Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives (Exercices)

Hélène Cossette et Etienne Marceau

Version : 23 novembre 2019

Table des matières

Remerciements

Je tiens à remercier les étudiantes et les étudiants qui ont assisté aux cours que j'ai enseignés à l'École d'actuariat (Université Laval, Québec, Canada), à l'ISFA (Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France), à l'INSEA (Rabat, Maroc) et au Department of Mathematics and Statistics (McGill University, Montréal, Canada).

Préface

Document de référence. Le présent ouvrage comprend la théorie pour les cours Act-2001 et Act-3000 de l'École d'actuariat (Université Laval) ainsi que pour le cours Modèles Stochastiques en assurance non-vie (Master Recherche) de l'ISFA (Université Claude Bernard Lyon 1). Il s'agit d'une version nouvelle et retravaillée de [Marceau, 2013].

Prérequis. Les prérequis pour cet ouvrage sont principalement des cours de bases en mathématiques, en probabilité et en statistique.

Conditions d'utilisation. Cet ouvrage est en cours de rédaction, ce qui implique que son contenu est continuellement révisé et mis à jour. Alors, il peut y avoir encore des erreurs et son contenu doit être encore amélioré. Pour cette raison, le lecteur à inviter à nous communiquer tout commentaire et / ou correction qu'il peut avoir. Les conditions suivantes d'utilisation doivent être respectées :

1. Cet ouvrage a été conçu pour des fins pédagogiques, personnelles et non-commerciales. Toute utilisation commerciale ou reproduction est interdite.
2. Son contenu demeure la propriété de ses auteurs.

Calculs et illustrations. Toutes les calculs et les illustrations ont été réalisés dans le langage R grâce au logiciel GNU R mis à disposition par le R Project. Les codes R ont été conçus dans l'environnement de développement intégré RStudio.

Le logiciel GNU R et les bibliothèques sont disponibles sur le site du R Project et du Comprehensive R Archive Network (CRAN) :

https ://cran.r-project.org/.

L'environnement RStudio est disponible sur le site suivant :

https ://www.rstudio.com/products/rstudio/download/.

Versions précédentes :

1. 21 août 2019
2. 17 février 2019.

Chapitre 1

Notions de probabilité pour la modélisation du risque

1.1 Exercices traditionnels

1. Soit $X \sim Exp(\beta)$. Développer l'expression de $F_X^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$.

   Code LaTeX : ex-10022.tex

2. Soit une v.a. continue X. Calculer $\Pr\left(F_X^{-1}(0.01) < X \leq F_X^{-1}(0.99)\right)$. Identifier clairement le théorème utilisé pour calculer la valeur demandée.

   Code LaTeX : ex-10023.tex

3. Soit une v.a. X avec $F_X(x) = 1 - \exp\left(-(\lambda x)^\tau\right)$, $x \geq 0$.

   (a) Développer l'expression de $F_X^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$.

   (b) On fixe $\lambda = \frac{1}{50}$ et $\tau = \frac{1}{2}$. Calculer $F_X^{-1}(0.001)$, $F_X^{-1}(0.5)$ et $F_X^{-1}(0.999)$.

   Code LaTeX : ex-10024.tex

4. Soit une v.a. X avec $F_X(x) = \left(\frac{x^\tau}{\lambda^\tau + x^\tau}\right)$, $x \geq 0$.

   (a) Développer l'expression de $F_X^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$.

   (b) On fixe $\lambda = 20$ et $\tau = 2.5$. Calculer $F_X^{-1}(0.001)$, $F_X^{-1}(0.5)$ et $F_X^{-1}(0.999)$.

   Code LaTeX : ex-10025.tex

5. Soit une v.a. X avec $F_X(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x^\tau}\right)^\alpha$, $x \geq 0$.

   (a) Développer l'expression de $F_X^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$.

   (b) On fixe $\alpha = 2.5$, $\lambda = 100$ et $\tau = 2$. Calculer $F_X^{-1}(0.001)$, $F_X^{-1}(0.5)$ et $F_X^{-1}(0.999)$.

   Code LaTex : ex-10026.tex

6. Soit une v.a. discrète X avec les informations suivantes :

x	0	500	1200	2700	5000
$\Pr(X = x)$	0.4	0.1	0.3	0.15	0.05

   Questions :

(a) Calculer $E[X]$.
(b) Calculer $E[\max(X-2500;0)]$.
(c) Calculer $E[\min(X;2500)]$.
(d) Calculer $E\left[X\times 1_{\{X>2500\}}\right]$.
(e) Calculer $E\left[X\times 1_{\{X\leq 2500\}}\right]$.
(f) Calculer $E\left[X\times 1_{\left\{X>F_X^{-1}(u)\right\}}\right]$, pour $u=0.5$ et 0.6.
(g) Calculer $E\left[X\times 1_{\left\{X\leq F_X^{-1}(u)\right\}}\right]$, pour $u=0.5$ et 0.6.
(h) Développer l'expression de $\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u$ et calculer sa valeur.

Code LaTeX : ex-10027.tex

7. Soit une v.a. discrète X dont la fgp est définie par

$$\mathcal{P}_X(t)=0.2+0.05t^{20}+0.35t^{50}+0.3t^{100}+0.1t^{300}.$$

Questions :

(a) Calculer $E[X]$.
(b) Calculer $E[\max(X-80;0)]$.
(c) Calculer $E[\min(X;80)]$.
(d) Calculer $E\left[X\times 1_{\{X>80\}}\right]$.
(e) Calculer $E\left[X\times 1_{\left\{X\leq F_X^{-1}(u)\right\}}\right]$, pour $u=0.5$.
(f) Développer l'expression de $\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u$ et calculer sa valeur.
(g) Calculer $\Pr\left(F_X^{-1}(0.24)<X\leq F_X^{-1}(0.86)\right)$.

Code LaTeX : ex-10028.tex

8. Soit une v.a. discrète X dont la fgp est définie par

$$\mathcal{P}_X(t)=0.6+0.4\times(0.8+0.2\times t)^2.$$

Questions :

(a) Calculer les valeurs non-nulles de la fonction de masse de probabilité de X.
(b) Calculer l'espérance et la variance de X.
(c) Calculer $\varphi=\frac{1}{0.1}\ln(\mathcal{M}_X(0.1))$, où $\mathcal{M}_X$ est la fgm de X.

Code LaTeX : ex-10029.tex

9. Soit une v.a. continue X obéissant à une loi **symétrique** par rapport à μ avec

$$F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}} & ,\quad x<\mu\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} & ,\quad x>\mu\end{cases}$$

et

$$E[X]=\mu,\quad Var(X)=2\sigma^2,\quad M_X(t)=\frac{\mathrm{e}^{\mu t}}{1-\sigma^2t^2}\quad\left(-\frac{1}{\sigma}<t<\frac{1}{\sigma}\right).$$

Questions :

(a) Calculer $\Pr(X>0)$, si $\mu=0.08$ et $\sigma=0.2$.

(b) Développer l'expression de F_X^{-1}.

(c) Calculer $F_X^{-1}(0.001)$, $F_X^{-1}(0.5)$ et $F_X^{-1}(0.999)$, si $\mu = 0.08$ et $\sigma = 0.2$.

(d) Soit une v.a. $Y = 10\mathrm{e}^X$.

i. Développer les expressions de $E[Y]$ et $Var(Y)$.

ii. Calculer les valeurs de $E[Y]$ et $Var(Y)$, si $\mu = 0.08$ et $\sigma = 0.2$.

iii. Développer l'expression de F_Y.

iv. Calculer $\Pr(Y > 10)$, si $\mu = 0.08$ et $\sigma = 0.2$.

v. Calculer $\Pr(Y > 15)$, si $\mu = 0.08$ et $\sigma = 0.2$.

Code LaTeX : ex-10030.tex

10. **Fonction stop-loss**.

(a) Soit une v.a. continue X définie sur $\mathbb{R}$ avec $E[X] < \infty$. Utiliser l'intégration par parties pour démontrer que

$$\pi_X(x) = E[\max(X - x; 0)] = \int_x^\infty \overline{F}_X(x)\,\mathrm{d}x$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

(b) Soit une v.a. N définie sur $\mathbb{N}$ avec $E[N] < \infty$. Démontrer que

$$\pi_N(k) = E[\max(N - k; 0)] = \sum_{j=k}^{\infty} \overline{F}_N(j) \tag{1.1}$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

(c) À partir de (1.1), démontrer la relation suivante :

$$\overline{F}_N(k) = \pi_N(k) - \pi_N(k+1) \text{ ou } F_N(k) = 1 + \pi_N(k+1) - \pi_N(k),$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

Code LaTeX : ex-10005.tex

11. Déterminer l'expression de $\pi_X(x)$ sous les hypothèses suivantes :

(a) Soit $X \sim Exp(\beta)$.

(b) Soit $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

(c) Soit $X \sim Norm(\mu, \sigma^2)$.

(d) Soit $X \sim LNorm(\mu, \sigma^2)$.

Code LaTeX : ex-10006.tex

12. Déterminer l'expression de $E\left[X \times 1_{\{X>x\}}\right]$ sous les hypothèses suivantes :

(a) Soit $X \sim Exp(\beta)$.

(b) Soit $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

(c) Soit $X \sim Norm(\mu, \sigma^2)$.

(d) Soit $X \sim LNorm(\mu, \sigma^2)$.

Code LaTeX : ex-10007.tex

13. Soit X et Y deux v.a. indépendantes. On définit la v.a. Z comme étant la somme de X et Y, soit $Z = X + Y$.

(a) Soit $X \sim Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $Y \sim Gamma(\alpha_2, \beta)$. Montrer que $Z \sim Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

(b) Soit $X \sim Bin(n, q)$ et $Y \sim Bin(m, q)$. Montrer que $Z \sim Bin(n + m, q)$.

(c) Soit $X \sim Pois(\lambda_1)$ et $Y \sim Pois(\lambda_2)$. Montrer que $Z \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$.

(d) Soit $X \sim BinNég(n, q)$ et $Y \sim BinNég(m, q)$. Montrer que $Z \sim BinNég(n + m, q)$.

Code LaTeX : ex-13001.tex

14. Soit une v.a. X discrète avec fonction de masse de probabilité

x_i	$\Pr(X = x_i)$
0	0.2
200	0.15
400	0.25
800	0.35
1500	0.05

(a) Calculer $E[X]$

(b) Calculer $Var\,(X)$.

(c) Calculer le coefficient d'asymétrie $\gamma(X) = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}$.

(d) Calculer la probabilité que X soit inférieur à 700.

(e) Calculer la probabilité que X prenne une valeur supérieure au double de $E\,[X]$.

Code LaTeX : ex-13002.tex

15. On considère les v.a.continues $X_1, ..., X_{10}$ indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que les v.a. X_i obéissent à une loi de Pareto dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_{X_i}(y) = 1 - \left(\frac{10}{10 + y}\right)^{3.5}, y \geq 0.$$

(a) Calculer l'espérance $E[X_i]$ et la variance $Var\,(X_i)$ pour i=1,2, ... , 10.

(b) Trouver les fonctions de répartition et de densité conjointes de $(X_1, ..., X_{10})$.

(c) Si $X_{(10)} = max(X_1, ..., X_{10})$, calculer $\Pr(X_{(10)} > 10)$.

(d) Calculer la probabilité que $X_{(10)}$ soit supérieure à $10E\,[X]$.

Code LaTeX : ex-13003.tex

16. Soit deux v.a. indépendantes $X \sim Bêta\,(2, 1)$ et $Y \sim Bêta\,(1, 2)$. Développer l'expression de F_S pour $S = X + Y$.

Code LaTeX : ex-21002.tex

17. On considère deux v.a. indépendantes X_1 et X_2 où $X_1 = 2000Y_1$, avec $Y_1 \sim Bêta\,(2, 1)$, et $X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$. On définit la v.a. S par $S = X_1 + X_2$.

(a) Développer l'expression de $f_S\,(x)$.

(b) Calculer $F_S\,(x)$ pour $x = 1500$ et 3000.

Code LaTeX : ex-21003.tex

18. On définit le passif au temps 1 par $P = 1000\mathrm{e}^{R_1}$ et l'actif au temps 1 par $A = 1100\mathrm{e}^{R_2}$. Le ratio de solvabilité au temps 1 est défini par la v.a. $U = \frac{A}{P}$. Soit les v.a. iid $Z_1 \sim Z_2 \sim N(0,1)$. On définit les v.a.
$$R_1 = 0.005Z_1 + 0.03$$
et
$$R_2 = 0.2\left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_2\right) + 0.06$$
avec $\rho = 0.4$.
   (a) Calculer $Cov(R_1, R_2)$.
   (b) Trouver la loi de U et calculer $E[U]$ et $Var(U)$.
   (c) Calculer $\Pr(U \leq 1)$.

   Code LaTeX : ex-12002.tex
19. Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim BinN\acute{e}g(2, 0.5)$ et $X_2 \sim Pois(2)$.
   (a) On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.
      i. Calculer $\Pr(S = 4)$.
      ii. Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{S=4\}}\right]$.
      iii. Calculer $E[X_1 |S = 4]$.
   (b) On définit la v.a. $T = 1000X_1 + 2000X_2$.
      i. Calculer $\Pr(T = 1000k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
      ii. Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{T=4000\}}\right]$.
      iii. Calculer $E[X_1 |T = 4000]$.

   Code LaTeX : ex-12003.tex
20. Soit un couple de v.a. (M_1, M_2) défini sur $\{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$ et dont la fonction de masses de probabilité conjointe est définie par
$$\Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & k_1 = 1 \text{ et } k_2 = 5 \\ \frac{1}{5}, & k_1 = 2 \text{ et } k_2 = 1 \\ \frac{1}{5}, & k_1 = 3 \text{ et } k_2 = 2 \\ \frac{1}{5}, & k_1 = 4 \text{ et } k_2 = 3 \\ \frac{1}{5}, & k_1 = 5 \text{ et } k_2 = 4 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}.$$
   (a) Identifier les lois marginales de M_1 et de M_2.
   (b) Calculer $Cov(M_1, M_2)$. Est-ce que les v.a. M_1 et M_2 sont indépendantes ?
   (c) On définit $S = M_1 + M_2$. Calculer $F_S(k)$, $k = 0, 1, ..., 10$.
   (d) Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) avec
$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \sum_{k_1=1}^{5}\sum_{k_2=1}^{5} \Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2)\, H\left(x_1; k_1, \frac{1}{100}\right) H\left(x_2; k_2, \frac{1}{100}\right).$$
      i. Identifier les lois marginales de X_1 et de X_2.
      ii. Calculer $Cov(X_1, X_2)$.
      iii. On définit $T = X_1 + X_2$. Calculer $F_T(1000)$ et $VaR_{0.99}(T)$.

