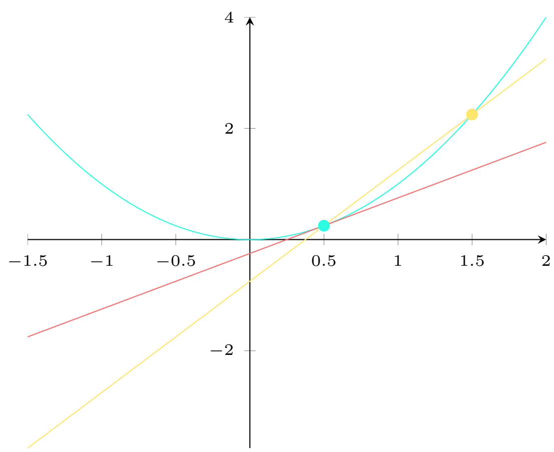
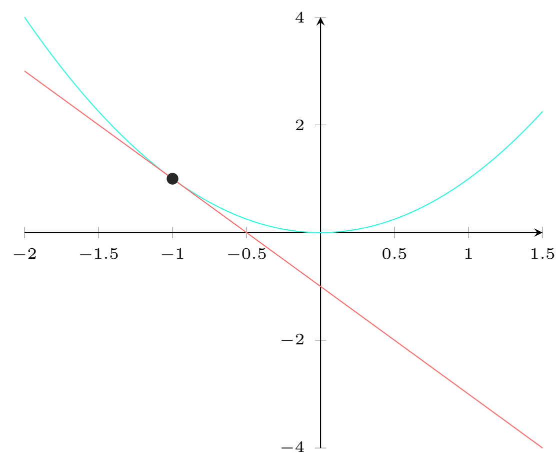
2 | Calcul différentiel

2.1 | Définition de la dérivée

Le graphique suivant montre la fonction $f(x) = x^2$.





On s'intéresse au comportement de la fonction au point $x_0 = (0.5, 0.25)$, qu'on a placé en bleu dans le graphique de gauche. Le point $x_1 = (1.5, 2.25)$ se trouve à proximité, et on l'a colorié en jaune. La droite qui passe entre ses deux points est une droite sécante et sa pente est donnée par

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

où Δf est l'incrément de $f(x)$ et Δx est l'incrément de x.

Lorsque Δx diminue, la droite tend vers la tangente, la droite qui croise $f(x)$ à un seul point dans la proximité de x. Il s'agit de la droite en rouge sur le graphique. Pour x_1 légèrement plus grand que x_0, la valeur de $f(x_1)$ est plus grande que la valeur de $f(x_0)$. Alors, la pente de la tangente est positive.

Dans le graphique de droit, on s'intéresse au comportement de la fonction au point $x_2 = (-1, 1)$, qu'on a placé en noir. Pour x_3 légèrement plus grand que x_2, la valeur de $f(x_3)$ est plus basse que la valeur de $f(x_2)$. Alors, la pente de la tangente est négative.

La pente de la tangente est appelée la dérivée, qu'on défini maintenant.

Définition 2.1.1 : La dérivée

La dérivée d'une fonction $f(x)$ par rapport à la variable x est la fonction f' font la valeur à x est

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

à condition que cette limite existe. Une formule équivalante pour cette limite est

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Exemple 2.1.1 : Évaluer la dérivée de $(x-5)^2$ au point $x = 6$ en utilisant la définition de la dérivée.

Exemple 2.1.2 : Utiliser la formule équivalante pour évaluer $\frac{d}{dx}\left(2x^2 - x + 3\right)$.

Les notations suivantes sont équivalantes :

— $f'(x)$ — f' — $\frac{df}{dx}$

2.1.1 | Dérivée d'un côté

Définition 2.1.2 : La dérivée de gauche et de droite

La dérivée d'une fonction de la gauche de $f(x)$ par rapport à la variable x est la fonction f'_- dont la valeur à x est

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

à condition que cette limite existe.

La dérivée d'une fonction de la droite de $f(x)$ par rapport à la variable x est la fonction f'_+ dont la valeur à x est

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

à condition que cette limite existe.

Une conséquence du théorème 1.2.1 est que la dérivée existe si sa dérivée de gauche et de droite sont égales.

