

Chapitre 2

Introduction aux *forwards* et aux options

Thomas Landry, M.Sc., ASA, AICA
École d'actuariat, Université Laval

**La propriété intellectuelle des notes de ce cours est grandement partagée avec Claire Bilodeau, ainsi qu'avec Frédéric Godin et Mathieu Corriveau-La Grenade, qui ont tous dispensé le cours ACT-2011 ou son ancienne mouture, ACT-3108, à un certain moment pas le passé.*

2.1. Contrat *forward* (contrat à terme de gré-à-gré)

2.1.1. Définition et caractéristiques

Un contrat *forward* (qu'on appellera simplement *forward*) est une entente entre deux parties pour l'achat d'un actif quelconque ou d'une quantité d'actif quelconque prédéterminée ayant une **valeur initiale S_0** , à une **date de livraison prédéterminée T** et à un **prix prédéterminé $F_{0,T}$** . L'actif visé par le contrat est l'actif sous-jacent (*underlying asset*), la date T est dite la date d'échéance ou date de livraison (*expiration date*) et outre des frais de transaction potentiels ou encore un *bid-ask spread* entre le cours vendeur et le cours acheteur, **le prix du contrat (*premium*) est de 0.**

En effet, au moment de l'entente (à $t = 0$), **aucun montant d'argent n'est transféré et le coût de l'entente est présumé nul pour les deux partis.** Ceci implique que le prix prédéterminé $F_{0,T}$ (prix *forward*) **se trouve à être la valeur anticipée** (en date d'aujourd'hui, à $t = 0$) **de l'actif sous-jacent S une fois rendu à la date de livraison T .** Sauf si mention contraire, ce prix est réputé être égal à la valeur actuelle du sous-jacent S_0 et accumulé avec le taux sans risque de façon à ce que $S_0 (1 + r_f)^T = F_{0,T}$. La partie mathématique sera davantage étudiée dans un chapitre ultérieur.

On notera S_T **comme étant la valeur de l'actif sous-jacent une fois rendu à la date de livraison.** Ainsi, les implications de ce contrat vont comme suit en termes de transactions :

Acheteur (position longue)

Vendeur (position courte)

$t = 0$

$t = T$

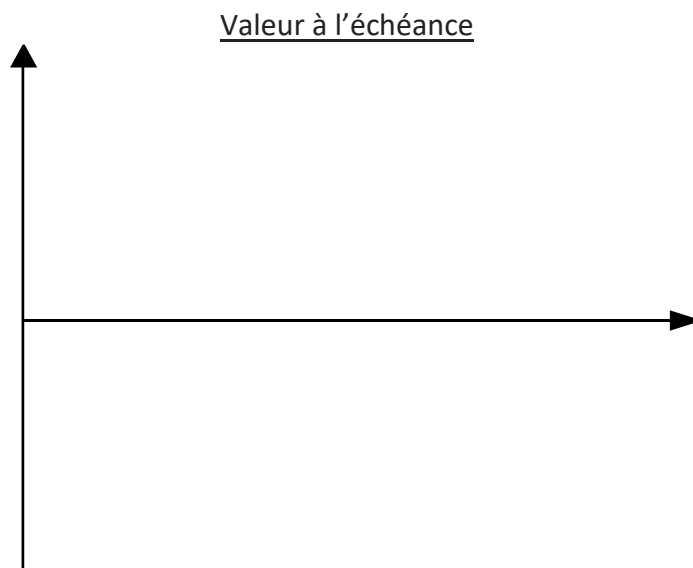
Le particulier se compromettant à acheter le bien à la date de livraison est réputé avoir une « position longue » et le particulier se compromettant à vendre le bien à cette même date est réputé avoir une « position courte ». Les raisons qui peuvent pousser des investisseurs à entrer dans un contrat de ce type versus simplement acheter l'actif sous-jacent à $t = 0$ sont nombreuses, dont notamment :

- Le manque de liquidité immédiate (on n'a pas l'argent à $t = 0$ mais on est confiant qu'on l'aura à $t = T$)
- L'actif n'est pas immédiatement disponible, mais on veut s'assurer qu'on l'aura quand il le sera (certaines commodités dont la production n'est pas continue, par exemple).

La **valeur à l'échéance pour l'acheteur** (position longue) à $t = T$ est de :

La **valeur à l'échéance pour le vendeur** (position courte) à $t = T$ est de :

La valeur à l'échéance pour l'acheteur (position longue) est réputé être la valeur du sous-jacent à l'échéance moins le prix *forward*, et la valeur à l'échéance pour le vendeur (position courte) se trouve à être l'inverse :



Remarques :

1. On définit le gain comme étant la valeur à l'échéance moins le coût initial de la position. Dans un forward, le coût initial est nul et le gain est donc égal à la valeur à l'échéance pour les deux positions (longue et courte)
2. Pour l'instant, la notion de gain n'inclut pas de composante d'intérêt sur le coût initial (voir la notion de « profit » en 2.1.3).
3. Dans certains ouvrages, notamment le manuel ASM, le taux sans risque est exprimé sous forme de force d'intérêt, si bien que $S_0 e^{rT} = F_{0,T}$ avec r qui représente la force d'intérêt sans risque
4. Le prix *forward* $F_{0,T}$ est parfois défini par la lettre K dans certains ouvrages

2.1.2. Forward prépayé, achat ferme et capitalisation de l'actif

Dans certains cas, l'acheteur (position longue) voudra payer en avance à $t = 0$ au lieu de le faire à la date de livraison T . Le cas échéant, on notera $F_{0,T}^P$ le prix payé à $t = 0$ pour sa position longue dans le contrat (prix au comptant, *spot price*). En général, on aura que $F_{0,T}^P = S_0$. On aura donc :

<i>Acheteur (position longue)</i>	<i>Vendeur (position courte)</i>
-----------------------------------	----------------------------------

$t = 0$

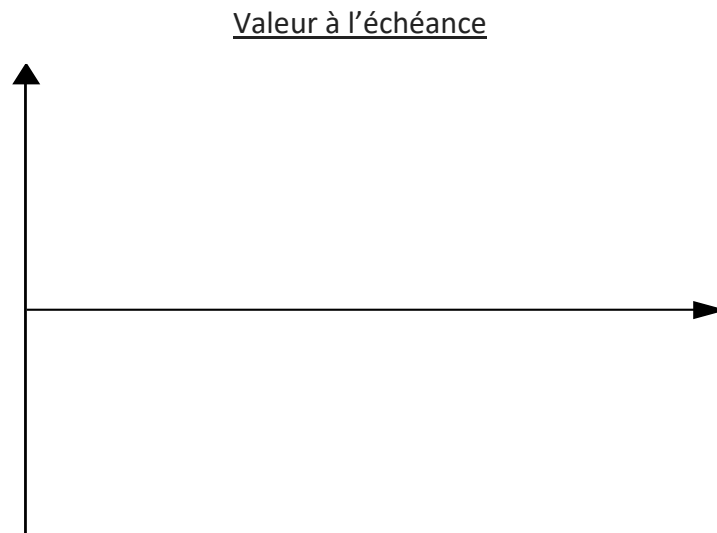
$t = T$

Dans une telle situation, la transaction est similaire à acheter immédiatement l'actif sous-jacent S_0 sans toutefois l'avoir à la date du paiement. On dira ainsi que la position de l'acheteur est **capitalisée** (le paiement est entièrement fait dès le début). Dans les faits, il peut arriver que cet actif ne soit simplement pas disponible à $t = 0$, et on achète ainsi une « obligation de l'acheter à un prix prédéterminé pour une date ultérieure ».

