Université Laval	Examen final informatique
Faculté des Sciences et de Génie	Hiver 2016
École d'actuariat	Date: Samedi 23 avril 2016

Act-2001 Introduction à l'actuariat 2

Professeur: Etienne Marceau

Nom de famille de l'étudiant	**Prénom de l'étudiant**	**Matricule**

Instructions:

– L'examen contient 4 questions à développement.

– Le total des points est de **100 points**.

– La durée est de 120 minutes.

– Veuillez écrire votre nom sur le questionnaire.

– Veuillez écrire vos réponses dans le présent cahier seulement.

– Veuillez faire vos brouillons sur les documents prévus à cet effet.

– Veuillez retourner le présent cahier, les annexes et le papier brouillon à la fin de l'examen.

Questions	Points obtenus	Points
1		35
2		35
3		25
4		35
Total		120 (10 points bonus)

1. **(35 points).** Les coûts pour les 3 lignes d'affaires d'un portefeuille d'une société d'assurance sont représentés par les v.a. indépendantes

$$X_1 \sim Pareto\,(\alpha_1, \lambda) \qquad X_2 \sim Gamma\,(\alpha_2, \beta) \qquad X_3 \sim LNorm\,(\mu, \sigma)\,.$$

Les coûts pour le portefeuille sont définis par la v.a. S où

$$S = X_1 + X_2 + X_3.$$

On a recours générateur par défaut de R pour produire $m = 1000000$ (1 million) réalisations de (U_1, U_2, U_3) où U_1, U_2, U_3 sont des v.a. i.i.d. de loi uniforme standard.

On fixe `set.seed(20160419)`.

On produit dans l'ordre $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, U_3^{(1)}\right)$, $\left(U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, U_3^{(2)}\right)$, ..., $\left(U_1^{(m)}, U_2^{(m)}, U_3^{(m)}\right)$:

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$U_3^{(j)}$
1	0.74011861	0.8075052	0.1863795
2	0.04820467	0.3257164	0.7577736
...			
m	0.09028961	0.6300705	0.527429

Questions :

(a) **(6pts).** Les paramètres des lois de X_1, X_2 et X_3 sont fixées de telle sorte que

$$E\left[X_i\right] = 164.8721 \quad \text{et} \quad Var\left(X_i\right) = 46707.74 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Calculer les 3 paires de paramètres (de façon explicite).

(b) **(6pts).** Utiliser la méthode inverse pour produire $m = 1000000$ (1 million) réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ où

$$X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right) \qquad \text{pour } j = 1, ..., m \quad \text{et} \quad i = 1, 2, 3.$$

i. Indiquer la réalisation #3 de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$.

ii. Indiquer la réalisation #4 de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$.

On a

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$
1	202.978324	280.28661	41.01152
2	6.476416	36.68981	201.20596
...			
m	12.463598	141.55622	107.12310

(c) **(2pts).** Produire m réalisations $S^{(j)}$ de S :

i. Indiquer la méthode pour y parvenir.

ii. Indiquer les réalisations #3 et #4 de S.

(d) **(6pts).** Avec les résultats de l'item (1c), calculer une approximation de $\varphi = \Pr(S > 1000)$. (Vérification : $\Pr(S > 1500) \simeq$0.021318)

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

ii. Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

iii. Calculer un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % pour l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

(e) **(2pts).** Avec les résultats de l'item (1c), calculer une approximation de $VaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.999$.

- Indiquer la méthode.
- Indiquer la valeur.

(f) **(3pts).** Avec les résultats de l'item (1c), calculer une approximation de $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.999$.

- Indiquer l'expression de l'approximation.
- Indiquer la valeur.

(g) **(3pts).** Avec les résultats de l'item (1c), calculer une approximation de la contribution pour X_1, de la contribution de X_2 et de la contribution de X_3 selon la méthode d'Euler à $VaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.999$.

- Indiquer l'expression.
- Indiquer les trois valeurs.

(h) **(4.5pts).** Avec les résultats de l'item (1c), calculer une approximation de la contribution pour X_1, de la contribution de X_2 et de la contribution de X_3 selon la méthode d'Euler à $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.999$.

- Indiquer l'expression.
- Indiquer les trois valeurs.

(i) **(2.5pts).** Supposons que la mesure de risque est $\rho_\kappa(S) = E[S] + \sqrt{Var(S)}\Phi^{-1}(\kappa)$. Calculer les valeurs exactes (sans les simulations) de la contribution pour X_1, de la contribution de X_2 et de la contribution de X_3 selon la méthode d'Euler à $\rho_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.999$. Comparer avec les valeurs obtenues en (1h). Commenter brièvement.