Exemple 2.1.3 : Est-ce que la fonction $f(x) = |x|$ est différentiable à 0 ?

On peut aussi utiliser la définition de la dérivée pour évaluer des limites.

Exemple 2.1.4 : Évaluez la limite $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$ si $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$.

2.2 | Règles de différentiation

Vu que ce cours est un rappel des concepts de dérivés, on ne prouve pas chaque règle de dérivé, mais on se concentre sur les techniques d'intégration. Cette section présente des règles et des formules de dérivés. Les preuves pour ces résultats sont dans le livre de référence.

Tableau 2.1 : Règles de dérivées de base

Soit c une constante réelle et soit u et v, des fonctions dérivables en x.

1. $\dfrac{d}{dx}cu = c\dfrac{du}{dx} = cu'$
2. $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx} = u' + v'$
3. $\dfrac{d}{dx}uv = \dfrac{du}{dx}v + u\dfrac{dv}{dx} = u'v + uv'$
4. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{u}{v} = \dfrac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Tableau 2.2 : Formules de dérivées de base

Soit c et n, des constantes réelles et a, une constante positive.

1. $\dfrac{d}{dx}c = 0$
2. $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
3. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
4. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$
5. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{a}{x \ln a}$ 1/(x lna)
7. $\dfrac{d}{dx}|x| = \dfrac{x}{|x|}$
8. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$
9. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
10. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
11. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
12. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
13. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$
14. $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$
15. $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$
16. $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
17. $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
18. $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$
19. $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$

2.3 | La tangente

La dérivée nous donne seulement de l'information sur la pente de la tantente à un point. On désire parfois trouver l'équation de la droite de la tangente.

Exemple 2.3.1 : Trouver la tangente de la fonction $f(x) = x^2$ à $x = 0.5$.

2.4 | La dérivée en chaine

À la sous-section 1.1.3, on a construit des nouvelles fonctions à partir de fonctions de base. Lorsque cette fonction est construite par une ou des compositions, on peut la dériver avec le théorème suivant :

Théorème 2.4.1 : La dérivée en chaine

Si $f(u)$ est différentiable au point $u = g(x)$ et $g(x)$ est différentiable à x, alors la fonction composée $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ est différentiable à x, et

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x).$$

La notation équivalante de Leibnitz est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

où $u = g(x)$ et $y = f(u)$.

Exemple 2.4.1 : Dériver la fonction $f(x) = e^{x^2}$.

Exemple 2.4.2 : Dériver la fonction $h(x) = \cos\left(\ln x + e^{\sin(x^3)}\right)$.

Parfois, il est difficile de se rappeler de la règle du quotient pour la dérivé. La dérivée en chaîne nous permet de retrouver rapidement le résultat.

$$\frac{d}{dx}\frac{u}{v}$$

Soit $w = \frac{1}{v}$. Avec la dérivée en chaine, on déduit $w' = \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$. Finalement, avec la règle du produit, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{v}\right)' &= (uw)' \\ &= u'w - uw' \\ &= -\frac{u}{v^2}v' + \frac{1}{v}u' \\ &= \frac{u'v - vu'}{v^2}. \end{aligned}$$

On devrait lire
u'v - uv'

2.5 | Différentiation implicite

La technique de différentiation implicite nous permet de résoudre plusieures types de dérivés.

Démarche pour la différentiation implicite.

1. Différentier les deux côtés par rapport à x, en traîtant y comme fonction différentiable de x (se rappeler de la dérivée en chaîne).
2. Collecter les termes avec $\frac{dy}{dx}$ dans un côté et résoudre pour $\frac{dy}{dx}$.

Exemple 2.5.1 : Trouver la dérivée de la fonction logarithmique avec la différentiation implicite.

Exemple 2.5.2 : Dériver $y = \cos^{-1}(x)$ avec la différentiation implicite.

On a

$$\begin{aligned} y &= \cos^{-1}(x) \\ \cos(y) &= x \\ -\sin y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sin y}. \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise l'identité

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

pour remplacer

$$\sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y}.$$

De plus, puisque $Ima(y) = [0, \pi]$, on a $\sin y \geq 0$, alors on considère seulement la racine positive. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sin y} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Exemple 2.5.3 : Trouver une formule pour la dérivée d'une fonction inverse.