Il y a quelques différences entre un **achat ferme** à $t = 0$, qui implique un paiement immédiat et la livraison immédiate de l'actif sous-jacent (achat standard), et un contrat *forward* (sans prépaiement). Du fait qu'un achat ferme implique de payer S_0 à $t = 0$ pour procéder à l'achat alors que le paiement est fait à $t = T$ avec le contrat *forward*, on aura que :

- Le *forward* constitue une position dite **non capitalisée** puisque tout le paiement est différé (le paiement n'est pas payé en entier au début)
- L'achat ferme entraîne une position dite (pleinement) **capitalisée** (le paiement est entièrement fait au début)

La comparaison des valeurs à l'échéance d'un *forward* et d'un achat ferme implique donc des bases différentes, puisque l'un comptabilisera le coût d'achat (le prix *forward* $F_{0,T}$) et l'autre non, et ainsi :



Comment recréer un *forward* avec un achat ferme et vice-versa ?

Pour mieux comparer le *forward* et l'achat ferme, on cherchera en quelque sorte à recréer les entrées et sorties de fonds du *forward* (recréer les cash flows) en présumant un coût initial nul en finançant l'acquisition de l'actif (achat ferme) par un emprunt au taux sans risque (prix = S_0 à $t = 0$ et taux sans risque = r_f). Pour comparer sur des bases semblables, on aura ainsi :

$$\text{Achat ferme} \quad + \quad \text{Emprunt} \quad = \quad \text{Forward}$$

$t = 0$

$t = T$

De cette manière, on réussit à recréer les mêmes cash flows qu'un contrat *forward*.

Autre option : au lieu de recréer un *forward* avec un emprunt et un achat ferme, on peut à l'inverse recréer les cash flows qu'on aurait obtenu avec un achat ferme en utilisant un *forward* et en investissant au taux sans risque.

On dépose la valeur actualisée de $F_{0,T}$, soit :

$$F_{0,T}(1 + r_f)^{-T} = \underbrace{S_0 (1 + r_f)^T}_{F_{0,T}} (1 + r_f)^{-T} = S_0$$

... dans un compte rapportant le taux sans risque r_f et on entre dans une position longue (acheteur) dans le *forward*. Dans ce cas, l'investissement au taux sans risque ainsi que la position longue dans le *forward* est équivalent à l'achat ferme (on présume ici qu'on possède déjà le montant d'argent nécessaire pour acheter S_0 à $t = 0$) :

$$\text{Dépôt} \quad + \quad \text{Forward} \quad = \quad \text{Achat ferme}$$

$t = 0$

$t = T$

À noter que pour l'instant, on présume que l'actif sous-jacent ne verse aucun dividende ou équivalent (à revoir ultérieurement). Également, jusqu'à présent, on parle de valeur à l'échéance et de gain (ou perte) dans l'une ou l'autre des transactions sans égard du moment où le paiement est effectué (à quel moment la transaction est capitalisée).

2.1.3. Gain net ou profit

Le gain lié à un produit dérivé est sa valeur à l'échéance moins les coûts initiaux (*premium*) liés à son acquisition. Dans le cas d'un *forward*, par exemple, le prix initial du contrat est présumé être nul, alors il n'était pas utile de le calculer. Cependant, on verra plus tard que ce n'est pas le cas avec plusieurs autres types de produits dérivés.

Le **gain net** (*net payoff*), ou encore le **profit** lié à un produit dérivé est défini comme la valeur à l'échéance du produit dérivé moins la valeur accumulée du coût initial. On définit ainsi le profit comme étant « le gain au-dessus du taux sans risque » en supposant que tout coût initial provienne d'un emprunt au taux sans risque qu'on doit rembourser par la suite.

Remarque : le livre de référence définit le *profit* avec la définition précédente. Cependant, différentes définitions existent pour établir le « profit » d'une transaction ou d'une opération quelconque sans nécessairement mesurer les gains *au-dessus du taux sans risque*, d'où l'importance dans la dernière définition et de la distinction entre « gain » et « profit » (ou « gain net »).

Dans le cas d'un *forward* avec une date d'échéance T et un prix *forward* $F_{0,T} = S_0 (1 + r_f)^T$, puisque le paiement et la livraison de l'actif ont tous lieu à la date T , soit au même moment, le gain et le profit (gain net) ainsi que la valeur à l'échéance sont normalement identiques. Ceci n'est généralement pas le cas avec un *forward* prépayé.

En effet, avec un *forward*, on a :

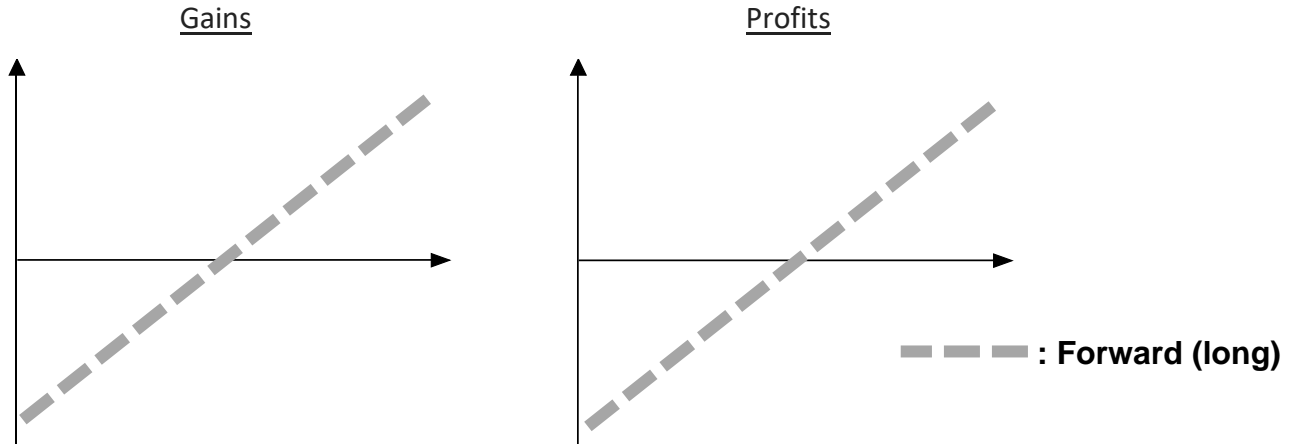
$$\begin{aligned} \text{Gain}(\text{forward}) &= \underbrace{(S_T - F_{0,T})}_{\text{Val. échéance}} - \underbrace{0}_{\text{Coût initial}} = S_T - F_{0,T} \\ \text{Profit}(\text{forward}) &= \underbrace{(S_T - F_{0,T})}_{\text{Val. échéance}} - \underbrace{0(1 + r_f)^T}_{\text{Coût initial accumulé}} = S_T - F_{0,T} \end{aligned}$$

Avec un *forward* standard, le gain et le profit sont identiques.

