ACT-2011
Hiver 2021

Chapitre 9

Parité et autres liens entre les options

Thomas Landry, M.Sc., ASA, AICA
École d'actuariat, Université Laval

Préface

On conserve ici la même notation que celle utilisée dans les chapitres précédents. Notamment, DÉ représente une devise étrangère, DD représente la devise domestique (locale), $r_{É}$ représente le taux sans risque étranger et r_D représente le taux sans risque domestique (local).

9.1. Parité entre options

9.1.1. Retour sur l'équation de parité

Au chapitre 5, nous avions vu que sans dividendes :

$$C(K,T) - P(K,T) = (F_{0,T} - K)(1+r_f)^{-T}$$

$$C(K,T) - P(K,T) = S_0 - K(1+r_f)^{-T}$$

$$C(K,T) - P(K,T) = F_{0,T}^P - K(1+r_f)^{-T}$$

Si le sous-jacent est une action qui paye des dividendes, la formule devient :

$$C(K,T) - P(K,T) = [S_0 - VP(div)] - K(1+r_f)^{-T}$$

Dans le cas de dividendes discrets :

$$C(K,T) - P(K,T) = \underbrace{\left[S_0 - \overbrace{\sum_{i<T} d_i(1+r_f)^{-i}}^{VP(div)}\right]}_{F_{0,T}^P} - K(1+r_f)^{-T}$$

Et dans un cas de dividendes « continus » :

$$C(K,T) - P(K,T) = \underbrace{[S_0 e^{-\delta T}]}_{F_{0,T}^P} - K\underbrace{(1+r_f)^{-T}}_{e^{-rT}}$$

L'équivalent avec un taux de dividende annuel effectif d serait ainsi :

$$C(K,T) - P(K,T) = \underbrace{[S_0(1-d)^T]}_{F_{0,T}^P} - K\left(1+r_f\right)^{-T}$$

Exemple : une action qui ne paye pas de dividendes vaut actuellement 40$. La force d'intérêt continue est de 8%. L'échéance des options d'achat et de vente est de 3 mois. L'option d'achat coute 2,78$ et l'option de vente coute 1,99$ pour un prix d'exercice de quelle valeur ? Quelle devrait être la valeur du prix d'exercice pour que les prix des options soient les mêmes ?

Solution : $\underbrace{C(K,T) - P(K,T)}_{0,79} = \underbrace{S_0}_{[S_0 - \underbrace{VP(div)}_{0}]} - Ke^{-rT} \Rightarrow 0 = 40 - Ke^{-\frac{0,08}{4}}$

$\Rightarrow K = 40e^{0,02}$

Remarque : en général, du moins avec un taux sans risque positif ou à tout le moins supérieur au taux de dividendes, on aura que $C(S_0, T) > P(S_0, T)$.

Exemple : on reprend les mêmes hypothèses qu'à l'exemple précédent, mais cette fois-ci, l'action verse un dividende de 5$ tout juste avant l'échéance. L'option d'achat coute maintenant 0,74$ et l'option de vente coute 4,85$. Le prix d'exercice est de 40$. Expliquer la différence entre les valeurs de l'option d'achat et de l'option de vente en décortiquant le rôle de chaque composante de l'équation de la parité.

Solution : $\underbrace{C(K,T)}_{0,74} - \underbrace{P(K,T)}_{4,85} = -4,11$ versus $0,79 \Rightarrow$ différence de $4,90\$$!

$VP(div) = 5e^{-\frac{0,08}{4}} \simeq 4,90$

En isolant S_0, on obtient la formule pour une *action synthétique* :

$$S_0 = \underbrace{C(K,T)}_{\text{Call}} - \underbrace{P(K,T)}_{\text{Put}} + VP(div) + K\underbrace{\left(1+r_f\right)^{-T}}_{\text{Obl. zéro-coupon}}$$

Action synthétique en cas discret :

$$S_0 = C(K,T) - P(K,T) + \underbrace{\sum_{i<T} d_i(1+r_f)^{-i}}_{VP(Div)} + K\left(1+r_f\right)^{-T}$$

Action synthétique en cas continu :

$$S_0 = \left(C(K,T) - P(K,T) + K\left(1+r_f\right)^{-T}\right)e^{\delta T}$$

On peut aussi retrouver le prix d'une obligation synthétique en établissant les coupons de l'obligation comme étant les dividendes du sous-jacent ainsi que le principal remboursé à l'échéance comme étant le prix d'exercice K.

Obligation synthétique :

$$VP(div) + K\left(1 + r_f\right)^{-T} = S_0 + P(K,T) - C(K,T)$$

Remarque : sans la composante des dividendes, on obtient une obligation zéro-coupon synthétique. Autrement, on peut simplement renvoyer les dividendes du côté droit de l'équation pour recréer une obligation zéro-coupon.

En isolant respectivement les prix des options d'achat et de vente, on peut également créer des options synthétiques :

Option d'achat synthétique :

$$C(K,T) = S_0 - VP(div) + P(K,T) - K\left(1 + r_f\right)^{-T}$$

$$C(K,T) = S_0 - \underbrace{\sum_{i<T} d_i\left(1 + r_f\right)^{-i}}_{VP(Div)\text{ pour cas discret}} + P(K,T) - K\left(1 + r_f\right)^{-T}$$

$$C(K,T) = \underbrace{S_0 e^{-\delta T}}_{\text{Cas continu}} + P(K,T) - K\left(1 + r_f\right)^{-T}$$

Option de vente synthétique :

$$P(K,T) = C(K,T) + K\left(1 + r_f\right)^{-T} - [S_0 - VP(div)]$$

$$P(K,T) = C(K,T) + K\left(1 + r_f\right)^{-T} - \left[S_0 - \underbrace{\sum_{i<T} d_i\left(1 + r_f\right)^{-i}}_{VP(Div)\text{ pour cas discret}}\right]$$

$$P(K,T) = C(K,T) + K\left(1 + r_f\right)^{-T} - \underbrace{S_0 e^{-\delta T}}_{\text{Cas continu}}$$

9.1.2. Parité entre options de devises

Déja vu au chapitre 5...