Solution OK :

(a) **(6pts).** Les paramètres des lois de X_1, X_2 et X_3 sont fixées de telle sorte que

$$E[X_i] = 164.8721 \quad \text{et} \quad Var(X_i) = 46707.74 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Calculer les 3 paires de paramètres (de façon explicite).

Pour chaque loi, on établit le système de 2 équations et 2 inconnus (les paramètres). Les solutions sont analytiques.

On obtient :

i. Loi Pareto : α =4.784422 et $\lambda = 623.945768$

ii. Loi gamma : α =0.581976707 et β =0.003529867

iii. Loi lognormale : $\mu = 4.60517$ et $\sigma = 1$

(b) **(6pts).** Utiliser la méthode inverse pour produire $m = 1000000$ (1 million) réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ où

$$X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right) \qquad \text{pour } j = 1, ..., m \quad \text{et} \quad i = 1, 2, 3.$$

i. Indiquer la réalisation #3 de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$.

ii. Indiquer la réalisation #4 de $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$.

On a

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$
1	202.978324	280.28661	41.01152
2	6.476416	36.68981	201.20596
...			
m	12.463598	141.55622	107.12310

On obtient

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$
3	30.51848	160.723811	140.17034
4	345.38655	4.975294	46.37279

(c) **(2pts).** Produire m réalisations $S^{(j)}$ de S :

i. Indiquer la méthode pour y parvenir.
On a

$$S^{(j)} = X_1^{(j)} + X_2^{(j)} + X_3^{(j)}$$

ii. Indiquer les réalisations #3 et #4 de S : 331.4126 396.7346

(d) **(6pts).** Avec les résultats de l'item (1c), calculer une approximation de $\varphi = \Pr(S > 1000)$. (Vérification : $\Pr(S > 1500) \simeq$0.021318)

i. Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.
On a

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} &= \frac{1}{n_{sim}} \sum_{j=1}^{n_{sim}} 1_{\left\{S^{(j)} > 1500\right\}} \\ &= 0.021318 \end{aligned}$$

ii. Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.
On obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} &= \frac{1}{1000000} \sum_{j=1}^{1000000} 1_{\left\{S^{(j)} > 1500\right\}} \\ &= 0.086053 \end{aligned}$$

iii. Calculer un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % pour l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.
On a

$$err = \sqrt{\frac{\widetilde{\varphi}(1 - \widetilde{\varphi})}{1000000}} = 0.0001444422$$

On a

$$\left[\widetilde{\varphi} + err \times \Phi^{-1}(0.025), \widetilde{\varphi} + err \times \Phi^{-1}(0.975)\right]$$

On obtient : [0.08550334,0.08662066]

(e) **(2pts).** Avec les résultats de l'item (1c), calculer une approximation de $VaR_{\kappa}(S)$ pour $\kappa = 0.999$.

- Indiquer la méthode.
  On utilise la fonction quantile avec type =1
  Ou on trie les réalisations : $S^{[1]} < ... < S^{[n_{sim}]}$ (réalisations de v.a. continues) et on a

  $$VaR_{\kappa}(S) \simeq S^{[j_0]}$$

  où $j_0 = n_{sim} \times kappa$ (quand j_0 est entier)
- Indiquer la valeur.
  On obtient : 3014.871

(f) **(3pts).** Avec les résultats de l'item (1c), calculer une approximation de $TVaR_{\kappa}(S)$ pour $\kappa = 0.999$.

- Indiquer l'expression de l'approximation.
  Comme $j_0 = n_{sim} \times kappa$ est entier, on a

  $$TVaR_{\kappa}(S) \simeq \frac{1}{n_{sim}(1-\kappa)} \sum_{j=1}^{n_{sim}} S^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)} > S^{[j_0]}\right\}}$$

  et

  $$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(S) &\simeq \frac{1}{n_{sim}(1-\kappa)} \sum_{j=j_0+1}^{n_{sim}} S^{[j]} \\ &= \frac{1}{n_{sim} - j_0} \sum_{j=j_0+1}^{n_{sim}} S^{[j]} \end{aligned}$$

- Indiquer la valeur.
  On obtient : 3865.766

(g) **(3pts).** Avec les résultats de l'item (1c), calculer une approximation de la contribution pour X_1, de la contribution de X_2 et de la contribution de X_3 selon la méthode d'Euler à $VaR_{\kappa}(S)$ pour $\kappa = 0.999$.

