de mois) durant l'année 2017. On note cette intervalle A_i et l'accroissement du processus $\underline{N}_i$ par $N(A_i)$ pour $i = 1, \ldots, 20$. On note aussi que longueur de l'intervalle A_i est $\frac{m_i}{12}$, où m_i est le nombre de mois. Par exemple, pour $m_i = 7$, comme on n'a pas précisé le début du processus (soit la date d'émission du contrat), $N_i(A_i) = N_i\left(s, s + \frac{m_i}{12}\right) \sim N_i\left(\frac{m_i}{12}\right)$ pour $i = 1, \ldots, 20$, et puisque les processus sont des processus de Poisson, pourvu que $\left(s, s + \frac{m_i}{12}\right)$ se situe dans l'année 2017.

i. On a

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{20} \Pr\left(N\left(\frac{m_i}{12}\right) = k_i\right) \\ &= \prod_{i=1}^{20} \frac{\left(\frac{m_i}{12}\lambda\right)^{k_i} e^{-\frac{m_i}{12}\lambda}}{k_i!}. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} l(\lambda) &= \log L(\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^{20} \log\left(\frac{\left(\frac{m_i}{12}\lambda\right)^{k_i} e^{-\frac{m_i}{12}\lambda}}{k_i!}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{20} k_i \log\left(\frac{m_i}{12}\lambda\right) - \frac{m_i}{12}\lambda - \log(k_i!). \end{aligned}$$

ii. On a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} l(\lambda) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \sum_{i=1}^{20} k_i \log\left(\frac{m_i}{12}\lambda\right) - \frac{m_i}{12}\lambda - \log(k_i!) \\ &= \sum_{i=1}^{20} \frac{12k_i}{m_i\lambda} - \frac{m_i}{12}. \end{aligned}$$

On obtient l'estimateur du maximum de vraisamblance :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} l(\hat{\lambda}) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{12k_i}{m_i\hat{\lambda}} - \frac{m_i}{12}\right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{20} \frac{12k_i}{m_i\hat{\lambda}} &= \sum_{i=1}^{20} \frac{m_i}{12} \\ \hat{\lambda} &= \frac{\sum_{i=1}^{20} \frac{12k_i}{m_i}}{\sum_{i=1}^{20} \frac{m_i}{12}}. \end{aligned}$$

iii. On calcule

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{20} \frac{12k_i}{m_i}}{\sum_{i=1}^{20} \frac{m_i}{12}} = 1.270588.$$

(c) Le paramètre $\hat{\lambda}$ est plus du double lorsqu'on tient compte de l'information de l'exposition du contrat. Alors, il est important d'utiliser cette information afin de modéliser la fréquence des sinistres. Omettre cette information va causer une sous-estimation de l'espérance, la variance, la VaR_κ, la $TVaR_\kappa$, etc. de la fréquence des sinistres. Important : en ayant recours au processus de Poisson, on a une modélisation plus adéquate de la dynamique de la survenance des sinistres.

12. On remarque que

$$F_W(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} = H(x; m, \lambda).$$

Alors,

$$F_{T_k}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{mk-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
\Pr(N(t)=k) &= F_{T_k}(t) - F_{T_{k+1}}(t) \\
&= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{mk-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} - 1 + e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{m(k+1)-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{m(k+1)-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{mk-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{j=mk}^{m(k+1)-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Pour $m = 1$, on obtient

$$\Pr(N(t)=k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

qui correspond à la fonction de densité d'une loi Poisson avec paramètre λt.

8.2 Exercices informatiques

1. (a) Les données sont groupées par année. De plus, on a

$$N(t+1) - N(t) \sim Poisson(\Lambda(t+1) - \Lambda(t)).$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
\Pr(N(t+1) - N(t) = k) &= \frac{(\Lambda(t+1) - \lambda(t))^k \, e^{-(\Lambda(t+1)-\lambda(t))}}{k!} \\
&= \frac{\left(a + b\frac{2t+1}{2}\right)^k e^{-a-b\frac{2t+1}{2}}}{k!}
\end{aligned}$$

Soit k_i, le nombre de sinistres dans l'année i. Alors, la fonction de vraisemblance est

$$\begin{aligned}
L(a,b) &= \prod_{t=0}^{33} \Pr(N(t+1) - N(t) = k_i) \\
&= \prod_{t=0}^{33} \frac{\left(a + b\frac{2t+1}{2}\right)^{k_i} e^{-a-b\frac{2t+1}{2}}}{k_i!}
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &= \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t cds^{d-1}\mathrm{d}s \\
&= ct^d.
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\Pr(N(t+1)-N(t)=k) &= \frac{(\Lambda(t+1)-\Lambda(t))^k\, e^{-(\Lambda(t+1)-\Lambda(t))}}{k!}\\ &= \frac{\left(c(t+1)^d-ct^d\right)^k e^{c(t+1)^d-ct^d}}{k!}.\end{aligned}$$

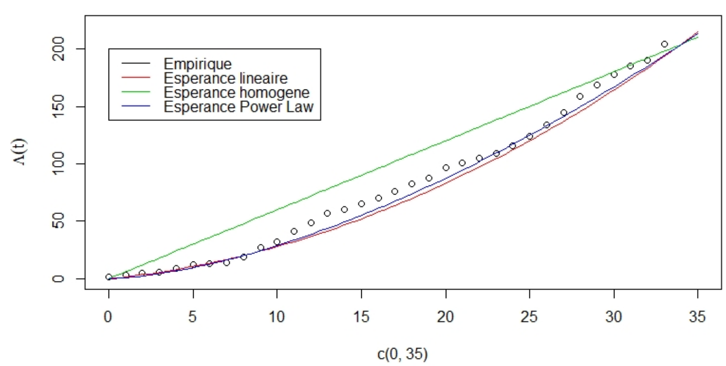
Soit k_i, le nombre de sinistres dans l'année i. Alors, la fonction de vraisemblance est

$$\begin{aligned}L(a,b) &= \prod_{t=0}^{33}\Pr(N(t+1)-N(t)=k_i)\\ &= \prod_{t=0}^{33}\frac{\left(c(t+1)^d-ct^d\right)^k e^{c(t+1)^d-ct^d}}{k!}.\end{aligned}$$

(c) Voir le code sur GitHub. On obtient $\hat{a}=1.482405$ et $\hat{b}=0.2657329$.

(d) Voir le code sur GitHub. On obtient $\hat{c}=0.7285231$ et $\hat{d}=1.5979333$.

(e) On effectue un test d'adéquation visuel.



(f) On remarque que la valeur de la fonction log-vraisemblance à son maximum est plus élevé pour $\lambda_1(t)$. Alors, vu qu'il y a le même nombre de paramètres dans le modèle, on conserve $\lambda_1(t)$. Sous $H_0, \underline{N}$ est un processus de Poisson homogène avec $\lambda = N(34)/34 = 6$. On obtient $R = 2(180.7496 - 161.5189) = 38.46141$. On rejette H_0.

(g) On calcule

$$\begin{aligned}E[N(t+1)-N(t)] &= \hat{a}+\hat{b}\times\frac{2t+1}{2};\\ E[N(35)-N(34)] &= 10.65021;\\ E[N(36)-N(35)] &= 10.91594;\\ E[N(37)-N(36)] &= 11.18167;\\ E[N(38)-N(37)] &= 11.44740;\\ E[N(39)-N(38)] &= 11.71314.\end{aligned}$$

2. Voir GitHub.

(a) On obtient

```
[[1]]
```

```
[1] 1.037761 1.772903 2.674721 4.101112 4.375332 4.704410 5.143990 5.920083
[9] 6.025891 6.501802 7.158603 7.892153 8.028874 9.627154

[[2]]
[1] 0.5238332 0.5956903 1.6003612 1.6451639 3.1624013 3.1858506 3.1982109
[8] 3.7222797 6.9686583

[[3]]
[1] 0.1620119 1.9493653 2.3644099 2.5629032 2.7666471 8.7811537 8.8290515
[8] 9.3775970

[[4]]
[1] 2.066145 3.611455 4.138437 4.463520 4.736074 5.484224 6.420353 8.505905
[9] 8.908503 9.200092

[[5]]
[1] 0.08199037 1.02370140 2.45486968 3.97019104 4.85463595 7.43795261 8.56962824
[8] 9.04775847
```

(b) On obtient

```
[1] 154.42324  47.37889 106.49716  69.56941  84.51802
```

(c) On obtient

```
[1] 229.9091
```

3. Voir GitHub.

(a) On obtient

```
[[1]]
[1] 0.6058539 1.3001210 1.9743361 3.0104860 4.7431419 5.4684949 6.0675886
[8] 9.5865471

[[2]]
[1] 2.601008 2.707365 5.529041 6.341799 6.782154 7.379557 8.060278 8.284004
[9] 9.821123

[[3]]
[1] 0.3383022 0.6463665 0.9493685 1.4136788 3.2788094 5.3592855 5.9831174
[8] 7.6191660 8.6259901 9.2435603

[[4]]
[1] 0.4605593 0.5217344 1.7513238 5.8100593 5.9878285 5.9924662 7.6203439
[8] 7.7297161 8.9686051

[[5]]
[1] 0.6910201 1.1128822 1.4487692 2.0998135 4.0511775 6.6254140 7.6349114
[8] 7.7427271 9.6291265 9.6654802
```

(b) On obtient

```
[1]  46.61325  60.10664  72.40908 138.82791 110.75973
```

(c) On obtient

```
[1] 229.1546
```

4. Voir GitHub.

(a) i. On a

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t 0.5 + 0.05t\mathrm{d}s \\ &= 0.5s + \frac{0.05s^2}{2}\Big|_{s=0}^{t} \\ &= 0.5t + \frac{0.05t^2}{2}.\end{aligned}$$

ii. Par la propriété des accroissements indépendants des processus de Poisson non-homogènes, on a $N(s+t) - N(s) \sim Poisson\left(\int_s^{s+t} \lambda(x)\mathrm{d}x\right)$. De plus,

$$\begin{aligned}\Pr(N(s+t) - N(s) = 0) &= \frac{\left(\int_s^{s+t} \lambda(x)\mathrm{d}x\right)^0 e^{-\int_s^{s+t} \lambda(x)\mathrm{d}x}}{0!} \\ &= e^{-\int_s^{s+t} \lambda(x)\mathrm{d}x} \\ &= e^{-(\Lambda(s+t)-\Lambda(s))}.\end{aligned}$$

iii. On isole pour t dans $F_s(t) = \kappa$. On a

$$\begin{aligned}\kappa &= 1 - e^{-(\Lambda(t+s)-\Lambda(t))} \\ -\ln(1-\kappa) &= \Lambda(t+s) - \Lambda(t) \\ t &= \Lambda^{-1}\left(\Lambda(s) - \ln(1-\kappa)\right).\end{aligned}$$

On déduit

$$F_s^{-1}(u) = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2b\left(as + \frac{bs^2}{2} - \ln(1-\kappa)\right)}}{a}.$$

On sélectionne la solution positive, i.e. celle avec le "+".

iv. On obtient

```
[[1]]
[1] 0.788335 1.887488 1.992177 2.353539 3.354100 3.880164 5.165495 5.348071
[9] 9.052432 9.865961

[[2]]
[1] 1.987074 7.453813 8.708033

[[3]]
[1] 1.841644 2.363387 3.603405 5.447404 7.581978 7.921373 8.835662 9.009300
[9] 9.113961

[[4]]
[1] 1.432789 2.107909 5.807282 6.921977 7.000768 7.179136 9.352436 9.387971

[[5]]
[1] 1.323576 3.625291 3.694326 3.772360 4.982451 5.237294 7.973371 9.553753
```

i. On a

$$f_V(u) = \frac{a + bv}{at + 0.5bt^2}, 0 < v < t.$$

ii. On déduit

$$F_V(v) = \begin{cases} \frac{av+0.5bv^2}{at+0.5bt^2} & ,0 < v \le t \\ 1 & ,v > t \end{cases}$$

iii. On isole pour t dans $F_V(v) = \kappa$. On a

$$\kappa = \frac{av + \frac{bv^2}{2}}{at + \frac{bt^2}{2}}$$

$$\frac{b}{2}v^2 + av - \kappa\left(at + \frac{bt^2}{2}\right) = 0$$

On déduit

$$F_s^{-1}(u) = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2b\kappa\left(at + \frac{bt^2}{2}\right)}}{b}$$

On sélectionne la solution positive, i.e. celle avec le "+".

iv. On obtient

```
[[1]]
[1] 0.8708609 2.6186403 3.7954551 5.4634078 5.5658041 6.7936791

[[2]]
[1] 4.787995 6.249765 7.302069 9.687468

[[3]]
[1] 1.334948 2.060244 3.342797 3.461833 4.084185 6.148640 6.305558 6.447131
[9] 7.036841 7.420236 7.927262 8.126637 8.488059 8.668693

[[4]]
[1] 0.4951925 0.6684947 0.7541635 0.9266187 1.9335814 2.3506970 5.7181884
[8] 5.8699098 6.5620584 6.7180598 8.1276120 8.9414810

[[5]]
[1] 0.0429545 0.9877478 1.5493058 2.7669262 4.8840627 6.7222862 6.7264457
[8] 6.7499727 8.2178891 8.2285988 9.7198832
```

5. (a) Les années suivantes ont un sinistre :
1909 1916 1923 1934 1936 1937 1950 1954 1955 1961 1972 1974 1983 1987 1993 1995 1997 1999.
Les années suivantes ont deux sinistres :
1920 1948 1996 2004 2005.
Les autres années ont aucun sinistre.

(b) i. Les données sont groupées par année. Alors, on a

$$\Pr(N(t+1) - N(t) = k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}, t = 0, \ldots, 99.$$

Soit k_t, le nombre de sinistres qui sont arrivés dans l'année t. On remarque que la fonction de vraisemblance est

$$\begin{aligned} L(a) &= \prod_{t=0}^{99} \Pr(N(t+1) - N(t) = k) \\ &= \prod_{t=0}^{99} \frac{a^{k_t} e^{-a}}{k_t!} \end{aligned}$$

ii. Maximiser la fonction de vraisemblance est équivalant à maximiser la fonction de log-vraisemblance. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
l(a) &= \ln\left(\prod_{t=0}^{99} \frac{a^{k_t} e^{-a}}{k_t!}\right) \\
&= \sum_{t=0}^{99} \left(k_t \log(a) - a - \log(k_t!)\right); \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} l(a) &= \sum_{t=0}^{9} \left(\frac{k_t}{a} - 1\right); \\
l'(\hat{a}) &= 0 \\
\frac{\sum_{t=0}^{99} k_t}{\hat{a}} &= 100 \\
\hat{a} &= \frac{\sum_{t=1}^{100} k_t}{100} \\
&= 0.28.
\end{aligned}$$

iii. Voir GitHub.

iv. On a $N(101) - N(100) \sim Poisson(a)$ et $E\left[N(101) - N(100)\right] = a = 0.28$. De plus, $N(111) - N(110) \sim Poisson(a)$ et $E\left[N(111) - N(110)\right] = a = 0.28$.

v. La distribution du temps inter-sinistres est $W \sim Exp(a)$, donc $E[W] = \frac{1}{a} = 3.571429$.

vi. La distribution du nombre de sinistres en 2018 est $N(110) - N(109) \sim Poisson(a)$. Alors, on calcule

$$\begin{aligned}
\Pr(N(110) - N(109) = 0) &= e^{-0.28} = 0.755783741 \\
\Pr(N(110) - N(109) = 1) &= \frac{0.28^1 e^{-0.28}}{1!} = 0.211619448 \\
\Pr(N(110) - N(109) = 2) &= \frac{0.28^2 e^{-0.28}}{2!} = 0.029626723 \\
\Pr(N(110) - N(109) = 3) &= \frac{0.28^3 e^{-0.28}}{3!} = 0.002765161.
\end{aligned}$$

(c) On déduit

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &= \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s \\
&= at + \frac{bt^2}{2}; \\
\Lambda(t+1) - \Lambda(t) &= a + b\frac{2t+1}{2}
\end{aligned}$$

i. Les données sont groupées par année. Alors, par la propriété d'accroissements indépendants du processus de Poisson non-homogène, on a

$$\Pr(N(t) - N(t-1) = k) = \frac{(\Lambda(t+1) - \Lambda(t))^k e^{-(\Lambda(t+1) - \Lambda(t))}}{k!}, t = 1, \ldots, 100.$$

On obtient

$$\begin{aligned} L(a,b) &= \prod_{t=0}^{99} \Pr(N(t+1)-N(t)=k) \\ &= \prod_{t=0}^{99} \frac{(\Lambda(t+1)-\Lambda(t))^k e^{-(\Lambda(t)-\Lambda(t-1))}}{k!} \\ &= \prod_{t=0}^{99} \frac{\left(a+b\frac{2t+1}{2}\right)^{k_t} e^{-a-b\frac{2t+1}{2}}}{k_t!} \end{aligned}$$

ii. On optimise numériquement. On obtient $\hat{a} = 0.190964243, \hat{b} = 0.001780764$.
iii. Voir GitHub.
iv. Le cas $b = 0$ correspond au processus de Poisson homogène. On a $R = 2\left(-63.05687 - (-67.10877)\right) = 8.1038$. De plus, $w_{0.05,1} = 3.841459$. Alors, on rejette $H_0 : b = 0$.
v. On a $N(101) - N(100) \sim Poisson(a + b\frac{2\times 100-1}{2})$ et $E[N(101) - N(100)] = a + b\frac{2\times 100-1}{2} = 0.3681503$. Ensuite, $N(111) - N(110) \sim Poisson(a + b\frac{2\times 110-1}{2})$ et $E[N(111) - N(110)] = a + b\frac{2\times 110-1}{2} = 0.3859579$.

6. Voir GitHub. Pour H1, on a

$$\begin{aligned} m(1) &= 5; \\ E[N(1)] &= 5; \\ Var(N(1)) &= 5; \\ VaR_{0.9}(N(1)) &= 8; \\ VaR_{0.99}(N(1)) &= 11; \\ N &= 2. \end{aligned}$$

Pour H2, on obtient

$$\begin{aligned} m(1) &= 9.00965686783198; \\ E[N(1)] &= 9.00965685476032; \\ Var(N(1)) &= 51.7451193284051; \\ VaR_{0.9}(N(1)) &= 19; \\ VaR_{0.99}(N(1)) &= 31; \\ N &= 2. \end{aligned}$$

Pour H3, on a

$$\begin{aligned} m(1) &= 4.59999999287751; \\ E[N(1)] &= 4.59999999287751; \\ Var(N(1)) &= 1.08000012741159; \\ VaR_{0.9}(N(1)) &= 6; \\ VaR_{0.99}(N(1)) &= 7; \\ N &= 3. \end{aligned}$$

7. Voir GitHub. Pour H1, on a

$$\begin{aligned} \Pr(N(1)=0) &= \Pr(W_1 > 1) \\ &= 1 - F_{W_1}(1) \\ &= 0.1353353. \end{aligned}$$

Pour H2, on obtient

$$\begin{aligned}
\Pr(N(1)=0) &= \texttt{0.1353353} \\
F_{T_k}(1), k=1,\ldots,5 &= \texttt{0.135457 0.293101 0.451136 0.594606 0.713940 0.806594} \\
f_{N(1)}(t), k=1,\ldots,5 &= \texttt{0.135457 0.157644 0.158035 0.143470 0.119334 0.092654} \\
E[\min(N(1),5)] &= \texttt{1.84473}.
\end{aligned}$$

Pour H3, on calcule

$$\begin{aligned}
\Pr(N(1)=0) &= \texttt{0.0003354626} \\
F_{T_k}(1), k=1,\ldots,5 &= \texttt{0.088841 0.448287 0.794465 0.949601 0.991214 0.998862} \\
f_{N(1)}(t), k=1,\ldots,5 &= \texttt{0.088841 0.359446 0.346178 0.155136 0.041613 0.007648} \\
E[\min(N(1),5)] &= \texttt{1.7219029}.
\end{aligned}$$

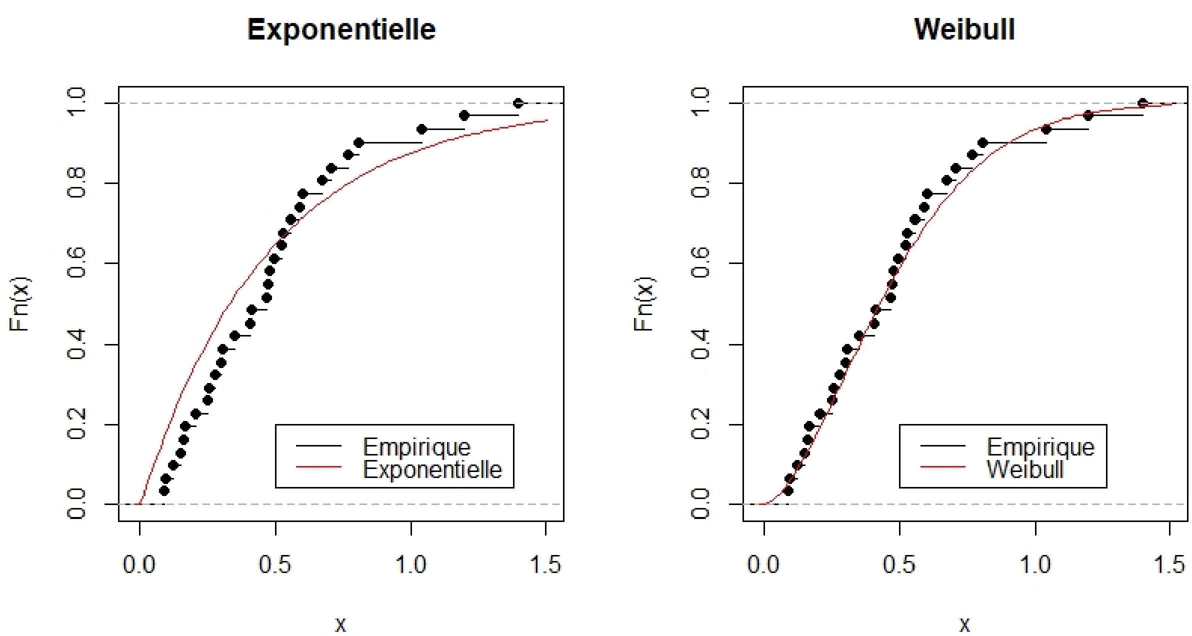
8. Voir GitHub. Pour H1, on obtient

$$\hat{\lambda} = 0.4785329; \beta = \frac{1}{0.4785329} = 2.08972.$$

Pour H2, on a

$$\hat{\tau} = 1.6094183, \hat{\beta} = 0.5364452.$$

On obtient le graphique suivant :



On obtient

$$R = 2(-3.393758 - (-29.94675)) = 53.10598$$

avec une valeur critique de $Q_{0.95,1} = 3.841459$. Alors, on rejette H0.

Enfin, on calcule pour H1 la probabilité que la prochaine année a aucun sinistre. Par la propriété sans mémoire de la loi Exponentielle, on obtient

$$\begin{aligned}\Pr(N(15,16]=0) &= \Pr(W>1)\\ &= e^{-0.4785329}\\ &= 0.6196919.\end{aligned}$$

Pour H2, on calcule

$$\Pr(N(15,16]=0|T_{31}) = \Pr(W^{'}>1|T_{31}=14.86),$$

où $W^{'} = W_{32}-0.16548|W_{32}>0.16548$. On obtient

$$\begin{aligned}\Pr(N(15,16]=0|T_{31}) &= \Pr(W_{32}-0.16548>1|W_{32}>0.16548)\\ &= \frac{\Pr(W_{32}>1.16548)}{\Pr(W_{32}>0.16548)}\\ &= \frac{\Pr(W>1.16548)}{\Pr(W>0.16548)}\\ &= \frac{e^{-(1.864123\times 1.16548)^{1.609418}}}{e^{-(1.864123\times 0.16548)^{1.609418}}}\\ &= 0.03559798.\end{aligned}$$

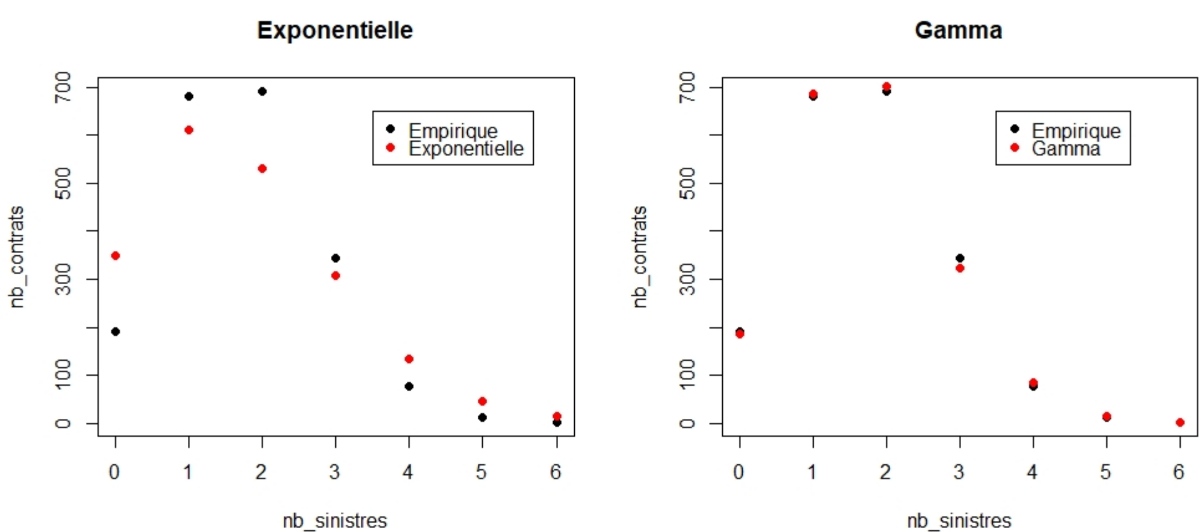
9. (a) Voir GitHub On a

$$\hat{\lambda} = \frac{681\times 1+692\times 2+345\times 3+77\times 4+13\times 5+2\times 5}{2000} = 1.7425.$$

(b) On obtient

$$\hat{\alpha} = 1.996179, \hat{\beta} = 3.976523.$$

On obtient la figure suivante :



(c) On calcule

$$R = 2(-2853.079-(-2967.628)) = 229.0977.$$

De plus, on a une valeur critique $Q_{0.95,1} = 3.841459$. Alors, on rejette H1.

10. Voir GitHub.

(a) Pour H1, on a $N(1) \sim Poisson(1 \times \beta)$, ce qui imprique $E[N(1)] = \beta = 5$. Pour H2 et H3, on applique l'expression

$$E[N(1)] = \sum_{k=1}^{\infty} E\left[1_{\{T_x \leq 1\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} F_{T_k}(1) \approx \sum_{k=1}^{1000} F_{T_k}(1).$$

On calcule

$$\begin{aligned} &\text{H2} : E[N(1)] = 9.009657 \\ &\text{H3} : E[N(1)] = 4.6. \end{aligned}$$

Ensuite, car le processus $\underline{N}$ et la suite $\underline{B}$ sont indépendants, on a

$$E[S(1)] = E[N(1)] \times E[B].$$

On calcule $E[B] = \frac{1.5}{1.5} = 1$. On conclut

$$\begin{aligned} &\text{H1} : E[S(1)] = 5 \\ &\text{H2} : E[S(1)] = 9.009657 \\ &\text{H3} : E[S(1)] = 4.6. \end{aligned}$$

(b) Pour H1, on a $Var(N(1)) = \beta = 5$. Pour H2 et H3, on a

$$\Pr(N(1) = k) = H(1; k\alpha, \beta) - H(1; (k+1)\alpha, \beta).$$

Alors, on calcule

$$E[N(1)^2] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N(1) = k) \times k^2 \approx \sum_{k=0}^{1000} \Pr(N(1) = k) \times k^2.$$

On obtient

$$\begin{aligned} &\text{H2} : Var(N(1)) = 51.74512 \\ &\text{H3} : Var(N(1)) = 1.08. \end{aligned}$$

(c) Puisque le processus $\underline{N}$ et la suite $\underline{B}$ sont indépendants, on a $Var(S(1)) = E[N(1)]Var(B) + Var(N(1))E[B]^2$. On calcule

$$\begin{aligned} &\text{H1} : Var(S(1)) = 5 \times \frac{1}{1.5} + 5 \times 1 = 8.333333 \\ &\text{H2} : Var(S(1)) = 9.009657 \times \frac{1}{1.5} + 51.74512 \times 1 = 57.75156 \\ &\text{H3} : Var(S(1)) = 4.6 \times \frac{1}{1.5} + 1.08 \times 1 = 4.146667. \end{aligned}$$

(d) On a

$$F_{S(1)}(x) = \Pr(N(1) = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N(1) = k) H(x; k\alpha, \beta) \approx \Pr(N(1) = 0) + \sum_{k=1}^{1000} \Pr(N(1) = k) H(x; k\alpha, \beta).$$

On calcule

$$\begin{aligned}
&\text{H1 : } F_{S(1)}(10) = 0.9409411\\
&\text{H1 : } F_{S(1)}(20) = 0.9998608\\
&\text{H2 : } F_{S(1)}(10) = 0.6327523\\
&\text{H2 : } F_{S(1)}(20) = 0.9082880\\
&\text{H3 : } F_{S(1)}(10) = 0.9858791\\
&\text{H3 : } F_{S(1)}(20) = 0.9999989.
\end{aligned}$$

(e) On obtient

$$\begin{aligned}
&\text{H1 : } VaR_{0.99}(S(1)) = 13.31307\\
&\text{H2 : } VaR_{0.99}(S(1)) = 32.96323\\
&\text{H3 : } VaR_{0.99}(S(1)) = 10.42698.
\end{aligned}$$

(f) On a

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.99}(S(1)) &= \frac{1}{1-0.99}\sum_{k=1}^{\infty} k \times \overline{H}(VaR_{0.99}(S(1)); k\alpha+1, \beta)\\
&\approx \frac{1}{1-0.99}\sum_{k=1}^{1000} k \times \overline{H}(VaR_{0.99}(S(1)); k\alpha+1, \beta).
\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}
&\text{H1 : } TVaR_{0.99}(S(1)) = 14.95923\\
&\text{H2 : } TVaR_{0.99}(S(1)) = 38.11816\\
&\text{H3 : } TVaR_{0.99}(S(1)) = 11.59265.
\end{aligned}$$

Chapitre 9

Méthodes récursives d'agrégation

9.1 Exercices traditionnels

1. On a

$$\begin{aligned}
f_Y(0) &= P_Y(0) \\
&= P_M(P_B(0)) \\
&= \left(\frac{q}{1-(1-q)f_B(0)}\right)^r \\
&= \left(\frac{q}{1-(1-q)\times 0}\right)^r \\
&= q^r \\
&= 0.8705505632961241.
\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
f_X(3000) &= \frac{\sum_{j=1}^{3}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_X((3-j)\times 1000)}{1-(1-q)f_B(0)} \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(1-0.5+\frac{(1-0.5)(0.2-1)j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_X((3-j)\times 1000) \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(0.5-0.4\frac{j}{3}\right) f_B(j\times 1000) f_X((3-j)\times 1000),
\end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned}
f_X(3000) &= \left(0.5 - \frac{0.4}{3}\right) f_B(1000) f_X(2000) + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 2}{3}\right) f_B(2000) f_X(1000) + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 3}{3}\right) f_B(3000) f_X(0) \\
&= \left(0.5 - \frac{0.4}{3}\right) 0.25 \times 0.01795511 + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 2}{3}\right) 0.25 \times 0.75 \times \times 0.02176376 + \\
&\quad \left(0.5 - \frac{0.4 \times 3}{3}\right) 0.25 \times 0.75^2 \times 0.87055056 \\
&= 0.01484017.
\end{aligned}$$

2. Le nombre total de sinistres pour la classe i est défini par la v.a. $N_{TOT}^{(i)}$.

   Le nombre total de sinistres pour le ptf est défini par la v.a. N_{TOT}.

   On a

$$\begin{aligned}
N_{TOT}^{(1)} &\sim Poisson\,(40 \times 0.04) \\
N_{TOT}^{(2)} &\sim BN\,(50 \times 2, 0.97) \\
N_{TOT}^{(3)} &\sim BN\,(30 \times 3, 0.99)
\end{aligned}$$

   On a

$$N_{TOT} = N_{TOT}^{(1)} + N_{TOT}^{(2)} + N_{TOT}^{(3)}$$

   On cherche

$$\Pr\left(N_{TOT} = k\right)$$

   pour $k = 0, 1, 2$

   On commence par calculer

$$\begin{aligned}
\Pr\left(N_{TOT}^{(1,2)} = k\right) &= \Pr\left(N_{TOT}^{(1)} + N_{TOT}^{(2)} = k\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \Pr\left(N_{TOT}^{(1)} = j\right) \Pr\left(N_{TOT}^{(2)} = k - j\right)
\end{aligned}$$

   pour $k = 0, 1, 2$.

