Chapitre II : Modèles a plusieurs états

- Modèles a plusieurs états
- Chaînes de Markov (homogènes et non-homogènes)
- Valeur présente des coûts (en anglais « cash flow »)
  - Le cas discret
  - Le cas continu

Le modèle « actif-décédé »

Le modèle « actif-annulé -décédé »

Le modèle « autonome, semi-autonome, non-autonome, décédé »

Le modèle « actif-invalide -décédé »

« Modèles à plusieurs vies » (le chapitre prochain)

« Modèles à plusieurs décroissances »

Chaînes de Markov en temps discret - probabilité de transition

- Supposons un espace à états finis : $\{1, 2, \ldots, r\}$ (ou $\{0, 1, 2, \ldots, r\}$)
- Supposons que les transitions se produisent seulement en fin d'année.
- Soit M_t (ou $M(t)$) l'état au temps t.
- Définition : On dit que le processus M_t est une « chaîne de Markov » (en temps discret) si et seulement si

$$P(M_{t+1} = j | M_t = i, M_{t-1}, ..., M_0) = P(M_{t+1} = j | M_t = i)$$

pour $t = 0, 1, 2, \ldots$.

- Notation pour la probabilité de transition :

$$P(M_{t+1} = j | M_t = i) = Q_t^{ij}.$$

  - Autres notations : $Q_t^{(i,j)}$, $Q_t^{(ij)}$, p_t^{ij}, $p_{x+t}^{(i,j)}$, $p_{(i,j)}(t, t+1)$.
    - Livre de Étienne Marceau : $p_{(i,j)}(t, t+1)$ ou $p_{(i,j)}(x; t, t+1)$
    - Livre de Dickson et al. : p_{x+t}^{ij}
- La matrice des probabilités des transitions est

$$\mathbf{Q_t} = \begin{bmatrix} Q_t^{11} & Q_t^{12} & \dots & Q_t^{1r} \\ Q_t^{21} & Q_t^{22} & \dots & Q_t^{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_t^{r1} & Q_t^{r2} & \dots & Q_t^{rr} \end{bmatrix},$$

Chaînes de Markov « homogènes » et « non-homogènes »

- Si la matrice de probabilités des transitions $\mathbf{Q_t}$ dépend du temps t, M_t est une chaîne de Markov non-homogène.
- Sinon, M_t est une chaîne de Markov homogène et on utilise pour $\mathbf{Q_t}$ la notation $\mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q_t}^{ij} = \mathbf{Q}^{ij}$).
- On définit la matrice de k-étapes de transitions $_{\mathbf{k}}\mathbf{Q_t}$ avec

$$_kQ_t^{ij} = P(M_{t+k} = j | M_t = i)$$

i.e., la probabilité de transition de l'état i (au temps t) à l'état j en k étapes (au temps $t+k$).

- Donc,

$$\mathbf{{}_kQ_t} = \begin{bmatrix} {}_kQ_t^{11} & {}_kQ_t^{12} & \cdots & {}_kQ_t^{1r} \\ {}_kQ_t^{21} & {}_kQ_t^{22} & \cdots & {}_kQ_t^{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}_kQ_t^{r1} & {}_kQ_t^{r2} & \cdots & {}_kQ_t^{rr} \end{bmatrix},$$

- Autres notations : ${}_kQ_t^{(i,j)},\ {}_kQ_t^{(ij)},\ {}_kp_t^{ij},\ {}_kp_{x+t}^{(i,j)},\ p_{(i,j)}(t,t+k)$.
  - Livre de Étienne Marceau : $p_{(i,j)}(t,t+k)$ ou $p_{(i,j)}(x;t,t+k)$
  - Livre de Dickson : ${}_kp_{x+t}^{ij}$

Équations de Chapman-Kolmogorov

Théorème 2.1

$$_{\mathbf{k}}\mathbf{Q_t} = \mathbf{Q_t} \times \mathbf{Q_{t+1}} \times \ldots \times \mathbf{Q_{t+k-1}}$$

- Équations de Chapman-Kolmogorov :

$$_{m+n}Q_t^{ij} = \sum_{k=1}^{r} [_m Q_t^{ik}][_n Q_{t+m}^{kj}]$$

  - En notation de Dickson : $_{m+n}p_x^{ij} = \sum_{k=1}^{r} [_m p_x^{ik}][_n p_{x+m}^{kj}]$
- Pour les chaînes de Markov homogènes, on obtient :

$$_{\mathbf{k}}\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \times \ldots \times \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^k.$$

Exemple 2.1

Considérons un modèle de maladie grave avec trois états : en santé (s), état critique (i) et mort (m). Supposons un modèle de chaîne de Markov (homogène) avec la matrice de transition

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.92 & 0.05 & 0.03 \\ 0 & 0.76 & 0.24 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Trouver les probabilités d'être à l'état (s), (i) et (m) au temps $t = 1, 2, 3$, sachant que au présent la personne est à l'état (s).