- Indiquer l'expression.
  On a

  $$VaR_{\kappa}(X_i; S) \simeq \sum_{j=1}^{n_{sim}} X_i^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)} = S^{[j_0]}\right\}}$$

- Indiquer les trois valeurs.
  On obtient : 2534.775 323.193 156.9032

(h) **(4.5pts).** Avec les résultats de l'item (1c), calculer une approximation de la contribution pour X_1, de la contribution de X_2 et de la contribution de X_3 selon la méthode d'Euler à $TVaR_{\kappa}(S)$ pour $\kappa = 0.999$.

- Indiquer l'expression.
  On a
  $$TVaR_{\kappa}\left(X_i;S\right) \simeq \frac{1}{n_{sim}\left(1-\kappa\right)} \sum_{j=1}^{n_{sim}} X_i^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)}>S^{[j_0]}\right\}}$$
- Indiquer les trois valeurs.
  On obient : 1426.093 382.7649 2056.908

(i) **(2.5pts).** Supposons que la mesure de risque est $\rho_{\kappa}\left(S\right) = E\left[S\right] + \sqrt{Var\left(S\right)}\Phi^{-1}\left(\kappa\right)$. Calculer les valeurs exactes (sans les simulations) de la contribution pour X_1, de la contribution de X_2 et de la contribution de X_3 selon la méthode d'Euler à $\rho_{\kappa}\left(S\right)$ pour $\kappa = 0.999$. Comparer avec les valeurs obtenues en (1h). Commenter brièvement.

Pour les 3 v.a., la contribution est

$$\rho_{\kappa}\left(X_i;S\right) = E\left[X_i\right] + \frac{Var\left(X_i\right) + \sum_{l=1,l\neq i}^{3} Cov\left(X_i,X_l\right)}{\sqrt{Var\left(S\right)}}\Phi^{-1}\left(\kappa\right).$$

On obtient : 550.4614 550.4614 550.4614

En raison des hypothèses (espérances identiques, variances identiques), les contributions de chaque v.a. seraient la même peu importe la valeur de κ. Cela est "étonnant" compte tenu des valeurs obtenues quand la mesure TVaR est utilisée. Dans les présentes circonstances, la mesure ρ n'est pas recommaj

2. **(35 points).** La valeur présente (actualisée) des coûts pour un contrat d'assurance continue temporaire $n = 60$ ans émis à un assuré d'âge x est définie par la v.a. Z où

$$Z = bv^{T_x} \times 1_{\{T_x \leq n\}},$$

avec $x = 40$, $b = 100000$ et

$$v = \mathrm{e}^{-0.04}.$$

On modélise la mortalité de l'assuré par la loi $Gompertz\,(\beta, \gamma)$ où

$$\mu(x) = \beta e^{\gamma x}, \; x \geq 0,$$

et

$$\overline{F}(x) = \exp\left(-\frac{\beta}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{\gamma x} - 1\right)\right) = \exp\left(-\frac{\beta}{\ln(c)}\left(c^x - 1\right)\right), x > 0,$$

avec $\beta = 0.00003$ et $\gamma = \ln(1.1)$.

Générateur de nombres pseudo-aléatoires (identique à celui de la question 1). On utilise le générateur congruentiel linéaire ($a = 41358$, $m = 2^{31} - 1$, $x_0 = 20150418$) pour générer 1000 (mille) réalisations de $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}, U_3^{(j)}\right)$ de (U_1, U_2, U_3) où

$$U_i^{(j)} = \frac{x_{3(j-1)+i}}{m}, \; j = 1, 2, ..., 1000 \text{ et } i = 1, 2, 3,$$

avec $x_l = \mathrm{mod}\,(a \times x_{l-1}; m)$, $l = 1, 2, ..., 3000$. Exemple : $U_1^{(1)} = \frac{x_1}{m}$, $U_2^{(1)} = \frac{x_2}{m}$, $U_3^{(1)} = \frac{x_3}{m}$, $U_1^{(2)} = \frac{x_4}{m}$, ..., $U_3^{(1000)} = \frac{x_{3000}}{m}$. On obtient :

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$U_3^{(j)}$
1	0.073263705	0.040303568	0.874980833
1000	0.721695824	0.895905397	0.855403030

Questions :

(a) **(3pts).** Développer l'expression de $\overline{F}_{T_x}(t)$ et indiquer la loi de T_x (avec ses paramètres).

