ACT-2011
Hiver 2021

Chapitre 23

Options exotiques : II

Thomas Landry, M.Sc., ASA, AICA
École d'actuariat, Université Laval

Préface

Une partie de ces notes de cours est reprise ou inspirée de celles de l'ancienne version du cours montée par Claire Bilodeau, et la propriété intellectuelle de ce document est donc grandement partagée avec elle.

Lecture complémentaire : chapitre 23 DM

23.1. Option « comptant ou rien » (*cash-or-nothing*)

→ Cas particulier de B-S

- Procurera un montant fixé d'avance si une condition spécifique est rencontrée
- Généralement, la condition implique que le sous-jacent atteigne le prix d'exercice de l'option, mais la condition peut être différente dans certains cas
- Aussi appelées « options binaires » ou « options digitales » dans certains contextes

Cash-or-nothing +

Option d'achat « comptant ou rien » : la condition est que $S_T > K$. Pour un contrat qui payera 1$ si la condition est rencontrée, on notera :

$$CC(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) = e^{-rT}\underbrace{N(d_2)}^{Prob(S_T > k)}$$

… avec les mêmes définitions et les mêmes formules qu'au chapitre 12, soit :

$$d_1 = \frac{ln\left(S_0/_K\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\left(ln\left(S_0 e^{-\delta T}\right) - ln\left(K e^{-rT}\right)\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$$(d_2) = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\left(ln\left(S_0 e^{-\delta T}\right) - ln\left(K e^{-rT}\right)\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

Cash-or-nothing −

Option de vente « comptant ou rien » : la condition est que $S_T < K$. Pour un contrat qui payera 1$ si la condition est rencontrée, on notera :

$*e^{-rT} = CC + CP$

$$CP(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) = e^{-rT}\underbrace{N(-d_2)}_{Prob(S_T<K)}$$

<u>Remarque</u> : il existe différents types d'options « *cash-or-nothing* », on présente ici la forme la plus simple, de base.

23.2. Option « actif ou rien » (*asset-or-nothing*)

- Procurera l'actif sous-jacent à l'échéance si une condition spécifique est rencontrée
- Généralement, la condition implique que le sous-jacent atteigne le prix d'exercice de l'option, mais la condition peut être différente dans certains cas

Asset-or-nothing +

Option d'achat « actif ou rien » : la condition est que $S_T > K$. Pour un contrat qui payera S_T si la condition est rencontrée, on notera :

$E[V.A.(S_T | S_T > K) Prob(S_T > K)]$

$= E[e^{-rT} S_T I_{S_T > K}]$

$S_0 e^{-\delta T} N(d_1) \cancel{- Ke^{-rT} N(d_2)}$

$max(0, S_T - \cancel{K})$

$$AC(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) = S_0 e^{-\delta T} N(d_1)$$

$= e^{-rT}[\underbrace{S_0 e^{(r-\delta)T} N(d_1)}]$

La preuve complète est semblable à celle présentée pour la formule de B-S en 12.1

… avec les mêmes définitions et les mêmes formules qu'au chapitre 12, soit :

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\left(ln\left(S_0 e^{-\delta T}\right) - ln\left(K e^{-rT}\right)\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$$(d_2) = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\left(ln\left(S_0 e^{-\delta T}\right) - ln\left(K e^{-rT}\right)\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

Asset-or-nothing −

Option de vente « actif ou rien » : la condition est que $S_T < K$. Pour un contrat qui payera S_T si la condition est rencontrée, on notera :

$S_0 e^{-\delta T} \times 1 = S_0 e^{-\delta T}[\underbrace{N(d_1) + N(-d_1)}_{1}]$

$$AP(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) = S_0 e^{-\delta T} N(-d_1)$$

Et on aura les relations suivantes avec les options « classiques » :

Asset-or-nothing + Cash-or-nothing +

$$C(S_0,K,\sigma,r,T,\delta) = AC(S_0,K,\sigma,r,T,\delta) - K\times CC(S_0,K,\sigma,r,T,\delta)$$
$$= S_0e^{-\delta T}N(d_1) - K\times e^{-rT}N(d_2)$$

Cash-or-nothing − Asset-or-nothing −

$$P(S_0,K,\sigma,r,T,\delta) = K\times CP(S_0,K,\sigma,r,T,\delta) - AP(S_0,K,\sigma,r,T,\delta)$$
$$= K\times e^{-rT}N(-d_2) - S_0e^{-\delta T}N(-d_1)$$

Avec ces nouvelles notations, on peut également réécrire les options avec écart du chapitre 14 (*gap options*, section 14.5) :

$$C(S_0,\boldsymbol{K_1},\boldsymbol{K_2},\sigma,r,T,\delta) = \underbrace{S_0e^{-\delta T}N(d_1)}_{AC(S_0,\boldsymbol{K_2},\sigma,r,T,\delta)} - \boldsymbol{K_1}\ \underbrace{e^{-rT}N(d_2)}_{CC(S_0,\boldsymbol{K_2},\sigma,r,T,\delta)}$$

$$P(S_0,\boldsymbol{K_1},\boldsymbol{K_2},\sigma,r,T,\delta) = \boldsymbol{K_1}\ \underbrace{e^{-rT}N(-d_2)}_{CP(S_0,\boldsymbol{K_2},\sigma,r,T,\delta)} - \underbrace{S_0e^{-\delta T}N(-d_1)}_{AP(S_0,\boldsymbol{K_2},\sigma,r,T,\delta)}$$

Avec :

$$d_1 = \frac{ln\left(S/_{\boldsymbol{K_2}}\right) + \left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

23.3. Option rétroviseur

Soit $\bar{S}_T$ la valeur maximale du prix du sous-jacent entre t = 0 et t = T.