Exemple 2.2
(à faire en classe)

Valeur présente des coûts (« Cash flows ») et sa valeur présente actuarielle

- Il y a des cas où on a des mouvements de trésorerie («cash flows») lors du passage d'un état i à un état j au temps futur. Nous sommes intéressés à trouver la valeur présente actuarielle de ces paiements, sachant que au temps t on est à l'état s. Soit ${}_{t+k+1}C^{ij}$ le montant à payer lors la mouvement de l'état i au temps $t+k$ à l'état j au temps $t+k+1$. Alors, la valeur présente actuarielle de cette rente devient

$$VPA_{s@t} = \sum_{k=0}^{\infty} ({}_{k}Q_{t}^{si})(Q_{t+k}^{ij})({}_{t+k+1}C^{ij})v^{k+1}.$$

- En notation de Dickson : $VPA_{s@t} = \sum_{k=0}^{\infty} ({}_{k}p_{x+t}^{si})(p_{x+t+k}^{ij})({}_{t+k+1}C^{ij})v^{k+1}.$

Exemple 2.3

Une machine peut être dans un des quatre états possibles (a,b,c,d). Les transitions se produisent selon une chaîne de Markov discrète avec les probabilités de transitions :

$$Q^{aa} = .25,\ Q^{ab} = .75, Q^{ba} = Q^{bc} = .5,\ Q^{ca} = .8, Q^{cd} = .2,\ Q^{da} = 1.$$

(Les autres probabilités sont nulles.)
Au temps zéro la machine se trouve dans l'état a. Pour trois ans, une entreprise doit payer $\$100$ à la fin de chaque année si la machine se trouve dans l'état a.
Sachant que $v = .9$ trouver la valeur présente actuarielle au temps zéro de ces paiements.

Exemple 2.4

(SOA) Consider a special 3-year term insurance. There are three states at the beginning of each year : active (H), disabled (S), and dead (D). All insured are initially active. The annual transition probabilities are :

$$Q^{HH} = .8,\ Q^{HS} = .1, Q^{SH} = .1, Q^{SD} = .2.$$

A $\$100,000$ benefit is payable at the end of the year of death whether the insured was active or disabled. Premiums are paid at the beginning of each year when active. Insureds do not pay annual premiums when they are disabled. Interest rate is $i = 10\%$. Calculate the level of the annual premium for this insurance.

Chaînes de Markov en temps continu

- Supposons un espace à états finis : $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
- Soit un processus stochastique $\{Y(s); s \geq 0\}$. Supposons que les transitions ne se produisent pas seulement en fin d'année (elles se peuvent produire à n'importe quel moment $t \geq 0$).
- Soit x l'âge d'une assuré au temps zéro. Au temps t son âge est $x + t$.
- On dit que le processus $Y(x + t) = i$ (ou $Y_x(t) = i$) si l'assuré est à l'état i à l'âge $x + t$ (au temps t).
- Alors, pour chaque $t \geq 0$, $Y(t)$ est une variable aléatoire avec valeurs possibles $0, 1, \ldots, n$.

- Notation :

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x^{ij} &= \mathbb{P}[Y(x+t)=j|Y(x)=i],\\
{}_t p_x^{\overline{ii}} &= \mathbb{P}[Y(x+s)=i, \text{pour tous } \; s\in[0,t]|Y(x)=i].
\end{aligned}
$$

Hypothèses

- Hypothèse (1). Le processus $Y(t)$ est une chaîne de Markov :

$$\mathbb{P}[Y(t+s)=j|Y(t)=i, Y(u), 0 \leq u < t] = \mathbb{P}[Y(t+s)=j|Y(t)=i].$$

- Hypothèse (2) Pour chaque intervalle de longueur h,

$$\mathbb{P}[2 \text{ transitions ou plus pendant une période } h] = o(h).$$

  - Par définition, une fonction $g \in o(h)$ si $\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0$.
- Hypothèse 3 : Pour tous les états i et j et chaque âge $x \geq 0$, ${}_tp_x^{ij}$ est une fonction différentiable par rapport à t.