Preuve avec arbitrage

En reprenant les résultats du chapitre 5, il est possible de démontrer autrement que $F_{0,T} = x_0\left(\frac{1+r_D}{1+r_É}\right)^T$ dans un forward de devises qui détermine le prix à payer à l'échéance T en devises domestiques pour obtenir une devise étrangère (le taux de change pour convertir des devises locales en devises étrangères avec comme unité une devise étrangère à recevoir).

Avec les mêmes définitions qu'au chapitre 5, on suppose qu'on a $x_0 * DD$ pour commencer. Il y a techniquement deux façons pour se procurer $1 * DÉ$ à l'échéance :

1. On convertit aujourd'hui nos devises locales en devises étrangères, avec $x_0 * DD = D\text{É}$. On investit ensuite le résultat au taux sans risque applicable dans la devise étrangère et on aura $(1 + r_{\text{É}})^T * D\text{É}$ à t = T.
2. On investit initialement nos devises locales au taux sans risque local et on obtient ainsi $x_0 * DD * (1 + r_D)^T$ à t = T. En même temps, nous prenons initialement une position longue dans un *forward* qui nous permettra de convertir nos devises locales en devises étrangères à l'échéance T. Rendu à l'échéance, on convertit ainsi le montant accumulé en devise étrangère et on obtient $x_0 * \frac{(1+r_D)^T}{F_{0,T}} * D\text{É}$ à t = T.

En l'absence d'arbitrage, il est impératif que ces deux stratégies donnent le même résultat. Ainsi, on a que $(1 + r_{\text{É}})^T * D\text{É} = x_0 * \frac{(1+r_D)^T}{F_{0,T}} * D\text{É}$ et donc que $(1 + r_{\text{É}})^T = x_0 * \frac{(1+r_D)^T}{F_{0,T}}$, ce qui revient à l'équation initiale de $F_{0,T} = x_0 \left(\frac{1+r_D}{1+r_{\text{É}}}\right)^T$.

<u>À propos de la parité des options d'achat et de vente avec devises</u>

On applique l'équation de parité telle que vu au chapitre 3 dans un contexte d'options de devises. Le sous-jacent est une devise étrangère par défaut et le prix d'exercice K est exprimé sous forme du nombre de devises locales à payer à l'échéance pour obtenir une devise étrangère. Nous regardons encore des options européennes par défaut.

Ainsi, l'option d'achat permet d'acheter 1*DÉ pour K*DD à l'échéance. On a donc :

$$Valeur \text{ à } l'\acute{e}ch\acute{e}ance\ Call = \max(0, X_T - K)$$

L'option de vente permet de vendre 1*DÉ pour K*DD à l'échéance. On a donc :

$$Valeur \text{ à } l'\acute{e}ch\acute{e}ance\ Put = \max(0, K - X_T)$$

On réécrira l'équation de parité dans un contexte de devises comme ceci :

$$C(x_0, K, T) - P(x_0, K, T) = \left[\underbrace{x_0(1 + r_{\text{É}})^{-T}}_{F^P_{0,T}} - K(1 + r_D)^{-T}\right]$$

Pour prouver cette équation, on présente un tableau résumé de la valeur à l'échéance résultante selon le niveau du sous-jacent (rappel, le sous-jacent est ici un taux de change entre les devises) de la combinaison d'une option d'achat (achetée, position longue dans la devise sous-jacente) et d'une option de vente (vendue, position longue dans la devise sous-jacente), cette combinaison répliquant théoriquement un *forward* dans la devise sous-jacente :

Transaction	$t = 0$	$x_T \leq K$	$x_T > K$
Acheter l'option d'achat	$-C_{euro}(x_0, K, T)$	$+0$	$+(x_T - K)$
Vendre l'option de vente	$+P_{euro}(x_0, K, T)$	$-(K - x_T)$	-0
TOTAL		$+(x_T - K)$	$+(x_T - K)$

Comment obtenir la même valeur à l'échéance totale de $(x_T - K) * DD$ à l'échéance ?

- Emprunter $K(1 + r_D)^{-T} * DD$ à t = 0 pour devoir rembourser $K * DD$ à t = T

- Le fait d'avoir $x_T * DD$ à t = T est équivalent à avoir 1*$D\acute{E}$ à cette même date. Pour ce faire, il faut déposer $(1 + r_{\acute{E}})^{-T} * D\acute{E} = (1 + r_{\acute{E}})^{-T} * \underbrace{x_0 * DD}_{=1*D\acute{E} \text{ à } t=0}$ à t = 0

- Total : $[(1 + r_{\acute{E}})^{-T} * x_0 * -K(1 + r_D)^{-T}] * DD$

En l'absence d'arbitrage, la combinaison de l'achat d'une option d'achat et de la vente d'une option de vente (stratégie dans le tableau) et la combinaison des emprunts et dépôts énumérés précédemment devraient donc être équivalentes en termes de coûts initiaux puisque les valeurs à l'échéance sont identiques !

<u>Remarque</u> : les équations de parité vues jusqu'à présent s'appliquent pour les options européennes uniquement.

9.1.3. Options sur obligations

Il est possible d'émettre une option sur une obligation au même titre qu'une action. Le cas échéant, les coupons peuvent être traités comme des dividendes fixes et prévus d'avance. L'option permettra au détenteur d'acheter ou de vendre l'obligation à une date T à un prix d'exercice K.

<u>Remarque</u> : attention, l'échéance de l'obligation (moment du remboursement de la valeur de rachat, du principal) est différente de l'échéance de l'option sur l'obligation !

Avec B_0 qui représente le prix de l'obligation à t = 0, on aura :

$$C(K,T) - P(K,T) = [B_0 - VP(coupons)] - K(1 + r_f)^{-T}$$

Avec un taux de coupon et une valeur nominale respectivement de r et F, on aura :

$$C(K,T) - P(K,T) = B_0 - \overbrace{\sum_{i<T} \underbrace{(Fr)}_{Coupon} (1 + r_f)^{-i}}^{VP(coupons)} - K(1 + r_f)^{-T}$$

9.1.4. *Forward* sur les dividendes

On considère souvent les dividendes comme étant surs et connus d'avance pour simplifier les calculs, mais cela n'est pas le cas en pratique. Il est ainsi possible de spéculer sur les dividendes et de créer des produits dérivés sur ceux-ci. On parlera souvent de *forward* ou encore de swap, mais on regardera uniquement les *forwards* ici.

