Examen final de la session d'hiver 2020

SOLUTIONS À L'USAGE EXCLUSIF DE L'AUXILIAIRE D'ENSEIGNEMENT

Les solutions ci-dessous sont fournies à titre indicatif. Il peut exister d'autres solutions tout aussi valables.

Débutons par le problème de maximisation de la vraisemblance. Nous devons maximiser $\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \boldsymbol{\theta})$, où $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ est un vecteur de paramètres. Pour ce faire, nous résolvons avec la méthode de Newton–Raphson multivariée le système d'équations

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \theta_1} \ell(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta_p} \ell(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

1. Dans le cas de la distribution de Pareto, nous avons

$$\begin{aligned} f(x; \alpha, \theta) &= \frac{\alpha \theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}} \\ \ell(\alpha, \theta) &= n \ln \alpha + n \ln \theta - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i + \theta) \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{bmatrix} \frac{n}{\alpha} + n \ln \theta - \sum_{i=1}^n \ln(x_i + \theta) \\ \frac{n\alpha}{\theta} - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n (x_i + \theta)^{-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{bmatrix} -\frac{n}{\alpha^2} & \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n (x_i + \theta)^{-1} \\ \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n (x_i + \theta)^{-1} & -\frac{n\alpha}{\theta^2} + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n (x_i + \theta)^{-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Pour la distribution Gamma, les fonctions de densité et vraisemblance sont

$$\begin{aligned} f(x; \alpha, \lambda) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \\ \ell(\alpha, \lambda) &= n\alpha \ln \lambda - n \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned}$$

Les composantes de la méthode de Newton–Raphson sont alors :

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} n \ln \lambda - n\Psi(\alpha) + \sum_{i=1}^n \ln x_i \\ \frac{n\alpha}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} -n\psi(\alpha) & n/\lambda \\ n/\lambda & -n\alpha/\lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, il s'agit de compléter la mise en œuvre de l'application Shiny. Celle-ci est livrée avec ces solutions.