- Définition : (Seulement) Pour $i \neq j$ on définit la force de transition de l'état i à l'état j :

$$\mu_x^{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_h p_x^{ij}}{h}, \quad i \neq j.$$

- Remarque : Pour le modèle « actif(0) - décédé (1) », μ_x^{01} devient la force de mortalité μ_x étudiée au Chapitre 2.
  - Plus de détails - à faire en classe.
- Alors, la probabilité de transition est égale à

$$_h p_x^{ij} = h\mu_x^{ij} + o(h), \quad i \neq j.$$

- Donc, pour $h > 0$ très petit :

$$_h p_x^{ij} \approx h\mu_x^{ij}, \quad i \neq j.$$

- Exemple 8.1 - page 249.

$$ {}_h p_x^{ii} = {}_h p_x^{\overline{ii}} + o(h). $$

- Exemple 8.2 - page 249.

$$ {}_h p_x^{\overline{ii}} = 1 - h \sum_{j=0, j \neq i}^{n} \mu_x^{ij} + o(h). $$

Formules pour les probabilités

- D'une manière similaire comme pour le modèle (actif-décédé, fait au chapitre 2 de Mat vie 1), on peut démontrer que les forces de transitions μ_x^{ij} peuvent établir les probabilités ${}_tp_x^{ij}$ et ${}_tp_x^{\overline{ii}}$.
- Pour chaque état i, la probabilité que l'assuré (x) qui est maintenant à l'état i restera en état i d'une façon interrompue pour t années est égale à

$$
{}_tp_x^{\overline{ii}} = \exp\left\{ -\int_0^t \sum_{j=0, j\neq i}^{n} \mu_{x+s}^{ij} ds \right\}.
$$

Exemple 2.5

Exemple 8.3 - page 251.
Pour un individu âgée de x ans, considérons un modèle markovien dont les états sont : actif (0), invalidité permanente (1) et décédé (2).
Donc,

$$ {}_{t+h}p_x^{01} = ({}_tp_x^{01})({}_hp_{x+t}^{\overline{11}}) + ({}_tp_x^{\overline{00}})(h\ \mu_{x+t}^{01}) + o(h). $$

Puis,

$$ {}_up_x^{01} = \int_{t=0}^{u} ({}_tp_x^{\overline{00}})(\mu_{x+t}^{01})({}_{u-t}p_{x+t}^{\overline{11}})dt. $$

Exemple 2.6

Exemple 8.4 - page 254.
Pour un individu âgée de x ans, on considère un modèle markovien dont les états sont : actif (0), invalide permanente (1) et décédé (2).
a) Trouver ${}_{10}p_{60}^{00}$ et ${}_{10}p_{60}^{01}$ étant donné que
$\mu_x^{01} = 0.0279,\ \mu_x^{02} = \mu_x^{12} = 0.0229$.
b) Trouver ${}_{10}p_{60}^{00}$ et ${}_{10}p_{60}^{01}$ étant donné que
$\mu_x^{01} = a_1 + b_1 \exp(c_1 x),\ \mu_x^{02} = \mu_x^{12} = a_2 + b_2 \exp(c_2 x)$.

Exemple 2.7

(SOA) You are given the following four state-model : « uninfected (0) », « HIV positive (1) », « AIDS (2) », and « dead (3) ». The forces of transitions are the following (the others are zero) :

$$\mu_x^{01} = 0.004; \quad \mu_x^{03} = 0.006; \quad \mu_x^{12} = 0.400;$$
$$\mu_x^{13} = 0.200; \quad \mu_x^{23} = 0.350.$$

Calculate the probability that un uninfected person will be infected with HIV, will never develope AIDS and die within 10 years.

« Kolmogorov's forward equations »

- Pour a chaîne de Markov , les probabilités de transitions de l'état i à l'état j, (i et j pas nécessairement distincts), peuvent être exprimées comme

$$ {}_{t+h}p_x^{ij} = {}_tp_x^{ij} - h \sum_{k=0, k\neq j}^{n} \left({}_tp_x^{ij} \mu_{x+t}^{jk} - {}_tp_x^{ik} \mu_{x+t}^{kj} \right) + o(h). \tag{2.1} $$

- Puis, on obtient « Kolmogorov's forward equations » :

$$ \frac{d}{dt} {}_tp_x^{ij} = \sum_{k=0, k\neq j}^{n} \left({}_tp_x^{ik} \mu_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij} \mu_{x+t}^{jk} \right). \tag{2.2} $$

- Soit $\mu_x^{ii} = -\sum\limits_{k=0,k\neq i}^{n} \mu_x^{ik}$. Alors, « Kolmogorov's forward equations » deviennent

$$\frac{d}{dt}{}_tp_x^{ij} = \sum_{k=0}^{n} {}_tp_x^{ik}\,\mu_{x+t}^{kj}.$$

Évaluations numériques des probabilités de transitions

- Si les équations « Kolmogorov's forward equations» ne sont pas possibles à résoudre , on peut utiliser des approximations numériques.
- La « méthode d'Euler » utilise

$$\frac{d}{dt}{}_t p_x^{ij} \approx \frac{1}{h}({}_{t+h}p_x^{ij} - {}_t p_x^{ij}),$$

  pour $h > 0$ très petite.
  - C'est équivalent à remplacer $o(h)$ par zéro en équation (2.1)
- Alors, on commence avec la condition initiale

$${}_0 p_x^{ii} = 1, \quad {}_0 p_x^{ij} = 0, \text{ for } i \neq j,$$

  puis on peut trouver ${}_h p_x^{ij}, {}_{2h} p_x^{ij}, \ldots$, pour tous $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Exemple 2.8

