Université Laval	Examen final traditionnel
Faculté des Sciences et de Génie	Hiver 2016
École d'actuariat	Date: 9 mars 2016

Act-2001 Introduction à l'actuariat 2

Professeur: Etienne Marceau

Nom de famille de l'étudiant	**Prénom de l'étudiant**	**Matricule**

- L'examen contient 12 questions à développement.
- Le total des points est de **100 points**.
- La durée est de 170 minutes.
- Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.
- Veuillez écrire vos réponses dans le cahier de réponse seulement.
- **Voir la dernière page de l'examen pour les inégalités (Markov, etc.).**
- Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.
- Veuillez retourner le présent cahier, les annexes et le papier brouillon à la fin de l'examen.

Questions	**Points obtenus**	**Points**
1		6
2		4
3		14
4		6
5		8
6		16
7		8
8		9
9		9
10		12
11		10
12		8
Total		**100 (bonus = 10pts)**

1. **(6 points).** Soit les coûts pour un contrat d'assurance IARD définis par la v.a. X avec

$$X = \begin{cases} B & , I = 1 \\ 0 & , I = 0 \end{cases}$$

où les v.a. I et B sont indépendantes avec

$$I \sim Bern\,(0.1)$$

et

$$B \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right).$$

Questions :

(a) **(3 points).** Calculer $VaR_{0.5}\,(X)$ et $VaR_{0.9999}\,(X)$.

(b) **(3 points).** Calculer $TVaR_{0.5}\,(X)$ et $TVaR_{0.9999}\,(X)$.

2. **(4 points).** Les coûts pour un portefeuille sont représentés par la v.a. S où

$$F_S(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\tau}},$$

où $\lambda = 100$ et $\tau = 4$.
Le revenu total de primes est $P = 120$.
Le capital initial est $u = 100$
Les montants P et u sont investis dans un fonds dont le rendement instantanné est représenté par la v.a.

$$Y = 0.7 + 0.4I$$

où $I \sim Bern\,(q = 0.9)$.
Les v.a. S et Y sont indépendantes.
Question : Calculer la probabilité de ruine $\psi(u)$ pour la période où

$$\psi(u) = \Pr(S > V(1))$$

avec

$$V(1) = (u + P) \times Y.$$

3. **(14 points).** On considère un portefeuille de $n = 200$ contrats d'assurance vie temporaire 1 an.
Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. $X_i = b_i I_i$ avec $b_i = 10000$ et $I_i \sim Bern\left(q_i = 0.0012\right)$ pour $i = 1, 2, ..., n$.
Les v.a. $I_1, ..., I_n$ sont indépendantes.
On définit les coûts totaux pour le portefeuille par la v.a. $S_n = X_1 + ... + X_n$.
On fournit les valeurs de la fonction de masses de probabilité d'une v.a.

$$K \sim Binom\left(n = 200, q = 0.0012\right):$$

k	0	1	2	3	4	5
$\Pr\left(K = k\right)$	0.7865	0.1890	0.0226	0.0018	0.0001	0.0000
$\Pr\left(K \leq k\right)$	0.7865	0.9755	0.9981	0.9999	1.0000	1.0000

Questions:

(a) **(4 points).** Calculer $E\left[X_i\right]$, $VaR_{0.995}\left(X_i\right)$ et $TVaR_{0.995}\left(X_i\right)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Comparer les valeurs et commenter brièvement.

(b) **(4 points).** Calculer $E\left[S\right]$, $VaR_{0.995}\left(S\right)$ et $TVaR_{0.995}\left(S\right)$. Comparer les valeurs et commenter brièvement.

(c) **(2 points).** Calculer le bénéfice de mutualisation

$$B_{0.995}^{VaR}\left(X_1, ..., X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} VaR_{0.995}\left(X_i\right) - VaR_{0.995}\left(S\right).$$

Commenter brièvement.

(d) **(2 points).** Calculer le bénéfice de mutualisation

$$B_{0.995}^{TVaR}\left(X_1, ..., X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}\left(X_i\right) - TVaR_{0.995}\left(S\right).$$

Commenter brièvement.

(e) **(2 points).** L'actuaire A propose de calculer le capital économique comme suit:

$$\sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}\left(X_i\right) - E\left[S\right].$$

L'actuaire B propose de calculer le capital économique comme suit: $TVaR_{0.995}\left(S\right) - E\left[S\right]$. Laquelle des deux approches recommendez-vous? Expliquer brièvement.

4. **(6 points).** Les pertes totales pour le portefeuille d'une institution financière sont définies par la v.a. $L = L_1 + L_2$ où
   - L_1 = les pertes pour les activités d'assurance et
   - L_2 = les pertes pour les activités bancaires.

   Pertes pour les activités d'assurance: $L_1 = S - P$ avec
   - $S \sim Exp\left(\frac{1}{4000}\right)$: coûts totaux pour le portefeuille de contrats d'assurance IARD ;
   - $P = 5000$: montant total de primes pour financer les coûts d'assurance.

   Pertes pour les activités bancaires: $L_2 = D - T$ avec
   - $D = 4000$: montant total des sommes à rembourser pour les certificats de dépôt ;
   - $T = 6000 - Y$ avec $Y \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$: montant total des remboursements pour les prêts (les emprunteurs ne sont pas les détenteurs des certificats de dépôt).

   Les v.a. Y et S sont indépendantes.

   Questions :

   (a) **(2 points).** Développer l'expression de $F_L(x)$.

   (b) **(4 points).** Calculer $\Pr(L > 0)$. Interpréter cette probabilité.

5. **(8 points). Mesures de risque et propriétés.**
Définition. On définit la mesure de risque φ_κ attribuée à une v.a. Y par

$$\varphi_\kappa(Y) = E[Y] + \sqrt{\operatorname{Var}(Y)} \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$

Inégalité du triangle. Soient les v.a. X_1 et X_2 (indépendantes ou non). Selon l'inégalité du triangle pour l'écart-type i.e.

$$\sqrt{\operatorname{Var}(X_1 + X_2)} \leq \sqrt{\operatorname{Var}(X_1)} + \sqrt{\operatorname{Var}(X_2)}$$

Questions :

(a) **(2 points).** Soit la v.a. X. Montrer que la mesure φ_κ est invariante à la translation par un scalaire $a \in \mathbb{R}$.

