Question 1. De combien de façons 8 personnes peuvent s'asseoir autour d'une table ronde si... ?

(a) A et B ne veulent pas être côte à côte.

(b) A et B veulent être côte à côte, de même que C et D.

Question 2. On veut placer n livres, dont m sont brisés, sur une étagère de manière à ce qu'il y ait au moins deux livres brisés consécutifs. Les livres brisés sont indissociables entre eux, de même que les livres en bon état. De combien de façons peut-on s'y prendre ?

Question 3. Dans la salle de jeux d'une garderie, seulement quatre jouets (une poupée, un camion, une guitare et un livre de probabilités) peuvent être répartis parmi les dix enfants présents. Un enfant ne peut pas avoir plus d'un jouet. De combien de façons peut-on distribuer ces jouets si... ?

(a) Il n'y a aucune restriction.

(b) On veut éviter les crises en cédant aux caprices de chaque enfant :

- (i) l'enfant A veut jouer avec le livre de probabilités ou rien d'autre.
- (ii) l'enfant B veut jouer avec la camion ou la guitare ou rien d'autre.
- (iii) les enfants C et D ne peuvent pas avoir tous les deux un jouet.

**Ces trois restrictions sont cumulatives.*

Question 4. Nous disposons de j jetons numérotés de 1 à j ainsi que de b boîtes numérotées de 1 à b. De combien de façons peut-on répartir les j jetons dans les b boîtes...

(a) s'il n'y a aucune restriction.

(b) si la première boîte doit contenir exactement n_1 jetons.

(c) si la première boîte doit contenir exactement n_1 jetons et la dernière boîte doit en contenir n_b.

(d) si la boîte i doit contenir exactement n_i jetons de sorte que $n_1 + n_2 + ... + n_b = j$.

(e) si chaque boîte ne peut contenir qu'au maximum un jeton, en supposant que $b \geq j$.

Question 5. De combien de façons peut-on distribuer 7 balles indissociables dans 4 urnes distinctes si... ?

(a) toutes les balles sont distribuées et que...

- (i) chaque urne doit contenir au moins une balle.
- (ii) une ou plusieurs urnes peuvent en contenir aucune.

(b) les balles n'ont pas besoin d'être toutes distribuées et que...

- (i) chaque urne doit contenir au moins une balle.
- (ii) une ou plusieurs urnes peuvent en contenir aucune.

Question 6. Marie-Pier ne dispose que d'une semaine (lundi, mardi, ..., dimanche) pour étudier son examen de probabilités. Afin de planifier son horaire, elle se pose quelques questions.

(a) Considérant qu'il lui reste 8 chapitres à lire, de combien de manières différentes peut-elle répartir ces chapitres parmi les journées dont elle dispose si elle veut avoir une journée de congé (et donc 6 jours d'étude) ?

(b) Marie-Pier évalue qu'il lui reste 25 heures d'étude. De combien de façons différentes peut-elle répartir ces 25 heures parmi les 7 jours de la semaine s'il n'y a aucune contrainte (mis à part qu'il n'y a que 24 heures dans une journée...) ?

Question 7. Chaque fois que Pierre a trop bu, il doit revenir chez lui en taxi. Les probabilités de tomber sur un ou l'autre des 3 taxis de sa ville sont équiprobables. Quelle est la probabilité que, en 6 trajets, Pierre ait rencontré au moins une fois chacun des taxis ?

Question 8. Barbie et Ken lancent à tour de rôle une paire de dés. Barbie gagne si elle obtient une somme (des deux dés) de 6 avant que Ken n'obtienne une somme de 7. À l'inverse, Ken gagne s'il obtient une somme de 7 avant que Barbie n'en obtienne une de 6. Quelle belle activité de couple ! Si Barbie commence le jeu, quelle est la probabilité...

(a) que Barbie gagne la partie ?

(b) qu'on ne puisse pas déterminer de gagnant au bout de 20 lancers ?