Pour un individu âgée de 50 ans, considérons un modèle markovien dont les états sont : actif (a), malade (m), et décédé (d). On dispose de l'information suivante :
$\mu_{50+t}^{am} = 0.040,\ \mu_{50+t}^{ma} = 0.005,\ \mu_{50+t}^{ad} = 0.010,\ \mu_{50+t}^{md} = 0.020$, pour tous $t \geq 0$.
a) Calculer ${}_{10}p_{50}^{\overline{aa}}$ et ${}_{10}p_{50}^{\overline{mm}}$.
b) Écrire les « équations de Kolmogorov forward » pour trouver les probabilités de transitions pour une personne âgée de 50 ans qui est maintenant actif.
c) Écrire les « équations de Kolmogorov forward » pour trouver les probabilités de transitions pour une personne âgée de 50 ans qui est maintenant malade.

Exemple 2.9

Example 8.5-page 257, livre de Dickson et al.
Consider the disability income insurance model with three states : healthy (0), sick (1) and dead (2). Suppose the transitions for this model are as follows

$$\mu_x^{01} = a_1 + b_1 e^{c_1 x}, \ \mu_x^{10} = 0.1 \mu_x^{01},$$
$$\mu_x^{02} = a_2 + b_2 e^{c_2 x}, \ \mu_x^{12} = \mu_x^{02},$$

where

$$a_1 = 4 \times 10^{-4}, \ b_1 = 3.4674 \times 10^{-6}, \ c_1 = 0.138155$$
$$a_2 = 5 \times 10^{-4}, \ b_2 = 7.5858 \times 10^{-5}, \ c_2 = 0.087498.$$

a) Calculate (approximate) ${}_{10}p_{60}^{00}$, ${}_{10}p_{60}^{01}$ and ${}_{10}p_{60}^{02}$ using Euler approximation for Kolmogorov's forward equations with the step size of $h = 1/12$ years (i.e., one month).

b) Pour le modèle précédent, expliquer pourquoi ${}_{10}p_{60}^{00} \neq {}_{10}\, p_{60}^{\overline{00}}$.

Primes

Exemple 2.10

Pour un individu âgée de 50 ans, considérons un modèle markovien dont les états sont : actif (a), malade (m), et décédé (d). Soit un contrat d'assurance vie temporaire 25 ans émise à (50) qui est actif maintenant. La prime nivelée P est payée continûment chaque année pendant la période de contrat, tant que l'assuré est actif. La prestation à payée au temps du décès est de montant $20,000\$$ si l'assuré était actif, ou de $30,000\$$ si l'assuré était malade, avant le décès. De plus, il y a un prestation de $3,000\$$ par année à payer continûment tant que l'assuré est malade.
a) Écrire l'expression de la valeur présente actuarielle des : (i) primes ; (ii) prestation au décès ; (iii) prestation de maladie.
b) Écrire l'équation utilisée pour trouver la prime selon le principe d'équivalence.

Modèle à plusieurs décroissances

- Dans les modèles étudiés auparavant on supposé une cause unique pour la résiliation du contrat : le décès.
- Cependant, on a besoin d'un modèle plus général dans le cadre duquel on pourra évaluer les primes et réserves de contrats dont les prestations diffèrent selon les causes de décroissance.
- Exemples
  - Un employé peut quitter son travail pour deux raisons : la résiliation ou la mort.
  - Un contrat d'assurance peut avoir une prestation en cas de décès, une autre en cas d'invalidité et un autre en cas de résiliation du contrat.

- Dans ce contexte, on considère toujours la variable aléatoire T_x, mais on ajoute la variable aléatoire J :
  - $T_x =$ le temps de décroissance de (x) (comme, «durée de vie» résiduelle de (x)) ;
  - J : une v.a. discrète représentant la cause de la décroissance.
- Donc, $J \in \{1, 2, \ldots, m\}$, où m est le nombre de causes de décroissances
- On introduit ${}_tq_x^{(j)}$ qui représentent la probabilité de décroissance avant temps t pour (x) et que la cause de cette décroissance soit la j^e :

$$ {}_tp_x^{0j} = {}_tq_x^{(j)} = \mathbb{P}[T_x \leq t, J = j] $$

- Donc, ${}_tq_x^{(j)}$ est une distribution conjointe de T_x et J.