Considérons la combinaison suivante :

- A — Emprunt de $K\left(1+r_f\right)^{-T}$ à t = 0
- B — Achat d'une action à t = 0 au prix initial S_0 versant des dividendes entre 0 et T
- C — Achat d'une option de vente avec prix d'exercice K et échéance T
- D — Vente d'une option d'achat avec prix d'exercice K et échéance T

Le coût initial de cette combinaison est :

$$Coût\ initial = \underbrace{S_0}_{B} + \underbrace{P(K,T)}_{C} - \underbrace{C(K,T)}_{D} - \underbrace{K\left(1+r_f\right)^{-T}}_{A}$$

La combinaison des trois derniers points implique qu'on va soit vendre l'action au prix K ou…. Vendre l'action au prix K ! Ce prix K correspond exactement au montant accumulé de notre prêt (premier point). Le prix ainsi obtenu en vendant l'action à t = T permettra de rembourser le prêt.

Cependant, l'action achetée à t = 0 nous a procuré des dividendes avant l'échéance T. L'accumulation de ces dividendes, soit leur valeur future $VF(div)$ est ainsi la valeur à l'échéance associée à un *forward* sur les dividendes avec comme coût initial celui trouvé précédemment et ainsi :

$$F_{0,T}^{P}(div) = S_0 + P(K,T) - C(K,T) - K\left(1+r_f\right)^{-T}$$

$$F_{0,T}(div) = F_{0,T}^{P}(div)\left(1+r_f\right)^{T}$$

$$F_{0,T}(div) = [S_0 + P(K,T) - C(K,T)]\left(1+r_f\right)^{T} - K$$

9.2. Parité généralisée et options d'échange

9.2.1. Options d'échange, cas général

Il peut arriver que, pour un cas plus général, le prix d'exercice d'une option ne soit pas exprimé en argent tel que vu jusqu'à présent. Il pourra arriver qu'on s'intéresse à un échange entre deux sous-jacents distincts, par exemple. Pour conserver la notation utilisée dans le livre de référence, on notera :

- Le sous-jacent est réputé être le titre A et sa valeur au temps t est encore notée S_t. Le prix d'un *forward* préparé au moment *t* et à une échéance *T* sur le titre A est noté $F_{t,T}^{P}(S)$.
- Le prix d'exercice est réputé être le titre B et sa valeur au temps t est notée Q_t. Le prix d'un *forward* préparé au moment *t* et à une échéance *T* sur le titre B est noté $F_{t,T}^{P}(Q)$.

On note dorénavant que $Call(S_t, Q_t, T-t)$ est une option d'achat qui permet d'acheter le titre A au prix du titre B à l'échéance T. Si on établit ce contrat à t = 0, alors on aura $Call(S_0, Q_0, T)$.

L'équivalent en options de vente serait donc $Put(S_t, Q_t, T-t)$ qui permettrait de vendre le titre A au prix du titre B à l'échéance T. Si on établit ce contrat à t = 0, alors on aura $Put(S_0, Q_0, T)$.

Les valeurs à l'échéance seront respectivement :

$$Valeur\ \grave{a}\ l'\acute{e}ch\acute{e}ance\ Call(S_t, Q_t, T-t) = \max(0, S_T - Q_T)$$

$$Valeur\ \grave{a}\ l'\acute{e}ch\acute{e}ance\ Put(S_t, Q_t, T-t) = \max(0, Q_T - S_T)$$

L'équation de parité des options d'achat et de vente s'écrira maintenant :

$$C(S_t, Q_t, T-t) - P(S_t, Q_t, T-t) = F_{t,T}^{P}(S) - F_{t,T}^{P}(Q)$$

Au-delà de l'intuition derrière cette formule, on peut la démontrer avec la stratégie suivante :

Transaction	t	$S_T \leq Q_T$	$S_T > Q_T$
Acheter l'option d'achat	$-C_{euro}(S_t, Q_t, T-t)$	$+0$	$+(S_T - Q_T)$
Vendre l'option de vente	$+P_{euro}(S_t, Q_t, T-t)$	$-(Q_T - S_T)$	-0
Vendre le contrat à terme prépayé sur le titre A	$+F_{t,T}^{P}(S)$	$-S_T$	$-S_T$
Acheter le contrat à terme prépayé sur le titre B	$-F_{t,T}^{P}(Q)$	$+Q_T$	$+Q_T$
TOTAL	?	0	0

Puisque la combinaison de toutes ces positions fournit en tout temps des valeurs à l'échéance nulles, alors le coût initial devra également être nul. Ainsi, on a que :

$$-C(S_t, Q_t, T-t) + P(S_t, Q_t, T-t) + F_{t,T}^{P}(S) - F_{t,T}^{P}(Q) = 0$$

$$\Rightarrow C(S_t, Q_t, T-t) - P(S_t, Q_t, T-t) = F_{t,T}^{P}(S) - F_{t,T}^{P}(Q)$$

Le fait de pouvoir acheter le titre A au prix du titre B équivaut à pouvoir vendre le titre B au prix du titre A (ce qui nous intéressera uniquement si $S_T > Q_T$). Ainsi, on aura que :

$$C(S_t, Q_t, T-t) = P(Q_t, S_t, T-t)$$

Ainsi, le fait de définir « le sous-jacent » versus « le prix d'exercice » est un peu abstrait dans ce genre de contrat. « Acheter » ou « vendre » est donc relatif, selon la convention. On dira d'une personne qu'il a une position courte dans un titre et une position longue dans l'autre titre parfois pour simplifier.

Remarque : parfois, on définira S_t ou encore Q_t comme étant un multiple d'un certain nombre de titres, par exemple S_t représente un titre A et Q_t représente un nombre X de titres B. Il peut arriver que des actions aient des valeurs initiales à des niveaux très différentes (exemple, une action à 10$ et une autre à 100$), alors il faudra les ramener à des ordres de grandeur, des niveaux semblables en ajustant les valeurs notionnelles.

9.2.2. Options sur devises

Les options d'achat et de vente sur les devises sont déjà des options d'échange puisqu'on échange une devise (locale, domestique) pour une autre devise (étrangère), le sous-jacent étant la devise étrangère et le prix d'exercice étant la devise locale par défaut. Au même titre que les options d'échange qui peuvent être équivalentes (achat versus vente) en inversant les titres et leur position respective, on pourra inverser une option sur une devise avec la même logique.