(b) **(1pts).** Développer l'expression de l'espérance de Z.

(c) **(3pts).** Évaluer approximativement l'espérance de Z en utilisant la fonction `integrate` en `R` (voir l'aide en `R`) ou MAPLE.

(d) **(5pts).** Développer l'expression de $F_Z(z)$, où $z \in \vartheta_Z = \{0\} \cup [bv^n, b]$.

(e) **(4pts).** Calculer $F_Z(z)$, où $z = 0$ et $z = \frac{b}{2}$.

(f) **(2pts).** Développer l'expression de la VaR de Z.

(g) **(2pts).** Calculer $VaR_\kappa(Z)$, pour $\kappa = 0.95$.

(h) **(15pts).** Soient un vecteur de v.a. i.i.d. $(T_{x,1}, T_{x,2}, T_{x,3})$ avec $T_{x,1} \sim T_x$. On définit $S = Z_1 + Z_2 + Z_3$ avec $Z_i = bv^{T_{x,i}} \times 1_{\{T_{x,i} \leq n\}}$, $i = 1, 2, 3$.

   i. **(5pts).** Utiliser la méthode inverse pour produire $n = 1000$ réalisations de $\left(T_{x,1}^{(j)}, T_{x,2}^{(j)}, T_{x,3}^{(j)}\right)$ de $(T_{x,1}, T_{x,2}, T_{x,3})$. Note : pour chaque j, on simule $T_{x,i}^{(j)}$ avec $U_i^{(j)}$, $i = 1, 2, 3$:

- Indiquer la méthode pour chacune des 3 v.a.
- Indiquer la réalisation #1 de $(T_{x,1}, T_{x,2s}, T_{x,3})$.
- Indiquer la réalisation #1000 de $(T_{x,1}, T_{x,2}, T_{x,3})$.

ii. **(6pts).** Produire $n = 1000$ réalisations $\left(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}, Z_3^{(j)}\right)$ de (Z_1, Z_2, Z_3) et $S^{(j)}$ de S :

- Indiquer la méthode pour y parvenir.
- Indiquer les réalisations #1 et #1000 de (Z_1, Z_2, Z_3).
- Indiquer les réalisations #1 et #1000 de S.

iii. **(4pts).** Avec les résultats de l'item (2(h)ii), calculer une approximation de $\varphi = \Pr(S > 100000)$.

- Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.
- Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

Solution (35 points): OK

(a) **(3 points).** Développer l'expression de $\overline{F}_{T_x}(t)$ et indiquer la loi de T_x (avec ses paramètres).
On déduit

$$\overline{F}_x(t) = \frac{\exp\left(-\frac{\beta}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{\gamma(x+t)} - 1\right)\right)}{\exp\left(-\frac{\beta}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{\gamma x} - 1\right)\right)} = \exp\left(-\frac{\beta}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma x}\left(\mathrm{e}^{\gamma t} - 1\right)\right)$$

et

$$\mu_x(t) = \mu(x+t) = \beta \mathrm{e}^{\gamma x}\mathrm{e}^{\gamma t}.$$

Ainsi, si $X \sim Gomp(\beta, \gamma)$, alors $T_x \sim Gomp(\beta \mathrm{e}^{\gamma x}, \gamma)$.

(b) **(1 points).** Développer l'expression de l'espérance de Z.
On obtient

$$E[Z] = \int_0^n bv^t \times f_{T_x}(t)\, dt$$

(c) **(3 points).** Évaluer approximativement l'espérance de Z en utilisant la fonction `integrate` en `R` (voir l'aide en `R`) ou MAPLE.
On obtient

$$E[Z] = 23578.76$$

(d) **(5 points).** Développer l'expression de $F_Z(z)$, où $z \in \vartheta_Z = \{0\} \cup [bv^n, b]$.
On sait que

$$F_Z(0) = \Pr(T_x > n) = \overline{F}_{T_x}(n)$$

De plus

$$F_Z(x) = \begin{cases} \overline{F}_{T_x}(n) & , x = 0 \\ \overline{F}_{T_x}(n) & , 0 < x < bv^n \\ \overline{F}_{T_x}(\gamma) & , bv^n < x < b \\ 1 & , x \geq b \end{cases}$$

où

$$\gamma = -\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{x}{b}\right)$$

