ACT-2011
Hiver 2021

Chapitre 5

Forwards* et *Futures

Thomas Landry, M.Sc., ASA, AICA
École d'actuariat, Université Laval

****La propriété intellectuelle des notes de ce cours est grandement partagée avec Claire Bilodeau.***

Préface

La nomenclature ainsi que la notation utilisée en anglais pour définir certaines stratégies, procédures ou autres éléments liés aux produits dérivés possède des traductions françaises « officielles » qui, en pratique, sont peu utilisées dans le milieu de la finance (du moins au Québec). La terminologie anglaise sera ainsi parfois utilisée avec quelques propositions de traduction en français. Les sections correspondantes du manuel d'étude ASM (1ère édition) sont les sections 14 et 15 (*Forwards* et *Variations on the Forward Concept*).

Un forward (contrat à terme) fixe le prix de livraison à une date d'échéance prédéterminée, tel que vu dans le chapitre 2. Dans le chapitre 5, on regardera plus en détails des forwards et des forwards dits standardisés (*futures*) avec des actifs financiers.

5.1. Alternatives à l'achat d'une action

L'achat d'une action implique :

- Un prix déterminé
- Le paiement du prix par l'acheteur (position longue) au vendeur (position courte)
- Le transfert de l'action du vendeur à l'acheteur

Le paiement et le transfert peuvent être immédiats (t = 0) ou différés (t = T).

livraison à t=0

Achat pur et simple (*outright purchase*) : le paiement et la livraison se font à t = 0. Le paiement est de S_0.

Achat par emprunt (pleinement par emprunt, *fully leveraged purchase*) : la livraison se fait à t = 0 mais le paiement est différé à T. Le paiement sera de $S_0\left(1+r_f\right)^T$.

ivraison à T

Contrat à terme « de gré à gré » prépayé (*prepaid forward contract, forward prépayé*) : le paiement est fait à t = 0 mais la livraison est différée à T. $F_{0,T}^P = S_0$

Contrat à terme « de gré à gré » (*forward contract, forward*) : le paiement et la livraison sont différés à T. $F_{0,T} = S_0(1+r_f)^T$

Lecture complémentaire : tableau 5.1. p.126 DM

On se concentrera sur les paiements pour les contrats à terme (*forward*), i.e. lorsque la livraison est différée à T, en gardant en tête les résultats des chapitres 2 et 3 à propos des *forwards*.

5.2. Forwards prépayés sur une action

5.2.1 Action sans paiement de dividende

La vente d'un *forward* prépayé permet au propriétaire actuel du titre de vendre celui-ci en conservant sa possession pour une certaine période de temps. Sauf si mention contraire, on présume encore que les titres (actions) ne versent pas de dividende.

On avait défini au chapitre 2 que $F_{0,T}^P = S_0$. On trouve ce résultat de différentes façons, soit par analogie, par actualisation de la valeur du *forward* ou encore par la théorie de l'arbitrage (ou plutôt l'absence d'arbitrage).

Par exemple, avec l'argument de l'arbitrage, on peut démontrer que si $F_{0,T}^P \neq S_0$, il y aura possibilité d'arbitrage et donc de profit sans aucune prise de risque, ce qui n'est pas une situation viable sur les marchés financiers. En effet, si on reprend le tableau 5.2 p.128 *DM*, on peut construire une stratégie procurant une valeur à l'échéance nulle en tout temps :

Transaction	$t = 0$	$t = T$
Vendre l'action à découvert	$+S_0$	$-S_T$
Acheter un contrat à terme prépayé	$-F_{0,T}^P$	$+S_T$
TOTAL	$S_0 - F_{0,T}^P$	0

*Voir au chapitre 2 comment recréer un Forward

1. Si jamais $F_{0,T}^P < S_0$, on pourrait alors y aller avec cette stratégie, effectuer un gain de $S_0 - F_{0,T}^P > 0$ à t = 0 sans rien avoir à rembourser à t = T. Il y a donc possibilité d'arbitrage.

2. Et si jamais $F_{0,T}^P > S_0$, alors on entre dans une stratégie inverse et on obtient un gain de $F_{0,T}^P - S_0 > 0$ à t = 0 sans rien avoir à rembourser à t = T. Encore une fois, il y aurait possibilité d'arbitrage.

Pour éviter l'arbitrage, il est impératif que $F_{0,T}^P = S_0$.

Lecture complémentaire : p.127-128 DM

5.2.2. Actions payant des dividendes

Au chapitre précédent, nous avons introduit la notion de parité entre les options d'achat et les options de vente. Nous avions trouvé l'équation :

$$C(T,K) - P(T,K) = \left(F_{0,T} - K\right)\left(1 + r_f\right)^{-T}$$

Il est également possible de réécrire :

$$C(T,K) - P(T,K) = S_0 - K\left(1 + r_f\right)^{-T} \quad \text{puisque } \frac{F_{0,T}}{(1+r_f)^T} = \frac{S_0\cancel{(1+r_f)^T}}{\cancel{(1+r_f)^T}}$$

Ou encore :

$$C(T,K) - P(T,K) = F_{0,T}^P - K\left(1 + r_f\right)^{-T} \quad \text{Puisque } F_{0,T}^P = S_0$$

Le forward prépayé se retrouve donc, directement ou indirectement, dans l'équation de parité entre les options de vente et les options d'achat.