   Pour $k = 0, 1, 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Pr\left(N_{TOT}^{(1,2)} = 0\right) &= 0.009600686 \\
\Pr\left(N_{TOT}^{(1,2)} = 1\right) &= 0.044163155 \\
\Pr\left(N_{TOT}^{(1,2)} = 2\right) &= 0.102007286
\end{aligned}$$

On poursuit en calculant

$$\begin{aligned}\Pr\left(N_{TOT}=k\right) &= \Pr\left(N_{TOT}^{(3)}+N_{TOT}^{(1,2)}=k\right)\\ &= \sum_{j=0}^{k}\Pr\left(N_{TOT}^{(3)}=j\right)\Pr\left(N_{TOT}^{(12)}=k-j\right)\end{aligned}$$

pour $k=0,1,2$. On obtient

$$\begin{aligned}\Pr\left(N_{TOT}=0\right) &= 0.003885704\\ \Pr\left(N_{TOT}=1\right) &= 0.021371375\\ \Pr\left(N_{TOT}=2\right) &= 0.058963623\\ \Pr\left(N_{TOT}=2\right) &= \text{À venir...}\end{aligned}$$

3. On a

$$S_{TOT}=X_1+...+X_{100}$$

On déduit que S_{TOT} obéit à une loi Binomiale négative composée où

$$S_{TOT}=\begin{cases}\sum_{j=1}^{N_{TOT}}B'_j, & N_{TOT}>0\\ 0, & N_{TOT}=0\end{cases}$$

avec les hypothèses usuelle, $N_{TOT}=M_1+...+M_{100}\sim BinNeg\left(r=100\times 0.2,\beta=0.2\right)$ et $B'\sim B$. On utilise l'algorithme de Panjer pour calculer $f_{S^{TOT}}\left(k\right)$ pour $k=0,1,2,3$ dont on reproduit les valeurs ci-dessous :

0	0.02608405
1	0.03477874
2	0.04521236
3	0.05363654

4. On définit

$$S_{TOT}=X_1+...+X_{100}$$

On peut exprimer la v.a. S_{TOT} sous la forme

$$S_{TOT}=\begin{cases}\sum_{j=1}^{N_{TOT}}B'_j, & N_{TOT}>0\\ 0, & N_{TOT}=0\end{cases}$$

avec les hypothèses usuelles. On sait que

$$N_{TOT}\sim Binom\left(100,q\right)$$

avec $q=0.005$ et

$$B'\in\{100000,200000\}$$

avec

$$\begin{aligned}f_{B'}\left(100000\right) &= \Pr\left(B'=100000\right)=0.6\\ f_{B'}\left(200000\right) &= \Pr\left(B'=200000\right)=0.4\end{aligned}$$

et

$$\Pr\left(B'=0\right)=0$$

On applique directement l'algorithme de Panjer pour calculer $f_{S_{TOT}}\left(100000k\right)$=$\Pr\left(S_{TOT}=100000k\right)$, $k=0,1,2,3,4$.

Calcul de $f_{S_{TOT}}(0)$:

$$\begin{aligned} f_{S_{TOT}}(0) &= P_{N_{TOT}}(f_{B'}(0)) \\ &= (1-q+qf_B(0))^{100} \\ &= (0.995)^{100} \end{aligned}$$

Calcul de $f_{S_{TOT}}(100000)$:

$$\begin{aligned} f_{S_{TOT}}(100000) &= \frac{\sum_{j=1}^{1}\left(-q+\frac{(n+1)q100000j}{100000}\right) f_{B'}(100000j) f_{S_{TOT}}(100000\,(1-k))}{1-q+qf_{B'}(0)} \\ &= \frac{\left(-0.005+\frac{101\times 0.005\times 100000}{100000}\right) f_{B'}(100000) f_{S_{TOT}}(0)}{1-0.005} \\ &= ... \end{aligned}$$

Calcul de $f_{S_{TOT}}(200000)$:

$$\begin{aligned} f_{S_{TOT}}(200000) &= \frac{\sum_{j=1}^{2}\left(-q+\frac{(n+1)q100000j}{200000}\right) f_{B'}(100000j) f_{S_{TOT}}(100000\,(2-k))}{1-q+qf_{B'}(0)} \\ &= \frac{\left(-0.005+\frac{101\times 0.005\times 100000}{200000}\right) f_{B'}(100000) f_{S_{TOT}}(100000)}{1-0.005} \\ &\quad + \frac{\left(-0.005+\frac{101\times 0.005\times 200000}{200000}\right) f_{B'}(200000) f_{S_{TOT}}(0)}{1-0.005} \\ &= ... \end{aligned}$$

Calcul de $f_{S_{TOT}}(300000)$:

$$\begin{aligned} f_{S_{TOT}}(300000) &= \frac{\sum_{j=1}^{3}\left(-q+\frac{(n+1)q100000j}{300000}\right) f_{B'}(100000j) f_{S_{TOT}}(100000\,(3-k))}{1-q+qf_{B'}(0)} \\ &= ... \end{aligned}$$

Calcul de $f_{S_{TOT}}(400000)$:

$$\begin{aligned} f_{S_{TOT}}(400000) &= \frac{\sum_{j=1}^{4}\left(-q+\frac{(n+1)q100000j}{400000}\right) f_{B'}(100000j) f_{S_{TOT}}(100000\,(4-k))}{1-q+qf_{B'}(0)} \\ &= ... \end{aligned}$$

On calcule

k	$f_{S_{TOT}}(100000k)$
0	0.605770
1	0.182644
2	0.149022
3	0.039030
4	0.017681
5	0.004115

5. (a) On a

$$\begin{aligned}
E[S] &= E\left[\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_j} X_{i,j}\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{n_1} X_{i,1}\right] + E\left[\sum_{i=1}^{n_2} X_{i,2}\right] \\
&= n_1 E[X_{i,1}] + n_2 E[X_{i,2}] \\
&= n_1\lambda_1 E[B_1] + n_2\lambda_2 E[B_2] \\
&= 120 \times 0.036 \times 25000 + 80 \times 0.054 \times 20000 \\
&= 194400.
\end{aligned}$$

(b) Soit $X_{1,1} \sim \cdots \sim X_{1,n_1} \sim X_1$ et $X_{2,1} \sim \cdots \sim X_{2,n_2} \sim X_2$ (indépendance). Alors, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_S(t) &= \mathcal{P}_{X_1}(t)^{n_1} \times \mathcal{P}_{X_2}(t)^{n_2} \\
&= \left(\exp\left\{\lambda_1\left(P_{B_1}(t)-1\right)\right\}\right)^{n_1} \times \left(\exp\left\{\lambda_2\left(P_{B_2}(t)-1\right)\right\}\right)^{n_2} \\
&= \exp\left\{\lambda_1 n_1\left(P_{B_1}(t)-1\right)\right\} \times \exp\left\{\lambda_2 n_2\left(P_{B_2}(t)-1\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\lambda_1 n_1\left(P_{B_1}(t)-1\right) + \lambda_2 n_2\left(P_{B_2}(t)-1\right)\right\} \\
&= \exp\left\{(\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2)\left(\frac{\lambda_1 n_1}{\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2} P_{B_1}(t) + \frac{\lambda_2 n_2}{\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2} P_{B_2}(t) - 1\right)\right\} \\
&= \exp\left\{8.64\left(0.5 P_{B_1}(t) + 0.5 P_{B_2}(t) - 1\right)\right\}
\end{aligned}$$

On conclut que $S \sim PoisComp(8.64, F_C)$, où $F_C = 0.5F_{B_1} + 0.5F_{B_2}$.

(c) On a

$$\begin{aligned}
f_S(0) &= \mathcal{P}_S(0) \\
&= \exp\{8.64(0-1)\} \\
&= \exp\{-8.64\} \\
&= 0.0001768869.
\end{aligned}$$

Ensuite, on applique l'algorithme de Panjer. On calcule

$$\begin{aligned}
\Pr(C = 10000) &= 0.5 f_{B_1}(10000) + 0.5 f_{B_2}(10000) \\
&= 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.5 \\
&= 0.45000; \\
\Pr(C = 20000) &= 0.5 f_{B_1}(20000) + 0.5 f_{B_2}(20000) \\
&= 0.5 \times 0.4 \times 0.6 + 0.5 \times 0.5^2 \\
&= 0.24500; \\
\Pr(C = 30000) &= 0.5 f_{B_1}(30000) + 0.5 f_{B_2}(30000) \\
&= 0.5 \times 0.4 \times 0.6^2 + 0.5 \times 0.5^3 \\
&= 0.13450.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} f_S(10000) &= \frac{8.64}{1}\sum_{j=1}^{1} j f_C(10000j) f_S(10000(1-j)) \\ &= 8.64 \times 1 \times f_C(1) \times f_S(0) \\ &= 8.64 \times 1 \times 0.45000 \times 0.0001768869 \\ &= 0.0006877363; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_S(20000) &= \frac{8.64}{2}\sum_{j=1}^{2} j f_C(10000j) f_S(10000(2-j)) \\ &= \frac{8.64}{2}\left(f_C(10000) \times f_S(10000) + 2 \times f_C(20000) \times f_S(0)\right) \\ &= \frac{8.64}{2}\left(0.45 \times 0.0006877363 + 2 \times 0.245 \times 0.0001768869\right) \\ &= 0.0017113935; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_S(30000) &= \frac{8.64}{3}\sum_{j=1}^{3} j f_C(10000j) f_S(10000(3-j)) \\ &= \frac{8.64}{3}\left(f_C(10000) \times f_S(20000) + 2 \times f_C(20000) \times f_S(10000) + 3 \times f_C(30000) \times f_S(0)\right) \\ &= \frac{8.64}{2}\left(0.45 \times 0.0017113935 + 2 \times 0.245 \times 0.0006877363 + 3 \times 0.1345 \times 0.0001768869\right) \\ &= 0.0033940562. \end{aligned}$$

6. (a) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{B}}(1000k)$ pour $k = 1, 2, ..., 5$.
   On a

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{B}}(1000k) &= F_B(1000k) - F_B(1000(k-1)), \ k = 1, 2, 3, 4 \\ f_{\widetilde{B}}(1000 \times 5) &= 1 - F_B(4000) \end{aligned}$$

   On obtient les valeurs suivantes pour $f_{\widetilde{B}}(1000k)$ pour $k = 0, 1, 2, ..., 5$: 0.00000000 ; 0.63212056 ; 0.19255220 ; 0.08535235 ; 0.04172844 ; 0.04824644

   (b) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{X}}(1000k)$ pour $k = 0, 1, 2, ..., 5$.
   On utilise l'algorithme de Panjer :
   On obtient les valeurs suivantes de $f_{\widetilde{X}}(1000k)$: 0.850283 0.071664 0.032400 0.017898 0.010513 0.009401 0.003526 0.001863

   (c) Approximer $VaR_{0.99}(X)$ par $VaR_{0.99}\left(\widetilde{X}\right)$.
   Les valeurs deF$f_{\widetilde{X}}(1000k)$ pour $k = 0, 1, 2, ..., 5$ sont : 0.850283 0.921947 0.954347 0.972245 0.982758 0.992159 0.995684 0.997547
   On déduit que $VaR_{0.99}\left(\widetilde{X}\right) = 5000$.

7. (a) Calculer $E[M]$ et $E[X]$.
   Loi de M. On a

$$F_M(k) = (1-\theta) + \theta F_{M'}(k)$$

   pour $k = 0, 1, 2, ...$. On fixe $\theta = 0.05$ et on suppose que $M' \sim Pois(1)$.
   Pour $k = 0$, on déduit que

$$f_M(0) = (1-\theta) + \theta F_{M'}(0) = (1-\theta) + \theta f_{M'}(0)$$

et, pour $k = 1, 2, 3, ...,$ on a

$$\begin{aligned} f_M(k) &= F_M(k) - F_M(k-1) \\ &= \theta\left(F_{M'}(k) - F_{M'}(k-1)\right) \\ &= \theta f_{M'}(k) \end{aligned}$$

Espérance d'une fonction de M.Pour une fonction g de M, on a

$$\begin{aligned} E[g(M)] &= \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k) \times g(k) \\ &= (1-\theta) g(0) + \theta \sum_{k=0}^{\infty} f_{M'}(k) \times g(k) \\ &= (1-\theta) g(0) + \theta E[g(M')] \end{aligned}$$

Espérance de M**.** Alors, on déduit (pour $g(M) = M$)

$$E[M] = \theta E[M'] = \theta \times \lambda = 0.05$$

Espérance de X. On a

$$E[X] = E[M] \times E[B]$$

avec

$$E[B] = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

Alors

$$E[X] = E[M] \times E[B] = 0.05 \times 2.5 = 0.125$$

(b) Donner l'expression de la f.g.p. de M.

On a

$$\begin{aligned} P_M(t) &= E\left[t^M\right] \\ &= E[g(M)] \qquad \text{avec } g(M) = t^M \\ &= (1-\theta) t^0 + \theta P_{M'}(t) \\ &= (1-\theta) + \theta e^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

(c) Calculer $f_X(j)$, pour $j = 0, 1, 2, 3$

Il faut appliquer l'algorithme de Panjer de façon adéquate.

On identifie la f.g.m. de mX

$$\begin{aligned} M_X(t) &= P_M(M_B(t)) \\ &= (1-\theta) + \theta P_{M'}(M_B(t)) \end{aligned}$$

On définit une v.a X' tel que

$$M_X(t) = P_{M'}(M_B(t))$$

ce qui signifie X' obéit à une loi Poisson composée

$$X' = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M'} B_j, & M' > 0 \\ 0, & M' > 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses usuelles. Cela implique que l'on peut aussi calculer $f_{X'}(k)$ avec l'algorithme de Panjer

De l'expression de $M_X(t)$ on déduit

$$F_X(k) = (1-\theta) + \theta F_{X'}(k)$$

avec $k = 0, 1, 2, 3, ...$

Pour $k = 0$, on déduit que

$$f_X(0) = (1-\theta) + \theta F_{X'}(0) = (1-\theta) + \theta f_{X'}(0)$$

et, pour $k = 1, 2, 3, ...$, on a

$$\begin{aligned} f_X(k) &= F_X(k) - F_X(k-1) \\ &= \theta\left(F_{X'}(k) - F_{X'}(k-1)\right) \\ &= \theta f_{X'}(k) \end{aligned}$$

où $f_{X'}(k)$ est calculée récursiviment avec l'algorithme de Panjer.

On obtient les valeurs suivantes de $f_{X'}(k)$

k	$f_{X'}(k)$
0	0.36787944
1	0.14715178
2	0.11772142
3	0.09221511

On obtient les valeurs suivantes de $f_X(k)$

k	$f_X(k)$
0	0.968393972
1	0.007357589
2	0.005886071
3	0.004610756

8. Soit X_1, la v.a. qui représente les coûts en sinistre pour les bons conducteurs et X_2, la v.a. qui représente

les coûts pour les mauvais conducteurs. Alors, on a

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(0) &= e^{-0.25} \\
&= 0.9048374; \\
f_{X_1}(1000) &= \frac{0.1}{1} \sum_{j=1}^{1} j f_B(1000j) f_{X_1}(1000(1-j)) \\
&= 0.1 \times \frac{1}{3} \times 0.9048374 \\
&= 0.03016125 \\
f_{X_1}(2000) &= \frac{0.1}{2} \sum_{j=1}^{2} j f_B(1000j) f_{X_1}(1000(2-j)) \\
&= \frac{0.1}{2} \left(f_B(1000) f_{X_1}(1000) + 2 f_B(2000) f_{X_1}(0)\right) \\
&= \frac{0.1}{2} \left(\frac{1}{3} \times 0.03016125 + 2 \times \frac{2}{9} \times 0.9048374\right) \\
&= 0.02061019; \\
f_{X_1}(3000) &= \frac{0.1}{3} \sum_{j=1}^{3} j f_B(1000j) f_{X_1}(1000(3-j)) \\
&= \frac{0.1}{3} \left(f_B(1000) f_{X_1}(2000) + 2 f_B(2000) f_{X_1}(1000) + 3 f_B(1000) f_{X_1}(0)\right) \\
&= \frac{0.1}{3} \left(\frac{1}{3} \times 0.02061019 + 2 \times \frac{2}{9} \times 0.03016125 + 3 \times \frac{4}{27} \times 0.9048374\right) \\
&= 0.02061019.
\end{aligned}$$

Ensuite, on calcule

$$
\begin{aligned}
f_{X_2}(0) &= e^{-0.25} \\
&= 0.778801; \\
f_{X_2}(1000) &= \frac{0.25}{1}\sum_{j=1}^{1} j f_B(1000j) f_{X_2}(1000(1-j)) \\
&= 0.25 \times \frac{1}{3} \times 0.0486750489 \\
&= 0.064900 \\
f_{X_2}(2000) &= \frac{0.25}{2}\sum_{j=1}^{2} j f_B(1000j) f_{X_2}(1000(2-j)) \\
&= \frac{0.25}{2}\left(f_B(1000) f_{X_2}(1000) + 2 f_B(2000) f_{X_2}(0)\right) \\
&= \frac{0.25}{2}\left(\frac{1}{3} \times 0.064900 + 2 \times \frac{2}{9} \times 0.0486750489\right) \\
&= 0.045971; \\
f_{X_2}(3000) &= \frac{0.25}{3}\sum_{j=1}^{3} j f_B(1000j) f_{X_2}(1000(3-j)) \\
&= \frac{0.25}{3}\left(f_B(1000) f_{X_2}(2000) + 2 f_B(2000) f_{X_2}(1000) + 3 f_B(1000) f_{X_2}(0)\right) \\
&= \frac{0.25}{3}\left(\frac{1}{3} \times 0.045971 + 2 \times \frac{2}{9} \times 0.064900 + 3 \times \frac{4}{27} \times 0.778801\right) \\
&= 0.032525.
\end{aligned}
$$

9. (a) Calculer l'espérance et la variance des coûts totaux Z.

Espérance :

$$
\begin{aligned}
EZ &= vE[W_1] + v^2 E[W_2] \\
&= 0.95 \times 2 \times 1 \times \frac{4000}{3-1} + 0.95^2 \times 2 \times 1 \times \frac{4000}{3-1} \\
&= 7410.0
\end{aligned}
$$

Variance :

$$
\begin{aligned}
Var(Z) &= v^2 Var(W_1) + v^4 Var(W_2) \\
&= \left(0.95^2 + 0.95^4\right) Var(W) \\
&= \left(0.95^2 + 0.95^4\right)\left(E[M]\, Var(B) + Var(M)\, E[B]^2\right) \\
&= \left(0.95^2 + 0.95^4\right)\left(2 \times 1 \times \left(\frac{4000}{3-1}\right)^2 \frac{3}{3-1} + 2 \times 1 \times (1+1)\left(\frac{4000}{3-1}\right)^2\right) \\
&= : 48076175.0
\end{aligned}
$$

(b) Calculer $\Pr\left(\widetilde{Z} = 1000k\right)$ pour $k = 0, 10$ et 20.

On écrit

$$
\begin{aligned}
Z &= vW_1 + v^2 W_2 \\
&= Y_1 + Y_2
\end{aligned}
$$

On approxime Y_1 et Y_2 par $\widetilde{Y}_1$ et $\widetilde{Y}_2$. On définit

$$\widetilde{Z} = \widetilde{Y}_1 + \widetilde{Y}_2$$

Pour évaluer $f_{\widetilde{Y}_1}$ et $f_{\widetilde{Y}_2}$, on discrétise vB et v^2B (approximées par $\widetilde{C}$ et $\widetilde{D}$)
On a

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{C}}(1000k) &= F_B\left(\frac{1000k}{v}\right) - F_B\left(\frac{1000(k-1)}{v}\right) \\ &= \left(\frac{v\lambda}{v\lambda + 1000(k-1)}\right)^{\alpha} - \left(\frac{v\lambda}{v\lambda + 1000k}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{D}}(1000k) &= F_B\left(\frac{1000k}{v^2}\right) - F_B\left(\frac{1000(k-1)}{v^2}\right) \\ &= \left(\frac{v^2\lambda}{v^2\lambda + 1000(k-1)}\right)^{\alpha} - \left(\frac{v^2\lambda}{v^2\lambda + 1000k}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

On calcule $f_{\widetilde{Y}_1}(1000k) = \Pr\left(\widetilde{Y}_1 = 1000k\right)$ et $f_{\widetilde{Y}_2}(1000k) = \Pr\left(\widetilde{Y}_2 = 1000k\right)$ avec Panjer
On convolue $f_{\widetilde{Y}_1}$ et $f_{\widetilde{Y}_2}$ pour avoir $f_{\widetilde{Z}}$
Rép : 0.0625 ; 0.04269752 ; 0.01351135

(c) On veut calculer le montant de capital économique à mettre de côté pour la compagnie d'assurance. Évaluer à l'aide de l'approximation le montant de capital économique en se basant sur la $VaR_\kappa(Z)$ pour $\kappa = 99\%$.
Rép : $VaR_\kappa(Z) = 42000$; $E\left[\widetilde{Z}\right] = 9673.619$; $CE = 42000 - 9673.619 = 32326.381 =$
Ou $CE = 42000 - 7410 = 34590.0 =$

10. Solution :

(a) Par identification.

(b) On a

$$\underline{c}^T = \underline{a}^T \otimes \underline{B}$$

qui devient

$$\begin{aligned} (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) &= (a_0, a_1, a_2) \otimes \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= (0.7, 0.2, 0.1) \otimes \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \\ &= (0.21, 0.41, 0.27, 0.09, 0.02). \end{aligned}$$

Rép : 0.21, 0.41, 0.27, 0.09, 0.02

11. Solution :

(a) Pour $s \geq 0$ et $t > 0$, l'expression de la TLS de $S(s, s+t]$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \Pi_{j=1}^{5} \mathcal{L}_{M_j(s,s+t]}(r) \\ &= \Pi_{j=1}^{5} \exp\left(\lambda_j t\left(\mathrm{e}^{1000jr} - 1\right)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^{5}\left(\lambda_j t\left(\mathrm{e}^{1000jr} - 1\right)\right)\right). \end{aligned}$$

On réarrange les termes

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \exp\left(\sum_{j=1}^{5}\left(\lambda_j t\left(\mathrm{e}^{1000jr}-1\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\lambda_N\left(\sum_{j=1}^{5} p_j \mathrm{e}^{1000jr}-1\right)\right) \\
&= \exp\left(\lambda_N\left(\mathcal{L}_B(r)-1\right)\right),
\end{aligned}
$$

où

$$\lambda_N = \sum_{j=1}^{5}\lambda_j$$

et

$$\mathcal{L}_B(r) = \sum_{j=1}^{5} p_j \mathrm{e}^{1000jr}.$$

correspondant à la TLS d'une v.a. discrète B avec $f_B(1000j) = p_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_N}$, $j = 1, 2, ..., 5$. Puisque

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp\left(\lambda_N\left(\mathcal{L}_B(r)-1\right)\right)$$

on déduit que $S(s, s+t]$ obéit à une loi Poisson composée. Ainsi, $\underline{S}$ est un processus Poisson composé et le processus de comptage sous-jacent $\underline{N}$ est un processus de Poisson homogène avec une intensité λ_N.

(b) Valeurs de λ_N :

$$\lambda_N = 0.05 + ... + 0.01 = 0.15$$

Valeurs de f_B :

$$
\begin{aligned}
f_B(1000) &= \frac{0.05}{0.15} \\
f_B(2000) &= \frac{0.04}{0.15} \\
f_B(3000) &= \frac{0.03}{0.15} \\
f_B(4000) &= \frac{0.02}{0.15} \\
f_B(5000) &= \frac{0.01}{0.15}
\end{aligned}
$$

(c) On applique l'algorithme et on obtient les valeurs suivantes (dans l'ordre) de $f_{S(0.25,1.25]}(1000k)$, $k = 0, 1, 2, 3$: 0.86070 ; 0.043035 ; 0.035504 ; 0.027561

12. Solution :

(a) On a

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\times q \times \frac{1}{1-(1-q)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)} &= \beta_2 q \frac{1}{\beta_2+t-(1-q)\beta_2} \\
&= \beta_2 q\left(\frac{1}{\beta_2 q+t}\right) \\
&= \beta_2\frac{\beta_1}{\beta_2}\left(\frac{1}{\beta_2\frac{\beta_1}{\beta_2}+t}\right) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right).
\end{aligned}
$$

(b) Selon (**??**), on a

$$\mathcal{L}_Y(t) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right) = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\left(\frac{q}{1-(1-q)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)}\right)$$

où $q = \frac{\beta_1}{\beta_2} \in (0,1)$.
On introduit la v.a. discrète J (avec support $\mathbb{N}^+$) avec

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_J(r) &= \left(\frac{q}{1-(1-q)\,r}\right) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_k r^k,\ r \in [0,1].\end{aligned}$$

On reconnaît la fgp de la loi binomiale négative de paramètres $\alpha_1 = 1$ et $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$

$$f_J(k) = \gamma_k = \frac{\Gamma(\alpha_1+k)}{\Gamma(\alpha_1)k!} q^{\alpha_1}(1-q)^k$$

pour $k \in \mathbb{N}$.
La TLS de Y devient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_1}(t) &= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right) \\ &= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\mathcal{P}_J\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \\ &= \left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\sum_{\kappa=0}^{\infty}\gamma_k\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^k,\end{aligned}$$

où $q = \frac{\beta_1}{\beta_2} \in (0,1)$.
On déduit l'expression suivante de F_Y [note : c'est une expression alternative] :

$$F_Y(x) = H(x;1,\beta_2) = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\gamma_k H(x;1+k,\beta_2),\ x \geq 0.$$

9.2 Exercices informatiques

1. Solution : on applique directement l'algorithme de DePril. Reponses : 0.000977 ; 0.001953 ; 0.091571 ; 0.013021.
2. Solutions :
   (a) Par identification. La v.a. M obéit à une loi Poisson mélange avec une masse modifiée à 0.
   (b) On a

$$\begin{aligned} E[M] &= \sum_{k=0}^{\infty} k f_M(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(0.6 \times 1_{\{k=0\}} + 0.3 f_Y(k) + 0.1 \times f_Z(k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k 0.6 \times 1_{\{k=0\}} + 0.3 \times \sum_{k=0}^{\infty} k f_Y(k) + 0.1 \times \sum_{k=0}^{\infty} k f_Z(k) \\ &= 0 + 0.3 E[Y] + 0.1 E[Z] \\ &= 0.3 \times 0.1 + 0.1 \times 0.2 = 0.05 \end{aligned}$$

   (c) On a

$$\begin{aligned} E[N_n] &= \sum_{i=1}^{100} E[M_i] \\ &= 100 \times E[M] \text{ (i.d.)} \\ &= 5 \end{aligned}$$

   (d) On applique directement l'algorithme de DePril.

   Reponses :
   (a) Rép : $f_M(k) = 0.6 \times 1_{\{k=0\}} + 0.3 f_Y(k) + 0.1 \times f_Z(k)$ où $Y \sim Pois(0.1)$ et $Z \sim Pois(0.2)$. La v.a. M obéit à une loi Poisson mélange avec une masse modifiée à 0.
   (b) Rép : 0.05.
   (c) Rép : 5
   (d) Rép : 0.008396 ; 0.167952 ; 0.020416 ; 0.000298
3. Solutions :
   (a) On applique la méthode "upper" et on utilise le produit de convolution.
   (b) On applique la méthode "lower" et on utilise le produit de convolution.

   Reponses :

	$VaR_\kappa\left(Y^{(u,h)}\right)$			$VaR_\kappa\left(Y^{(l,h)}\right)$		
κ	$h=1$	$h=0.1$	$h=0.01$	$h=0.01$	$h=0.1$	$h=1$
0.9	35	36.4	36.45	36.47	36.6	37
0.99	173	174.1	174.18	174.20	174.3	175
0.999	797	798.2	798.24	798.26	798.4	799
0.9999	3688	3688.8	3688.92	3688.94	3689.0	3690

4. (a) On a $f_{\widetilde{B}}(k) = F_B(k) - F_B(k-1)$, $k = 1, 2, ...500$ et $f_{\widetilde{B}}(0) = 0$. On calcule
      — $f_{\widetilde{B}}(10)$ =0.06841105
      — $f_{\widetilde{B}}(0) = 0$
   (b) On applique FFT ou l'algorithme de Panjer. On obtient
      — $f_{\widetilde{X}}(0) = P_M\left(f_{\widetilde{B}}(0)\right) = f_M(0)$ =0.19245009 ;
      — $f_{\widetilde{X}}(20)$ =0.01433501
   (c) On a
      — $F_{\widetilde{X}}(k) = \sum_{j=0}^{k} f_{\widetilde{X}}(j)$

— $F_{\widetilde{X}}(50)$ =0.7810518
— $\pi_{\widetilde{X}}(k) = E\left[\max\left(\widetilde{X} - k; 0\right)\right] = \sum_{j=0}^{600} \max(j-k;0) f_{\widetilde{X}}(j)$
— $\pi_{\widetilde{X}}(50)$ =7.137878

(d) On effectue les opérations suivantes
— $VaR_\kappa(K) = F_K^{-1}(\kappa) = k_\kappa$
— $TVaR_\kappa(K) = \frac{1}{1-\kappa} \times \left\{E\left[K \times 1_{\{K>k_\kappa\}}\right] + k_\kappa \times (F_K(k_\kappa) - \kappa)\right\}$
— $E\left[K \times 1_{\{K>k_\kappa\}}\right] = \sum_{j=k_\kappa}^{\infty} j \times f_K(j) = \sum_{j=k_\kappa}^{\infty} (j - k_\kappa + k_\kappa) \times f_K(j)$
— $E\left[K \times 1_{\{K>k_\kappa\}}\right] = \sum_{j=k_\kappa}^{\infty} (j - k_\kappa) \times f_K(j) + \sum_{j=k_\kappa}^{\infty} k_\kappa \times f_K(j)$
— $E\left[K \times 1_{\{K>k_\kappa\}}\right] = \pi_K(k_\kappa) + k_\kappa \times (1 - F_K(k_\kappa))$
— $TVaR_\kappa(K) = \frac{1}{1-\kappa} \times \{\pi_K(k_\kappa) + k_\kappa \times (1 - F_K(k_\kappa)) + k_\kappa \times (F_K(k_\kappa) - \kappa)\}$
— $TVaR_\kappa(K) = k_\kappa + \frac{1}{1-\kappa}\pi_K(k_\kappa)$
— $TVaR_\kappa(K) = VaR_\kappa(K) + \frac{1}{1-\kappa}\pi_K(VaR_\kappa(K))$

(e) On obtient
— $\kappa = F_{\widetilde{X}}(50) \Rightarrow VaR_\kappa\left(\widetilde{X}\right) = 50 = k_\kappa$
— $TVaR_{F_{\widetilde{X}}(50)}(K) = 50 + \frac{1}{1-F_{\widetilde{X}}(50)}\pi_K(50)$
— $TVaR_{F_{\widetilde{X}}(50)}(K)$ =82.60076

5. Voir GitHub
(a) On applique `fft` et on obtient

$$f_S(10000) = 0.075976, f_S(20000) = 0.007988, f_S(30000) = 0.001742.$$

(b) On obtient

$$VaR_{0.95}(\widetilde{S}) = 21; VaR_{0.995}(\widetilde{S}) = 44.$$

6. GitHub
7. (a) On a

$$\begin{aligned} E[S] &= 1000E[X] \\ &= 1000 \times E[M]E[B] \\ &= 1000 \times r\frac{1-q}{q} \times \frac{\lambda}{\alpha - 1} \\ &= 1000 \times 0.01 \times \frac{3}{1} \times \frac{15000}{2.5-1} \\ &= 300000. \end{aligned}$$

(b) Voir GitHub. On obtient

$$\begin{aligned} E\left[\widetilde{S}\right] &= 315410.6; \\ E\left[\max\left(\widetilde{S} - 2000000; 0\right)\right] &= 256.3232; \\ F_{\widetilde{S}}(500000) &= 0.8881155; \\ F_{\widetilde{S}}(1000000) &= 0.9965815; \\ F_{\widetilde{S}}(2000000) &= 0.9997574. \end{aligned}$$

8. Voir GitHub

(a) Pour $s \geq 0$ et $t > 0$, l'expression de la TLS de $S(s, s+t]$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \Pi_{j=1}^{5} \mathcal{L}_{X_j(s,s+t]}(r) \\
&= \Pi_{j=1}^{5} \mathcal{P}_{M_j(s,s+t]}\left(\mathcal{L}_{B_j}(r)\right) \\
&= \Pi_{j=1}^{5} \exp\left(\lambda_j t \left(\mathcal{L}_{B_j}(r) - 1\right)\right).
\end{aligned}$$

On réarrange les termes

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \exp\left(\sum_{j=1}^{5}\left(\lambda_j t\left(\mathcal{L}_{B_j}(r) - 1\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\lambda_N t\left(\sum_{j=1}^{5} p_j \mathcal{L}_{B_j}(r) - 1\right)\right) \\
&= \exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{L}_C(r) - 1\right)\right),
\end{aligned}$$

où

$$\lambda_N = \sum_{j=1}^{5} \lambda_j$$

et

$$\mathcal{L}_C(r) = \sum_{j=1}^{5} p_j \mathcal{L}_{B_j}(r).$$

correspondant à la TLS d'une v.a. continue C dont la fonction de répartition est

$$F_C(x) = \sum_{j=1}^{5} p_j H\left(x; k, \frac{1}{1000}\right), \ x \geq 0.$$

Puisque

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{L}_C(r) - 1\right)\right)$$

on déduit que $S(s, s+t]$ obéit à une loi Poisson composée. Ainsi, $\underline{S}$ est un processus Poisson composé et le processus de comptage sous-jacent $\underline{N}$ est un processus de Poisson homogène avec une intensité λ_N. La distribution de C est appelée un mélange d'Erlang.

