ACT-2001 : Introduction à l'actuariat II

Radu Mitric

E-mail : ilie-radu.mitric@act.ulaval.ca

Hiver 2021
cours : mercredi 13h30-15h20 et jeudi 9h30-10h20, en ligne, sur Zoom
ateliers : mercredi 15h30-16h20 et jeudi 10h30-11h20, en ligne (Alec Van Rassel)

Sujets abordés

- Notions supplémentaires sur la théorie des probabilités
- Mesures de risque, notamment mesures de risque de type VaR
- Méthodes de simulation stochastique
- Modélisation des risques individuels en assurance IARD
- Mutualisation des risques
- Principes de calcul de la prime majorée
- Applications en assurance de personnes et IARD

Évaluation

- Examen I, en présentiel, 45% : mercredi - le 10 mars, de 13h30 à 16h20.
- Examen II, en présentiel, 45% : mercredi - le 28 avril, de 13h30 à 16h20.
- Deux travaux pratiques (7.5% chacun) : 26 février et 23 avril.

- Calculatrices : consulter le portail du cours.

Chapitre I : Notions supplémentaires sur la théorie des probabilités

- Soit une variable aléatoire (v.a.) X. Sa fonction de répartition est

$$F(x) = F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

- Une fonction de répartition possède les propriétés suivantes :
  - $0 \leq F(x) \leq 1$ pour chaque x.
  - $F(x)$ est non-décroissante.
  - $F(x)$ est continue à droite, i.e., $\lim\limits_{x \to a+} = F(a)$.
  - $F(-\infty) = 0$ et d $F(\infty) = 1$.
- Sa fonction de survie est $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}[X > x]$

Variable aléatoire discrète

- X est discrète si elle prend un nombre fini ou dénombrable des valeurs dans un ensemble de nombre réels $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$
  - On définie sa fonction de masse

$$p_X(x) = \mathbb{P}[X = x],$$

    qui satisfait

$$0 \leq p_X(x) \leq 1, \quad \sum_{x \in A} p_X(x) = 1.$$

- Sa fonction de répartition $F_X(x)$ est une fonction en escalier.
-

$$E[X] = \sum x_i \mathbb{P}[X = x_i] = \sum x_i p_X(x_i)$$

$$E[g(X)] = \sum g(x_i) \mathbb{P}[X = x_i] = \sum g(x_i) p_X(x_i)$$

Variable aléatoire continue

- Une v.a. X est continue si sa fonction de répartition est continue (et différentiable sauf un nombre fini ou dénombrable des points).
- Sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Alors,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- La fonction de densité satisfait :
  - $f(x) \geq 0, \forall x$
  - $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Remarques

- $$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x) dx.$$
- $f(x) \neq \mathbb{P}[X = x]$;
- for très petit ε,

$$\mathbb{P}[a - \frac{\varepsilon}{2} \leq X \leq a + \frac{\varepsilon}{2}] = \int_{a-\frac{\varepsilon}{2}}^{a+\frac{\varepsilon}{2}} f(t) dt \approx \varepsilon f(a).$$

  - ... ou $f(x)dx \approx \mathbb{P}[x < X \leq x + dx]$

Exemple 1.1

(à faire en classe)

Variable aléatoire mixte

- est une combinaison d'une v.a. continue et une v.a. discrète.
- est une variable aléatoire continue avec quelques points de masse.

  Remarque 1.1

  Si h est une fonction et X est une v.a. (continue, discrète ou mixte) avec fonction de répartition F_X, alors

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dF_X(x).$$

  en utilisant l'intégrale de Stiltjes (Riemann-Stiltjes)

L'intégrale de Stiltjes (Riemann-Stiltjes)

Définition 1.2

Soit une fonction g réelle bornée, dérivable sur la suite d'intervalles $(D_i)_{i \leq k}$ et discontinue aux points $(x_j)_{j \leq k}$. Soit f une fonction réelle. On définit «l'intégrale de Stiltjes » de f par rapport à g, sur l'ensemble $\mathcal{A} = \cup D_i \cup \{x_1, x_2, \ldots x_m\}$, notée

$$\int_{\mathcal{A}} f(x) dg(x) = \sum_{j=1}^{k} \int_{D_j} f(x) g'(x) dx + \sum_{i=1}^{m} f(x_i)[g(x_i) - g(x_i^-)].$$

- L'intégrale de Stiltjes est une généralisation de l'intégrale de Riemann.
- L'intégrale de Stiltjes n'existe pas si f et g possèdent un point de discontinuité commun.

Propriétés :

- Si la fonction g et continue et différentiable sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

- On a

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x),$$

  et l'existence d'une intégrale implique l'existence de l'autre.
- Si h est une fonction et X est une v.a. (continue, discrète ou mixte) avec fonction de répartition F_X, alors

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dF_X(x).$$

Exemple 1.2

(à faire en classe)

L'espérance ; la variance

- L'espérance d'une variable aléatoire est linéaire : $\mathbb{E}[ag(X)+bh(X)] = a\mathbb{E}[g(X)] + b\mathbb{E}[h(X)]$
- Variance : $V[X] = \mathbb{E}[(X-\mu_X)^2]$.
- Conséquence : $V[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ et
- $V[aX+b] = a^2V[X]$.

L'espérance d'une v.a. non-négative

- Si X est non-négative, continue et sa espérance existe, on a

$$E[X] = \int_{0}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

et aussi

$$E[X] = \int_{0}^{+\infty} \bar{F}_X(x)dx$$

L'espérance d'une v.a. non-négative

- Si X est non-négative, discrète (sur A=$\{0, 1, 2, \ldots\}$) et sa espérance existe, on a

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} j \, p_X(j)$$

et aussi

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_X(k)$$

Moment d'ordre n ; fonctions génératrices

- Le moment d'ordre n de la v.a. X est définie comme $E[X^n]$
- Le moment centré d'ordre n de la v.a. X est définie comme $E[(X-\mu_X)^n]$
- La fonction génératrice des moments (f.g.m.) de X est définie comme
$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$
- et la fonction génératrice des probabilités (f.g.p.) de X est définie comme
$$P_X(t) = E[t^X],$$
pour tout t où l'espérance existe.
- D'habitude (mais pas toujours ! !), la f.g.m. est utilisée pour des v.a. continues et la f.g.p. est utilisée pour des v.a. discrètes.
- Pour certains v.a., le moment d'ordre n ou f.g.m. ou f.g.p. n'existent pas.

Propriétés

- Lien entre f.g.m et f.g.p.

$$M_X(t) = P_X(e^t) \quad \text{et} \quad P_X(t) = M_X(\ln t)$$

- Sachant la f.g.m. ou la f.g.p., on peut trouver les moments d'ordre n :

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)_{|t=0}$$

et

$$P'_X(1) = \mathbb{E}[X],\ P''_X(1) = \mathbb{E}[X(X-1)], P'''_X(1) = \mathbb{E}[X(X-1)(X-2)], \ldots$$

Exemple 1.3

(à faire en classe)

Fonction quantile

Définition 1.3

Soit un risque X et un niveau de probabilité $p \in (0,1)$. Alors nous définissons la fonction inverse F_X^{-1} de F_X par

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(p) &= \inf\{x \in R | F_X(x) \geq p\} \\ &= \sup\{x \in R | F_X(x) < p\} \end{aligned}$$

Illustration (à faire en classe) :