Soit x_0 le taux de change initial, ce qui implique qu'il faudra payer $x_0 * DD$ pour obtenir une unité de DÉ.

Si on interchange les devises, alors on aura qu'il faut $\frac{1}{x_0}D\text{É}$ pour obtenir une unité de DD. Le sous-jacent sera toujours une seule unité d'une devise quelconque par défaut, dans tous les cas.

- Si l'option est libellée en DD, le sous-jacent est de 1*DÉ mais le tout est évalué en DD.
- Si l'option est libellée en DÉ, le sous-jacent est de 1*DD mais le tout est évalué en DÉ.

Par défaut

On notera une option d'achat de devises étrangères, dont le prix est exprimé en devises domestiques comme ceci :

$$\underbrace{Call_{DD}}_{\text{Prix en DD}}(\overset{\text{Sous-jacent en DÉ}}{x_0}, \underbrace{K}_{\text{K*DD pour un DÉ}}, T)$$

Le fait de mettre x_0 et K comme paramètres implique que cette option nous permet d'acheter 1*DÉ pour K*DD à l'échéance T. Le libellé « *DD* » implique que le prix de cette option est exprimé en *DD*. À noter que le sous-jacent est ici DÉ puisque le taux de change x_0 implique l'achat de devises étrangères et non l'inverse. On exercera l'option uniquement si $x_T > K$.

Remarque : on a que $Call_{DD}(x_0, K, T) \Leftrightarrow Put_{DD}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right)$, mais avec un ordre de grandeur différent (rappel, l'option s'applique pour *une unité du sous-jacent*, alors ici les options sont équivalentes *toute proportion gardée*). Dans les faits, on aura :

$$Call_{DD}(x_0, K, T) = K * \boldsymbol{x_0} * Put_{\boldsymbol{D}\text{É}}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right)$$

Pour illustrer cette dernière égalité, observons la stratégie suivante :

Transaction	t = 0	$x_T < K$	$x_T > K$
Achat d'un Call$_{DD}$	$-C_{DD}(x_0, K, T)$	0	$+1 * D\text{É} - K * DD$
Vente de K Put$_{D\text{É}}$	$\underbrace{+K * P_{D\text{É}}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right)}_{=K*x_0*P_{D\text{É}}\left(\frac{1}{x_0},\frac{1}{K},T\right)}$ en devises locales (DD)	0	$\underbrace{-K\left(\frac{1}{K} * D\text{É} - 1 * DD\right)}_{=-1*D\text{É}+K*DD}$
Total	$-C_{DD}(x_0, K, T)$ $+K * x_0 * P_{D\text{É}}\left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{K}, T\right)$	0	0

Comme la valeur à l'échéance est assurément 0, le coût initial se doit d'être nul, ce qui revient à l'équation précédente.

9.3. Comparaison de différentes options (type, échéance, prix d'exercice)

9.3.1. Option américaine versus européenne

Dans un premier temps, on a qu'une option américaine coûte autant ou plus cher qu'une option européenne :

$$C_{AMER}(K,T) \geq C_{EURO}(K,T) \ ; \ P_{AMER}(K,T) \geq P_{EURO}(K,T)$$

Rappel : l'option américaine permet une levée à n'importe quel moment avant l'échéance.

Dans bien des cas, elle vaut autant qu'une option européenne, mais il pourra parfois être avantageux d'exercer une option d'achat américaine en avance dans le cas où le sous-jacent verserait des dividendes. En l'absence de dividendes, on présumera que les coûts pour ces deux types d'options sont égaux, et en présence de dividendes, on aura que $C_{Amer} > C_{Eur}$.

Remarque : le livre de référence utilise la notation C_{Eur}, P_{Eur}, C_{Amer}, P_{Amer} pour désigner le prix des options d'achat et de vente selon qu'elles soient de type européen ou américain. Sans précision supplémentaire, on présume toujours qu'on parle d'options européennes par défaut.

9.3.2. Options américaines

Option d'achat américaine

En général, on n'exercera pas l'option d'achat américaine en avance si $C_{Amer}(S_t, K, T-t) > S_t - K$. Dans cette situation, la levée de l'option nous ferait perdre de l'argent, par rapport à la revente de l'option à une tierce partie (ou simplement attendre encore).

En l'absence de dividendes, on aura l'inégalité :

$$C_{Amer}(S_t, K, T-t) = C_{Eur}(S_t, K, T-t) \geq S_t - K\left(1+r_f\right)^{-(T-t)} \geq S_t - K$$

… ce qui explique pourquoi on n'exercera pas une option d'achat en avance sans versement de dividendes. Voir p. 277 *DM* (équation 9.13 et explications qui y sont attachées) pour plus de détails.

On peut alors se demander ce qui arrive avec des dividendes fixes qui sont payés avec le sous-jacent. On reprend l'équation de parité avec dividendes pour un cas général évalué au moment t, soit :

$$C(K, T-t) - P(K, T-t) = \left[S_t - \underbrace{VP(div)}_{\text{Entre t et T}}\right] - K\left(1+r_f\right)^{-(T-t)}$$

L'exercice de l'option d'achat ne sera toujours pas optimal si :

$$K - K(1 + r_f)^{-(T-t)} > VP(div)$$

Autrement, il pourrait être optimal d'exercer l'option avant l'échéance (si c'est possible, et donc si et seulement si l'option est américaine).

Exemple (preuve par l'absurde) : une action vaut actuellement 100$. Vous possédez une option d'achat avec prix d'exercice K = 90$. L'échéance est dans un mois, et un dividende de 99,99$ sera payé tout juste avant l'échéance. Quelle stratégie est optimale pour vous ?

Solution : Si on peut exercer avant le dividende, on paye $K=90$ et on reçoit le dividende de 99,99$ $\rightarrow$ 9,99 = valeur à l'échéance.

Sinon, $S_T \cong 0\$$ ...

Dans les faits, si on reprend l'équation de parité, on peut réécrire :

$$C(K, T-t) = P(K, T-t) + S_t - VP(div) - K(1 + r_f)^{-(T-t)}$$

$$C(K, T-t) = P(K, T-t) + [S_t - K] - VP(div) + K\left[1 - (1 + r_f)^{-(T-t)}\right]$$

On vient ainsi de séparer une option d'achat en quatre composantes, soit l'option de vente implicite (*implicit put*), la valeur d'exercice (*exercice value*), la valeur actualisée des dividendes et l'intérêt sur le prix d'exercice.