Soit une fonction f et son inverse f^{-1}. On cherche

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x).$$

Si la fonction f est une à une, on a

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= x \\ \frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) &= \frac{d}{dx} x \\ f'(f^{-1}(x)) \frac{d}{dx} f^{-1}(x) &= 1 \\ \frac{d}{dx} f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \end{aligned}$$

La dérivée existe si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

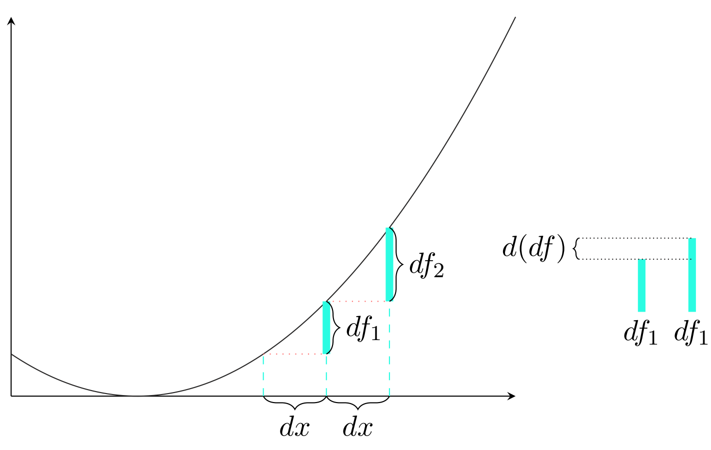
Grâce aux propriétés des fonctions logarithmiques, on peut plus facilement gérer les produits, les quotients et les puissances en appliquant le logarithme naturel des deux côtés de l'équation avant de dériver. Cette technique s'appelle la différentiation logarithmique, qui se base sur la différentiation implicite. On procède avec un exemple.

Exemple 2.5.4 : Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}, x > 1$

2.6 | Dérivés d'ordre supérieur

La dérivée nous donne de l'information importante sur le comportement d'une fonction, la pente de la tangente. Ensuite, dériver la dérivée une fois de plus nous donne encore plus d'information sur la fonction, dont pour approximer la fonction à l'aide du développement de Taylor.

Lorsqu'on traite la dérivée comme une fonction (elle n'est pas évaluée à un point en particulier), on peut dériver cette fonction à nouveau. Le résultat s'appelle la dérivée seconde, car on dérive la fonction deux fois.



La dérivée seconde est simplement la dérivée de la dérivée d'une fonction, i.e.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right).$$

On utilise la notation

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = f''(x) = f^{(2)} = D^2 f.$$

Note : le dénominateur de

$$\frac{d^2 f}{dx^2}$$

est $(dx)^2$: ce n'est pas seulement x^2. La notation peut porter à confusion.

Exemple 2.6.1 : Trouver les deux premières dérivés de xe^{x^2}.

La notation pour la $n^{\text{ième}}$ dérivée est $f^{(n)}$, $\frac{d^n f}{dx^n}$ ou $D^n f$.

Exemple 2.6.2 : Trouver $f^{(n)}(x)$ par induction pour $n > 0$ si $f(x) = \dfrac{x+7}{2-x}$.

Premièrement, on applique la règle du quotient pour obtenir

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \frac{\frac{d}{dx}(x+7) \times (2-x) - (x+7) \times \frac{d}{dx}(2-x)}{(2-x)^2} \\ &= \frac{2-x+(x+7)}{(2-x)^2} \\ &= \frac{9}{(2-x)^2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= \frac{d}{dx}\frac{9}{(2-x)^2} \\ &= \frac{9 \times (-2)}{(2-x)^3}(-1) \\ &= \frac{9 \times 2}{(2-x)^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= \frac{d}{dx}\frac{9\times 2}{(2-x)^3} \\ &= \frac{9\times 2\times(-3)}{(2-x)^4}(-1) \\ &= \frac{9\times 2\times 3}{(2-x)^4}. \end{aligned}$$