Question 9. La proportion de tricheurs au jeu *pile ou face* dans votre population est de p pour $p \in [0, 1]$. On suppose que si le joueur triche, il gagne à tous les coups. Vous rencontrez un individu dans l'autobus et il vous propose de jouer à *pile ou face*. Il gagne. Démontrer que la probabilité que cet individu soit un tricheur sera toujours plus petite ou égale à $2p$.

Question 10. Pour $\theta \in]0,1[$ et c étant une constante positive, on définit la fonction de masse de probabilité de X comme suit :

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} c(1-\theta) max\{x,\ x^2 - 2x\} & \text{si } x = 1, 2, ..., 5 \\ \theta & \text{si } x = 6 \end{cases}$$

Calculer la valeur de c.

Question 11. Barbie est un petit chihuahua qui adore porter des vêtements. Dans sa garde-robe, on peut y trouver des robes identiques de n couleurs différentes au nombre de 8 pour chacune des couleurs. Toutefois, Barbie est un petit chien capricieux et ne veut pas porter la même couleur de vêtement trop souvent. Pour habiller Barbie, on pigera chaque jour une robe (<u>sans</u> remise). Lorsque l'on pigera 2 fois la même couleur de vêtement, son maître devra aller lui acheter une robe d'une toute nouvelle couleur. Le maître devra aller lui acheter un nouveau vêtement dés la 2^{e} ou la 3^{e} journée avec une probabilité de $\frac{99}{355}$. Combien y a-t-il de robes dans la garde-robe du chihuahua ?

Question 12. Une urne contient 4 boules noires et 5 boules blanches. On effectuera 3 tirages. À chaque tirage, si la boule tirée est noire, on la garde et sinon, on la remet dans l'urne. Le nombre de boules noires tirées est représenté par la variable aléatoire N.

(a) Écrire l'expression de la fonction de masse de probabilité de N.

(b) Calculer $E\left[\frac{100}{N+1}\right]$.

(c) Calculer $E[Y]$ où $Y = (N|N \geq 2)$.

Question 13. Huit personnes hésitent à partir en voyage à Chihuahua Land. Toutefois, il ne reste que 5 places disponibles dans l'avion. Si le coût du billet d'avion est inférieur à 1000\$, la probabilité qu'une personne décide d'y aller est de 75%, sinon, elle est de 35%. De plus, on sait que le prix d'un billet sera en bas de 1000\$ avec probabilité p et qu'il y a 40% de chance qu'il manque de places dans l'avion. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 2 des 8 personnes qui achétent un billet sachant qu'il y aura assez de places disponibles pour tout le monde ?

Question 14. On a

$$E[X] = 5$$
$$M_Y(t) = M_X(3t)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

Calculer $E[Y]$.

Question 15. Chaque fois que Barbie se comporte bien, son maître la récompense avec des petites gâteries. Au premier bon coup, son maitre ne lui donne rien. Pour chacun des bons coups subséquents, son maître lui donne 3 gâteries. La variable aléatoire du nombre de bons comportements de Barbie durant une journée suit une loi de Poisson de moyenne 1.5. Quelle est l'espérance du nombre de gâteries données à Barbie lors d'une journée ?

Question 16. Soit la variable aléatoire X telle que

$$M_X(t) = \left(1 + p\left(\mathrm{e}^t - 1\right)\right)^n$$

et

$$\begin{aligned} \Pr(X = n) &= 0.00032 \\ \Pr(X = n-1) &= 0.00128n \end{aligned}$$

Calculer E[X].

Question 17. Soit la variable aléatoire T modélisant la durée de vie d'une ampoule (en heures) avec fonction de densité

$$f_T(x) = \frac{2000000}{(1000+x)^3} \times 1_{\{x>0\}}.$$

Quelle est la probabilité que, sur un échantillon de 12 ampoules de ce type fonctionnant depuis déjà 900 heures, au moins 2 brûlent dans les prochaines 100 à 500 heures ?