- L'option de vente $P(K, T-t)$ dans la partie droite de l'équation constitue une option de vente *implicite* dans l'option d'achat. Cette option implicite est l'option de ne pas exercer l'option d'achat. On a déjà vu dans le chapitre 3 que le fait d'acheter le sous-jacent avec une option de vente (*floor*) correspondait à l'achat d'une option d'achat. La composante de l'option de vente est parfois appelée un « put implicite dans le call » (et vice-versa). Le fait d'exercer une option d'achat hâtivement nous force à abandonner la valeur implicite de l'option de vente.

- Le 2ème élément, $[S_t - K]$, est appelée valeur d'exercice.

- L'intérêt sur le prix d'exercice $K\left[1 - (1 + r_f)^{-(T-t)}\right]$ représente une forme de coût lié à un exercice hâtif de l'option d'achat.

En général, on aura qu'un exercice hâtif d'une option **pourrait** être rationnel et profitable si $VP(div) > P(K, T-t) + K\left[1 - (1 + r_f)^{-(T-t)}\right]$. La valeur d'exercice $[S_t - K]$ ne devrait cependant pas influencer la décision. Voir exercice supplémentaire #7.

Remarques :

1. S'il devient avantageux d'exercer une option d'achat avant l'échéance, c'est le moment tout juste avant la date ex-dividende qui sera le plus optimal pour exercer l'option (autrement, on perd de l'intérêt sur le prix d'exercice).
2. Si la présence de dividendes rend la levée hâtive plus intéressante, il reste que le sous-jacent peut significativement baisser de valeur d'ici la date d'échéance et que la levée hâtive pourrait s'avérer une très mauvaise décision selon l'évolution de la valeur du sous-jacent d'ici à l'échéance…

Option de vente américaine

Il peut également être avantageux d'exercer une option de vente américaine avant l'échéance puisque le prix d'exercice K vaut plus s'il est reçu plus tôt (il pourra accumuler de l'intérêt d'ici l'échéance T), en contrepartie de l'information inconnue qui suivra la levée de l'option (et si le sous-jacent reprenait ensuite de la valeur… ?). Moment le plus optimal = APRÈS le dividende

Remarque : Au sens général, un exercice hâtif d'une option (achat ou vente) nous empêche d'avoir une certaine information complète et optimale et parfois, la patience est de mise pour éviter des mauvaises surprises. L'un des éléments qui constitue la valeur d'une option est le temps avant l'échéance, et l'exercice hâtif nous fait perdre cette petite valeur ajoutée (toute l'information disponible d'ici T), d'une certaine manière.

9.3.3. Limites pour les prix des options

Quelques contraintes logiques :

- Les prix ne peuvent être négatifs, peu importe le type d'option.

$$C > 0 \quad , \quad P > 0$$

- Le prix d'une option d'achat ne peut excéder la valeur initiale du sous-jacent

$$C \leq S_0 \quad \text{et} \quad P \leq K$$

- Le prix d'une option d'achat doit au moins être égale à l'équation de parité en présumant un prix nul pour l'option de vente et vice-versa (cas limites)

$$C \geq F^P_{0,T} - K(1+r_f)^{-T} \quad , \quad P \geq K(1+r_f)^{-T} - F^P_{0,T}$$

- La combinaison de ces contraintes avec celle établie en 9.3.1. implique donc l'inégalité suivante pour les options d'achat :

$$\max(0, F^P_{0,T} - K(1+r_f)^{-T} \leq C_{EURO}(K,T) \leq C_{AMER}(K,T) \leq S_0$$

$$S_0 - K \leq C_{AMER}(K,T)$$

- Selon la même logique, pour les options de vente on aura :

$$\max(0, K(1+r_f)^{-T}) \leq P_{EURO}(K,T) \leq P_{AMER}(K,T) \leq K$$

$$K - S_0 \leq P_{AMER}(K,T)$$

Exemple (ASM, illustration section 19.1) : illustrez les bornes minimales et maximales pour les prix d'une option d'achat européenne et d'une option d'achat américaine (axe des y) en fonction du prix d'exercice K (axe des x) en supposant la même échéance et le même sous-jacent versant un taux de dividende continu δ pour les deux options, avec un taux d'intérêt sans risque r.

Solution (tirée de l'ASM) :

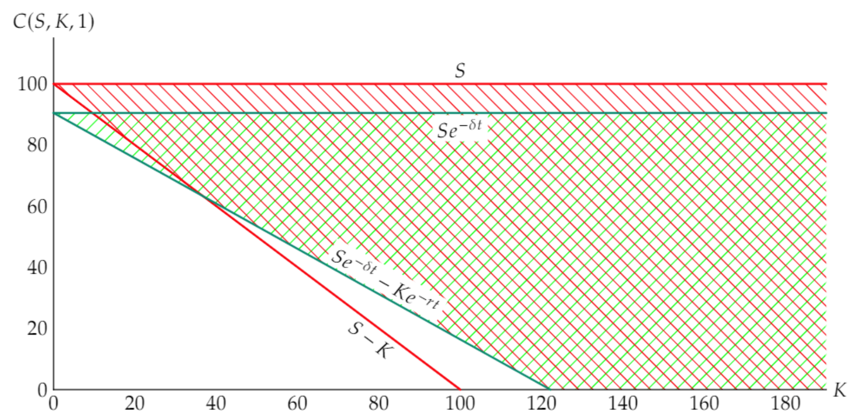


Figure 19.1: Bounds for American and European call option prices. $S = 100$. The lower red boundary line is the $S - K$ bound for an American option, and the lower green line is the $Se^{-\delta t} - Ke^{-rt}$ bound for a European option; however, when the latter is higher than the former, it is a lower bound for an American option as well. The red hatched area shows the possible values for an American call and the green hatched area shows the possible values for a European call.

9.3.4. Échéance

Lecture complémentaire : p.280-281 DM

L'échéance est une composante déterminante dans le prix d'une option.

Règle générale, lorsque l'échéance T augmente :

- Pour une option européenne, le prix peut soit descendre ou monter, selon les autres paramètres de l'option
- Pour une option américaine, chose certaine, le prix ne baissera jamais

Options américaines

La logique est relativement simple avec une option américaine : en augmentant l'échéance, on conserve les mêmes droits qu'avant (l'ancien échéance, plus petite, est toujours une possibilité pour exercer l'option) et on rajoute la possibilité d'exercer l'option plus tard également.