(b) Valeurs de λ_N :

$$\lambda_N = 0.5 + ... + 0.1 = 1.5$$

Valeurs de p_j :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{0.5}{1.5} \\
p_2 &= \frac{0.4}{1.5} \\
p_3 &= \frac{0.3}{1.5} \\
p_4 &= \frac{0.2}{1.5} \\
p_5 &= \frac{0.1}{1.5}
\end{aligned}$$

(c) On obtient $F_C(2000) = 0.5338451$ et $F_C(8000) = 0.9840394$.

(d) On fixe $s \geq 0$ et $t > 0$. La TLS de $S(s, s+t]$ est

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{L}_C(r) - 1\right)\right).$$

Soit une v.a. discrète J avec une fonction de masse de probabilité

$$\Pr(J = j) = p_j,\ j = 1, 2, ..., 5,$$

et une fgp

$$P_J(r) = \sum_{j=1}^{5} p_j r^j,\ r \in [0, 1].$$

Alors, on peut réécrire $\mathcal{L}_C(r)$ sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_C(r) = \mathcal{P}_C\left(\frac{\beta}{\beta + r}\right) = \mathcal{P}_J\left(\mathcal{L}_D(r)\right)$$

où

$$\mathcal{L}_D(r) = \frac{\beta}{\beta + r} \in [0, 1],\ \text{pour } r \geq 0,$$

est la TLS d'une loi exponentielle (avec $\beta = \frac{1}{1000}$).

Avec ces nouvelles informations, on présente

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{L}_C(r) - 1\right)\right).$$

sous une nouvelle représentation

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{P}_J\left(\mathcal{L}_D(r)\right) - 1\right)\right).$$

qui est commode pour des fins de calculs.

Pour simplifier l'écriture, on pose $\frac{\beta}{\beta + r} = r' \in [0, 1]$. Or, on observe que

$$\exp\left(\lambda_N\left(\mathcal{P}_J(r') - 1\right)\right)$$

est la fgp de N dont l'argument est la fgp de J, ce qui implique que

$$\exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{P}_J(r') - 1\right)\right)$$

est aussi une fgp. Par la définition d'une fgp, on sait que

$$\exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{P}_J(r') - 1\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{(s,s+t]}(k)\,(r')^k$$

et on définit une v.a. K dont la fgp est

$$\exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{P}_J(r') - 1\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{(s,s+t]}(k)\,(r')^k = \mathcal{P}_K(r').$$

Puisque

$$\mathcal{P}_K(r') = \exp\left(\lambda_N\left(\mathcal{P}_J(r') - 1\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{(s,s+t]}(k)\,(r')^k,$$

on utilise l'algorithme de Panjer (ou la FFT) pour calculer les valeurs de $\gamma_{(s,s+t]}(k)$.

Ensuite, la TLS se définit aussi à l'aide de la fgp de K de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \mathcal{P}_K\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right) = \mathcal{P}_K\left(\mathcal{L}_D(r)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{(s,s+t]}(k)\left(\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^k\right).\end{aligned}$$

On sait que

$$\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^k$$

est la TLS d'une loi Erlang de paramètres k et β.

Par identification, on déduit de

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{(s,s+t]}(k)\left(\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^k\right).$$

que l'expression de $F_{S(s,s+t]}$ est

$$F_{S(s,s+t]}(x) = \gamma_{(s,s+t]}(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{(s,s+t]}(k)\,H\left(x;k,\frac{1}{1000}\right),$$

où $\gamma_{(s,s+t]}(k)$ sont des probabilités telles que $\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{(s,s+t]}(k) = 1$. Les probabilités sont calculées avec l'algorithme de Panjer. [Note : les probabilités peuvent aussi avec la FFT].

(e) On applique l'algorithme et on obtient les valeurs suivantes (dans l'ordre) de $\gamma_{S(0.25,1.25]}(1000k)$, $k = 0,1,2,3$: 0.2231302 0.1115651 0.1171433 0.1162136

(f) On utilise l'approximation suivante :

$$\widetilde{F}_{S(s,s+t]}(x) = \gamma_{(s,s+t]}(0) + \sum_{k=1}^{k_0}\gamma_{(s,s+t]}(k)\,H\left(x;k,\frac{1}{1000}\right).$$

Les valeurs de $\gamma_{(0.25,1.25]}(k)$, $k = 0,1,2,3,...,k_0$ ont été calculées avec l'algorithme de Panjer. On a vérifier que $\sum_{k=0}^{k_0}\gamma_{(s,s+t]}(k) = 1$.

On utilise la relation en (**??**) pour évaluer approximativement $F_{S(s,s+t]}(10000)$ par $\widetilde{F}_{S(s,s+t]}(10000)$ avec $k_0 = 100$.

Les valeurs de $\widetilde{F}_{S(s,s+t]}(x)$, pour $x = 0$, 2000, 8000, 20000, sont respectivement les suivantes : 0.2231302 ; 0.4482519 ; 0.8781012 ; 0.9979141.

9. Voir GitHub.

(a) Pour $s \geq 0$ et $t > 0$, l'expression de la TLS de $S(s,s+t]$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \Pi_{j=1}^{5}\mathcal{L}_{X_j(s,s+t]}(r) \\ &= \Pi_{j=1}^{5}\mathcal{P}_{M_j(s,s+t]}\left(\mathcal{L}_{B_j}(r)\right) \\ &= \Pi_{j=1}^{5}\exp\left(\lambda_j t\left(\mathcal{L}_{B_j}(r)-1\right)\right).\end{aligned}$$

On réarrange les termes

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) &= \exp\left(\sum_{j=1}^{5}\left(\lambda_j t\left(\mathcal{L}_{B_j}(r)-1\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\lambda_N t\left(\sum_{j=1}^{5} p_j \mathcal{L}_{B_j}(r)-1\right)\right) \\
&= \exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{L}_C(r)-1\right)\right),
\end{aligned}$$

où

$$\lambda_N = \sum_{j=1}^{5} \lambda_j$$

et

$$\mathcal{L}_C(r) = \sum_{j=1}^{5} p_j \mathcal{L}_{B_j}(r).$$

correspondant à la TLS d'une v.a. discrète C dont la fonction de masse de probabilité est

$$f_C(100k) = \sum_{j=1}^{5} p_j f_B(100k), \ k \in \mathbb{N}.$$

Puisque

$$\mathcal{L}_{S(s,s+t]}(r) = \exp\left(\lambda_N t\left(\mathcal{L}_C(r)-1\right)\right)$$

on déduit que $S(s, s+t]$ obéit à une loi Poisson composée. Ainsi, $\underline{S}$ est un processus Poisson composé et le processus de comptage sous-jacent $\underline{N}$ est un processus de Poisson homogène avec une intensité λ_N.

(b) Valeurs de λ_N :

$$\lambda_N = 0.5 + ... + 0.1 = 1.5$$

Valeurs de p_j :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{0.5}{1.5} \\
p_2 &= \frac{0.4}{1.5} \\
p_3 &= \frac{0.3}{1.5} \\
p_4 &= \frac{0.2}{1.5} \\
p_5 &= \frac{0.1}{1.5}
\end{aligned}$$

(c) On utilise la formule en (b). Valeurs de $f_C(100k)$, $k = 20$ et 80 : 0.0092426985 ; 0.0002596987

(d) Calculer $E[C]$, $E\left[N_{(2.2,3.8]}\right]$ et $E\left[S_{(2.2,3.8]}\right]$. On utilise les définitions.
On a

$$E[C] = \sum_{k=0}^{200} 100k f_C(100k) = 1011.594$$

Puisque $N_{(2.2,3.8]} \sim Pois(\lambda_N 1.6)$, on obtient

$$E\left[N_{(2.2,3.8]}\right] = (3.8 - 2.2)\lambda_N = 2.4.$$

On sait que $S_{(2.2,3.8]} \sim PoisComp\left(\lambda_N 1.6, F_C\right)$. Alors, on a

$$E\left[S_{(2.2,3.8]}\right] = (3.8 - 2.2)\,\lambda_N \times E\left[C\right] = 2427.826.$$

(e) On applique l'algorithme de Panjer pour calculer $f_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 4 \times 200$. Valeurs de $f_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80$: 0.090717953 ; 0.017228417 ; 0.001460364

(f) On utilise la définition

$$F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k) = \sum_{j=0}^{k} f_{S_{(2.2,3.8]}}(100j)$$

Valeurs de $F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 100$: 0.09071795 ; 0.58543432 ; 0.95166556 ; 0.97222405

(g) On ulise la définition

$$\pi_{(2.2,3.8]}(100k) = \sum_{j=0}^{200\times 4} E\left[\max\left(100j - 100k; 0\right)\right] f_{S_{(2.2,3.8]}}(100j)\,,$$

Valeurs de $\pi_{(2.2,3.8]}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 200$: 2421.077194 ; 1130.918961 ; 159.594638 ; 3.694383

(h) On a

$$TVaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right) = VaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right) + \frac{1}{1-\kappa}\pi_{(2.2,3.8]}\left(VaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right)\right).$$

Comme $\kappa = F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 100$, on a

$$VaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right) = 100k,$$

et on utilise la relation suivante :

$$TVaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right) = 100k + \frac{1}{1 - F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)}\pi_{(2.2,3.8]}(100k)$$

Valeurs de $TVaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right)$, $\kappa = F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 100$: 2662.625 ; 4727.961 ; 11301.883 ; 13253.565

10. Voir GitHub.

(a) La TLS de la v.a. X est

$$\mathcal{L}_X(t) = \alpha\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right). \tag{9.1}$$

Dans (9.1), on remplace

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right)$$

par

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right) = \mathcal{P}_J\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) = \mathcal{P}_J\left(\mathcal{L}_C(t)\right),$$

où

$$\mathcal{L}_C(t) = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right).$$

Alors, (9.1) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(t) &= \alpha\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) \\ &= \alpha\mathcal{P}_J\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right). \end{aligned} \tag{9.2}$$

On définit une v.a. discrète K sur le support $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, ...\}$ dont la f.g.p. est

$$\mathcal{P}_K(r) = \alpha \mathcal{P}_J(r) + (1-\alpha) \times r, \tag{9.3}$$

pour $r \in [0,1]$. [Note : $\Pr(K=0) = 0$.]
On a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_K(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \times r^k \\ &= \alpha \mathcal{P}_J(r) + (1-\alpha) \times r \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_J(k) \times r^k + (1-\alpha) \times r \end{aligned} \tag{9.4}$$

où

$$f_J(k) = \begin{cases} 0 & , \quad k=0 \\ q(1-q)^{k-1} & , \quad k \in \mathbb{N}^+ \end{cases}. \tag{9.5}$$

En combinant (9.4) et (9.3), on déduit que

$$f_K(k) = \gamma_k = \begin{cases} 0 & , \quad k=0 \\ \alpha \times q + (1-\alpha) & , \quad k=1 \\ \alpha \times q(1-q)^{k-1} & , \quad k=2,3,... \end{cases}.$$

Avec (9.2) et (9.3), et puisque $\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \in [0,1]$ pour $t \geq 0$, on conclut que

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{P}_K\left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\right)$$

Clairement,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} f_J(k) + (1-\alpha) \\ &= \alpha \times 1 + (1-\alpha) = 1. \end{aligned}$$

(b) On définit

$$S = X_1 + ... + X_n.$$

i. La TLS de la v.a. S_n est

$$\mathcal{L}_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}_{K_i}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \tag{9.6}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}_K(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}) \tag{9.7}$$

$$= \left(\mathcal{P}_K\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)\right)^n. \tag{9.8}$$

On définit la fgp d'une v.a. discrète M_n par

$$\mathcal{P}_{M_n}(r) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}_{K_i}(r) = (\mathcal{P}_K(r))^n \tag{9.9}$$

pour $r \in [0,1]$ [Note : $\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \in [0,1]$, pour $t \geq 0$]. D'après (9.9), la v.a. M_n est la somme des v.a. i.i.d. K_1, ..., K_n, dont le support est $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, ...\}$. Ainsi, le support de la v.a. M_n est $\{n, n+1, n+2, ...\}$ et

$$\mathcal{P}_M(r) = \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k r^k$$

pour $r \in [0,1]$, $\eta_k = \Pr(M_n = k) \in [0,1]$, et $\sum_{k=n}^{\infty} \eta_k = 1$.
Avec (9.9), (9.8) devient

$$\mathcal{L}_{S_n}(t) = \mathcal{P}_{M_n}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)$$

pour $t > 0$, où

$$\mathcal{P}_M(r) = \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k r^k$$

pour $r \in [0,1]$, $\eta_k \in [0,1]$, et $\sum_{k=n}^{\infty} \eta_k = 1$.

ii. **Indiquer** l'expression de $F_{S_n}(x)$ (somme infinie de termes) : La TLS de la v.a. S_n est

$$\mathcal{L}_{S_n}(t) = \mathcal{P}_{M_n}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \eta_\kappa \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)^n, \tag{9.10}$$

où

$$\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)^n$$

est la TLS de la loi Erlang (n, β_2).
De (9.10), on déduit que

$$F_{S_n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k H(x; k, \beta_2).$$

Algorithme : L'algorithme est défini une somme de v.a. i.i.d. sont le support est $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. On définit les v.a. I_1, ..., I_n avec

$$I_i = K_i - 1$$

et

$$\Pr(I_i = k) = \Pr(K_i = k + 1)$$

pour $k \in \mathbb{N}$. On définit

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} (K_i - 1) = M_n - n$$

avec

$$\Pr(M_n = j) = \Pr(L_n = j - n)$$

pour $j \in \{n, n+1, ...\}$.
Les valeurs de $f_{J_n}(k)$ sont calculées directement avec l'algorithme de DePril.

iii. Hypothèses : $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = \frac{5}{8}$ tel que $E[X] = 7$. On fixe $n = 20$.
Calculer $E[S_n]$:

$$E[S_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = nE[X] \text{ (i.d.)}$$

Calculer $E[S_n]$ pour $n = 20$: 140
Valeur de q : $q = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{1}{5}$,
Valeurs de γ_k $(k = 1, 2, ..., 5)$: 0.5000 ; 0.1000 ; 0.0800 ; 0.0640 ; 0.0512
Valeurs η_k $(k = 50, 60, 70)$: 1.470448e-02 ; 2.188240e-02 ; 2.188623e-02
Valeurs de $F_S(x)$, pour $x = 100$, 140, 200, 300 : 0.1533268 ; 0.5375217 ; 0.9231409 ; 0.9992555.

Chapitre 10

Distributions multivariées et agrégation des risques

10.1 Exercices - traditionnels

1. On a
$$VaR_\kappa\left(X_1\right) = -100\log(1-\kappa)$$
et
$$VaR_\kappa\left(X_2\right)\exp\left(\ln(100) - \frac{1}{2} + VaR_\kappa(Z)\right).$$
De plus, car les v.a. sont comonotones, on a
$$VaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{2} VaR_\kappa(X_i),$$
alors, on obtient
$$\begin{aligned}
VaR_{0.95}(S) &= VaR_{0.95}(X_1) + VaR_{0.95}(X_2) \\
&= -100\log(1-0.95) + \exp\left(\ln(100) - \frac{1}{2} + VaR_{0.95}(Z)\right) \\
&= -100\log(1-0.95) + 100\exp\left(-\frac{1}{2} + VaR_{0.95}(Z)\right) \\
&= 299.5732 + 100 \times 3.141981 \\
&= 613.7714
\end{aligned}$$

2. (a) On simule la réalisation de $(X_1^{(1)}, X_2^{(1)})$ selon à partir de $(U_1^{(1)}, U_2^{(1)})$, où
$$X_1^{(1)} = \lambda\left((1-U_1^{(1)})^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$$
et
$$X_2^{(1)} = \frac{1}{\beta}\left(-\log(1-U_2^{(1)})\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$
Puisque les v.a sont comonotones, on a $U_2^{(1)} = U_1^{(1)}$. On obtient $U_1^{(1)}$ selon
$$-1400\log(1-U_1^{(1)}) = 3728,$$

qui devient

$$U_1^{(1)} = 1 - \exp\left(-\frac{3728}{1400}\right) = 0.9302513.$$

Alors, on obtient

$$X_1^{(1)} = 2000\left((1 - 0.9302513)^{-\frac{1}{3}} - 1\right) = 2858.676$$

et

$$X_2^{(1)} = 2000\left(-\log(1 - 0.9302513)\right)^2 = 14181.61.$$

Ainsi, on obtient

$$S^{(1)} = X_1^{(1)} + X_2^{(1)}) = 2858.676 + 14181.61 = 17040.29$$

(b) On simule la réalisation de $(X_1^{(1)}, X_2^{(1)})$ selon à partir de $(U_1^{(1)}, U_2^{(1)})$, où

$$X_1^{(1)} = \lambda\left((1 - U_1^{(1)})^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$$

et

$$X_2^{(1)} = \frac{1}{\beta}\left(-\log(1 - U_2^{(1)})\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

Puisque les v.a sont antimonotones, on a $U_2^{(1)} = 1 - U_1^{(1)}$. On obtient $U_1^{(1)}$ selon

$$-1400\log(1 - U_1^{(1)}) = 3728,$$

qui devient

$$U_1^{(1)} = 1 - \exp\left(-\frac{3728}{1400}\right) = 0.9302513.$$

Alors, on obtient

$$X_1^{(1)} = 2000\left((1 - 0.9302513)^{-\frac{1}{3}} - 1\right) = 2858.676$$

et

$$X_2^{(1)} = 2000\left(-\log(1 - (1 + 0.9302513))\right)^2 = 10.45473.$$

$$S^{(1)} = X_1^{(1)} + X_2^{(1)}) = 2858.676 + 10.45473 = 2869.131.$$

3. (a) i. On a

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) &= VaR_\kappa(X_1) + VaR_\kappa(X_2) \\ &= \exp\left(\mu_1 + \sigma VaR_\kappa(Z)\right) + \exp\left(\mu_2 + \sigma VaR_\kappa(Z)\right) \\ &= \exp\left(\mu_1\right)\exp\left(\sigma VaR_\kappa(Z)\right) + \exp\left(\mu_2\right)\exp\left(\sigma VaR_\kappa(Z)\right) \\ &= \left(\exp\left(\mu_1\right) + \exp\left(\mu_2\right)\right)\exp\left(\sigma VaR_\kappa(Z)\right) \\ &= \exp\left(a + bVaR_\kappa(Z)\right), \end{aligned}$$

où

$$a = \log\left(e^{\mu_1} + e^{\mu_2}\right)$$

et

$$b = \sigma.$$

ii. On a $a = \log\left(e^3 + e^2\right) = 3.313262$ et $b = 1$. On calcule

$$\begin{aligned} F_S(40) &= \Phi\left(\frac{\log(40) - 3.313262}{1}\right) \\ &= 0.6463993. \end{aligned}$$

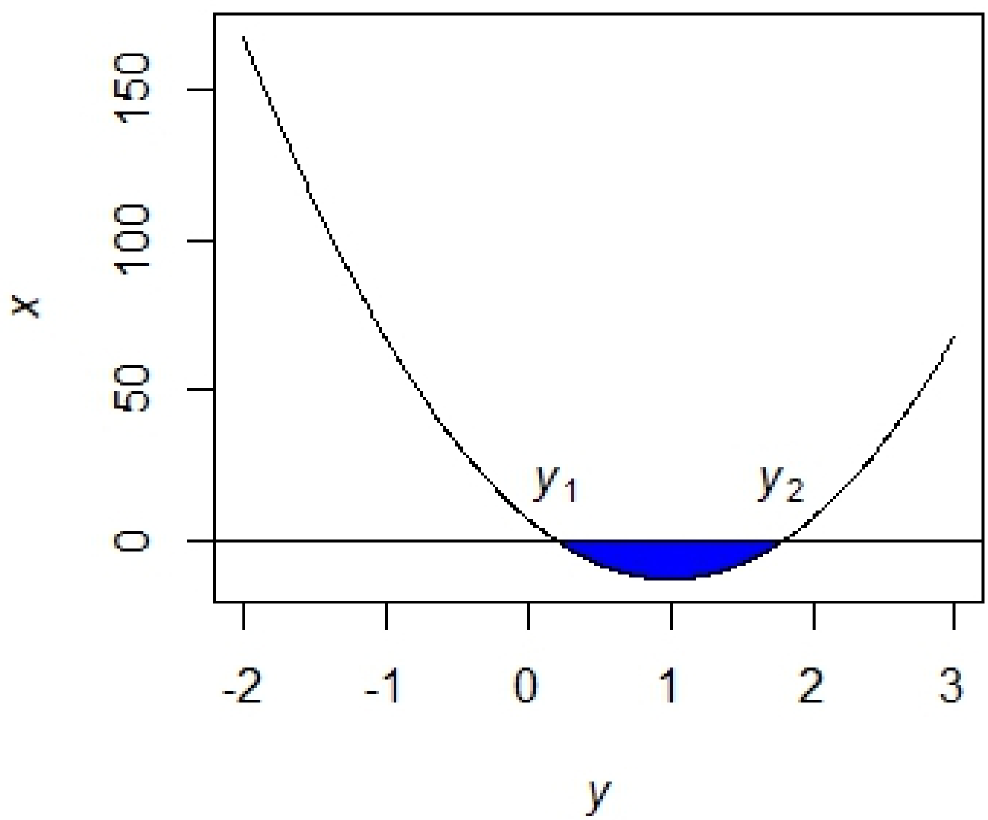
(b) On a

$$\begin{aligned}\Pr(S < x) &= \Pr(VaR_U(X_1) + VaR_{1-U}(X_2) < x)\\ &= \Pr(\exp(\mu_1 + \sigma VaR_U(Z)) + \exp(\mu_2 + \sigma VaR_{1-U}(Z)) < x)\\ &= \Pr(\exp(\mu_1 + \sigma VaR_U(Z)) + \exp(\mu_2 - \sigma VaR_U(Z)) < x).\end{aligned}$$

Soit $y = \exp(\sigma VaR_U(Z))$. Alors, on multiplie les deux côtés de l'équation à l'intérieur de la probabilité par y et on obtient

$$\Pr(S < x) = \Pr(e^{\mu_1} y^2 - xy + e^{\mu_2} < 0).$$

On s'intéresse alors par la partie ombragée dans l'illustration suivante.



L'inégalité est de forme quadratique alors on obtient les limites selon

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4e^{\mu_1+\mu_2}}}{2e^{\mu_1}}$$

sous la contrainte

$$\begin{aligned}x^2 - 4e^{\mu_1+\mu_2} &> 0\\ x^2 &> 4e^{\mu_1+\mu_2}\\ x &> 2e^{\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)}.\end{aligned}$$

On déduit

$$y_1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4e^{\mu_1+\mu_2}}}{2e^{\mu_1}}$$
$$y_2 = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4e^{\mu_1+\mu_2}}}{2e^{\mu_1}}.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(S<0) &= \Pr(e^{\mu_1}y^2 - xy + e^{\mu_2} < 0) \\
&= \Pr(y_1 \leq y \leq y_2) \\
&= \Pr(y_1 \leq \exp(\sigma VaR_U(Z)) \leq y_2) \\
&= \Pr(\frac{1}{\sigma}\ln(y_1) \leq VaR_U(Z) \leq \frac{1}{\sigma}\ln(y_2)) \\
&= \Pr\left(\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln(y_1)\right) \leq U \leq \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln(y_2)\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln(y_1)\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln(y_2)\right).
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\begin{aligned}
c &= \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4e^{\mu_1+\mu_2}}}{2e^{\mu_1}}\right) \\
d &= \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4e^{\mu_1+\mu_2}}}{2e^{\mu_1}}\right) \\
e &= 2e^{\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)}.
\end{aligned}$$

(c) On a $y_1 = 0.2060443$ et $y_2 = 1.785438$ et

$$\Phi(\ln(y_1)) - \Phi(\ln(y_2)) = 0.6618375.$$

4. (a) On a

$$\begin{aligned}
E[X_1] &= c_1 e^{b_1} M_R(a_1) \\
&= 1000e^{-0.12}e^{-3.2\times 0.05 + 0.5\times 0.015^2\times 3.2^2} \\
&= 756.6549;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X_2] &= c_2 e^{b_2} M_R(a_2) \\
&= 2000e^{-0.35}e^{-4.3\times 0.05 + 0.5\times 0.015^2\times 4.3^2} \\
&= 1139.087;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X_1^2] &= c_1^2 e^{2b_1} M_R(2a_1) \\
&= 1000^2 e^{-2\times 0.12}e^{-2\times 3.2\times 0.05 + 0.5\times 0.015^2\times 2^2\times 3.2^2} \\
&= 573847.3;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E[X_2^2] &= c_2^2 e^{2b_2} M_R(2a_2) \\
&= 2000^2 e^{-2\times 0.35} e^{-2\times 4.3\times 0.05+0.5\times 0.015^2\times 2^2\times 4.3^2} \\
&= 1302929;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X_1X_2] &= c_1c_2e^{b_1+b_2} M_R(a_1+a_2) \\
&= 1000\times 2000\times e^{-0.47}\times M_R(7.5) \\
&= 1000\times 2000\times e^{-0.47}\times e^{-7.5\times 0.05+0.5\times 0.015^2\times 7.5^2} \\
&= 864568.5.
\end{aligned}
$$

Alors, on obtient

$$
\begin{aligned}
E[S] &= E[X_1+X_2] \\
&= E[X_1]+E[X_2] \\
&= 756.6549+1139.087 \\
&= 1895.742
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
Var(S) &= E[S^2]-E[S]^2 \\
&= E\left[(X_1+X_2)^2\right]-1895.742^2 \\
&= E[X_1^2]+2E[X_1x_2]+E[X_2^2]-1895.742^2 \\
&= 573847.3+2\times 864568.5+1302929-1895.742^2 \\
&= 12075.57.
\end{aligned}
$$

(b) On a

$$
\begin{aligned}
VaR_{0.005}(R) &= 0.05+0.015VaR_{0.005}(Z) \\
&= 0.05+0.015^2\times(-2.575829) \\
&= 0.01136257; \\
VaR_{0.995}(R) &= 0.05+0.015VaR_{0.995}(Z) \\
&= 0.05+0.015^2\times 2.575829 \\
&= 0.08863744.
\end{aligned}
$$

(c) La fonction $c_ie^{a_iR+b_i}$ est décroissante en R car $a_i<0, i=1,2$. Alors,

$$
\begin{aligned}
VaR_{0.005}(S) &= 1000\times e^{-3.2\times VaR_{0.995}(R)-0.12}+2000\times e^{-4.3\times VaR_{0.995}(R)-0.35} \\
&= 1000\times e^{-3.2\times 0.08863744-0.12}+2000\times e^{-4.3\times 0.08863744-0.35} \\
&= 1630.604; \\
VaR_{0.995}(S) &= 1000\times e^{-3.2\times VaR_{0.005}(R)-0.12}+2000\times e^{-4.3\times VaR_{0.005}(R)-0.35} \\
&= 1000\times e^{-3.2\times 0.01136257-0.12}+2000\times e^{-4.3\times 0.01136257-0.35} \\
&= 2197.422.
\end{aligned}
$$

5. Le couple (X_1,X_2) est antimonotone. On déduit

$$F_{X_1,X_2}(k_1,k_2)=\max(F_{X_1}(k_1)+F_{X_2}(k_2)-1;0).$$

De plus, vu que $\alpha_1(0)>0.5, i=1,2$, on a $F_{X_1}(k_i)$ pour $k_i\geq 0$. Alors,

$$F_{X_1,X_2}(k_1,k_2) = \begin{cases} F_{X_1}(k_1) + F_{X_2}(k_2) - 1, & k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) On sait que

$$f_{X_1,X_2}(k_1,k_2) = F_{X_1,X_2}(k_1,k_2) - F_{X_1,X_2}(k_1-1,k_2) - \quad = \quad F_{X_1,X_2}(k_1,k_2-1) + F_{X_1,X_2}(k_1-1,k_2-1).$$

On déduit les quatre cas possibles.

i. Cas $k_1 = 0, k_2 = 0$:

$$f_{X_1,X_2}(0,0) = F_{X_1,X_2}(0,0) = \alpha_1(0) + \alpha_2(0) - 1$$

ii. Cas $k_1 > 0, k_2 = 0$:

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(k_1,0) &= F_{X_1,X_2}(k_1,0) - F_{X_1,X_2}(k_1-1,0) - 0 + 0 \\ &= \sum_{j=0}^{k_1} \alpha_1(j) + \alpha_2(0) - 1 - \sum_{j=0}^{k_1-1} \alpha_1(j) - \alpha_2(0) + 1 \\ &= \alpha_1(k_1) \end{aligned}$$

iii. Cas $k_1 = 0, k_2 > 0$:

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(0,k_2) &= F_{X_1,X_2}(0,k_2) - 0 - F_{X_1,X_2}(0,k_2) + 0 \\ &= \sum_{j=0}^{k_2} \alpha_2(j) + \alpha_1(0) - 1 - \sum_{j=0}^{k_2-1} \alpha_2(j) - \alpha_1(0) + 1 \\ &= \alpha_2(k_2) \end{aligned}$$

iv. Cas $k_1 > 0, k_2 > 0$:

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(0,k_2) = {} & F_{X_1}(k_1) + F_{X_2}(k_2) - 1 - F_{X_1}(k_1-1) - F_{X_2}(k_2) + 1 - \\ & F_{X_1}(k_1) - F_{X_2}(k_2-1) + 1 + F_{X_1}(k_1-1) + F_{X_2}(k_2-1) - 1 \\ = {} & 0. \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} E[X_1X_2] &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} ij f_{X_1,X_2}(i,j) \\ &= 0 \times 0 \times f_{X_1,X_2}(0,0) + \sum_{j=1}^{m} 0 \times j f_{X_1,X_2}(0,j) + \\ &\qquad \sum_{i=1}^{m} i \times 0 f_{X_1,X_2}(i,0) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} i \times j \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Intuituvement, les v.a. sont jamais non-nuls en même temps, alors l'espérance de leur produit est nul. Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] \\ &= 0 - E[X_1]E[X_2] \\ &= E[X_1]E[X_2]. \end{aligned}$$

De plus, on obtient

$$\begin{aligned} Var(S) &= 2Var(X) + 2Cov(X_1, X_2) \\ &= 2E[X^2] - 2E[X]^2 - 2E[X]^2 \\ &= 2E[X^2] - 4E[X]^2 \end{aligned}$$

(c) On applique un produit de convolution, i.e. $f_S(k) = \sum_{i=0}^{k} f_{X_1,X_2}(i, k-i)$. Pour $k = 0$, on a $f_S(0) = f_{X_1,X_2}(0,0)$. Pour $0 < k \leq m$, on obtient

$$\begin{aligned} f_S(k) &= \sum_{i=0}^{k} f_{X_1,X_2}(i, k-i) \\ &= f_{X_1,X_2}(0,k) + \sum_{i=1}^{k-1} 0 + f_{X_1,X_2}(k,0) \\ &= f_{X_1,X_2}(0,k) + f_{X_1,X_2}(k,0) \end{aligned}$$

(d) Puisque les v.a. ne prennent pas de valeurs positives en même temps, on a

$$\begin{aligned} E\left[\max(S-k;0)\right] &= E\left[\max(X_1+X_2-k;0)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{m} \max(j-k;0) f_{X_1,X_2}(0,j) + \sum_{i=0}^{m} \max(i-k;0) f_{X_1,X_2}(i,0) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \max(j-k;0)\alpha_2(j) + \sum_{i=0}^{m} \max(i-k;0)\alpha_1(i) \\ &= E\left[\max(X_1-k;0)\right] + E\left[\max(X_2-k;0)\right] \end{aligned}$$

(e) Voir le code sur GitHub

6. (a) On a

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq x) \\ &= \Pr(2U + U \leq x) \\ &= \Pr(3U \leq x) \\ &= \frac{x}{3}, \text{ pour } x \in [0,3]. \end{aligned}$$

(b) On obtient

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq x) \\ &= \Pr(2U + (1-U) \leq x) \\ &= \Pr(1 + U \leq x) \\ &= \Pr(U \leq x - 1) \\ &= x - 1, \text{ pour } x \in [1,2] \end{aligned}$$

7. (a) On a

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq x) \\
&= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) \leq x\right) \\
&= \Pr\left((\sigma_1 + \sigma_2)\Phi^{-1}(U) \leq x\right) \\
&= \Pr\left(U \leq \Phi\left(\frac{x}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{x}{\sigma_1 + \sigma_2}\right).
\end{aligned}$$

(b) On obtient

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq x) \\
&= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) \leq x\right) \\
&= \Pr\left((\sigma_1 - \sigma_2)\Phi^{-1}(U) \leq x\right) \\
&= \Pr\left(U \leq \Phi\left(\frac{x}{\sigma_1 - \sigma_2}\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{x}{\sigma_1 - \sigma_2}\right).
\end{aligned}$$

8. (a) On nous demande de démontrer que

$$Cov(X_1^{\min}, X_2^{\min}) \leq Cov(X_1, X_2) \leq Cov(X_1^{\max}, X_2^{\max}).$$

On peut décomposer la covariance par sa définition pour trouver

$$E[X_1^{\min} X_2^{\min}] - E[X_1^{\min}]E[X_2^{\min}] \leq E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] \leq E[X_1^{\max} X_2^{\max}] - E[X_1^{\max}]E[X_2^{\max}].$$

On sait que $E[X_i^{\min}] = E[X_i] = E[X_i^{\max}]$, pour $i = 1, 2$, alors

$$E[X_1^{\min} X_2^{\min}] \leq E[X_1 X_2] \leq E[X_1^{\max} X_2^{\max}],$$

ce qu'on doit maintenant démontrer. On sait que

$$E[X_1 X_2] = \int_0^\infty \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \text{ et}$$

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1, x_2).$$

On développe :

$$F_{X_1^{\min},X_2^{\min}}(x_1, x_2) \leq F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \leq F_{X_1^{\max},X_2^{\max}}(x_1, x_2)$$

$$\overline{F}_{X_1^{\min},X_2^{\min}}(x_1, x_2) \leq \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \leq \overline{F}_{X_1^{\max},X_2^{\max}}(x_1, x_2)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{X_1^{\min},X_2^{\min}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{X_1^{\max},X_2^{\max}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$E[X_1^{\min} X_2^{\min}] \leq E[X_1 X_2] \leq E[X_1^{\max} X_2^{\max}],$$

ce qui prouve le résultat.