Question 18. Soit la variable aléatoire X avec fonction de densité

$$f_X(x) = \varphi \times 1_{\{t_1 \leq x < t_2\}} + \theta \times 1_{\{t_2 \leq x < t_3\}} + \omega \times 1_{\{t_3 \leq x < t_4\}}.$$

(a) Écrire l'expression de la fonction de répartition de X.

(b) Calculer l'espérance de X^k.

Question 19. Nous avons que la variable aléatoire X est distribuée uniformément sur l'intervalle $[0,1]$ tandis que $Y = -\frac{\ln(X)}{3}$. Quelle est la variance de Y ?

Question 20. Soient les variables aléatoire X, Y et Z admettant les fonctions génératrices des moments suivantes :

$$M_X(t) = \mathrm{e}^{3\,\mathrm{e}^t - 3}$$

$$M_Y(t) = \left(\frac{1}{4 + 9\,\mathrm{e}^{-2t} - 12\,\mathrm{e}^{-t}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$M_Z(t) = \frac{e^{5t} - 1}{5t}$$

(a) Calculer $F_X^{-1}(0.5)$

(b) Calculer $\Pr(Y < 5)$

(c) Trouver t tel que $\Pr\left(\left|Z - \frac{5}{2}\right| < t\right) = \frac{7}{10}$

Question 21. Soient les variables aléatoires X obéissant à une loi exponentielle de moyenne 2 et $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière). Trouver $E[Y]$.

Question 22. Au cours d'une élection, deux candidats s'affrontent : le candidat A et le candidat B. Parmi les 10000 électeurs, 45% voteront avec certitude pour le candidat A tandis que 40% voteront pour le candidat B. Pour ce qui est des 15% restants, ils sont indécis et voteront chacun indépendamment avec probabilité $\frac{1}{3}$ pour le candidat A et $\frac{2}{3}$ pour le candidat B. Écrire la fonction de masse de probabilités du nombre de votes pour le candidat B et calculer l'espérance.

Question 23. Nous savons que X suit une loi lognormale. Nous avons également que la probabilité que X soit plus petit que 95 est égale 0.2358 et que la probabilité que X soit plus petit que 110 est égale à 0.6026. Calculer l'espérance de X.

Question 24. Lorsqu'un barman remplit un verre, la quantité X (en mL) de bière suit une uniforme $[200, \theta]$ ($\theta > 300$). Pour chacun des verres qu'il remplit, si la quantité de bière est supérieure à 300 mL, il le vend à un client du bar et empoche 1.50$ de pourboire. Le barman rentrera chez lui lorsqu'il aura amassé 18$. Quelle doit être la valeur de θ pour que l'espérance du nombre de verres qu'il devra remplir dans sa soirée soit égale à 16 ?

Question 25. On vous propose un jeu, on lance une fléchette sur une cible circulaire ayant un rayon de 15 cm. Si la fléchette n'atteint pas la cible, vous ne gagnez rien. Si la fléchette atteint la cible, votre gain correspondra à la distance en cm entre la fléchette et le milieu de la cible. La fléchette a une probabilité de 75% d'atteindre la cible et lorsqu'elle l'atteint, elle la frappera uniformément sur toute sa surface. Calculer l'espérance de votre gain.

Question 26. La variable aléatoire X suit une loi gamma dont la moyenne et la variance sont respectivement 5 et 10. Calculer la variance de Y où

$$Y = Xe^{-X}$$

Question 27. Vous vous rendez à un party de Noël et vous apercevez sur une table 65 muffins aux pépites de chocolat. Votre ami s'approche et vous dit que lorsqu'il a préparé ces muffins, il a mélangé à sa pâte 300 pépites de chocolat (de façon totalement aléatoire). Vous prenez un muffin au hasard. Soit X la variable aléatoire du nombre de pépites de chocolat contenus dans votre muffin.

(a) Écrire la loi de X.

(b) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

Question 28. Le nombre X de voyageurs qui visitent un parc lors d'une journée quelconque suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque visiteur a une probabilité p de payer son entrée par carte de crédit indépendamment des autres visiteurs.