(e) Refaire (a)-(d) avec

$$\Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & k_1 = 1 \text{ et } k_2 = 4 \\ \frac{1}{5}, & k_1 = 2 \text{ et } k_2 = 3 \\ \frac{1}{5}, & k_1 = 3 \text{ et } k_2 = 2 \\ \frac{1}{5}, & k_1 = 4 \text{ et } k_2 = 1 \\ \frac{1}{5}, & k_1 = 5 \text{ et } k_2 = 5 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}.$$

(f) Refaire (a)-(d) avec

$$\Pr(M_1 = k_1, M_2 = k_2) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & k_1 = 1 \text{ et } k_2 = 5 \\ \frac{1}{10}, & k_1 = 2 \text{ et } k_2 = 1 \\ \frac{1}{10}, & k_1 = 3 \text{ et } k_2 = 2 \\ \frac{1}{10}, & k_1 = 4 \text{ et } k_2 = 3 \\ \frac{1}{10}, & k_1 = 5 \text{ et } k_2 = 4 \\ \frac{1}{10}, & k_1 = 1 \text{ et } k_2 = 4 \\ \frac{1}{10}, & k_1 = 2 \text{ et } k_2 = 3 \\ \frac{1}{10}, & k_1 = 3 \text{ et } k_2 = 2 \\ \frac{1}{10}, & k_1 = 4 \text{ et } k_2 = 1 \\ \frac{1}{10}, & k_1 = 5 \text{ et } k_2 = 5 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}.$$

Code LaTeX : ex-12004.tex

21. Soit des v.a. indépendantes X, Y et Z où $E[X] = 100$, $E[Y] = 200$, $E[Z] = 1.1$, $\mathrm{Var}(X) = 300^2$, $\mathrm{Var}(Y) = 500^2$ et $\mathrm{Var}(Z) = 1.9$. On définit la v.a. $S = (X + Y) Z$. Calculer l'espérance et la variance de S.

Code LaTeX : ex-21006.tex

22. Soit une v.a. $X = R \times Y$, où R et Y sont des v.a. indépendantes avec $Y \sim Burr(\lambda = 10\ 000, \alpha = 2, \tau = 2)$ et $\Pr(R = 1) = 0.5$, $\Pr(R = 1.3) = 0.4$, $\Pr(R = 2) = 0.1$. Calculer $E[X]$, $\Pr(X \leq 200)$ et $E[\max(X - 200; 0)]$.

Code LaTeX : ex-21007.tex

23. Soit des v.a. iid $Z_1 \sim Z_2 \sim N(0, 1)$. On définit les v.a. $X_1 = Z_1$ et $X_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2$.
    (a) Identifier les lois marginales de X_1 et X_2.
    (b) Développer l'expression de $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$. Développer l'expression de $E\left[\mathrm{e}^{t_1 X_1} \mathrm{e}^{t_2 X_2}\right]$. Identifier la distribution du couple (X_1, X_2).

Code LaTeX : ex-21008.tex

24. Soit des v.a. indépendantes $X_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta_i)$ avec $\alpha_i \sim 0.5i$ et $\beta_i = \frac{i}{10}$, $i = 1, 2, 3$. Pour $S = \sum_{i=1}^{3} X_i$, calculer $F_S(x)$ pour $x = 30$, 40 et 50, et $\pi_S(d)$, pour $d = 30$, 40, 50.

Code LaTeX : ex-21010.tex

25. Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} p_{ij} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i}}\right) \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10j}}\right)$$

pour $x_1, x_2 \geq 0$. Hypothèse A : $p_{11} = 0.75$, $p_{22} = 0.15$, $p_{12} = p_{21} = 0.05$. Hypothèse B : $p_{11} = 0.61$, $p_{22} = 0.01$, $p_{12} = p_{21} = 0.19$. Les calculs se font pour les hypothèses A et B.

(a) Identifier les lois de X_1 et X_2. Calculer $\overline{F}_{X_1}(20)$.

(b) Calculer $\Pr(X_1 > 20, X_2 > 20)$ et $\Pr(X_1 > 20 | X_2 > 20)$.

(c) Développer l'expression de la fonction de densité conjointe de (X_1, X_2).

(d) Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.

(e) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2>20\}}\right]$.

(f) Calculer $E[X_1|X_2 = 20]$ et $E[X_1|X_2 > 20]$.

(g) Soit $S = X_1 + X_2$. Calculer $E[S]$, $\mathrm{Var}(S)$, $\overline{F}_S(20)$ et $E[\max(S - 20; 0)]$.

Code LaTeX : ex-21011.tex

1.2 Exercices informatiques

1. Aucun pour le moment

Chapitre 2

Méthodes Monte-Carlo

2.1 Exercices traditionnels

1. On fournit les réalisations suivantes de la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$:

j	1	2	3
$U^{(j)}$	0.325	0.743	0.622

   Calculer les trois réalisations $M^{(j)}$, $j = 1,2,3$, de la v.a. M prenant des valeurs dans {0, 1, 5, 10, 15, 50} et ayant la fonction masse de probabilité suivante :

$$\begin{gathered} P(M=0)=? \\ P(M=1)=0.25 \\ P(M=5)=0.20 \\ P(M=10)=0.15 \\ P(M=50)=0.10 \end{gathered}$$

2. On fournit les réalisations suivantes de la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$:

j	1	2	3
$U^{(j)}$	0.325	0.743	0.622

   Calculer les trois réalisations $M^{(j)}$, $j = 1,2,3$, de la v.a. M ayant une loi géométrique de moyenne 10.

3. On fournit les réalisations suivantes de la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$:

j	1	2	3
$U^{(j)}$	0.325	0.743	0.622

   Calculer les trois réalisations $M^{(j)}$, $j = 1,2,3$, de la v.a. M ayant une loi Poisson de moyenne 2.

4. On fournit les réalisations suivantes de la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$:

j	1	2	3
$U^{(j)}$	0.325	0.743	0.622

   Calculer les trois réalisations $M^{(j)}$, $j = 1,2,3$, de la v.a. M ayant une loi Binomiale de moyenne 2 et variance $1\frac{1}{3}$.

5. On fournit les réalisations suivantes de la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$:

j	1	2	3
$U^{(j)}$	0.325	0.743	0.622

On veut simuler trois réalisations de la v.a. X ayant une moyenne de 250 et une variance de 80000. Calculer les trois réalisations si X obéit à une loi LogNormale.

6. Soit $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ où $\mu = 2$ et $\sigma^2 = 9$. Utiliser la méthode inverse pour simuler deux réalisations de X.
   Quelques données :
   $$U^{(1)} = 0.78 \text{ et } U^{(2)} = 0.24$$
   où $U^{(j)}$ est la réalisation j de la v.a. $U \sim Unif\,(0, 1)$.
7. Soit X une v.a. telle que
   $$F_X(x) = (1 - e^{-\frac{x}{10}})^{0.5}, x \geq 0.$$
   Utiliser la méthode inverse pour simuler deux réalisations de X.
   Quelques données :
   $$U^{(1)} = 0.78 \text{ et } U^{(2)} = 0.24$$
   où $U^{(j)}$ est la réalisation j de la v.a. $U \sim Unif\,(0, 1)$.
8. Soit N une v.a. discrète telle que
   $$\Pr(N = k) = \beta(11 - k)^2, k = 0, 1, 5 \text{ et } 10.$$
   Note : β est une constante de normalisation. Utiliser la méthode inverse pour simuler 5 réalisations de N.
   Quelques données :
   $$\begin{aligned} U^{(1)} &= 0.781 \\ U^{(2)} &= 0.242 \\ U^{(3)} &= 0.476 \\ U^{(4)} &= 0.999 \\ U^{(5)} &= 0.895 \end{aligned}$$
   où $U^{(j)}$ est la réalisation j de la v.a. $U \sim Unif\,(0, 1)$.
9. Soit X une v.a. définie par
   $$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases},$$
   où $I \sim Bern(0.2)$ et $B \sim Exp(0.1)$ (i.e $E[B] = 10$). On veut simuler 3 réalisations de la v.a. X.
   Quelques données :
   $$\begin{aligned} U^{(1)} &= 0.24 \\ U^{(2)} &= 0.98 \\ U^{(3)} &= 0.56 \end{aligned}$$
   où $U^{(j)}$ est la réalisation j de la v.a. $U \sim Unif\,(0, 1)$.
10. Soit N une v.a. de loi Géométrique avec une moyenne de 4. On veut simuler 3 réalisations de la v.a. N.
    Quelques données :
    $$\begin{aligned} U^{(1)} &= 0.24 \\ U^{(2)} &= 0.98 \\ U^{(3)} &= 0.56 \end{aligned}$$
    où $U^{(j)}$ est la réalisation j de la v.a. $U \sim Unif\,(0, 1)$.
11. Soit N une v.a. de loi Poisson avec une moyenne de 1. On veut simuler 3 réalisations de la v.a. N.

Quelques données :

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= 0.24 \\ U^{(2)} &= 0.98 \\ U^{(3)} &= 0.56 \end{aligned}$$

où $U^{(j)}$ est la réalisation j de la v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$.

12. Soient les trois réalisations $U^{(1)} = 0.325$, $U^{(2)} = 0.743$, $U^{(3)} = 0.622$ de la v.a. $U \sim U\,(0,1)$. Produire trois réalisations de la v.a. M où $E\,[M] = 2$ dans les trois cas suivants :
   (a) $M \sim BN\,(1,q)$.
   (b) $M \sim Pois\,(\lambda)$.
   (c) $M \sim B\,(n,q)$ et $\mathrm{Var}\,(M) = \frac{4}{3}$.
13. Soient les trois réalisations $U^{(1)} = 0.325$, $U^{(2)} = 0.743$, $U^{(3)} = 0.622$ de la v.a. $U \sim U\,(0,1)$. On veut simuler trois réalisations de la v.a. B ayant une moyenne de 250 et une variance de 80 000. Produire trois réalisations de B dans les deux cas suivants :
   (a) B obéit à une loi lognormale.
   (b) B obéit à une loi de Pareto.
14. Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) indépendantes où

$$\begin{array}{rlll} & X_1 = 100Y_1 & \text{avec} & Y_1 \sim Beta\,(1.5, 1) \\ \text{et} & X_2 = 100Y_2 & \text{avec} & Y_2 \sim Beta\left(1, \frac{2}{3}\right). \end{array}$$

On définit la v.a $S = X_1 + X_2$.
On dispose des réalisations suivantes de la paire de v.a. i.i.d. (U_1, U_2) avec $U_i \sim Unif\,(0,1)$:

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$
1	0.07	0.22
2	0.14	0.95
3	0.05	0.91
4	0.94	0.43
5	0.81	0.79

On utilise les réalisations de U_i pour produire les réalisations de X_i, $i = 1, 2$.
Questions :
   (a) Calculer les 5 réalisations de (X_1, X_2).
   (b) Utiliser les résultats en (14a) pour calculer des approximations de $TVaR_{0.6}\,(X_1)$, $TVaR_{0.6}\,(X_2)$, et $TVaR_{0.6}\,(S)$.
   (c) Utiliser les résultats en (14a) pour calculer

$$\begin{aligned} &\sup_{j_1, j_2 \in \{1,2,\ldots,5\}, j_1 \neq j_2} \left\{X_1^{(j_1)} + X_1^{(j_2)}\right\} \\ &\sup_{j_1, j_2 \in \{1,2,\ldots,5\}, j_1 \neq j_2} \left\{X_2^{(j_1)} + X_2^{(j_2)}\right\} \\ &\sup_{j_1, j_2 \in \{1,2,\ldots,5\}, j_1 \neq j_2} \left\{S^{(j_1)} + S^{(j_2)}\right\}. \end{aligned}$$

   (d) Comparer les valeurs obtenues en (14b) et en (14c).
   (e) Utiliser les valeurs en (14b) et (14c) pour illustrer la propriété de la sous-additivité de la TVaR.

2.2 Exercices informatiques

1. Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) indépendantes avec

$$X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$$

et

$$X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{25}\right)$$

On définit la v.a $S = X_1 + X_2$.
On a recours au générateur congruentiel mixte défini par la relation récurrente $x_n = (ax_{n-1} + c) \mod (m)$ $(n = 1, 2, ...)$ avec $a = 41358$, $c = 0$, $m = 2147483647$ et $x_0 = 20150309$.
On produit dans l'ordre $m = 1000$ réalisations de (X_1, X_2) afin de produire les 1000 réalisations de S.
NOTE : Simuler dans l'ordre les paires de réalisations indépendantes de la loi uniforme i.e. on doit avoir

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$
1	0.071164493	0.221121436
2	0.140334466	0.952847804
...		
1000	0.241487407	0.436188549

Questions (écrire clairement le développement, la démarche et les valeurs demandées) :

(a) À partir des $m = 1000$ réalisations de (U_1, U_2), produire $m = 1000$ réalisations de (X_1, X_2). Indiquer les réalisations 1 et 2 de (X_1, X_2). .

(b) À partir des $m = 1000$ réalisations de (X_1, X_2), produire $m = 1000$ réalisations de S. Indiquer les réalisations 1 et 2 de S. Indiquer la plus petite réalisation de S et la plus grande réalisation de S.

(c) À partir des $m = 1000$ réalisations de (X_1, X_2) et S, ...

   i. ... calculer l'approximation de $F_S(x)$, pour $x = 10, 50, 200$;

   ii. ... calculer l'approximation de $E\left[(S-d)_+\right] = E\left[\max(S-d; 0)\right]$, , pour $d = 10, 50, 200$.

(d) Comparer les valeurs obtenues en (c) avec les valeurs exactes. À cette fin, il faut développer les expressions de F_S et $E\left[(S-d)_+\right]$.

2. Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) indépendantes avec

$$X_1 \sim Gamma\left(\alpha = 2, \lambda = \frac{1}{5}\right)$$

et

$$X_2 \sim LNorm\left(\mu = \ln(10) - 0.32, \sigma = 0.8\right).$$

La v.a. X_1 représente les coûts en dommages matériels et la v.a. X représente les coûts en dommages corporels lorsque survient un accident sur la route.
On définit la v.a $S = X_1 + X_2$.
On a recours au générateur de base du logiciel R.
On produit dans l'ordre $m = 100000$ réalisations de (X_1, X_2) afin de produire les m réalisations de S.
NOTE : Utiliser `runif()` avec `set.seed(2019)` pour simuler dans l'ordre les paires de réalisations indépendantes de la loi uniforme standard, i.e., on doit produire les valeurs suivantes :

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$
1	0.769902	0.712840
2	0.303360	0.618236
...		
100000	0.719933	0.416607

Questions (écrire clairement le développement, la démarche et les valeurs demandées) :

(a) À partir des m réalisations de (U_1, U_2), produire m réalisations de (X_1, X_2). Indiquer les réalisations 3 et 4 de (X_1, X_2). Vérification :

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$
1	14.028825	11.380996
2	5.532639	9.237458
...		
100000	12.678059	6.135678

(b) À partir des m réalisations de (X_1, X_2), produire m réalisations de S. Indiquer les réalisations 3 et 4 de S. Indiquer la plus petite réalisation de S et la plus grande réalisation de S.

(c) On utilise les m réalisations de (X_1, X_2) et S pour effectuer les calculs suivants :

i. Soit l'approximation $\widetilde{\theta}_0^{(m)}$ de $\theta_0 = E[S]$. Écrire l'expression de $\widetilde{\theta}_0^{(m)}$. Calculer la valeur de $\widetilde{\theta}_0^{(m)}$.

ii. Soit l'approximation $\widetilde{\theta}_1^{(m)}(x)$ de $\theta_1(x) = F_S(x)$. Écrire l'expression de $\widetilde{\theta}_1^{(m)}(x)$. Calculer les valeurs de $\widetilde{\theta}_1^{(m)}(x)$, pour $x = 20, 100$. (Pour vérification : $\widetilde{\theta}_1^{(m)}(60) = 0.98983$)

iii. Soit l'approximation $\widetilde{\theta}_2^{(m)}(x)$ de $\theta_2(x) = E[\max(S - x; 0)]$. Écrire l'expression de $\widetilde{\theta}_2^{(m)}(x)$. Calculer les valeurs de $\widetilde{\theta}_2^{(m)}(x)$, pour $x = 20, 100$. (Pour vérification : $\widetilde{\theta}_2^{(m)}(60) = 0.1551939$)

3. Soit la v.a. $X \sim Pareto(\alpha = 2.5, \lambda = 15)$, dont l'expression de la TLS est

$$\mathcal{L}_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] \tag{2.1}$$

pour $t > 0$. Il n'y a pas d'expression fermée pour $\mathcal{L}_X(t)$.

On fixe $t = \delta$. On vise à utiliser de simulation de Monte-Carlo pour évaluer

$$\theta(\delta) = \mathcal{L}_X(\delta).$$

On a recours au générateur de base du logiciel R (`runif()` avec `set.seed(2019)`) pour produire dans l'ordre $m = 1000000$ (1 million) réalisations $\left\{U^{(j)}, j = 1, 2, ..., m\right\}$ de $U \sim Unif(0, 1)$. On obtient les réalisations suivantes :

j	$U^{(j)}$
1	0.769902
2	0.712840
...	
m	0.445244

Questions :

(a) Est-ce que l'espérance en (2.1) existe pour $t > 0$? Pourquoi ?

(b) Avec les réalisations $\left\{U^{(j)}, j = 1, 2, ..., m\right\}$ de la v.a. U, on utilise la méthode inverse pour produire les réalisations $\left\{X^{(j)}, j = 1, 2, ..., m\right\}$ de la v.a. X. Indiquer les valeurs de $X^{(j)}$, pour $j = 3, 4$. Pour vérification, on fournit les valeurs suivantes :

j	$X^{(j)}$
1	11.997639
2	9.708223
...	
100000	3.986741

(c) Écrire l'expression de l'approximation $\widetilde{\theta}^{(m)}(\delta)$ de $\theta(\delta)$ en fonction des réalisations $\left\{X^{(j)}, j = 1, 2, ..., m\right\}$ de la v.a. X. Calculer la valeur de l'approximation $\widetilde{\theta}^{(m)}(\delta)$ de $\theta(\delta)$ pour $\delta = 0.05$. Vérification : $\widetilde{\theta}^{(m)}(0.04) = 0.751444$.

Chapitre 3

Mesures de risque et mutualisation des risques

3.1 Exercices traditionnels

1. On considère une v.a. discrète X avec les caractéristiques fournies dans le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	100	500	1000	5000	10 000
$\Pr(X = x_i)$	0.5	0.3	0.1	0.05	0.043	0.007

   (a) Calculer $E[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

   (b) Calculer $VaR_{0.4}(X)$, $VaR_{0.95}(X)$, $VaR_{0.995}(X)$.

   (c) Calculer $TVaR_{0.4}(X)$, $TVaR_{0.95}(X)$, $TVaR_{0.995}(X)$.

   (d) Calculer $E[\max(X - 3000; 0)]$ et $E[\min(X; 7000)]$.

   Code LaTex : ex-11001.tex

2. Pour les lois Weibull, Burr et log-logistique, développer les expressions de $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$, $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$.

   Code LaTeX : ex-11002.tex

3. Soit $X \sim Exp(\beta)$. Pour $VaR_{0.995}(X) = 2000$, calculer $TVaR_{0.995}(X)$. Pour $Y = -2X + 500$, calculer $VaR_{0.995}(Y)$ et $TVaR_{0.995}(Y)$.

   Code LaTeX : ex-11003.tex

4. Soit une v.a. continue X dont l'espérance est 2000 et la variance est 84 000 000. Dans les questions ci-dessous, certaines valeurs de VaR doivent être calculées avec R en utilisant les fonctions quantile et de répartition.

   (a) Si X obéit à une loi gamma, déterminer ses 2 paramètres et les valeurs $VaR_{0.995}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$.

   (b) Si X obéit à une loi lognormale, déterminer ses 2 paramètres et les valeurs $VaR_{0.995}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$.

   (c) Si X obéit à une loi inverse gaussienne, déterminer ses 2 paramètres et les valeurs $VaR_{0.995}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$.

   (d) Si X obéit à une loi de Pareto, déterminer ses 2 paramètres et les valeurs $VaR_{0.995}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$.

   (e) Si X obéit à une loi F-généralisée avec $\tau = 2$, déterminer les 2 autres paramètres et les valeurs $VaR_{0.995}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$.

Code LaTeX : ex-11004.tex

5. Soit une v.a. $Y = 200\ 000X$ avec $X \sim B\hat{e}ta\,(2, \beta = 1)$. Calculer $VaR_{0.995}\,(Y)$ et $TVaR_{0.995}\,(Y)$.

Code LaTex : ex-11005.tex

6. Soit une v.a. X dont la fonction de survie est $\overline{F}_X\,(x) = 0.8\mathrm{e}^{-\frac{x}{1000}} + 0.2\mathrm{e}^{-\frac{x}{6000}}$, $x \geq 0$.
   (a) Développer les expressions de f_X, $E\,[X]$, $\mathrm{Var}\,(X)$, π_X et $TVaR_\kappa\,(X)$.
   (b) Hypothèses : $\beta_1 = \frac{1}{1000}$, $\beta_2 = \frac{1}{6000}$, $p_1 = \frac{4}{5}$ et $p_2 = \frac{1}{5}$.
      i. Calculer $E\,[X]$ et $\mathrm{Var}\,(X)$.
      ii. Calculer $VaR_{0.995}\,(X)$ (avec un outil d'optimisation), $TVaR_{0.995}\,(X)$ et $\pi_X\,(10\ 000)$.

Code LaTeX : ex-11006.tex

7. Soit une v.a. X dont la fgm $\mathcal{M}_X\,(t)$ existe, pour $t < t^*$ où $t^* > 0$. On définit les mesures de risque

$$\rho_1\,(X) = \sqrt{Var\,(X)} \quad \text{et} \quad \rho_2\,(X) = \tfrac{1}{\eta}\ln\left(E\left[e^{\eta X}\right]\right),\ \eta \in (0, t^*).$$

   (a) En justifiant votre réponse, indiquer laquelle des 2 mesures satisfait la propriété d'invariance à la translation et laquelle ne la satisfait pas.
   (b) En justifiant votre réponse, indiquer laquelle des 2 mesures satisfait la propriété d'homogénéité et laquelle ne la satisfait pas.

Code LaTeX : ex-10001.tex

8. Soit une v.a. X avec $E\,[X] < \infty$. La définition initiale de la TVaR de X est

$$TVaR_\kappa\,(X) = \tfrac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u\,(X)\,\mathrm{d}u \quad , \quad \kappa \in (0,1). \tag{3.1}$$

   (a) Démontrer directement à partir de (3.1) que

$$TVaR_\kappa\,(X) = VaR_\kappa\,(X) + \tfrac{1}{1-\kappa}E\,[\max\,(X - VaR_\kappa\,(X))\,;0] \quad , \quad \kappa \in (0,1). \tag{3.2}$$

   (b) Démontrer à partir de (3.2) que

$$TVaR_\kappa\,(X) = \tfrac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa\,(X)\,(F_X\,(VaR_\kappa\,(X)) - \kappa)\right\} \quad , \quad \kappa \in (0,1). \tag{3.3}$$

Code LaTeX : ex-10002.tex

9. Soit des v.a. X et Y avec

x	0	80	100
$\Pr\,(X = x)$	0.2625	0.6875	0.05

et

x	0	80	1000
$\Pr\,(Y = x)$	0.825	0.125	0.05

   (a) Calculer $E\,[X]$, $VaR_{0.95}\,(X)$, $TVaR_{0.95}\,(X)$.
   (b) Calculer $E\,[Y]$, $VaR_{0.95}\,(Y)$, $TVaR_{0.95}\,(Y)$.
   (c) Comparer les valeurs obtenues aux items [9a] et [9b].

Code LaTeX : ex-10003.tex

10. À l'aide de la définition de base de la TVaR, démontrer

$$TVaR_\kappa (X) \geq VaR_\kappa (X),$$

pour tout $\kappa \in (0,1)$.

Code LaTeX : ex-10004.tex

11. Soit des v.a. $X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$ et $Y \sim LN(\mu, \sigma)$ avec

$$\begin{aligned} E[X] &= E[Y] = 1000 \\ VaR_{0.992}(X) &= VaR_{0.992}(Y) = 12000. \end{aligned}$$

Questions :

(a) Calculer les paramètres α, λ, μ et σ.
(b) Calculer $TVaR_{0.992}(X)$ et $TVaR_{0.992}(Y)$. Comparer.

Code LaTeX : ex-12006.tex

12. Soit une v.a. X définie sur $\mathbb{R}$ avec $E[X] < \infty$.

(a) Démontrer que

$$TVaR_\kappa (X) = \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 VaR_u (X) \, \mathrm{d}u = VaR_\kappa (X) + \frac{1}{1-\kappa} \pi_X (VaR_\kappa (X)), \tag{3.4}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

(b) Démontrer

$$TVaR_\kappa (X) = \frac{1}{1-\kappa} \left\{ E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} \right] + VaR_\kappa (X) \times (F_X (VaR_\kappa (X)) - \kappa) \right\}, \tag{3.5}$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

(c) On fait l'hypothèse additionnelle que la v.a. X est continue. À partir de (3.5), démontrer que

$$TVaR_\kappa (X) = \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}} \right]$$

(d) Développer l'expression de la TVaR sous les hypothèses suivantes :

i. Soit $X \sim Exp(\beta)$.
ii. Soit $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$.
iii. Soit $X \sim Norm(\mu, \sigma^2)$.
iv. Soit $X \sim LNorm(\mu, \sigma^2)$.

Code LaTeX : ex-10008.tex

13. Soit une v.a. N définie sur $\mathbb{N}$ avec $E[N] < \infty$. On dispose des informations suivantes :

k	8	9	10	11	12
$\pi_N(k)$	0.122109	0.054016	0.022188	0.008492	0.003039

(a) Calculer $VaR_{0.95}(N)$ et $TVaR_{0.95}(N)$.
(b) Calculer $VaR_{0.96}(N)$ et $TVaR_{0.96}(N)$.
(c) Calculer $VaR_{0.99}(N)$ et $TVaR_{0.99}(N)$.

Code LaTeX : ex-10010.tex

14. Soit une v.a. X avec $E[X] < \infty$ et $Var(X) < \infty$. Soit la mesure de risque
$$\rho_\kappa(X) = E[X] + \sqrt{Var(X)} \times \Phi^{-1}(\kappa),$$
où Φ et Φ^{-1} sont respectivement les fonctions de répartition et quantile de la loi normale standard. Démontrer que ρ_κ est une mesure homogène et invariante à la translation.

Code LaTeX : ex-10011.tex

15. Soit une v.a. X avec $E[X] < \infty$ et $Var(X) < \infty$. Soit la mesure de risque
$$\rho_\kappa(X) = E[X] + \sqrt{Var(X)} \times \frac{1}{(1-\kappa)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}\right),$$
où Φ et Φ^{-1} sont respectivement les fonctions de répartition et quantile de la loi normale standard. Démontrer que ρ_κ est une mesure homoène et invariante à la translation.

Code LaTeX : ex-10019.tex

16. Soit une v.a. X avec $E[X] < \infty$.
   (a) Démontrer que
   $$LTVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa}E[X] - \frac{1-\kappa}{\kappa}TVaR_\kappa(X), \tag{3.6}$$
   pour $\kappa \in (0,1)$.
   (b) Démontrer que (3.6) devient
   $$LTVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa}\left(E\left[X \times 1_{\{X \leq VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(\kappa - F_X\left(VaR_\kappa(X)\right)\right)\right)$$
   (c) Si X est une v.a. continue, démontrer que
   $$LTVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa}E\left[X \times 1_{\{X \leq VaR_\kappa(X)\}}\right].$$
   (d) Développer l'expression de $LTVaR_\kappa(X)$ sous les hypothèses suivantes :
      i. Soit $X \sim Exp(\beta)$.
      ii. Soit $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$.
      iii. Soit $X \sim Norm(\mu, \sigma^2)$.
      iv. Soit $X \sim LNorm(\mu, \sigma^2)$.

Code LaTeX : ex-10012.tex

17. Soit une v.a. continue X avec $E[X] < \infty$.
   (a) Démontrer que
   $$TVaR_\kappa(-X) = -LTVaR_{1-\kappa}(X),$$
   pour $\kappa \in (0,1)$.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$. On définit
   $$L = a - bX$$
   Démontrer que
   $$TVaR_\kappa(L) = a - bLTVaR_{1-\kappa}(X),$$
   pour $\kappa \in (0,1)$.

Code LaTeX : ex-10015.tex

18. Soit une v.a. $X \in [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$.
    (a) Développer les expressions de $\lim_{\kappa \to 0} TVaR_\kappa(X)$ et $\lim_{\kappa \to 1} TVaR_\kappa(X)$.
    (b) Développer les expressions de $\lim_{\kappa \to 0} LTVaR_\kappa(X)$ et $\lim_{\kappa \to 1} LTVaR_\kappa(X)$.