- On introduit ${}_tq_x^{(\tau)}$ qui représentent la probabilité de décroissance avant temps t pour (x), peu importe la cause :

$$ {}_tq_x^{(\tau)} = \mathbb{P}[T_x \leq t]. $$

- Donc,

$$ {}_tq_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}[T_x \leq t, J = j] = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)}. $$

- De plus, on introduit ${}_tp_x^{(\tau)}$ qui représentent la probabilité de survie pendant t années à toutes les causes de décroissance :

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = 1 -_t q_x^{(\tau)}. $$

- Remarque : ${}_tp_x^{(j)}$ n'existe pas. ${}_tp_x^{(j)} \neq 1 -_t q_x^{(j)}$.

- De façon équivalente :
- Soit un modèle markovien dont les états sont :
  - actif (0),
  - décroissance selon première cause (1),
  - décroissance selon deuxième cause (2),
  - ...
  - décroissance selon n-ème cause (m).
- Les seules transitions possibles sont $(0) \to (1), (0) \to (2), \ldots (0) \to (m)$.
- En modèle de plusieurs états notations :

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x^{(j)} &= {}_tp_x^{0j}; \\
{}_tp_x^{(\tau)} &= {}_tp_x^{00}; \\
{}_tq_x^{(\tau)} &= {}_tp_x^{0*} = \sum_{j=1}^{m} {}_tp_x^{0j}.
\end{aligned}
$$

- On introduit la fonction de densité du couple (T_x, J) :

$$f_{T_x,J}(t,j) = \frac{d}{dt}({}_tq_x^{(j)})$$

- Donc,

$$f_{T_x}(t) = \sum_{j=1}^{m} f_{T_x,J}(t,j) = \frac{d}{dt}({}_tq_x^{(\tau)})$$

et

$$\mathbb{P}[J = j] = \int_{t=0}^{\infty} f_{T_x,J}(t,j)dt$$

Force de décroissance totale

- $\mu_{x+t}^{(\tau)} = \lim_{h\to 0} \frac{{}_hq_{x+t}^{(\tau)}}{h}$,
  qui est équivalente avec
- $\mu_{x+t}^{(\tau)} = \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)} = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \frac{f_{T_x}(t)}{1-{}_tq_x^{(\tau)}}$.
- Donc,

$$f_{T_x}(t) = ({}_tp_x^{(\tau)})(\mu_{x+t}^{(\tau)}).$$

- De plus,

$${}_tp_x^{(\tau)} = S_{T_x}(t) = \exp(-\int_{s=0}^{t} \mu_{x+s}^{(\tau)} ds).$$

Force de décroissance de la j^e cause

- $\mu_{x+t}^{(j)} dt = P[(x) \text{ quitte entre } t \text{ et } t + dt \text{ en raison de la cause } j, \text{ sachant que il est en vie au temps } t]$
- $\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{f_{T_x}(t,j)}{S_{T_x}(t)} = \frac{f_{T_x}(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \frac{f_{T_x}(t,j)}{1-{}_tq_x^{(\tau)}}$
- Donc,

$$f_{T_x}(t,j) = ({}_tp_x^{(\tau)})(\mu_{x+t}^{(j)}).$$

- De plus,

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(j)} &= \int_{s=0}^{t} f_{T_x}(s,j)ds = \int_{s=0}^{t} ({}_sp_x^{(\tau)})(\mu_{x+s}^{(j)})ds \\ &= \int_{s=0}^{t} \left[e^{-\int_{y=0}^{s} \mu_{x+y}^{(\tau)}} \right] \mu_{x+s}^{(j)} ds. \end{aligned}$$

- $\mu_{x+t}^{(\tau)} = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} f_{T_x,J}(t,j)}{{}_tp_x^{(\tau)}} = \sum_{j=1}^{m} \mu_{x+t}^{(j)}$
- En modèle de plusieurs états notations :

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_{x+t}^{0j}$$

- Alors,

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(j)} &= {}_tp_x{}^{0j} = \int_{s=0}^{t} ({}_sp_x^{\overline{00}})(\mu_{x+s}^{0j})ds \\ &= \int_{s=0}^{t} ({}_sp_x^{00})(\mu_{x+s}^{0j})ds = \int_{s=0}^{t} ({}_sp_x^{(\tau)})(\mu_{x+s}^{(j)})ds. \end{aligned}$$

Incorporation de $K(x)$ dans le modèle

$$
\begin{aligned}
{}_{k|}q_x^{(j)} &= \mathbb{P}[k \leq T_x < k+1, J = j] \\
&= \int\limits_{t=k}^{k+1} f_{T_x,J}(t,j)dt = \int\limits_{t=0}^{k+1} - \int\limits_{t=0}^{k} \\
&= {}_{k+1}q_x^{(j)} - {}_{k}q_x^{(j)}
\end{aligned}
$$