Cependant, cette équation tient pour un titre qui ne paye pas de dividende. En effet, si le sous-jacent paye des dividendes, la formule devient :

$$C(T,K) - P(T,K) = [S_0 - \overbrace{VP(div)}^{\text{Entre 0 et T}}] - K\left(1 + r_f\right)^{-T}$$

… avec $VP(div)$ qui représente la valeur présente des dividendes avant la date d'échéance. Autrement dit, le prix d'un titre à quelconque date inclut l'anticipation des dividendes futurs qui devraient revenir au propriétaire du titre. Puisque les dividendes ne seront payés qu'à partir de l'échéance (pour la personne qui détient un *forward* avec une position longue), alors le prix du *forward* prépayé $F_{0,T}^P$ exclura la valeur actualisée de ces dividendes et deviendra S_0 - $VP(div)$:

$$F_{0,T}^P = S_0 - VP(div) = S_0 - \textstyle\sum_{i=0}^{T} d_i(1 + r_f)^{-i}$$

$$C(T,K) - P(T,K) = \underbrace{\left[S_0 - \sum_{i=0}^{T} d_i(1 + r_f)^{-i}\right]}_{F_{0,T}^P} - K\left(1 + r_f\right)^{-T}$$

En présumant des dividendes connus en avance !

Avec d_i qui représente le dividende versé au moment *i*. À noter qu'on présume que les dividendes sont souvent connus d'avance (ou anticipés à tout le moins) à des moments prévus. Il est important d'établir, si jamais la date d'échéance coïncide avec la date de versement d'un dividende, si le dividende est versé au vendeur ou à l'acheteur du *forward* (ou de l'option, selon le cas). Se référer aux concepts vu en GRF1 (date ex-dividende et autres notions sur le fonctionnement du versement des dividendes) pour plus de détails. On présumera que cette information sera donnée (et non pas à déduire) dans le présent cours.

Remarque : en présence d'un sous-jacent qui procurerait un ***taux*** de dividende présumé continu de "δ", on simplifie parfois $S_0 - VP(div) = \underbrace{S_0 e^{-\delta T}}_{F_{0,T}^P}$ avec $e^{-\delta T}$ qui est un facteur qui ajustera la valeur initiale du sous-jacent pour considérer le retrait de la valeur des dividendes payés d'ici l'échéance T. On voit alors parfois l'équation :

$$C(T,K) - P(T,K) = \underbrace{\left[S_0 e^{-\delta T}\right]}_{F_{0,T}^{P}} - K\left(1 + r_f\right)^{-T}$$

Formule surtout théorique ou à appliquer pour un indice, par exemple

L'équivalent avec un taux de dividende annuel effectif d serait ainsi :

$$C(T,K) - P(T,K) = \underbrace{\left[S_0 (1-d)^T\right]}_{F_{0,T}^{P}} - K\left(1 + r_f\right)^{-T}$$

... avec $= 1 - d = e^{-\delta}$

Les dividendes sont ainsi perçus comme étant sans risque et fixes (bien qu'en théorie, cela n'est pas nécessairement toujours le cas).

Exemple 5.2. p.130 *DM* : une action vaut 125$ aujourd'hui. Un taux de dividende annuel effectif → "d" de 3% est versé pendant l'année. Quel sera le prix d'un *forward* prépayé d'échéance un an pour ce titre? Et avec un taux de dividende continu de 3%?

Solution : $125 \cdot (1 - 0{,}03) = 121{,}25$ \$

$125 e^{-0{,}03} = 121{,}3057$ \$

Autre explication : une autre façon de déduire cette nouvelle équation serait par exemple en affirmant vouloir continument réinvestir les dividendes en rachetant d'autres actions de la même compagnie. On aurait ainsi $d * S_t$ à réinvestir à chaque moment t, et à chaque moment t, le prix de l'action passerait à $(1 - d) * S_t$.

Le réinvestissement nous permettrait d'acheter $\frac{d * S_t}{(1-d) * S_t} = \frac{d}{(1-d)}$ unités supplémentaires du titre, si bien qu'on possèderait dorénavant $1 + \frac{d}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)}$ actions.

Après le versement de n dividendes entre t = 0 et t = T, le nombre d'unités détenues (le nombre d'actions) serait de $\frac{1}{(1-d)^n}$. Pour un *forward* prévoyant la livraison d'une unité à l'échéance alors que n dividendes auront été versés entretemps, il faudrait ainsi prévoir un nombre initial de $(1-d)^n$ pour obtenir $(1-d)^n * \frac{1}{(1-d)^n} = 1$ unité livrée à l'échéance.

Avec des dividendes annualisés, on peut réécrire $(1-d)^T$ ou encore $e^{-\delta T}$ pour un cas continu, ce qui correspond au multiple pour ajuster S_0 dans les formules précédentes.

5.3. Forwards sur une action

5.3.1. Traitement des dividendes et prime à terme (forward premium)

Au chapitre 2, nous avions déjà vu que $S_0\ (1+r_f)^T = F_{0,T}^P(1+r_f)^T = F_{0,T}$.

Remarque : on dénote parfois le prix d'une obligation zéro-coupon payant 1$ à l'échéance T comme étant $P(0,T) = (1+r_f)^{-T}$ et ainsi, $(1+r_f)^T = P(0,T)^{-1}$. Cette notation est cependant identique à celle utilisée pour décrire le prix (premium) d'une option de vente et nous conserverons ainsi la notation déjà introduite, soit $(1+r_f)^T$.

On définit la prime à terme (*forward premium*) comme suit :

$$Forward\ premium = \frac{F_{0,T}}{S_0}$$

Et la prime à terme annualisée (*annualized forward premium*) peut avoir deux définitions, selon qu'on traite l'intérêt sous forme de taux annuel (annuel effectif) ou de force annuelle (continu). On aura ainsi :

$$Annualized\ forward\ premium\ (taux) = \left(\frac{F_{0,T}}{S_0}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

$$Annualized\ forward\ premium\ (force) = \frac{ln\left(\frac{F_{0,T}}{S_0}\right)}{T}$$

Ainsi, sans connaitre S_0 ou $F_{0,T}$, il est possible de déduire l'autre si on connait la prime à terme annualisée.