Code LaTeX : ex-10013.tex

19. Soit une v.a. continue X avec $VaR_{0.01}(X) = -0.35$ et $VaR_{0.99}(X) = 0.18$.
    (a) Soit $Y = 0.3 + 2Y$. Calculer $VaR_{0.01}(Y)$ et $VaR_{0.99}(Y)$.
    (b) Soit $Y = 0.3 - 2Y$. Calculer $VaR_{0.01}(Y)$ et $VaR_{0.99}(Y)$.
    (c) Soit $Y = \exp(2X)$. Calculer $VaR_{0.01}(Y)$ et $VaR_{0.99}(Y)$.
    (d) Soit $Y = \exp(-2X)$. Calculer $VaR_{0.01}(Y)$ et $VaR_{0.99}(Y)$.
    (e) Soit $Y = 1000 - 1000\exp(2X)$. Calculer $VaR_{0.01}(Y)$ et $VaR_{0.99}(Y)$.
    (f) Soit $Y = 1000 - 1000\exp(-2X)$. Calculer $VaR_{0.01}(Y)$ et $VaR_{0.99}(Y)$.
    (g) Soit $Y = 1000 + 1000\exp(2X)$. Calculer $VaR_{0.01}(Y)$ et $VaR_{0.99}(Y)$.
    (h) Soit $Y = 1000 + 1000\exp(-2X)$. Calculer $VaR_{0.01}(Y)$ et $VaR_{0.99}(Y)$.

Code LaTeX : ex-10014.tex

20. Soient les v.a. indépendantes $X \sim Bin(2, 0.2)$ et $Y \sim Bin(2, 0.3)$. On définit les v.a. $S = X + Y$ et $T = X - Y$.
    (a) Déterminer les valeurs possibles que peuvent prendre S et T ainsi que les valeurs des fonctions de masse de probabilité associées.
    (b) Calculer $E[S]$, $E[T]$, $\mathrm{Var}(S)$ et $\mathrm{Var}(T)$.
    (c) Calculer $VaR_{0.9}(S)$, $VaR_{0.9}(T)$, $TVaR_{0.9}(S)$ et $TVaR_{0.9}(T)$.

Code LaTeX : ex-21001.tex

21. Un individu investit une somme $V(0) = 10000$ dans le fonds mutuel ABC pendant une année. La valeur de l'investissement à la fin de l'année est $V(1) = V(0)\,\mathrm{e}^R$ où le rendement instantané R est défini avec
$$F_R(x) = 0.8\Phi\left(\frac{x-0.1}{0.15}\right) + 0.2\Phi\left(\frac{x+0.2}{0.3}\right),$$
où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard. On définit la perte reliée à l'investissement par la v.a. $L = V(0) - V(1)$.
    (a) Calculer l'espérance et la variance de R.
    (b) Calculer l'espérance et la variance de $V(1)$ et de L. Que signifie pour l'individu une perte négative ? une perte positive ?
    (c) Développer les expressions de $F_{V(1)}(x)$ et $F_L(x)$. Calculer la probabilité que la perte soit positive.
    (d) Développer les expressions de $VaR_\kappa(V(1))$ et $TVaR_\kappa(V(1))$. Calculer les valeurs pour $\kappa = 0.005$ et 0.995.
    (e) Développer les expressions de $VaR_\kappa(L)$ et $TVaR_\kappa(L)$. Calculer les valeurs pour $\kappa = 0.005$ et 0.995.

Code LaTeX : ex-12005.tex

22. Soit deux v.a. indépendantes $X_1 \sim U(0,1)$ et $X_2 \sim Pa(2,1)$. On définit la v.a. S par $S = X_1 + X_2$.

(a) Montrer que

$$\begin{aligned} F_S(y) &= \min(y;1) - \left(\frac{1}{(1+y-\min(y;1))} - \frac{1}{1+y} \right), \ y \geq 0, \\ &= \begin{cases} y - \left(1 - \frac{1}{1+y}\right), \ 0 \leq y \leq 1, \\ 1 - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right), \ y \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Développer l'expression de $VaR_\kappa(S)$ pour $0.5 < \kappa < 1$.

(c) Calculer $VaR_{0.99}(S)$.

Code LaTeX : ex-21004.tex

23. Soit une v.a. $X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$ où α est le paramètre de forme et λ est le paramètre d'échelle. Le paramètre α a un fort impact sur la mesure de risque $TVaR_\kappa(X)$ et la fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$. Les paramètres $\alpha > 1$ et λ sont fixés de telle sorte que $E[X] = \mu$.

(a) Montrer que $\pi_X(d) = \mu \left(\frac{\mu(\alpha-1)}{\mu(\alpha-1)+d} \right)^{\alpha-1}$ et

$$TVaR_\kappa(X) = \mu\alpha \left((1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \right) + \mu.$$

(b) Pour $E[X] = \mu = 1000$, calculer $TVaR_{0.995}(X)$ et $\pi_X(10\ 000)$ pour $\alpha = 1.1$, 2.5, 5 et 100.

(c) Soit $Y \sim Exp(\beta)$ telle que $E[Y] = 1000$. Calculer $TVaR_{0.995}(Y)$ et $\pi_Y(10\ 000)$.

Code LaTeX : ex-21005.tex

24. Soit deux v.a. indépendantes $X_1 \sim Gamma(2.5, 0.1)$ et $X_2 \sim Gamma(5, 0.2)$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Montrer que l'expression de $F_S(x)$ est donnée par

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x; 7.5 + k, 0.2),$$

avec $p_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2.5}$.

(b) Calculer $F_S(100)$ et $VaR_{0.99}(S)$.

Code LaTeX : ex-21009.tex

25. On considère un portefeuille de deux contrats dont les coûts sont définis par les v.a. indépendantes X_1 et X_2. Les v.a. ont pour support $\{0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000\}$. On définit les coûts pour l'ensemble du portefeuille par la v.a. $S = X_1 + X_2$. On sait que :

k	0	1	2	3	4	5
$F_{X_1}(1000k)$	0.3	0.5	0.75	0.9	0.96	1
$F_{X_2}(1000k)$	0.2	0.5	0.85	0.95	0.98	1

(a) Calculer $f_S(0)$ et $f_S(1000)$.

(b) Calculer $VaR_\kappa(X_1)$, $VaR_\kappa(X_2)$ et $VaR_\kappa(S)$ avec $\kappa = 0.25$ et et 0.995.

(c) Calculer $TVaR_\kappa(X_1)$, $TVaR_\kappa(X_2)$ et $TVaR_\kappa(S)$ avec $\kappa = 0.25$ et 0.995.

Code LaTeX : ex-20014.tex

26. On considère un portefeuille de deux contrats dont les coûts sont définis par les v.a. indépendantes X_1 et X_2. Les v.a. ont pour support $\{0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000\}$. On définit les coûts pour l'ensemble du portefeuille par la v.a. $S = X_1 + X_2$. On sait que :

k	0	1	2	3	4	5
$F_{X_1}(1000k)$	0.3	0.5	0.75	0.9	0.96	1
$F_{X_2}(1000k)$	0.2	0.5	0.85	0.95	0.98	1

   (a) Calculer $f_S(0)$ et $f_S(1000)$.
   (b) Calculer $VaR_\kappa(X_1)$, $VaR_\kappa(X_2)$ et $VaR_\kappa(S)$ avec $\kappa = 0.25$ et et 0.995.
   (c) Calculer $TVaR_\kappa(X_1)$, $TVaR_\kappa(X_2)$ et $TVaR_\kappa(S)$ avec $\kappa = 0.25$ et 0.995.

   Code LaTeX : ex-20014.tex

27. ON A DEJA CE NUMÉRO.
   Soient les v.a. indépendantes $X_1 \sim BN(2, 0.5)$ et $X_2 \sim Pois(2)$.
   (a) On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$. Calculer $\Pr(S = 4)$, $E\left[X_1 \times 1_{\{S=4\}}\right]$, $E[X_1 | S = 4]$.
   (b) On définit la v.a. $T = 1000X_1 + 2000X_2$. Calculer $\Pr(T = 1000k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$, $E\left[X_1 \times 1_{\{T=4000\}}\right]$, $E[X_1 | T = 4000]$.

28. On considère un portefeuille de $n = 200$ contrats d'assurance vie temporaire 1 an. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. $X_i = b_i I_i$ avec $b_i = 10000$ et $I_i \sim Bern(q_i = 0.0012)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Les v.a. $I_1, ..., I_n$ sont indépendantes. On définit les coûts totaux pour le portefeuille par la v.a. $S_n = X_1 + ... + X_n$.
   On fournit les valeurs de la fonction de masses de probabilité d'une v.a. $K \sim Binom(n = 200, q = 0.001)$:

k	0	1	2	3	4	5
$\Pr(K = k)$	0.7865	0.1890	0.0226	0.0018	0.0001	0.0000
$\Pr(K \leq k)$	0.7865	0.9755	0.9981	0.9999	1.0000	1.0000

   (a) Calculer $E[X_i]$, $VaR_{0.995}(X_i)$ et $TVaR_{0.995}(X_i)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Comparer les valeurs et commenter brièvement.
   (b) Calculer $E[S]$, $VaR_{0.995}(S)$ et $TVaR_{0.995}(S)$. Comparer les valeurs et commenter brièvement.
   (c) Calculer le bénéfice de mutualisation

$$B_{0.995}^{VaR}(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} VaR_{0.995}(X_i) - VaR_{0.995}(S) \ .$$

   Commenter brièvement.
   (d) Calculer le bénéfice de mutualisation $B_{0.995}^{TVaR}(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}(X_i) - TVaR_{0.995}(S)$. Commenter brièvement.
   (e) L'actuaire A propose de calculer le capital économique comme suit : $\sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}(X_i) - E[S]$. L'actuaire B propose de calculer le capital économique comme suit : $TVaR_{0.995}(S) - E[S]$. Laquelle des deux approches recommendez-vous ? Expliquer brièvement.

29. On considère un portefeuille de n contrats sont définis par les v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n avec $X_i \sim X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ où $E[X] = 20$ et $\mathrm{Var}(X) = 60^2$. Les coûts totaux pour un portefeuille de n contrats d'assurance IARD sont définis par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. La part allouée par contrat est définie par la v.a. $W_n = \frac{1}{n} S_n$.
   Questions :
   (a) Développer les expressions de $E[W_n]$ et $Var(W_n)$.
   (b) À l'aide des fgms, identifier la loi de S_n.

(c) En évoquant les propriétés des mesures de risques appropriées, développer les expressions de $VaR_\kappa(W_n)$ et $TVaR_\kappa(W_n)$ en fonction de $VaR_\kappa(S_n)$ et $TVaR_\kappa(S_n)$.

(d) (Ordinateur). Calculer $VaR_\kappa(W_1) - VaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.05$, 0.95 et $n = 10$, 1000.

(e) (Ordinateur). Calculer $TVaR_\kappa(W_1) - TVaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.05$, 0.95 et $n = 10$, 1000.

30. On considère un portefeuille de n contrats sont définis par les v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n avec $X_i \sim X$ $(i = 1, 2, ..., n)$ où $E[X] = 20$ et $\mathrm{Var}(X) = 60^2$. Les coûts totaux pour un portefeuille de n contrats d'assurance IARD sont définis par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. La part allouée par contrat est définie par la v.a. $W_n = \frac{1}{n} S_n$.
Questions :

(a) Développer les expressions de $E[W_n]$ et $Var(W_n)$.

(b) En évoquant les propriétés des mesures de risques appropriées, développer les expressions de $VaR_\kappa(W_n)$ et $TVaR_\kappa(W_n)$ en fonction de $VaR_\kappa(S_n)$ et $TVaR_\kappa(S_n)$.

(c) Appliquer le théorème central limite pour calculer approximativement $VaR_\kappa(W_1) - VaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.05$, 0.95 et $n = 100$, 1000.

(d) Appliquer le théorème central limite pour calculer approximativement $TVaR_\kappa(W_1) - TVaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.05$, 0.95 et $n = 100$, 1000.

31. Soit le couple de v.a. continues (X_1, X_2) avec

$$M_{X_1,X_2}(t_1, t_2) = \exp\left(\sum_{i=1}^{2} \mu_i t_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} t_i t_j\right)$$

où $\mu_1 = 0.05$, 0.03, $\sigma_1 = 0.15$, $\sigma = 0.25$, $\rho_{1,1} = \rho_{2,2} = 1$.
On définit $L_i = 1000 - 1000X_i$, $i = 1, 2$.
On définit $S = X_1 + X_2$ et $T = L_1 + L_2$.
Questions :

(a) Développer les expressions de $VaR_\kappa(S)$ et $ES_\kappa(S)$.

(b) Développer les expressions de $VaR_\kappa(T)$ et $TVaR_\kappa(T)$.

(c) Calculer $VaR_\kappa(S)$ et $ES_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.01$, 0.99 et $\rho = -0.6$, 0.6.

(d) Calculer $VaR_\kappa(T)$ et $TVaR_\kappa(T)$ pour $\kappa = 0.01$, 0.99 et $\rho = -0.6$, 0.6.

(e) Calculer ρ qui maximise $ES_\kappa(S)$, $\kappa \in (0, 1)$.

(f) Calculer ρ qui minimise $ES_\kappa(S)$, $\kappa \in (0, 1)$.

(g) Calculer ρ qui maximise $TVaR_\kappa(L)$, $\kappa \in (0, 1)$.

(h) Calculer ρ qui minimise $TVaR_\kappa(L)$, $\kappa \in (0, 1)$.

32. On considère un portefeuille de n contrats d'assurance IARD dont les coûts sont définis par les v.a. indépendantes X_1, ..., X_n. Pour simplifier, on suppose que

$$X_i \sim Gamma\left(\alpha_i = 0.1, \beta_i = \frac{1}{10000}\right),$$

pour $i = 1, ..., n$. La compagnie d'assurance IARD possède beaucoup de capital (elle est même considérée sur-capitalisée). Afin d'augmenter sa part de marché, elle décide de charger une prime $\Pi_i = 50\% E[X_i]$ pour $i = 1, ..., n$ et de financer cette réduction de prime par l'allocation au portefeuille d'un capital $u = 1000000$. On définit la probabilité de ruine au cours de la prochaine année pour le portefeuille par $\psi_n(u) = \Pr\left(S_n > u + \sum_{i=1}^{n} \Pi_i\right)$ où la v.a. $S_n = X_1 + ... + X_n$ correspond au montant total des engagements pour la prochaine année.