Plus de choix (sans enlever les choix qu'on avait déjà) impliquera donc un prix plus élevé, tout simplement et ainsi, avec $T_1 < T_2$, on aura :

$$C_{Amer}(K, T_1) \leq C_{Amer}(K, T_2)$$
$$P_{Amer}(K, T_1) \leq P_{Amer}(K, T_2)$$

Options d’achat européennes sans dividendes

Comme on a vu que le prix d’une option d’achat européenne devait normalement être le même que celui d’une option d’achat américaine, et qu’on vient de démontrer que le prix d’une telle option augmentait en fonction de l’échéance, on pourra faire le même parallèle avec l’option d’achat européenne.

Autrement dit, toujours avec $T_1 < T_2$, on aura que :

$$C_{Eur}(K, T_1) \leq C_{Eur}(K, T_2)$$

Intuitivement, on pourra affirmer que plus l’échéance est lointaine, plus on aura d’information pour faire un choix éclairé en exerçant ou non l’option ce qui en fait augmenter la valeur.

Options d’achat européennes avec dividendes

Le fait de rajouter des dividendes dans l’équation rend les choses plus difficiles. Ceci dépendra du niveau des dividendes et des échéances qu’on voudra comparer.

Exemple (preuve par l’absurde) : une compagnie prévoit verser un dividende « de liquidation » dans deux semaines. Comparez les valeurs d’options d’achat avec échéance une semaine versus trois semaines.

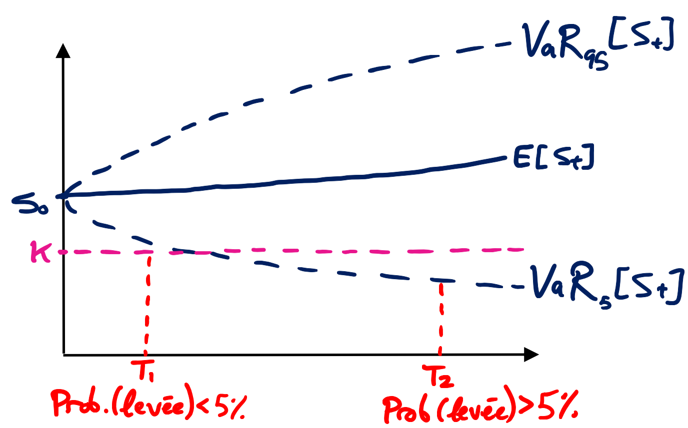
$Div \cong S_0 \Rightarrow$ Dans 1 semaine : val. à l'éch. $\cong \max(0, S_0 - K) \cong \max(0, Div - K) \geq 0$

$\Rightarrow$ Dans 3 semaines : val. à l'éch. $= \emptyset$ car liquidation

Options de vente européennes

Il est impossible d’établir un constat clair et applicable en tout temps avec les options de vente comme on vient de le faire avec les options d’achat. Dans certains cas, une échéance plus courte permettra d’obtenir des liquidités rapidement et de cumuler de l’intérêt sur ces liquidités, mais dans un autre sens, avec une échéance très courte et un prix d’exercice inchangé et selon les autres paramètres de l’option de vente, le sous-jacent n’aura jamais eu le temps d’atteindre le prix d’exercice (si celui-ci est de beaucoup inférieur à la valeur initiale du sous-jacent) et l’option pourrait ainsi ne jamais être levée.

Illustration (cas simple, mouvement brownien pour décrire l’évolution de la valeur du sous-jacent) :

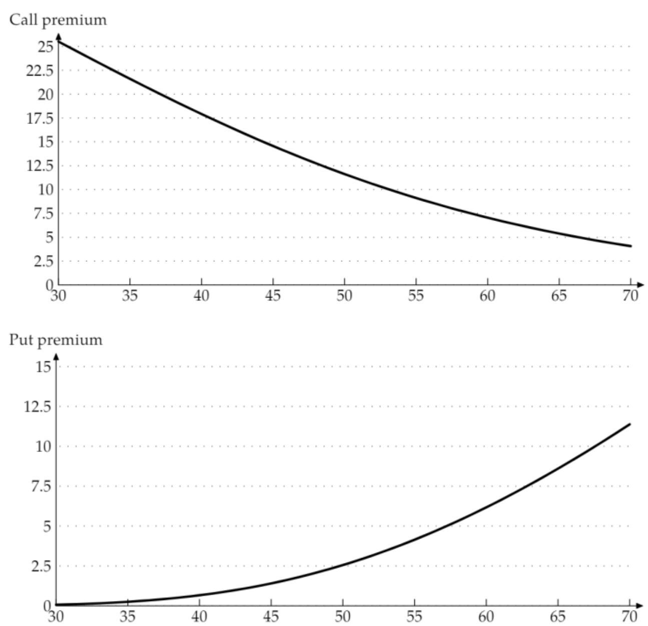


9.3.5. Prix d’exercice

Avec $K_1 < K_2$, on a :

$$C(K_1, T) > C(K_2, T)$$
$$P(K_1, T) < P(K_2, T)$$

… et ce peu importe le type d’option (européenne et américaine).



<u>Cas d’un prix d’exercice « constant en valeur actualisée »</u>

On s’intéresse au cas d’un prix d’exercice « constant en valeur actualisée », ce qui revient à avoir un prix d’exercice plus élevé pour une échéance plus élevée de façon à ce que :

$$K_t = K\left(1 + r_f\right)^t = Ke^{rt}$$

Autrement dit, les prix d’exercice sont « égaux en valeur actualisée ».

<u>Prix d’exercice « constant en valeur actualisée » avec option d’achat</u>

Pour les options d’achat, avec cette contrainte et avec t < T, on aura que :

$$C(K_t, t) \leq C(K_T, T)$$

Pour démontrer cette inégalité, on regardera la stratégie suivante :

- Achat d’un $Call(K_T, T)$
- Vente d’un $Call(K_t, t)$
- Prêt de K_t à t si le $Call(K_t, t)$ est exercé
- Vente du sous-jacent S_t si le $Call(K_t, t)$ est exercé

Quatre scénario seront ainsi possibles en bout de ligne, selon que la première option (position courte) soit exercée ou non et selon que la deuxième option (position longue) soit exercée ou non.