Dans la section 5.2, nous avons vu que nous pouvions réécrire :

$$F_{0,T}^P = \underbrace{(S_0 - VP(div))}_{\text{formule générale}} = \underbrace{\left(S_0 - \sum_{i=0}^{T} d_i(1+r_f)^{-i}\right)}_{\text{cas discret}} = \underbrace{S_0 e^{-\delta T}}_{\text{cas continu}}$$

Et comme $F_{0,T} = F_{0,T}^P(1+r_f)^T$ ou encore $F_{0,T}^P\ e^{rT}$ (selon le cas, discret vs continu, le prix *forward* prépayé accumulé au taux sans risque jusqu'à l'échéance), alors on aura que :

$$F_{0,T} = \underbrace{(1+r_f)^T(S_0 - VP(div))}_{\text{formule générale}} = \underbrace{(1+r_f)^T\left(S_0 - \sum_{i=0}^{T} d_i(1+r_f)^{-i}\right)}_{\text{cas discret}} = \underbrace{S_0 e^{(r-\delta)T}}_{\text{cas continu}}$$

On peut aussi réécrire, de façon équivalente :

$$F_{0,T} = \underbrace{\left((1+r_f)^T S_0 - Val.acc.(div)\right)}_{\text{formule générale}} = \underbrace{\left((1+r_f)^T S_0 - \overbrace{\sum_{i=0}^{T} d_i (1+r_f)^{T-i}}^{Val.acc.div.}\right)}_{\text{cas discret}} = \underbrace{S_0 e^{(r-\delta)T}}_{\text{cas continu}}$$

Avec $Val.acc.(div)$ qui représente la valeur accumulée des dividendes jusqu'à l'échéance. Dans tous les cas, qu'on considère le prix prépayé ou le prix « standard » du *forward*, on devra enlever la valeur des dividendes payés entre t = 0 et t = T et actualiser ou accumuler cette valeur pour l'établir à t = 0 (*forward* prépayé) ou à t = T (*forward*). *Rappel : ces dividendes ne reviennent pas à l'acheteur (position longue) du forward et doivent donc être soustraits!*

Remarque : la prime à terme annualisée est normalement de $r - \delta$ pour un cas continu avec dividendes.

5.3.2. Calcul avec prime de risque

Plus tôt dans les premiers chapitres du cours, nous avions vu que $F_{0,T} = S_0\left(1 + r_f\right)^T$ en l'absence de dividendes et nous avons sous-entendu que cette mesure représentait l'anticipation du prix futur du sous-jacent avec la mesure du taux sans risque. Dans les faits, le taux sans risque, comme son nom le dit, implique une absence de risque et/ou de prime de risque. Pour un actif risqué (comme par exemple… une **action**), ***on ne peut pas véritablement dire que le prix forward $F_{0,T}$ est l'anticipation ou encore l'espérance de S_T.*** On aura ainsi un taux α pour accumuler la valeur du titre dans le temps pour en calculer la valeur espérée future :

$$\alpha = \underbrace{r}_{\text{Taux sans risque}} + \underbrace{(\alpha - r)}_{\text{Prime de risque}}$$

Et ainsi, en présumant une force d'intérêt sans risque :

$$F_{0,T} = \underbrace{F_{0,T}^P}_{S_0} e^{rT} = \underbrace{E[S_T]}_{S_0 e^{\alpha T}} e^{-(\alpha - r)T}$$

Autrement dit, *le prix forward ne change pas, mais on amène une nuance entre ce prix et l'espérance future du sous-jacent à l'échéance T*. Si on connait la valeur espérée du sous-jacent à cette date, on pourra retrouver le prix du *forward* si on connait le taux sans risque et la prime de risque.

Exemple : une action vaut actuellement 50$ et son prix *forward* est de 52$ dans un an. Que peut-on affirmer sur l'espérance de la valeur de l'action à l'échéance dans un an ?

Solution : $E[S_1] > 52 \Rightarrow E[S_1] = 52 \underbrace{e^{(\alpha - r)}}_{>1 \text{ car } \alpha - r > 0}$

5.3.3. Création d'un forward synthétique

Lecture complémentaire : p.133-134 DM (tableaux 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7)

On commence en présumant l'absence de dividendes. Pour simplifier les calculs, on présumera qu'on utilise des forces d'intérêts (taux continu) sans risque et ensuite des taux de dividende continus également (respectivement r et δ).

Nous avons vu comment construire un *forward* synthétique dans les chapitres précédents, notamment avec des options d'achat et de vente (chapitre 3).

Au chapitre 2, nous avons vu qu'il était possible de recréer un *forward* en achetant le titre sous-jacent (l'action) en empruntant au taux sans risque. Comme un emprunt au taux sans risque se résume à émettre une obligation zéro-coupon, on réécrira :

$$\underbrace{Forward}_{\text{Longue}} = \underbrace{Action}_{\text{Achat ferme}} - \underbrace{Obligation\ zéro - coupon}_{\text{Emprunt}}$$

Déjà introduit au chapitre 2

$$\underbrace{Action}_{Achat\ ferme} = \underbrace{Forward}_{\text{Longue}} + \underbrace{Obligation\ zéro - coupon}_{\text{Dépôt}}$$

$$\underbrace{Obligation\ zéro - coupon}_{\text{Dépôt}} = \underbrace{Action}_{Achat\ ferme} - \underbrace{Forward}_{\text{Longue}}$$

Toutes ces positions sont « longues » et il suffira d'inverser les positions pour créer des positions courtes (vente à découvert, position courte sur le *forward* et emprunt au taux sans risque). Tous les calculs présentés au chapitre 2 sont encore d'actualité, en l'absence de dividendes…

5.3.4. *Forward* synthétique avec dividendes et autres stratégies répliquées

***Forward* synthétique**

En présumant les dividendes fixes, pour recréer un *forward* synthétique, on achètera une action en réinvestissant les dividendes continuellement dans l'action, en présumant qu'il est possible de racheter des fractions d'actions (tableau 5.3) :