Avec un *forward* prépayé :

$$\begin{aligned} \text{Gain}(\text{forward prépayé}) &= \underbrace{(S_T)}_{\text{Val. échéance}} - \underbrace{\overbrace{F_{0,T}^P}^{=S_0}}_{\text{Coût initial}} = S_T - S_0 \\ \text{Profit}(\text{forward prépayé}) &= \underbrace{(S_T)}_{\text{Val. échéance}} - \underbrace{\overbrace{F_{0,T}^P(1 + r_f)^T}^{=S_0(1 + r_f)^T = F_{0,T}}}_{\text{Coût initial accumulé}} = S_T - F_{0,T} \end{aligned}$$

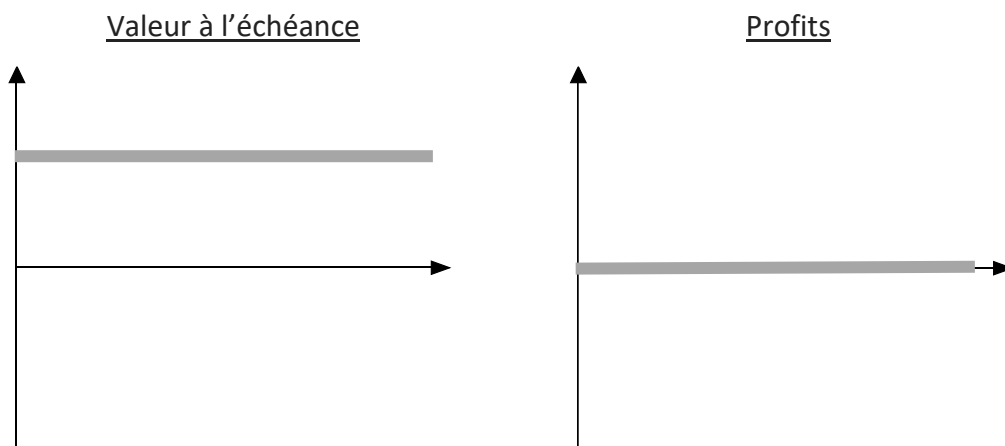
Ainsi, **les profits sont identiques**, peu importe que le sous-jacent soit payé à $t = 0$ (*forward* prépayé) ou à l'échéance (*forward* standard), **mais les gains sont différents** à cause de la position capitalisé (*forward* prépayé) versus non capitalisée (*forward* standard).



Remarque : on utilisera a priori exclusivement des contrats forward dits « standard » pour la très grande majorité des exemples pour le reste du cours, sauf si mention contraire. Également, on s'intéressera à la valeur à l'échéance des produits dérivés ainsi que des profits, essentiellement. La mesure du gain est parfois utilisée à titre de simplification, puisqu'en supposant un taux d'intérêt sans risque nul, le gain est égal au profit.

Utilisation des obligations zéro-coupon

Tout investissement au taux sans risque ou tout emprunt à ce même taux sans risque peut être comparé à une obligation sans risque ne versant aucun coupon (obligation zéro-coupon) dont le gain et/ou le profit est indépendant de la valeur du sous-jacent à l'échéance du *forward*. Ainsi :



La valeur à l'échéance d'une obligation zéro-coupon est donc constante et son profit est réputé être nul par défaut. Les investissements et/ou les emprunts au taux sans risque

des exemples précédents viennent donc affecter la valeur à l'échéance de la transaction sans toutefois en affecter le profit puisque ceux-ci sont équivalents à l'achat ou la vente d'une obligation zéro-coupon.

2.1.4. Règlement en espèce et livraison

En théorie, avec un contrat *forward*, l'acheteur reçoit l'actif sous-jacent à la date de livraison et le vendeur reçoit l'argent (le prix *forward*) en échange à ce même moment. Dans les faits, en pratique, *il arrive que l'actif sous-jacent ne soit jamais transigé. Il peut arriver que le règlement ne se fasse qu'en espèce* (un versement en argent), selon que ce soit l'acheteur ou le vendeur qui fasse un profit dans la transaction. Pour illustrer le profit de chaque partie, ceci reviendrait à effectuer la transaction tel que prévu, ce qui implique que l'acheteur paye le prix *forward* $F_{0,T}$ au vendeur en échange de l'actif sous-jacent S_T , puis que l'acheteur, dorénavant propriétaire de l'actif S_T le revende immédiatement à sa juste valeur marchande. Le profit pour l'acheteur est ainsi de $S_T - F_{0,T}$ et le profit pour le vendeur est de $F_{0,T} - S_T$.

Ceci ne change en rien les profits pour chaque partie. Une question peut alors se poser, pourquoi ces parties embarquent-elles dans un contrat dont le profit dépend d'un actif sous-jacent sans que cet actif ne soit ultimement transigé ? En théorie, aucun des parties ne posséderait l'actif et pourrait tout de même embarquer dans un tel contrat ! Voir exemple 2.2 (p.34 DM).

Des investisseurs peuvent ainsi spéculer ou atténuer des risques pris dans d'autres transactions, d'autres positions et d'autres investissements avec des contrats *forward* sans véritablement transiger quelconque actif et ainsi éviter tout frais de transaction. Des actifs de tout genre peuvent être utilisés avec ce type de produit dérivé.

2.1.5. Risque de crédit, risque de défaut

Le risque de crédit, ou encore risque de défaut, est commun à la très grande majorité des produits dérivés. Pour un contrat de gré-à-gré standard, *chaque partie court le risque que l'autre partie n'honore pas ses engagements tel que prévu dans le contrat.* Les risques des contrats standardisés transigés sur des marchés réglementés sont généralement moindre grâce à différents mécanismes et collatéraux qui seront étudiés ultérieurement. Pour des contrats de gré-à-gré, tout cela dépend des dispositions du contrat, des différents risques et aléas pouvant venir affecter les profits pour chaque partie.

