ACT-2011
Hiver 2021

Chapitre 19

Évaluation Monte Carlo

Thomas Landry, M.Sc., ASA, AICA
École d'actuariat, Université Laval

Préface

Une partie de ces notes de cours est reprise ou inspirée de celles de l'ancienne version du cours montée par Claire Bilodeau, et la propriété intellectuelle de ce document est donc grandement partagée avec elle.

La méthode Monte Carlo est une méthode de simulation qui servira notamment à l'évaluation de produits qui ne peuvent être évalués avec des modèles « classiques » comme l'arbre binomial ou encore le modèle de Black-Scholes.

En effet, jusqu'à présent, les options étaient évaluées avec les modèles de l'arbre binomial et de Black-Scholes, mais ces modèles ne sont pas adéquats pour évaluer certains produits dérivés plus complexes dont la valeur à l'échéance dépend du chemin suivi par le sous-jacent avant l'échéance, par exemple (ce qui est le cas pour certaines options exotiques). Il sera ainsi nécessaire de simuler des chemins de prix du sous-jacent avec la méthode Monte Carlo pour calculer la valeur présente espérée de la valeur à l'échéance de l'option.

La simulation se fera dans un environnement neutre au risque, comme c'était le cas avec l'arbre binomial et la formule de Black-Scholes. La méthode de Monte Carlo permettra d'obtenir une approximation de la distribution de la valeur à l'échéance en plus du prix de l'option, ce qui permettra notamment de comparer diverses stratégies entre elles ainsi que les risques liés à ces stratégies.

On s'intéressera aux avantages de l'évaluation neutre au risque, à la génération de nombres aléatoires et à l'efficience de la méthode Monte Carlo.

Lecture complémentaire : chapitre 19 DM

19.1. La valeur actualisée espérée et le prix de l'option

Dans un environnement neutre au risque, le sous-jacent aura comme rendement moyen le taux sans risque dans le modèle, comme c'était le cas avec les modèles vus dans les chapitres précédents. Le prix d'un titre sera donné par :

$$V[S(0),0] = e^{-rT} \underbrace{E_0^*\big[V[S(T),T]\big]}_{\substack{\text{Neutre au risque et} \\ \text{calculé à t = 0}}}$$

$E_0^*\big[V[S(T),T]\big]$ sera évalué en prenant la moyenne des valeurs à l'échéance simulées dans la simulation.

19.1.1. Évaluation avec probabilités neutres au risque

La méthode de Monte Carlo dépend théoriquement de l'évaluation neutre au risque, comme c'était le cas avec le modèle de l'arbre binomial, par exemple.

Pour une option d'achat européenne, avec la méthode de l'arbre binomial, on avait :

$$C = e^{-rT} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (p^*)^{n-i}(1-p^*)^i \, max\big(0, Su^{n-i}d^i - K\big)$$

À chaque valeur à l'échéance $max\big(0, Su^{n-1}d^i - K\big)$ est associée une probabilité $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (p^*)^{n-i}(1-p^*)^i$. Il est possible de simuler la distribution de ces diverses valeurs à l'échéance.

Rappel : les probabilités du modèle de l'arbre binomial sont constantes dans l'environnement neutre au risque jusqu'à l'échéance et la valeur à l'échéance est relativement simple à calculer. Dans certains cas, ce n'est pas le cas, d'où l'intérêt de la simulation.

19.1.2. Évaluation avec des vraies probabilités

Avec des vraies probabilités, les valeurs à l'échéance restent inchangées, mais les probabilités y étant associées seront modifiées. Le taux d'actualisation sera différent également, tel que vu dans le chapitre 11, pour inclure une mesure de risque…

Ce qui complexifie le calcul est que le niveau de risque change d'embranchement en embranchement dans le modèle binomial du chapitre 11 avec des vraies mesures de risque. Avec la méthode Monte Carlo, ceci reviendrait également à réévaluer le nouveau taux d'actualisation en fonction des simulations qui se matérialisent de période en période, ce qui peut s'avérer fort compliqué. C'est pourquoi on gardera la méthode d'évaluation neutre au risque (en 19.1.1).