(b) **(2 points).** Soit la v.a. X. Montrer que la mesure φ_κ est invariante à la multiplication par un scalaire positif $a \in \mathbb{R}^+$ i.e. que la mesure φ_κ est positivement homogène.

(c) **(4 points).** Soient les v.a. X_1 et X_2 (indépendantes ou non). Montrer que la mesure φ_κ est sous-additive. Commenter brièvement sur la conséquence de cette propriété.

6. **(16 points).** On considère un portefeuille homogène de risques échangeables X_1, ..., X_n où

$$X_i = I_i \times B_i$$

avec $B_i \sim LNorm\left(\mu = 2, \sigma = 0.9\right)$ pour $i = 1, 2, ..., n$.
Soit la v.a. mélange $\Theta \sim Beta\left(\alpha = 2, \beta = 18\right)$.
On a

$$\left(I_i | \Theta = \theta\right) \sim Bern\left(\theta\right)$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
De plus, $\left(I_1 | \Theta = \theta\right)$, ..., $\left(I_n | \Theta = \theta\right)$ sont conditionnellement indépendantes.
Enfin, B_1, ..., B_n et $\left(I_1, ..., I_n\right)$ sont indépendants.
On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$.
La mesure de risque φ_κ attribuée à une v.a. Y est définie par

$$\varphi_\kappa\left(Y\right) = E\left[Y\right] + \sqrt{\mathrm{Var}\left(Y\right)} \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$

Questions :

(a) **(3 points).** Calculer $E\left[I_1\right]$ et $Var\left(I_1\right)$.
(b) **(3 points).** Calculer $E\left[X_1\right]$ et $Var\left(X_1\right)$.
(c) **(3 points).** Calculer $\mathrm{Cov}\left(X_1, X_2\right)$.
(d) **(3 points).** Calculer $E\left[S_n\right]$ et $\mathrm{Var}\left(S_n\right)$ pour $n = 200$.
(e) **(4 points).** On fixe $\kappa = 95\%$ et $n = 200$.
   i. Calculer $\varphi_\kappa\left(X_1\right)$ et $\varphi_\kappa\left(S\right)$ et calculer le bénéfice de mutualisation.
   ii. Commenter sur la valeur du bénéfice de mutualisation en mentionnant clairement la (ou les) propriété(s) concernée(s) parmi les propriétés démontrées à la **Question 5**.

7. **(8 points).** Selon une étude menée par un comité d'actuaires IARD de la province ABC, l'habitude de *texter* en conduisant une voiture est une caractéristique inobservable pour une assureur et elle a un impact sur la distribution du nombre de sinistres en assurance automobile. Le comité a déduit que le nombre de sinistres pour un contrat obéit à une loi Poisson mélange. Pour un contrat, on définit la v.a.

$$\Theta \in \left\{\theta^{(1)} = \text{ne } \textit{texte} \text{ pas ou vraiment très peu, } \theta^{(2)} = \textit{texte} \text{ frénétiquement}\right\}$$

avec

$$\alpha^{(j)} = \Pr\left(\Theta = \theta^{(j)}\right),$$

pour $j = 1, 2$.

Pour le nombre de sinistres pour le contrat (v.a. M), on a

$$\left(M|\Theta_i = \theta^{(j)}\right) \sim Poisson\left(\lambda\gamma^{(j)}\right)$$

pour $j = 1, 2$.

Le montant d'un sinistre obéit à une loi lognormale avec $\mu = 2$ et $\sigma = 0.8$.

Hypothèses : $\lambda = 0.05$, $\gamma^{(1)} = \frac{1}{4}$, $\gamma^{(2)} = 4$, $\alpha^{(1)} = \frac{4}{5}$, $\alpha^{(2)} = \frac{1}{5}$.

Tous les contrats sont indépendants.

Questions :

(a) **(4 points).** Développer les expressions de $E[M]$ et $Var(M)$ et calculer leur valeurs. Est-ce que $Var(M) < E[M]$, $Var(M) = E[M]$ ou $Var(M) > E[M]$? Expliquer brièvement votre réponse et l'impact sur le risque associé au contrat.

(b) **(4 points).** Calculer la probabilité qu'il se produise un sinistre **et** que le montant soit supérieur à 10.

8. **(9 points).** Soient les v.a.

$$X = \begin{cases} B & , I = 1 \\ 0 & , I = 0 \end{cases}$$

et

$$Y = \begin{cases} 0 & , M = 0 \\ C_1 & , M = 1 \\ C_1 + C_2 & , M = 2 \end{cases} .$$

Les v.a. B, C_1, C_2, M et I sont indépendantes.
De plus, $B \sim Gamma\left(3, \frac{1}{100}\right)$, $C_1 \sim C_2 \sim Gamma\left(2, \frac{1}{100}\right)$, $I \sim Bern\,(0.2)$ et $M \sim Binom\,(2, 0.3)$.
Les valeurs de $\Pr(M = k)$ pour $k = 0, 1, 2$ sont respectivement les suivantes : 0.49; 0.42; 0.09.
Les coûts pour l'ensemble du portefeuille sont définis par la v.a. $S = X + Y$.
On fournit les valeurs suivantes de la fonction de répartition $H(x; \alpha, 1)$ de la loi gamma avec les paramètres $\alpha = k$ and $\beta = 1$:

$x \mid k$	1	2	3	4	5	6	7
0.5	0.3935	0.0902	0.0144	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000
1	0.6321	0.2642	0.0803	0.0190	0.0037	0.0006	0.0001
1.5	0.7769	0.4422	0.1912	0.0656	0.0186	0.0045	0.0009
2	0.8647	0.5940	0.3233	0.1429	0.0527	0.0166	0.0045
2.5	0.9179	0.7127	0.4562	0.2424	0.1088	0.0420	0.0142
3	0.9502	0.8009	0.5768	0.3528	0.1847	0.0839	0.0335
3.5	0.9698	0.8641	0.6792	0.4634	0.2746	0.1424	0.0653
4	0.9817	0.9084	0.7619	0.5665	0.3712	0.2149	0.1107
4.5	0.9889	0.9389	0.8264	0.6577	0.4679	0.2971	0.1689
5	0.0033	0.9596	0.8753	0.7350	0.5595	0.3840	0.2378

Note: $H(x; \alpha, \beta) = H(\beta x; \alpha, 1)$. Example: $H(2000; 3, 0.001) = H(2; 3, 1) = 0.3233$.
Questions:

(a) **(3 points).** Développer l'expression de $F_S(x)$.
(b) **(6 points).** Calculer $F_S(0)$ et $F_S(400)$.