Exemple : vous possédez une épicerie et votre voisin possède une ferme laitière. Désirant vous prémunir contre les variations potentiellement défavorables du prix du lait pour l'année prochaine, vous lui proposez d'entrer dans un contrat *forward* pour déterminer en avance le prix que vous payerez l'an prochain pour une livraison de 1000 litres de lait à 1\$ du litre.

Question : quels sont les risques pour les deux partis ?

Réponse : de votre côté, vous courez le risque que votre voisin ne puisse rencontrer ses obligations (incendie, maladie bovine, décès, etc). De son côté, il court le risque que vous ne puissiez plus acheter son lait (faillite, moins de demande pour ce produit, etc). Et on ne parle même pas des risques de décès (est-ce que la succession doit également tenir les engagements du contrat... ?) et autres risques divers !

Question : et si le prix du lait n'était pas de 1\$ du litre dans un an ? Par exemple, si une épidémie affectait à la baisse la production de lait dans la province et que le prix du lait venait à quadrupler de valeur pour atteindre 4\$ du litre (la loi de l'offre et la demande), qui tire avantage de sa position ?

Réponse : vous, avec votre **position longue**, êtes protégé contre les augmentations du prix du lait et pourrez en acheter au prix prédéterminé de 1\$ du litre pour 1000 litres, inconditionnellement du niveau du prix une fois rendu à la date de livraison.

Question : avec ce scénario extrême, combien vaut ce contrat à l'échéance (position longue) ?

Réponse : ce contrat vaut maintenant 3000\$ (valeur à l'échéance). Vous payerez ainsi 1000\$ pour obtenir 4000\$ d'actif (avec la nouvelle valeur du lait). Le vendeur (position courte) se prive d'une vente de 4000\$ de lait en étant obligé de vous le vendre pour 1000\$, ce qui représente une perte de son côté (3000\$).

Question : et si le vendeur ne pouvait plus rencontrer ses engagements, que faites-vous ?

Réponse : on verra plus tard comment il est possible de gérer ces risques, comment ils sont traités avec des clauses et/ou l'intervention d'un intermédiaire dans le processus.

2.2. Option d'achat (Call)

2.2.1. Définition et caractéristiques

Une **option d'achat (Call option)** est un contrat qui permet à l'acheteur de l'option (le **détenteur** de l'option, le **souscripteur** avec une **position longue**) d'acheter l'actif sous-jacent ou une certaine quantité de l'actif sous-jacent au contrat (S) à un prix fixé d'avance (prix de levée, prix d'exercice, *Strike price* = K) à une date d'échéance (date de livraison, *expiration date*) T ou d'ici une date d'échéance T (selon les modalités de l'option), peu importe la valeur marchande de l'actif une fois rendu à cette date, s'il le désire (le détenteur, le souscripteur). L'actif en question est souvent un titre financier tel une action, par exemple.

Le vendeur/émetteur de l'option sera réputé avoir une position courte et devra vendre l'actif en question à ce prix prédéterminé et au moment prévu dans l'option si le détenteur de l'option le désire. Si le vendeur de l'option n'a pas l'actif sous-jacent en sa possession une fois le contrat rendu à la date d'échéance T (ou auparavant si l'option le permet en tout temps avant la date d'échéance), il devra se le procurer pour le vendre au souscripteur à ce prix prédéterminé K .

La décision d'utiliser l'option s'appelle la **levée (exercice)**. Il existe différents types d'exercices :

- Européen (à l'échéance T uniquement)
- Américain (d'ici l'échéance T)
- Bermudien (*Bermudan*, à certains moments spécifiques d'ici T)

Dans la présente section, on se concentre sur les options européennes de par leur simplicité pour introduire ce concept. On dira qu'une option d'achat (européenne par défaut) d'échéance T et avec un prix d'exercice K est transigée à $t = 0$ au prix de $C(K, T)$.

2.2.2. Valeur à l'échéance et profit

Les deux partis (acheteur et vendeur) prennent tous un risque :

- Si l'actif perd de la valeur, ou du moins se situe à une valeur inférieure au *Strike Price* K une fois le contrat rendu à échéance, le détenteur de l'option n'exercera pas son option. Autrement dit, il aura payé son option à un prix $C(K, T)$ et ne recevra aucun bénéfice en bout de ligne. Donc, au final, un profit de :

$$Profit = -C(K, T) (1 + r_f)^T$$

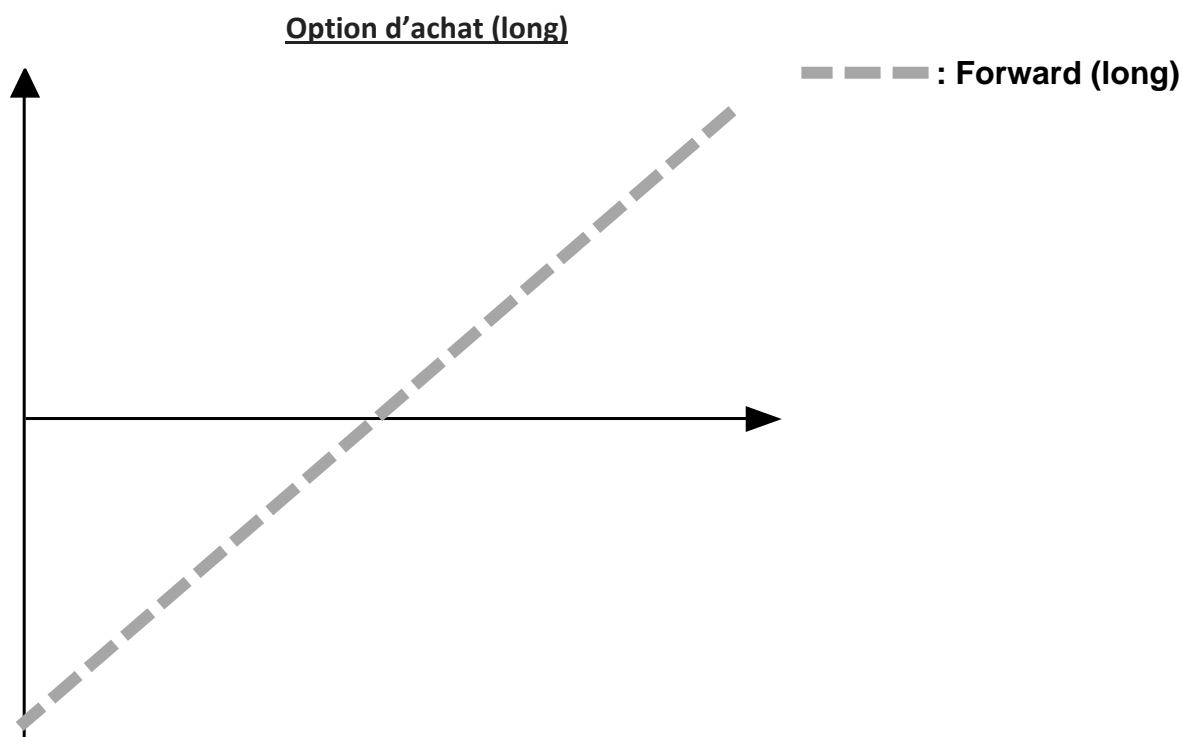
... puisque la valeur à l'échéance est nulle, l'option n'étant pas levée. Le profit négatif provient du prix initialement payé pour l'option, ce prix étant accumulé au taux sans risque pour définir le profit à l'échéance. Du côté du vendeur (position courte), le profit est l'inverse de celui de l'acheteur, soit $C(K, T) (1 + r_f)^T$.