On dispose des valeurs de la fonction de répartition $G(x; \alpha, 1)$ d'une loi gamma de paramètres α et $\beta = 1$:

$x\|\alpha$	100	300
100	0.5132988	0
150	0.999994	0
200	1	0
250	1	0.001162394

Questions :

(a) Calculer Π, $\psi_{1000}(u)$ et $\psi_{3000}(u)$.

(b) En utilisant l'approximation normale, déterminer le nombre n de contrats de telle sorte que $\psi_n(u) = 50\%$.

(c) En utilisant l'approximation normale, déterminer $\lim_{n\to\infty} \psi_n$.

(d) Qu'advient-il pour les activités du portefeuille si la compagnie vend un nombre trop important de contrats ?

33. Les coûts d'un portefeuille pour la prochaine période sont définis par la v.a. $S = W_1 + W_2$ où $W_i =$ les coûts pour la division i $(i = 1, 2)$. Le couple de v.a. (W_1, W_2) obéit à une loi normale bivariée avec $E[W_1] = 100$, $Var(W_1) = 25^2$, $E[W_2] = 120$, $Var(W_2) = 10^2$, et $Cov(W_1, W_2) = \rho \times \sqrt{Var(W_1)} \times \sqrt{Var(W_2)} = \rho \times 25 \times 10$ avec $\rho \in [-1, 1]$. On définit le bénéfice de mutualisation par $BM_{\kappa,\rho}(W_1, W_2) = \sum_{i=1}^{2} TVaR_\kappa(W_i) - TVaR_\kappa(S)$.
On dispose des valeurs suivantes de $VaR_\kappa(Z)$ pour une v.a. $Z \sim Norm(0, 1)$:

κ	0.75	0.85	0.95	0.99	0.995
$VaR_\kappa(Z)$	0.6744898	1.0364334	1.6448536	2.3263479	2.5758293

Questions :

(a) Calculer $BM_{0.99,0.3}(W_1, W_2)$, $BM_{0.99,-1}(W_1, W_2)$ et $BM_{0.99,1}(W_1, W_2)$.

(b) Pour κ fixé, montrer comment se comporte $BM_{\kappa,\rho}(W_1, W_2)$ en fonction de ρ. Expliquer brièvement ce comportement en fonction de ρ (en précisant aussi ce que représente le coefficient ρ).

34. On considère le portefeuille de $n = 20$ contrats d'assurance-vie temporaire 1 an. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. $X_i = b_i I_i$ où $I_i \sim Bern(q_i)$ pour $i = 1, 2, ..., 20$. Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a. $S = X_1 + ... + X_n$. Les v.a. I_1, ..., I_n sont indépendantes. On dispose des informations suivantes :

i	q_i	b_i
1,...,10	0.001	20000
11,...,20	0.002	10000

Questions :

(a) Calculer $\Pr(S = 10000k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(b) Calculer $E[\min(S; 40000)]$.

35. Soit les v.a. iid X_1 et X_2 avec $\Pr(X_i = 0) = 0.9$ et $\Pr(X_i = 10) = 0.1$, $i = 1, 2$.

(a) Calculer $VaR_\kappa(X_i)$ et $VaR_\kappa(X_1 + X_2)$, $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.85 et 0.99.

(b) Calculer $TVaR_\kappa(X_i)$ et $TVaR_\kappa(X_1 + X_2)$, $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.85 et 0.99.

(c) Calculer $LTVaR_\kappa(X_i)$ et $LTVaR_\kappa(X_1 + X_2)$, $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.85 et 0.99.

36. Soit les v.a. X et Y $(E[X] < \infty, E[Y] < \infty)$ avec les fonctions de répartition F_X et F_Y, quantile F_X^{-1} et F_Y^{-1}, et stop-loss π_X et π_Y. (Note : on ne précise pas si les v.a. X et Y sont discrètes, continues, ou mixtes ; dépendantes ou indépendantes).

La relation

$$TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \tfrac{1}{1-\kappa}\pi_X(VaR_\kappa(X)) \quad , \quad \text{pour } \kappa \in (0,1), \tag{3.7}$$

est valide pour toute v.a. X.
Soit la fonction convexe

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{1-\kappa}\pi_X(x)$$

pour $x \in \mathbb{R}$.
Alors, (3.7) peut être récrit sous la forme

$$TVaR_\kappa(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \{\varphi(x)\} \tag{3.8}$$

En utilisant de façon astucieuse (3.7) et (3.8), démontrer que

$$TVaR_\kappa(X+Y) \leq TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y) \tag{3.9}$$

pour $\kappa \in (0,1)$. **Note** : Il ne faut pas faire la démonstration basée sur les statistiques d'ordre ou celle basée sur les fonctions indicatrices généralisées.

37. Soit les couples de v.a. (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) avec $E[X_1] = E[Y_1] = 4$ et $E[X_2] = E[Y_2] = 14.5$. On fournit les valeurs suivantes de leurs fonctions de masse de probabilité :

k_1	k_2	$f_{X_1,X_2}(k_1,k_2)$	$f_{Y_1,Y_2}(k_1,k_2)$
0	10	0.56	0.7
0	25	0.24	0.1
20	10	0.14	0
20	25	0.06	0.2

(a) Identifier les valeurs des fonctions de masse de probabilité de f_{X_1}, f_{X_2}, f_{Y_1} et f_{Y_2}. Calculer $Var(X_i)$ et $Var(Y_i)$, $i = 1, 2$.

(b) Calculer les valeurs de $\Pr(X_1 \leq X_2)$ et $\Pr(Y_1 \leq Y_2)$. Est-ce que les deux probabilités sont égales à 1 ?

(c) Soit une v.a. W où $E[W] < \infty$ et $Var(W) < \infty$. Soit la mesure de risque $\rho(W) = \sqrt{Var(W)}$. Choisir un seul couple parmi (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) pour construire un contre-exemple servant à confirmer que la mesure ρ ne satisfait pas à la propriété de monotonicité. Justifier clairement votre choix.

(d) Calculer $E[\max(X_1 + X_2 - 40; 0)]$ et $E\left[Y_1 \times 1_{\{Y_2>20\}}\right]$.

38. Soit les v.a. continues X et Y ($E[X] < \infty$, $E[Y] < \infty$) avec les fonctions de répartition F_X et F_Y.
La relation

$$\begin{array}{c} TVaR_\kappa(X) = \tfrac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] \\ \text{ou} \\ (1-\kappa)TVaR_\kappa(X) = E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right], \end{array} \tag{3.10}$$

est valide pour toute v.a. continue X. En utilisant de façon astucieuse (3.10), l'hypothèse de v.a. continues et les fonctions indicatrices, démontrer que

$$TVaR_\kappa(X) + TVaR_\kappa(Y) - TVaR_\kappa(X+Y) \geq 0, \quad \text{pour } \kappa \in (0,1).$$

Note : Il ne faut pas faire la démonstration utilisant les statistiques d'ordre.

39. Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ dont la fonction de répartition est désignée par $F_{\underline{X}}$, sans préciser si les v.a. X_1, ..., X_n, sont indépendantes ou non, continues ou non. En utilisant de façon astucieuse les statistiques d'ordres, les propriétés des sup, et un passage à la limite, démontrer que

$$\textstyle\sum_{i=1}^n TVaR_\kappa(X_i) \geq TVaR_\kappa\left(\sum_{i=1}^n X_i\right), \quad \text{pour } \kappa \in (0,1).$$

Note : Il ne faut pas faire la démonstration basée sur les fonctions indicatrices et ni celle basée sur la fonction stop-loss.

40. Soit une v.a. X définie sur $\mathbb{R}$ représentant les pertes pour une compagnie d'assurance avec une fonction de répartition F_X et une fonction quantile F_X^{-1}. (Note : on ne précise pas si la v.a. X est discrète, continues, ou mixte).
La mesure de risque ρ_κ est définie par
$$\rho_\kappa(X) = \frac{1}{4} VaR_{1-\frac{1}{4}(1-\kappa)}(X) + \frac{2}{4} VaR_{1-\frac{2}{4}(1-\kappa)}(X) + \frac{1}{4} VaR_{1-\frac{3}{4}(1-\kappa)}(X),$$
pour $\kappa \in [0, 1)$.
   (a) En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est invariante à la translation.
   (b) En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est positive homogène.
   (c) En utilisant les propriétés de la VaR, démontrer que la mesure est monotone.
   (d) Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim Exp(1)$ et $X_2 \sim Gamma(2, 1)$.
      i. Calculer $\rho_0(X_1)$, $\rho_0(X_2)$ et $\rho_0(X_1 + X_2)$. Interpréter la mesure.
      ii. Calculer $\rho_{0.9}(X_1)$, $\rho_{0.9}(X_2)$ et $\rho_{0.9}(X_1 + X_2)$. Interpréter la mesure.
      iii. Utiliser un seul exemple parmi (40(d)i) et (40(d)ii) à titre de contre-exemple pour déduire que la mesure ρ_κ n'est pas sous-additive.

41. Soit une v.a. X dont la fgm $M_X(t)$ existe pour $0 < t < t^*$, où $t^* < \infty$ ou $t^* = \infty$.
L'inégalité suivante est obtenue à partir de l'inégalité de Markov :
$$\overline{F}_X(x) = \Pr(X > x) \leq e^{-tx} M_X(t), \tag{3.11}$$
pour $t > 0$.
On fixe $\kappa \in (0, 1)$.
   (a) Utiliser l'inégalité en (10.1) pour démontrer que
   $$VaR_\kappa(X) \leq \varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{M_X(t)}{1-\kappa}\right),$$
   pour $0 < t < t^*$.
   Suggestion : poser $\overline{F}_X(x) = 1 - \kappa$ et isoler x (qui se trouve dans la borne).
   On précise que $\varphi_\kappa(t)$ est convexe pour $0 < t < t^*$.
   (b) Soit $X \sim Norm(\mu, \sigma^2)$. On définit $\varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{M_X(t)}{1-\kappa}\right)$, $t > 0$.
      i. Identifier l'expression de $\varphi_\kappa(t)$ selon ces hypothèses.
      ii. Identifier $t_\kappa \in (0, 1)$ où
      $$t_\kappa = \underset{t>0}{\arg\min} \varphi_\kappa(t),$$
      i.e. trouver l'expression du $t > 0$ qui minimise la fonction φ_κ.
      iii. On définit la mesure de risque ρ_κ par
      $$\rho_\kappa(X) = \varphi_\kappa(t_\kappa).$$
      Démontrer que
      $$\rho_\kappa(X) = \mu + \sigma\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}.$$
   (c) Soit $X \sim PoisComp(\lambda = 1, B)$ avec $B \sim Exp(1)$. On définit $\varphi_\kappa(t) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{M_X(t)}{1-\kappa}\right)$, $0 < t < 1$.
      i. Identifier l'expression de $\varphi_\kappa(t)$ selon ces hypothèses.

ii. Identifier $t_\kappa \in (0,1)$ où

$$t_\kappa = \underset{t\in(0,1)}{\arg\min} \varphi_\kappa(t)$$

i.e. trouver l'expression du t qui minimise la fonction φ_κ sur l'intervalle ouvert $(0,1)$.

iii. On définit la mesure de risque ρ_κ par

$$\rho_\kappa(X) = \varphi_\kappa(t_\kappa).$$

Calculer $\rho_{0.9}(X)$.

42. Soit une v.a. Y avec $E[Y] < \infty$. On définit $LTVaR_\kappa(Y))$ par

$$LTVaR_\kappa(Y) = \frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa VaR_u(Y)\,\mathrm{d}u.$$

Questions :

(a) Démontrer que

$$LTVaR_\kappa(Y) = \frac{1}{\kappa}\left\{E\left[Y \times 1_{\{Y\le VaR_\kappa(Y)\}}\right] + VaR_\kappa(Y)(\kappa - F_Y(VaR_\kappa(Y)))\right\}$$

(b) Hypothèse additionnelle. Y est une v.a. continue. Démontrer que

$$LTVaR_\kappa(Y) = \frac{1}{\kappa}E\left[Y \times 1_{\{Y\le VaR_\kappa(Y)\}}\right].$$

43. Soit une v.a. continue Y avec $E[Y] < \infty$. On définit $X = -Y$. Démontrer que

$$TVaR_u(X) = -LTVaR_{1-u}(Y),$$

44. Soit les couples de v.a. (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) avec les valeurs suivantes de fonctions de masse de probabilité :

k_1	k_2	$f_{X_1,X_2}(k_1,k_2)$	$f_{Y_1,Y_2}(k_1,k_2)$
0	1	0.64	0.8
0	3	0.12	0
0	5	0.04	0
2	1	0.12	0
2	3	0.0225	0.15
2	5	0.0075	0
5	1	0.04	0
5	3	0.0075	0
5	5	0.0025	0.05

Questions :

(a) Identifier les fonctions de masse de probabilité de f_{X_1}, f_{X_2}, f_{Y_1} et f_{Y_2}. Calculer $E[X_i]$, $E[Y_i]$, $Var(X_i)$ et $Var(Y_i)$, $i = 1, 2, 3$.

(b) Calculer les valeurs de $\Pr(X_1 \le X_2)$ et $\Pr(Y_1 \le Y_2)$. Est-ce que les deux probabilités sont égales à 1 ?

(c) Soit une v.a. W où $E[W] < \infty$ et $Var(W) < \infty$. Soit la mesure de risque $\rho = \sqrt{Var(W)}$. Utiliser les calculs en (44b) pour construire un contre-exemple servant à confirmer que la mesure ρ ne satisfait pas de monotonicité.

(d) Vérifier que

$$\begin{array}{llll} F_{X_1}(x) \ge F_{X_2}(x),\ x \in \mathbb{R}, & \text{ou} & VaR_\kappa(X_1) \le VaR_\kappa(X_1), & \kappa \in (0,1), \text{ et} \\ F_{Y_1}(x) \ge F_{Y_2}(x),\ x \in \mathbb{R}, & \text{ou} & VaR_\kappa(Y_1) \le VaR_\kappa(Y_1), & \kappa \in (0,1). \end{array}$$

(e) Soit une v.a. $U \sim Unif\,(0,1)$. Soit le couple de v.a. $\left(X_1^{'}, X_2^{\prime}\right)$ avec

$$X_1^{'} = F_{X_1}^{-1}\,(U) \text{ et } X_2^{'} = F_{X_2}^{-1}\,(U)\,.$$

Calculer les valeurs des fonctions de masse de probabilité de $X_1^{\prime}$, $X_2^{\prime}$, et $\left(X_1^{'}, X_2^{\prime}\right)$. Comparer avec les valeurs correspondantes de (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2).