On remarque le patron (notre affirmation)

$$f^{(n)}(x) = \frac{9\times n!}{(2-x)^{n+1}}.$$

On prouve par induction. Pour $n=1$ (l'initiation), on a

$$f^{(1)}(x) = \frac{9\times 1!}{(2-x)^{1+1}} = \frac{9}{(2-x)^2},$$

ce qui correspond à ce qu'on a montré en (2.5). Pour le cas n (l'hérédité), on a

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(n)}(x) \\ &= \frac{d}{dx}\frac{9\times n!}{(2-x)^{n+1}} \\ &= \frac{9\times n!\times(-(n+1))}{(2-x)^{n+2}}(-1) \\ &= \frac{9\times n!\times(n+1)}{(2-x)^{n+1+1}} \\ &= \frac{9\times(n+1)!}{(2-x)^{(n+1)+1}}. \end{aligned}$$

Alors, l'affirmation est prouvée.

2.7 | Applications de dérivés

2.7.1 | Théorème des accroissements finis

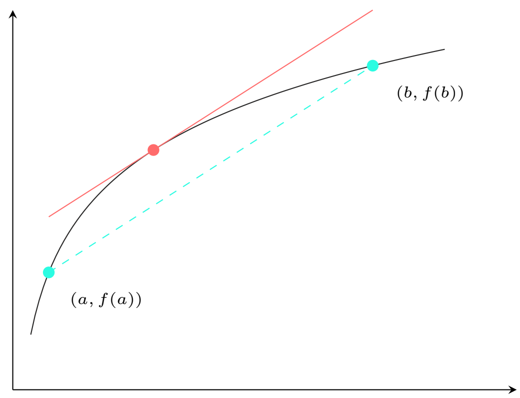
Théorème 2.7.1 : Théorème des accroissements finis

Si $f(x)$ est continu dans un interval fermé $[a,b]$ et différentiable sur l'interval ouvert (a,b), alors il existe au moins un point $c\in(a,b)$ où

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

De plus,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

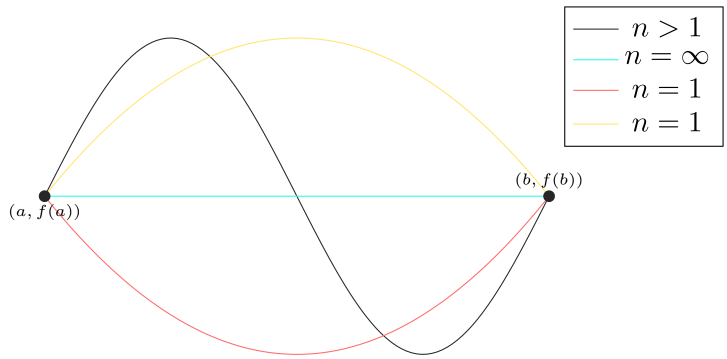


Exemple 2.7.1 : Vérifier le théorème des accroissements finis pour

$$\boldsymbol{3x^2 - x + 2, \quad a = 1, \quad b = 3.}$$

Théorème 2.7.2 : Théorème de Rolle

Si $f(x)$ est continu dans un interval fermé $[a, b]$ et différentiable sur l'interval ouvert (a, b).
Si $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un numéro $c \in (a, b)$ où $f'(c) = 0$.



Corrolaire 2.7.3

Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert (a, b) :

— Si $f'(x) > 0 \,\forall\, x \in (a, b)$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$;

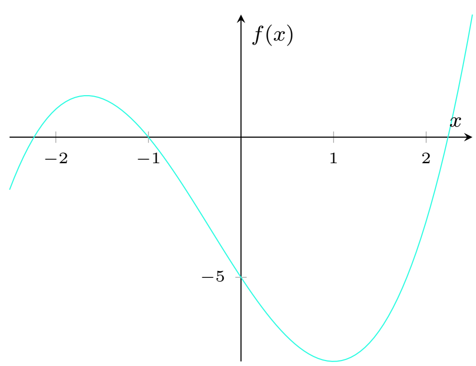
— Si $f'(x) < 0 \,\forall\, x \in (a, b)$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$;

— Si $f'(x) \geq 0 \,\forall\, x \in (a, b)$, alors f est non-décroissante sur $[a, b]$;