- Si l'actif atteint une valeur marchande $S_T > K$, alors le détenteur de l'option aura payé $C(K, T)$ à $t = 0$ et recevra un actif d'une valeur de S_T en déboursant $K\$$ (le *Strike Price* K est le prix qu'il paye peu importe la valeur de l'actif une fois rendu à l'échéance du contrat). Son profit sera de :

$$(S_T - K) - C(K, T)(1 + r_f)^T$$

Pour tracer un graphique des profits totaux liés à une option d'achat du point de vue de l'acheteur/détenteur de l'option, il faut ainsi sommer la valeur à l'échéance (si l'option est exercée ou non) et le montant payé (en négatif) pour obtenir l'option, accumulé au taux sans risque jusqu'à l'échéance T .

Graphiquement, on obtient pour l'acheteur de l'option d'achat (position longue), en comparant avec l'acheteur d'un forward (position longue) :



L'option d'achat peut protéger contre les pertes trop grandes en comparaison avec un achat ferme, et peut permettre de profiter uniquement des hausses significatives de la valeur de l'actif sous-jacent. Elle peut aussi permettre de spéculer sur des hausses éventuelles (ou de baisses moindre qu'anticipées) de la valeur de l'actif sous-jacent en échange d'investissements initiaux relativement faibles (le prix des options est généralement équivalent à une fraction de la valeur du sous-jacent). Toute proportion gardée, ce type d'option permet d'augmenter le risque de l'investissement, avec un rendement sur l'investissement initial de -100% si l'option n'est pas exercée !

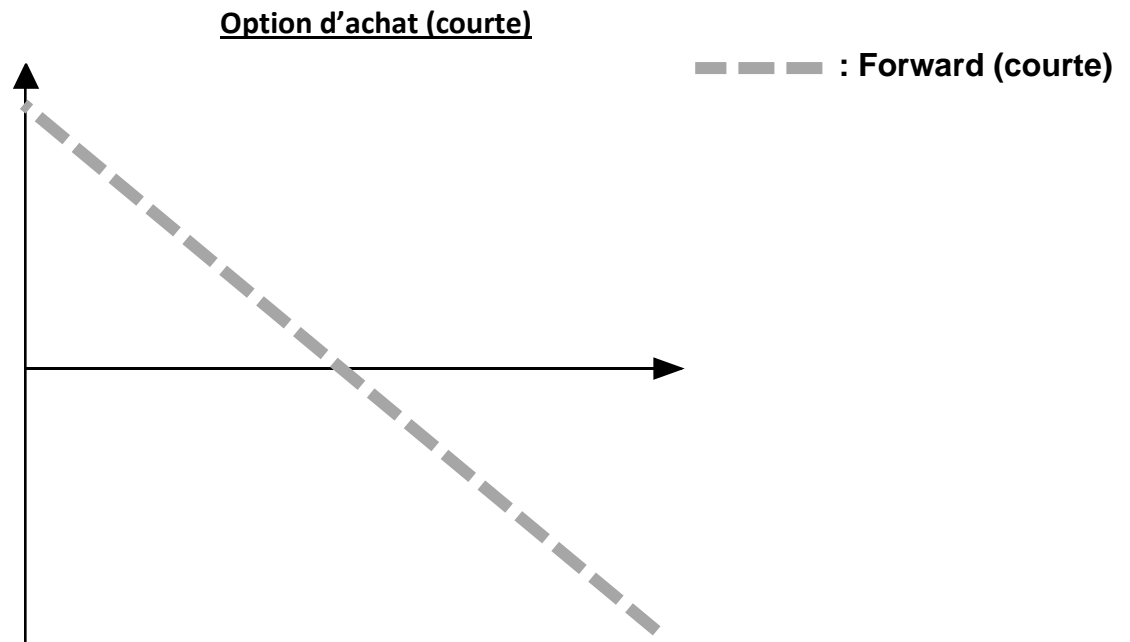
La valeur à l'échéance de l'option d'achat (*purchased call payoff*) est donc de :

$$Valeur \text{ à l'échéance}(Call) = \text{Max}(0; S_T - K)$$

Le profit de l'option d'achat (*purchased call profit*) pour l'acheteur est donc de :

$$\begin{aligned} Profit(Call) &= \underbrace{\text{Max}(0; S_T - K)}_{\text{Payoff option d'achat}} - \underbrace{C(K, T) (1 + r_f)^T}_{\text{Prix accumulé de l'option}} \\ &= \text{Max}\left(-C(K, T) (1 + r_f)^T; S_T - K - C(K, T) (1 + r_f)^T\right) \end{aligned}$$

Et bien entendu, la position du vendeur de l'option d'achat (position courte) est l'inverse, toujours en comparant avec le vendeur d'un forward (position courte) :



2.3. Option de vente (Put)

2.3.1. Définition et caractéristiques

Une **option de vente (Put option)** est un contrat qui permet à l'acheteur de l'option (le **détenteur** de l'option, le **souscripteur** avec une **position courte**) de vendre l'actif sous-jacent au contrat (S) à un prix fixé d'avance (prix de levée, prix d'exercice, *Strike price* = K) à une date d'échéance (date de livraison, *expiration date*) T ou d'ici une date d'échéance T (selon les modalités de l'option), peu importe la valeur marchande de l'actif une fois rendu à cette date, s'il le désire (le détenteur, le souscripteur). L'actif en question est souvent un titre financier tel une action, par exemple.

Le vendeur/émetteur de l'option sera réputé avoir une position longue et devra acheter l'actif en question à ce prix prédéterminé et au moment prévu dans l'option si le détenteur de l'option le désire. Si le détenteur de l'option n'a pas l'actif sous-jacent en sa possession une fois le contrat rendu à la date d'échéance T (ou auparavant si l'option le permet en tout temps avant la date d'échéance) et qu'il désire lever l'option, il devra se le procurer pour le vendre à l'émetteur de l'option au prix prédéterminé K .