Aussi,

$$
\begin{aligned}
{}_{k|}q_x^{(j)} &= \int\limits_{t=k}^{k+1} f_{T_x,J}(t,j)dt = \int\limits_{t=k}^{k+1} ({}_{t}p_x^{(\tau)})(\mu_{x+t}^{(j)}) \\
&= \ldots = {}_{k}p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}.
\end{aligned}
$$

- La loi marginale de $K(x)$

$$
\begin{aligned}
{}_{k|}q_x^{(\tau)} &= \mathbb{P}[K_x = k] = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}[K_x = k, J = j] = \sum_{j=1}^{m} {}_{k|}q_x^{(j)}; \\
{}_{k|}q_x^{(\tau)} &= {}_{k+1}q_x^{(\tau)} - {}_{k}q_x^{(\tau)}; \\
{}_{k|}q_x^{(\tau)} &= {}_{k}p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(\tau)}.
\end{aligned}
$$

Exemple 2.11

(Exemple 9.11-É.M.)

Étant donné que $\mu_{x+t}^{(1)} = 0.1$, $\mu_{x+t}^{(2)} = 0.4$, trouver :

a) ${}_{10}q_x^{(1)}$; b) ${}_{5|10}q_x^{(2)}$; c) ${}_{5|10}q_x^{(\tau)}$; d) $f_{T_x,J}(t,1)$; e) $\mathbb{E}(T_x)$

Exemple 2.12

(Exemple 8.9, page 272, -livre de Dickson et al.)

Exemple 2.13

(Exemple 9.13-E. Marceau)
Soit un modèle à 3 décroissances : décès (1), invalidité (2), résiliation de contrat. Quelques données :

$$\begin{aligned} \mu_{x+t}^{(1)} &= 0.4\mu_{x+t}^{(\tau)}, \quad t > 0; \\ \mu_{x+t}^{(2)} &= 0.1\mu_{x+t}^{(\tau)}, \quad t > 0; \\ {}_{30}q_x^{(\tau)} &= 0.1; \\ {}_{50}p_x^{(\tau)} &= 0.6. \end{aligned}$$

a) Calculer ${}_{30}q_x^{(3)}$.
b) Calculer $\mathbb{P}[30 < T \leq 50, \;\; J = 1 \text{ ou } 3]$.

Exemple 2.14

(SOA type) An insurance policy issued to (50) will pay $40,000\$$ upon death if death is accidental and occurs within 25 years. An additional benefit of $10,000\$$ will be paid regardless of the time or the cause of death. The force of accidental death at all ages is 0.01. The force of death for all other causes is 0.05 at all ages. The force of interest is $\delta = 10\%$.

Find the net single premium for this policy.

Exemple 2.15

Considérons un modèle à 2 décroissances. On dispose de l'information suivante :

$$l_{65} = 10\ 000,\ q_{65}^{(1)} = 0.01,\ q_{66}^{(1)} = 0.02,\ q_{65}^{(2)} = 0.03,\ q_{66}^{(2)} = 0.04.$$

Trouver $l_{66},\ d_{65}^{(1)},\ d_{65}^{(2)},\ d_{66}^{(1)},\ d_{66}^{(2)},,\ {}_2d_{65}^{(1)},\ l_{67}$.

Exemple 2.16

(SOA -) Suppose that in a triple-decrement model you are given constant forces of decrement for a person now age (x), as follows :

$$\mu_{x+t}^{(1)} = b, \quad \mu_{x+t}^{(2)} = b, \quad \mu_{x+t}^{(3)} = 2b, \quad \text{for } t > 0.$$

You are also given that the probability that (x) will exit the group within 3 years due to decrement 1 is 0.00884.
Compute the length of the time a person now age x is expected to remain in the triple decrement table.

8.4 Modèles associés à décroissance unique associées au modèle à plusieurs décroissances

- Rappeler que ${}_tq_x^{(j)}$ est la probabilité que l' individu quitte le groupe avant t en raison de la cause j, en tenant compte de toutes les autres causes (compétition).
- Notation : Soit
$$ {}_tq_x'^{(j)}, $$
la probabilité que l' individu quitte le groupe avant temps t en raison de la cause j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ EN SUPPOSANT qu'il est exposé uniquement à la cause j et
$$ {}_tp_x'^{(j)} = 1 - {}_tq_x'^{(j)} $$
la probabilité que l'individu survive jusqu'à temps t en supposant qu'il est exposé uniquement à la cause j.