— Si $f'(x) \leq 0 \,\forall\, x \in (a, b)$, alors f est non-croissante sur $[a, b]$;

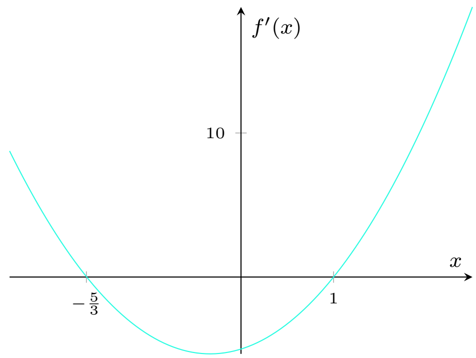
Exemple 2.7.2 : Soit $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$. Identifier où la fonction est strictement croissante et stictement décroissante.

On remarque que le graphique commence croissante, ensuite décroissante et finalement croissante.



Les points de transition sont les points où la fonction est à la fois non coissante et non décroissante, c.-à-d. où $f'(x) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= 0 \\ \frac{d}{dx}\left(x^3 + x^2 - 5x - 5\right) &= 0 \\ 3x^2 + 2x - 5 &= 0 \\ (3x + 5)(x - 1) &= 0. \end{aligned}$$



Alors, les points de transitions sont à $x_1 = \frac{-5}{3}$ et $x_2 = 1$.

On conclut que la fonction est strictement croissante pour $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$ et strictement décroissante pour $\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$.

2.7.2 | Extrêmes locaux et globaux

Définition 2.7.4 : Maximum et minimum absolu

Une fonction f admet un maximum absolu s'il existe c tel que $f(c) \geq f(x) \; \forall \, x \in Dom(f)$. Le numéro $f(c)$ est le maximum de f sur $Dom(f)$.

Une fonction f admet un minimum absolu s'il existe c tel que $f(c) \leq f(x) \; \forall \, x \in Dom(f)$. Le numéro $f(c)$ est le minimum de f sur $Dom(f)$.

Définition 2.7.5 : Maximum et minimum local

Une fonction f admet un maximum local s'il existe c tel que $f(c) \geq f(x)$ pour x dans un intervalle ouvert contenant c.

Une fonction f admet un minimum local s'il existe c tel que $f(c) \leq f(x)$ pour x dans un intervalle ouvert contenant c.

Théorème 2.7.6 : Le théorème de valeurs extrêmes

Si f est continu sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors f atteint un maximul absolu M et un minimum absolu m dans $[a, b]$.

Le théorème précédent veut dire qu'il existe des valeurs x_1 et x_2 dans $[a, b]$ où $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$ et $m \leq f(x) \leq M$ pour tout autre x dans $[a, b]$.

Définition 2.7.7 : Point critique

Un point c dans $Dom(f)$ est un point critique si $f'(c)$ est zéro ou indéfini.

Alors, lorsqu'une fonction n'est pas continue, les points de discontinuité sont aussi des points critiques.

Théorème 2.7.8 : Test de dérivé pour extrême local

Si f a un maximum ou minimum local à $c \in Dom(f)$, et c est défini à c, alors $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas.

Lorsqu'on cherche des extrêmes, on doit vérifier les points suivants :

— points critiques ;

— bornes d'intervalles.

Exemple 2.7.3 : Trouver les valeurs extrêmes de la fonction $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3 - x^4}}$.

2.7.3 | Règle de l'Hôpital

Théorème 2.7.9 : La règle de l'Hôpital

Supposons que $f(a) = g(a) = 0$, que f et g sont différentiables sur l'intervale ouverte I contenant a, et que $g'(x) \neq 0$ sur I si $x \neq a$. Alors,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

en assumant que cette limite existe.

Exemple 2.7.4 : Évaluer $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{7n+1}{7n-1} \right)^n$.

Exemple 2.7.5 : Montrer que pour $x > 0$, on a $2 \ln x + 1 \leq x^2$.

2.7.4 | Développement de Taylor

Définition 2.7.10 : Série de Taylor

Soit une fonction f qui admet des dérivées de tous ordres en $x = a$. La série de Taylor de f qui converge vers $f(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots, \end{aligned}$$

pour les valeurs où la série est convergente (sur un intervalle de rayon r : $x \in (a-r, a+r)$).