(a) Écrire l'expression de la loi de probabilité conditionnelle, sachant que $X = n$, du nombre Y de visiteurs qui payent son entrée par carte de crédit lors d'une journée à ce parc.

(b) Montrer que Y suit une loi de Poisson.

Question 29. On lance un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 et on note X le nombre obtenu. On relance ensuite X fois le dé et on note Y, le nombre de 4 obtenus.

(a) Écrire l'expression de la fonction de masse de probabilité conjointe de X et Y.

(b) Calculer l'espérance de Y.

Question 30. Soient X et Y, deux variables aléatoires telles que

$$f_{X,Y}(x, y) = ke^{-\theta y} \times 1_{\{0 \leq x \leq y \leq \infty\}}.$$

(a) Montrer que $k = \theta^2$.

(b) Écrire les expressions des fonctions de densité marginales de X et Y.

(c) Calculer $\Pr(X \leq 1 | Y \leq 1)$.

Question 31. Soient X et Y, deux variables aléatoires telles que

$$f_{X,Y}(x, y) = k \times 1_{\{x^2+y^2 \leq 1\}}.$$

(a) Trouver la valeur de k.

(b) Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

(c) Calculer $\mathrm{Var}(X|Y)$.

Question 32. Deux personnes ont rendez-vous à 8h00, mais elles sont peu ponctuelles, de telle sorte que les instants X et Y de leurs arrivées sont indépendants et uniformément distribués sur l'intervalle $[8, 9]$. On note T, la durée de l'attente du premier arrivé. Calculer l'espérance de T.

Question 33. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire tel que $X \sim N(1, 1)$ et $(Y|X = x) \sim N(2x, 4)$. Calculer $\mathrm{Var}[X + Y]$.

Question 34. Soit X une variable aléatoire telle que

$$\begin{aligned}(X|\Lambda = \lambda) &\sim \mathrm{Exp}(\lambda)\\ \Lambda &\sim \mathrm{Gamma}(\alpha = 4, \beta = 5)\end{aligned}$$

Trouver $E[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$.

Question 35. La fonction de densité correspondant au diamètre d'un cercle est donnée par

$$f_X(x) = 100 \times 1_{\{1{,}00 \leq\, x\, \leq 1{,}01\}}$$

Trouver la fonction de densité et le domaine de la variable aléatoire correspondant à l'aire de ce cercle.

Question 36. La fonction de densité conjointe de X et Y est donnée par

$$f_{X,Y}(x,y) = xe^{-x(y-x)} \times 1_{\{0 \leq\, x\, \leq 1\}} \times 1_{\{y\, >\, x\}}.$$

Calculer $\Pr(Y > E[Y|X=x] \mid X = x)$.

Question 37. Soient X et Y, deux variables continues uniformes sur $[0, 60]$. Calculer $\Pr(|Y - X| \leq 20)$.

Question 38. La fonction de densité conjointe de X et Y est donnée par $f_{X,Y}(x,y) = c(4-x)$ pour $x = 1, 2$ ou 3 et $0 \leq y < x$. Y prend également des valeurs discrètes. Calculer la constante c.

Question 39. Soient X et Y des variables aléatoires avec fonction de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}} \times 1_{\{0\, \leq\, y\, \leq\, x\, \leq 1\}}.$$

(a) Calculer $F_{X,Y}(0.5, 0.75)$.

(b) Calculer $E[Y|X = 0.8]$.

Question 40. On lance un dé équilibré et on note D le résultat obtenu. On lance ensuite D fois une pièce truquée qui a une probabilité de p de tomber sur pile. On compte ensuite le nombre de piles obtenus au cours de ces D lancers. Y représente la v.a. du nombre de piles obtenus.

(a) Calculer p si on a que $\Pr(Y = 4) = p^4$.

(b) Calculer $\Pr(D = 1|Y = 0)$ avec la valeur de p obtenue en (a).