9. **(9 points).** Soit X une v.a. continue. On définit la v.a. $Y = -X$.

(a) **(3 points).** Montrer que

$$TVaR_\kappa(Y) = -\frac{1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_u(X)\,du.$$

(b) **(3 points).** Soit $X \sim Norm(\mu, \sigma^2)$. Montrer que

$$TVaR_\kappa(Y) = -\left(\mu - \frac{1}{1-\kappa}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(1-\kappa)\right)^2}{2}}\right).$$

Tracer la courbe de F_X (note: $\mu > 0$ et $\mu - 2\sigma < 0$). Indiquer à quelle partie de la courbe de F_X est associée $VaR_{0.99}(Y)$ et $TVaR_{0.99}(Y)$.

(c) **(3 points).** Soit $X \sim LNorm(\mu, \sigma^2)$. Montrer que

$$TVaR_\kappa(Y) = -\frac{1}{1-\kappa}\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2} \times \Phi(\Phi^{-1}(1-\kappa) - \sigma).$$

Tracer la courbe de F_X. Indiquer à quelle partie de la courbe de F_X est associée $VaR_{0.99}(Y)$ et $TVaR_{0.99}(Y)$.

10. **(12 points).** On considère un portefeuille homogène de risques échangeables X_1, ..., X_n où

$$E[X_i|\Theta] = \Theta \times 5$$

et

$$Var(X_i|\Theta) = \Theta \times 10$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
Soit la v.a. mélange $\Theta \sim Gamma(\alpha = 2, \beta = 2)$.
De plus, $(X_1|\Theta = \theta), ..., (X_n|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes.
Les coûts par contrat sont définis par la v.a. $W_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$.
Questions :

(a) **(2 points).** Développer les expressions de $E[W_n|\Theta]$ et $Var(W_n|\Theta)$.

(b) **(2 points).** On décompose $Var(W_n)$ en deux termes:

composante diversifiable:	$E_\Theta[Var(W_n|\Theta)]$
composante non-diversifiable:	$Var_\Theta(E[W_n|\Theta])$

Développer les expressions de $E_\Theta[Var(W_n|\Theta)]$ et $Var_\Theta(E[W_n|\Theta])$.

(c) **(3 points).** Pour $n = 20$ contrats, calculer $E[W_n]$ et $Var(W_n)$ pour $n = 20$.

(d) **(5 points).** Pour $n \to \infty$,
- calculer $\lim_{n\to\infty} E[W_n]$;
- calculer $\lim_{n\to\infty} Var(W_n)$;
- calculer $\lim_{n\to\infty} E_\Theta[Var(W_n|\Theta)]$;
- calculer $\lim_{n\to\infty} Var_\Theta(E[W_n|\Theta])$;
- commenter les résultats obtenus des trois limites en regard de la mutualisation des risques.

11. **(10 points).** Soit les v.a. i.i.d. $X_1, ..., X_n$ avec

$$X_i \sim BNComp\left(r, q; F_B\right),$$

où $r = 2.5, q = \frac{1}{3}$, $B \sim LNorm\left(\mu = \ln(10) - \frac{1}{2}, \sigma = 1\right)$, pour $i = 1, 2, ..., n$.
Soit les v.a. i.i.d. $Y_1, ..., Y_n$ avec

$$Y_i \sim BNComp\left(r, q; F_C\right),$$

où $r = 2.5, q = \frac{1}{3}$, $C \sim Pareto\left(\alpha = 1.5, \lambda = 5\right)$, pour $i = 1, 2, ..., n$.
On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
On ne peut pas identifier une forme explicite pour F_{S_n} et F_{T_n}.
Parmi les deux méthodes proposées, on choisit pour chaque v.a. une **seule** méthode appropriée pour l'approximer :

- méthode #1 – approximation basée sur la loi normale ;
- méthode #2 – approximation basée sur la loi du montant de sinistre maximal.

Note : les méthodes ne sont pas utilisées deux fois dans ce numéro.
Questions:

(a) **(5 points).** Evaluer approximativement $VaR_{0.99}\left(S_{100}\right)$ en utilisant une seule des 2 méthodes proposées. Justifier brièvement votre choix.

(b) **(5 points).** Evaluer approximativement $VaR_{0.99}\left(T_{100}\right)$ en utilisant une seule des 2 méthodes proposées. Justifier brièvement votre choix.

12. **(8 points). Hoeffding, probabilité de ruine et texter.**
Pour la prochaine année, la compagnie d'assurance ABC va émettre 3 nouveaux types de contrat d'assurance-vie temporaire 1 an.
Le capital alloué au portefeuille de nouveaux contrats est nul.
La compagnie ABC embauche les actuaires TEXTO et NOTEXTO pour faire la tarification.
   - TEXTO a l'habitude de *texter* frénétiquement en travaillant.
   - NOTEXTO travaille consciencieusement sans *texter*.

   Notations:
   - j : type de contrat ($j = 1, 2, 3$) ;
   - $b^{(j)}$: prestation de décès pour le contrat de type j ($j = 1, 2, 3$) ;
   - $q^{(j)}$: pprobabilité de décès pour le contrat de type j ($j = 1, 2, 3$) ;
   - $\pi^{(j)}$: prime chargée pour le contrat de type j ($j = 1, 2, 3$) ;
   - $\pi^{(j)}$: nombre de contrats de type j ($j = 1, 2, 3$).

   Les primes obtenues par les deux actuaires sont fournies dans le tableau suivant :

Types j de contrat	$b^{(j)}$	$b^{(j)}$	$\pi^{(j)}_{TEXTO}$	$\pi^{(j)}_{NO}$
1	10000	0.002	15	25
2	20000	0.003	50	70
3	30000	0.001	22	38

   Questions :
   (a) **(4 points).** La compagnie ABC retient la prime calculée par l'actuaire TEXTO. En utilisant adéquatement l'Inégalité d'Hoeffding, démontrer comment va se comporter la probabilité de ruine si le produit rencontre beaucoup de succès et qu'un grand nombre $n = n^{(1)} + n^{(2)} + n^{(3)}$ de contrats (peu importe les valeurs de $n^{(1)} > 0$, $n^{(2)} > 0$ et $n^{(3)} > 0$) sont vendus.
   (b) **(4 points).** La compagnie ABC retient la prime calculée par l'actuaire NOTEXTO. En utilisant adéquatement l'Inégalité d'Hoeffding, démontrer comment va se comporter la probabilité de ruine si le produit rencontre beaucoup de succès et qu'un grand nombre $n = n^{(1)} + n^{(2)} + n^{(3)}$ de contrats (peu importe les valeurs de $n^{(1)} > 0$, $n^{(2)} > 0$ et $n^{(3)} > 0$) sont vendus.