Transaction	T = 0	T = T
Achat de $e^{-\delta T}$ action	$-S_0e^{-\delta T}$	$+S_T$
Emprunt de $S_0e^{-\delta T}$	$+S_0e^{-\delta T}$	$-S_0e^{(r-\delta)T}$
Total	0	$S_T - \underbrace{S_0e^{(r-\delta)T}}_{F_{0,T}}$

Car réinv. des dividendes

Précédemment, nous avions défini que, $F_{0,T}^{P} = S_0 e^{-\delta T}$. En 5.3.1, nous avions également vu que $F_{0,T}^{P}\left(1 + r_f\right)^{T} = F_{0,T}^{P} e^{rT} = F_{0,T}$, et donc $F_{0,T} = S_0 e^{-\delta T} e^{rT} = S_0 e^{(r-\delta)T}$ dans un cas de taux et de dividendes continus et la valeur à l'échéance du *forward* devient ainsi :

$$\text{Valeur à l'échéance} = S_T - F_{0,T} = S_T - \underbrace{S_0 e^{(r-\delta)T}}_{\substack{\text{F}_{0,\text{T}}\text{ avec taux} \\ \text{de dividende } \delta}}$$

<u>Remarque</u> : au chapitre 2, on présentait ce genre de schéma en inversant les axes (colonne versus rangée) du tableau, mais on suivra ici la convention du livre de référence. Cette équation peut se réécrire sous différentes formes, selon qu'on considère des dividendes continus ou discrets. Par exemple, avec des dividendes discrets réinvestis, on aurait pu avoir :

Transaction	$t = 0$	$t = T$
Achat d'une action avec réinvestissement des dividendes dans des obligations zéro coupon	$-S_0$	$S_T + \sum_{0<t\leq T} d_t(1+r_f)^{T-t}$
Emprunt de S_0 au taux r_f jusqu'à T	$+S_0$	$-S_0(1+r_f)^T$
TOTAL	0	$S_T + \underbrace{\left[\sum_{0<t\leq T} d_t(1+r_f)^{T-t} - S_0(1+r_f)^T\right]}_{F_{0,T}}$

Ici, la différence est qu'on achète une unité complète de l'action à t = 0 versus une fraction de l'unité dans l'exemple précédent. Également, dans cet exemple, on réinvestit les dividendes dans des obligations zéro-coupon ayant toujours la même échéance T au lieu de les réinvestir dans l'action. Dans tous les cas, la valeur à l'échéance est encore celle d'une *forward* et le coût initial est encore nul, et il s'agit donc d'une autre manière pour construire un *forward* synthétique. Sauf si mention contraire, on privilégiera la première méthode, cependant (celle du livre de référence).

<u>Achat d'action synthétique</u>

On reprend encore les concepts vus au chapitre 2 et on y rajoute la composante des dividendes.

On obtient (tableau 5.4) :

Transaction	T = 0	T = T
Achat d'un forward	0	$S_T - F_{0,T}$
Prêt de $S_0 e^{-\delta T}$	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_0 e^{(r-\delta)T} = F_{0,T}$
Total	$-S_0 e^{-\delta T}$	S_T

On recrée ainsi l'achat d'une action en présumant qu'on réinvestit toujours les dividendes dans cette même action (rachat d'autres actions).

Obligation zéro-coupon synthétique

On reprend le tableau 5.5 du livre de référence :

Transaction	T = 0	T = T
Achat de $e^{-\delta T}$ action	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_T$
Vente d'un forward	0	$F_{0,T} - S_T$
Total	$-S_0 e^{-\delta T}$	$F_{0,T} = S_0 e^{(r-\delta)T}$ $= S_0 e^{-\delta T} e^{rT}$

Le taux de rendement de cette stratégie s'appelle le « *implied repo rate* », ce qui signifie le taux implicite dans cette stratégie pour répliquer un rendement équivalent à une obligation zéro-coupon.

***Cash-and-carry* (comptant-terme)** : achat de l'action (position longue) et vente d'un forward (position courte). L'achat de l'action est réputé être financé par un emprunt. Cette stratégie s'apparente à une obligation zéro-coupon synthétique dont le coût initial est financé par un emprunt (l'emprunt étant également une obligation zéro-coupon). En l'absence d'arbitrage, ceci revient à financer une obligation zéro-coupon… à l'aide d'une obligation zéro-coupon, ce qui devrait normalement produire un profit nul en bout de compte!

Transaction	T = 0	T = T
Achat de $e^{-\delta T}$ action	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_T$
Vente d'un forward	0	$F_{0,T} - S_T$
Emprunt de $S_0 e^{-\delta T}$	$+S_0 e^{-\delta T}$	$-S_0 e^{(r-\delta)T}$
Total	0	$\underbrace{F_{0,T} - S_0 e^{(r-\delta)T}}_{=0 \text{ si } \emptyset \text{ arbitrage}}$

Obl. zéro-coupon synt. (long)

Obl. zéro-coupon (court)

La position inverse est réputée être un « *reverse cash-and-carry* » (tableau 5.7). En l'absence de dividendes, il suffira d'établir $\delta = 0$.