(e) **(4 points).** Calculer $F_Z(z)$, où $z=0$ et $z=\frac{b}{2}$.
Valeur de $F_Z(0)$: $F_Z(0) = \overline{F}_{T_x}(n)$ =0.01325522
Valeur de $F_Z\left(\frac{b}{2}\right)$: $F_Z\left(\frac{b}{2}\right) = \overline{F}_{T_{i^x}}\left(-\frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \overline{F}_{T_x}\left(\frac{1}{0.04}\ln(2)\right) = \overline{F}_{T_x}(17.328679514)$ =0.9417166

(f) **(2 points).** Développer l'expression de la VaR de Z.
Si $0<\kappa\leq\overline{F}_{T_x}(n)$, $VaR_\kappa(Z)=0$
Si $\overline{F}_{T_x}(n)<\kappa<1$, $VaR_\kappa(Z)=be^{-\delta VaR_{1-\kappa}(T_x)}=$

(g) **(2 points).** Calculer $VaR_\kappa(Z)$, pour $\kappa=0.95$.
Comme $\overline{F}_{T_x}(n)<0.95<1$, on obtient

- $VaR_{1-0.95}(T_x)$ =16.01277
- $VaR_{0.95}(Z) = 100000\times\exp(-0.04\times16.01277) = 52702.315185$

(h) **(15 points).** Soient un vecteur de v.a. i.i.d. $(T_{x,1},T_{x,2},T_{x,3})$ avec $T_{x,1}\sim T_x$. On définit $S=Z_1+Z_2+Z_3$ avec $Z_i = bv^{T_{x,i}}\times 1_{\{T_{x,i}\leq n\}}$, $i=1,2,3$.

i. **(5 points).** Utiliser la méthode inverse pour produire $n=1000$ réalisations de $\left(T_{x,1}^{(j)},T_{x,2}^{(j)},T_{x,3}^{(j)}\right)$ de $(T_{x,1},T_{x,2},T_{x,3})$. Note : pour chaque j, on simule $T_{x,i}^{(j)}$ avec $U_i^{(j)}$, $i=1,2,3$:

- Indiquer la méthode pour chacune des 3 v.a.
On utilise la méthode inverse avec

$$\begin{aligned} T_{x\,i}^{(j)} &= F_{T_x}\left(U_i^{(j)}\right) \\ &= \frac{1}{\gamma}\ln\left(1-\frac{\gamma}{\beta e^{\gamma x}}\ln\left(1-U_i^{(j)}\right)\right). \end{aligned}$$

- Indiquer la réalisation #1 de $(T_{x,1},T_{x,2},T_{x,3})$.
On obtient : > vT1[1] 19.37909; > vT2[1] 14.24638; > vT3[1] 52.35685 ...
- Indiquer la réalisation #1000 de $(T_{x,1},T_{x,2},T_{x,3})$.
On obtient : > vT1[1000] 47.30317; > vT2[1000] 53.23686 ; vT3[1000] 51.60117

ii. **(6 points).** Produire $n=1000$ réalisations $\left(Z_1^{(j)},Z_2^{(j)},Z_3^{(j)}\right)$ de (Z_1,Z_2,Z_3) et $S^{(j)}$ de S :

- **(2 points).** Indiquer la méthode pour y parvenir.
- **(2 points).** Indiquer les réalisations #1 et #1000 de (Z_1,Z_2,Z_3).
Réalisation #1 : 46062.83 56560.72 12315.96
Réalisation #1000 : 15075.08 11889.98 12693.92
- **(2 points).** Indiquer les réalisations #1 et #1000 de S.
Réalisation #1 : 114939.5
Réalisation #1000 : 39658.98

iii. **(4 points).** Avec les résultats de l'item (2(h)ii), calculer une approximation de $\varphi=\Pr(S>100000)$.

- **(2 points).** Indiquer l'expression de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.

Expression :

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{j=1}^{n_{sim}} 1_{\{S^{(j)} > 100000\}}$$

- **(2 points).** Indiquer la valeur de l'approximation $\widetilde{\varphi}$ de φ.
  On obtient : 0.118

3. **(25 points).** On considère un contrat de rente discrète temporaire $n = 40$ ans, émis à un individu d'âge $x = 60$.

La durée de vie de l'individu est modélisée à partir de la table de mortalité fournie.

La rente annuelle $g = 10000$ est versée au début de l'année et elle cesse au décès s'il advient avant la durée n.

On utilise une force d'intérêt de 3% pour les calculs.