Dans les faits, si les deux options sont exercées, ceci impliquera qu'on vende (position courte dans le sous-jacent avec $Call(K_t, t)$) puis qu'on rachète (position longue dans le sous-jacent avec $Call(K_T, T)$) le sous-jacent, ce qui produit un effet « neutre » en bout de ligne. Il en va de même si aucune option n'est levée.

C'est lorsque l'un ou l'autre des options (mais pas les deux) qui est exercée qu'on obtient une valeur à l'échéance non-nulle.

Le tableau suivant présente un résumé des scénarios possibles avec les flux financiers et les valeurs à l'échéance comme résultats :

		à t		à T			
				$S_T \leq K_T$		$S_T > K_T$	
Transaction	à 0	$S_t \leq K_t$	$S_t > K_t$	$S_t \leq K_t$	$S_t > K_t$	$S_t \leq K_t$	$S_t > K_t$
Acheter l'option d'achat échéant à T	$-C_{euro}(K_T, T)$	0	0	+0	+0	$+(S_T - K_T)$	$+(S_T - K_T)$
Vendre l'option d'achat échéant à t	$+C_{euro}(K_t, t)$	−0	$-(S_t - K_t)$	0	0	0	0
Prêter K_t à t si l'option vendue est levée	0	0	$-K_t$	0	$+K_T$	0	$+K_T$
Vendre l'action à t si l'option vendue est levée	0	0	$+S_t$	0	$-S_T$	0	$-S_T$
TOTAL	?	0	0	0	$+(K_T - S_T)$	$+(S_T - K_T)$	0

On constate que la valeur à l'échéance est soit nulle, soit positive. Ainsi, le coût initial de cette stratégie se doit d'être positif, ce qui implique que $C(K_t, t) \leq C(K_T, T)$.

<u>Remarque</u> : dans le tableau, on présente les entrées et sorties de fonds. On doit avoir un flux total négatif au temps 0 pour exprimer une sortie de fonds (-), ce qui représente un coût initial positif (+) car la stratégie coûte initialement $C(K_T, T) - C(K_t, t) > 0$.

<u>Prix d'exercice « constant en valeur actualisée » avec option de vente</u>

Pour les options de vente, on aura que :

$$P(K_t, t) \leq P(K_T, T)$$

Pour démontrer cette inégalité, on regardera la stratégie suivante :

- Achat d'un $Put(K_T, T)$
- Vente d'un $Put(K_t, t)$
- Emprunt de K_t à t si le $Put(K_t, t)$ est exercé
- Achat du sous-jacent S_t si le $Put(K_t, t)$ est exercé

Tableau qui résume encore les flux financiers et les valeurs à l'échéance liées à cette stratégie :

		à t		à T			
				$S_T \le K_T$		$S_T > K_T$	
Transaction	à 0	$S_t \le K_t$	$S_t > K_t$	$S_t \le K_t$	$S_t > K_t$	$S_t \le K_t$	$S_t > K_t$
Acheter l'option de vente échéant à T	$-P_{euro}(K_T, T)$	0	0	$+(K_T - S_T)$	$+(K_T - S_T)$	+0	+0
Vendre l'option de vente échéant à t	$+P_{euro}(K_t, t)$	$-(K_t - S_t)$	−0	0	0	0	0
Emprunter K_t à t si l'option vendue est levée	0	$+K_t$	0	$-K_T$	0	$-K_T$	0
Acheter l'action à t si l'option vendue est levée	0	$-S_t$	0	$+S_T$	0	$+S_T$	0
TOTAL	?	0	0	0	$+(K_T - S_T)$	$+(S_T - K_T)$	0

On constate que la valeur à l'échéance est soit nulle, soit positive. Ainsi, le coût initial de cette stratégie se doit d'être positif, ce qui implique que $P(K_t, t) \le P(K_T, T)$.

L'exercice supplémentaire #8 montre comment tirer profit d'une possibilité d'arbitrage lorsqu'un de ces inégalités n'est pas respectée.

9.4. Exercices supplémentaires

1. Une action qui versera un dividende de 1\$ dans 2 mois vaut actuellement 45\$. Une option de vente européenne d'échéance 3 mois et avec un prix d'exercice de 42\$ coûte 2,71\$. Déterminez le prix d'une option d'achat avec les mêmes caractéristiques si la force d'intérêt sans risque est de 5%.

2. Une action qui versera un taux de dividende continu de 2% vaut actuellement 40\$. Une option d'achat européenne d'échéance 1 an et avec un prix d'exercice de 50\$ coûte 2,34\$. Déterminez le prix d'une option de vente avec les mêmes caractéristiques si la force d'intérêt sans risque est de 8%.

3. On désire créer une action synthétique avec des options d'achat et de vente avec un prix d'exercice de 40\$ et une échéance d'un an. La force d'intérêt sans risque est de 5% et le sous-jacent (l'action) aux options verse un taux de dividende continu de 2%. Quelle stratégie nous permettra de créer l'action synthétique ?

4. Avec les mêmes informations qu'au numéro précédent, comment pourrait-on recréer un bon du trésor d'échéance un an (obligation zéro-coupon d'échéance un an) ?

5. Le taux de change pour obtenir des livres sterling est actuellement de 1.4\$/£. La force d'intérêt sans risque est de 5% pour le \$ et de 8% pour le £. Une option de vente européenne d'échéance 9 mois permet de vendre 1£ à un taux de 1,50\$/£. Une option d'achat avec les mêmes caractéristiques coûte actuellement 0,0223\$ (exprimé en \$). Déterminez le prix de l'option de vente (exprimé en \$).

6. Une action vaut 70\$ et paye un taux de dividende continu de 8% avec une force d'intérêt sans risque de 4%. Une option de vente américaine a un prix d'exercice de 69\$ et une échéance d'un an. Déterminez le coût minimal théorique pour cette option.

7. Une action payera un dividende aujourd'hui même et un autre dans 3 mois. Les dividendes sont de 1,50\$. L'action vaut actuellement 100\$ et le taux d'intérêt sans risque est de 4%. Une option de vente européenne avec prix d'exercice de 85\$ et d'échéance 5 mois coûte actuellement 0,82\$. Vous possédez une option d'achat américaine avec des caractéristiques semblables. Est-il profitable/optimal d'exercer votre option immédiatement, tout juste avant le paiement du dividende (si vous exercez l'option, le dividende vous reviendra, on omet le concept de date ex dividende).