FIN

Quelques inégalités

Inégalité de Markov. Soit une v.a. Z ne prenant que des valeurs positives et dont l'espérance existe. Alors, on a

$$\Pr(Z \geq a) \leq \frac{E[Z]}{a},$$

pour tout $a > 0$.

Inégalité de Chebychev. Soit la v.a. Z dont l'espérance $E[Z]$ et la variance $\mathrm{Var}(Z)$ existent. Pour tout $k > 0$, on a

$$\Pr\left(|Z - E[Z]| > k\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Inégalité de Hoeffding. Soit une suite de v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$. Il existe une suite de constantes $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ tel que

$$\Pr(X_i \in [a_i, b_i]) = 1$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. Alors, pour $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(S_n - E[S_n] > x) &\leq \mathrm{e}^{-\frac{2x^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}} \\
\Pr(S_n - E[S_n] < -x) &\leq \mathrm{e}^{-\frac{2x^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}} \\
\Pr(|S_n - E[S_n]| > x) &\leq 2\mathrm{e}^{-\frac{2x^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}}
\end{aligned}$$

1. **Solution à la question 1.**
   (a) **(3 points).** Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_{0.9999}(X)$.
   On obtient
$$VaR_{0.5}(X) = 0$$
   et
$$\begin{aligned} VaR_{0.9999}(X) &= VaR_{\frac{0.9999-(1-q)}{q}}(B) \\ &= VaR_{\frac{0.9999-0.9}{0.1}}(B) \\ &= -1000 \times \ln\left(1 - \frac{0.9999-0.9}{0.1}\right) \\ &= 6907.755279 \end{aligned}$$
   (b) **(3 points).** Calculer $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{0.9999}(X)$.
   On obtient
$$\begin{aligned} TVaR_{0.5}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} qE\left[B \times 1_{\{B>0\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-0.5} \times 0.1 \times 1000 \\ &= 200 \end{aligned}$$
   et
$$\begin{aligned} TVaR_{0.9999}(X) &= \frac{1}{1-0.9999} qE\left[B \times 1_{\{B>VaR_{0.9999}(X)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-0.9999} \times 0.1 \times \left(1000\mathrm{e}^{-\frac{1}{1000}\times 6907.755279} + 6907.755279\mathrm{e}^{-\frac{1}{1000}\times 6907.755279}\right) \\ &= : 7907.755\,278\,86 \end{aligned}$$

2. **Solution à la question 2**. **(4 points dont 1 point pour la réponse numérique).** Calculer la probabilité de ruine $\psi(u)$ pour la période où

$$\psi(u) = \Pr(S > V(1))$$

avec

$$V(1) = (u+P) \times Y.$$

On a

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \Pr(S > V(1)) \\
&= \sum_{i=0}^{1} \Pr(I = i) \Pr(S > V(1) \mid I = i) \\
&= \Pr(I = 0) \Pr(S > (u+P) 0.7) + \Pr(I = 1) \Pr(S > (u+P) 1.1) \\
&= 0.1 \left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{(u+P)0.7}{\lambda}\right)^{-\tau}}\right) + 0.9 \left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{(u+P)1.1}{\lambda}\right)^{-\tau}}\right) \\
&= 0.1 \left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{(100+120)0.7}{100}\right)^{-4}}\right) + 0.9 \left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{(100+120)1.1}{100}\right)^{-4}}\right) \\
&= 0.045931
\end{aligned}$$

3. **Solution à la question 3. 14 points.**
   (a) **4pts.** Calculer $E[X_i]$, $VaR_{0.995}(X_i)$ et $TVaR_{0.995}(X_i)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Comparer les valeurs et commenter brièvement
   1pt. On a
$$E[X_i] = b_i E[I_i] = 12$$
   1pt. Comme on a $1 - 0.0012 = 0.9988 > 0.995$, alors
$$VaR_{0.995}(X_i) = 0$$
   1pt. Et on a donc
$$TVaR_{0.995}(X_i) = \frac{E[X_i]}{1 - .995} = 2400 > VaR_{0.995}(X_i)$$
   1pt. Commentaires:
   - $VaR_{0.995}(X_i) = 0$: aberration d'un point de vue assurance ($<<E[X_i]$)
   - $TVaR_{0.995}(X_i) = 2400 >> E[X_i]$: on ne profite pas de la mutualisation.

   (b) **4pts.** Calculer $E[S]$, $VaR_{0.995}(S)$ et $TVaR_{0.995}(S)$. Comparer les valeurs et commenter brièvement.
   1pt. Espérance : On a
$$E[S] = b \times 200 \times q = 2400$$
   1pt. VaR
$$VaR_{0.995}(S) = b \times VaR_{0.995}(K) = 20000$$
   1pt. TVaR
$$\begin{aligned} TVaR_{.995}(S) &= bTVaR_{.995}(K) \\ &= b\left(\frac{E\left[K \times 1_{\{K > VaR_{0.995}(K)\}}\right] + VaR_{0.995}(K)\left(P\left(K \leq VaR_{0.995}(K)\right) - 0.995\right)}{1 - 0.995}\right) \\ &= 24038.47 \end{aligned}$$
   1pt. Commentaires:
   - $VaR_{0.995}(X_i) > 2400$, c'est plus logique (mais cela n'advient pas toujours comme on a vu en (a)
   - $TVaR_{0.995}(X_i)\, VaR_{0.995}(X_i) > 2400 >> E[X_i]$: on ne profite pas de la mutualisation.

(c) **2pts.** Calculer le bénéfice de mutualisation

$$B_{0.995}^{VaR}(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} VaR_{0.995}(X_i) - VaR_{0.995}(S).$$

Commenter brièvement.
1ptsBénéfice :

$$\begin{aligned} B_{0.995}^{VaR} &= 200 \times VaR_{0.995}(X_i) - VaR_{0.995}(S) \\ &= -24000 \end{aligned}$$

1pts Aucun bénéfice de mutualisation selon la mesure VaR! Cela est dû au fait que la mesure VaR n'est pas sous-additive. Peu recommandée pour cette raison. Elle peut conduire à ce type d'aberration.