3.2 Exercices informatiques

1. Soit $X \sim Pois\,(10)$.
   (a) Calculer $VaR_{\kappa}\,(X)$, pour $\kappa = 0.05$ et 0.95.
   (b) Vrai ou faux : $\varphi = \Pr\left(VaR_{0.05}\,(X) < X \leq VaR_{0.95}\,(X)\right) = 0.9$. Justifier la réponse en calculant φ et en expliquant le résultat.

   Code LaTeX : ex-10040.tex
2. Soit $X \sim BinNg\left(r = 0.5, q = \frac{1}{21}\right)$ représentant les coûts pour un contrat.
   (a) Calculer la prime pure $PP\,(X)$ pour le contrat.
   (b) Calculer $VaR_{0.99}\,(X)$.
   (c) Calculer $\eta = VaR_{0.99}\,(X) - PP\,(X)$.
   (d) Calculer la probabilité φ_1 que les coûts excèdent la prime pure.
   (e) Calculer la probabilité φ_2 que les coûts excèdent la $VaR_{0.99}\,(X)$.

   Code LaTeX : ex-10041.tex
3. Soit $X \sim Gamma\left(\alpha = 0.5, \beta = \frac{1}{20}\right)$ représentant les coûts pour un contrat.
   (a) Calculer la prime pure $PP\,(X)$ pour le contrat.
   (b) Calculer $VaR_{\kappa}\,(X)$, pour $\kappa = 0.005$ et 0.995.
   (c) Vrai ou faux : $\eta = \Pr\left(VaR_{0.005}\,(X) < X \leq VaR_{0.995}\,(X)\right) = 0.99$. Justifier la réponse en calculant φ et en expliquant le résultat.
   (d) Calculer la probabilité φ_1 que les coûts excèdent la prime pure.
   (e) Calculer la probabilité φ_2 que les coûts excèdent la $VaR_{0.995}\,(X)$.

   Code LaTeX : ex-10042.tex
4. Soit une v.a. X que telle que $X = 1000M$ où M est une v.a. discrète avec $E\,[M] = 5$. Trois hypothèses sont considérées pour la v.a. M :

$$\begin{array}{lcll} \text{Hypothèse 1} & : & M \sim Poisson\,(\lambda) \text{ avec } \lambda = 5 & ; \\ \text{Hypothèse 2} & : & M \sim BinNg\,(r,q) \text{ avec } r = 0.5 & ; \\ \text{Hypothèse 3} & : & M \sim BinNg\,(r,q) \text{ avec } r = 5 & . \end{array}$$

   (a) Pour les hypothèses $j = 1, 2, 3$, calculer $VaR_{\kappa}\,(X)$ et $TVaR_{\kappa}\,(X)$, pour $\kappa = 0.0001$, 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999.
   (b) Comparer les valeurs obtenues.

   Code LaTeX : ex-10016.tex
5. Soit $X \sim Gamma\left(\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{4}\right)$.
   (a) Calculer $E\,[X]$ et $Var\,(X)$.
   (b) Calculer $VaR_{\kappa}\,(X)$, pour $\kappa = 0.9995$.
   (c) Calculer $\pi_X\,(VaR_{\kappa}\,(X))$, pour $\kappa = 0.9995$.
   (d) À l'aide de (b) et (c), calculer $TVaR_{\kappa}\,(X)$, pour $\kappa = 0.9995$.

   Code LaTeX : ex-10017.tex
6. Soit $X \sim LNorm\left(\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma\right)$ avec $Var\,(X) = 4$.

(a) Calculer $E[X]$ et σ.
(b) Calculer $VaR_\kappa(X)$, pour $\kappa = 0.9995$.
(c) Calculer $\pi_X(VaR_\kappa(X))$, pour $\kappa = 0.9995$.
(d) À l'aide de (b) et (c), calculer $TVaR_\kappa(X)$, pour $\kappa = 0.9995$.

Code LaTeX : ex-10018.tex

7. Soit une v.a. continue X avec

$$F_X(x) = 0.8\Phi\left(\frac{x-0.1}{0.2}\right) + 0.2\Phi\left(\frac{x+0.3}{0.1}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.
(b) Calculer $F_X(0)$.
(c) Calculer $VaR_\kappa(X)$ (avec un outil d'optimisation), $TVaR_\kappa(X)$ et $LTVaR_\kappa(X)$, pour $\kappa = 0.0001$, 0.01, 0.5, 0.99, 0.9999.

Code LaTeX : ex-10031.tex

8. Soit les v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n où $X_i \sim Exp(\beta)$ où $\beta = \frac{1}{20}$. On définit la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $W_n = \frac{1}{n}S_n$, $n \in \mathbb{N}^+$.

(a) Développer les expressions de la TLS de S_n et de la TLS de W_n.
(b) À partir des informations fournies dans les annexes du document de référence et de la TLS de S_n, identifier clairement la loi de S_n et développer les expressions de f_{W_n}, F_{W_n} et $TVaR_\kappa(W_n)$.
(c) Tracer les courbes de $f_{W_n}(x)$, $n = 1, 2, 5, 10, 20$.
(d) Tracer les courbes de $F_{W_n}(x)$, $n = 1, 2, 5, 10, 20$,100.
(e) Tracer les courbes de $VaR_\kappa(W_n)$, $n = 1, 2, 5, 10, 20$,100.
(f) Tracer les courbes de $TVaR_\kappa(W_n)$, $n = 1, 2, 5, 10, 20$,100.
(g) Tracer la courbe du bénéfice de mutualisation

$$BM_\kappa = \sum_{i=1}^n VaR_\kappa(X_i) - VaR_\kappa(S_n),$$

pour $\kappa \in (0, 1)$, $n = 2$, 10, 100.

(h) Tracer la courbe du bénéfice de mutualisation

$$BM_\kappa = \sum_{i=1}^n TVaR_\kappa(X_i) - TVaR_\kappa(S_n),$$

pour $\kappa \in (0, 1)$, $n = 2$, 10, 100.

9. On considère un portefeuille d'une compagnie d'assurance constitué de 2 lignes d'affaires. Les coûts totaux pour la lignes d'affaire i sont représentés par la v.a. X_i où $X_i \sim Gamma\left(\alpha_i = 2^{i-1}, \beta = \frac{1}{2000000}\right)$ $(i = 1, 2)$. Les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes. Le montant total des coûts pour l'ensemble du portefeuille est défini par la v.a. $S = X_1 + X_2$.
Le capital total requis pour l'ensemble du portefeuille est calculé à l'aide de la $TVaR_\kappa(S)$.

(a) Calculer $VaR_{0.995}(X_i)$ pour $i = 1, 2$ et $VaR_{0.995}(S)$.
(b) Calculer $TVaR_{0.995}(X_i)$ pour $i = 1, 2$ et $TVaR_{0.995}(S)$.
(c) Est-ce que la valeur de $TVaR_\kappa(S)$ est supérieure ou inférieure à $VaR_\kappa(S)$ pour tout $\kappa \in [0, 1)$? Pourquoi ? Expliquer la différence entre les mesures $TVaR_\kappa(S)$ et $VaR_\kappa(S)$. Pourquoi utiliser la $TVaR_\kappa(S)$ plutôt que la $VaR_\kappa(S)$?

10. On considère un portefeuille de $n = 400$ contrats d'assurance vie temporaire 1 an. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. $X_i = b_i I_i$ avec $b_i = 1000$ et $I_i \sim Bern\left(q_i = 0.008\right)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Les v.a. $I_1, ..., I_n$ sont indépendantes. On définit les coûts totaux pour le portefeuille par la v.a. $S_n = X_1 + ... + X_n$.

    On veut calculer le montant de capital économique associé au portefeuille, $CE_\kappa\left(S_n\right)$.

    Questions :

    (a) Calculer $CE_\kappa\left(S_n\right)$ si on utilise la mesure $VaR_\kappa\left(S_n\right)$ avec $\kappa = 0.9$, 0.95, 0.99, et 0.995.

    (b) Calculer $CE_\kappa\left(S_n\right)$ si on utilise la mesure $TVaR_\kappa\left(S_n\right)$ avec $\kappa = 0.9$, 0.95, 0.99, et 0.995.

    (c) Pour $\kappa = 0.9$, 0.95, 0.99, et 0.995, calculer $VaR_\kappa\left(X_i\right)$ pour $i = 1, 2, ..., 400$. Comparer $\sum_{i=1}^{400} VaR_\kappa\left(X_i\right)$ et $VaR_\kappa\left(S_n\right)$. Calculer le bénéfice de mutualisation $B_\kappa^{VaR}\left(X_1, ..., X_n\right)$. Commenter.

    (d) Pour $\kappa = 0.9$, 0.95, 0.99, et 0.995, calculer $TVaR_\kappa\left(X_i\right)$ pour $i = 1, 2, ..., 400$. Comparer $\sum_{i=1}^{400} TVaR_\kappa\left(X_i\right)$ et $TVaR_\kappa\left(S_n\right)$. Calculer le bénéfice de mutualisation $B_\kappa^{VaR}\left(X_1, ..., X_n\right)$. Commenter.

Chapitre 4

Modélisation des risques non-vie

4.1 Exercices traditionnels

1. On considère un contrat d'assurance vie temporaire 1 an émis à un individu de 60 ans. Selon son âge et son état de santé, sa probabilité de décès est de 0.013. Le montant de la prestation de décès est de 100 000. On ne tient pas compte de l'intérêt.
   (a) Calculer l'espérance et l'écart type des coûts associés au contrat.
   (b) Calculer la probabilité que les coûts du contrat soient nuls.
2. On considère un contrat d'assurance vie temporaire 1 an émis à un individu de 35 ans. La prestation de décès de base est de 100 000. En cas de décès accidentel, la prestation de décès de base est triplée. La probabilité de décès non accidentel est de 0.02 et la probabilité de décès accidentel est de 0.005. La v.a. X représente l'ensemble des coûts éventuels pour le contrat.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de coûts pour le contrat.
   (b) Si un décès survient, calculer la probabilité que les coûts soient de 300 000.
   (c) Calculer $VaR_\kappa(X)$ pour $\kappa = 0.95$, 0.99 et 0.995.
3. On définit la v.a. X par $X = B \times 1_{\{R \leq -0.1\}}$, représentant les coûts pour une institution financière à la suite d'une débâcle sur les marchés financiers. La v.a. $R \sim N\left(0.06, 0.2^2\right)$ correspond au rendement quotidien d'un indice boursier connu. La v.a. $B \sim Pa\,(1.5, 1000)$ est indépendante de la v.a. R.
   (a) Développer l'expression de $F_X(x)$.
   (b) Calculer $E[X]$.
   (c) Calculer $F_X(0)$ et $F_X(10\ 000)$.
   (d) Calculer $VaR_{0.999}(X)$ et $TVaR_{0.999}(X)$.
4. On définit la v.a. X par
   $$X = B \times 1_{\{R \leq -0.1\}},$$
   représentant les coûts pour une institution financière à la suite d'une débâcle sur les marchés financiers. La v.a. R représente le rendement quotidien d'un indice boursier connu. La v.a. $B \sim Pareto\,(\alpha = 1.5, \lambda = 1000)$ est indépendante de la v.a. R où
   $$R \sim Norm\left(\mu_1 = 0.08, \sigma_1^2 = 0.2^2\right).$$
   Questions :
   (a) Développer l'expression de $F_X(x)$. Calculer $F_X(5000)$.
   (b) Développer l'expression de $VaR_\kappa(X)$. Calculer $VaR_{0.99}(X)$.

5. On considère un contrat d'assurance responsabilité. Les coûts pour un contrat sont définis par X où
$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases},$$
avec $I \sim Bern\,(0.2)$. L'actuaire considère la loi Exponentielle pour modéliser B i.e. $B \sim LNorm\,(\mu = 5, \sigma = 2)$.
Questions :
   (a) Calculer $E\,[X]$ et $Var\,(X)$.
   (b) Calculer $VaR_{0.5}\,(X)$ et $TVaR_{0.5}\,(X)$. Calculer $VaR_{0.99}\,(X)$ et $TVaR_{0.99}\,(X)$.
6. On considère le volet incendie d'un contrat d'assurance pour un commerce. On suppose qu'au plus un incendie peut se produire au cours d'une année. Les coûts pour un contrat sont définis par la v.a. X où
$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases},$$
avec $I \sim Bern\,(0.125)$. On définit la v.a. B par
$$B = C + D$$
où la v.a C correspond aux dommages matériels au commerce et la v.a D représente les coûts résultant des pertes en affaires.
On a $C \in \{100, 200\}$ et $D \in \{100, 200, 300, 400\}$. Les valeurs de la fonction conjointe de masses de probabilité de (C, D) sont fournies dans le tableau ci-dessous :

Valeurs de $D \backslash$ de C	100	200
100	0.25	0.05
200	0.2273	0.1727
300	0.0852	0.1148
400	0.0375	0.0625

Questions :
   (a) Indiquer toutes les valeurs que peut prendre B et calculer les probabilités que B prenne chacune de ces valeurs.
   (b) Trouver la fonction de masse de probabilité de X.
   (c) Calculer $VaR_{0.95}\,(X)$ et $TVaR_{0.95}\,(X)$.
   (d) Calculer $E\,[X]$ et $Var\,(X)$.
7. Pour la prochaine année, la compagnie ABC Vie d'assurance vie prévoit émettre un nouveau contrat d'assurance vie temporaire 1 an. Le montant de prestation en cas de décès est b \$. Pour un assuré d'âge x, la probabilité de décès est
$$q_x = 1 - \exp\left(-0.000055 \times 1.1^x\right).$$
Les coûts pour un contrat d'un assuré d'âge x est désigné par la v.a. X.
Supposons que $x = 50$ et $b = 2000\$$.
Questions :
   (a) Calculer $E[X]$, $Var\,(X)$, $\Pr\,(X = 0)$.
   (b) Trouver l'expression de la f.g.p. de X.
8. On considère un contrat d'assurance-habitation pour le volet protection incendie pour la résidence unifamiliale seulement. On suppose qu'au plus un incendie peut survenir pour une résidence au cours d'une année.
Les coûts pour un contrat sont définis par X où
$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases}.$$

On suppose que
$$E[I] = 0.05$$
et
$$B = U \times c,$$
où la v.a. U représente le pourcentage de dommage et la constante c représente la valeur de la résidence. Les v.a. U et I sont indépendantes.
On suppose que
$$U = \frac{J+1}{5}$$
où $J \sim Binom(4, 0.25)$. On suppose que $c = 200000$.
Questions :
   (a) Indiquer les valeurs que peut prendre X et les probabilités que X prenne ces valeurs.
   (b) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

9. On considère un contrat d'assurance-habitation pour le volet protection incendie pour résidences unifamiliales. On suppose qu'au plus un incendie peut survenir pour une résidence pendant une période. Les coûts pour un contrat sont définis par X où
$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases}.$$
On suppose que
$$B = U \times c$$
où c correspond à la valeur de la résidence et la v.a. U est la proportion de dommages suite à un incendie. Compte tenu de la structure de la résidence, la probabilité que se produise un incendie est de 10% et U est de loi Beta avec
$$f_U(x) = 1.2x^{0.2}, 0 < x < 1.$$
On suppose que $c = 200$.
Questions :
   (a) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.
   (b) Calculer la probabilité que X excèdent 150.