Les mêmes définitions s'appliquent pour l'option de vente, tel que vu avec l'option d'achat (européen, américain, bermudien, etc). On présumera encore ici que seules les options européennes sont traitées. On dira qu'une option de vente (européenne par défaut) d'échéance T et avec un prix d'exercice K est transigée à $t = 0$ au prix de $P(K, T)$.

2.3.2. Valeur à l'échéance et profit

Les deux partis (acheteur et vendeur) prennent tous un risque :

- Si l'actif prend de la valeur, ou du moins se situe à une valeur supérieure au *Strike Price* K une fois le contrat rendu à échéance, le détenteur de l'option n'exercera pas son option. Autrement dit, il aura payé son option à un prix $P(K, T)$ et ne recevra aucun bénéfice en bout de ligne. Donc, au final, un profit de :

$$- P(K, T) (1 + r_f)^T$$

... puisque la valeur à l'échéance est nulle, l'option n'étant pas levée, le profit négatif provient donc du prix initialement payé pour l'option, ce prix étant accumulé au taux sans risque pour définir le profit à l'échéance. Du côté du vendeur, le profit est l'inverse de celui de l'acheteur, soit $P(K, T) (1 + r_f)^T$.

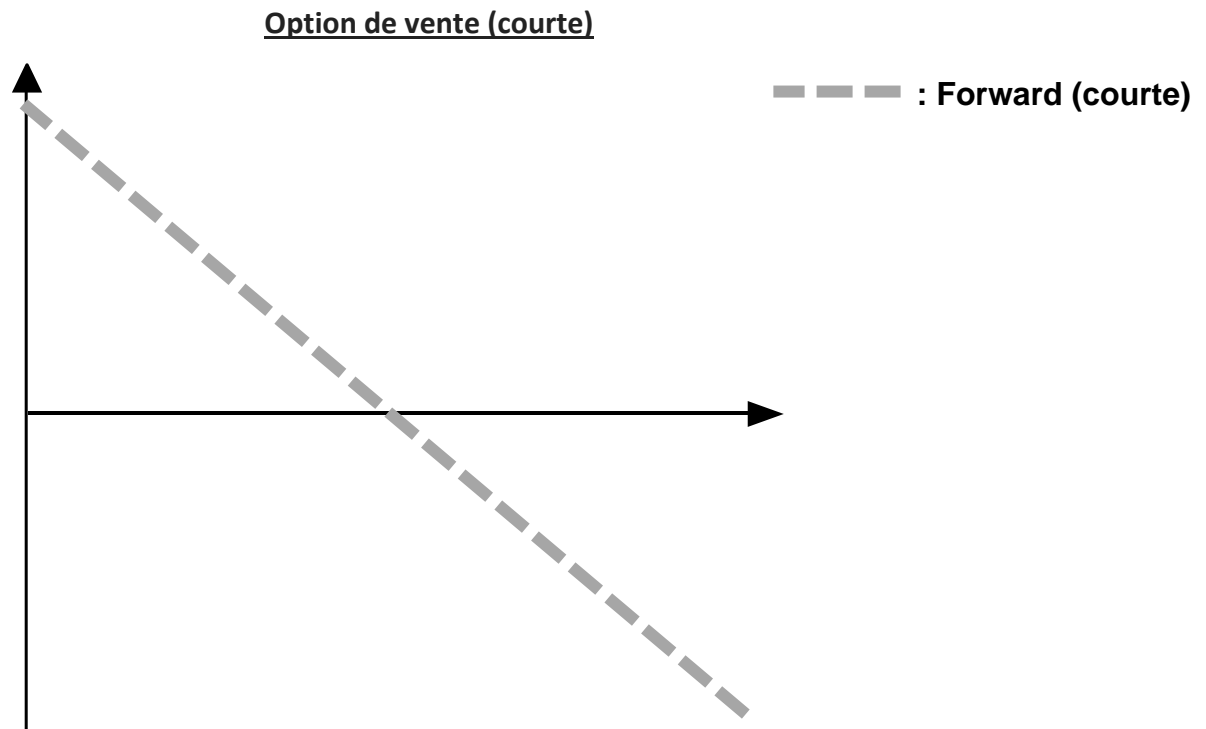
Ici, il est important de noter qu'on regarde le rendement associé à l'option uniquement ; si le détenteur de l'option a fait du profit en possédant une action qui a pris de la valeur pendant cette période de temps, ce profit n'est pas associé à l'option en question, mais bien au titre sous-jacent...

- Si l'actif atteint une valeur marchande $S_T < K$, alors le détenteur de l'option aura payé $P(K, T)$ et vendra un actif d'une valeur de S_T et recevra $K\$$ (le *Strike Price* K est le prix auquel il vend peu importe la valeur de l'actif une fois rendu à l'échéance du contrat). Son profit sera donc de :

$$(K - S_T) - P(K, T) (1 + r_f)^T$$

Pour tracer un graphique des profits totaux liés à une option de vente du point de vue de l'acheteur/détenteur de l'option, il faut ainsi sommer la valeur à l'échéance (si l'option est exercée ou non) et le montant payé (en négatif) pour obtenir l'option, accumulé au taux sans risque jusqu'à l'échéance T .

Graphiquement, on obtient pour l'acheteur de l'option de vente (position courte), en comparant avec le vendeur d'un forward (position courte) :



L'option de vente permet de spéculer sur des baisses éventuelles (ou des hausses moindres qu'anticipées) de la valeur de l'actif sous-jacent en échange d'investissements initiaux relativement faibles (le prix des options est généralement équivalent à une fraction de la valeur du sous-jacent).