On définit la v.a. Z comme étant la valeur présente des coûts pour le contrat où

$$Z = \sum_{k=0}^{n-1} gv^k \times 1_{\{T_x > k\}}.$$

La v.a. T_x représente la durée de vie de l'individu d'âge x.

Questions :

(a) **(2 pts)**. À partir de la table de mortalité, calculer les valeurs de $\overline{F}_{T_x}(k)$, pour $k = 1, 10$ et 20.
(Vérification : $\overline{F}_{T_x}(5) = 0.933143340$; $\overline{F}_{T_x}(15) = 0.690043598$; $\overline{F}_{T_x}(30) = 0.143845203$).

(b) **(4 pts)**. Calculer $E[Z]$.
   i. **(2pts)**. Développer l'expression de $E[Z]$.
   ii. **(2pts).** Indiquer la valeur de $E[Z]$.

(c) **(2pts).** Indiquer une seconde définition possible de Z.

(d) **(6pts.** Calculer $Var(Z)$.
   i. **(2pts).** Développer l'expression de $E\left[Z^2\right]$.
   ii. **(1 pt).** Développer l'expression de $Var(Z)$.
   iii. **(3pts).** Indiquer les valeurs de $E\left[Z^2\right]$ et de $Var(Z)$.

(e) **(2pts).** Indiquer les 2 valeurs les moins élevées et les 2 valeurs les plus élevées que peut prendre Z.

(f) **(2pts).** Indiquer la probabilité que Z prenne la valeur la moins élevée.

(g) **(2pts).** Indiquer la probabilité que Z prenne la valeur la plus élevée.

(h) **(2pts).** Calculer $VaR_\kappa(Z)$ pour $\kappa = 0.05$ et 0.95.

(i) **(3pts).** Calculer $TVaR_\kappa(Z)$ pour $\kappa = 0.95$.

Solution : OK

(a) **(2 pts)**. À partir de la table de mortalité, calculer les valeurs de $\overline{F}_{T_x}(k)$, pour $k = 1, 10$ et 20.
(Vérification : $\overline{F}_{T_x}(5) = 0.933143340$; $\overline{F}_{T_x}(15) = 0.690043598$; $\overline{F}_{T_x}(30) = 0.143845203$).
   - On obtient : 0.988910000; 0.832148927; 0.509630301

(b) **(4 pts)**. Calculer $E[Z]$.

i. **(2pts)**. Développer l'expression de $E[Z]$.
On a

$$E[Z] = \sum_{k=0}^{39} 10000 v^k \, \overline{F}_{T_{60}}(k)$$

ou

$$\begin{aligned} E[Z] &= \sum_{k=0}^{39} \left(\sum_{j=0}^{k} 10000 v^j \right) \left(F_{T_{60}}(k+1) - F_{T_{60}}(k) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{j=0}^{39} 10000 v^j \right) \overline{F}_{T_{60}}(40) \end{aligned}$$

ii. **(2pts).** Indiquer la valeur de $E[Z]$.
On obtient : 147257.1

(c) **(2pts).** Indiquer une seconde définition possible de Z.
On a (pour $x = 60$)

$$Z = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{[T(x)]} 10000 v^j \right), T_x < 40 \\ \left(\sum_{j=0}^{39} 10000 v^j \right), T_x > 40 \end{cases}$$

(d) **(6pts.** Calculer $Var(Z)$.

i. **(2pts).** Développer l'expression de $E[Z^2]$.
On a

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= \sum_{k=0}^{39} \left(\sum_{j=0}^{k} 10000 v^j \right)^2 \left(F_{T_{60}}(k+1) - F_{T_{60}}(k) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{j=0}^{39} 10000 v^j \right)^2 \overline{F}_{T_{60}}(40) \end{aligned}$$

ii. **(1 pt).** Développer l'expression de $Var(Z)$.
On a

$$Var(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2$$

iii. **(3pts).** Indiquer les valeurs de $E[Z^2]$ et de $Var(Z)$.
On obtient : 24548452254 **2pts** et 2863787368 **1pt**

(e) **(2pts).** Indiquer les 2 valeurs les moins élevées et les 2 valeurs les plus élevées que peut prendre Z.