Il y aura arbitrage si $F_{0,T} \neq S_0 e^{(r-\delta)T}$. Le cas échéant :

- $F_{0,T} > S_0 e^{(r-\delta)T}$, embarquer dans un *cash-and-carry* avec un coût initial nul et en tirer un profit à l'échéance
- $F_{0,T} < S_0 e^{(r-\delta)T}$, embarquer dans un *reverse cash-and-carry* avec un coût initial nul et en tirer un profit à l'échéance

5.4. Futures (contrats à terme standardisés)

Un *futures* est semblable à un contrat *forward* avec quelques petites distinctions, notamment :

- Alors que les contrats *forwards* peuvent être faits de gré à gré sur n'importe quel actif avec n'importe quelle clause et/ou condition, les *futures* sont *surveillés et contrôlés par des instances officielles* au même titre que la bourse (par exemple, le *Chicago Board of Trade and International Monetary Market*).
- Les *futures* s'appliquent sur *certains types d'actifs* (titre financiers, commodités, devises, etc) et sont réputés être standardisés, versus les *forward* qui peuvent être personnalisés
- Le marché des *futures* est réputé être relativement *liquide et efficient* (transactions possibles au même titre que des actions, des obligations, etc)
- Les *futures* impliquent un *intermédiaire (broker)* qui assurera le bon déroulement des transactions et qui protégera les droits de chaque parti, notamment en exigeant que chaque parti fasse un *dépôt initial* (marge initiale, *initial margin*) ainsi que d'autres *dépôts subséquents* (*margin call*) selon l'évolution de la valeur de l'actif sous-jacent. Le risque de défaut est ainsi minimisé avec un *futures versus* un *forward* qui n'est pas nécessairement réglementé et qui n'implique aucune transaction avant l'échéance.
- Les *futures* impliquent ainsi des *transactions continues (quotidiennes)*. L'établissement des transactions à faire (*margin calls*) se fait par le processus du *marking-to-market* (règlement quotidien). Ceci peut entrainer une différence dans l'établissement du prix d'un *futures* versus un *forward* malgré des caractéristiques théoriquement identiques.
- Les prix, ou encore *les variations des prix des futures sont limitées* au même titre que les variations observées à la bourse pour les actions, ce qui n'est généralement pas le cas pour la valeur marchande d'un *forward*. Voir la définition du « *circuit breaker* » suite au crash du 19 octobre 1987.

> *Circuit breakers are measures approved by the SEC to curb panic-selling on U.S. stock exchanges and excessive volatility – large price swings in either direction – in individual securities. Also known as "collars," **circuit breakers temporarily halt trading on an exchange or in individual securities when prices hit pre-defined tripwires**, such as a **13 percent intraday drop for the S&P 500**, or a **15 percent rise in a company's share price over five minutes**.*
>
> *https://www.investopedia.com/terms/c/circuitbreaker.asp*

Fonctionnement d'un *futures*

L'intermédiaire entre l'acheteur (position longue) et le vendeur (position courte) demandera aux deux partis une *marge initiale* (*margin*), un dépôt de garantie qui aura pour but de protéger chacun des partis contre le risque que l'autre ne puisse rencontrer ses obligations. Cette marge est réputée être une obligation de performance (*performance bond*) et non pas une prime, puisqu'elle pourrait être remboursée selon les variations dans le prix du sous-jacent. Les coûts des futures sont donc théoriquement nuls, exception faite du *bid-ask spread* et des frais de transactions pour l'intermédiaire. Nous utiliserons l'exemple du livre, le *futures* sur le S&P 500 (*S&P 500 futures contract*), pour illustrer le fonctionnement d'un *futures* (p.139 et suivantes, *DM*).

***Futures* sur le S&P 500**

Le futures sur le S&P 500 a comme sous-jacent l'indice du S&P 500 qui regroupe les 500 compagnies avec la plus grande capitalisation boursière aux États-Unis. Cet indice est réputé être un bon proxy du marché boursier américain au sens global, et également de la santé de l'économie nord-américaine.

Avec un indice comme le S&P 500, on ne peut définir un actif sous-jacent concret, puisqu'il s'agit d'un indice construit à partir de titres connus (mais il ne s'agit pas d'une action ou d'un titre à proprement parler). On parlera ainsi d'un règlement en espèce (*cash-settlement contract*), ce qui implique un versement en argent à l'échéance selon la valeur à l'échéance du *futures* sans qu'un sous-jacent soit transigé comme ça peut parfois être le cas avec un contrat *forward*.

Lecture complémentaire : encadré 5.2 et illustration 5.1, p.140 DM.

Établissement du (des) prix *futures*

La valeur notionnelle d'un *futures* sur le S&P 500 est de :

$F_{0,T}$

$$Valeur\ notionnelle = 250\$ * \underline{Valeur\ future\ de\ l'indice}$$

Par exemple, si la valeur initiale de l'indice est de 1200$ mais que son prix *forward* est de 1300$, on a une valeur notionnelle de $250 * 1300 = 325\ 000\$$.

****Il y a différentes définitions de la valeur notionnelle d'un contrat à terme (forward et/ou futures). Dans certains ouvrages, ils considèrent la valeur initiale de l'actif sous-jacent. Dans le livre de référence, ils sous-entendent que le prix forward, aussi appelé le prix futures, est celui sur lequel se base la valeur notionnelle. La distinction n'est cependant pas importante pour le reste des calculs.*

On suppose maintenant un prix *futures* de 1100$. Que signifie un prix *futures* ? Il s'agit du même principe que le prix *forward* $F_{0,T}$, c'est-à-dire le prix actuel du sous-jacent accumulé avec un taux sans risque jusqu'à l'échéance. La nuance est qu'ici, le prix *futures* évoluera dans le temps. → d'ici l'échéance T

Par exemple, en reprenant la même notation qu'avec un *forward*, on aurait ici $F_{0,T} = 1100\$$. On pourrait supposer par exemple que le sous-jacent vaut initialement $S_0 = 1000\$$ et que le taux annuel effectif sans risque est de 10% avec une échéance d'un an, et ainsi, $F_{0,1} = S_0\ (1 + r_f) = 1000 * 1.1 = 1100.$

$S_{\frac{1}{2}} = (1-0,05)1000 = 950$

Si le prix du sous-jacent descend de 5% de valeur en 6 mois, mais que la date d'échéance n'a pas changé, alors on aura un nouveau prix futures, soit $F_{\frac{1}{2},1} = S_{\frac{1}{2}}\ (1 + r_f)^{\frac{1}{2}} = 950 * 1.1^{\frac{1}{2}} = 996.37\$.$

<u>C'est donc l'évolution du prix futures qui va décider des appels de marge d'ici à ce que l'échéance du contrat soit atteinte.</u>

$F_{0,T}$ devient $F_{t,T}$ au moment t, et la nouvelle information sera reflétée dans le prix futures qui sera évolutif.