10. On considère un contrat d'assurance automobile dont les coûts sont définis par la v.a. X de telle sorte que
$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, M > 0 \\ 0, M = 0 \end{cases}.$$
On suppose que $M \sim Pois(2)$. On suppose que les v.a. B_1, B_2, ... sont i.i.d. et indépendantes de M. On a $B_1 \sim B_2 \sim ... \sim B$ où $B \sim Pareto(4, 15)$.
Questions :
   (a) Calculer la probabilité que les coûts soient nuls pour ce contrat.
   (b) Calculer les coûts espérés et la variance des coûts pour ce contrat.
   (c) Si le nombre de sinistres pour le contrat est 1, calculer la probabilité que les coûts pour le contrat soient supérieurs à 10.

11. Une compagnie d'assurance veut émettre un contrat d'assurance responsabilité médicale. On définit par la v.a. X le montant qui peut être réclamé au cours de la prochaine année pour un assuré. On suppose que la probabilité qu'une réclamation se produise est de 10%. Si une réclamation se produit, le montant est représenté par la v.a. B (en milliers \$).
Selon une étude faite 5 ans plus tôt, l'actuaire de l'époque avait estimé que, si une réclamation se produisait, la moyenne et la variance du montant (défini par B_0) seraient de 1000 et de 1690000 (en milliers de \$). Il avait modélisée B_0 par une loi LogNormale.

On décide de conserver la même loi pour B, mais on estime que les coûts couverts par une assurance responsabilité médicale ont augmenté de 60% depuis 5 ans (i.e. $B = 160\%B_0$).
Questions :

(a) Calculer $\Pr(B \leq 5000)$.
(b) Calculer $\Pr(X \leq 5000)$.
(c) Refaire la question en supposant que B_0 obéit à une loi Pareto.

12. Une compagnie d'assurance générale a l'intention d'émettre un contrat d'assurance automobile. Hypothèses :

— On définit par la v.a. X le montant pouvant être réclamé par un seul contrat au cours d'une année. La v.a. X dépend du nombre d'accidents par année et du montant réclamé à chaque accident.

— Le nombre d'accidents pouvant se produire pour un seul contrat (dans une année) est défini par la v.a. M où

$$\begin{aligned}\Pr(M &= 0) = 0.7\\ \Pr(M &= 1) = 0.2\\ \Pr(M &= 2) = 0.1\\ \Pr(M &\geq 3) = 0\end{aligned}$$

— On définit par les v.a. B_1 et B_2 le montant réclamé au 1er et au 2e accidents s'il y a lieu.

— Les v.a. B_1 et B_2 sont des v.a. indépendantes et identiquement distribuées comme la v.a canonique $B \sim Gamma(2, \frac{1}{5})$.

— Supposons que $Y \sim Gamma(\alpha, \frac{1}{5})$. On détient les informations suivantes :

α	$F_Y(20)$
2	0.908
4	0.567
6	0.215

Questions :

(a) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.
(b) Calculer $\Pr(X > 20)$.

13. On considère un contrat d'assurance automobile. Pour une année, les coûts pour ce contrat sont représentés par la v.a. X où

$$X = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{M} B_k, M > 0 \\ 0, M = 0 \end{cases}$$

où la v.a. M représente le nombre de sinistres encourus pendant l'année et B_k est le montant (la gravité) du $k$ième sinistre. Les v.a. B_1, B_2,... sont i.i.d. et indépendantes de M.
On suppose que la montant d'un sinistre obéit à une loi LogNormale de paramètres $\mu = 3$ et $\sigma = 1.5$.
Questions :

(a) On suppose que $M \sim Bin(6, 0.08)$. Calculer $\Pr(X = 0)$, $E[X]$ et $Var(X)$.
(b) On suppose que $M \sim Pois(0.48)$. Calculer $\Pr(X = 0)$, $E[X]$ et $Var(X)$.
(c) On suppose que $M \sim NBin(r = 2, \beta = 0.24)$. Calculer $\Pr(X = 0)$, $E[X]$ et $Var(X)$.

14. Par la v.a. X, on représente les coûts pour un contrat où

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, M > 0 \\ 0, \; M = 0 \end{cases},$$

avec M obéit à une loi Poisson de moyenne 0.2. On suppose que les v.a. B_1, B_2, ... sont i.i.d. et indépendantes de M. On a $B_1 \sim B_2 \sim ... \sim B$. Le montant B d'un sinistre obéit à une loi exponentielle de moyenne 1000. On dispose des informations produites dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$\Pr(M = k)$	0.8187	0.1637	0.0164	0.0011	0.0001

avec $\Pr(M > 4) = 0.0000$.

Questions :

(a) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

(b) Calculer $\Pr(X > 3000)$.

15. Par la v.a. X, on représente les coûts pour un contrat où

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, M > 0 \\ 0, \ M = 0 \end{cases},$$

avec M obéit à une loi géométique de moyenne 1.4. On suppose que les v.a. B_1, B_2, ... sont i.i.d. et indépendantes de M. On a $B_1 \sim B_2 \sim ... \sim B$. Le montant B d'un sinistre obéit à une loi exponentielle de moyenne 1000.

Questions :

(a) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

(b) Montrer que l'on peut exprimer la v.a. X sous la forme

$$X = \begin{cases} C, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases}$$

où $I \sim Bern(q^*)$ et $C \sim Exp(\beta^*)$. Identifier les valeurs de q^* et β^*.

(c) Calculer $\Pr(X > 3000)$.

16. Par la v.a. X, on représente les coûts pour un contrat où

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, M > 0 \\ 0, \ M = 0 \end{cases},$$

avec M obéit à une loi Binomiale négative avec $r = 3$ (entier) et $q = 0.2$. On suppose que les v.a. B_1, B_2, ... sont i.i.d. et indépendantes de M. On a $B_1 \sim B_2 \sim ... \sim B$. Le montant B d'un sinistre obéit à une loi exponentielle de moyenne 1000.

Questions :

(a) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

(b) Montrer que l'on peut exprimer la v.a. X sous la forme

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M^*} B_j^*, M^* > 0 \\ 0, \ M^* = 0 \end{cases},$$

où $M^* \sim Binom(r, q^*)$, B_1^*, B_2^*, sont i.i.d. et indépendants de M^*. On sait $B_j^* \sim B^* \sim Expon(\beta^*)$. Identifier les valeurs de q^* et β^*.

(c) Calculer $\Pr(X > 3000)$.

17. Un contrat d'assurance incendie est émis à un propriétaire de commerce. La durée de couverture est d'un an. On définit par la v.a. X le montant qui peut être réclamé au cours de la prochaine année (Note : X peut être nulle). On suppose que la probabilité qu'une réclamation se produise est de 20% (i.e. $P(I = 1) = 20\%$). Si une réclamation se produit, le montant B (en milliers \$) obéit à une loi Exponentielle($\lambda = 0.01$).

Questions :

(a) Calculer $E[B], Var\,(B)$ *et* $\Pr(B > 200)$.

(b) Calculer $E[X], Var\,(X)\,, \Pr(X = 0), \Pr(X \leq 100), \Pr(X > 200)$.

(c) Trouver X_{99} tel que $\Pr(X \leq X_{99}) = 99\%$.

(d) Supposons que 100 contrats sont émis. On suppose que les risques sont indépendants. Calculer la probabilité que la réclamation maximale dépasse 500 (en milliers $).

(e) Supposons que B obéit plutôt à une loi de Pareto ($\alpha = 3$ et $\lambda = 200$). Cela implique $E[B] = 100$. La fonction de répartition de B est

$$F_B(y) = 1 - (\frac{\lambda}{\lambda + y})^{\alpha}, y \geq 0.$$

Refaire (c) et (d). Pour 100 contrats (et les 2 lois), calculer la probabilité que la réclamation maximale dépasse la somme des primes si la prime est égale à $E[X]$.

18. On considère un contrat d'assurance santé. On représente par la v.a. X le montant qui peut être réclamé au cours de la prochaine année pour le contrat où $X = (1 + R)Y$. Les v.a. Y et R sont indépendantes. Le taux d'indexation R (pour la prochaine année) est une v.a. discrète

r	$\Pr(R = r)$
0.0	0.75
0.5	0.25

On suppose que

$$Y = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, M > 0 \\ 0, \ \ M = 0 \end{cases},$$

avec $M \sim Binom(3, 0.2)$. On suppose que les v.a. B_1, B_2, ... sont i.i.d. et indépendantes de M. On a également $B_1 \sim B_2 \sim ... \sim B$. Selon une étude faite 4 ans plus tôt, l'actuaire de l'époque avait estimé que le montant B d'un sinistre obéissait à une loi Gamma

$$B \sim Gamma(0.2, 0.01).$$

Soit $H\,(x; \alpha, \beta)$ la fonction de répartition d'une loi Gamma de paramètres α et β.
Quelques données :

k	$H\,(20; 0.2k; 0.01)$	$H\,(30; 0.2k; 0.01)$	$H\,(45; 0.2k; 0.01)$	$\Pr(M = k)$
1	0.764	0.817	0.866	0.384
2	0.560	0.642	0.726	0.096
3	0.396	0.488	0.591	0.008

Questions :

(a) Calculer l'espérance et la variance des coûts pour le contrat.

(b) Calculer la probabilité que les coûts pour le contrat soient supérieurs à 30.

19. On considère une société minière qui entreprend au 1.1.2006 des travaux d'exploitation pour un minerai A dans la région B. Il prévoit ouvrir la mine au 1.1.2007. A cette date, il est prévu que la somme investie pour les travaux soient de 2 000 000$. Selon les prévisions des ingénieurs de la société, la valeur présente des revenus pour les 30 prochaines années d'exploitation de la mine est de 10 000 000$. Néanmoins, si le cours du minerai au 1.1.2007 est sous 200$, la société va interrompre les travaux et n'ouvrira pas la mine. Au 1.1.2006, le prix du minerai A sur le marché est de $S_0 = 250\$$. Au 1.1.2007, le prix du minerai A est désigné par la v.a. S_1 avec $S_1 = S_0 \exp{(Y_1)}$ où $Y_1 \sim Norm\left(\mu = 0.1, \sigma^2 = 0.2^2\right)$. On désigne par L la perte au 1.1.2007 où une perte négative désigne des gains nets.

(a) Indiquer les valeurs possibles de L.

(b) Calculer la probabilité de faire un perte positive.

(c) Calculer l'espérance et la variance de L.

20. Soit la v.a.

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} c 1_{\{B_k > b\}}, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

avec

$$M \sim Pois\,(\lambda = 3)$$

$$\begin{aligned} B_k &\sim B \sim Pareto\,(\alpha = 1.5, \lambda = 1500)\,,\ k = 1, 2, ... \\ c &= 600 \\ b &= 10000. \end{aligned}$$

Questions :

(a) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

(b) Calculer $\Pr(X \leq 1000)$.

(c) Calculer $VaR_{0.995}(X)$.

21. On considère le fonds mutuel ABC où le rendement instantané R pour une période est une v.a. discrète qui prend les valeurs indiquées dans le tableau ci-dessous :

r	-0.20	-0.15	-0.05	-0.005	0	0.005	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$25\Pr(R = r)$	1	1	1	1	1	2	4	4	4	3	2	1

Les engagements d'un individu à la fin de la période sont définis par la v.a. $S \sim Gamma\left(2, \frac{1}{5000}\right)$. L'individu investit $V(0) = \frac{E[S]}{E[e^R]}$. La valeur de l'investissement à la fin de la période est $V(1) = V(0)\,e^R$.

Questions :

(a) Calculer $E[S]$, $E\left[e^R\right]$ et $V(0)$.

(b) L'actuaire A définit la perte globale de l'individu par la v.a. $L_A = E[S] - V(1)$.

i. Calculer l'espérance et la variance de L_A.

ii. Calculer $\Pr(L_A > 0)$.

(c) L'actuaire B définit la perte globale de l'individu par la v.a. $L_B = S - V(1)$.

i. Calculer l'espérance et la variance de L_B.

ii. Calculer $\Pr(L_B > 0)$.

(d) Selon vous, quelle approche (A ou B) serait la plus appropriée pour donner une bonne idée du risque global auquel est exposé l'individu ? Expliquez brièvement.

22. On définit les prestations de décès à verser par un assureur à la fin de la prochaine année par $S = bN$, où $N \sim Bin\left(n, q = \frac{1}{100}\right)$ et $b = 1000$. L'assureur récolte les primes $V(0) = 10n$ au début de la période et les investit pendant la période. Il utilisera la valeur accumulée afin de payer les coûts en sinistres à la fin de la période. L'assureur prévoit investir dans un titre avec risque dont le rendement instantané est représenté par la v.a. $R \sim N(\mu = 0.06, \sigma^2 = 0.2^2)$. La perte de l'assureur est $L = S - V(0)Y$, où $Y = e^R$.

(a) Développer l'expression de $F_L(x)$.

(b) Calculer $F_L(x)$ avec $n = 100$ et $x = 0$.

(c) Interpréter $F_L(x)$.

23. Les coûts pour un contrat d'assurance santé sont définis par $X \sim BComp(n, q; F_B)$ où $n = 1$, $q = 0.3$ et $B \sim LN(\mu, \sigma)$ (avec $\mu = 7$ et $\sigma = 1.1$) sont indépendantes.
    (a) Calculer $E[X]$ et $\sqrt{\text{Var}(X)}$.
    (b) Calculer $\Pr(X \leq 10\ 000)$.
    (c) Calculer $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.