Valeurs les moins élevées :

- 10000,
- $\sum_{j=0}^{1} 10000 v^j = 10000 \times \frac{1-e^{-0.03\times 2}}{1-e^{-0.03}} = 19704.455336$

Valeurs les plus élevées :

- $\sum_{j=0}^{38} 10000 v^j = 10000 \times \frac{1-e^{-0.03\times 39}}{1-e^{-0.03}} = 233343.092106$

- $\sum_{j=0}^{39} 10000 v^j = 10000 \times \frac{1-e^{-0.03\times 40}}{1-e^{-0.03}} = 236446.761519$

(f) **(2pts).** Indiquer la probabilité que Z prenne la valeur la moins élevée.
Probabilité : $\left(\overline{F}_{T_{60}}(0) - \overline{F}_{T_{60}}(1)\right) = 1 - 0.988910000 = 0.01109$

(g) **(2pts).** Indiquer la probabilité que Z prenne la valeur la plus élevée.
Probabilité : $\overline{F}_{T_{60}}(39)$ =0.009321511

(h) **(2pts).** Calculer $VaR_\kappa(Z)$ pour $\kappa = 0.05$ et 0.95.
Valeurs : 38261.41 et 219954

(i) **(3pts).** Calculer $TVaR_\kappa(Z)$ pour $\kappa = 0.95$.
Valeurs : 153689 et 227803.9

4. **(35 points).** Pour la prochaine année, le montant total des sinistres pour l'ensemble du portefeuille d'assurance maladie est représenté par la v.a. $S_n = X_1 + ... + X_n$ où les v.a. X_1, ..., X_n sont i.i.d.

   Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a.

$$X_i = I_i \times B_i,$$

   où les lois des v.a. indépendantes I_i et B_i sont

$$\begin{aligned} I_i &\sim Bernoulli\,(q = 0.1) \\ B_i &\sim Gamma\,(\alpha = 0.5, \beta = 0.05)\,. \end{aligned}$$

   On définit $W_n = \frac{S_n}{n}$.

   Questions :

   (a) **(15 points).** Pour un contrat, ...
   - ... écrire l'expression de $F_{X_1}(x)$;
   - ... calculer $F_{X_1}(0)$ et $F_{X_1}(40)$ (**vérification**: $F_{X_1}(10) = 0.9682689$);
   - ... expliquer comment obtenir $VaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
   - ... calculer $VaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
   - ... donner l'expression de $TVaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
   - ... calculer $TVaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99.

   (b) **(15 points).** Pour un portefeuille de $n = 200$ contrats, ...
   - ... indiquer la loi de S_n ;
   - ... écrire l'expression de $F_{W_n}(x)$;
   - ... calculer $F_{W_n}(0)$ et $F_{W_n}(40)$ (**vérification**: $F_{W_{200}}(1) = 0.5426902$);
   - ... expliquer comment obtenir $VaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
   - ... calculer $VaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
   - ... donner l'expression de $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99; et
   - ... calculer $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99.

   (c) **(5 points).** On définit les bénéfices de mutualisation par contrat selon la mesure VaR et la mesure TVaR par

$$\begin{aligned} B_{\kappa,n}^{VaR} &= VaR_\kappa(X) - VaR_\kappa(W_n) \\ B_{\kappa,n}^{TVaR} &= TVaR_\kappa(X) - TVaR_\kappa(W_n)\,. \end{aligned}$$

   Pour $n = 200$, ...
   - ... calculer les valeurs de $B_{\kappa,n}^{VaR}$ et $B_{\kappa,n}^{TVaR}$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
   - ... commenter les valeurs obtenues de $B_{\kappa,n}^{VaR}$ et $B_{\kappa,n}^{TVaR}$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99.

   Solution : (35 points).

   (a) **(15 points).** Pour un contrat, ...

- **(1 point)....** écrire l'expression de $F_{X_1}(x)$;
  - $F_{X_1}(x) = 1 - q + qF_{B_1}(x)$
- **(2 points)....** calculer $F_{X_1}(0)$ et $F_{X_1}(40)$ (**vérification**: $F_{X_1}(10) = 0.9682689$);
  - $F_{X_1}(0) = 1 - q = 0.9$
  - $F_{X_1}(40) = 0.99545$
- **(2 points)....** expliquer comment obtenir $VaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
  - $F_X^{-1}(u) = \begin{cases} 0 & ,0 < u \leq 1-q \\ F_B^{-1}\left(\frac{u-(1-q)}{q}\right) & ,1-q < u < 1 \end{cases}$
  - $VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa)$
- **(3 points)....** calculer $VaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
  - $VaR_{0.8}(X) = 0$
  - $VaR_{0.99}(X)$ =27.05543
- **(2 points)....** donner l'expression de $TVaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
  - $TVaR_\kappa(X_1) = \begin{cases} \frac{qE[B]}{1-\kappa} & ,0 < \kappa \leq 1-q \\ \frac{q}{1-\kappa}E\left[B \times 1_{\{B \geq VaR_\kappa(X)\}}\right] & ,1-q < \kappa < 1 \end{cases}$
  - $TVaR_\kappa(X_1) = \begin{cases} \frac{q}{1-\kappa}\frac{\alpha}{\beta} & ,0 < \kappa \leq 1-q \\ \frac{q}{1-\kappa}\frac{\alpha}{\beta}\overline{H}(VaR_\kappa(X_1); \alpha+1, \beta) & ,1-q < \kappa < 1 \end{cases}$
- **(4 points)....** calculer $TVaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99.
  - $TVaR_{0.8}(X_1)$ =5
  - $TVaR_{0.99}(X_1)$ =43.92861