(d) **2pts.** Calculer le bénéfice de mutualisation $B_{0.995}^{TVaR}(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}(X_i) - TVaR_{0.995}(S)$. Commenter brièvement.
1ptsBénéfice :

$$\begin{aligned} B_{.995}^{TVaR} &= 200 \times TVaR_{.995}(X_i) - TVaR_{.995}(S) \\ &= 455961.44 > 0 \end{aligned}$$

1pts. Le bénéfice de mutualisation est fort important (comme on peut s'attendre). La mesure $TVaR$ est sous-additive.

(e) **2pts.** L'actuaire A propose de calculer le capital économique comme suit: $\sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}(X_i) - E[S]$. L'actuaire B propose de calculer le capital économique comme suit: $TVaR_{0.995}(S) - E[S]$. Laquelle des deux approches recommendez-vous? Expliquer brièvement.
En se basant sur la TVaR, le montant à mettre de côté pour chaque risque serait de 2400 pour une espérance de coût de 12. Le coût en capital est trop élevé. En profitant de la mutualisation (2400) soit 120 par risque. Le benefice en mutualisation est de 456000. Ce qui va permettre de demander une prime moins élevée.
L'approche A ne tient pas compte de l'avantage à mutualiser les risques, ce qui amène à mettre de côté un capital économique trop élevé.
L'approche B tient compte de l'avantage de la mutualiser les risques, ce qui amène à mettre de côté un capital économique moins élevé. Cependant, on constate que le risque de mortalité est très important. Il faut avoir plus de risques.

4. **Solution à la question 4. 6 points.**

(a) **(2 points).** Développer l'expression de $F_L(x)$.

On a

$$\begin{aligned} F_L(x) &= \Pr(L \leq x) \\ &= \Pr(L_1 + L_2 \leq x) \\ &= \Pr(S - P + D - T \leq x) \\ &= \Pr(S - 5000 + 4000 - 6000 + Y \leq x) \\ &= \Pr(S + Y \leq x + 7000) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Pr(S + Y \leq y) &= \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000} - \frac{1}{4000}} \left(1 - \exp\left(-\frac{y}{4000}\right)\right) \\ &\quad + \frac{\frac{1}{4000}}{\frac{1}{4000} - \frac{1}{1000}} \left(1 - \exp\left(-\frac{y}{1000}\right)\right) \end{aligned}$$

(b) **(4 points).** Calculer $\Pr(L > 0)$. Interpréter cette probabilité.

On obtient

$$\begin{aligned} \overline{F}_L(0) &= \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000} - \frac{1}{4000}} \exp\left(-\frac{7000}{4000}\right) + \frac{\frac{1}{4000}}{\frac{1}{4000} - \frac{1}{1000}} \exp\left(-\frac{7000}{1000}\right) \\ &= 0.231395 \end{aligned}$$

5. **Solution à la question 5. 8 points.**

(a) **(2 points).** Montrer que la mesure φ_κ est invariante à la translation par un scalaire $a \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned}\varphi_\kappa(X+a) &= E[X+a] + \sqrt{\operatorname{Var}(X+a)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &= E[X] + a + \sqrt{\operatorname{Var}(X)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &= \varphi_\kappa(X) + a\end{aligned}$$

(b) **(2 points).** Montrer que la mesure φ_κ est invariante à la multiplication par un scalaire positif $a \in \mathbb{R}^+$ i.e. que la mesure φ_κ est positivement homogène.

On a

$$\begin{aligned}\varphi_\kappa(aX) &= E[aX] + \sqrt{\operatorname{Var}(aX)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &= a \times E[X] + a \times \sqrt{\operatorname{Var}(X)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &= a \times \varphi_\kappa(X)\end{aligned}$$

(c) **(4 points).** Montrer que la mesure φ_κ est sous-additive.

On a

$$\begin{aligned}\varphi_\kappa(X_1+X_2) &= E[X_1+X_2] + \sqrt{\operatorname{Var}(X_1+X_2)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &= E[X_1] + E[X_2] + \sqrt{\operatorname{Var}(X_1+X_2)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &\leq E[X_1] + E[X_2] + \left(\sqrt{\operatorname{Var}(X_1)} + \sqrt{\operatorname{Var}(X_2)}\right)\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &= E[X_1] + \sqrt{\operatorname{Var}(X_1)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &\quad + E[X_2] + \sqrt{\operatorname{Var}(X_2)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &= \varphi_\kappa(X_1) + \varphi_\kappa(X_2).\end{aligned}$$

6. **Solution à la question 6 (16 points).**

(a) **(3 points).** Calculer $E[I_1]$ et $Var(I_1)$.

Note: On a

$$I_1 \sim Bern(q)$$

où

$$q = E[\Theta] = \frac{2}{2+18} = 0.1$$

et

$$Var(I_1) = q(1-q) = 0.1 \times 0.9 = 0.09$$

(b) **(3 points).** Calculer $E[X_1]$ et $Var(X_1)$.

On a

$$\begin{aligned} E[X_1] &= E[I_1]E[B_1] = qe^{2+0.5\times 0.81} \\ &= 0.1 \times e^{2+0.5\times 0.81} \\ &= 1.10784302822 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var(X_1) &= E[I_1]Var(B_1) + Var(I_1)E[B_1]^2 \\ &= 0.1 \times \left(e^{2\times 2+4\times 0.5\times 0.81} - e^{2\times 2+2\times 0.5\times 0.81}\right) + 0.1 \times 0.9 \times \left(e^{2\times 2+2\times 0.5\times 0.81}\right) \\ &= 26.\,361622148 \end{aligned}$$

(c) **(3 points).** Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

On a

$$\begin{aligned} E[X_1X_2] &= E[B_1]E[B_2]E[I_1I_2] \\ &= E[B]^2 E\left[\Theta^2\right] \\ &= \left(e^{2+0.5\times 0.81}\right)^2 \times \left(\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\right) \\ &= \left(e^{2+0.5\times 0.81}\right)^2 \times \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\right) \\ &= \left(e^{2+0.5\times 0.81}\right)^2 \times \left(\frac{2(2+1)}{(20)(20+1)}\right) \\ &= 1.753309 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] \\ &= 1.753309 - 1.107843^2 \\ &= 0.525993 \end{aligned}$$