(b) On demande de démontrer que

$$\rho_P(X_1^{\min}, X_2^{\min}) \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P(X_1^{\max}, X_2^{\max}). \tag{10.1}$$

On sais que

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$

et que

$$Var(X_i^{\min}) = Var(X_i) = Var(X_i^{\max}), \text{ pour } i = 1, 2.$$

Alors le terme $\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}$ est une constante commune à chaque terme de l'équation (10.1). Pour démontrer (10.1), on doit seulement démontrer que

$$Cov(X_1^{\min}, X_2^{\min}) \leq Cov(X_1, X_2) \leq Cov(X_1^{\max}, X_2^{\max}),$$

qui a déjà été démontré dans la partie a).

9. (a) On répète la démarche présentée dans la question 8. Pour démontrer que

$$\rho_P(X_1, X_2) \leq \rho_P(X_1', X_2') \text{ et}$$

$$Cov(X_1, X_2) \leq Cov(X_1', X_2'),$$

on doit démontrer que

$$E[X_1 X_2] \leq E[X_1' X_2'].$$

On y va.

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &\leq F_{X_1',X_2'}(x_1, x_2) \\ \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &\leq \overline{F}_{X_1',X_2'}(x_1, x_2) \\ \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_{X_1',X_2'}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ E[X_1 X_2] &\leq E[X_1' X_2']. \end{aligned}$$

(b) La fonction de répartition de $M = \max(X_1, X_2)$ est

$$F_M(x) = \Pr(M \leq x) = \Pr(\max(X_1, X_2) \leq x) = F_{X_1,X_2}(x, x).$$

On conclut donc que

$$F_{X_1,X_2}(x, x) \leq F_{X_1',X_2'}(x, x) \text{ et}$$

$$F_M(x) \leq F_{M'}(x).$$

Note : $M' \preceq_{st} M$.

(c)

$$\begin{aligned} F_M(x) &\leq F_{M'}(x) \\ \overline{F}_M(x) &\geq \overline{F}_{M'}(x) \\ \int_0^\infty \overline{F}_M(m)\mathrm{d}m &\geq \int_0^\infty \overline{F}_{M'}(m)\mathrm{d}m \\ E[M] &\geq E[M'] \end{aligned}$$

Note : $M' \preceq_{st} M$ implique $E[M] \geq E[M']$.

(d) On simplifie premièrement l'expression $E[\max(M-x;0)]$.

$$\begin{aligned}
E[\max(M-x;0)] &= \int_0^\infty \max(m-x;0) f_M(m)\mathrm{d}m \\
&= \int_0^x 0 f_M(m)dm + \int_x^\infty (m-x) f_M(m)\mathrm{d}m \\
&= -(m-x)\overline{F}_M(x)|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{d}{dm}(m-x)\overline{F}_M(m)\mathrm{d}m \\
&= -0 + 0 + \int_x^\infty \overline{F}_M(m)\mathrm{d}m = \int_x^\infty \overline{F}_M(m)\mathrm{d}m.
\end{aligned}$$

On applique le résultat de la partie b).

$$\begin{aligned}
F_M(m) &\leq F_{M'}(m) \\
\overline{F}_M(m) &\geq \overline{F}_{M'}(m) \\
\int_x^\infty \overline{F}_M(m)\mathrm{d}m &\geq \int_x^\infty \overline{F}_{M'}(m)\mathrm{d}m \\
E[\max(M-x;0)] &\geq E[\max(M'-x;0)].
\end{aligned}$$

Note : $M' \preceq_{st} M$ implique $M' \preceq_{sl} M$. De plus, $M' \preceq_{sl} M$ implique $E[\max(M-x;0)] \geq E[\max(M'-x;0)]$.

10. Certains calculs sont fait en R, voir GitHub.

(a) On a

$$VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(X_1) + VaR_\kappa(X_2)$$

On cherche la VaR de X_1 et X_2. On isole pour x dans $u = F_{X_i}(x), i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
u &= 0.9 + 0.1\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) \\
\frac{u-0.9}{0.1} &= 1 - e^{-\frac{x}{2}} \\
e^{-\frac{x}{2}} &= 1 - \frac{u-0.9}{0.1} \\
-\frac{x}{2} &= \ln\left(1 - \frac{u-0.9}{0.1}\right) \\
x &= -2\ln\left(1 - \frac{u-0.9}{0.1}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= 0.8 + 0.2\left(1 - e^{-x}\right) \\
\frac{u-0.8}{0.2} &= 1 - e^{-x} \\
e^{-x} &= 1 - \frac{u-0.8}{0.2} \\
x &= -\ln\left(1 - \frac{\kappa-0.8}{0.2}\right).
\end{aligned}$$

On conclut

$$VaR_\kappa(X_1) = \begin{cases} -2\ln\left(1 - \frac{\kappa-0.9}{0.1}\right), & \text{si } 0.9 \leq \kappa \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases};$$

$$VaR_\kappa(X_2) = \begin{cases} -\ln\left(1 - \frac{\kappa-0.8}{0.2}\right), & \text{si } 0.8 \leq \kappa \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases};$$

et

$$VaR_\kappa(S) = \begin{cases} -\ln\left(1 - \frac{\kappa-0.8}{0.2}\right), & \text{si } 0.8 \le \kappa \le 0.9 \\ -\ln\left(1 - \frac{\kappa-0.8}{0.2}\right) - 2\ln\left(1 - \frac{\kappa-0.9}{0.1}\right), & \text{si } 0.9 \le \kappa \le 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

On calcule

$$VaR_{0.5}(S) = 0.0000000, VaR_{0.85}(S) = 0.2876821, VaR_{0.999}(S) = 14.5086577.$$

(b) Note : cette question est sous l'hypothèse H_1. Pour des variables comonotones, on a

$$TVaR_\kappa(S) = TVaR_\kappa(X_1) + TVaR_\kappa(X_2).$$

Soit $I_i \sim Bern(q_i)$ et $Y_i \sim Exp(\beta_i)$. Alors,

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X_i) &= \frac{q_i E\left[Y_i 1\!\!1_{Y_i > VaR_\kappa(X_i)}\right] + VaR_\kappa(X_i)\left(F_{X_i}(VaR_\kappa(X_i)) - \kappa\right)}{1-\kappa} \\ &= \frac{q_i \overline{F}_{Y_i}(VaR_\kappa(Y_i))(VaR_\kappa(X_i) + 1/\beta_i) + VaR_\kappa(X_i)\left(F_{X_i}(VaR_\kappa(X_i)) - \kappa\right)}{1-\kappa} \\ &= \frac{\overline{F}_{X_i}(VaR_\kappa(X_i))\{VaR_\kappa(X_i) + 1/\beta_i\} + VaR_\kappa(X_i)\left(F_{X_i}(VaR_\kappa(X_i)) - \kappa\right)}{1-\kappa}. \end{aligned}$$

Si X_i est continu sur $(VaR_\kappa(X_i), \infty)$, on a

$$TVaR_\kappa(X_i) = VaR_\kappa(X_i) + 1/\beta_i.$$

On calcule

$$\begin{aligned} TVaR_{0.5}(X_1) &= \frac{0.1 * 2 + 0}{0.5} = 0.4 \\ TVaR_{0.85}(X_1) &= \frac{0.1 * 2 + 0}{0.15} = 1.33333 \\ TVaR_{0.999}(X_1) &= -2\ln\left(1 - \frac{0.999 - 0.9}{0.1}\right) + 2 = 11.21034 \\ TVaR_{0.5}(X_2) &= \frac{0.2 * 1 + 0}{0.5} = 0.4 \\ TVaR_{0.85}(X_2) &= -\ln\left(1 - \frac{0.85 - 0.8}{0.2}\right) + 1 = 1.28768 \\ TVaR_{0.999}(X_2) &= -\ln\left(1 - \frac{0.999 - 0.8}{0.2}\right) + 1 = 6.29831 \\ TVaR_{0.5}(S) &= 0.4 + 0.4 = 0.8 \\ TVaR_{0.85}(S) &= 1 + 1.28768 = 2.621013 \\ TVaR_{0.999}(S) &= 11.21034 + 6.29831 = 17.50865 \end{aligned}$$

Note : solution alternative sur GitHub.

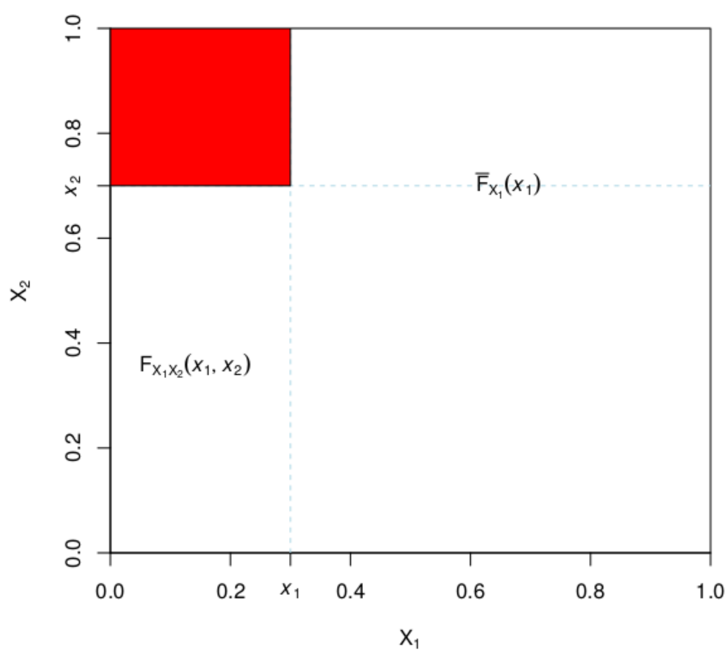
(c) Sous l'hypothèse H_1, on a

$$\begin{aligned} Pr(S = 0) &= Pr(X_1 = 0, P_2 = 0) \\ &= F_{X_1,X_2}(0, 0) \\ &= \min(0.9; 0.8) \\ &= 0.8. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse H_2, on a

$$\begin{aligned} Pr(S=0) &= Pr(X_1=0, P_2=0) \\ &= F_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= \max(0.9+0.8-1;0) \\ &= 0.7. \end{aligned}$$

(d) On sait que $Pr(X_1 < x_1, X_2 > x_2) = 1 - \overline{F}_{X_1}(x_1) - F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$, comme présenté dans l'illustration suivante.



Pour H_1,

$$\begin{aligned} Pr(X_1=0, X_2>0) &= 1-\overline{F}_{X_1}(0) - F_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= 1-0.1-\min(0.9;0.8) \\ &= 1-0.1-0.8 = 0.1. \end{aligned}$$

Pour H_2,

$$\begin{aligned} Pr(X_1=0, X_2>0) &= 1-\overline{F}_{X_1}(0) - F_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= 1-0.1-\max(0.9+0.8-1;0) \\ &= 1-0.1-0.7 = 0.2. \end{aligned}$$

(e) Pour H_1,

$$\begin{aligned} Pr(X_1>0, X_2=0) &= 1-\overline{F}_{X_2}(0) - F_{X_1,X_2}(0,0) \\ &= 1-0.2-\min(0.9;0.8) \\ &= 1-0.2-0.8 = 0. \end{aligned}$$

Pour H_2,

$$\begin{aligned}Pr(X_1>0,X_2=0)&=1-\overline{F}_{X_2}(0)-F_{X_1,X_2}(0,0)\\&=1-0.2-\max(0.9+0.8-1;0)\\&=1-0.2-0.7=0.1.\end{aligned}$$

(f) Pour H_1,

$$\begin{aligned}Pr(X_1>0,X_2>0)&=\overline{F}_{X_1,X_2}(0,0)\\&=1-F_{X_1}(0)-F_{X_2}(0)+F_{X_1,X_2}(0,0)\\&=1-0.9-0.8+\min(0.9;0.8)\\&=1-0.9-0.8+0.8=0.1.\end{aligned}$$

Pour H_2,

$$\begin{aligned}Pr(X_1>0,X_2>0)&=\overline{F}_{X_1,X_2}(0,0)\\&=1-F_{X_1}(0)-F_{X_2}(0)+F_{X_1,X_2}(0,0)\\&=1-0.9-0.8+\max(0.9+0.8-1;0)\\&=1-0.9-0.8+0.7=0.\end{aligned}$$

(g) i. On cherche $Pr(X_1>x,X_2=0)=P(X_1>x)-P(X_1>x,X_2>0)$, mais $Pr(X_1>0,X_2>0)=0$. Alors

$$Pr(X_1>x,X_2=0)=\overline{F}_{X_1}(x).$$

ii. On cherche $Pr(X_1=0,X_2>x)=P(X_2>x)-P(X_1>0,X_2>x)$, mais $Pr(X_1>0,X_2>0)=0$. Alors

$$Pr(X_1=x,X_2>0)=\overline{F}_{X_2}(x).$$

iii.

$$Pr(S>x)=Pr(X_1>x,X_2=0)+Pr(X_1=0,X_2>x)+\sum_{\alpha\in(0,x)}Pr(X_1>\alpha,X_2>x-\alpha).$$

Mais on sait que $Pr(X_1>0,X_2>0)=0$, alors

$$Pr(S>x)=Pr(X_1>x,X_2=0)+Pr(X_1=0,X_2>x)=\overline{F}_{X_1}(x)+\overline{F}_{X_2}(x).$$

iv. On obtient

$$\begin{aligned}F_S(x)&=1-Pr(S>x)\\&=1-\overline{F}_{X_1}(x)-\overline{F}_{X_2}(x)\\&=1-(1-F_{X_1}(x))-(1-F_{X_2}(x))\\&=F_{X_1}(x)+F_{X_2}(x)-1\end{aligned}$$

v. On calcule

$$
\begin{aligned}
E[\max(S-x;0)] &= \int_x^\infty \overline{F}_S(s)ds \\
&= \int_x^\infty \left(1 - F_{X_1}(s) - F_{X_2}(s) + 1\right) ds \\
&= \int_x^\infty \left(1 - F_{X_1}(s)\right) + \left(1 - F_{X_2}(s)\right) ds \\
&= \int_x^\infty \overline{F}_{X_1}(s)ds + \int_x^\infty \overline{F}_{X_2}(s)ds \\
&= E[\max(X_1-x;0)] + E[\max(X_2-x;0)]
\end{aligned}
$$

vi. On calcule premièrement la VaR_κ.

$$
\begin{aligned}
F_S(3) &= F_{X_1}(3) + F_{X_2}(3) - 1 \\
&= 0.9 + 0.1\left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) + 0.8 + 0.2\left(1 - e^{-3}\right) - 1 \\
&= 0.96773;
\end{aligned}
$$

On peut aussi trouver une formule générale pour $VaR_\kappa(S)$. On définit $y = e^{-\frac{x}{2}}$. On a $F_S(0) = F_{X_1}(3) + F_{X_2}(3) - 1 = 0.7$, alors $VaR_\kappa(S) = 0$ pour $0 \leq \kappa < 0.7$. Pour $\kappa \geq 0.7$ on cherche x tel que $u = F_S(x)$

$$
\begin{aligned}
u &= 0.9 + 0.1\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) + 0.8 + 0.2\left(1 - e^{-x}\right) - 1 \\
u - 0.7 &= 0.1(1-y) + 0.2(1-y^2) \\
0 &= 0.2y^2 + 0.1y + (u-1) \\
e^{-\frac{x}{2}} &= \frac{-0.1 + \sqrt{0.1^2 - 4(0.2)(u-1)}}{2(0.2)} \\
x &= -2\ln\left(\frac{-0.1 + \sqrt{0.81 - 0.8u}}{0.4}\right),
\end{aligned}
$$

alors, on obtient

$$
VaR_\kappa(S) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq \kappa \leq 0.7 \\ -2\ln\left(\frac{-0.1+\sqrt{0.81-0.8\kappa}}{0.4}\right), & \text{si } 0.7 \leq \kappa \leq 1 \end{cases}.
$$

Ensuite, on présente deux méthodes pour calculer la $TVaR_\kappa$. On sait que

$$
TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} E\left[\max(X - VaR_\kappa(X)); 0\right].
$$

On déduit alors

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(S) &= VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa} E\left[\max(S - VaR_\kappa(S)); 0\right] \\
&= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa} \left\{ E\left[\max(X_1 - VaR_\kappa(S)); 0\right] + E\left[\max(X_2 - VaR_\kappa(S)); 0\right] \right\} \\
&= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa} \left\{ \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} \overline{F}_{X_1}(s) ds + \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} \overline{F}_{X_2}(s) ds \right\} \\
&= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa} \left\{ \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} 0.1 e^{-\frac{x}{2}} dx + \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} 0.2 e^{-x} dx \right\} \\
&= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa} \left\{ -0.1(2) e^{-\frac{x}{2}} |_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} - 0.2(1) e^{-x} |_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} \right\} \\
&= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa} \left\{ 0.2 e^{-\frac{VaR_\kappa(S)}{2}} + 0.2 e^{-VaR_\kappa(S)} \right\} \\
&= VaR_\kappa(S) + \frac{1}{1-\kappa} \left\{ 0.2 e^{-\frac{VaR_\kappa(S)}{2}} + 0.2 e^{-VaR_\kappa(S)} \right\} \\
&= 3 + \frac{0.2}{1 - 0.96773} \left\{ e^{-\frac{3}{2}} + e^{-3} \right\} \\
&= 4.6915.
\end{aligned}
$$

On présente maintenant une autre approche pour trouver $TVaR_\kappa(S)$. En posant $VaR_\kappa(S) = s$, on trouve

$$
TVaR_\kappa(S) = \frac{E\left[S \times 1\!\!1_{\{S>s\}}\right] + s\left(F_S(s) - \kappa\right)}{1-\kappa}.
$$

Si $s = 0$, $\frac{s(F_S(s)-\kappa)}{1-\kappa} = 0$. Si $s > 0$, $F_S(s) = \kappa$ et $\frac{s(F_S(s)-\kappa)}{1-\kappa} = 0$. Alors, on a

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(S) &= \frac{E\left[S 1\!\!1_{\{S>s\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[(X_1 + X_2) 1\!\!1_{\{X_1+X_2>s\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[X_1 1\!\!1_{\{X_1+X_2>s\}}\right] + E\left[X_2 1\!\!1_{\{X_1+X_2>s\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[X_1 1\!\!1_{\{X_1>s-X_2\}}\right] + E\left[X_2 1\!\!1_{\{X_2>s-X_1\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{E\left[X_1 1\!\!1_{\{X_1>s\}}\right] + E\left[X_2 1\!\!1_{\{X_2>s\}}\right]}{1-\kappa} \\
&= \frac{\overline{F}_{X_1}(s) TVaR_{F_{X_1}(s)}(X_1) + \overline{F}_{X_2}(s) TVaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)}{1-\kappa}.
\end{aligned}
$$

En b), on a développé

$$
TVaR_\kappa(X_i) = \frac{\overline{F}_{X_i}(VaR_\kappa(X_i))\{VaR_\kappa(X_i) + 1/\beta_i\} + VaR_\kappa(X_i)\left(F_{X_i}(VaR_\kappa(X_i)) - \kappa\right)}{1-\kappa};
$$

$$
TVaR_{F_{X_i}(s)}(X_i) = \frac{\overline{F}_{X_i}(VaR_{F_{X_i}(s)}(X_i))\{VaR_{F_{X_i}(s)}(X_i) + 1/\beta_i\} + VaR_{F_{X_i}(s)}(X_i)\Big(F_{X_i}(VaR_{F_{X_i}(s)}(X_i)) - F}{1 - F_{X_i}(s)}
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(S) &= \frac{\overline{F}_{X_1}(s)TVaR_{F_{X_1}(s)}(X_1) + \overline{F}_{X_2}(s)TVaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)}{1-\kappa} \\
&= \frac{\overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1))\{VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1) + 1/\beta_1\} + VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)\left(F_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)) - F_{X_1}(\right.}{1-\kappa} \\
&\quad + \frac{\overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_1))\{VaR_{F_{X_2}(s)}(X_1) + 1/\beta_2\} + VaR_{F_{X_2}(s)}(X_1)\left(F_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)\right.}{1-\kappa} \\
&= \frac{VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)(\overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)) + F_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)) - F_{X_1}(s)) + \overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)}{1-\kappa} \\
&\quad + \frac{VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)(\overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)) + F_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)) - F_{X_2}(s)) + \overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X}}}{1-\kappa} \\
&= \frac{VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)\overline{F}_{X_1}(s) + \overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1))/\beta_1}{1-\kappa} \\
&\quad + \frac{VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)\overline{F}_{X_2}(s) + \overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2))/\beta_2}{1-\kappa}.
\end{aligned}
$$

De plus, $VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1) = VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2) = s$.

$$
\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(S) &= \frac{VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1)\overline{F}_{X_1}(s) + \overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1))/\beta_1}{1-\kappa} \\
&\quad + \frac{VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2)\overline{F}_{X_2}(s) + \overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2))/\beta_2}{1-\kappa} \\
&= \frac{s(\overline{F}_{X_1}(s) + \overline{F}_{X_2}(s))}{1-\kappa} + \frac{\overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1))/\beta_1 + \overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2))/\beta_2}{1-\kappa} \\
&= s + \frac{\overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(s)}(X_1))/\beta_1 + \overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(s)}(X_2))/\beta_2}{1-\kappa}.
\end{aligned}
$$

On conclut que

$$
TVaR_{\kappa}(S) = VaR_{\kappa}(S) + \frac{\overline{F}_{X_1}(VaR_{F_{X_1}(VaR_{\kappa}(S))}(X_1))/\beta_1 + \overline{F}_{X_2}(VaR_{F_{X_2}(VaR_{\kappa}(S))}(X_2))/\beta_2}{1-\kappa}.
$$

Les cas particuliers sont

$$
TVaR_{\kappa}(S) = \begin{cases} \frac{E[X_1]+E[X_1]}{1-\kappa}, & \text{si } 0 \leq \kappa < 0.7 \\ VaR_{\kappa}(S) + \frac{\overline{F}_{X_1}(VaR_{\kappa}(s))/\beta_1 + \overline{F}_{X_1}(VaR_{\kappa}(s))/\beta_2}{1-\kappa}, & \text{si } 0.7 \leq \kappa < 1. \end{cases}.
$$

11. Une mesure de risque est homogène si $\rho(aX) = a\rho(X)$. On a

$$
\begin{aligned}
\rho_h^{ESS}(aX) &= \frac{E\left[aXe^{haX}\right]}{E\left[e^{haX}\right]} \\
&= a\rho_{ah}^{ESS}(X) \neq \rho_h^{ESS}(X)
\end{aligned}
$$

12. On a

$$
\overline{F}_X(x) = \Pr(X > x) = 1 - \kappa \leq e^{-tx}\mathcal{M}_X(t)
$$

On isole x

$$e^{-tx} \geq \frac{1-\kappa}{\mathcal{M}_X(t)}$$

et on trouve

$$x \leq -\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1-\kappa}{\mathcal{M}_X(t)}\right) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\mathcal{M}_X(t)}{1-\kappa}\right)$$

On obtient le résultat souhaité :

$$VaR_\kappa(X) \leq \varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\mathcal{M}_X(t)}{1-\kappa}\right),$$

13. (a) On a

$$\begin{aligned}
\varphi_\kappa(t) &= \frac{1}{t}\left(\ln\left(e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right) - \ln(1-\kappa)\right) \\
&= \frac{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}{t} - \frac{\ln(1-\kappa)}{t} \\
&= \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t - \frac{\ln(1-\kappa)}{t}
\end{aligned}$$

(b) On identifie $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{\ln(1-\kappa)}{t^2} = 0.$$

On obtient

$$t_\kappa = \frac{1}{\sigma}\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}.$$

(c) On remplace t_κ dans $\varphi_\kappa(t)$:

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa(X) &= \varphi_\kappa(t_\kappa) \\
&= \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t_\kappa - \frac{\ln(1-\kappa)}{t_\kappa} \\
&= \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{\sigma}\sqrt{-2\ln(1-\kappa)} - \frac{\ln(1-\kappa)}{\frac{1}{\sigma}\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}} \\
&= \mu + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma\sqrt{-\ln(1-\kappa)} + \sigma\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-\ln(1-\kappa)} \\
&= \mu + \frac{2}{\sqrt{2}}\sigma\sqrt{-\ln(1-\kappa)} \\
&= \mu + \sigma\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}
\end{aligned}$$

14. (a) On a

$$\begin{aligned}
\varphi_\kappa(t) &= \frac{1}{t}\left(\ln\left(e^{\lambda(\mathcal{M}_B(t)-1)}\right) - \ln(1-\kappa)\right) \\
&= \frac{\lambda(\mathcal{M}_B(t)-1)}{t} - \frac{\ln(1-\kappa)}{t} \\
&= \frac{\lambda\mathcal{M}_B(t) - 1 - \ln(1-\kappa)}{t}
\end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{M}_B(t) = \frac{1}{1-t}.$$

(b) On dérive

$$\varphi\prime(t) = \frac{1}{t}\lambda\mathcal{M}_B'(t) - \frac{1}{t^2}(\lambda\mathcal{M}_B(t) - 1 - \ln(1-\kappa))$$

On cherche t tel que

$$\varphi\prime(t) = 0.$$

On a

$$\lambda t\mathcal{M}'_B(t) - (\lambda\mathcal{M}_B(t) - 1 - \ln(1-\kappa)) = 0$$

L'expression devient

$$\lambda t\frac{1}{(1-t)^2} - \left(\lambda\frac{1}{1-t} - 1 - \ln(1-\kappa)\right) = 0$$

$$\lambda t - \left(\lambda(1-t) - (1-t)^2 - (1-t)^2\ln(1-\kappa)\right) = 0$$

On pose

$$u = 1-t.$$

On a

$$\lambda(1-u) - \left(\lambda u - u^2 - u^2\ln(1-\kappa)\right) = 0$$

$$(1+\ln(1-\kappa))u^2 - 2\lambda u + \lambda = 0$$

On obtient

$$\begin{aligned} t_\kappa &= 1 - \frac{2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda(1+\ln(1-\kappa))}}{2\times(1+\ln(1-\kappa))} \\ &= 1 - \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda(1+\ln(1-\kappa))}}{2\times(1+\ln(1-\kappa))} \end{aligned}$$

(c) On calcule

$$t_{0.9} = 1 - \frac{1-\sqrt{1-(1+\ln(1-0.9))}}{2\times(1+\ln(1-0.9))} = 0.801384519074$$

On obtient

$$\begin{aligned} eVaR_{0.9}(X) &= \varphi_\kappa(t_{0.9}) \\ &= \frac{\lambda\mathcal{M}_B(t_{0.9}) - 1 - \ln(1-0.9)}{t_{0.9}} \\ &= \frac{\lambda\frac{1}{1-t_{0.9}} - 1 - \ln(1-0.9)}{t_{0.9}} \\ &= \frac{\frac{1}{1-0.801384519074} - 1 - \ln(1-0.9)}{0.801384519074} \\ &= 7.90811302307 \end{aligned}$$

15. Soit

$$\alpha_1(x_1,x_2) = \left(1-e^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-e^{-\beta_2 x_2}\right)$$

et

$$\alpha_2(x_1,x_2) = \left(1-e^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-e^{-\beta_2 x_2}\right)e^{-\beta_1 x_1}e^{-\beta_2 x_2}.$$

Alors,

$$F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x_1,x_2) = \alpha_1(x_1,x_2) + \theta\alpha_2(x_1,x_2).$$

(a) On a

$$\theta \leq \theta'$$

$$\theta\alpha_2(x_1,x_2) \leq \theta'\alpha_2(x_1,x_2)$$

$$\alpha_1(x_1,x_2) + \theta\alpha_2(x_1,x_2) \leq \alpha_1(x_1,x_2) + \theta'\alpha_2(x_1,x_2)$$

$$F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x_1,x_2) \leq F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x_1,x_2).$$

(b) i. On a

$$\begin{aligned} F_{M^{(\theta)}}(x) &= \Pr(\max(X_1^{(\theta)}; X_2^{(\theta)}) \leq x) \\ &= \Pr(X_1^{(\theta)} \leq x; X_2^{(\theta)} \leq x) \\ &= F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x, x). \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{gathered} F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x, x) \leq F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x, x) \\ F_{M^{(\theta)}}(x) \leq F_{M^{(\theta')}}(x) \end{gathered}$$

ii. On obtient

$$\begin{gathered} F_{M^{(\theta)}}(x) \leq F_{M^{(\theta')}}(x) \\ \overline{F}_{M^{(\theta)}}(x) \geq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(x) \\ E\left[M^{(\theta)}\right] \geq E\left[M^{(\theta')}\right]. \end{gathered}$$

iii. On sait que

$$VaR_\kappa(M^{(\theta)}) = \overline{F}_{M^{(\theta)}}^{-1}(1-\kappa)$$

et

$$\overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) = 1 - \kappa.$$

De plus,

$$\overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) = \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) = 1 - \kappa.$$

Alors,

$$\begin{gathered} \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) = \overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) \geq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) \\ \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) \geq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) \end{gathered}$$

et on conclut

$$VaR_\kappa(M^{(\theta')}) \leq VaR_\kappa(M^{(\theta)}).$$

(c) i. On a

$$\begin{aligned} F_{M^{(\theta)}}(x) &= \Pr(\min(X_1^{(\theta)}; X_2^{(\theta)}) \leq x) \\ &= 1 - \Pr(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x) - F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x, x). \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{gathered} F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x, x) \leq F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x, x) \\ -F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x, x) \geq -F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x, x) \\ F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x) - F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x, x) \geq F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x) - F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x, x) \\ F_{M^{(\theta)}}(x) \geq F_{M^{(\theta')}}(x). \end{gathered}$$

ii. On calcule

$$\begin{gathered} F_{M^{(\theta)}}(x) \geq F_{M^{(\theta')}}(x) \\ \overline{F}_{M^{(\theta)}}(x) \leq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(x) \\ E\left[M^{(\theta)}\right] \leq E\left[M^{(\theta')}\right]. \end{gathered}$$

iii. On sait que

$$VaR_\kappa(M^{(\theta)}) = \overline{F}^{-1}_{M^{(\theta)}}(1-\kappa)$$

et

$$\overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) = 1-\kappa.$$

De plus,

$$\overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) = \overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) = 1-\kappa.$$

Alors, on a

$$\overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) = \overline{F}_{M^{(\theta)}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)})) \leq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)}))$$

$$\overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta')})) \leq \overline{F}_{M^{(\theta')}}(VaR_\kappa(M^{(\theta)}))$$

et on conclut

$$VaR_\kappa(M^{(\theta')}) \geq VaR_\kappa(M^{(\theta)}).$$

16. (a) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{X_1}(t) &= \mathcal{P}_{X_1,X_2}(t,1)\\ &= (0.18+0.05t+0.05+0.72t)^3\\ &= (0.23+0.77t)^3\\ &= 0.012167+0.122199t+0.409101t^2+0.456533t^3.\end{aligned}$$