(b) **(15 points).** Pour un portefeuille de $n = 200$ contrats, ...

- **(1 point)....** indiquer la loi de S_n ;
  - la v.a. S_n obéit à une loi binomiale : $S_n \sim Binom(n, q; F_B)$
- **(2 points)....** écrire l'expression de $F_{W_n}(x)$;
  - $F_{W_n}(x) = F_{S_n}(xn)$
  - $F_{S_n}(y) = f_{N_n}(0) + \sum_{k=1}^n f_{N_n}(k) F_{B'_1+...+B'_k}(y)$
  - $F_{S_n}(y) = f_{N_n}(0) + \sum_{k=1}^n f_{N_n}(k) H(y; k \times 0.5, 0.05)$
  - $f_{N_n}(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$
- **(3 points)....** calculer $F_{W_n}(0)$ et $F_{W_n}(40)$ (**vérification**: $F_{W_{200}}(1) = 0.5426902$);
  - $F_{W_n}(0) = f_{N_n}(0) = 0$
  - $F_{W_n}(40)$ =0.5945688
- **(1 point)....** expliquer comment obtenir $VaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
  - On doit inverser F_{S_n}
  - Comme $F_{S_n}^{-1}(u)$ n'est pas analytique, on doit procéder numériquement avec la fonction optimize ou uniroot
  - $VaR_\kappa(W_n) = VaR_\kappa\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}VaR_\kappa(S_n)$
- **(3 points)....** calculer $VaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
  - $VaR_{0.8}(W_n)$ =1.30408
  - $VaR_{0.99}(W_n)$ =2.057451

- **(1 points)....** donner l'expression de $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99; et
  - $TVaR_\kappa(W_n) = \frac{1}{n} TVaR_\kappa(S_n)$
  - $TVaR_\kappa(S_n) = \sum_{k=1}^{n} f_{N_n}(k) \frac{k \times \alpha \times 0.5}{\beta} (1 - H(VaR_\kappa(S_n); k \times 0.5 + 1, 0.05))$
- **(4 points)....** calculer $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99.
  - $TVaR_{0.8}(W_n)$ =1.574632
  - $TVaR_{0.99}(W_n)$ =2.260136

(c) **(5 points).** On définit les bénéfices de mutualisation par contrat selon la mesure VaR et la mesure TVaR par

$$\begin{aligned} B_{\kappa,n}^{VaR} &= VaR_\kappa(X) - VaR_\kappa(W_n) \\ B_{\kappa,n}^{TVaR} &= TVaR_\kappa(X) - TVaR_\kappa(W_n). \end{aligned}$$

Pour $n = 200$, ...

- **(4 points)....** calculer les valeurs de $B_{\kappa,n}^{VaR}$ et $B_{\kappa,n}^{TVaR}$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99;
  - $B_{0.8,200}^{VaR} = -1.30408$
  - $B_{0.99,200}^{VaR}$ =27.05543-1.574632= 25.480798
  - $B_{0.8,200}^{TVaR} = 5-1.574632$= 3.425368
  - $B_{0.99,200}^{TVaR}$ =43.92861-2.260136= 41.668474
- **(1 point)....** commenter les valeurs obtenues de $B_{\kappa,n}^{VaR}$ et $B_{\kappa,n}^{TVaR}$ pour $\kappa = 0.8$ et 0.99.
  - avec $\kappa = 0.8$, on illustre le fait que la VaR n'est pas sous-additive
  - pour κ=0.8 ou 0.99, on met clairement en valeur le bénéfice à mutualiser les risques indépendants

FIN