<u>Exemple avec marge initiale, appel de marge et intérêt sur les marges</u>

On désire se procurer une position longue de 2 200 000$ dans le S&P 500, ce qui implique 8 *futures* avec $8 * \underbrace{250 * 1100}_{\text{Valeur notionnelle}} = 8 * 275\,000 = \mathbf{2\,200\,000\$}$**.**

L'intermédiaire devra donc trouver deux partis désirant respectivement une position longue et une position courte dans le *futures* et *<u>demandera un dépôt initial à chaque parti</u>*. En temps normal, un pourcentage minimal doit être respecté en fonction de la valeur notionnelle, mais l'intermédiaire pourrait exiger un dépôt initial plus élevé pour limiter sa responsabilité en cas de non-paiement de la part d'un parti. Ici, on supposera une *<u>marge initiale de 10% et des règlements hebdomadaires</u>* (des appels de marge, bien qu'ils soient souvent quotidiens en pratique). *<u>Le dépôt initial est donc de 220 000$</u>* pour les deux partis (long et court).

<u>Pour chaque dollar que perd la valeur du futures de l'indice du S&P 500, l'acheteur perdra l'équivalent de 2000$ dans sa position (longue)</u>. Rappel : nous avons **8 contrats** dont la valeur notionnelle est de **250 fois l'indice**, et donc 8 * 250 = 2000 fois cette valeur.

Après une semaine, le prix *futures* vaut 1027,99$, soit une baisse de 72,01$ (perte d'environ 6,5%). Autrement dit, la baisse de 6,5% dans le prix futures est la combinaison de deux facteurs, soit une baisse dans la valeur de l'actif sous-jacent et un facteur d'accumulation plus petit pour calculer le prix futures (plus on se rapproche de l'échéance, et moins longue sera la période sur laquelle on accumulera le prix du sous-jacent avec le taux sans risque, comme dans l'exemple précédent). Bref, si on avait $F_{0,T} = S_0\,(1 + r_f)^T = 1100$, on a maintenant :

$$F_{\frac{1}{52},T} = S_{\frac{1}{52}}\left(1 + r_f\right)^{T-\frac{1}{52}} = 1027.99\$$$

****Dans certains cas, on donnera l'évolution de la valeur du sous-jacent pour calculer l'évolution du prix futures. Dans d'autres cas, on donnera directement le nouveau prix futures en présumant que la valeur a déjà été calculée. Dans les faits, il peut arriver que le <u>taux</u> utilisé pour calculer le prix futures évolue dans le temps, mais dans les exemples de la présente section, on considère que ce taux est constant.*

→ r_f

L'acheteur a perdu en valeur :

$$2000 * -72{,}01 = -144\,020\$$$

Pendant cette semaine, cependant, <u>le dépôt initial que nous avions mis a fait un certain rendement</u>, et en présumant un taux de rendement composé continument de 6% sur ce dépôt, le niveau de notre marge atteindra donc :

↳ Taux spécifié dans le contrat pas nécessairement r_f ***

$$220\,000\,e^{0.06/52} - 144\,020 = 76\,233{,}99\$$$

****Le taux de rendement du montant déposé en marge n'est pas nécessairement égal au taux sans risque r_f, bien qu'il arrive parfois qu'on émette cette hypothèse pour simplifier.*

La balance résultante est significativement plus basse dans la marge, ce qui signifie un plus grand risque pour l'intermédiaire si nous ne rencontrons pas nos obligations dans ce contrat. Autrement dit, si la valeur du sous-jacent ne varie plus par la suite, aucun problème, mais s'il devait continuer à perdre de la valeur, notre marge pourrait bien ne plus être suffisante et disparaitre totalement.

En général, les intermédiaires n'attendent pas que la marge d'un des partis tombe à zéro avant de leur demander d'y rajouter de l'argent, par mesure de sécurité. *Ils s'assureront qu'un niveau minimal soit respecté dans chaque marge (maintenance margin) en tout temps et fera ainsi un appel de marge (margin call) pour exiger qu'on atteigne ce niveau minimal*. On peut définir ce niveau minimal comme étant un pourcentage de la marge initiale (par exemple, 70% ou 80% de la marge initiale). → Donc, si marge initiale = 10% de la val. not., alors 70% de 10% = 7% de la val. not

Le niveau des marges dépendra du type d'actif sous-jacent au contrat. Plus la volatilité est élevée, plus la marge le sera aussi.

Le tableau 5.8 p.142 *DM* montre l'évolution de la marge pour ce type de contrat (position longue) en fonction de l'évolution de la valeur du sous-jacent en excluant les appels de marge. Lors de la 2ème semaine, le S&P 500 a repris un peu de valeur et son prix *futures* termine à 1037,88$, soit un hausse de 9,89$ par rapport à la 1ère semaine. On aurait ainsi :

$$2000 * 9{,}89 = 19\,780\$$$

La nouvelle marge (en supposant qu'aucun appel de marge n'avait été fait, pour simplifier) serait donc de :

$$\underbrace{76\,233{,}99}_{\substack{\text{Marge} \\ \text{1ère semaine}}} e^{0.06/52} + 19\,780 = 96\,102{,}01\$$$

… ce qui correspond au résultat pour la 2ème semaine dans le tableau 5.8.