On conclut

k	$\Pr(X_1 = k)$
0	0.012167
1	0.122199
2	0.409101
3	0.456533

(b) Idem à a)

(c) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_S(t) &= \mathcal{P}_{X_1,X_2}(t,t)\\ &= (0.18+0.05t+0.05t+0.72t^2)^3\\ &= (0.18+0.1t+0.72t^2)^3\\ &= 0.005832+0.00972t+0.075384t^2+0.07876t^3+0.301536t^4+0.15552t^5+0.373248t^6.\end{aligned}$$

(d) On obtient

k	$\Pr(S = k)$
0	0.005832
1	0.00972
2	0.075384
3	0.07876
4	0.301536
5	0.15552
6	0.373248

(e) On a

$$\begin{aligned}
E\left[X_1 \mathbb{1}_{\{X_2=0\}}\right] &= \sum_{x_1=0}^{3} x_1 \times \Pr(X_1 = x_1, X_2 = 0) \\
&= 0 \times 0.005832 + 1 \times 0.00486 + 2 \times 0.00135 + 3 \times 0.000125 \\
&= 0.007935.
\end{aligned}$$

(f) On a

$$\begin{aligned}
E\left[Se^{0.02S}\right] &= \sum_{s=0}^{6} se^{0.02s} \times \Pr(S = s) \\
&= 0.00972e^{0.02} + 0.075384 \times 2e^{0.04} + 0.07876 \times 3e^{0.06} + 0.301536 \times 4e^{0.08} + 0.15552 \times 5e^{0.1} + 0.373248 \\
&= 5.108725;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[e^{0.02S}\right] &= \sum_{s=0}^{6} e^{0.02s} \times \Pr(S = s) \\
&= 0.005832 + 0.00972e^{0.02} + 0.075384e^{0.04} + 0.07876e^{0.06} + 0.301536e^{0.08} + 0.15552e^{0.1} + 0.373248e^{0.12} \\
&= 1.097201.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\rho_{0.02}^{ESS}(S) &= \frac{5.108725}{1.097201} \\
&= 4.656143.
\end{aligned}$$

17. (a) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\underline{X}}(\underline{t}) &= E\left[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3}\right] \\
&= E\left[e^{\frac{t_1}{\beta_1}(Y_1+Y_4) + \frac{t_2}{\beta_2}(Y_2+Y_4+Y_5) + \frac{t_3}{\beta_3}(Y_3+Y_4+Y_5)}\right] \\
&= E\left[e^{\frac{t_1}{\beta_1}Y_1} e^{\frac{t_2}{\beta_2}Y_2} e^{\frac{t_3}{\beta_3}Y_3} e^{\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right)Y_4} e^{\left(\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right)Y_5}\right] \\
&\overset{\text{ind}}{=} E\left[e^{\frac{t_1}{\beta_1}Y_1}\right] E\left[e^{\frac{t_2}{\beta_2}Y_2}\right] E\left[e^{\frac{t_3}{\beta_3}Y_3}\right] E\left[e^{\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right)Y_4}\right] E\left[e^{\left(\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right)Y_5}\right] \\
&= M_{Y_1}\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right) \times M_{Y_2}\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right) \times M_{Y_3}\left(\frac{t_3}{\beta_3}\right) \times M_{Y_4}\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right) \times M_{Y_5}\left(\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right),
\end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\underline{X}}(\underline{t}) &= M_{Y_1}\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right) \times M_{Y_2}\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right) \times M_{Y_3}\left(\frac{t_3}{\beta_3}\right) \times M_{Y_4}\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right) \times M_{Y_5}\left(\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right) \\
&= \left(1-\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{-\gamma_1} \times \left(1-\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-\gamma_2} \times \left(1-\frac{t_3}{\beta_3}\right)^{-\gamma_3} \times \left(1-\frac{t_1}{\beta_1}-\frac{t_2}{\beta_2}-\frac{t_3}{\beta_3}\right)^{-\gamma_4} \times \left(1-\frac{t_2}{\beta_2}-\frac{t_3}{\beta_4}\right)^{-\gamma_5}.
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\underline{X}}(\underline{t}) &= \mathcal{M}_{\underline{X}}(-\underline{t}) \\
&= \left(1+\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{-\gamma_1} \times \left(1+\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-\gamma_2} \times \left(1+\frac{t_3}{\beta_3}\right)^{-\gamma_3} \times \left(1+\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_3}\right)^{-\gamma_4} \times \left(1+\frac{t_2}{\beta_2}+\frac{t_3}{\beta_4}\right)^{-\gamma_5}.
\end{aligned}
$$

(b) D'abord, on calcule

$$
\begin{aligned}
E[X_1] &= \frac{1}{\beta_1} E[Y_1+Y_4] \\
&= \frac{1}{\beta_1}\left(E[Y_1]+E[Y_4]\right) \\
&= \frac{1}{\beta_1}\left(\gamma_1+\gamma_4\right); \\
E[X_2] &= \frac{1}{\beta_2}\left(\gamma_2+\gamma_4+\gamma_5\right); \\
E[X_3] &= \frac{1}{\beta_3}\left(\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5\right).
\end{aligned}
$$

Ensuite, on a

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1X_2\right] &= E\left[\frac{1}{\beta_1}\left(Y_1+Y_4\right) \times \frac{1}{\beta_2}\left(Y_2+Y_4+Y_5\right)\right] \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2} E[\left(Y_1+Y_4\right)\left(Y_2+Y_4+Y_5\right)] \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2} E[Y_1Y_2+Y_1Y_4+Y_1Y_5+Y_4Y_2+Y_4Y_4+Y_4Y_5] \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(E[Y_1Y_2]+E[Y_1Y_4]+E[Y_1Y_5]+E[Y_4Y_2]+E[Y_4^2]+E[Y_4Y_5]\right) \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(E[Y_1]E[Y_2]+E[Y_1]E[Y_4]+E[Y_1]E[Y_5]+E[Y_4]E[Y_2]+Var(Y_4)+E[Y_4]^2+E[Y_4]E[Y_5]\right) \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_4+\gamma_1\gamma_5+\gamma_4\gamma_2+\gamma_4+\gamma_4^2+\gamma_4\gamma_5\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi, on obtient

$$
\begin{aligned}
Cov(X_1,X_2) &= E[X_1X_2]-E[X_1]E[X_2] \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_4+\gamma_1\gamma_5+\gamma_4\gamma_2+\gamma_4+\gamma_4^2+\gamma_4\gamma_5\right) - \frac{1}{\beta_1}\left(\gamma_1+\gamma_4\right) \times \frac{1}{\beta_2}\left(\gamma_2+\gamma_4+\gamma_5\right) \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_4+\gamma_1\gamma_5+\gamma_4\gamma_2+\gamma_4+\gamma_4^2+\gamma_4\gamma_5\right) \\
&\quad - \frac{1}{\beta_1\beta_2}\left(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_4+\gamma_1\gamma_5+\gamma_4\gamma_2+\gamma_4\gamma_4+\gamma_4\gamma_5\right) \\
&= \frac{\gamma_4}{\beta_1\beta_2}
\end{aligned}
$$

Autre approche :

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= Cov\left(\frac{1}{\beta_1}(Y_1+Y_4), \frac{1}{\beta_2}(Y_2+Y_4+Y_5)\right) \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2} Cov(Y_4, Y_4) \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2} Var(Y_4) \\
&= \frac{\gamma_4}{\beta_1\beta_2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_3) &= Cov\left(\frac{1}{\beta_1}(Y_1+Y_4), \frac{1}{\beta_2}(Y_3+Y_4+Y_5)\right) \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_3} Cov(Y_4, Y_4) \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_3} Var(Y_4) \\
&= \frac{\gamma_4}{\beta_1\beta_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(X_2, X_3) &= Cov\left(\frac{1}{\beta_3}(Y_3+Y_4+Y_5), \frac{1}{\beta_2}(Y_3+Y_4+Y_5)\right) \\
&= \frac{1}{\beta_2\beta_3} Cov(Y_4+Y_5, Y_4+Y_5) \\
&= \frac{1}{\beta_2\beta_3}(Var(Y_4)+Var(Y_5)) \\
&= \frac{\gamma_4+\gamma_5}{\beta_2\beta_3}
\end{aligned}$$

(c) À venir

(d) i. On a

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa(S) &= E[S] + \frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(S)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}; \\
\rho_\kappa(aS) &= E[aS] + \frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(aS)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\
&= a\left(E[S] + \frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(S)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}\right) \\
&= a\rho_\kappa(S)
\end{aligned}$$

18. Soit les v.a. indépendantes Y_0, Y_1, Y_2 où

$$Y_0 \sim Gamma(\gamma = 2, 1),$$

$$Y_1 \sim Y_2 \sim Gamma(\alpha - \gamma = 3, 1).$$

Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) où $X_1 = Y_0 + Y_1$ et $X_2 = Y_0 + Y_2$.

Pour $S = X_1 + X_2$ et $\theta = 0.2$, calculer les valeurs des expressions de

$$\Pi_\theta(S) = \frac{1}{\theta}\ln E[\exp(\theta S)]$$

et

$$\varphi_\theta(S) = \frac{E[S\exp(\theta S)]}{E[\exp(\theta S)]}$$

où

$$E[S\exp(rS)] = \frac{dE[\exp(rS)]}{dr}.$$

$$\Pi_\theta(S) = \frac{1}{\theta}\ln E[\exp(\theta S)]$$

et

$$\varphi_\theta(S) = \frac{E[S\exp(\theta S)]}{E[\exp(\theta S)]}$$

où

$$E[S\exp(rS)] = \frac{dE[\exp(rS)]}{dr}.$$

On a

$$\begin{aligned}
E[\exp(rS)] &= M_S(r) \\
&= M_{X_1,X_2}(r,r) \\
&= E[\exp(r(Y_0+Y_2+Y_0+Y_1))] \\
&= M_{Y_0}(2r)\,M_{Y_1}(r)\,M_{Y_2}(r) \\
&= M_{Y_0}(2r)\,(M_{Y_1}(r))^2 \\
&= \left(\frac{1}{1-2r}\right)^2\left(\frac{1}{1-r}\right)^6
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E[S\exp(rS)] = \frac{dE[\exp(rS)]}{dr} &= \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{1}{1-2r}\right)^2\left(\frac{1}{1-r}\right)^6\right] \\
&= 2\times 2\left(\frac{1}{1-2r}\right)^3\left(\frac{1}{1-r}\right)^6 + 6\left(\frac{1}{1-2r}\right)^2\left(\frac{1}{1-r}\right)^7
\end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned}
\Pi_\theta(S) &= \frac{1}{\theta}\ln E[\exp(\theta S)] \\
&= -\frac{2}{\theta}\ln(1-2\theta) + -\frac{6}{\theta}\ln(1-\theta)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi_\theta(S) &= \frac{E[S\exp(\theta S)]}{E[\exp(\theta S)]} \\
&= \frac{2\times 2\left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^3\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^6 + 6\left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^2\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^7}{\left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^2\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^6} \\
&= 2\times 2\left(\frac{1}{1-2\theta}\right) + 6\left(\frac{1}{1-\theta}\right)
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\Pi_{0.2}(S) &= -\frac{2}{0.2}\ln(1-2\times 0.2) - \frac{6}{0.2}\ln(1-0.2) \\
&= 11.802562
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi_{0.2}(S) &= 2\times 2\left(\frac{1}{1-2\times 0.2}\right) + 6\left(\frac{1}{1-0.2}\right) \\
&= 14.166667
\end{aligned}$$

19. (a) Indiquer les paires de valeurs prises par (M_1, M_2) pour lesquelles la valeur de f_{M_1,M_2} est non-nulle. Spécifier clairement les valeurs prises par f_{M_1,M_2}.

    On déduit

m_1	m_2	$f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) = \Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2)$
0	0	0.6
0	5	0.1
1	4	0.05
2	3	0.05
3	2	0.05
4	1	0.05
5	0	0.1

(b) Indiquer les valeurs non-nulles des fonctions de masses de probabilité marginales de M_1 et M_2.

On sait que

$$\Pr(M_1 = m_1) = \sum_{m_2=0}^{5} \Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2)$$

$$\Pr(M_2 = m_2) = \sum_{m_1=0}^{5} \Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2)$$

On obtient

k	$f_{M_1}(k) = f_{M_2}(k)$
0	0.7
1	0.05
2	0.05
3	0.05
4	0.05
5	0.1

(c) Calculer $Cov(M_1, M_2)$. À partir de la valeur de $Cov(M_1, M_2)$, que pouvons-nous déduire de la relation de dépendance entre les v.a. M_1 et M_2 ? Si nécessaire, vous pouvez utiliser un contre-exemple pour appuyer votre réponse.

— **Calcul de la covariance.** On obtient

$$\begin{aligned} E[M_1M_2] &= \sum_{m_1=0}^{5}\sum_{m_2=0}^{5} m_1m_2 f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) \\ &= 4\times 0.05 + 6\times 0.05 + 6\times 0.05 + 4\times 0.05 = 1 \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} E[M_i] &= \sum_{k=0}^{5} k f_{M_i}(k) \\ &= 1\times 0.05 + 2\times 0.05 + 3\times 0.05 + 4\times 0.05 + 5\times 0.1 = 1 \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} Cov(M_1,M_2) &= E[M_1M_2] - E[M_1]E[M_2] \\ &= 1 - 1\times 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

— **Commentaire.** Les v.a. M_1 et M_2 sont non-corrélées mais elles ne sont pas indépendantes.

— **Contre-exemple.** En effet, par exemple, on observe

$$\Pr(M_1=0, M_2=0) = 0.6 \neq \Pr(M_1=0)\Pr(M_2=0) = 0.49.$$

(d) On définit $N = M_1 + M_2$.

i. Démontrer que la v.a. N peut être représentée comme une fonction d'une v.a. K qui obéit à une loi discrète très connue (et fournie en annexe).

On observe

$$\Pr(N=0) = f_{M_1,M_2}(0,0) = 0.6$$

et

$$\Pr(N=5) = \sum_{k=0}^{5} f_{M_1,M_2}(k,5-k) = 0.4$$

On peut écrire

$$N = 5K$$

où

$$K \sim Bern(q)$$

ii. Indiquer clairement les valeurs (non-nulles) de la fonction de masses de probabilité de la v.a. K et de celle de la v.a. N.

On identifie $q = 0.4$.

Ainsi, on a

$$\Pr(K=0) = 6 \text{ et } \Pr(K=1) = 0.4$$

et

$$\Pr(N=0) = 6 \text{ et } \Pr(N=5) = 0.4$$

20. (a) On a

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= E\left[t_1^{M_1}t_2^{M_2}\right] \\ &= E_{\Theta_1,\Theta_2}\left[E\left[t_1^{M_1}t_2^{M_2}|\Theta_1,\Theta_2\right]\right] \\ &= E_{\Theta_1,\Theta_2}\left[E\left[t_1^{M_1}|\Theta_1,\Theta_2\right]\times E\left[t_2^{M_2}|\Theta_1,\Theta_2\right]\right] \\ &= E_{\Theta_1,\Theta_2}\left[E\left[t_1^{M_1}|\Theta_1\right]\times E\left[t_2^{M_2}|\Theta_2\right]\right] \\ &= E_{\Theta_1,\Theta_2}\left[\mathrm{e}^{\Theta_1\lambda_1(t_1-1)}\times \mathrm{e}^{\Theta_1\lambda_1(t_1-1)}\right] \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= E\left[t_1^{M_1}t_2^{M_2}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{\Theta_1\lambda_1(t_1-1)}\times \mathrm{e}^{\Theta_1\lambda_1(t_1-1)}\right] \\ &= M_{\Theta_1,\Theta_2}\left(\lambda_1(t_1-1),\lambda_2(t_2-1)\right) \end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} Cov\left(M_1,M_2\right) &= E\left[Cov\left(M_1,M_2|\Theta_1,\Theta_2\right)\right]+Cov\left(E\left[M_1|\Theta_1\right],E\left[M_2|\Theta_2\right]\right) \\ &= 0+Cov\left(\lambda_1\Theta_1,\lambda_2\Theta_2\right) \\ &= \lambda_1\lambda_2 Cov\left(\Theta_1,\Theta_2\right) \end{aligned}$$

Alors, on a

$$a=\lambda_1\lambda_2$$

(c) On sait que

$$\begin{aligned} Var\left(M_i\right) &= E\left[Var\left(M_i|\Theta_i\right)\right]+Var\left(E\left[M_i|\Theta_i\right]\right) \\ &= E\left[\lambda_i\Theta_i\right]+Var\left(\lambda_i\Theta_i\right) \\ &= \lambda_i\left(1+\lambda_i Var\left(\Theta_i\right)\right) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \rho_P\left(M_1,M_2\right) &= \frac{Cov\left(M_1,M_2\right)}{\sqrt{Var\left(M_1\right)Var\left(M_2\right)}} \\ &= \frac{\lambda_1\lambda_2 Cov\left(\Theta_1,\Theta_2\right)}{\sqrt{\left(\lambda_1\left(1+\lambda_1 Var\left(\Theta_1\right)\right)\right)\left(\lambda_2\left(1+\lambda_2 Var\left(\Theta_2\right)\right)\right)}} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda_1 Var\left(\Theta_1\right)}\sqrt{\lambda_2 Var\left(\Theta_2\right)}}{\sqrt{\left(1+\lambda_1 Var\left(\Theta_1\right)\right)\left(1+\lambda_2 Var\left(\Theta_2\right)\right)}}\times\rho_P\left(\Theta_1,\Theta_2\right) \end{aligned}$$

Alors, on déduit

$$b=\frac{\sqrt{\lambda_1 Var\left(\Theta_1\right)}\sqrt{\lambda_2 Var\left(\Theta_2\right)}}{\sqrt{\left(1+\lambda_1 Var\left(\Theta_1\right)\right)\left(1+\lambda_2 Var\left(\Theta_2\right)\right)}}\leq 1$$

(d) i. On a

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= M_{\Theta_1,\Theta_2}\left(\lambda_1(t_1-1),\lambda_2(t_2-1)\right) \\ &= \left(1-\lambda_1(t_1-1)\right)^{-1}\left(1-\lambda_1(t_1-1)\right)^{-1}\left(1-\lambda_1(t_1-1)-\lambda_1(t_2-1)\right)^{-1} \\ &= \left(1-(t_1-1)\right)^{-1}\left(1-(t_2-1)\right)^{-1}\left(1-1(t_1-1)-1(t_2-1)\right)^{-1} \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} P_N(t) &= P_{M_1,M_2}(t,t) \\ &= (1-(t-1))^{-2}(1-2(t-1))^{-1} \\ &= P_{K_1}(t)\,P_{K_2}(t) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} P_{K_1}(t) &= (1-(t-1))^{-2} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(1-\frac{1}{2}\right)t}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{K_2}(t) &= (1-2(t-1))^{-1} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(1-\frac{1}{3}\right)t}\right)^1 \end{aligned}$$

ii. On a

$$N = K_1 + K_2$$

où les v.a.

$$K_1 \sim BNeg\left(2, \frac{1}{2}\right)$$

et

$$K_2 \sim BNeg\left(1, \frac{1}{3}\right)$$

sont indépendantes.

iii. On a

$$f_N(0) = f_{K_1}(0)\,f_{K_2}(0) = 0.0625000$$

$$f_N(1) = f_{K_1}(0)\,f_{K_2}(1) + f_{K_1}(1)\,f_{K_2}(0) = 0.1093750$$

$$f_N(1) = f_{K_1}(0)\,f_{K_2}(2) + f_{K_1}(1)\,f_{K_2}(1) + f_{K_1}(2)\,f_{K_2}(0) = 0.1289062$$

21. On utilise un résultat d'un exemple. Soient les v.a. comonotones $X_i \sim Exp(\beta_i)$ avec $\overline{F}_{X_i}(x) = \exp(-\beta_i x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Pour $S = \sum_{i=1}^n X_i$, on a

$$\begin{aligned} S &= \left(-\frac{1}{\beta_1}\ln(1-U)\right) + ... + \left(-\frac{1}{\beta_n}\ln(1-U)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{\beta_1} + ... + \frac{1}{\beta_n}\right)\ln(1-U), \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que $S \sim Exp\left(\frac{1}{\frac{1}{\beta_1}+...+\frac{1}{\beta_n}}\right)$.

22. On utilise un résultat d'un exemple. Soient les v.a. comonotones $X_i \sim Pa(\alpha, \lambda_i)$ avec $F_{X_i}(x) = 1 - \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + x}\right)^\alpha$ et $F_{X_i}^{-1}(u) = \frac{\lambda_i}{(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Pour $S = \sum_{i=1}^n X_i$, on a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n X_i = \left(\frac{\lambda_1}{(1-U)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_1\right) + ... + \left(\frac{\lambda_n}{(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_n\right) \\ &= \frac{\lambda^*}{(1-U)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda^*, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $S \sim Pa(\alpha, \lambda^*)$ où $\lambda^* = \lambda_1 + ... + \lambda_n$.

23. On utilise les relations
$$VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(X_1) + VaR_\kappa(X_2)$$
$$TVaR_\kappa(S) = TVaR_\kappa(X_1) + TVaR_\kappa(X_2)$$

24. (a) Développer l'expression de F_S.

    On a
$$M_S(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta_1}\right)^{-(\alpha_1-\gamma_0)} \left(1 - \frac{t}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2-\gamma_0)} \left(1 - \frac{t}{\beta_1} - \frac{t}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0},$$
    ce qui correspond à la f.g.m. d'une somme de 3 v.a. indépendantes de loi gamma dont les paramètres d'échelle diffèrent.L

    La v.a. S obéit à un mélange de lois gamma dont la fonction de densité est donnée par
$$f_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k h(x; \alpha + k, \beta),$$
    où $\beta = \max\left(\beta_1; \beta_2; \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)^{-1}\right)$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_0$. Les probabilités p_k, $k \in \mathbb{N}$, sont définies par $p_k = \sigma \times \xi_k$ où
$$\sigma = \beta^{-\gamma_0}\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0} \prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^{\alpha_i-\gamma_0},$$
    et
$$\xi_0 = 1, \ \xi_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i\zeta_i\xi_{k-i}, \ k \in \mathbb{N}^+,$$
    avec
$$\zeta_k = \frac{\gamma_0}{k}\left(1 - \left(\beta\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)\right)^{-1}\right)^k + \sum_{i=1}^{2}\frac{(\alpha_i - \gamma_0)}{k}\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta}\right)^k,$$
    pour $k \in \mathbb{N}^+$. On déduit que
$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x; \alpha + k, \beta)$$
    et
$$E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{\alpha + k}{\beta}\overline{H}(x; \alpha + k + 1, \beta).$$

    (b) Calculer $E[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$ pour $\gamma_0 = 0$, 1 et 2.

    On a
$$\begin{aligned} E[S] &= E[X_1] + E[X_2] \\ Var(S) &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \end{aligned}$$
    avec
$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= \sqrt{Var(X_1)\,Var(X_2)}\rho_P(X_1, X_2) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1^2}}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\beta_2^2}}\frac{\gamma_0}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \\ &= \frac{\gamma_0}{\beta_1\beta_2}. \end{aligned}$$

    (c) Les valeurs sont obtenues en appliquant les relations.

25. (a) Indiquer les caractéristiques de la loi de S.

La fgm de S est

$$\begin{aligned}
M_S(r) &= M_{M_1,\ldots,M_n}(M_{B_1}(r),\ldots,M_{B_n}(r)) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} e^{(\lambda_i-\gamma_0)\left(M_{B_i}(r)-1\right)}\right) e^{\gamma_0\left(\prod\limits_{i=1}^{n} M_{B_i}(r)-1\right)} \\
&= \left(e^{500(\lambda_1-\gamma_0)\left(M_{B_1}(r)-1\right)}\right)\left(e^{500(\lambda_{500}-\gamma_0)\left(M_{B_{500}}(r)-1\right)}\right) e^{\gamma_0\left(M_{B_1}(r)^{500} M_{B_{500}}(r)^{500}-1\right)} \\
&= e^{\lambda_S(M_D(r)-1)}
\end{aligned}$$

avec

$$\lambda_S = 500(\lambda_1-\gamma_0) + 500(\lambda_{500}-\gamma_0) + \gamma_0$$

et

$$\begin{aligned}
M_D(t) = &\frac{500(\lambda_1-\gamma_0)}{\lambda_S}\left(\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000}-t}\right)^2 \\
&+\frac{500(\lambda_{500}-\gamma_0)}{\lambda_S}\left(\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000}-t}\right) \\
&+\frac{\gamma_0}{\lambda_S}\left(\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000}-t}\right)^{2\times 500}\left(\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000}-t}\right)^{500}
\end{aligned}$$

On observe que D est un mélange de 3 Erlang : $Erlang\left(1,\frac{1}{1000}\right)$ (poids $\frac{500(\lambda_{500}-\gamma_0)}{\lambda_S}$), $Erlang\left(2,\frac{1}{1000}\right)$ (poids $\frac{500(\lambda_1-\gamma_0)}{\lambda_S}$), et $Erlang\left(1500,\frac{1}{1000}\right)$ (poids $\frac{\gamma_0}{\lambda_S}$)

(b) Comme au chapitre 2. La dépendance n'a pas d'impact.

(c) Comme S obéit une loi poisson composée et que le montant de chaque siniitre obéit à un mélange d'Erlang, on peut aussi représenter sa distribution comme un mélange d'Erlang. On a $D \sim MélErl\left(\underline{\xi}, \beta = \frac{1}{1000}\right)$ avec

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= 0 \\
\xi_1 &= \frac{500(\lambda_{500}-\gamma_0)}{\lambda_S} \\
\xi_2 &= \frac{500(\lambda_1-\gamma_0)}{\lambda_S} \\
\xi_{1500} &= \frac{\gamma_0}{\lambda_S} \\
\xi_k &= 0,\ k \neq 1, 2, 1500.
\end{aligned}$$

Cela signifie que l'on peut écrire D sous la forme

$$D = \begin{cases} \sum_{j=1}^{K} C_j, & K > 0 \\ 0, & K = 0 \end{cases}$$

où

$$f_K(k) = \xi_k,\ k \in \mathbb{N},$$

et

$$C_j \sim Exp(\beta),\ j \in \mathbb{N}^+.$$

Cela est équivalent à

$$M_D(t) = P_K(M_C(t))$$

(d) On déduit que $S \sim MélErl\left(\underline{\nu}, \beta = \frac{1}{1000}\right)$

$$\begin{aligned} M_S(t) &= P_N(M_D(t)) = P_N(P_K(M_C(t))) \\ &= P_{N'}(M_C(t)) \end{aligned}$$

où

$$P_{N'}(s) = P_N(P_K(s)).$$

Cela signifie que l'on peut écrire S sous la forme

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N'} C_j, \ N' > 0 \\ 0, \ N' = 0 \end{cases}$$

où les valeurs de

$$f_{N'}(k) = \nu_k, \ k \in \mathbb{N},$$

sont calculées avec l'algo de Panjer ou la FFT.

26. (a) Espérance de X_1, X_2 et S. On utilise les expressions usuelles.

(b) Calculer la covariance de $Cov(X_1, X_2)$.
On a

$$Cov(X_1, X_2) = E[B_1] E[B_2] Cov(M_1, M_2)$$

(c) On utilise les expressions usuelles.

(d) Démontrer que $S \sim PoisComp(\lambda_S, F_D)$.
La fgm de S est

$$\begin{aligned} M_S(r) &= M_{M_1,M_2}(M_{B_1}(r), M_{B_2}(r)) \\ &= e^{(\lambda_1-\alpha_0)\left(M_{B_1}(r)-1\right)} e^{(\lambda_2-\alpha_0)\left(M_{B_2}(r)-1\right)} e^{\alpha_0\left(M_{B_1}(r)M_{B_2}(r)-1\right)} \\ &= e^{\lambda_S(M_D(r)-1)} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_S &= (\lambda_1 - \alpha_0) + (\lambda_2 - \alpha_0) + \alpha_0 \\ &= 2 + 1 - 0.5 \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

et

$$f_D(100k) = \frac{1.5}{2.5} f_{B_1}(100k) + \frac{0.5}{2.5} f_{B_2}(100k) + \frac{0.5}{2.5} f_{B_1 * B_2}(100k)$$

On déduit de la fgm de S que $S \sim PoisComp(\lambda_S, F_D)$.

— Calculer la valeur de λ_S.
On a

$$f_D(100k) = \frac{1.5}{2.5} f_{B_1}(100k) + \frac{0.5}{2.5} f_{B_2}(100k) + \frac{0.5}{2.5} f_{B_1 * B_2}(100k)$$

— Donner les valeurs de $f_D(100k)$, pour $k = 0, 1, 2, 3$.

(e) **4pts** Calculer $\Pr(S = 100k)$, pour $k = 0, 1, 2, 3$, en utilisant l'algorithme de Panjer.
On applique l'algo de Panjer.

27. On considère un portefeuille de n contrats d'assurance vie. Les coûts pour un contrat i sont définis par la v.a $X_i = bI_i$ pour (i=1,2,....).

(a) Isoler la valeur de r pour $\alpha = 0.1$,$\alpha = 1$ et $\alpha = 10$:
On a

$$Pr[I_i = 0] = 1 - q = 0.95 = M_\theta(ln(r))$$

Et puisque

$$\Theta \sim Gamma(\alpha, \alpha)$$

Donc

$$\begin{aligned} r &= exp\left[-\alpha \times \left(\frac{1}{(0.95)^{(1/\alpha)}} - 1\right)\right] \\ r &= \begin{cases} & , \alpha = 0.1 \\ 0.948729 & , \alpha = 1 \\ & , \alpha = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Pour $n = 10$, calculer $Pr\,[S = kb]$

$$\begin{aligned} Pr\,(S = kb) &= Pr\,(I_1 + ... + I_n = k) \\ &= Pr\,(N = k) \\ &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (-1)^j \, M_\theta\,((n + j - k)ln(r)) \end{aligned}$$

(c) Calculer $Cov(X_i, X_j)$ pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned} Cov(X_i, X_j) &= Cov(bI_i, bI_j) \\ &= b^2 Cov(I_i, I_j) \\ &= b^2\,(E\,[I_i I_j] - E\,[I_i]\,E\,[I_j]) \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} E\,[I_i I_j] &= \int_0^{+\infty} (1 - r\theta)^2 dG_\theta\,(\theta) \\ &= 1 - 2\int_0^{+\infty} r\theta \times dG_\theta\,(\theta) + \int_0^{+\infty} \left(r^2\right)^\theta \times dG_\theta\,(\theta) \\ &= 1 - 2M_\theta\,(ln(r)) + M_\theta\left(ln(r^2)\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(d) Calculer $Var\,(S)$

$$\begin{aligned} Var\,(S) &= Var(X_1 + ... + X_n) \\ &= n \times Var(X_i) + n \times (n-1) \times Cov(X_i, X_j) \\ &= \begin{cases} 193568.11 & , \alpha = 0.1 \\ 678571.432 & , \alpha = 1 \\ 496264.084 & , \alpha = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

(e) Calculer $VaR_{0.99}(S)$. On a

$$Pr\,(S \leq s) = Pr\left(I_1 + ... + I_n \leq \frac{s}{b}\right)$$

Et on trouve la VaR facilement.

$$VaR_{0.99}(S) = \begin{cases} 7000 & ,\alpha = 0.1 \\ 3000 & ,\alpha = 1 \\ 3000 & ,\alpha = 10 \end{cases}$$

(f) Calculer $TVaR_{0.99}(S)$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(S) &= \frac{E\left[S \times 1_{\{S > VaR_{0.99}(S)\}}\right] + VaR_{0.99}(S) \times (Pr\left(S \leq VaR_{0.99}(S)\right) - 0.99)}{1-0.99} \\ &= \begin{cases} 8320.8983 & ,\alpha = 0.1 \\ 4149.4253 & ,\alpha = 1 \\ 3170.7031 & ,\alpha = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

(g) On suppose maintenant l'indépendance entre les v.a $I_1, ..., I_{10}$. Donc,

$$\begin{aligned} I_i &\sim Bern(q) \\ \sum_{i=1}^{10} I_i &\sim Binomiale(n = 10, q) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} Var(S) &= n \times Var(X_i) \\ &= n \times q \times (1-q) \times b^2 \\ &= 475000 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(S) &= 3000 \\ TVaR_{0.99}(S) &= 3109.503 \end{aligned}$$

28. On considère un portefeuille composé de 2 lignes d'affaires, qui est exposé à un seul type de catastrophe. Les coûts pour les lignes d'affaires sont définis par les v.a X_1, X_2 où

$$X_i = \sum_{k_i=1}^{M^{(i)}} B_{i,k_i}^{(i)} + \sum_{k_i=1}^{M^{(0)}} B_{i,k_i}^{(0)}$$

(a) Calculer les espérances de X_1, X_2 et de S. On a

$$\begin{aligned} E[X_1] &= E\left[M^{(1)}\right] \times E\left[B_1^{(1)}\right] + E\left[M^{(0)}\right] \times E\left[B_1^{(0)}\right] \\ &= \gamma_1 \times \frac{1}{\frac{5}{8}} + \gamma_0 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 5.2 \\ E[X_2] &= E\left[M^{(2)}\right] \times E\left[B_2^{(2)}\right] + E\left[M^{(0)}\right] \times E\left[B_2^{(0)}\right] \\ &= \gamma_2 \times \frac{1}{\frac{5}{9}} + \gamma_0 \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = 8.4 \\ E[S] &= E[X_1] + E[X_2] \end{aligned}$$

(b) Calculer les variances de X_1, X_2 :

$$\begin{aligned}
Var(X_1) &= Var\left(\sum_{k_i=1}^{M^{(i)}} B_{i,k_i}^{(i)} + \sum_{k_i=1}^{M^{(0)}} B_{i,k_i}^{(0)}\right) \\
&= Var\left(\sum_{k_i=1}^{M^{(i)}} B_{i,k_i}^{(i)}\right) + Var\left(+\sum_{k_i=1}^{M^{(0)}} B_{i,k_i}^{(0)}\right) \\
&= Var(M^{(1)}) \times E\left[B_1^{(1)}\right]^2 + E(M^{(1)}) \times Var\left[B_1^{(1)}\right] + Var(M^{(0)}) \times E\left[B_1^{(0)}\right]^2 + E(M^{(0)}) \times Var\left[B_1^{(0)}\right.
\end{aligned}$$

De la mème manière on calcule $Var(X_2)$.