Soit $\underline{S}_T$ la valeur minimale du prix du sous-jacent entre t = 0 et t = T.

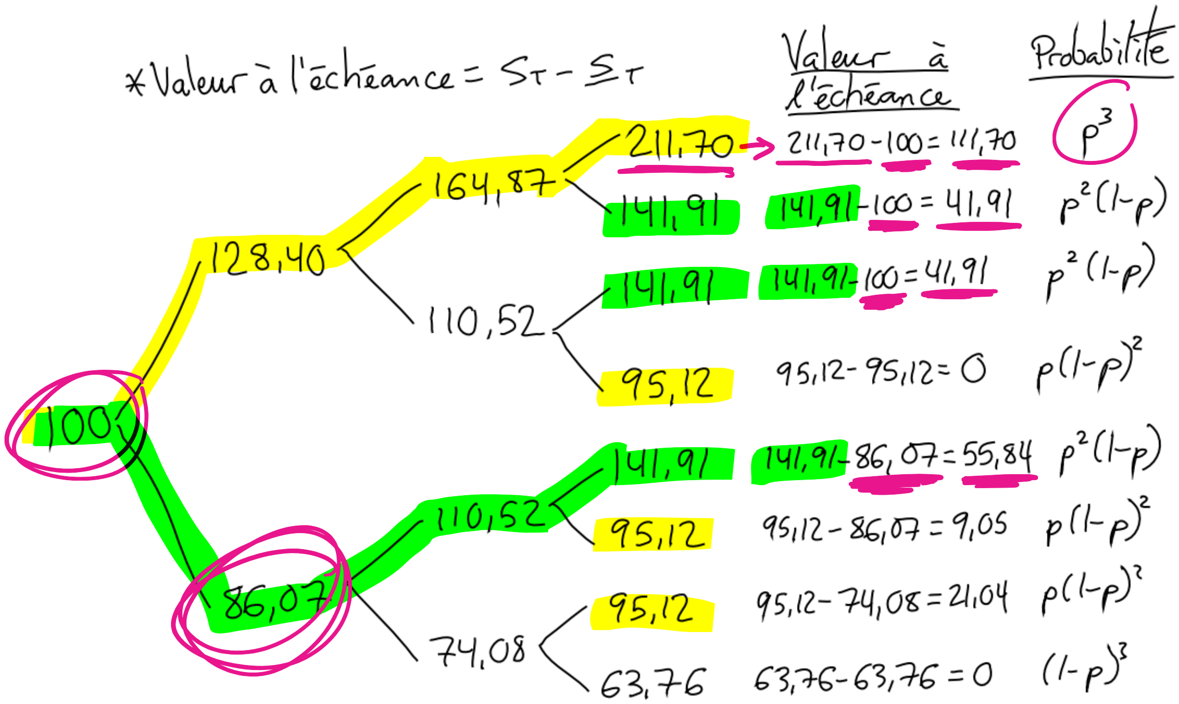
La valeur à l'échéance à T d'une **<u>option d'achat rétroviseur</u>** est $S_T - \underline{S}_T = S_T - \min(S_0, S_1, S_2, \ldots, S_T) \geq 0$

La valeur à l'échéance à T d'une **<u>option de vente rétroviseur</u>** est $\bar{S}_T - S_T = \max(S_0, S_1, S_2, \ldots, S_T) - S_T \geq 0$

<u>Exemple</u> : on a un arbre binomial avec comme paramètres $S_0 = 100\$, \sigma = 20\%, r = 5\%, T = 3\ ans, h = 1\ an, \delta = 0\%$. Évaluez le prix d'une option d'achat rétroviseur selon ce modèle (dans un environnement neutre au risque).

<u>Solution</u> : bien que l'arbre binomial soit recombinant, ici on devra vraiment calculer les $2^3 = 8$ embranchements possibles car la valeur à l'échéance dépend du chemin et de l'évolution du prix du sous-jacent avant l'échéance…!

On a que $u = e^{0.05+0.2} = 1.28402542$ et $d = e^{0.05\pm0.2} = 0.86070798$ et donc $p = \frac{e^{0.05}-d}{u-d} = 0.450166$.



On calcule la valeur espérée actualisée à t = 0 et on obtient :

$$e^{-0,05\cdot 3}\cdot E[\text{Valeur à l'échéance}]$$

$$= e^{-0,05\cdot 3}\cdot 29,85 = \underline{25,69}$$