19.2. Génération de nombres aléatoires

On s'intéresse à la simulation d'une variable aléatoire qui suit une loi uniforme avec :

$$U \sim Uniforme(a,b) et\ f_X(x) = \frac{x}{a-b}\ , a \leq x \leq b$$

Par défaut, sauf si mention contraire, on présumera que a = 0 et b = 1 et on se servira du résultat de la simulation d'une loi uniforme avec l'inverse de la fonction de répartition (réciproque de la fonction de répartition) pour trouver la réalisation correspondante avec la loi de probabilité recherchée.

Dans le cas présent, on aura comme variable aléatoire $Z \sim N(0,1)$ et ainsi :

$$U \sim Uniforme(0,1)$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$F_U(w) = Pr[U \leq w] = w$$

$$N(y) = Pr[Z \leq y] = w \Leftrightarrow N^{-1}(w) = y$$

La simulation de l'une ou l'autre de ces variables peut se faire avec différents programmes informatiques. En Excel, la fonction ALEA() permet de simuler une loi uniforme entre 0 et 1 alors que la fonction LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE() permet de simuler une loi normale centrée réduite sans passer par l'entremise de la simulation d'une loi uniforme.

Remarque : peu importe la loi de probabilité choisie (loi normale ou autre), la fonction de répartition est réputée suivre une loi uniforme(0,1). En effet :

$$F_U(w) = Pr[U \leq w] = w$$

$$F_X(x) = Pr[X \leq x] = w \Leftrightarrow {F_X}^{-1}(w) = x$$

19.3. Simulation de prix d'action lognormaux

Le prix d'une action suivant une loi lognormale est donné par :

$$S_T = S_0 e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\,Z}$$

Avec encore $Z \sim N(0,1)$. En choisissant les paramètres, en posant T = 2 à titre d'illustration et en générant un grand nombre de valeurs aléatoires de Z, on obtiendra autant de résultats pour S_2.

Si on s'intéresse également aux résultats intermédiaires, on pourra simuler les prix annuels. Ceci est d'intérêt dans plusieurs situations, notamment en assurance ou pour un régime de retraite, puisque des entrées et sorties de fond dans les actifs financiers nous obligent à réévaluer la valeur de ces actifs à intervalles réguliers.

Par exemple, encore avec T = 2 et en regardant les rendements et/ou les prix annuels :

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = S_0 e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\sigma Z_1} \\ S_2 = S_1 e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\sigma Z_2} \end{array}\right\} S_2 = S_0 e^{2\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\sigma \underbrace{(Z_1+Z_2)}_{N(0,2)}}$$

$$\Rightarrow S_2' = S_0 e^{2\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\sigma\sqrt{2}\,Z_2'}$$

Z_1 et Z_2 sont deux nombres aléatoires issus de la même loi de probabilité (loi normale centrée réduite) avec :

$$E[Z_1+Z_2] = \underbrace{E[Z_1]}_{0} + \underbrace{E[Z_2]}_{0} = 0$$

$$Var[Z_1+Z_2] = \underbrace{Var[Z_1]}_{1} + \underbrace{Var[Z_2]}_{1} + 2\underbrace{cov(Z_1,Z_2)}_{0 \text{ car } \perp}$$

$$\sigma_{Z_1+Z_2} = \sqrt{2}$$

Pour un cas standard, les S_2 générés devraient avoir la même distribution.