- On suppose généralement que ces décroissances $T_x^{\prime(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, sont indépendantes.
- La liaison entre les deux modèles :

$$\mu_{x+s}^{(j)} = \mu_{x+s}^{\prime(j)}.$$

- Donc,

$${}_t p_x^{\prime(j)} = e^{-\int\limits_{s=0}^{t} \mu_{x+s}^{\prime(j)} ds} = e^{-\int\limits_{s=0}^{t} \mu_{x+s}^{(j)} ds}$$

et

- et

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x^{(\tau)} &= e^{-\int\limits_{s=0}^{t} \mu_{x+s}^{(\tau)}\,ds} \\
&= e^{-\int\limits_{s=0}^{t} \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_{x+s}^{(j)}\,ds} \\
&= \prod_{j=1}^{m} e^{-\int\limits_{s=0}^{t} \mu_{x+s}^{(j)}\,ds} \\
&= \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{\prime(j)}.
\end{aligned}
$$

- Donc,

$$
{}_tp_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_tp_x^{\prime(j)}.
$$

- En conséquence (lire la preuve sur les slides avec annotations),

$$ {}_tp_x^{(\tau)} \leq {}_tp_x^{\prime(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m, $$

et

$$ q_x^{\prime(j)} \geq q_x^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. $$

Exemple 2.17

(SOA/CAS Printemps 2000
In a doule decrement table

$$(i)\ l_{30} = 1\ 000; \quad (ii)\ q'^{(1)}_{30} = 0.1; \quad (iii)\ q'^{(2)}_{30} = 0.3;$$
$$(iv)\ {}_{1|}q^{(1)}_{30} = 0.075; \quad (v)\ l_{32} = 472.$$

Calculer $q^{(2)}_{31}$.

Exemple 2.18

Considérons un modèle à 2 décroissances. On dispose de l'information suivante :
- la décroissance unique associées (1) suit une distribution DeMoivre($\omega = 5$) ;
- la décroissance unique associées (2) suit une distribution DeMoivre($\omega = 10$).

Trouver ${}_tp_x^{(\tau)}$, $q_x^{(1)}$ et $q_x^{(2)}$. Comparer avec $q_x'^{(1)}$ et $q_x'^{(2)}$.

Exemple 2.19

Considérons un modèle à 2 décroissances. On dispose de l'information suivante :

$$\mu_{x+t}^{(1)} = 0.7t^2, \; \mu_{x+t}^{(2)} = 0.3t^2.$$

Trouver ${}_tp_x^{(\tau)}, \; q_x^{(1)}, \; q_x^{(2)}$.

Exemple 2.20 (Fall 2000, #7 SOA/CAS).
For a multiple decrement table :
(i) $1 = death$, $2 = disability$, $3 = withdrawal$;
(ii) $q'^{(1)}_{60} = 0.010, \quad q'^{(2)}_{60} = 0.050, \quad q'^{(3)}_{60} = 0.100$;
(iii) withdrawals occur only at the end of the year ;
(iv) mortality and disability are uniformly distributed over each year of age in the associated single decrement tables.
Calculate $q^{(3)}_{60}$.

- L'idée/difficulté du problème : dans ce modèle il y a deux décroissances continues et une décroissances discrète !

Trouver $q_x^{(j)}$ à partir de $q_x^{\prime(j)}$

- En pratique on est d'avantage à construire les ${}_tq_x^{(j)}$ à partir de m tables de taux indépendants $q_x^{\prime(j)}, j = 1, 2, \ldots, m$.
- Pour obtenir les $q_x^{\prime(j)}$ à partir de ${}_tq_x^{\prime(j)}, j = 1, 2, \ldots, m$, on doit encore faire une hypothèse (DUD, FC)
  dans chaque tables de taux indépendants.
  - Cas 1 : DUD : ${}_tq_x^{\prime(j)} = t \times q_x^{\prime(j)}$, $x = entier, 0 \leq t \leq 1, j = 1, 2, \ldots, m$.
  - Cas 2 : F.C. (i.e., force constante) : $\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$,
    $x = entier, 0 \leq t \leq 1, j = 1, 2, \ldots, m$.

- Le lien entre les deux modèles $T_x^{(j)}$ et $T_x^{\prime(j)}$ est que

$$\mu_{x+s}^{(j)} = \mu_{x+s}^{\prime(j)}.$$

- L'idée : Sachant les fonctions de mortalités, nous pourrons trouver les fonctions de survie, de répartition ou de densité.

Cas 1 : DUD

- Supposant que ${}_tq_x'^{(j)} = t \times q_x'^{(j)}, x = entier, 0 \leq t \leq 1, j = 1, 2, \ldots, m,$ on obtient (à faire en classe)

$$
\begin{aligned}
q_x^{(j)} &= \int_{t=0}^{1} {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t} dt = \int_{t=0}^{1} {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}'^{(j)} dt \\
&= \int_{t=0}^{1} \left[\prod_{k=1}^{m} (1 - t \times q_x'^{(k)}) \right] \left(\frac{q_x'^{(j)}}{1 - t \times q_x'^{(j)}} \right) dt \\
&= q_x'^{(j)} \int_{t=0}^{1} \left[\prod_{k=1, k \neq j}^{m} (1 - t \times q_x'^{(k)}) \right] dt.
\end{aligned}
$$