(c) Calculer $Cov(X_1, X_2)$

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= Cov\left(\sum_{k_i=1}^{M^{(1)}} B_{1,k_i}^{(1)} + \sum_{k_i=1}^{M^{(0)}} B_{1,k_i}^{(0)}, \sum_{k_i=1}^{M^{(2)}} B_{2,k_i}^{(2)} + \sum_{k_i=1}^{M^{(0)}} B_{2,k_i}^{(0)}\right) \\
&= E\left[M^{(0)}\right] \times Cov\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right) + Var(M^{(0)}) \times E\left[B_1^{(0)}\right] \times E\left[B_2^{(0)}\right]
\end{aligned}$$

Et on sait que :

$$\rho_p\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right) = \frac{\theta}{4}$$

Donc

$$Cov(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}) = \frac{\rho_p\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right)}{\beta_1 \times \beta_2}$$

D'où le résultat

(d) Calculer $Var(S)$

$$\begin{aligned}
Var(S) &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2 \times Cov(X_1, X_2) \\
&= \begin{cases} 64.68 & ,\theta = -1 \\ 67.68 & ,\theta = 0 \\ 70,68 & ,\theta = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

(e) Indiquer les lois de X_1, X_2et S

$$X_i \sim Poisson.Composée\left(\lambda_i, F_{C_i}\right)$$

Avec :

$$\lambda_i = \gamma_0 + \gamma_i$$

et :

$$F_{C_i}(x) = \frac{\gamma_0}{\lambda_i} F_{B_i^{(0)}}(x) + \frac{\gamma_i}{\lambda_i} F_{B_i^{(i)}}(x) \quad i = 1, 2$$

Pour S on a :

$$S \sim PoissonComposée\left(\lambda, F_D\right)$$

Avec :

$$\lambda = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$$

et :

$$F_D(x) = \frac{\gamma_0}{\lambda} F_{B_1^{(0)} + B_2^{(0)}}(x) + \frac{\gamma_1}{\lambda} F_{B_1^{(1)}}(x) + \frac{\gamma_2}{\lambda} F_{B_2^{(2)}}(x)$$

29. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est définie par

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2)\, H(x_1;i_1,\beta)\, H(x_2;i_2,\beta)$$

où $p_{1,2}(i_1,i_2)$ sont des probabilités i.e. $p_{1,2}(i_1,i_2) \geq 0$ (pour $i_1, i_2 \in \{1,2\}$) et $\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2) = 1$. De plus, on a $\sum_{i_1=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2) = p_2(i_2)$ et $\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2) = p_1(i_1)$. On suppose que $\beta = \frac{1}{10}$. Hypothèses additionnelles :

Hypothèse H1		
$i_1 \vert i_2$	1	2
1	0.42	0.18
2	0.28	0.12

Hypothèse H2		
$i_1 \vert i_2$	1	2
1	0.55	0.05
2	0.15	0.25

Hypothèse H3		
$i_1 \vert i_2$	1	2
1	0.32	0.28
2	0.38	0.02

On définit $S = X_1 + X_2$. Questions pour les 3 hypothèses H1, H2, H3 :

(a) Calculer $F_{X_1,X_2}(30,20)$. (Rép : 0.6976496 ; B : 0.7029052 ; C : 0.6936068)
On applique la formule.

(b) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2>20\}}\right]$. (Rép : A : 3.03151 ; B : 3.38338 ; C : 2.76084)
On déduit

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2)\, h(x_1;i_1,\beta)\, h(x_2;i_2,\beta)$$

On constate

$$E[\phi_1(X_1)\phi_2(X_2)] = \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2)\left(\int_0^\infty x_1 h(x_1;i_1,\beta)\,dx_1\right)\int_0^\infty x_2 h(x_2;i_2,\beta)\,dx_2$$

Bon, on y va

$$E\left[X_1 \times 1_{\{X_2>20\}}\right] = \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2)\,\frac{i_1}{\beta}\overline{H}(20;i_2,\beta)$$

(c) Calculer $E[\max(X_1-30;0)\max(X_2-20;0)]$. (Rép : A : 11.60274 ; 11.47135 ; C : 11.70381)
On applique la relation

$$E[\phi_1(X_1)\phi_2(X_2)] = \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2)\left(\int_0^\infty x_1 h(x_1;i_1,\beta)\,dx_1\right)\int_0^\infty x_2 h(x_2;i_2,\beta)\,dx_2$$

On a

$$\begin{aligned} &E[\max(X_1-30;0)\max(X_2-20;0)] \\ = &\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2)\left(\int_0^\infty \max(x_1-30;0)\, h(x_1;i_1,\beta)\,dx_1\right)\int_0^\infty \max(x_2-30;0)\, h(x_2;i_2,\beta)\,dx_2 \end{aligned}$$

et on prend la formule pour stop-loss en annexe pour la loi gamma (ou Erlang)
On a

$$\begin{aligned} &E[\max(X_1-30;0)\max(X_2-20;0)] \\ = &\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2)\left(\frac{i_1}{\beta}\overline{H}(30;i_1+1,\beta) - 30\overline{H}(30;i_1,\beta)\right)\left(\frac{i_2}{\beta}\overline{H}(20;i_2+1,\beta) - 20\overline{H}(30;i_2,\beta)\right) \end{aligned}$$

(d) Calculer $Cov\left(X_1, X_2\right)$, $E\left[S\right]$ et $Var\left(S\right)$. (Rép : H1 : 0, 27, 315 ; H2 : 13, 27, 341 ; H : -10 ; 27 ; 295)

On applique la relation

$$E\left[\phi_1\left(X_1\right)\phi_2\left(X_2\right)\right] = \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}\left(i_1, i_2\right)\left(\int_0^\infty x_1 h\left(x_1; i_1, \beta\right) dx_1\right)\int_0^\infty x_2 h\left(x_2; i_2, \beta\right) dx_2$$

On a

$$\begin{aligned} & E\left[X_1X_2\right] \\ = & \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}\left(i_1, i_2\right)\frac{i_1}{\beta}\frac{i_2}{\beta} \end{aligned}$$

On a

$$E\left[S\right] = 10\left(0.7 + 0.3 \times 2\right) + 10\left(0.6 + 0.4 \times 2\right)$$

: 27.0 : 13.0 : 26.0

$$E\left[X_1X_2\right] = 100\left(0.42 + 0.28 \times 2 + 0.18 \times 2 + 0.12 \times 4\right)$$

: $182 - 13 \times 14 = 0.0$

$$E\left[X_1X_2\right] = 100\left(0.55 + 0.15 \times 2 + 0.05 \times 2 + 0.25 \times 4\right)$$

: $195 - 13 \times 14 = 13.0$

$$E\left[X_1X_2\right] = 100\left(0.32 + 0.38 \times 2 + 0.28 \times 2 + 0.02 \times 4\right)$$

: $172.0 - 13 \times 14 = -10.0 = 103.0$

$$E[X_1] = 0.7 \times 10^2 \times 2 + 0.3 \times 10^2 \times 6$$

: 320.0

$$E[X_2] = 0.6 \times 10^2 \times 2 + 0.4 \times 10^2 \times 6$$

: 360.0

$$Var\left(X_1\right) = 320 - \left(13^2\right) =$$

: 151.0

$$Var\left(X_2\right) = 360 - \left(14^2\right) = 164$$

: 164.0 : 151.0

164+151= 315.0+

(e) Calculer $F_S\left(50\right)$. (Rép : A : 0.8938773 ; B : 0.8865779 ; C : 0.8994923

On a

$$\begin{aligned} F_S\left(x\right) &= p_{12}\left(1,1\right)H\left(x; 2, \beta\right) \\ &\quad + p_{12}\left(2,1\right)H\left(x; 3, \beta\right) \\ &\quad + p_{12}\left(1,2\right)H\left(x; 3, \beta\right) \\ &\quad + p_{12}\left(2,2\right)H\left(x; 4, \beta\right) \end{aligned}$$

30. Soient

$$M_j = \sum_{i=1}^{n} I_{j,i}$$

et

$$N = M_1 + M_2$$

et

$$X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$$

(a) Trouver la fgp de (M_1, M_2) et de N

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= E\left[t_1^{M_1} \times t_2^{M_2}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} E\left[t_1^{I_{i,1}} t_2^{I_{i,2}}\right] \\ &= \left[f_{\underline{I}}(0,0) + f_{\underline{I}}(1,0) \times t_1 + f_{\underline{I}}(0,1) \times t_2 + f_{\underline{I}}(1,1) \times t_1 \times t_2\right]^n \end{aligned}$$

et donc

$$P_N(t) = \left[f_{\underline{I}}(0,0) + \left(f_{\underline{I}}(1,0) + f_{\underline{I}}(0,1)\right) \times t + f_{\underline{I}}(1,1) \times t^2\right]^n$$

(b) Développer la $Cov(M_1, M_2)$

$$\begin{aligned} Cov(M_1,M_2) &= Cov\left(\sum_{i=1}^{n} I_{1,i}, \sum_{i=1}^{n} I_{2,i}\right) \\ &= n \times Cov\left(I_1, I_2\right) \end{aligned}$$

(c) Identifier la fgm de (X_1, X_2) et de S

$$\begin{aligned} M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= P_{M_1,M_2}\left(M_{B_1}(t_1), M_{B_2}(t_2)\right) \\ &= (f_{\underline{I}}(0,0) + f_{\underline{I}}(1,0) \times M_{B_1}(t_1) + f_{\underline{I}}(0,1) \times M_{B_2}(t_2) \\ &\quad + f_{\underline{I}}(1,1) \times M_{B_1}(t_1) \times M_{B_2}(t_2))^n \end{aligned}$$

et

$$M_S(t) = M_{X_1,X_2}(t,t)$$

(d) Calculer $Cov(X_1, X_2)$

$$\begin{aligned} Cov(X_1,X_2) &= Cov\left(\sum_{k=1}^{M_1} B_{1,k}, \sum_{k=1}^{M_2} B_{2,k}\right) \\ &= E\left[B_1\right] \times E\left[B_2\right] \times Cov\left(M_1, M_2\right) \end{aligned}$$

(e) Calculer les espérance de X_1, X_2et S

$$\begin{aligned} E\left[X_1\right] &= E\left[M_1\right] \times E\left[B_1\right] \\ &= n \times E\left[I_1\right] \times E\left[B_1\right] \\ &= 10 \times 0.4 \times 10 \end{aligned}$$

De la mème manière on trouve $E\left[X_2\right]$.
Enfin, on a

$$E[S] = E\left[X_1\right] + E\left[X_2\right] = 70$$

(f) Calculer les variance de X_1 et X_2

$$Var\left(X_1\right) = E\left[M_1\right] \times Var\left[B_1\right] + Var\left[M_1\right] \times E\left[B_1\right]^2$$

avec

$$E[M_1] = n \times E[I_1]$$

et

$$Var[M_1] = n \times Var[I_1]$$

La mème chose pour X_2.

(g) Calculer la $Cov(X_1, X_2)$ et la variance de S. La formule de la covariance est donnée à la question d), il reste à calculer la variance de S :

$$Var(S) = Var(X_1) + Var(X_1) + 2 \times Cov(X_1, X_2)$$

31. Soit un couple de v.a (I_1, I_2) dont la fonction de masse de probabilité conjointe est f_{I_1,I_2}. On a

$$f_{I_1,I_2}(1,1) = f_{I_1,I_2}(0,0) = \frac{1+\rho}{4}$$

ρ étant le coéfficient de corrélation entre (I_1, I_2).

(a) Trouver la fgp de (M_1, M_2) et de N

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= E\left[t_1^{M_1} \times t_2^{M_2}\right] \\ &= E\left[t_1^{K_1+\sum_{i=1}^{K_0} I_{1,i}} \times t_2^{K_2+\sum_{i=1}^{K_0} I_{2,i}}\right] \\ &= P_{k_1}(t_1) P_{k_2}(t_2) E\left[t_1^{\sum_{i=1}^{K_0} I_{1,i}} \times t_2^{\sum_{i=1}^{K_0} I_{2,i}}\right] \\ &= P_{k_1}(t_1) P_{k_2}(t_2) P_{K_0}(M_{I_1}(ln(t_1)) \times M_{I_1}(ln(t_2))) \end{aligned}$$

(b) et donc

$$\begin{aligned} P_N(t) &= P_{M_1,M_2}(t,t) \\ &= \end{aligned}$$

(c) Développer la $Cov(M_1, M_2)$

$$\begin{aligned} Cov(M_1,M_2) &= Cov\left(K_1 + \sum_{i=1}^{K_0} I_{1,i}, K_2 + \sum_{i=1}^{K_0} I_{2,i}\right) \\ &= Cov\left(\sum_{i=1}^{K_0} I_{1,i}, \sum_{i=1}^{K_0} I_{2,i}\right) \\ &= E[K_0] \times Cov(I_1,I_2) + Var[K_0] \times E[I_1] \times E[I_2] \\ &= \gamma_0 \times E[I_1 I_2] \\ &= \gamma_0 \times \frac{1+\rho}{4} \end{aligned}$$

(d) Identifier la fgm de (X_1, X_2) et de S

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = P_{M_1,M_2}(M_{B_1}(t_1), M_{B_2}(t_2))$$

et

$$M_S(t) = M_{X_1,X_2}(t,t)$$

(e) Calculer $Cov(X_1, X_2)$

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= Cov\left(\sum_{k=1}^{M_1} B_{1,k}, \sum_{k=1}^{M_2} B_{2,k}\right) \\
&= E\left[B_1\right] \times E\left[B_2\right] \times Cov\left(M_1, M_2\right) \\
&= \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\beta} \times Cov\left(M_1, M_2\right) \\
&= 100 \times \gamma_0 \times \frac{1+\rho}{4}
\end{aligned}$$

(f) Calculer les espérance de X_1, X_2et S

i. On a

$$\begin{aligned}
E\left[N\right] &= E\left[M_1\right] + E\left[M_2\right] \\
&= E\left[K_1\right] + E\left[K_0\right] \times E\left[I_1\right] + E\left[K_2\right] + E\left[K_0\right] \times E\left[I_2\right] \\
&= E\left[K_1\right] + E\left[K_2\right] + E\left[K_0\right] \\
&= 5
\end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
E\left[S\right] &= E\left[X_1\right] + E\left[X_2\right] \\
&= E\left[M_1\right] \times E\left[B_1\right] + E\left[M_2\right] \times E\left[B_2\right] \\
&= E\left[N\right] \times E\left[B\right] \\
&= 50
\end{aligned}$$

ii. Calculer la $Cov(M_1, M_2)$ et la la $Var(N)$

$$\begin{aligned}
Cov(M_1, M_2) &= \gamma_0 \times \frac{1+\rho}{4} \\
&= \begin{cases} 0.075 & ,\rho = -1 \\ 0.75 & ,\rho = 0 \\ 1.425 & ,\rho = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Var(N) &= Var(M_1) + Var(M_2) + 2Cov(M_1, M_2) \\
&= Var(K_1) + Var(K_2) + Var\left(\sum_{i=1}^{K_0} I_{1,i}\right) + Var\left(\sum_{i=1}^{K_0} I_{2,i}\right) + 2Cov(M_1, M_2) \\
&= Var(K_1) + Var(K_2) + 2Cov(M_1, M_2) + \gamma_0 \times E\left[I_1^2\right] + \gamma_0 \times E\left[I_1^2\right] \\
&= \begin{cases} 5.15 & ,\rho = -1 \\ 6.5 & ,\rho = 0 \\ 7.85 & ,\rho = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

iii. ...

iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $Var(S)$

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= 100 \times \gamma_0 \times \frac{1+\rho}{4} \\ &= \begin{cases} 7.5 & , \rho = -1 \\ 75 & , \rho = 0 \\ 142.5 & , \rho = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var(N) &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\ &= \begin{cases} 1015 & , \rho = -1 \\ 1150 & , \rho = 0 \\ 1285 & , \rho = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

32. (a) Calculer $E[B]$, $\mathrm{Cov}(C_1, C_2)$ et $\mathrm{Var}(B)$.
On applique les relations habituelles pour $E[B]$ et $Var(B)$.
De plus, on a

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{\alpha - 2} - \frac{1}{\alpha - 1} \right),$$

(b) Calculer l'espérance et la variance de X.
On applique les relations habituelles $E[X] = E[I]\,E[B]$, etc.

(c) Trouver l'expression de f_B et F_B.
En supposant $\lambda_2 > \lambda_1$ sans perte de généralité, l'expression de f_B est

$$\begin{aligned} f_B(x) &= \int_0^x f_{C_1,C_2}(y, x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda_1 \lambda_2} \left(\frac{1}{1 + \frac{y}{\lambda_1} + \frac{x-y}{\lambda_2}} \right)^{\alpha+2} \mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\lambda_2}} \right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\lambda_1}} \right)^{\alpha+1} \right\} \end{aligned}$$

et celle de F_B correspond à

$$\begin{aligned} F_B(x) &= \int_0^x f_B(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\lambda_2}} \right)^{\alpha} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\lambda_1}} \right)^{\alpha} \right). \end{aligned}$$

(d) Calculer $\Pr(X > 70)$
On a pplique les relations habituelles

$$\begin{aligned} \Pr(X > 70) &= 1 - F_X(70) \\ &= 1 - (1 - q + qF_B(x)) \end{aligned}$$

10.2 Exercices - informatique

1. (a) On a

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) &= VaR_\kappa(X_1) + VaR_\kappa(X_2) + VaR_\kappa(X_3) \\ &= 50\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{1.5}} - 1\right) - \\ &\quad 100\log(1-\kappa) + \\ &\quad \exp\left(\log(100) - \frac{1}{2} + VaR_\kappa(Z)\right) \end{aligned}$$

   (b) Voir GitHub

   (c) Voir GitHub

2. Voir GitHub
3. (a) Développer l'expression de la fgp de (M_1, M_2).

   — On a

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= E\left[e^{\Theta_1\lambda_1(t_1-1)}e^{\Theta_2\lambda_2(t_2-1)}\right] \\ &= M_{\Theta_1,\Theta_2}\left(\lambda_1(t_1-1), \lambda_2(t_2-1)\right) \end{aligned}$$

   (b) Développer l'expression de la fonction caractéristique de (X_1, X_2).

   — On a

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= P_{M_1,M_2}\left(\varphi_{B_1}(t_1), \varphi_{B_2}(t_2)\right) \\ &= M_{\Theta_1,\Theta_2}\left(\lambda_1\left(\varphi_{B_1}(t_1)-1\right), \lambda_2\left(\varphi_{B_2}(t_2)-1\right)\right) \end{aligned}$$

   (c) Développer l'expression de la fonction caractéristique de S.

   — On a

$$\varphi_S(t) = \varphi_{X_1,X_2}(t,t) = P_{M_1,M_2}\left(\varphi_{B_1}(t), \varphi_{B_2}(t)\right) = M_{\Theta_1,\Theta_2}\left(\lambda_1\left(\varphi_{B_1}(t_1)-1\right), \lambda_2\left(\varphi_{B_2}(t_2)-1\right)\right) \tag{10.2}$$

   (d) Calculer les valeurs de $f_S(k)$, $k = 0, 1, 2, ..., 4095$.

      i. Indiquer la méthode pour calculer les valeurs de $f_S(k)$.

      — Les v.a. B_1, B_2, X_1, X_2, S sont discrètes.

      — On utilise les méthodes basées sur les fonctions caractéristiques des v.a. discrètes pour calculer les valeurs de $f_S(k)$

      — On utilise la fonction FFT pour construire les valeurs des vecteurs de fonctions caractéristiques associées aux vecteurs des fonctions de masses de proba de B_1 et B_2

      — On utilise (10.2) pour les valeurs du vecteur associé à φ_S

      — On utilise la fonction FFT pour inverser et calculer les valeurs de $f_S(k)$

      ii. Indiquer les valeurs de $F_S(k)$, $k = 30, 40$. Vérification : $F_S(35) = 0.988977$.

      — $F_S(k) = \sum_{j=0}^{k} f_S(j)$

      — $F_S(30)$ =0.977110

      — $F_S(40)$ =0.994759

Chapitre 11

Théorie des copules et agrégation des risques

11.1 Exercices traditionnels

1. (a) On a

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x_1) &= \lim_{x_2\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\ &= 1 - \lim_{x_2\to\infty} \left(e^{-\theta\beta_1 x_1} + e^{-\theta\beta_2 x_2} - e^{-\theta(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= 1 - \left(e^{-\theta\beta_1 x_1}\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= 1 - e^{-\beta_1 x_1}. \end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} F_{X_2}(x_2) &= \lim_{x_1\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\ &= 1 - \lim_{x_1\to\infty} \left(e^{-\theta\beta_1 x_1} + e^{-\theta\beta_2 x_2} - e^{-\theta(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= 1 - \left(e^{-\theta\beta_2 x_2}\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= 1 - e^{-\beta_2 x_2}. \end{aligned}$$

(b) On a

$$F_{X_1}^{-1}(u_1) = -\frac{1}{\beta_1}\log(1-u_1)$$

et

$$F_{X_2}^{-1}(u_2) = -\frac{1}{\beta_2}\log(1-u_2).$$

On obtient

$$\begin{aligned}
C_\theta(u_1,u_2) &= F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right)\\
&= 1-\left(e^{-\theta\beta_1 F_{X_1}^{-1}(u_1)} + e^{-\theta\beta_2 F_{X_2}^{-1}(u_2)} - e^{-\theta\left(\beta_1 F_{X_1}^{-1}(u_1)+\beta_2 F_{X_2}^{-1}(u_2)\right)}\right)^{\frac{1}{\theta}}\\
&= 1-\left(e^{\theta\beta_1\frac{1}{\beta_1}\log(1-u_1)} + e^{\theta\beta_2\frac{1}{\beta_2}\log(1-u_2)} - e^{\theta\left(\beta_1\frac{1}{\beta_1}\log(1-u_1)+\beta_2\frac{1}{\beta_2}\log(1-u_2)\right)}\right)^{\frac{1}{\theta}}\\
&= 1-\left((1-u_1)^\theta + (1-u_2)^\theta - ((1-u_1)(1-u_2))^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}.
\end{aligned}$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned}
F_{X_1}(x_1) &= \lim_{x_2\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\\
&= \lim_{x_2\to\infty}\left[\left(1-e^{-\beta_1x_1}\right)\left(1-e^{-\beta_2x_2}\right)+\theta\left(1-e^{-\beta_1x_1}\right)\left(1-e^{-\beta_2x_2}\right)e^{-\beta_1x_1}e^{-\beta_2x_2}\right]\\
&= 1-e^{-\beta_1x_1}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}
F_{X_2}(x_2) &= \lim_{x_1\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\\
&= \lim_{x_1\to\infty}\left[\left(1-e^{-\beta_1x_1}\right)\left(1-e^{-\beta_2x_2}\right)+\theta\left(1-e^{-\beta_1x_1}\right)\left(1-e^{-\beta_2x_2}\right)e^{-\beta_1x_1}e^{-\beta_2x_2}\right]\\
&= 1-e^{-\beta_2x_2}.
\end{aligned}$$

(b) On a

$$F_{X_1}^{-1}(u_1) = -\frac{1}{\beta_1}\log(1-u_1)$$

et

$$F_{X_2}^{-1}(u_2) = -\frac{1}{\beta_2}\log(1-u_2).$$

On obtient

$$\begin{aligned}
C_\theta(u_1,u_2) &= F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right)\\
&= \left(1-e^{\beta_1\frac{1}{\beta_1}\log(1-u_1)}\right)\left(1-e^{\beta_2\frac{1}{\beta_2}\log(1-u_2)}\right)+\\
&\qquad \theta\left(1-e^{\beta_1\frac{1}{\beta_1}\log(1-u_1)}\right)\left(1-e^{\beta_2\frac{1}{\beta_2}\log(1-u_2)}\right)\times\\
&\qquad e^{\beta_1\frac{1}{\beta_2}\log(1-u_2)}e^{\beta_2\frac{1}{\beta_2}\log(1-u_2)}\\
&= (1-(1-u_1))(1-(1-u_2))+\theta(1-(1-u_1))(1-(1-u_2))(1-u_1)(1-u_2)\\
&= u_1u_2+\theta u_1u_2(1-u_1)(1-u_2)
\end{aligned}$$

3. (a) On a

$$\begin{aligned}
F_{X_1}(x_1) &= \lim_{x_2\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\\
&= \lim_{x_2\to\infty}\left[1-e^{-\beta_1x_1}-e^{-\beta_2x_2}+\left(e^{\theta\beta_1x_1}+e^{\theta\beta_2x_2}-1\right)^{-\frac{1}{\theta}}\right]\\
&= 1-e^{-\beta_1x_1}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}
F_{X_2}(x_2) &= \lim_{x_1 \to \infty} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\
&= \lim_{x_1 \to \infty} \left[1 - e^{-\beta_1 x_1} - e^{-\beta_2 x_2} + \left(e^{\theta\beta_1 x_1} + e^{\theta\beta_2 x_2} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}}\right] \\
&= 1 - e^{-\beta_2 x_2}.
\end{aligned}$$

(b) On a

$$F_{X_1}^{-1}(u_1) = -\frac{1}{\beta_1}\log(1 - u_1)$$

et

$$F_{X_2}^{-1}(u_2) = -\frac{1}{\beta_2}\log(1 - u_2).$$

On obtient

$$\begin{aligned}
C_\theta(u_1, u_2) &= F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right) \\
&= 1 - (1 - u_1) - (1 - u_2) + \left((1 - u_1)^{-\theta} + (1 - u_2)^{-\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}} \\
&= u_1 + u_2 - 1 + \left((1 - u_1)^{-\theta} + (1 - u_2)^{-\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}}.
\end{aligned}$$

4. (a) Il s'agit d'un cas particulier de la question 3 avec $\beta_1 = \dfrac{1}{10}$ et $\beta_2 = \dfrac{1}{6}$. On obtient

$$F_{X_1}(x_1) = 1 - e^{-\frac{x_1}{10}}$$

et

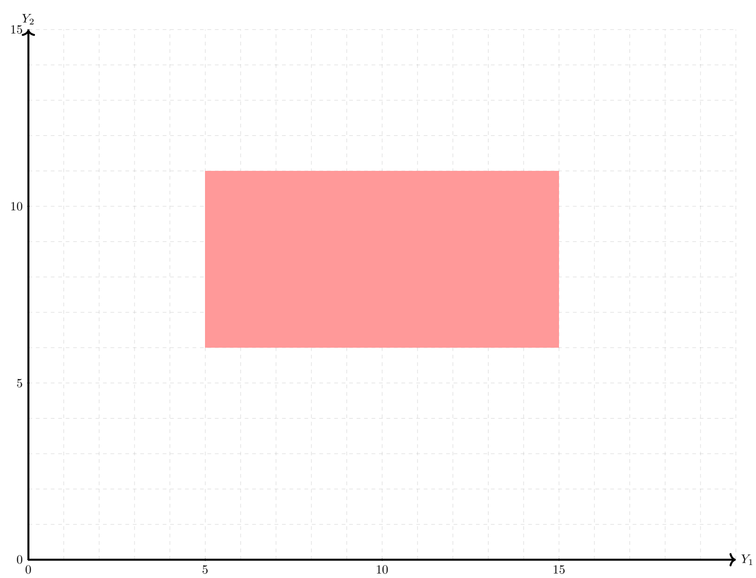
$$F_{X_1}(x_1) = 1 - e^{-\frac{x_1}{6}}.$$

(b) Il s'agit d'un cas particulier de la question 3 avec $\theta = 2$. On obtient

$$C_\theta(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \left((1 - u_1)^{-2} + (1 - u_2)^{-2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

(c) Certains calculs sont fait sur R.

i. La probabilité demandée correspond à l'aire en rouge dans l'illustration ci-dessous.



On obtient cette aire avec la combinaison suivante d'opérations.

$$\begin{aligned}\Pr(Y_1 \leq Y_1, Y_2 \leq Y_2) &= F_{Y_1,Y_2}(15,11) - F_{Y_1,Y_2}(5,11) - F_{Y_1,Y_2}(15,6) + F_{Y_1,Y_2}(5,6)\\ &= C(F_{Y_1}(15), F_{Y_2}(11)) - C(F_{Y_1}(5), F_{Y_2}(11))\\ &\qquad - C(F_{Y_1}(15), F_{Y_2}(6)) + C(F_{Y_1}(5), F_{Y_2}(6))\\ &= 0.03726074.\end{aligned}$$

ii. On a

$$\begin{aligned}\Pr(Y_1 > 50|Y_2 > 30) &= \frac{\Pr(Y_1 > 50, Y_2 > 30)}{\Pr(Y_2 > 30)}\\ &= \frac{\overline{F}_{Y_1,Y_2}(50,30)}{\overline{F}_{Y_2}(30)}\\ &= \frac{\widehat{C}(\overline{F}_{Y_1}(50), \overline{F}_{Y_2}(30))}{\overline{F}_{Y_2}(30)}.\end{aligned}$$

On a $\overline{F}_{Y_1}(50) = 0.02332362$ et $\overline{F}_{Y_2}(30) = 0.1991483$, alors, on obtient

$$\begin{aligned}\Pr(Y_1 > 50|Y_2 > 30) &= \frac{\widehat{C}(0.02332362, 0.1991483)}{0.1991483}\\ &= 0.116353\end{aligned}$$

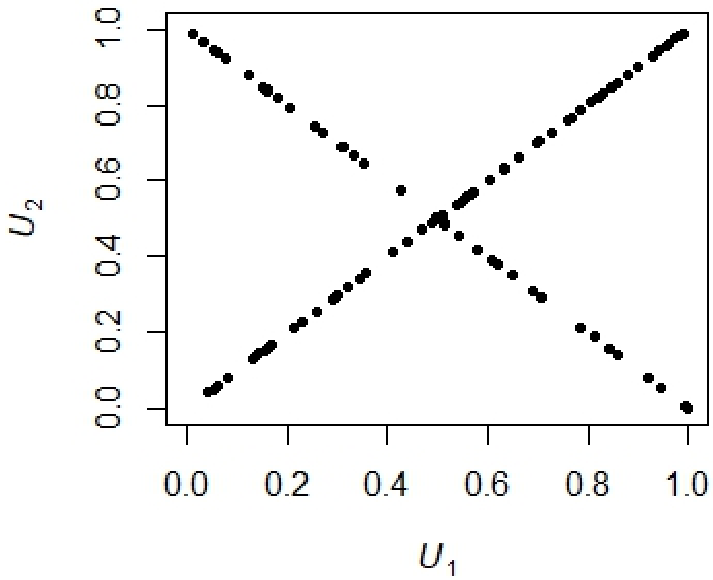
5. (a) On a

$$\begin{aligned}F_{U_1}(u_1) &= F_{U1,U2}(u_1, 1)\\ &= \frac{1}{2}\max(u_1 + 1 - 1; 0) + \frac{1}{2}\min(u_1; 1)\\ &= \frac{1}{2}\max(u_1; 0) + \frac{1}{2}\min(u_1; 1)\\ &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_1\\ &= u_1.\end{aligned}$$

De manière équivalante, on a

$$\begin{aligned}F_{U_2}(u_2) &= F_{U1,U2}(1, u_2)\\ &= \frac{1}{2}\max(1 + u_2 - 1; 0) + \frac{1}{2}\min(1; u_2)\\ &= \frac{1}{2}\max(u_2; 0) + \frac{1}{2}\min(1; u_2)\\ &= \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_2\\ &= u_2\end{aligned}$$

(b) Voici le résultat d'une simulation du couple de v.a.