Pour un cas plus général avec n périodes de longueur h avec nh = T, on aura :

$$S_h = S_0 e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)h+\sigma\sqrt{h}\,Z_1}$$

$$S_{2h} = S_h e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)h+\sigma\sqrt{h}\,Z_2}$$

$$\vdots$$

$$S_{nh} = S_T = S_{(n-1)h} e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)h+\sigma\sqrt{h}\,Z_n} = S_0 e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\overbrace{\sigma\sqrt{h}\,\sum_{i=1}^{n} Z_i}^{\sigma\sqrt{T}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{\sqrt{n}}\right)}}$$

19.4. Évaluation par la méthode Monte Carlo

Soit $V(S_T, T)$ la valeur à l'échéance d'une option qui dépend de l'action dont le prix est donné par S_T. Selon la méthode Monte Carlo, le prix de l'option sera :

$$V(S_0, 0) = \frac{e^{-rT}\sum_{i=1}^{n} V\left(S_T^i, T\right)}{n}$$

Avec S_T^i est le prix de l'action pour le $i^{\text{ème}}$ scénario généré aléatoirement.

19.4.1. Évaluation d'une option d'achat européenne

On présume que $\alpha = r$ et on compare le résultat obtenu par simulation avec celui de la formule de Black-Scholes qu'on présume exact. On simule N valeurs de S_T avec N nombres aléatoires Z. La valeur à l'échéance de l'option, selon la $i^{\text{ème}}$ simulation sera :

$$max\left(0, S_T^i - K\right) = max\left(0, S_0 e^{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\,Z_i} - K\right)$$

La valeur espérée à l'échéance est la moyenne de ces N valeurs simulées :

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} max\left(0, S_T^i - K\right)}{N}$$

… et le prix de l'option approximé sera ainsi :

$$\bar{C} = e^{-rT} \frac{\sum_{i=1}^{N} max\left(0, S_T^i - K\right)}{N}$$

Normalement, plus N est grand, et plus $\bar{C}$ convergera vers C obtenu avec la formule de Black-Scholes.

19.4.2. Précision sur la méthode Monte Carlo

Nous n'avons pas besoin de la méthode Monte Carlo pour évaluer une option d'achat européenne puisque la formule de Black-Scholes nous fournit déjà ce résultat. Il est cependant intéressant de voir la distribution des valeurs à l'échéance potentielles avec cette option avec la méthode Monte Carlo. On s'intéresse également à la précision de la méthode, qui peut se mesurer avec l'écart-type de l'approximation.

Soit $C\left(\tilde{S}_i\right)$ le prix approximé de l'option à partir du prix $\tilde{S}_i$. L'approximation du prix de l'option sera ainsi :

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^{N} C\left(\tilde{S}_i\right)}{N}$$

<u>Remarque</u> : le facteur d'actualisation e^{-rT} fait partie de l'expression $C\left(\tilde{S}_i\right)$

Soit σ_C l'écart-type de C basé sur un scénario simulé. Alors l'écart-type de l'approximation basé sur n simulations sera $\sigma_n = \frac{\sigma_C}{\sqrt{n}}$.

19.4.3. Option asiatique arithmétique

En pratique, l'évaluation par la méthode de Monte Carlo est utile sous les conditions suivantes :

1. Quand le nombre d'alea qui entrent dans le modèle est très grand et ne permet pas une solution analytique
2. Quand les variables dans le modèle ont des distributions complexes (pas toujours de simples lois normales)
3. Quand les options et plus spécifiquement leurs valeurs à l'échéance dépendent du chemin suivi avant l'échéance

L'évaluation par la méthode de Monte Carlo d'une option dépendante au chemin suivi est relativement simple : il suffira de simuler la trajectoire du prix de l'action jusqu'à l'échéance.