Question 41. On lance un dé truqué numéroté de 1 à 6. Les probabilités de tomber sur chacun des nombres pairs sont égales. Il est également équiprobable de tomber sur l'un ou l'autre des nombres impairs. Soit X une variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un nombre pair et 0 sinon. Soit Y une variable aléatoire qui vaut 1 si le nombre obtenu est supérieur à 3 et 0 sinon. On sait également que $E[XY] = \frac{4}{9}$.

(a) Trouver la fonction de masse de probabilité de (X, Y).

(b) On lance le dé 12 fois, calculer la probabilité que l'on obtienne 2 fois chacun des 6 nombres.

(c) Calculer $\text{Var}[Y|X = 1]$.

Question 42. Dû aux conditions économiques défavorables des derniers mois, Marie ne possède plus que deux actions dans son portefeuille : l'action **A** et l'action **B**. Afin de prédire le cours de ses actions, elle souhaite calculer la covariance entre leur prix. Elle sait que le prix de l'action A est une variable aléatoire uniforme distribuée sur l'intervalle $[0, a]$. **Sachant** le prix de l'action A, elle sait également que la variable aléatoire du prix de l'action B est distribuée uniformément entre **0 et le prix de l'action A**. Après avoir ressorti ses notes de probabilités, elle trouve que la covariance entre les prix de ces deux actions est égale à 6. Calculer a, pour $a > 0$.

Question 43. Puisque Marie n'a pas beaucoup d'argent, elle consent à habiter dans un appartement peu recommandable durant ses études. En plus d'habiter dans un logement malpropre, elle se rend vite compte qu'elle cohabite avec un couple de souris ! Les durées de vie, en années, de Stuart (le mâle) et de Minnie (la femelle) sont respectivement représentées par les v.a. Y et X avec fonction de densité conjointe donnée par

$$f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-(x+2y)} \times 1_{\{x>0, y>0\}}.$$

À la fin de son baccalauréat de 3 ans, on sait que le couple de souris est toujours vivant. Calculer la variance de la durée de vie de Stuart, sachant que $X > 3$ et que $Y > 3$.

RÉPONSES

Question 1. (a) 3600 (b) 480

Question 2.

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} - \binom{n-m+1}{m}$$

Question 3. (a) 5040 (b) i. 3528 ii. 2800 iii. 2328

Question 4. (a) b^j (b) $\binom{j}{n_1}$ (c) $\binom{j}{n_1}\binom{j-n_1}{n_b}(b-2)^{j-n_1-n_b}$ (d) $\frac{j!}{n_1!n_2!...n_b!}$ (e) $b(b-1)...(b-j+1)$

Question 5. (a) i. 20 ii. 120 (b) i. 35 ii. 330

Question 6. (a) 11 757 312 (b) 736 274

Question 7. 0.74074

Question 8. (a) 0.49180 (b) 0.03621

Question 9. Aucune réponse

RÉPONSES

Question 10. 0.03448

Question 11. 72

Question 12. (b) 52.12 (c) 2.131

Question 13. 0.1875

Question 14. 13

Question 15. 2.16939

Question 16. 1

Question 17. 0.88402

Question 18. Aucune réponse

Question 19. 0.11111

Question 20. (a) 3 (b) 0.11111 (c) 1.75

Question 21. 1.541

Question 22. 5000

Question 23. 106.9959

Question 24. 600

Question 25. 7.50

Question 26. 0.01361

Question 27. (b) 4.6151 et 4.5444

RÉPONSES

Question 28. Aucune réponse.

Question 29. (b) 0.625

Question 30. (c) 1

Question 31. (a) $1/\pi$ (c) $\frac{1-y^2}{3}$

Question 32. $\frac{1}{3}$

Question 33. 13

Question 34. $\frac{5}{3}$ et $\frac{50}{9}$

Question 35. Aucune réponse.

Question 36. 0.36788

Question 37. $\frac{5}{9}$

Question 38. $\frac{1}{10}$

Question 39. (a) 0.25 (b) $\frac{4}{15}$

Question 40. (a) 0.5657 (b) 0.5696

Question 41. (b) 0.001696 (c) $\frac{2}{9}$

Question 42. 12

Question 43. 0.25