On constate ensuite que, sans appel de marge avant l'échéance, le profit pour l'acheteur dans le *futures* est de -177 562,60$ puisque la valeur du sous-jacent (S&P 500) à l'échéance de 10 semaines est de 1011,65$ (baisse significative depuis la signature initiale du contrat pour le *futures*) et ainsi :

$$\underbrace{44990{,}57}_{\text{Marge finale}} - \underbrace{220000e^{0.06*\frac{10}{52}}}_{\text{Marge initiale accumulée}} = \underbrace{-177\,562{,}60\$}_{\text{Profit}}$$

Avec un *forward* et les mêmes dispositions, le profit est légèrement supérieur, soit -176 700$. La différence provient du fait qu'avec un *forward*, aucun appel de marge n'est faite d'ici l'échéance et c'est l'intérêt sur ces appels de marge qui entraine une légère différence (avec le *futures*, il faut financer les pertes en avance, au fur et à mesure qu'elles se matérialisent lorsque le prix du sous-jacent descend sous sa valeur initiale, et ces paiements entrainent de l'intérêt).

Lecture complémentaire : p.146 DM, section 5.5, sous-section « Asset Allocation ».

5.6. *Forwards* de devise

On suppose qu'un acheteur est intéressé à acheter une devise étrangère (DÉ) avec une devise domestique (DD, devise locale) à une échéance T. On regardera le fonctionnement d'un *forward* prépayé dans un premier temps.

5.6.1. *Forward* de devise prépayé

Soit x_t le taux de change DÉ/DD au temps t. Ainsi, si on faisait l'échange aujourd'hui, on devrait payer x_0* DD pour obtenir une unité de DÉ. La valeur de x_T ne sera connue qu'à l'échéance T. La subtilité dans un contrat impliquant différentes devises est qu'il y a différents taux d'intérêts à considérer. On notera le taux d'intérêt sans risque applicable pour la devise DÉ $r_É$.

Ainsi, il faudrait avoir aujourd'hui $\left((\mathbf{1}+\boldsymbol{r}_{É})^{-\boldsymbol{T}} * \mathbf{DÉ}\right)$ pour avoir une unité de DÉ rendu à l'échéance T. Pour avoir $\left((\mathbf{1}+\boldsymbol{r}_{É})^{-\boldsymbol{T}} * \mathbf{DÉ}\right)$ aujourd'hui, il faudrait payer $(1+r_É)^{-T} * \underbrace{x_0 DD}_{DÉ}$. à t=0

Autrement dit, pour chaque unité de devise étrangère DÉ qu'on désire avoir à l'échéance, il faudra investir initialement $(1+r_É)^{-T} * x_0$ et on établira le prix du *forward* prépayé en conséquence :

$$F_{0,T}^P = (1+r_É)^{-T} * x_0$$ (payé en DD)

<u>Remarque</u> : ce prix est en devise domestique (locale). Si on définit la valeur des devises au temps t comme étant $DD(t)$ et $DÉ(t)$, alors on obtiendrait : $F_{0,T}^P = (1+r_É)^{-T} * \frac{DÉ(0)}{DD(0)}$. En utilisant une force d'intérêt sans risque, le résultat deviendrait $F_{0,T}^P = e^{-r_É T} * x_0$.

Force d'intérêt étr.

5.6.2. *Forward* de devise

L'idée que le prix *forward* soit égal au prix *forward* prépayé accumulé avec le taux sans risque tient toujours, mais comme le prix du *forward* prépayé introduit en 5.6.1 était établi en devise locale, c'est le taux sans risque domestique r_D qui sera utilisé, si bien qu'on aura :

$$F_{0,T} = (1+r_D)^T F_{0,T}^P = (1+r_D)^T * \underbrace{(1+r_É)^{-T} * x_0}_{F_{0,T}^P} = \left(\frac{1+r_D}{1+r_É}\right)^T x_0$$

<u>Le prix du *forward* est encore exprimé en devise domestique</u>. En utilisant la notation du livre de référence avec des forces d'intérêt, on obtiendrait :

$$F_{0,T} = e^{r_D T} F_{0,T}^P = e^{r_D T} \underbrace{e^{-r_É T} x_0}_{F_{0,T}^P} = \left(\frac{e^{r_D T}}{e^{r_É T}}\right) * x_0 = e^{(r_D - r_É)T} * x_0$$

5.6.3. *Forward* synthétique de devise

Comme c'était le cas avec un titre et/ou une action, on peut également créer un *forward* synthétique avec une devise étrangère en <u>*prêtant dans la devise étrangère et en empruntant dans la devise domestique*</u> entre t = 0 et t = T. On aura ainsi un coût initial nul en empruntant d'abord l'équivalent du prix *forward* prépayé $F_{0,T}^{P} = (1 + r_{É})^{-T} * x_0$ en devise domestique et en l'investissant en devise étrangère en même temps. La valeur à l'échéance sera de $x_T - F_{0,T}$, ce qui correspond aux caractéristiques d'un *forward* mais ici appliqué dans un échange de devises.

En effet, le tableau suivant résume les transactions et les implications de cette stratégie pour répliquer un *forward* de devise : *Rappel: $X_0 = \frac{DÉ(0)}{DD(0)}$ = "Pour 1 devise étrangère, j'ai x_0 devises locales"

Transaction	t = 0		t = T	
	En DD	En DÉ	En DD	En DÉ
Emprunter $x_0(1 + r_{É})^{-T}$ DD au taux r_D de 0 à T	$x_0(1 + r_{É})^{-T}$	0	$-x_0(1 + r_{É})^{-T}(1 + r_D)^T$	0
Convertir les DD en DÉ *	$-x_0(1 + r_{É})^{-T}$	$+(1 + r_{É})^{-T}$	0	0
Prêter le montant converti au taux $r_É$ de 0 à T	0	$-(1 + r_{É})^{-T}$	0	1
TOTAL	0	0	$\underbrace{-x_0(1 + r_{É})^{-T}(1 + r_D)^T}_{X_0\left(\frac{1+r_D}{1+r_É}\right)^T = F_{0,T}}$	1 "X_T"

Exprimé en DD

Et comme 1 * DÉ = x_T et que $-x_0(1 + r_{É})^{-T}(1 + r_D)^T = -F_{0,T}$, on obtient comme valeur à l'échéance $x_T - F_{0,T}$. Si jamais on avait que $x_0(1 + r_{É})^{-T}(1 + r_D)^T \neq F_{0,T}$, c'est qu'il y aurait possibilité d'arbitrage. Ainsi :

- Si $F_{0,T} > x_0(1 + r_{É})^{-T}(1 + r_D)^T$, on réplique le *forward* synthétique avec la stratégie ci-haut (position longue) et on vend un *forward* de devise (position courte) pour en retirer un profit.
- Si $F_{0,T} < x_0(1 + r_{É})^{-T}(1 + r_D)^T$, on réplique l'inverse du *forward* synthétique avec la stratégie ci-haut (position courte en inversant toutes les positions) et on achète un *forward* de devise (position longue) pour en retirer un profit.