Définition 2.7.11 : Série de Maclaurin

Soit une fonction f qui admet des dérivées de tous ordres en $x = 0$. La série de Maclaurin de f qui converge vers $f(x)$ est donnée par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k,$$

pour les valeurs où la série est convergente (sur un intervalle de rayon r : $x \in (-r, r)$).

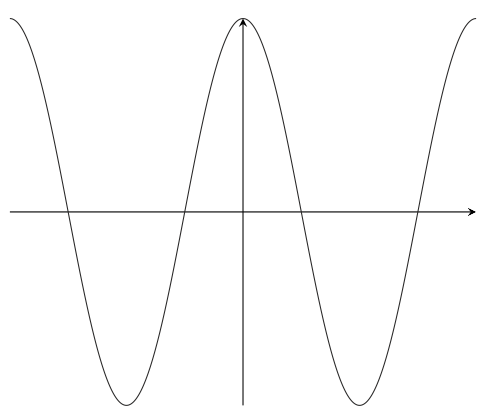
Exemple 2.7.6 : Trouver la série de Maclaurin pour $f(x) = e^x$.

Définition 2.7.12 : Polynôme de Taylor

Soit une fonction f qui admet des dérivées d'ordres $1, \ldots, N$ en $x = 0$. Le polynôme de Taylor de f de degré $n, n = 0, 1, \ldots, N$ qui approxime $f(x)$ est donnée par

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Plus on ajoute de termes dans le polynôme de Taylor, plus l'approximation de la fonction est appropriée. Soit la fonction $f(x) = \cos(x)$:

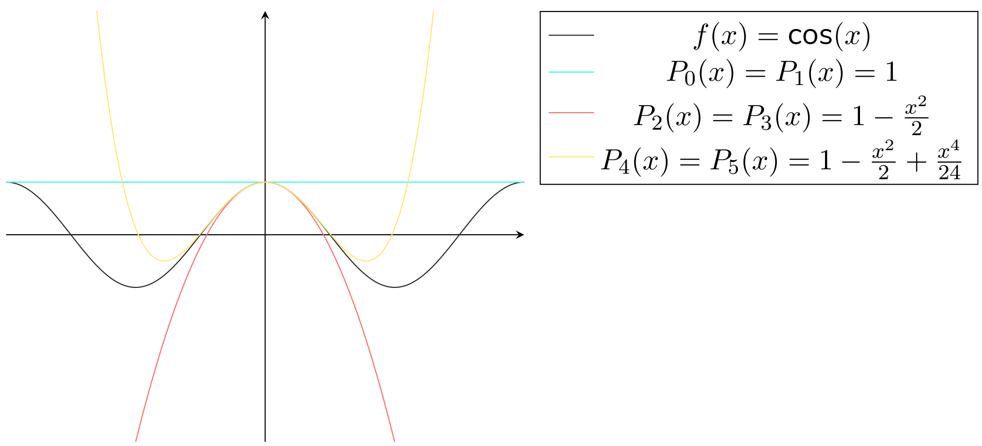


Parfois, manipuler des fonctions trigonométriques est compliqué et on désire travailler avec des fonctions polynomiales. On peut donc approximer la fonction $\cos x$ pour x près de 0 par

$$P_0(x) = \frac{\cos(0) \times x^0}{0!} = \cos 0 = 1.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= 1 + \frac{-\sin(0) \times x}{1!} = 1 - \sin(0) = 1;\\
P_2(x) &= 1 + \frac{-\cos(0) \times x^2}{2!} = 1 - \cos(0) \times \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2};\\
P_3(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{-\sin(0) \times x^3}{3!} = 1 - \frac{x^2}{2} - \sin(0) \times \frac{x^3}{6} = 1 - \frac{x^2}{2};\\
P_4(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos(0) \times x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \cos(0) \times \frac{x^4}{24} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24};\\
P_5(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{-\sin(0) \times x^5}{5!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \sin(0) \times \frac{x^5}{25} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.
\end{aligned}$$



Un peu plus d'intuition sur la formule

Le polynôme de Taylor de degré n est une tentative d'approximer une fonction par une fonction polynomiale de type

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

Pour le degré 0, on a

$$P_0(x) = a_0.$$

Vu que x est autour de a, on devrait avoir $f(a)$. Alors, le polynôme de Taylor de degré 0 est $P_0(x) = f(a)$.