(d) **(3 points).** Calculer $E[S_n]$ et $\mathrm{Var}(S_n)$ pour $n = 200$.
On a

$$\begin{aligned} E[S_n] &= 200 \times E[X_1] \\ &= 200 \times 1.1078430 \\ &= 221.5686 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= nVar(X_1) + n \times (n-1)\, Cov(X_1, X_2) \\ &= 200 \times 26.361622 + 200 \times 199 \times 0.525993 \\ &= 26206.8458 \end{aligned}$$

(e) **(4 points).** On fixe $\kappa = 95\%$ et $n = 200$.

i. Calculer $\varphi_\kappa(X_1)$ et $\varphi_\kappa(S)$ et calculer le bénéfice de mutualisation.
On a

$$\begin{aligned} \varphi_\kappa(X_1) &= E[X_1] + \sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &= 1.10784302822 + \sqrt{26.361622}\frac{1}{1-0.95}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(1.644854)^2}{2}} \\ &= 11.6985405114 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi_\kappa(S_n) &= E[S_n] + \sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &= 221.5686 + \sqrt{26206.8458}\frac{1}{1-0.95}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(1.644854)^2}{2}} \\ &= 555.491247732 \end{aligned}$$

Le bénéfice est

$$\begin{aligned} B_{\kappa=0.99,n=200} &= 200 \times 11.698541 - 555.491248 \\ &= 1784.216952 \end{aligned}$$

ii. Commenter sur la valeur du bénéfice de mutualisation en mentionnant clairement la (ou les) propriété(s) concernée(s) parmi les propriétés démontrées à la **Question 5**.
Comme la mesure φ est sous-additive, le bénéfice de mutualisation de mutualisation doit être positif. Cela est illustré par cet exemple.

7. **Solution à la question 7. 8 points.**
   (a) **(4 points).** On obtient les résultats suivants:
   Calcul de l'espérance : (2 pts)

$$\begin{aligned}
E[M_1] &= E[E[M_1|\Theta_1]] \\
&= E\left[M_1 \middle| \Theta_1 = \theta^{(1)}\right]\alpha^{(1)} + E\left[M_1 \middle| \Theta_1 = \theta^{(2)}\right]\alpha^{(2)} \\
&= \lambda \times \gamma^{(1)} \times \alpha^{(1)} + \lambda \times \gamma^{(2)} \times \alpha^{(2)} = 0.05
\end{aligned}$$

   Calcul de la variance : (2 pts)

$$\begin{aligned}
Var(M_1) &= E\left[Var\left[M_1 \middle| \Theta_1 = \theta^{(j)}\right]\right] + Var\left[E\left[M_1 \middle| \Theta_1 = \theta^{(j)}\right]\right] \\
&= E\left[\lambda \times \gamma^{(j)}\right] + Var\left(\lambda \times \gamma^{(j)}\right) \\
&= \lambda \times \gamma^{(1)} \times \alpha^{(1)} + \lambda \times \gamma^{(2)} \times \alpha^{(2)} \\
&+ \lambda^2\left(\gamma^{(1)^2} \times \alpha^{(1)} + \gamma^{(2)^2} \times \alpha^{(2)} - \left(\gamma^{(1)} \times \alpha^{(1)} + \gamma^{(2)} \times \alpha^{(2)}\right)^2\right) \\
&= 0.055625
\end{aligned}$$

   (b) **(4 points).** Calculer la probabilité qu'il se produise un sinistre **et** que le montant soit supérieur à 10.
   On cherche

$$\begin{aligned}
\tau &= \Pr(\{\text{il se produise un sinistre } \textbf{et} \text{ que le montant soit supérieur à } 10\}) \\
&= \Pr(M = 1) \times \Pr(B > 10) \\
&= \left(\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-0.05\times\frac{1}{4}}\left(0.05 \times \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-0.05\times 4}(0.05 \times 4)\right)\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(10) - 2}{1}\right) \\
&= 0.04262\,501 \times 0.381103 \\
&= 0.016245
\end{aligned}$$

8. **Solution à la question 8(8 points).**
Questions:
(a) **(3 points).** Développer l'expression de $F_S(x)$.
On obtient

$$
\begin{aligned}
F_S(x) &= \Pr(I=0)\times\Pr(M=0) \\
&\quad +\Pr(I=1)\times\Pr(M=0)\,F_B(x) \\
&\quad +\Pr(I=0)\times\Pr(M=1)\,F_{C_1}(x) \\
&\quad +\Pr(I=1)\times\Pr(M=1)\,F_{B+C_1}(x) \\
&\quad +\Pr(I=0)\times\Pr(M=2)\,F_{C_1+C_2}(x) \\
&\quad +\Pr(I=1)\times\Pr(M=2)\,F_{B+C_1+C_2}(x)
\end{aligned}
$$

qui devient

$$
\begin{aligned}
F_S(x) &= \Pr(I=0)\times\Pr(M=0) \\
&\quad +\Pr(I=1)\times\Pr(M=0)\,H\left(x;3,\frac{1}{100}\right) \\
&\quad +\Pr(I=0)\times\Pr(M=1)\,H\left(x;2,\frac{1}{100}\right) \\
&\quad +\Pr(I=1)\times\Pr(M=1)\,H\left(x;5,\frac{1}{100}\right) \\
&\quad +\Pr(I=0)\times\Pr(M=2)\,H\left(x;4,\frac{1}{100}\right) \\
&\quad +\Pr(I=1)\times\Pr(M=2)\,H\left(x;7,\frac{1}{100}\right)
\end{aligned}
$$

(b) **(6 points).** Calculer $F_S(0)$ et $F_S(400)$.
(1 points). On obtient

$$F_S(0) = 0.8\times 0.49 = 0.392$$

(5 points). On obtient

$$
\begin{aligned}
F_S(x) &= 0.8\times 0.49 + 0.2\times 0.49\times 0.7619 \\
&\quad +0.8\times 0.42\times 0.9084 \\
&\quad +0.2\times 0.42\times 0.3712 \\
&\quad +0.8\times 0.09\times 0.5665 \\
&\quad +0.2\times 0.09\times 0.1107 \\
&= 0.84585
\end{aligned}
$$

9. **Solution à la question 9 (9 points).** Soit X une v.a. continue. On définit la v.a. $Y = -X$.