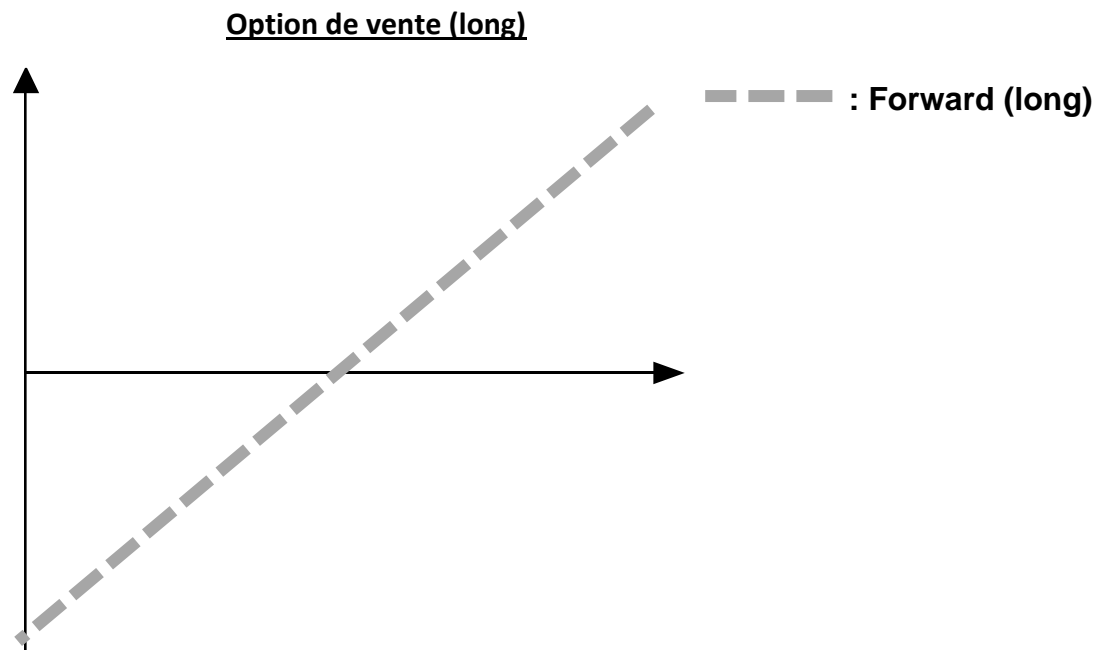
La valeur à l'échéance de l'option d'achat (*purchased put payoff*) est donc de :

$$\text{Max}(0; K - S_T)$$

Le profit de l'option d'achat (*purchased put profit*) pour l'acheteur est donc de :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\text{Max}(0; K - S_T)}_{\text{Payoff option de vente}} - \underbrace{P(K, T) (1 + r_f)^T}_{\text{Prix accumulé de l'option}} \\ &= \text{Max}\left(-P(K, T) (1 + r_f)^T; K - S_T - P(K, T) (1 + r_f)^T\right) \end{aligned}$$

Et bien entendu, la position du vendeur de l'option de vente (position longue) est l'inverse, toujours en comparant avec l'acheteur d'un forward (position longue) :



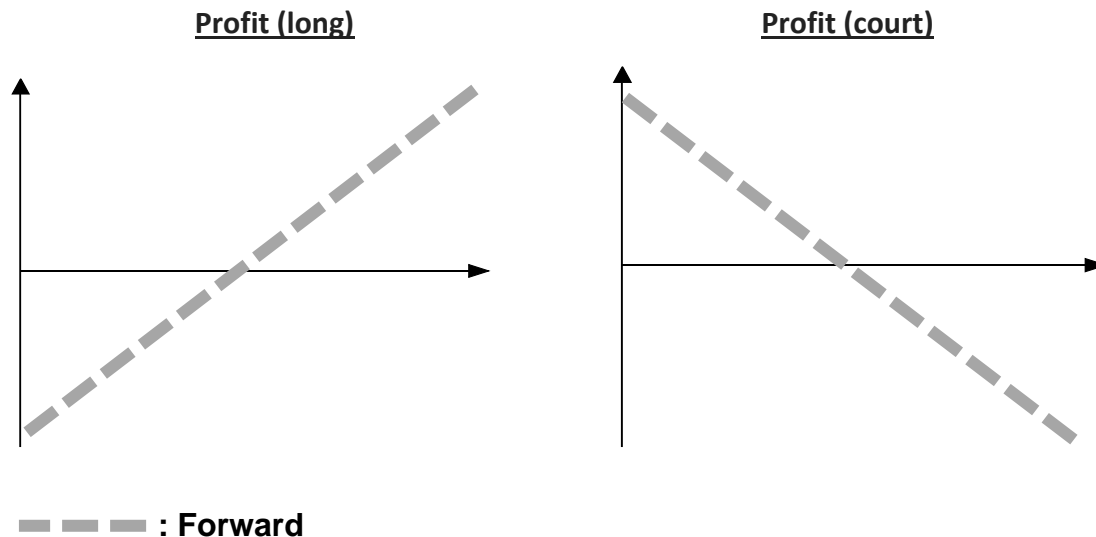
Remarques :

- Les prix $C(K, T)$ et $P(K, T)$ proviennent de formules qui seront vues ultérieurement.
- On peut également comparer l'option de vente à une forme d'assurance, car elle protège le détenteur de l'option face à une baisse marquée de la valeur du titre sous-jacent
- Des stratégies en investissement impliquent un mélange d'options pour se protéger ou s'exposer plus ou moins à différents risques (hausses, baisses, grande volatilité, faible volatilité, etc). Ces stratégies seront vues ultérieurement.
- Le **degré de parité (*moneyness*)** d'une option représente la valeur qu'aurait cette option si sa levée s'effectuait immédiatement à $t = 0$, inconditionnellement des clauses du contrat de l'option (et de la véritable date d'échéance).
- On dira d'une option « **dans le cours** » (***in-the-money***) que sa valeur est ainsi strictement positive, ce qui implique pour une option d'achat que $S_T > K$ et pour une option de vente que $S_T < K$. À noter que le profit lié à ces options n'est pas nécessairement positif, selon les coûts initiaux (prix des options). Autrement, on dira que les options sont « **hors du cours** » (***out-of-the-money***). En cas d'égalité, on parlera d'options « **au cours** » (***at-the-money***).
- En anglais, un parle de « *purchased call/put* » pour définir l'achat d'une option et « *written call/put* » pour définir la vente d'une option. On parle également d'un « *long/short forward* » pour définir la position du parti qui achète versus du parti qui vend le sous-jacent.
- Certains manuels utilisent des notations différentes pour définir le prix d'une option d'achat ou de vente (ASM : $P(S, K, T)$ et $C(S, K, T)$, DM : $Put(K, T)$ et $Call(K, T)$, notamment). Les calculs sont toutefois les mêmes.

2.4. Résumé des positions avec *forward* ou option d'achat et de vente

Produit dérivé	Position	Profit	Profit minimum	Profit maximum
<i>Forward</i> (Acheteur)	Longue	$S_T - F_{0,T}$	$-F_{0,T}$	∞
<i>Forward</i> (Vendeur)	Courte	$F_{0,T} - S_T$	$-\infty$	$F_{0,T}$
Option d'achat (Acheteur)	Longue	$\text{Max}(0; S_T - K) - C(K, T)(1 + r_f)^T$	$-C(K, T)(1 + r_f)^T$	∞
Option d'achat (Vendeur)	Courte	$C(K, T)(1 + r_f)^T - \text{Max}(0; S_T - K)$	$-\infty$	$C(K, T)(1 + r_f)^T$
Option de vente (Acheteur)	Courte	$\text{Max}(0; K - S_T) - P(K, T)(1 + r_f)^T$	$-P(K, T)(1 + r_f)^T$	$K - P(K, T)(1 + r_f)^T$
Option de vente (Vendeur)	Longue	$P(K, T)(1 + r_f)^T - \text{Max}(0; K - S_T)$	$P(K, T)(1 + r_f)^T - K$	$P(K, T)(1 + r_f)^T$

On a ainsi vu trois positions longues, soit la position de l'acheteur dans un *forward* (*long forward*), l'achat d'une option d'achat (*purchased call*) et la vente d'une option de vente (*written put*). Les trois positions courtes, en contrepartie, sont la position du vendeur dans un *forward* (*short forward*), la vente d'une option d'achat (*written call*) et l'achat d'une option de vente (*purchased put*).