- Cas particulier 1 : $m = 2$ (deux décroissances) :
  - $q_x^{(1)} = q_x^{'(1)} \left(1 - \frac{q_x^{'(2)}}{2}\right), \quad q_x^{(2)} = q_x^{'(2)} \left(1 - \frac{q_x^{'(1)}}{2}\right).$
- Cas particulier 2 : $m = 3$ (trois décroissances) :
  - $q_x^{(1)} = q_x^{'(1)} \left[1 - \frac{1}{2}\left(q_x^{'(2)} + q_x^{'(3)}\right) + \frac{1}{3} q_x^{'(2)} q_x^{'(3)}\right].$
  - On peut obtenir des formules similaires pour $q_x^{(2)}$ et $q_x^{(3)}$
- La relation précédente est valide uniquement pour $t = 1$.

Cas 2 : FC

- Supposant que $\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$, $x = entier, 0 \leq t \leq 1, j = 1, 2, \ldots, m$, on obtient (à faire en classe)

$$q_x^{(j)} = \frac{\ln(p_x'^{(j)})}{\ln(p_x^{(\tau)})} q_x^{(\tau)};$$

  - Dans la relation précédente $q_x^{(\tau)} = 1 - p_x^{(\tau)} = 1 - {}_1p_x^{(\tau)} = e^{-(\mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)} + \ldots + \mu_x^{(m)})}$

Exemple 2.21

(SOA sample problem)
The mortality of (25) follows a double decrement model. You are given :
$(i) q_{25}^{\prime(1)} = q_{26}^{\prime(1)} = 0.01;$
$(i) q_{25}^{\prime(2)} = q_{26}^{\prime(2)} = 0.02;$
(iii) Both associated single decrement are «UDD» over each year. A special 2-year term insurance is issued to (25), that pays $\$1\ 000$ for death due to decrement 1 and $\$2\ 000$ foar death due to decrement 2. Benefits are paid at the end of the year. If $i = 6\%$, find the single benefit premium for this insurance.

Trouver ${}_tq_x'^{(j)}$ à partir de $q_x^{(j)}$

- Pour obtenir les ${}_tq_x'^{(j)}$ à partir de ${}_tq_x^{(j)}, j = 1, 2, \ldots, m,$ on doit encore faire une hypothèse (DUD, FC) sur le décroissances par les intervalles d'âges entiers.
  - Cas 1 : DUD : ${}_tq_x^{(j)} = t \times q_x^{(j)}, x = entier, 0 \leq t \leq 1, j = 1, 2, \ldots, m.$
  - Cas 2 F.C. (i.e., force constante) : $\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$,
    $x = entier, 0 \leq t \leq 1, j = 1, 2, \ldots, m.$

Cas 1 : DUD

- Supposant que ${}_tq_x^{(j)} = t \times q_x^{(j)}$, $x = entier, 0 \leq t \leq 1, j = 1, 2, \ldots, m,$ on obtient (à faire en classe)

$$ {}_tq_x'^{(j)} = 1 - (1 - t \times q_x^{(\tau)})^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}. $$

- Par conséquent,

$$ {}_tp_x'^{(j)} = (1 - t \times q_x^{(\tau)})^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}} = ({}_tp_x^{(\tau)})^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}} $$

et, pour $t = 1$, on obtient

$$ p_x'^{(j)} = (p_x^{(\tau)})^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}. $$

Cas 2 : FC

- Supposant que $\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$, $x = entier, 0 \leq t \leq 1, j = 1, 2, \ldots, m$, on obtient (à faire en classe)

$$_tq_x'^{(j)} = 1 - (p_x^{(\tau)})^{tq_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}} = 1 - ({_tp_x^{(\tau)}})^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}.$$

  - Par conséquent,

$$_tp_x'^{(j)} = (p_x^{(\tau)})^{tq_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}} = ({_tp_x^{(\tau)}})^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}.$$

Exemple 2.22

Pour un modèle avec 3 décroissances,

$$q_x^{(1)} = 0.02, \quad q_x^{(2)} = 0.05, \quad q_x^{(3)} = 0.03.$$

Supposer «DUD» pour décroissances $1, 2, 3$ et τ.
Trouvez $q_x^{\prime(j)}, \quad j = 1, 2, 3$.

Exemple 2.23

Pour un modèle avec 2 décroissances,

$$l_{40} = 2000, \quad q_{40}^{(1)} = 0.24, \quad q_{40}^{(2)} = 0.10, \quad \begin{aligned} q_{40}^{\prime(1)} &= 0.25, \quad q_{40}^{\prime(2)} = y, \\ q_{41}^{\prime(1)} &= 0.20, \quad q_{41}^{\prime(2)} = 2y. \end{aligned}$$

Trouvez l_{42}.