Par exemple, pour une option d'achat sur moyenne arithmétique de cours, avec échéance 3 mois et une moyenne qui est prise sur les prix mensuels (en fin de mois) :

$$S_{\frac{1}{12}} = S_0 e^{\frac{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{12} + \sigma\sqrt{\frac{1}{12}}Z_1}$$

$$S_{\frac{2}{12}} = S_{\frac{1}{12}} e^{\frac{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{12} + \sigma\sqrt{\frac{1}{12}}Z_2}$$

$$S_{\frac{3}{12}} = S_{\frac{2}{12}} e^{\frac{\left(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{12} + \sigma\sqrt{\frac{1}{12}}Z_3}$$

$$\bar{C} = e^{-\frac{r}{4}} \frac{\sum_{i=1}^{N} max\left(0, \left(S^i_{\frac{1}{12}} + S^i_{\frac{2}{12}} + S^i_{\frac{3}{12}}\right)/3 - K\right)}{N}$$

19.5. Méthode de Monte Carlo efficiente

La méthode présentée jusqu'à présent est dite la méthode simple (naïve) de Monte Carlo.

D'autres méthodes permettent d'améliorer la précision, et donc de réduire la variance de l'approximation.

Remarque : on peut faire un parallèle avec l'estimateur à variance minimale pour un paramètre quelconque qu'on recherche parfois en statistiques pour un modèle probabiliste donné.

19.5.1. Variable de contrôle

L'idée derrière la variable de contrôle est d'utiliser les résultats de simulations pour le prix d'une option qui peut être déterminé aussi de façon analytique. Dans la mesure où cette option est liée de près au prix d'une autre option ne pouvant être évaluée de façon analytique, l'erreur résultant des simulations pour la 1ère option permet d'ajuster le prix de la 2ème option.

Supposons que nous utilisons les mêmes nombres aléatoires (les Z_i) pour simuler le prix d'une option sur moyenne arithmétique, $\bar{A}$, et le prix d'une option sur moyenne géométrique, $\bar{G}$. Les vrais prix sont respectivement de A et G. On peut calculer l'erreur $G - \bar{G}$ et on s'en servira pour ajuster $\bar{A}$ comme suit :

$$A^* = \bar{A} + \beta(G - \bar{G})$$

Puisque $\bar{G}$ est théoriquement sans biais ($E[\bar{G}] = G$), A^* l'est également et on a que $E[A^*] = E[\bar{A}] = A$. On a également que $Var[A^*] = Var[\bar{A}] + \beta^2 Var[\bar{G}] - 2\beta * Cov(\bar{A}, \bar{G})$

Pour minimiser $Var[A^*]$, on doit poser $\beta = \frac{Cov(\bar{A},\bar{G})}{Var(\bar{G})}$. Avec ce β, $Var[A^*] = Var[\bar{A}](1 - \rho^2)$, avec $\rho = Corr(\bar{A}, \bar{G})$ et β qui représente ainsi la pente de la régression de $\bar{A}$ sur $\bar{G}$.

Remarque : il faut bien choisir β pour améliorer l'efficacité du modèle (et non pas l'inverse…).

19.5.2. Autres méthodes de Monte Carlo

L'idée derrière la méthode de la variable antithétique (opposée, contraire) est que pour chaque simulation, il y a une simulation opposée qui est tout aussi probable et vraisemblable. Ainsi, une série de nombres aléatoires suivant une loi normale est tout aussi probable que la même série avec des signes contraires. Ce faisant, on crée des scénarios de simulations négativement corrélées, ce qui pourrait faire baisser la volatilité de l'approximation, mais ce gain est modeste et peu matériel pour un grand nombre de simulations.

Une autre méthode implique l'échantillonnage stratifié. Au lieu de simuler sur tout l'intervalle, on découpera l'intervalle en sous-intervalles et on simule séparément sur ces sous-intervalles.

Quand la valeur à l'échéance dépend de la valeur de plusieurs variables, on parlera alors d'échantillonnage par « hypercube latin ».

Un raffinement de l'échantillonnage stratifié est l'échantillonnage préférentiel ; la génération de nombres aléatoires se concentre alors dans le sous-intervalle qui est réputé être le plus critique.

Enfin, il est possible de bâtir des suites à faible divergence, qui sont obtenues de façon déterministe pour s'assurer de bien couvrir l'ensemble d'une distribution.