8. Une action qui ne verse aucun dividende vaut actuellement 40\$. La force d'intérêt sans risque est de 5%. Des options d'achat européennes avec les informations suivantes sont disponibles :

$$C\left(45\,;\,\frac{1}{2}\right) = 0.60$$
$$C(46.14\,;1) = 0.55$$

Vous créez une stratégie pour profiter de l'arbitrage possible entre ces deux options. Pour ce faire, vous achetez et vendez une option de chaque type. Calculez votre profit après 12 mois si l'action vaut 50$ après 6 mois et 47$ après un an.

9. Deux options de vente européennes sont disponibles avec les prix suivants :

$$P\left(35\;;\frac{1}{2}\right) = 5$$
$$P\left(45\;;\frac{1}{2}\right) = 4$$

Le sous-jacent vaut actuellement 47$, la force d'intérêt sans risque est de 5%. Vous voyez une opportunité d'arbitrage et vous vendez l'option de vente avec prix d'exercice de 35$, puis vous achetez n options de vente avec prix d'exercice de 45$ de façon à ce que le coût initial soit nul. Après 6 mois, le sous-jacent vaut 32$. Calculez votre profit.

9.5. Solutions

1. $C(K,T) - P(K,T) = [S_0 - VP(div)] - K(1+r_f)^{-T}$
   $C\left(42,\frac{1}{4}\right) - 2.71 = \left[45 - 1 * e^{-\frac{0.05}{6}}\right] - 42e^{-\frac{0.05}{4}} \rightarrow C\left(42,\frac{1}{4}\right) = 5.24$

2. $C(K,T) - P(K,T) = S_0e^{-\delta T} - Ke^{-rT}$
   $2.34 - P(50,1) = 40e^{-0.02} - 50e^{-0.08} \rightarrow P(50,1) = 9.29$

3. $S_0 = (C(40,1) - P(40,1) + 40e^{-0.05})e^{0.02}$

   - Achat de $e^{0.02}$ $Call(40,1)$
   - Vente de $e^{0.02}$ $Put(40,1)$
   - Achat d'obligations zéro-coupon (bons du trésor 1 an) en investissant $40e^{-0.03}$
   - Après un an, le bon du trésor nous versera $40e^{0.02} = 40.808$, une des options sera exercée et on payera $40e^{0.02} = 40.808$ pour obtenir $e^{0.02} * S_1$, ce qui représente ce qu'on aurait eu en achetant initialement l'action à t = 0 et en réinvestissant les dividendes.

4. $\underbrace{Ke^{-rT}}_{40e^{-0.05}} = \underbrace{S_0e^{-\delta T}}_{40e^{-0.02}} - C(40,1) + P(40,1)$

   - Achat d'un $Put(40,1)$
   - Vente d'un $Call(40,1)$
   - Achat de $e^{-0.02}$ action
   - Après un an, une des options sera exercée et on donnera l'action contre 40\$, ce qui est exactement ce qu'on aurait obtenu avec un bon du trésor 1 an.

5. $\underbrace{C(x_0,K,T)}_{C\left(1.4,1.5,\frac{3}{4}\right)=0.0223} - \underbrace{P(x_0,K,T)}_{P\left(1.4,1.5,\frac{3}{4}\right)=?} = \underbrace{x_0(1+r_{É})^{-T}}_{1.4e^{-0.08*0.75}} - \underbrace{K(1+r_D)^{-T}}_{1.5e^{-0.05*0.75}}$

   $$\rightarrow P\left(1.4,1.5,\frac{3}{4}\right) = 0.14862$$

6. $P_{Amer}(69,1) \geq P_{Euro}(69,1) \geq \underbrace{Ke^{-rT}}_{69e^{-0.04}} - \underbrace{S_0e^{-\delta T}}_{70e^{-0.08}} = 1.6763$

7. La valeur de l'option de vente implicite est de 0.82\$. La valeur de l'intérêt sur le prix d'exercice est de $85\left(1 - e^{-0.04*\frac{5}{12}}\right) = 1.4049\$$. La somme de ces deux éléments représente la perte totale liée à la levée hâtive, soit 2.2249\$. La valeur actualisée des dividendes est de $1.5\left(1 + e^{-\frac{0.04}{4}}\right) = 2.9851$. Ainsi, la valeur actualisée des dividendes dépasse les coûts liés à un exercice hâtif, et il **peut** être rationnel d'exercer l'option hâtivement (tout de suite).

8. Solution tirée du manuel ASM :

19-4. You sell a 6-month call and buy a 12-month call for a gain of 0.05. After 6 months, the call you sold is exercised. You receive 45.00 and borrow the stock to deliver it, or alternatively you settle for 5.00 and sell the stock short for 50.00, for a net cash flow of 45.00. 6 months later, your 45.00 is worth $45e^{0.025} = 46.14$. You exercise the 12-month call, pay 46.14, get the stock back, and return it to the lender, or alternatively you settle by receiving 0.86 and buy the stock back for 47.00 for a net cash flow of −46.14. The following table shows the cash flows:

Time	Sale/payoff of 6-month call	Purchase of 12-month call	Sale/purchase of stock	Net cash flow
0 months	0.60	−0.55	—	0.05
6 months	−5.00	—	50.00	45.00
12 months	—	0.86	−47.00	−46.14

Your profit is the 0.05 you gained at the beginning, accumulated with a year's interest:

$$0.05e^{0.05} + 45.00e^{0.05(0.5)} - 46.14 = \boxed{0.052}$$

Note that your profit would be greater if the final stock price at the end of 12 months were less than 46.14, since you've sold the stock short after 6 months. You would buy it back at at the final stock price and the difference between that and 46.14 would be additional profit.

9. Vous achetez 1.25 $Put\left(45\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ pour un coût de 5$ et vendez un $Put\left(35\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ pour un coût de 5$ (coût initial nul au total). Après 6 mois, le $Put\left(45\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ vous rapporte $1.25(45 - 32) = 16.25$ et le $Put\left(35\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ vous coute $(35 - 32) = 3$. Profit total : 16.25 – 3 = 13.25$