(c) On a

$$Cov(U_1, U_2) = E[U_1U_2] - E[U_1]E[U_2].$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} E[U_1U_2] &= \frac{1}{2}E[U_1^2] + \frac{1}{2}E[U_1(1-U_1)] \\ &= \frac{1}{2}E[U_1^2]\frac{1}{2}E[U_1] - \frac{1}{2}E[U_1] \\ &= \frac{1}{2}E[U_1] = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Alors, on déduit

$$Cov(U_1, U_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}^2 = 0.$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \Pr(S < s) &= \frac{1}{2}\Pr(2U \leq s) + \frac{1}{2}\Pr(U + 1 - U \leq s) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \times \mathbb{1}_{\{s>1\}} \\ &= \begin{cases} 0, & s < 0 \\ \frac{s}{4}, & 0 < s < 1 \\ \frac{s}{4} + \frac{1}{2}, & 1 < s < 2 \\ 1, & s > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

(e) On obtient

$$\begin{aligned}
E[X_1X_2] &= E\left[F_{X_1}^{-1}(U_1)F_{X_2}^{-1}(U_2)\right] \\
&= \frac{1}{2}E\left[F_{X_1}^{-1}(U_1)F_{X_2}^{-1}(U_1)\right] + \frac{1}{2}E\left[F_{X_1}^{-1}(U_1)F_{X_2}^{-1}(1-U_1)\right] \\
&= \frac{1}{2}E\left[F_{X_1}^{-1}(U_1)^2\right] + \frac{1}{2}E\left[-F_{X_1}^{-1}(U_1)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}E[X_1^2] - \frac{1}{2}E[X_1^2] \\
&= 0;
\end{aligned}$$

$$Cov(X_1,X_2) = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] = 0 - 0 = 0.$$

(f) On a

$$\begin{aligned}
\Pr(T \leq t) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq t) \\
&= \frac{1}{2}\Pr\left(\Phi^{-1}(U_1) + \Phi^{-1}(U_1) \leq t\right) + \Pr\left(\Phi^{-1}(U_1) + \Phi^{-1}(1-U_1) \leq t\right) \\
&= \frac{1}{2}\Pr\left(\Phi^{-1}(U_1) \leq \frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\Pr\left(\Phi^{-1}(U_1) - \Phi^{-1}(U_1) \leq t\right) \\
&= \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \mathbb{1}_{\{t>0\}}.
\end{aligned}$$

On calcule

$$F_T(1) = \frac{1}{2}\Phi(1) + \frac{1}{2} = 0.9206724; F_T(-1) = \frac{1}{2}\Phi(-1) = 0.07932763.$$

6. (a) On a

$$\begin{aligned}
C(u_1,u_2) &= C(u_1,u_2,1) \\
&= \frac{1}{3}\max(u_1+u_2-1;0)+ \\
&\qquad \frac{1}{3}\max(u_1+1-1;0)u_2+ \\
&\qquad \frac{1}{3}\max(u_2+1-1;0)u_1 \\
&= \frac{1}{3}\max(u_1+u_2-1;0) + \frac{2}{3}u_1u_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(u_1,u_3) &= C(u_1,1,u_3) \\
&= \frac{1}{3}\max(u_1+1-1;0)u_3+ \\
&\qquad \frac{1}{3}\max(u_1+u_3-1;0)+ \\
&\qquad \frac{1}{3}\max(1+u_3-1;0)u_1 \\
&= \frac{1}{3}\max(u_1+u_3-1;0) + \frac{2}{3}u_1u_3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(u_2, u_3) &= C(1, u_2, u_3) \\
&= \frac{1}{3}\max(1 + u_2 - 1; 0)u_3 + \\
&\quad\ \frac{1}{3}\max(1 + u_3 - 1; 0)u_2 + \\
&\quad\ \frac{1}{3}\max(u_2 + u_3 - 1; 0) \\
&= \frac{1}{3}\max(u_2 + u_3 - 1; 0) + \frac{2}{3}u_2u_3.
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, il y a une composante antimonotone et une compostante indépendante.

(b) Les fonctions de répartitions sont identiques, alors on calcule le cas $i = 1, j = 2$. On a

$$\begin{aligned}
E[U_1U_2] &= \frac{1}{3}E[U_1(1 - U_1)] + \frac{2}{3}E[U_1U_2] \\
&= \frac{1}{3}E[U_1] - \frac{1}{3}E[U_1^2] + \frac{2}{3}E[U_1]E[U_2] \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{2}{9};
\end{aligned}$$

$$Cov(U_1, U_2) = E[U_1U_2] - E[U_1]E[U_2] = \frac{2}{9} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{36};$$

$$\rho(U_1, U_2) = -\frac{1}{36} \div \frac{1}{12} = -\frac{1}{3}.$$

(c) i. On a

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{3}\{X_i \in (-1, 1])\}\right) &= \Pr(X_1 < 1, X_2 < 1, X_3 < 1) - \Pr(X_1 < -1, X_2 < 1, X_3 < 1) - \\
&\quad \Pr(X_1 < 1, X_2 < -1, X_3 < 1) - \Pr(X_1 < 1, X_2 < 1, X_3 < -1) + \\
&\quad \Pr(X_1 < -1, X_2 < -1, X_3 < 1) + \Pr(X_1 < -1, X_2 < 1, X_3 < -1) + \\
&\quad \Pr(X_1 < 1, X_2 < -1, X_3 < -1) + \Pr(X_1 < -1, X_2 < -1, X_3 < -1) \\
&= C(\Phi^{-1}(1), \Phi^{-1}(1), \Phi^{-1}(1)) - C(\Phi^{-1}(-1), \Phi^{-1}(1), \Phi^{-1}(1)) - \\
&\quad C(\Phi^{-1}(1), \Phi^{-1}(-1), \Phi^{-1}(1)) - C(\Phi^{-1}(1), \Phi^{-1}(1), \Phi^{-1}(-1)) + \\
&\quad C(\Phi^{-1}(-1), \Phi^{-1}(-1), \Phi^{-1}(1)) + C(\Phi^{-1}(-1), \Phi^{-1}(1), \Phi^{-1}(-1)) + \\
&\quad C(\Phi^{-1}(1), \Phi^{-1}(-1), \Phi^{-1}(-1)) + C(\Phi^{-1}(-1), \Phi^{-1}(-1), \Phi^{-1}(-1)) \\
&= \ldots \\
&= (2\Phi(1) - 1)^2.
\end{aligned}$$

ii. On observe $T \sim Norm(\mu_T, \sigma_T^2)$, où $\mu_T = 0 + 0 + 0$ et

$$\begin{aligned}\sigma_T^2 &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} Cov(Y_i, Y_j) \\ &= 1 + 1 + 1 + 2\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$F_S(s) = \frac{1}{3}\Pr\left(X_1 + X_2 + X_3\right)$$

7. (a) Identifier les marginales $F_{X_1}(x_1)$ et $F_{X_2}(x_2)$.

On a

$$\begin{aligned}F_{X_1}(x_1) &= \lim_{x_2\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\ &= 1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + x_1}\right)^{\alpha_1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}F_{X_2}(x_2) &= \lim_{x_1\to\infty} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\ &= 1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + x_2}\right)^{\alpha_2}\end{aligned}$$

(b) Démontrer à quelle relation de dépendance correspond le cas particulier $\theta = 1$.

Pour $\theta = 1$, on a

$$\begin{aligned}F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= 1 - \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + x_1}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + x_2}\right)^{\alpha_2} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + x_2}\right)^{\alpha_2}\right)^{1} \\ &= \left(1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + x_1}\right)^{\alpha_1}\right)\left(1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + x_2}\right)^{\alpha_2}\right)\end{aligned}$$

ce qui correspond à l'indépendance

(c) Utiliser la méthode par inversion pour identifier la copule $C_\theta(u_1, u_2)$ associée à F_{X_1,X_2}.

On a

$$\begin{aligned}x_i &= F_{X_i}^{-1}(u_i) \\ &= \left(\frac{1}{(1-u_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}} - 1\right)\end{aligned}$$

pour $i = 1, 2$

On observe aussi

$$1 - u_i = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + x_i}\right)^{\alpha_i}$$

pour $i = 1, 2$

Alors, selon la méthode par inversion, on a

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right) \\ &= 1 - \left((1-u_1)^{\theta} + (1-u_2)^{\theta} - (1-u_1)^{\theta}(1-u_2)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

(d) Développer l'expression de $C_{2|1}$.

On a

$$\begin{aligned} C_{2|1}(u_2|u_1) &= \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \\ &= -\frac{1}{\theta}\left(-\theta(1-u_1)^{\theta-1} - (-\theta)(1-u_1)^{\theta-1}(1-u_2)^{\theta}\right)\left((1-u_1)^{\theta} + (1-u_2)^{\theta} - (1-u_1)^{\theta}(1-u_2)^{\theta}\right) \\ &= \left((1-u_1)^{\theta-1} - (1-u_1)^{\theta-1}(1-u_2)^{\theta}\right)\left((1-u_1)^{\theta} + (1-u_2)^{\theta} - (1-u_1)^{\theta}(1-u_2)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}-1} \end{aligned}$$

(e) On définit le couple de v.a. (Y_1, Y_2) où

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = C(F_{Y_1}(y_1), F_{Y_2}(y_2))$$

et

$$\begin{aligned} Y_1 &\sim LN(2,1) \\ Y_2 &\sim Beta(2,1) \end{aligned}$$

On a les réalisations indépendantes 0.76 et 0.83 d'une loi uniforme (avec $\theta = 2$).

i. Utiliser la méthode conditionnelle pour simuler une réalisation de (U_1, U_2) dont la fonction de répartition conjointe est la copule C.

On a

$$U_1^{(1)} = V_1^{(1)} = 0.76$$

On pose $w = V_2^{(1)} = 0.83, z_1 = 1 - U_1^{(1)}$, $z_2 = 1 - U_2^{(1)}$. On cherche la solution z_2 de

$$w = \left(z_1 - z_1 z_2^2\right)\left(z_1^2 + z_2^2 - z_1^2 z_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

On a

$$\left(z_1^2 + z_2^2 - z_1^2 z_2^2\right) w^2 = \left(z_1 - z_1 z_2^2\right)^2 = z_1^2 - 2z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2^4$$

Puis, on réarrange

$$z_2^4\left(z_1^2\right) + z_2^2\left(-2z_1 - w^2 + z_1^2 w^2\right) + \left(z_1^2 - z_1^2 w^2\right) = 0$$

On obtient

$$\begin{aligned} z_2^2 &= \frac{-\left(-2z_1 - w^2 + z_1^2 w^2\right) \pm \sqrt{\left(-2z_1 - w^2 + z_1^2 w^2\right)^2 - 4 \times \left(z_1^2\right) \times \left(z_1^2 - z_1^2 w^2\right)}}{2 \times z_1^2} \\ &= \frac{-\left(-2 \times 0.24 - 0.83^2 + 0.24^2 \times 0.83^2\right) - \sqrt{\left(-2 \times 0.24 - 0.83^2 + 0.24^2 \times 0.83^2\right)^2 - 4 \times (0.24^2) \times (0.24}}{2 \times 0.24^2} \\ &= 0.01588167 \end{aligned}$$

Alors, on a

$$z_2 = \sqrt{0.01588167} = 0.126\,022\,497\,991$$

et

$$\begin{aligned} U_2^{(1)} &= 1 - z_2 \\ &= 1 - \sqrt{0.01588167} \\ &= 0.873977502 \end{aligned}$$

ii. Simuler une réalisation de (Y_1, Y_2).
On a

$$\begin{aligned} Y_1^{(1)} &= F_{Y_1}^{-1}\left(U_1^{(1)}\right) \\ &= e^{2+1\times\Phi^{-1}(0.76)} \\ &= e^{2+1\times 0.7063} \\ &= 14.973769944 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y_2^{(1)} &= F_{Y_2}^{-1}\left(U_2^{(1)}\right) \\ &= \sqrt{0.873977502} \\ &= 0.934867639 \end{aligned}$$

8. (a) Développer l'expression pour la valeur minimale de $\rho_P(X_1, X_2)$. Indiquer clairement la structure de dépendance conduisant à cette valeur. On note par $\left(X_1^{(a)}, X_2^{(a)}\right)$ le couple de v.a. avec $F_{X_1^{(a)}, X_2^{(a)}} \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$ qui est définie par cette structure de dépendance.

La valeur minimale est atteinte quand $\left(X_1^{(a)}, X_2^{(a)}\right)$ sont antimotones.

On a

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= E\left[e^{\mu_1+\sigma_1 Z} e^{\mu_2+\sigma_2(1-Z)}\right] \\ &= e^{\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)^2} \\ &= e^{\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\right)} \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \rho_P(X_1, X_2) &= \frac{e^{\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\right)} - e^{\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2\mu_1+\sigma_1^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)\mathrm{e}^{2\mu_2+\sigma_2^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\ &= \frac{e^{-\sigma_1\sigma_2}-1}{\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)}} \end{aligned}$$

(b) Développer l'expression pour la valeur maximale de $\rho_P(X_1, X_2)$. Indiquer clairement la structure de dépendance conduisant à cette valeur. On note par $\left(X_1^{(b)}, X_2^{(b)}\right)$ le couple de v.a. avec $F_{X_1^{(b)}, X_2^{(b)}} \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$ qui est définie par cette structure de dépendance.

La valeur maximale est atteinte quand $\left(X_1^{(a)}, X_2^{(a)}\right)$ sont antimotones.

On a

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= E\left[e^{\mu_1+\sigma_1 Z} e^{\mu_2+\sigma_2 Z}\right] \\ &= e^{\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)^2} \\ &= e^{\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\right)} \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}\rho_P(X_1, X_2) &= \frac{e^{\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\right)} - e^{\mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2\mu_1+\sigma_1^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)\mathrm{e}^{2\mu_2+\sigma_2^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\ &= \frac{e^{\sigma_1\sigma_2}-1}{\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)}}\end{aligned}$$

(c) On définit $S^{(a)} = X_1^{(a)} + X_2^{(a)}$ et $S^{(b)} = X_1^{(b)} + X_2^{(b)}$. On fixe $\mu_1 = 1.9$, $\mu_2 = 2$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0.9$. On utilise les réalisations suivantes d'une loi uniforme standard :

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U^{(j)}$	0.02	0.15	0.28	0.30	0.46	0.51	0.63	0.74	0.87	0.99

i. Produire 10 réalisations de $S^{(a)}$ et $S^{(b)}$. Indiquer la valeur minimale et la valeur maximale des réalisations.

Réalisations de $\left(X_1^{(a)}, X_2^{(a)}\right)$ et $S^{(a)}$

0,8575 2,3717 3,733 3,9575 6,0472 6,8558 9,3176 12,7216 20,6229 68,4634

46,9147 18,7794 12,4849 11,8456 8,0878 7,224 5,481 4,1414 2,6811 0,9106

47,7722 21,1511 16,2179 15,8031 14,135 14,0798 14,7986 16,863 23,304 69,374

Réalisations de $\left(X_1^{(b)}, X_2^{(b)}\right)$ et $S^{(b)}$

0,8575 2,3717 3,733 3,9575 6,0472 6,8558 9,3176 12,7216 20,6229 68,4634

1,1638 2,9073 4,3731 4,6091 6,7507 7,5579 9,9613 13,1836 20,3638 59,9595

2,0213 5,279 8,1061 8,5666 12,7979 14,4137 19,2789 25,9052 40,9867 128,4229

ii. Calculer une approximation de $F_{S^{(a)}}(x)$ et $F_{S^{(b)}}(x)$, pour $x = 15$.

On a

$$\widetilde{F}_{S^{(a)}}(x) = \frac{3}{10}$$

et

$$\widetilde{F}_{S^{(a)}}(x) = \frac{6}{10}$$

iii. Calculer une approximation de $E\left[\max\left(S^{(a)} - x; 0\right)\right]$ et $E\left[\max\left(S^{(b)} - x; 0\right)\right]$ pour $x = 20$.

Valeurs des réalisations de $\max\left(S^{(a)} - 20; 0\right)$:

27,7722 1,1511 0 0 0 0 0 0 3,304 49,374

Approximation de $E\left[\max\left(S^{(a)} - x; 0\right)\right]$: 8,16013

Valeurs des réalisations de $\max\left(S^{(b)} - 20; 0\right)$:

0 0 0 0 0 0 0 5,9052 20,9867 108,4229

Approximation de $E\left[\max\left(S^{(a)} - x; 0\right)\right]$: 13,53148

9. (a) Calculer $F_{R_1,R_2}(-0.1, -0.1)$.

On a

$$\begin{aligned} F_{R_1}(-0.1) &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\frac{-0.1-0.06}{0.2}}{\sqrt{2+\left(\frac{-0.1-0.06}{0.2}\right)^2}}\right) \\ &= 0.253817 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{R_2}(-0.1) &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\frac{-0.1-0.05}{0.15}}{\sqrt{2+\left(\frac{-0.1-0.05}{0.15}\right)^2}}\right) \\ &= 0.211325 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{R_1,R_2}(-0.1.-0.1) &= \exp\left(-\left\{(-\ln(0.253817))^4+(-\ln(0.211325))^4\right\}^{(1/4)}\right) \\ &= 0.173832 \end{aligned}$$

(b) Calculer $E\left[1_{\{\{R_1\leq -0.1\}\cup\{R_2\leq -0.1\}\}}\right]$.

On a

$$\begin{aligned} E\left[1_{\{\{R_1\leq -0.1\}\cup\{R_2\leq -0.1\}\}}\right] &= \Pr(R_1\leq -0.1\cup R_2\leq -0.1) \\ &= F_{R_1}(-0.1)+F_{R_2}(-0.1)-F_{R_1,R_2}(-0.1,-0.1) \\ &= 0.253817+0.211325-0.173832 \\ &= 0.29131 \end{aligned}$$

(c) Développer l'expression de $F_X(x)$.

On a

$$F_X(x)=1-q+qF_B(x)$$

avec

$$q=\Pr(R_1\leq -0.1\cup R_2\leq -0.1).$$

On obtient

$$q=0.29131$$

(d) Calculer $F_X(0)$ et $F_X(10000)$.

On a

$$F_X(0)=1-q=1-0.29131=0.70869$$

On a

$$\begin{aligned} F_X(10000) &= 1-q+q\left(1-e^{-\left(\frac{10000}{1000}\right)^{0.5}}\right) \\ &= 1-0.29131+0.29131\left(1-e^{-\left(\frac{10000}{1000}\right)^{0.5}}\right) \\ &= 0.987669 \end{aligned}$$

(e) Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_{0.995}(X)$.

On a

$$VaR_{0.5}(X)=0$$

On a

$$\begin{aligned} VaR_{0.995}(X) &= 1000 \times \left(-\ln\left(1 - \frac{0.995 - (1-q)}{q}\right)\right)^2 \\ &= 1000 \times \left(-\ln\left(1 - \frac{0.995 - (1-0.29131)}{0.29131}\right)\right)^2 \\ &= 16523.819151 \end{aligned}$$

10. (a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g) On a

$$\begin{aligned} F_{U_1}(u_1) &= F_{U_1,U_2}(u_1, 1) \\ &= \frac{1}{2}\max(u_1 + 1 - 1; 0) + \frac{1}{2}\min(u_1; 1) \\ &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_1 \\ &= u_1 \end{aligned}$$

Alors, on déduit $U_1 \sim Unif(0,1)$ (la fonction de répartition de U_1 définit sa loi)
La démonstration est identique pour U_2

(h) Graphique avec deux diagonales qui se croisent.

(i) On a

$$Cov(U_1, U_2) = E[U_1U_2] - E[U_1]E[U_2]$$

On a

$$\begin{aligned} E[U_1U_2] &= \frac{1}{2}\int_0^1 u(1-u)(1)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(1)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

On obtient

$$Cov(U_1, U_2) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

(j) On a

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr(U_1 + U_2 \leq x) \\ &= \frac{1}{2}\Pr(U + 1 - U \leq x) + \frac{1}{2}\Pr(U + U \leq x) \end{aligned}$$

où

$$\Pr(U + 1 - U \leq x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Alors, on obtient

$$F_S(x) = \frac{1}{2}1_{\{x \geq 1\}} + \frac{1}{2}F_U\left(\frac{x}{2}\right),\ 0 \leq x \leq 2$$

(k) Il y a plusieurs façon de montrer le résultat.

Façon #1 : La loi de (U_1, U_2) est un mélange (poids identique $\frac{1}{2}$) d'une loi conjointe avec composantes antimonotones et d'une loi conjointe avec composantes comonotones
Soit $\Theta \sim Bern(0.5)$. Soit $X \sim Norm(0,1)$. De plus, Θ et X sont indépendantes.
On définit

$$\begin{aligned} X_1 &= X \\ X_2 &= \begin{cases} -X, & \Theta = 0 \\ X, & \Theta = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= \frac{1}{2}\left(E\left[-X^2\right]\right) + \frac{1}{2}\left(E\left[X^2\right]\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors on obtient

$$Cov(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] = 0$$

(l) On a

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \Pr(X_1 + X_2 \leq x) \\ &= \frac{1}{2}\Pr(X - X \leq x) + \frac{1}{2}\Pr(X + X \leq x) \end{aligned}$$

où

$$\Pr(X - X \leq x) = \begin{cases} 0, -\infty < x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$$

Alors, on obtient

$$F_S(x) = \frac{1}{2} 1_{\{x \geq 0\}} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2}\right), \ x \in \mathbb{R}$$

On obtient

$$F_T(-1) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}(0.3085375) = 0.15426875$$

$$F_T(1) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(0.6914625) = 0.84573125$$

11. (a) We observe

$$\alpha = 2$$

We obtain

$$\Pr(X_1 > 5 | X_2 > 5) = \frac{\left(1 - 2 \times (1 - \exp(-5)) + \left(\frac{2}{(1-\exp(-5))^2} - 1\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)}{\exp(-5)} = 0.01994521$$

(b) We observe

$$\alpha = 2$$

We obtain

$$\Pr(X_1 > 5 | X_2 > 5) = \frac{\left(1 - 2 \times (1 - \exp(-5)) + \left(\exp\left(-\left\{2 \times (-\ln(1 - \exp(-5)))^2\right\}^{(1/2)}\right)\right)\right)}{\exp(-5)} = 0.587\,762\,540$$

12. La valeur maximale est atteinte quand X_1 et X_2 sont comonotones. On a $X_1 = \sqrt{U}$ et $X_2 = U$, où $U \sim Unif(0,1)$. On a

$$Cov(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2]$$

où
$$E\left[X_1X_2\right] = \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \times u du = 0.4.$$
Alors
$$Cov\left(X_1, X_2\right) = 0.4 - \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{30}.$$
Ensuite,
$$r\left(X_1, X_2\right) = ...$$
La valeur minimale est atteinte quand X_1 et X_2 sont antimonotones. On a $X_1 = \sqrt{1-U}$ et $X_2 = U$, où $U \sim Unif\left(0,1\right)$. On a
$$Cov\left(X_1, X_2\right) = E\left[X_1X_2\right] - E\left[X_1\right]E\left[X_2\right]$$
où
$$E\left[X_1X_2\right] = \int_0^1 \left(1-u\right)^{\frac{1}{2}} \times u du =: .$$
Alors
$$Cov\left(X_1, X_2\right) = 0.266666666667 - \frac{2}{3}\frac{1}{2} = -\frac{2}{30}.$$
Ensuite,
$$r\left(X_1, X_2\right) = ...$$

13. Soit la v.a $X = B \times 1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}}$représentant les coûts pour une institution financière. et on a :
$$\begin{array}{rcl} B & \sim & Pareto(1.5, 1000) \\ R_1 & \sim & N(0.08, 0.2^2) \\ R_2 & \sim & N(0.085, 0.3^2) \end{array}$$

(a) Déveolopper l'expression stop-loss :
$$\begin{aligned} E\left[max(X-d;0)\right] &= E\left[E\left[\max(B \times 1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}} - d; 0\,|R_1, R_2\,\right]\right] \\ &= E\left[\max(B-d;0)\right] \times E\left[1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}}\right] \\ &= \frac{\lambda}{\alpha-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha-1} E\left[1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}}\right] \end{aligned}$$

(b) Calculer $E\left[1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}}\right]$ avec C qui est la copule Gumbel
$$\begin{aligned} E\left[1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}}\right] &= P\left(R_1 \leq -0.1\right) + P\left(R_2 \leq -0.1\right) - P\left(\{R_1 \leq -0.1\} \cap \{R_2 \leq -0.1\}\right) \\ &= P\left(R_1 \leq -0.1\right) + P\left(R_2 \leq -0.1\right) - C\left(P\left(R_1 \leq -0.1\right), P\left(R_1 \leq -0.1\right)\right) \\ &= 0.2921908 \end{aligned}$$

(c) Calculer la prime stop loss : d'après a) on obtient
$$E\left[\max(X-d;0)\right] = 184.7977$$

14. (a) On sait que
$$C\left(u_1, u_2\right) = \left(u_1^{-\gamma} + u_2^{-\gamma} - 1\right)^{-\frac{1}{\gamma}} = F_{U_1,U_2}\left(u_1, u_2\right)$$
pour un couple de v.a. $\left(U_1, U_2\right)$ dont les lois marginales sont de loi uniforme $\left(0,1\right)$. Trouver

l'expression de $F_{U_2|U_1=u_1}(u_2)$.
Rép :

$$F_{U_2|U_1=u_1}(u_2) = \frac{\partial}{\partial u_1}C(u_1,u_2) = \frac{1}{u_1^{\gamma+1}}\frac{1}{\left(u_1^{-\gamma}+u_2^{-\gamma}-1\right)^{\frac{1}{\gamma}+1}}$$

(b) On veut produire une réalisation $\left(B_1^{(1)},B_2^{(1)}\right)$ de (B_1,B_2). On a produit une réalisation $\left(V_1^{(1)}=0.24,V_2^{(1)}=0.78\right)$ de (V_1,V_2) où V_1 et V_2 sont des v.a. indépendantes de loi uniforme $(0,1)$. On utilise la réalisation $\left(V_1^{(1)}=0.24,V_2^{(1)}=0.78\right)$ et $F_{U_2|U_1=u_1}(u_2)$ pour produire la $\left(U_1^{(1)},U_2^{(1)}\right)$ de (U_1,U_2). On se sert de $\left(U_1^{(1)},U_2^{(1)}\right)$ pour produire $\left(B_1^{(1)},B_2^{(1)}\right)$. Calculer $\left(U_1^{(1)},U_2^{(1)}\right)$ et $\left(B_1^{(1)},B_2^{(1)}\right)$.

Réalisation $\left(U_1^{(1)},U_2^{(1)}\right)$ de (U_1,U_2) :
On a

$$U_1^{(1)} = V_1^{(1)} = 0.24$$

On a

$$\frac{1}{\left(U_1^{(1)}\right)^{\gamma+1}}\frac{1}{\left(\left(U_1^{(1)}\right)^{-\gamma}+u_2^{-\gamma}-1\right)^{\frac{1}{\gamma}+1}} = V_2^{(1)}$$

Il reste à isoler u_2. On a

$$\left(\left(U_1^{(1)}\right)^{-\gamma}+u_2^{-\gamma}-1\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} = \frac{1}{V_2^{(1)}\left(U_1^{(1)}\right)^{\gamma+1}}$$

puis,

$$\begin{aligned}
u_2 &= \left(\left(\frac{1}{V_2^{(1)}\left(U_1^{(1)}\right)^{\gamma+1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} - \left(U_1^{(1)}\right)^{-\gamma}+1\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
&= \left(\left(\frac{1}{V_2^{(1)}\left(U_1^{(1)}\right)^{\gamma+1}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} - \left(U_1^{(1)}\right)^{-\gamma}+1\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \\
&= \left(\left(\frac{1}{0.78\,(0.24)^{8+1}}\right)^{\frac{8}{8+1}} - (0.24)^{-8}+1\right)^{-\frac{1}{8}} \\
&= 0.285818609487
\end{aligned}$$

Réalisation $\left(B_1^{(1)},B_2^{(1)}\right)$ de (B_1,B_2) :
On a

$$\begin{aligned}
B_1^{(1)} &= 14000\times\left(\frac{1}{(1-0.24)^{\frac{1}{2.4}}}-1\right) =: 1696.001\,765\,82 \\
B_2^{(1)} &= -5000\times\ln(1-0.285818609487) = 1683.09150285
\end{aligned}$$

(c) Refaire $(a)-(c)$ en supposant la copule FGM avec

$$C(u_1,u_2) = u_1u_2+\theta u_1u_2(1-u_1)(1-u_2)$$

avec $\theta = -1$.
On a

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2) \\ &= u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 - \theta u_1^2 u_2 - \theta u_1 u_2^2 + 2\theta u_1^2 u_2^2 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} F_{U_2|U_1=u_1}(u_2) &= \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \\ &= u_2 + \theta u_2 - \theta 2 u_1 u_2 - \theta u_2^2 + 2\theta u_1 u_2^2 \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} &= 0.24 \\ U_2^{(1)} &= ??? \end{aligned}$$

Bon, on a

$$u_2 + \theta u_2 - \theta 2 u_1 u_2 - \theta u_2^2 + 2\theta u_1 u_2^2 - V_2^{(1)} = 0$$

On veut isoler u_2 (note : $u_1 = U_1^{(1)}$)

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{-(1 + \theta - 2\theta u_1) + \sqrt{(1 + \theta - 2\theta u_1)^2 - 4 \times (-\theta + 2\theta u_1) \times \left(-V_2^{(1)}\right)}}{2 \times (-\theta + 2\theta u_1)} \\ &= \frac{-(1 - 1 + 2 \times 0.24) + \sqrt{(1 - 1 + 2 \times 0.24)^2 - 4 \times (1 - 2 \times 0.24) \times (-0.78)}}{2 \times (1 - 2 \times 0.24)} \\ &= 0.847\,284\,579\,013 \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} B_1^{(1)} &= 14000 \times \left(\frac{1}{(1 - 0.24)^{\frac{1}{2.4}}} - 1 \right) =: 1696.\,001\,765\,82 \\ B_2^{(1)} &= -5000 \times \ln(1 - 0.847284579013) =: 9395.\,895\,415\,37 \end{aligned}$$

15. (a) On suppose que les v.a. $T_1, ..., T_4$ sont indépendantes. Calculer $\Pr(N_{TOT} = k)$, pour $k = 0, 1, ..., 4$.
Rep : 0.818731 0.167909 0.012913 0.000441 0.000006
Rép : Comme les v.a. $T_1, ..., T_4$ sont indépendantes, alors

$$N_{TOT} \sim Bin(4, q)$$

avec $q = \Pr(T \leq 1) = 1 - e^{-0.05} = 4.877\,057\,550 \times 10^{-2}$

(b) On suppose que les v.a. $T_1, ..., T_4$ sont comonotones. Calculer $\Pr(N_{TOT} = k)$, pour $k = 0, 1, ..., 4$.
Rép : Comme les v.a. $T_1, ..., T_4$ sont comontones, alors

$$N_{TOT} = 4I$$

où $I \sim Bern(q)$ avec $q = \Pr(T \leq 1) = 1 - e^{-0.05} = 4.877\,057\,550 \times 10^{-2}$
On obtient 0.9512294 0 0 0 0.04877058

(c) On suppose que la structure de dépendance entre les v.a. $T_1, ..., T_4$ est définie à l'aide de la copule de Clayton où le paramètre α prend la valeur 5. Calculer $\Pr(N_{TOT} = k)$, pour $k = 0, 1$. Rép : 0.8591631 et 0.099477569
Rép : Important les v.a. $T_1, ..., T_4$ sont identiquement distribuées

Calcul de $\Pr(N_{TOT}=4)$

$$\Pr(N_{TOT}=4)=\binom{4}{4}F_{T_1,T_2,T_3,T_4}(1,1,1,1)$$

Calcul de $\Pr(N_{TOT}=3)$

$$\Pr(N_{TOT}=3)=\binom{4}{3}\times\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq 1,T_4>1)=4\times q_A$$

avec

$$q_A=\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq 1,T_4\leq\infty)-\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq 1,T_4\leq 1)$$

Calcul de $\Pr(N_{TOT}=2)$

$$\Pr(N_{TOT}=2)=\binom{4}{2}\times\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3>1,T_4>1)=6\times q_B$$

avec

$$\begin{aligned} q_B &= \Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq\infty,T_4\leq\infty) \\ &\quad -2\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq 1,T_4\leq\infty) \\ &\quad +\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq 1,T_4\leq 1)\end{aligned}$$

Calcul de $\Pr(N_{TOT}=1)$

$$\Pr(N_{TOT}=1)=\binom{4}{1}\times\Pr(T_1\leq 1,T_2>1,T_3>1,T_4>1)=4\times q_C$$

avec

$$\begin{aligned} q_C &= \Pr(T_1\leq 1,T_2\leq\infty,T_3\leq\infty,T_4\leq\infty) \\ &\quad -3\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq\infty,T_4\leq\infty) \\ &\quad +3\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq 1,T_4\leq\infty) \\ &\quad -\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq 1,T_4\leq 1)\end{aligned}$$

Calcul de $\Pr(N_{TOT}=0)$

$$\Pr(N_{TOT}=0)=\binom{4}{0}\times\Pr(T_1>1,T_2>1,T_3>1,T_4>1)=4\times q_D$$

avec

$$\begin{aligned} q_D &= \Pr(T_1\leq\infty,T_2\leq\infty,T_3\leq\infty,T_4\leq\infty) \\ &\quad -4\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq\infty,T_3\leq\infty,T_4\leq\infty) \\ &\quad +6\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq\infty,T_4\leq\infty) \\ &\quad -4\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq 1,T_4\leq\infty) \\ &\quad +\Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq 1,T_4\leq 1)\end{aligned}$$

Notes :

$$\begin{aligned} \Pr(T_1\leq 1,T_2\leq\infty,T_3\leq\infty,T_4\leq\infty) &= \Pr(T_1\leq 1) \\ \Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq\infty,T_4\leq\infty) &= \Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1) \\ \Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_3\leq 1,T_4\leq\infty) &= \Pr(T_1\leq 1,T_2\leq 1,T_2\leq 1)\end{aligned}$$

16. (a) Calculer $\Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2)$ pour $(m_1, m_2) \in \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$. Rép :

    Relation générale :

$$\begin{aligned}\Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2) &= F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) + F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2 - 1) \\ &\quad - F_{M_1,M_2}(m_1, m_2 - 1) - F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2)\end{aligned}$$

$$\Pr(M_1 = 0, M_2 = 0) = F_{M_1,M_2}(0,0) = C\left(0.85^2, 0.85^2\right)$$

$$\begin{aligned}\Pr(M_1 = 1, M_2 = 0) &= F_{M_1,M_2}(1,0) - F_{M_1,M_2}(0,0) = C\left(0.85^2 + 2 \times 0.85 \times 0.15, 0.85^2\right) \\ &= \Pr(M_1 = 0, M_2 = 1)\end{aligned}$$

    (b) Calculer $\Pr(N_{TOT} = k)$, $k = 0,1,2,3,4$. Rép :

$$\Pr(N_{TOT} = 0) = \Pr(M_1 = 0, M_2 = 0)$$

$$\Pr(N_{TOT} = 1) = 2\Pr(M_1 = 1, M_2 = 0)$$

$$\Pr(N_{TOT} = 2) = 2\Pr(M_1 = 2, M_2 = 0) + \Pr(M_1 = 1, M_2 = 1)$$

$$\Pr(N_{TOT} = 3) = 2\Pr(M_1 = 2, M_2 = 1)$$

$$\Pr(N_{TOT} = 4) = \Pr(M_1 = 2, M_2 = 2)$$

    (c) Calculer $\Pr(S_{TOT} \leq 1500)$. Rép : 0.84154269

    Rép : Relation usuelle

$$\Pr(S_{TOT} \leq 1500) = \Pr(N_{TOT} = 0) + \sum_{j=1}^{4} \Pr(N_{TOT} = j)\Pr(B_1 + ... + B_j \leq 1500)$$

    (d) Calculer l'espérance et la variance de N_{TOT}. Rép : 0.6 et 0.844820129

    2 approches équivalentes.