Lectures suggérées :

- DM section 2.5 (comparaison entre options et assurance, pages 48 à 50)
- DM tableau 2.7 page 53 et illustration 2.14 page 54 (résumé du chapitre 2)

2.5 Complément d'information au sujet des positions longues et courtes

Au sujet des positions longues et courtes, nous avons vu jusqu'à présent la position d'un investisseur par rapport au sous-jacent de chaque option (ou pour un produit dérivé quelconque, au sens général).

Dans les faits, il est possible de voir la position, longue ou courte, par rapport à une option également, pas juste par rapport au sous-jacent. Autrement dit, pour résumer pour l'option d'achat pour commencer :

- Si j'achète une option d'achat, j'ai une position longue dans l'option et une position longue dans le sous-jacent. Je suis *long* dans l'option en ce sens que je tire avantage d'une augmentation de la valeur de l'option (car je la possède, pour simplifier), augmentation de valeur qui est liée à une augmentation de valeur du sous-jacent. Autrement dit, si le sous-jacent augmente de valeur (qu'on soit *in-the-money* ou non), ceci fait augmenter mon espérance de profit une fois rendu à l'échéance, ce qui fait augmenter la valeur marchande de mon option (que je pourrais bien revendre à autrui, même avant l'échéance).
- À l'inverse, si je vends une option d'achat, j'aurais une position courte dans l'option et une position courte dans le sous-jacent par la même occasion, à l'inverse du cas de l'achat d'une option d'achat. Je suis ainsi *short* dans l'option en ce sens que je tire avantage d'une baisse de la valeur de l'option, baisse de valeur liée à une baisse de valeur du sous-jacent (et donc, moins de chance que l'option soit exercée et que je doive vendre le sous-jacent à perte, ou du moins une atténuation de la perte qui se matérialisera pour moi une fois rendu à l'échéance).
- On peut aussi dire qu'une position longue dans une option d'achat est liée à tirer avantage d'une augmentation de la probabilité que celle-ci soit exercée, ce qui en fait augmenter la valeur. L'inverse s'appliquera pour une position courte dans une option d'achat. La nuance est importante ici car dans bien des cas, les options ne sont pas achetées ni vendues tel qu'illustré dans bien des exemples ; les options seront parfois abstraites, et on verra plus tard aussi des options d'option (option d'achat/vente sur une option d'achat/vente). Les concepts d'acheteur et vendeur d'option illustrent néanmoins ces positions de manière un peu plus concrète.

Pour les options de vente, on aura ainsi :

- Si j'achète une option de vente, j'ai une position longue dans l'option et une position courte dans le sous-jacent.
- Si je vends une option de vente, j'ai une position courte dans l'option et une position longue dans le sous-jacent.

- On peut ainsi dire qu'une position longue dans une option de vente est liée à tirer avantage d'une baisse de la probabilité que celle-ci soit exercée, ce qui en fait augmenter la valeur. L'inverse s'appliquera pour une position courte dans une option de vente. Tout comme c'était le cas avec l'option de vente, les positions d'acheteur et de vendeur d'une option de vente servent parfois à titre d'illustration.

Pour simplifier, de dire que nous sommes « long » dans « quelque chose » signifie qu'on tire avantage de l'augmentation de sa valeur, et vice-versa.

À titre d'illustration et de simplification, être long dans une option représente la position de l'acheteur de l'option, et vice-versa. Pour la position versus le sous-jacent, ça sera selon le cas.

Pour la suite du cours, dans les prochains chapitres, cependant, on fera référence à la position courte et/ou longue par rapport au sous-jacent d'un produit dérivé par défaut, à moins de mention contraire.

2.6. Exercices

Exercice tiré du livre *Mathematics of Investment and Credit*, 6^{ème} édition : Le 15 janvier le prix de l'action de la compagnie XYZ est de 100\$. La valeur d'une option d'achat avec échéance le 20 juillet à un prix d'exercice (strike price K) de 110\$ ou de 90\$ est de 1\$ ou 15\$ respectivement. La valeur d'une option de vente avec échéance le 20 juillet à un prix d'exercice (strike price K) de 110\$ ou de 90\$ est de 14\$ ou 1,50\$ respectivement.

Déterminez le profit pour chacune des stratégies suivantes (toutes établies en date du 15 janvier) en fonction de la valeur de l'action XYZ une fois rendu au 20 juillet et en presumant un taux sans risque nul :

- a) Achat d'une option d'achat à $K=110\$$
- b) Achat de l'action et vente d'une option d'achat à $K=110\$$
- c) Achat d'une option d'achat à $K=110\$$ et vente d'une option d'achat à $K=90\$$
- d) Achat d'une option d'achat à $K=90\$$ et vente d'une option d'achat à $K=110\$$
- e) Achat d'une option de vente à $K=90\$$ et achat d'une option d'achat à $K=110\$$
- f) Achat d'une option de vente à $K=110\$$ et achat d'une option d'achat à $K=90\$$

Question additionnelle

Qu'espère un investisseur qui adopte chacune des positions suivantes en termes de la valeur à l'échéance du sous-jacent?

- a) position longue dans un contrat à terme
- b) position courte dans un contrat à terme
- c) achat d'une option d'achat
- d) vente d'une option d'achat
- e) achat d'une option de vente
- f) vente d'une option de vente

Solutions

- a) Il espère que le prix du sous-jacent augmente le plus possible
- b) Il espère que le prix du sous-jacent baisse le plus possible
- c) Il espère que le prix du sous-jacent augmente le plus possible et soit au moins supérieur au prix d'exercice, idéalement supérieur à la somme de la valeur accumulée du prix payé pour l'option et du prix d'exercice pour en tirer profit.
- d) Il espère que le prix du sous-jacent passe en bas du prix d'exercice.
- e) Il espère que le prix du sous-jacent baisse le plus possible et soit au moins inférieur au prix d'exercice, idéalement inférieur à la différence entre le prix d'exercice et la valeur accumulée de du prix de l'option pour en tirer profit.
- f) Il espère que le prix du sous-jacent passe en haut du prix d'exercice.