(a) **(3 points).** On sait que

$$VaR_{\kappa}(Y) = -VaR_{1-\kappa}(X)$$

On a

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(Y) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} VaR_{s}(Y)\, ds \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa\kappa}^{1} VaR_{1-s}(X)\, ds. \end{aligned}$$

On pose $u = 1 - s$ et $ds = -du$.
On conclut

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(Y) &= -\frac{1}{1-\kappa}\int_{1-\kappa}^{0} -VaR_{u}(X)\,(-du) \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\int_{0}^{1-\kappa} VaR_{u}(X)\, du. \end{aligned}$$

(b) **(3 points).** Soit $X \sim Norm(\mu, \sigma^2)$.
On a

$$VaR_{1-\kappa}(X) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(1-\kappa)$$

On a

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(Y) &= -\frac{1}{1-\kappa}\int_{0}^{1-\kappa} VaR_{u}(X)\, du \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right] \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\left(\mu\Phi\left(\frac{VaR_{1-\kappa}(X)-\mu}{\sigma}\right) - \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\left(\mu(1-\kappa) - \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\Phi^{-1}(1-\kappa)^2}{2}}\right) \end{aligned}$$

On conclut

$$TVaR_{\kappa}(Y) = -\left(\mu - \frac{1}{1-\kappa}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(1-\kappa)\right)^2}{2}}\right).$$

Tracer la courbe de F_X (note: $\mu > 0$ et $\mu - 2\sigma < 0$). Indiquer à quelle partie de la courbe de F_X est associée $VaR_{0.99}(Y)$ et $TVaR_{0.99}(Y)$.

(c) **(3 points).** Soit $X \sim LNorm\left(\mu, \sigma^2\right)$.
On a

$$VaR_{1-\kappa}\left(X\right) = e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(1-\kappa)}$$

On a

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}\left(Y\right) &= -\frac{1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_u\left(X\right)du \\
&= -\frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X \leq VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right] \\
&= -\frac{1}{1-\kappa}\left(\exp(\mu+\sigma^2/2)\Phi(\frac{\ln e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(1-\kappa)}-\mu-\sigma^2}{\sigma})\right) \\
&= -\frac{1}{1-\kappa}\exp(\mu+\sigma^2/2) \times \Phi(\Phi^{-1}\left(1-\kappa\right)-\sigma)
\end{aligned}$$

Tracer la courbe de F_X. Indiquer à quelle partie de la courbe de F_X est associée $VaR_{0.99}\left(Y\right)$ et $TVaR_{0.99}\left(Y\right)$.

10. **Solution à la question 10**

(a) **2pts.** Développer les expressions de $E[W_n|\Theta]$ et $Var(W_n|\Theta)$.
On a
$$E[W_n|\Theta] = \frac{1}{n} n 5\Theta = 5\Theta$$
et
$$Var(W_n|\Theta) = \frac{1}{n^2} n 10\Theta = \frac{1}{n} 10\Theta$$

(b) **2pts.** On décompose $Var(W_n)$ en deux termes:

composante diversifiable:	$E_\Theta[Var(W_n\|\Theta)]$
composante non-diversifiable:	$Var_\Theta(E[W_n\|\Theta])$

Développer les expressions de $E_\Theta[Var(W_n|\Theta)]$ et $Var_\Theta(E[W_n|\Theta])$.
On a
$$Var_\Theta(E[W_n|\Theta]) = Var(5\Theta) = 25 \times \frac{2}{2^2} = 12.5$$
et
$$E_\Theta[Var(W_n|\Theta)] = E\left[\frac{1}{n} 10\Theta\right] = \frac{1}{n} 10$$
Alors,
$$Var(W_n) = 12.5 + \frac{1}{n} 10$$

(c) **3pts.** Pour $n = 20$ contrats, calculer $E[W_n]$, $Var(W_n)$ et les valeurs des deux composantes pour $n = 20$.
On a
$$E[W_n] = 5$$
$$Var(W_n) = 12.5 + \frac{1}{n} 10 = 13$$

(d) **5pts.** Pour $n \to \infty$,
- calculer $\lim_{n\to\infty} E[W_n]$; 5
- calculer $\lim_{n\to\infty} Var(W_n)$; 12.5
- calculer $\lim_{n\to\infty} E_\Theta[Var(W_n|\Theta)]$; 0
- calculer $\lim_{n\to\infty} Var_\Theta(E[W_n|\Theta])$; 12.5
- commenter les résultats obtenus pour les limites en regard de la mutualisation des risques

11. **Solution à la question ??.** Soit les v.a. i.i.d. $X_1, ..., X_n$ avec

$$X_i \sim BNComp\left(r, q; F_B\right),$$

où $r = 2.5, q = \frac{1}{3}$, $B \sim LNorm\left(\mu = \ln\left(10\right) - \frac{1}{2}, \sigma = 1\right)$, pour $i = 1, 2, ..., n$.
Soit les v.a. i.i.d. $Y_1, ..., Y_n$ avec

$$Y_i \sim BNComp\left(r, q; F_C\right),$$

où $r = 2.5, q = \frac{1}{3}$, $C \sim Pareto\left(\alpha = 1.5, \lambda = 5\right)$, pour $i = 1, 2, ..., n$.
On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
On ne peut pas identifier une forme explicite pour F_{S_n} et F_{T_n}.
Parmi les deux méthodes proposées, on choisit pour chaque v.a. une **seule** méthode appropriée pour l'approximer :

- méthode #1 – approximation basée sur la loi normale ;
- méthode #2 – approximation basée sur la loi du montant de sinistre maximal.

Note : les méthodes ne sont pas utilisées deux fois dans ce numéro.
Questions:

(a) **(5 points).** Evaluer approximativement $VaR_{0.99}\left(S_{100}\right)$ en utilisant une seule des 2 méthodes proposées. Justifier brièvement votre choix.
La v.a. S_n est une somme de v.a. iid avec espérance et variance finies.
On peut appliquer le théorème central limite.
On a

$$\begin{aligned} F_{S_{100}}\left(x\right) &\simeq F_W\left(x\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - E\left[W\right]}{\sqrt{Var\left(W\right)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - E\left[S_n\right]}{\sqrt{Var\left(S_n\right)}}\right) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} VaR_\kappa\left(S_{100}\right) &\simeq VaR_\kappa\left(W\right) \\ &= E\left[S_{100}\right] + \sqrt{Var\left(S_{100}\right)}\Phi^{-1}\left(\kappa\right) \\ &= nE\left[X\right] + \sqrt{nVar\left(X\right)}\Phi^{-1}\left(\kappa\right) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} E[X] &= r\frac{1-q}{q}e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \\ &= 2.5\frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}e^{\ln(10)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \\ &= 50 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} Var(X) &= r\frac{1-q}{q}\left(e^{2\mu+4\frac{1}{2}\sigma^2}-e^{2\mu+2\frac{1}{2}\sigma^2}\right)+r\frac{1-q}{q^2}\left(e^{2\mu+2\frac{1}{2}\sigma^2}\right) \\ &= 2.5\frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\left(e^{2\left(\ln(10)-\frac{1}{2}\right)+4\frac{1}{2}}-e^{2\left(\ln(10)-\frac{1}{2}\right)+2\frac{1}{2}}\right)+2.5\frac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\left(e^{2\left(\ln(10)-\frac{1}{2}\right)+2\frac{1}{2}}\right) \\ &= 21039.415 \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S_{100}) &\simeq 100\times 50+\sqrt{100\times 21039.415}\times 2.325348 \\ &= :8372.910\,260\,28 \end{aligned}$$

(b) **(5 points).** Evaluer approximativement $VaR_{0.99}(T_{100})$ en utilisant une seule des 2 méthodes proposées. Justifier brièvement votre choix.
La variance du montant de sinitre n'existe pas.
Alors, on ne peut pas appliquer le TCL.
On propose d'approximer T_n par la v.a. W_n qui représente le montant maximal de sinistre pour l'ensemble du portefeuille.
On a

$$T_n \sim BNComp(nr,q;F_C)$$

On a

$$N_n \sim BN(nr,q)$$

On

$$F_{T_n}(x)\simeq F_V(x)$$

où

$$\begin{aligned} F_V(x) &= ... \\ &= P_{N_n}(F_C(x)) \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)F_C(x)}\right)^{nr} \end{aligned}$$

On observe

$$\kappa=\left(\frac{q}{1-(1-q)F_C\left(x\right)}\right)^{nr}$$

qui devient

$$\frac{q}{\kappa^{\frac{1}{nr}}}=1-\left(1-q\right)F_C\left(x\right)$$

On obtient

$$\begin{aligned} F_V^{-1}\left(\kappa\right) &= F_C^{-1}\left(\frac{1-\frac{q}{\kappa^{\frac{1}{nr}}}}{1-q}\right) \\ &= \lambda\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1-\frac{q}{\kappa^{\frac{1}{nr}}}}{1-q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}-1\right) \end{aligned}$$

Comme $r=2.5, q=\frac{1}{3}$, $C\sim Pareto\left(\alpha=1.5,\lambda=5\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} VaR_\kappa\left(T_n\right) &\simeq VaR_\kappa\left(V\right) \\ &= F_V^{-1}\left(\kappa\right) \\ &= 5\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1-\frac{\frac{1}{3}}{0.99^{\frac{1}{250}}}}{1-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{1.5}}}-1\right) \\ &= 6758.276\,417\,34 \end{aligned}$$

:

12. **Solution à la question 12 (8 points)**

(a) **(4 points).** La compagnie ABC retient la prime calculée par l'actuaire TEXTO. En utilisant adéquatement l'Inégalité d'Hoeffding, démontrer comment va se comporter la probabilité de ruine si le produit rencontre beaucoup de succès et qu'un grand nombre $n = n^{(1)} + n^{(2)} + n^{(3)}$ de contrats (peu importe les valeurs de $n^{(1)} > 0$, $n^{(2)} > 0$ et $n^{(3)} > 0$) sont vendus.

On a

$$\begin{aligned}\psi_n(0) &= \Pr\left(S_n - E[S_n] > \sum_{i=1}^{n}(\pi_i - E[X_i])\right) \\ &= 1 - \Pr\left(S_n - E[S_n] \leq -\sum_{i=1}^{n}(E[X_i] - \pi_i)\right) \\ &\geq 1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\{\sum_{i=1}^{n}(E[X_i]-\pi_i)\}^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}\end{aligned}$$

On observe

$$\begin{aligned}\psi_n(0) &\geq 1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\{\sum_{i=1}^{n}((E[X_i]-\pi_i))\}^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}} \\ &\geq 1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\left\{n \min_{i=1,2,\ldots,n}((E[X_i]-\pi_i))\right\}^2}{n \max_{i=1,2,\ldots,n} b_i^2}} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-2n\frac{\left\{\min_{i=1,2,\ldots,n}(\pi_i - E[X_i])\right\}^2}{\max_{i=1,2,\ldots,n} b_i^2}} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-2n\frac{\{5\}^2}{30000^2}}\end{aligned}$$

Ensuite, on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(0) \to 1$$

La ruine va devenir certaine lorsque la taille du portefeuille augmente.

(b) **(4 points).** La compagnie ABC retient la prime calculée par l'actuaire NOTEXTO. En utilisant adéquatement l'Inégalité d'Hoeffding, démontrer comment va se comporter la probabilité de ruine si le produit rencontre beaucoup de succès et qu'un grand nombre $n = n^{(1)} + n^{(2)} + n^{(3)}$ de contrats (peu importe les valeurs de $n^{(1)} > 0$, $n^{(2)} > 0$ et $n^{(3)} > 0$) sont vendus.

On a

$$\begin{aligned} \psi_n(0) &= \Pr\left(S_n - E[S_n] > \sum_{i=1}^{n} (\pi_i - E[X_i])\right) \\ &\leq \mathrm{e}^{-\frac{2\left(\sum_{i=1}^{n}(\pi_i - E[X_i])\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}} \end{aligned}$$

On observe

$$\begin{aligned} \psi_n(0) &\leq \mathrm{e}^{-\frac{2\left\{\sum_{i=1}^{n}(\pi_i - E[X_i])\right\}^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}} \\ &\leq \mathrm{e}^{-\frac{2\left\{n \times \min\limits_{i=1,2,\ldots,n}(\pi_i - E[X_i])\right\}^2}{n \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} b_i^2}} \\ &= \mathrm{e}^{-2n\frac{\left\{\min\limits_{i=1,2,\ldots,n}(\pi_i - E[X_i])\right\}^2}{\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} b_i^2}} \\ &= \mathrm{e}^{-2n\frac{5^2}{30000^2}} \end{aligned}$$

Ensuite, on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(0) \to 1$$

La ruine va tendre vers 0 lorsque la taille du portefeuille augmente.