    Approche 1 :

$$E\left[N_{TOT}^m\right] = \sum_{j=0}^{4} j^m \times f_{N_{TOT}}(j)$$

    Approche 2 :

$$E[N_{TOT}] = E[M_1] + E[M_2] = 2 \times 0.3$$

$$Var(N_{TOT}) = Var(M_1) + Var(M_2) + 2Cov(M_1, M_2)$$

$$Cov(M_1, M_2) = E[M_1 M_2] - E[M_1]E[M_2]$$

$$E[M_1 M_2] = \sum_{m_1=0}^{2} \sum_{m_2=0}^{2} m_1 m_2 f_{M_1,M_2}(m_1, m_2)$$

    (e) Calculer l'espérance et la variance de S_{TOT}. Rép : 600 et 1444820.129

    2 approches équivalentes.

    Approche 1 :

$$\begin{aligned}E[S_{TOT}] &= E[N_{TOT}]E[B] \\ Var(S_{TOT}) &= E[N_{TOT}]Var(B) + Var(N_{TOT})E[B]^2\end{aligned}$$

Approche 1 :

$$\begin{aligned} E\left[S_{TOT}\right] &= E\left[X_1\right] + E\left[X_2\right] \\ Var\left(S_{TOT}\right) &= Var\left(X_1\right) + Var\left(X_2\right) + 2Cov\left(X_1, X_2\right) \\ Cov\left(X_1, X_2\right) &= E\left[B_1\right] E\left[B_2\right] Cov\left(M_1, M_2\right) \end{aligned}$$

17. Expression de $F_{U_2|U_1=u_1}(u_2)$

$$\begin{aligned} F_{U_2|U_1=u_1}(u_2) &= \frac{\partial C(u_1,u_2)}{\partial u_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_1}\left(-\frac{1}{\gamma}\ln\left(e^{-\gamma} - e^{-\gamma u_1} - e^{-\gamma u_2} + e^{-\gamma u_1 - \gamma u_2}\right) + \frac{1}{\gamma}\ln\left(e^{-\gamma} - 1\right)\right) \\ &= \frac{e^{-\gamma u_1 - \gamma u_2} - e^{-\gamma u_1}}{e^{-\gamma} - e^{-\gamma u_1} - e^{-\gamma u_2} + e^{-\gamma u_1 - \gamma u_2}} \end{aligned}$$

On veut produire une réalisation $\left(B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\right)$ de (B_1, B_2). On a produit une réalisation $\left(V_1^{(1)} = 0.91, V_2^{(1)} = 0.56\right)$ de (V_1, V_2) où V_1 et V_2 sont des v.a. indépendantes de loi uniforme $(0,1)$. On utilise la réalisation $\left(V_1^{(1)} = 0.24, V_2^{(1)} = 0.78\right)$ et $F_{U_2|U_1=u_1}(u_2)$ pour produire la $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ de (U_1, U_2). On se sert de $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ pour produire $\left(B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\right)$. Calculer $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ et $\left(B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\right)$.

On a

$$\frac{e^{-\gamma u_1 - \gamma u_2} - e^{-\gamma u_1}}{e^{-\gamma} - e^{-\gamma u_1} - e^{-\gamma u_2} + e^{-\gamma u_1 - \gamma u_2}} = v_2$$

avec

$$e^{-\gamma u_1 - \gamma u_2} - e^{-\gamma u_1} = e^{-\gamma} v_2 - e^{-\gamma u_1} v_2 - e^{-\gamma u_2} v_2 + e^{-\gamma u_1 - \gamma u_2} v_2$$

Puis

$$e^{-\gamma u_1 - \gamma u_2} + e^{-\gamma u_2} v_2 - e^{-\gamma u_1 - \gamma u_2} v_2 = e^{-\gamma u_1} + e^{-\gamma} v_2 - e^{-\gamma u_1} v_2$$

Alors

$$\begin{aligned} e^{-\gamma u_2} &= \frac{e^{-\gamma u_1} + e^{-\gamma} v_2 - e^{-\gamma u_1} v_2}{e^{-\gamma u_1} + v_2 - e^{-\gamma u_1} v_2} \\ &= \frac{e^{-\gamma u_1} + e^{-\gamma} v_2 - e^{-\gamma u_1} v_2}{e^{-\gamma u_1} + v_2 - e^{-\gamma u_1} v_2} \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{-1}{\gamma}\ln\left(\frac{e^{-\gamma u_1} + e^{-\gamma} v_2 - e^{-\gamma u_1} v_2}{e^{-\gamma u_1} + v_2 - e^{-\gamma u_1} v_2}\right) \\ &= \frac{-1}{5}\ln\left(\frac{e^{-5\times 0.91} + e^{-5} 0.56 - e^{-5\times 0.91} 0.56}{e^{-5\times 0.91} + 0.56 - e^{-5\times 0.91} 0.56}\right) \\ &= 0.84105 \end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} &= 0.91 \\ U_2^{(1)} &= 0.84105 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_1^{(1)} &= \exp\left(6 + 2 \times F_Z^{-1}(0.91)\right) = \exp(6 + 2 \times 1.34) =: 5884.0 \text{ (ou } 5892.39) \\ B_2^{(1)} &= -4000 \times \ln(1 - 0.84105) = 7356.7 \end{aligned}$$

11.2 Exercices informatiques

1. Voir GitHub.
2. Voir GitHub.
3. (a) Calculer les valeurs de $\rho_P(M_1, M_2)$ pour $C(u_1, u_2) = \min(u_1; u_2)$.
   - on calculer les valeurs de $f_{M_1M_2}(k_1, k_2)$ selon la relation habituelle
   - on calcule $E[M_1M_2] = \sum\sum k_1k_2 f_{M_1M_2}(k_1, k_2)$ =7.772845
   - on obtient $\rho_P(M_1, M_2) = 0.9671663$

   (b) Calculer les valeurs de $\rho_P(M_1, M_2)$ pour $C(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0)$.
   - on calculer les valeurs de $f_{M_1M_2}(k_1, k_2)$ selon la relation habituelle
   - on calcule $E[M_1M_2] = \sum\sum k_1k_2 f_{M_1M_2}(k_1, k_2)$ =4.279698
   - on obtient $\rho_P(M_1, M_2)$ = -0.9385017

   (c) Soit la copule
   $$C(u_1, u_2) = \theta \min(u_1; u_2) + (1 - \theta) \max(u_1 + u_2 - 1; 0).$$
   i. Identifier la valeur θ de telle sorte que $\rho_P(M_1, M_2) = 0$.
   $\rho_P(M_1, M_2) = \theta\rho_P\left(M_1^+, M_2^+\right) + (1 - \theta)\rho_P\left(M_1^-, M_2^-\right)$

   ii. Calculer
   $$E[\max(M_1 + M_2 - k; 0)]$$
   et
   $$E\left[\max\left(M_1^\perp + M_2^\perp - k; 0\right)\right]$$
   pour $k = 0, 8, 10$. Note : $\left(M_1^\perp, M_2^\perp\right)$ = couple de v.a. indépendantes avec $M_1^\perp \sim M_1$ et $M_2^\perp \sim M_2$. (Pour vérifier : $E[\max(M_1 + M_2 - 4; 0)]$ =________ et $E\left[\max\left(M_1^\perp + M_2^\perp - k; 0\right)\right]$ =________)
   Il suffit de calculer
   $$E[\max(M_1 + M_2 - k; 0)] = \sum_{i=0}^{10}\sum_{j=0}^{10} \max(i + j - k; 0) \Pr(M_1 = i, M_2 = j)$$

	k	comono	antimon	indépend	non-corré
[1,]	0	5.000000	5.000000	**5.000000**	**5.000000**
[2,]	1	4.028248	4.000000	4.003033	4.013911
[3,]	2	3.135622	3.000000	3.026648	3.066791
[4,]	3	2.284930	2.000000	2.116359	2.140322
[5,]	4	1.660740	1.000000	**1.339639**	**1.325401**
[6,]	5	1.043522	0.114437	0.753401	0.571992
[7,]	6	0.693133	0.013279	0.370927	0.348093
[8,]	7	0.370933	0.001822	0.158100	0.183601
[9,]	8	0.220664	0.000154	**0.057837**	**0.108751**
[10,]	9	0.099791	0.000006	0.018026	0.049148
[11,]	10	0.052442	0.000000	**0.004752**	**0.025826**
[12,]	11	0.019648	0.000000	0.001051	0.009676

[13,] 12 0.009056 0.000000 0.000193 0.004460
[14,] 13 0.002687 0.000000 0.000029 0.001323
[15,] 14 0.001096 0.000000 0.000004 0.000540
[16,] 15 0.000232 0.000000 0.000000 0.000114
[17,] 16 0.000088 0.000000 0.000000 0.000043
[18,] 17 0.000010 0.000000 0.000000 0.000005
[19,] 18 0.000004 0.000000 0.000000 0.000002
[20,] 19 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
[21,] 20 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000

iii. Comparer les valeurs obtenues en **??**. Est-ce que 2 v.a. non-corrélées sont aussi indépendantes ?

4. (a) Produire $m = 1000$ réalisations de (U_1, U_2) à partir de la copule de Clayton en ayant recours à la **méthode conditionnelle**. Indiquer les réalisations 1 et 2 de (U_1, U_2). (Pour vérifier : réalisation 3 $\left(U_1^{(3)}, U_2^{(3)}\right)$ de (U_1, U_2) est $(0.903377524, 0.96849821)$)

On utilise la méthode conditionnelle où

$$U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$$

et $U_2^{(j)}$ est la solution de

$$V_2^{(j)} = \frac{1}{\left(U_1^{(j)}\right)^{\alpha+1}} \left(\left(U_1^{(j)}\right)^{-\alpha} + u_2^{-a} - 1\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}}$$

On obtient

$$\left(V_2^{(j)} \times \left(U_1^{(j)}\right)^{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\left(\left(U_1^{(j)}\right)^{-\alpha} + u_2^{-a} - 1\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}$$

Puis, on a

$$\left(V_2^{(j)} \times \left(U_1^{(j)}\right)^{\alpha+1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} = \left(\left(U_1^{(j)}\right)^{-\alpha} + u_2^{-a} - 1\right)$$

Enfin, on a

$$U_2^{(j)} = \left(\left(V_2^{(j)} \times \left(U_1^{(j)}\right)^{\alpha+1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} - \left(U_1^{(j)}\right)^{-\alpha} + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

On obtient

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$
1	0,318375756	0,305910533
2	0,352653871	0,224267812
...		
1000	0,601626189	0,37858481

(b) À partir des $m = 1000$ réalisations de(U_1, U_2), produire $m = 1000$ réalisations de (X_1, X_2). Indiquer les réalisations 1 et 2 de (X_1, X_2). (Pour vérifier : réalisation 3 $\left(X_1^{(3)}, X_2^{(3)}\right)$ de (U_1, U_2) est $(668.3566405, 691.8885654)$)

On utilise la méthode inverse où

$$X_1^{(j)} = \exp\left(\mu + \sigma U_1^{(j)}\right)$$

et

$$X_2^{(j)} = F_{X_2}^{-1}\left(U_2^{(j)}\right)$$

On obtient

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$
1	113,4698199	193,5644426
2	124,6633736	162,9405355
...		
1000	235,4129077	220,4843852

(c) À partir des $m = 1000$ réalisations de (X_1, X_2), produire $m = 1000$ réalisations de S. Indiquer les réalisations 1 et 2 de S.

On a

$$S^{(j)} = X_1^{(j)} + X_2^{(j)}$$

On obtient

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	113,4698199	193,5644426	307,0342626
2	124,6633736	162,9405355	287,6039092
...			
1000	235,4129077	220,4843852	455,8972929

(d) À partir des $m = 1000$ réalisations de (X_1, X_2) et S, ...

i. ... calculer l'approximation de $F_S(1000)$;

On a

$$\widetilde{F}_S(1000) = \frac{1}{1000}\sum_{j=1}^{1000} 1_{\left\{S^{(j)} \leq 1000\right\}} = 0,847152847$$

ii. ... calculer les approximations de $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.95$;

On a

$$\widetilde{VaR}_{0.95}(S) = \widetilde{F}_S(0.95)^{-1} = S^{[950]} = 1480,966759$$

(note : $S^{[950]}$ réalisation triée, avec $S^{[1]}$ = plus petite et $S^{[1000]}$ = plus grande) et

$$\begin{aligned}
\widetilde{TVaR}_{0.95}(S) &= \frac{1}{(1-0.95)}\frac{1}{1000}\sum_{j=1}^{1000} S^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)} > \widetilde{VaR}_{0.95}(S)\right\}} \\
&= \frac{1}{50} \times \sum_{j=951}^{1000} S^{[j]} \\
&= 1965,70409
\end{aligned}$$

iii. ... calculer les approximation de les parts allouées aux deux risque selon la règle de la TVaR, $TVaR_\kappa(X_1; S)$ et $TVaR_\kappa(X_2; S)$ pour $\kappa = 0.95$.

On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{TVaR}_{0.95}(X_1; S) &= \frac{1}{(1-0.95)}\frac{1}{1000}\sum_{j=1}^{1000} X_1^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)} > \widetilde{VaR}_{0.95}(S)\right\}} \\
&= \frac{1}{50} \times \sum_{j=1}^{1000} X_1^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)} > \widetilde{VaR}_{0.95}(S)\right\}} \\
&= 1380,294325
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\widetilde{TVaR}_{0.95}\left(X_2;S\right) &= \frac{1}{(1-0.95)}\frac{1}{1000}\sum_{j=1}^{1000} X_2^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)}>\widetilde{VaR}_{0.95}(S)\right\}} \\
&= \frac{1}{50}\times\sum_{j=1}^{1000} X_2^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)}>\widetilde{VaR}_{0.95}(S)\right\}} \\
&= 585,4097658
\end{aligned}$$

5. (a) On a

$$F_{X_1,X_2}\left(50,30\right) = C\left(F_{X_1}\left(50\right), F_{X_2}\left(30\right)\right)$$

avec

$$\begin{aligned}
F_{X_1}\left(50\right) &= 1-\exp\left(-\frac{50}{20}\right) = u_1 \\
F_{X_2}\left(30\right) &= H\left(30;2,0.2\right) = u_2
\end{aligned}$$

et

$$C_\alpha\left(u_1,u_2\right) = \exp\left(-\left\{\left(-\ln u_1\right)^\alpha + \left(-\ln u_2\right)^\alpha\right\}^{(1/\alpha)}\right)$$

De plus,

$$\Pr\left(X_1>50, X_2>30\right) = 1 + F_{X_1,X_2}\left(50,30\right) - F_{X_1}\left(50\right) - F_{X_2}\left(30\right)$$

(b) On dérive $C_\alpha\left(u_1,u_2\right)$ par rapport à u_1 et on obtient

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = C_\alpha^G(u_1,u_2)\frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}}{u_1}\left(\left(-\ln u_1\right)^\alpha + \left(-\ln u_2\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

On a

$$F_{X_2|X_1=50}\left(30\right) = C_{2|1}(F_{X_2}\left(30\right)|F_{X_1}\left(50\right))$$

(c) On dérive $C_\alpha\left(u_1,u_2\right)$ par rapport à u_1 et u_2

$$C_\alpha^G(u_1,u_2)\frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}(-\ln u_2)^{\alpha-1}}{u_1u_2}\left(\left(-\ln u_1\right)^\alpha + \left(-\ln u_2\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-2}\left(\alpha-1+\left(\left(-\ln u_1\right)^\alpha + \left(-\ln u_2\right)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

On obtient

$$f_{X_1,X_2}\left(50,30\right) = c\left(F_{X_1}\left(50\right), F_{X_2}\left(30\right)\right) f_{X_1}\left(50\right) f_{X_2}\left(30\right)$$

(d) On applique les formules.

Code R :

```
# somme de v.a. de loi exponentielle
# bivariée
# copule gumbel
a1<-5
a2<-1/a1
alpha1<-1
beta1<-1/20
alpha2<-2
beta2<-1/5
hh<-1
nn<-200
vk<-0 :nn
vkh<-vk*hh
```

```
vF1<-pgamma(vkh,alpha1,beta1)
vF2<-pgamma(vkh,alpha2,beta2)
vF1[nn]
# discretisation == methode lower
matF1F2<-matrix(0,nn+1,nn+1)
for (i in 0 :nn)
{
dum1<-(-log(vF1[i+1]))^a1
print(dum1)
dum2<-(-log(vF2))^a1
matF1F2[i+1,]<-exp(-((dum1+dum2)^a2))
}
matF1F2[1 :5,1 :5]
matf1f2<-matrix(0,nn+1,nn+1)
matf1f2[1,1]<-matF1F2[1,1]
matf1f2[1,2 :(nn+1)]<-matF1F2[1,2 :(nn+1)]-matF1F2[1,1 :nn]
matf1f2[2 :(nn+1),1]<-matF1F2[2 :(nn+1),1]-matF1F2[1 :nn,1]
matf1f2[2 :(nn+1),2 :(nn+1)]<-matF1F2[2 :(nn+1),2 :(nn+1)]-matF1F2[1 :nn,2 :(nn+1)]-matF1F2[2 :(nn+1),1 :nn]
matf1f2[1 :5,1 :5]
sum(matf1f2)
mm<-200
# mm plus petit ou égal à nn
vfs<-rep(0,mm+1)
for (k in 0 :mm)
{
res<-0
for (j in 0 :k)
{
res<-res+matf1f2[j+1,k-j+1]
}
vfs[k+1]<-res
}
vx<-(0 :mm)*hh
Fs.ind<-pgamma(vx,2,beta1)
Fs.com<-pexp(vx,beta1/2)
Fs<-cumsum(vfs)
cbind(vx,vfs,cumsum(vfs))
plot(vx,Fs,type="l")
```

On obtient les valeurs suivantes $f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1,k_2)$, pour $k_1,k_2 = 0,1,2,4,4$

```
[1,] 0 0.0000000000 0.000000000 0.000000000 0.000000000
[2,] 0 0.0147448486 0.020453280 0.009230455 0.002938305
[3,] 0 0.0018828163 0.013026817 0.016789318 0.009139950
[4,] 0 0.0005139860 0.005507519 0.013613523 0.012994293
[5,] 0 0.0001931755 0.002431960 0.008568039 0.012825586
```

On obtient les valeurs suivantes de $f_{\widetilde{S}}(k)$ et $F_{\widetilde{S}}(k)$ pour $k = 0,1,2,...$

```
[1,] 0 0.000000 0.000000
[2,] 1 0.000000 0.000000
[3,] 2 0.014745 0.014745
```

[4,] 3 0.022336 0.037081
[5,] 4 0.022771 0.059852
[6,] 5 0.025428 0.085281
[7,] 6 0.026192 0.111473
[8,] 7 0.026611 0.138084
[9,] 8 0.026684 0.164768
[10,] 9 0.026486 0.191254
[11,] 10 0.026157 0.217412

On applique la formule habituelle pour calculer $TVaR_{0.99}\left(\widetilde{S}\right)$

(e) Rép : 21.47978

On applique la formule

6. Soit le copule de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule de Frank, **ATTENTION AUX DÉFINITIONS DE** $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{500}\right)$ et $X_2 \sim LN\left(\mu = 5, \sigma = 2\right)$. On définit les v.a. $S = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$. On a recours au générateur congruentiel mixte défini par la relation récurrente $x_n = (ax_{n-1} + c) \bmod m$ $(n = 1, 2, ...)$ avec $a = 41358$, $c = 0$, $m = 2147483647$ et $x_0 = 343463463$. On produit dans l'ordre 100000 réalisations de (X_1, X_2) en utilisant la méthode conditionnelle afin de produire les 100000 réalisations de S et de T. On sait que $E[S] = xxx$ et $E[T] = xxx$.

Questions :

(a) On suppose que le paramètre de dépendance α de la copule de Frank est -10. À partir des réalisations de S et T, calculer des approximations de $VaR_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(T)$, $TVaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(T)$ pour $\kappa = 0.5$ et 0.995. Les premières réalisations de X_1 et X_2 sont xxx et xxx. À partir des 100000 réalisations, les approximations obtenues de $E[S]$ et $E[T]$ sont xxx et xxx.

On a
$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{e^{-\alpha u_1}\left(e^{-\alpha u_2} - 1\right)}{\left(e^{-\alpha} - 1\right) + \left(e^{-\alpha u_1} - 1\right)\left(e^{-\alpha u_2} - 1\right)}.$$

La première réalisation $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ est $(0.7008489, 0.3894243)$.

La première réalisation $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$ est $(603.4032, 84.63605)$.

La première réalisation $S^{(1)}$ est 688.0392

La première réalisation $T^{(1)}$ est 518.7672

On obtient

$$\begin{aligned} VaR_{0.5}(S) &= 758.3392 \\ VaR_{0.995}(S) &= 25133.2932 \\ VaR_{0.5}(T) &= 182.4789 \\ VaR_{0.995}(T) &= 2593.3892 \end{aligned}$$

Approximations de $E[S]$ et $E[T]$: 1583.671 et -587.705

Approximations de $TVaR_{0.995}(S)$ et $TVaR_{0.995}(T)$: 60086.75 et 3072.591

(b) On suppose que le paramètre de dépendance α de la copule de Frank est 10. À partir des réalisations de S et T, calculer des approximations de $VaR_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(T)$, $TVaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(T)$ pour $\kappa = 0.5$ et 0.995. Les premières réalisations de X_1 et X_2 sont xxx et xxx. À partir des 100000 réalisations, les approximations obtenues de $E[S]$ et $E[T]$ sont xxx et xxx.

On a
$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{e^{-\alpha u_1}\left(e^{-\alpha u_2} - 1\right)}{\left(e^{-\alpha} - 1\right) + \left(e^{-\alpha u_1} - 1\right)\left(e^{-\alpha u_2} - 1\right)}.$$

La première réalisation $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ est $(0.7008489, 0.7778512)$.

La première réalisation $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$ est $(603.4032, 685.338)$.
La première réalisation $S^{(1)}$ est 1288.741
La première réalisation $T^{(1)}$ est -81.93484
On obtient

$$\begin{aligned} VaR_{0.5}(S) &= 518.3507 \\ VaR_{0.995}(S) &= 28134.7303 \\ VaR_{0.5}(T) &= 86.95551 \\ VaR_{0.995}(T) &= 1385.14137 \end{aligned}$$

Approximations de $E[S]$ et $E[T]$: 1614.672 et -618.706
Approximations de $TVaR_{0.995}(S)$ et $TVaR_{0.995}(T)$: 65024.72 et 1823.893

7. (a) Calculer $Cov(M_1, M_2)$ et le paramètre de dépendance de chaque copule. Rép : 2.44949, 1.502, 1.451, 0.813
On a

$$\begin{aligned} Var(M_1) &= 4 \times \frac{1-0.5}{0.5^2} = 8 \\ Var(M_2) &= 3 \end{aligned}$$

$$Cov(M_1, M_2) = 0.5 \times (3 \times 8)^{\frac{1}{2}} =: 2.44948974278$$

On sait que

$$Cov(M_1, M_2) = E[M_1 M_2] - E[M_1] E[M_2]$$

avec

$$E[M_1 M_2] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} k_1 k_2 \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2)$$

Il suffit de sommer jusqu'à 100 :

$$E[M_1 M_2] \simeq \sum_{k_1=0}^{100} \sum_{k_2=0}^{100} k_1 k_2 \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2)$$

Comme $\Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2)$ est définie par la copule (via la relation qui associe la fonction de masses de probabilité conjointe et la fonction de répartition conjointe de (M_1, M_2)), on utilise un outil d'optimisation pour déterminer le paramètre de la copule de telle sorte que $Cov(M_1, M_2) = E[M_1 M_2] - E[M_1] E[M_2]$ soit égale à 2.44948974278

(b) Calculer la valeur de $f_{M_1,M_2}(8, 9)$. Rép : 0.002344701, 0.0001168301, 0.00009752221
On utilise la relation qui associe la fonction de masses de probabilité conjointe et la fonction de répartition conjointe de (M_1, M_2) pour faire les calculs.

(c) Développer l'expression de $f_S(k) = \Pr(S = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Calculer $f_S(k)$ pour $k = 0$, 1 et 10. Rép : Clayton : 0.03497477, 0.03269466, 0.06707793 ; Gumbel : 00951017, 0.03009247, 0.05673526 ; survie Clayton : 0.005394871, 0.024905682, 0.05419232
On utilise la formule habituelle

$$\Pr(S = k) = \sum_{j=0}^{k} f_{M_1,M_2}(j, k-j)$$

pour calculer les valeurs

(d) Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Clayton : 14, 16.15894 ; Gumbel : 14, 17.4095 ; survie Clayton : 15, 17.59324

On utilise la formule habituelle

$$\Pr(S=k)=\sum_{j=0}^{k} f_{M_1,M_2}(j,k-j)$$

pour calculer les valeurs

(e) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2>VaR_{0.99}(X_2)\}}\right]$. Rép : Clayton : 0.07163396 ; Gumbel : 0.1296592 ; survie Clayton : 0.1376733

On calcule la $VaR_{0.99}(X_2)=13$.

On utilise la relation

$$E\left[X_1 \times 1_{\{X_2>VaR_{0.99}(X_2)\}}\right]=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} k_1 \times 1_{\{k_2>13\}} f_{M_1,M_2}(k_1,k_2)$$

pour obtenir les réponses

8. (a) Calculer $\Pr(M_1=k_1,M_2=k_2)$ pour $k_1=4,5,6$ et $k_2=4,5,6$.

On utilise la relation

$$\begin{aligned}\Pr(M_1=k_1,M_2=k_2) &= F_{M_1,M_2}(k_1,k_2)+F_{M_1,M_2}(k_1-1,k_2-1)\\ &\quad -F_{M_1,M_2}(k_1,k_2-1)-F_{M_1,M_2}(k_1-1,k_2)\end{aligned}$$

où $F_{M_1,M_2}(j_1,j_2)=0$ pour $j_1<0$ ou $j_2<0$.

On obtient :

$\Pr(M_1=k_1,M_2=k_2)$	$k_1=4$	$k_1=4$	$k_1=4$
$k_2=4$	0.013815	0.003684	0.000088
$k_2=5$	0.003684	0.025545	0.008118
$k_2=6$	0.000088	0.008118	0.038481

(b) Calculer $Cov(M_1,M_2)$.

On a

$$Cov(M_1,M_2)=E[M_1M_2]-E[M_1]E[M_2]$$

et

$$E[M_1M_2]=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} k_1k_2 \Pr(M_1=k_1,M_2=k_2)$$

Il suffit de sommer jusqu'à 40 :

$$E[M_1M_2]\simeq\sum_{k_1=0}^{40}\sum_{k_2=0}^{40} k_1k_2 \Pr(M_1=k_1,M_2=k_2)$$

(c) Calculer $E[N]$ et $Var(N)$.

$$\begin{aligned}E[N] &= E[M_1]+E[M_2]\\ Var(N) &= Var(M_1)+Var(M_2)+2Cov(M_1,M_2)\end{aligned}$$

(d) Calculer $\Pr(N=0)$, $\Pr(N=10)$ et $\Pr(N=20)$. Rép : 0.000040, 0.025721et 0.061763.

$$\Pr(N=k)=\sum_{j=0}^{k}\Pr(N_1=j,N_2=k-j)$$

(e) Calculer $VaR_{0.99}(N)$ et $TVaR_{0.99}(N)$.

On procède comme d'habitude.

9. Solution : On utilise R

(a) Calculer $\Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2)$ pour $k_1 = 0, 1, 2, 3$ et $k_2 = 0, 1, 2, 3$.On utilise la relation

$$\begin{aligned}\Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) &= F_{M_1,M_2}(k_1, k_2) + F_{M_1,M_2}(k_1 - 1, k_2 - 1) \\ &\quad - F_{M_1,M_2}(k_1, k_2 - 1) - F_{M_1,M_2}(k_1 - 1, k_2)\end{aligned}$$

où $F_{M_1,M_2}(j_1, j_2) = 0$ pour $j_1 < 0$ ou $j_2 < 0$.
On obtient :

$\Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2)$	$k_1 = 4$	$k_1 = 4$	$k_1 = 4$
$k_2 = 4$	0.002736	0.004393	0.004751
$k_2 = 5$	0.004393	0.007836	0.009805
$k_2 = 6$	0.004751	0.009805	0.015489

(b) Calculer $Cov(M_1, M_2)$.

$$Cov(M_1, M_2) = E[M_1 M_2] - E[M_1] E[M_2]$$

et

$$E[M_1 M_2] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} k_1 k_2 \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2)$$

Il suffit de sommer jusqu'à 40 :

$$E[M_1 M_2] \simeq \sum_{k_1=0}^{40} \sum_{k_2=0}^{40} k_1 k_2 \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2)$$

(c) Calculer $E[N]$ et $Var(N)$.

$$\begin{aligned}E[N] &= E[M_1] + E[M_2] \\ Var(N) &= Var(M_1) + Var(M_2) + 2Cov(M_1, M_2)\end{aligned}$$

(d) Calculer $\Pr(N = 0)$, $\Pr(N = 10)$ et $\Pr(N = 20)$. Rép : 0.000040, 0.025721et 0.061763.

$$\Pr(N = k) = \sum_{j=0}^{k} \Pr(N_1 = j, N_2 = k - j)$$

(e) Calculer $VaR_{0.99}(N)$ et $TVaR_{0.99}(N)$.
On procède comme d'habitude.

Bibliographie

[Marceau, 2013] Marceau, E. (2013). *Modélisation et évaluation Quantitative des risques en actuariat : modèles sur une période.* Springer.