Dans le polynôme de degré 1, la première dérivée du polynôme à a devrait être égale à la première dérivée de la fonction à a. Alors,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a} &= \frac{d}{dx}P_1(x)\\ &= \frac{d}{dx}a_0 + a_1(x-a)\\ &= a_1.\end{aligned}$$

Alors, le polynôme de Taylor de degré 1 est $P_0(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Dans le polynôme de degré 2, la deuxième dérivée du polynôme à a devrait être égale à la deuxième dérivée de la fonction à a. Alors,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right|_{x=a} &= \frac{d^2}{dx^2}P_2(x)\\ \left.\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right|_{x=a} &= \frac{d^2}{dx^2}a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2\\ \left.\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right|_{x=a} &= \frac{d}{dx}a_1 + 2a_2(x-a)\\ \left.\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right|_{x=a} &= 2a_2\\ \frac{\left.\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right|_{x=a}}{2} &= a_2\end{aligned}$$

et le polynôme de Taylor de degré 2 est $P_0(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$.

Dans le polynôme de degré 3, la troisième dérivée du polynôme à a devrait être égale à la troisième dérivée de la fonction à a. Alors,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^3}{dx^3}f(x)\right|_{x=a} &= \frac{d^3}{dx^3}P_3(x)\\ \left.\frac{d^3}{dx^3}f(x)\right|_{x=a} &= \frac{d^3}{dx^3}a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3\\ \left.\frac{d^3}{dx^3}f(x)\right|_{x=a} &= \frac{d^2}{dx^2}a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2\\ \left.\frac{d^3}{dx^3}f(x)\right|_{x=a} &= \frac{d}{dx}2a_2 + 3\times 2a_3(x-a)\\ \left.\frac{d^3}{dx^3}f(x)\right|_{x=a} &= 3\times 2a_3\\ \frac{\left.\frac{d^3}{dx^3}f(x)\right|_{x=a}}{3\times 2} &= a_3\end{aligned}$$

et le polynôme de Taylor de degré 3 est $P_0(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$.

On remarque trois choses pour un polynôme de Taylor de degré n :

— le polynôme de Taylor de degré n est le polynôme de Taylor de degré $n-1$, plus de l'information sur la $n^{\text{ième}}$ dérivée ;

— la valeur de a_n ne dépend que de l'information sur la $n^{\text{ième}}$ dérivée : en dérivant le polynôme n fois, tous les termes d'ordre inférieurs à n sont égals à 0 ;

— à chanque application de la règle de puissance, le terme a_n est multiplié par la puissance. Après n applications de la règle de puissance, le terme a_n est multiplié par $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$.

Exemple 2.7.7 : Approximer $\sin(\pi + 0.01)$ à l'aide du polynôme de Taylor de degré 4.

2.7.5 | Primitives

Définition 2.7.13 : Primitives

Une fonction F est une primitive de f sur un intervale I si $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans I.

Exemple 2.7.8 : Trouver la primitive de $f(x) = 2x$

Dans l'exemple précédent, une autre solution pour $\frac{d}{dx}F(x) = 2x$ est $F(x) = x^2 + 1$, car

$$\frac{d}{dx}F(x) = 2x.$$

Ainsi, l'addition d'une constante arbitraire à une primitive est aussi une primitive de f.

Théorème 2.7.14 : La primitive générale

Si F est une primitive de f sur un intervale ouvert I, alors, la primitive la plus générale de f sur I est

$$F(x) + C$$

où C est une constante arbritraite.

Définition 2.7.15 : Intégrale indéfinie

La collection de toutes les primitives de f est appelée l'intégrale indéfinie de f par rapport à x, et est notée par

$$\int f(x)dx.$$

Le symbole $\int$ est un signe d'intégrale (un grand S). La fonction f est la fonction à intégrer, et x est la variable d'intégration.