Voir exemple tableau 5.13 p.153 *DM*.

5.7. Exercices supplémentaires

Exercices tirés des chapitres 14 et 15, manuel de l'ASM 1ère édition

1. Une action vaut actuellement 100$. Les dividendes sont versés continument à un taux de 1%. La force d'intérêt sans risque est de 3%. Calculez le prix d'un *forward* prépayé.
2. Une action vaut 50$ et verse des dividendes trimestriels de 0,20$ (en fin de trimestre). La force d'intérêt sans risque est de 5%. Calculez le prix *forward* pour un contrat dont la valeur notionnelle inclut 100 actions avec une échéance de 6 mois (tout de suite après le paiement du 2ème dividende).
3. Un *forward* de devise exprimé en yens (devise domestique) implique la livraison de 100$ (devise étrangère) après 3 mois. La force d'intérêt applicable pour le $ est de 5% alors que celle pour le yen est de 2%. Le taux de change actuel implique qu'un $ = 110 yens. Autrement dit, $x_0 = \frac{DÉ}{DD} = 110$ initialement. Calculez le prix *forward* de ce contrat.
4. Une action vaut actuellement 88$ et le prix *forward* (échéance 4 mois) est de 89$. La force d'intérêt sans risque est de 4%. Déterminez le taux de dividende de cette action.
5. Une action vaut 95$ et paye des dividendes trimestriels de 1,50$ dont le prochain est dans 2 mois. La force d'intérêt sans risque et de 3%. Calculez la prime à terme annualisée pour un *forward* d'échéance 6 mois.
6. Une action qui ne verse aucun dividende vaut actuellement 100$. Le taux d'intérêt annuel effectif sans risque est de 4%. Un *forward* sur ce titre est actuellement transigé avec $F_{0,T} = 108\$$. Expliquez de manière simple comment vous pourriez tirer avantage de cette situation et comment on appelle ce type de stratégie.
7. Un investisseur achète 100 *futures* de prix unitaire (valeur notionnelle) de 2300$. La marge initiale est de 10% et la marge de maintenance est de 80%, établie quotidiennement. Le taux d'intérêt annuel effectif applicable est de 5%. Après un jour, la valeur du titre sous-jacent augmente à 2350$, puis descend à 2200$ après le 2ème jour. Décrivez l'évolution de la marge et des appels de marge aux jours 0, 1 et 2.

Solutions

1. $F^P_{0,0.5} = S_0\ e^{-0.5\delta} = 100e^{-0.005}$ (le taux sans risque ne sert à rien ici)
2. On reprend l'équation en 5.3.1 : $F_{0,T} = \underbrace{(S_0 - \ Val.acc.(div))}_{\text{formule générale}}$. Le deuxième dividende est versé au moment de l'échéance et vaut donc 0,20$ sans ajustement. Le dividende après 3 mois s'accumule pendant 3 mois pour atteindre l'échéance et vaudra ainsi $0{,}20 * e^{\frac{0.05}{4}} =$ 0,2025$. La somme des deux égale 0,4025 et donc 40,25$ pour un groupe de 100 actions dans le contrat. On a donc :

$$F_{0,T} = (1 + r_f)^T S_0 - \ Val.acc.(div)$$
$$100 * F_{0,0.5} = 100 * \left(50 * e^{\frac{0.05}{2}} - 40.25\right) = 5086.33\$$$

3. $F_{0,0.25} = 110e^{\left(\frac{0.02}{4} - \frac{0.05}{4}\right)} = 109.1781$ yens
4. $F_{0,\frac{1}{3}} = S_0\ e^{\left(\frac{(r-\delta)}{3}\right)} = 89 = 88e^{\left(\frac{(0.04-\delta)}{3}\right)} \rightarrow \delta = 0.0061$
5. $F_{0,0.5} = 95e^{\left(\frac{0.03}{2}\right)} - 1.5\left(e^{\left(\frac{0.03}{3}\right)} + e^{\left(\frac{0.03}{12}\right)}\right) = 93.4169\$$
6. Un investisseur vend à découverte une action à 100$ à t = 0, réinvestit le 100$ au taux sans risque et prend une position longue dans un *forward* d'échéance 2 ans. Il aura accumulé 100$ * $1{,}04^2$ = 108,16$ et pourra acheter l'action en vertu de son *forward* pour 108$ et le redonner à la personne à qui il l'avait vendu à découvert. Il lui reste certainement 0,16$ dans les poches sans aucune prise de risque.
7. Solution prise du manuel ASM :

Solution: The initial price is 100(2300) = 230,000. The initial margin is **23,000**.

On day 1, the margin account grows with interest to $23{,}000(1.05^{1/365}) = 23{,}003.07$. The mark-to-market is (2350 − 2300)(100) = 5000, increasing the margin account to **28,003.07**.

On day 2, the margin account grows with interest to $28{,}003.07(1.05^{1/365}) = 28{,}006.81$. The mark-to-market is (2200 − 2350)(100) = −15,000, decreasing the margin account to **13,006.81**. Since this is less than 80% of 23,000, or 18,400, a margin call of 23,000 − 13,006.81 = **9993.19** is made. □