24. Les coûts d'un contrat d'assurance habitation pour le volet protection incendie pour résidences unifamiliales sont définis par la v.a. $X \sim BComp(n, q; F_B)$ où $n = 1$ et $q = 0.1$. Par hypothèse, au plus un incendie peut survenir pour une résidence pendant une période. On définit $B = U \times c$, où $c = 200$ correspond à la valeur de la résidence et la v.a. U est la proportion de dommages à la suite d'un incendie. Compte tenu de la structure de la résidence, $U \sim B\hat{e}ta(1.2, 1)$.
    (a) Calculer $E[X]$ et $\text{Var}(X)$.
    (b) Calculer la probabilité que X excède 150.
    (c) Calculer $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.

25. Les coûts pour un contrat d'assurance IARD sont définis par la v.a. $X \sim PComp(\lambda; F_B)$ où $\lambda = 0.2$ et $B \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$.
    (a) Calculer $E[X]$ et $\text{Var}(X)$.
    (b) Calculer $\Pr(X > 3000)$.
    (c) Calculer $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.

26. On examine le risque associé à un contrat d'assurance automobile émis à des assurés de la région ABC. L'actuaire croit que la population de la région ABC est composée de bons conducteurs (avec une proportion de 80 %) et de mauvais conducteurs (avec une proportion de 20 %). On modélise les coûts pour un contrat par l'approche fréquence-sévérité. Si l'assuré est un bon conducteur, le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson de moyenne 0.1. Si l'assuré est un mauvais conducteur, le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson de moyenne 0.25. En cas de sinistre, le montant d'un sinistre obéit à une loi $Erl(2, \beta)$ de moyenne 3000 peu importe le type de conducteur. Au moment de l'émission d'un nouveau contrat, on ne dispose pas d'information sur le type de conducteur.
    (a) Pour un nouveau contrat, calculer la probabilité que le contrat ne produise aucun sinistre. Calculer la probabilité qu'il en produise 2 ou plus.
    (b) Calculer l'espérance et la variance du nombre de sinistres pour un nouveau contrat.
    (c) Calculer l'espérance et la variance des coûts pour un nouveau contrat.

27. Soit une v.a. M de fréquence obéissant à une loi Poisson mélange. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de la v.a. mélange Θ sont données ci-dessous :

θ	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
$f_\Theta(\theta)$	$\frac{17}{300}$	0.22	0.22	0.17	0.12	0.08	0.05	0.04	0.02	$\frac{7}{300}$

De plus, $(M|\Theta = \theta) \sim Pois(0.2 \times \theta)$, $\theta \in \{0.25, 0.5, ..., 2.5\}$.
    (a) Calculer $E[\Theta]$ et $\text{Var}(\Theta)$.
    (b) Calculer $E[M]$ et $\text{Var}(M)$.
    (c) Calculer $VaR_\kappa(M)$ et $TVaR_\kappa(M)$ pour $\kappa = 0.9$, 0.99 et 0.999.
    (d) Soit une v.a. X représentant les coûts d'un contrat d'assurance IARD où

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

selon les hypothèses habituelles avec $B_j \sim B \sim Ga\left(2, \frac{1}{1000}\right)$, $j \in \mathbb{N}^+$.
        i. Calculer $E[X]$ et $\text{Var}(X)$.

ii. Calculer $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.

iii. Calculer les parts allouées de $TVaR_{0.99}(X)$ aux v.a. M et B selon les règles de la variance et de la TVaR.

28. Soit une v.a. M de fréquence obéissant à la loi Poisson généralisée de paramètres $\lambda > 0$ et $\tau \in [0, 1[$ où

$$\begin{aligned} f_M(k) &= \frac{\lambda(1-\tau)(\lambda(1-\tau)+\tau k)^{k-1}}{k!} \mathrm{e}^{-(\lambda(1-\tau)+\tau k)}, \ k \in \mathbb{N}, \\ E[M] &= \lambda \text{ et } \mathrm{Var}(M) = \frac{\lambda}{(1-\tau)^2}. \end{aligned}$$

La loi Poisson généralisée est aussi un exemple de loi Poisson-mélange. Si $\tau = 0$, $M \sim Pois(\lambda)$.

(a) Pour $\lambda = 0.25$ et $\tau = 0.5$, calculer $E[M]$ et $\mathrm{Var}(M)$.

(b) Calculer $VaR_\kappa(M)$ et $TVaR_\kappa(M)$ pour $\kappa = 0.99$ et 0.999.

(c) Soit une v.a. X représentant les coûts d'un contrat où

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

selon les hypothèses habituelles avec $B_j \sim B \sim Ga\left(2, \frac{1}{1000}\right)$, $j \in \mathbb{N}^+$.

i. Calculer $E[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

ii. Calculer $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.

iii. Calculer les parts allouées de $TVaR_{0.99}(X)$ aux v.a. M et B selon les règles de la variance et de la TVaR.

29. Les coûts pour un contrat d'assurance automobile sont définis par la v.a. $X = (1+R)Y$ où $Y \sim BNComp(r, q; F_B)$, où $r = 2$, $q = \frac{2}{3}$ et $B \sim Exp(\beta)$, où $\beta = \frac{1}{10000}$. La v.a. R correspond à l'indexation éventuelle avec $R \in \{0.05, 0.2\}$, où $\Pr(R = 0.05) = 0.9$ et $\Pr(R = 0.2) = 0.1$. Les v.a. Y et R sont indépendantes.

(a) Évaluer l'espérance et la variance de X.

(b) Évaluer la probabilité que X excède son espérance.

30. Soit une v.a. $X \sim BNComp(1, q; F_B)$ où $B \sim Exp(\beta)$.

(a) Montrer que l'on peut exprimer la v.a. X sous la forme

$$X = \begin{cases} B^*, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases},$$

où $I \sim Bern(q^*)$ et $B^* \sim Exp(\beta^*)$.

(b) Si $E[M] = 1.4$ et $E[B] = 1000$, identifier les valeurs de q^*et β^*. Calculer $\Pr(X > 3000)$.

31. On considère un contrat d'assurance responsabilité. Les coûts pour un contrat sont définis par X où

$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases},$$

avec $I \sim Bern(0.2)$. L'actuaire considère la loi lognormale pour modéliser B i.e. $B \sim LNorm(\mu = \ln(1000) - 0.405, \sigma =$

Questions :

(a) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

(b) Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{0.5}(X)$. Calculer $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.

(c) Suggestion : refaire les calculs en (b) en supposant $B \sim Pareto\,(\alpha, \lambda)$ en supposant la même espérance et la même variance pour B (que celles obtenues selon l'hypothèse initiale de loi lognormale).

32. Soit la v.a.

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} c1_{\{B_k > b\}}, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

avec

$$M \sim Pois\,(\lambda = 3)$$

$$\begin{aligned} B_k &\sim Pareto\,(\alpha = 1.5, \lambda = 1500)\,,\ k = 1, 2, ... \\ c &= 600 \\ b &= 10000. \end{aligned}$$

Question : Calculer $E[X]$, $Var\,(X)$, $\Pr(X \leq 1000)$, $VaR_{0.995}\,(X)$.

33. Les coûts pour un contrat d'assurance santé sont définis par la v.a. X.
Soit la v.a. d'hétérogénéité $\Theta \sim LNorm\left(\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2, \sigma = 1\right)$.
Sachant $\Theta = \theta$, on a

$$(X|\Theta = \theta) \sim PoisComp\,(\lambda\theta, F_B)$$

avec $\lambda = 10$ et $B \sim Gamma\left(\alpha = 1.5, \beta = \frac{1}{100}\right)$.
La prime pour le contrat avec la mesure décomposée comme suit :

$$\rho_\kappa\,(X) = E[X] + C_\kappa\,(X) + D_\kappa\,(X)$$

où

$$\begin{aligned} C_\kappa\,(X) &= \frac{E_\Theta\,[Var\,(X|\Theta)]}{Var\,(X)} \frac{1}{1-\kappa} \sqrt{Var\,(X)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ D_\kappa\,(X) &= \frac{Var_\Theta\,(E\,[X|\Theta])}{Var\,(X)} \frac{1}{1-\kappa} \sqrt{Var\,(X)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}. \end{aligned}$$

La composante $D_\kappa\,(X)$ correspond à la portion expliquée par l'hétérogénéité.
Questions :

(a) Calculer $E[X]$

(b) Calculer $C_{0.99}\,(X)$ et $D_{0.99}\,(X)$.

(c) Calculer $\rho_{0.99}\,(X)$ et commenter brièvement par rapport à l'hétérogénéité.

34. Les coûts d'un contrat d'assurance automobile sont définis par la v.a. $X \sim PComp\,(\lambda; F_B)$ où $\lambda = 2$ et $B \sim Pa(1.5, 5)$.

(a) Calculer la probabilité que les coûts soient nuls pour ce contrat.

(b) Calculer l'espérance des coûts pour ce contrat.

(c) Sachant que le nombre de sinistres pour le contrat est 1, calculer la probabilité que les coûts pour le contrat soient supérieurs à 700 et calculer la valeur de la VaR associée à ces coûts pour $\kappa = 0.999$.

(d) Utiliser l'approximation pour les distributions sub-exponentielles pour évaluer $\Pr(X > 700)$ et $VaR_{0.999}\,(X)$.

4.2 Exercices informatiques

1. On considère les coûts pour un contrat d'assurance collective, définis par la v.a. X où

$$X \sim BinNegComp\left(r = 5, q = \frac{1}{5}; F_B\right),$$

avec $B \sim Gamma(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{5000})$.
On définit la prime pour le contrat par $\Pi_\kappa = TVaR_\kappa(X)$.
On décompose la prime Π_κ sous la forme

$$\Pi_\kappa = \Pi^{(1)} + \Pi_\kappa^{(2)} + \Pi_\kappa^{(3)},$$

où

$$\begin{aligned}
\Pi^{(1)} &= E[X] \\
\Pi_\kappa^{(2)} &= \frac{E_{N_n}[Var(X|M)]}{Var(X)} (TVaR_\kappa(X) - E[X]) \\
\Pi_\kappa^{(3)} &= \frac{Var_{N_n}(E[X|M])}{Var(X)} (TVaR_\kappa(X) - E[X]).
\end{aligned}$$

Questions :

(a) Calculer $E[X]$.
   i. Indiquer l'expression de $E[X]$.
   ii. Indiquer la valeur de $E[X]$.

(b) Calculer $Var(X)$.
   i. Indiquer l'expression de $Var(X)$.
   ii. Indiquer la valeur de $Var(X)$.

(c) Calculer $\Pr(X \leq 500000)$. (Vérification : $\Pr(X \leq 600000) = 0.9973601$)
   i. Indiquer l'expression de $\Pr(X \leq 500000)$.
   ii. Indiquer la valeur de $\Pr(X \leq 500000)$.

(d) Calculer $\Pi_{0.99}$.
   i. Indiquer l'expression de $\Pi_{0.99}$.
   ii. Indiquer la valeur de $\Pi_{0.99}$.

(e) Calculer $\Pi^{(1)}$, $\Pi_{0.99}^{(2)}$ et $\Pi_{0.99}^{(3)}$.

(f) Expliquer brièvement ce que représente chacune des composantes $\Pi^{(1)}$, $\Pi_\kappa^{(2)}$ et $\Pi_\kappa^{(3)}$ de la prime Π_n. (Suggestion : penser à fréquence et sévérité).

2. On considère un contrat d'assurance responsabilité. Les coûts pour un contrat sont définis par X où

$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases},$$

avec $I \sim Bern(0.2)$. L'actuaire considère la loi Exponentielle pour modéliser B i.e. $B \sim Exp\left(\beta = \frac{1}{2500}\right)$.
Questions :

(a) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

(b) Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{0.5}(X)$. Calculer $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.

(c) On suppose que 3 contrats seront émis. Les coûts des contrats sont indépendants et identiquements distribués. Les coûts pour le portefeuille sont représentés par la v.a. S_{TOT}. La mesure $VaR_{0.99}(S_{TOT})$ associée à S_{TOT} est 11658.566. Calculer la mesure $TVaR_{0.99}(S_{TOT})$ associée à S_{TOT}. Informations supplémentaires : valeurs de la fonction de répartition pour la loi Gamma avec paramètre $\alpha = k$ et $\beta = \frac{1}{2500}$ (notée $G(;k;0.001)$) :

k	$G\left(11658.566; k; \frac{1}{2500}\right)$
1	0.9905659
2	0.9465708
3	0.8439867
4	0.6845223
5	0.4986097

3. On considère un portefeuille de deux contrats dont les coûts sont définis par les v.a. X_1 et X_2 indépendantes. Les v.a. sont déjà discrétisées et elles ont pour support

$$\{0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000\}.$$

On définit les coûts pour l'ensemble du portefeuille par la v.a.

$$S = X_1 + X_2.$$

On sait que :

k	$F_{X_1}(1000k)$	$\frac{1}{1000}E\left[X_1 \times 1_{\{X_1>1000k\}}\right]$
0	0.3	1.59
1	0.5	1.39
2	0.75	0.89
3	0.9	0.44
4	0.96	0.2
5	1	0

k	$F_{X_2}(1000k)$	$\frac{1}{1000}E\left[X_2 \times 1_{\{X_2>1000k\}}\right]$
0	0.2	1.52
1	0.5	1.22
2	0.85	0.52
3	0.95	0.22
4	0.98	0.1
5	1	0

k	$f_S(1000k)$	$F_S(1000k)$	$\frac{1}{1000}E\left[S \times 1_{\{S>1000k\}}\right]$
0	0.0600	0.0600	3.1100
1	0.1300	0.1900	2.9800
2	0.2150	0.4050	2.5500
3	0.2050	0.6100	1.9350
4	0.1735	0.7835	1.2410
5	0.1155	0.8990	0.6635
6	0.0595	0.9585	0.3065
7	0.0295	0.9880	0.1000
8	0.0088	0.9968	0.0296
9	0.0024	0.9992	0.0080
10	0.0008	1	0

Questions (et commenter) :

(a) Calculer $f_S(0)$ et $f_S(1000)$.

(b) Calculer $VaR_\kappa(X_1)$, $VaR_\kappa(X_2)$ et $VaR_\kappa(S)$ avec $\kappa = 0.25$, 0.75 et 0.995.

(c) Calculer $TVaR_\kappa(X_1)$, $TVaR_\kappa(X_2)$ et $TVaR_\kappa(S)$ avec $\kappa = 0.25$, 0.75 et 0.995.

4. On considère le volet incendie d'un contrat d'assurance pour un commerce. On suppose qu'au plus un incendie peut se produire au cours d'une année. Les coûts pour un contrat sont définis par la v.a. X où

$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases},$$

avec $I \sim Bern(0.12)$. On définit la v.a. B par

$$B = C + D$$

où la v.a C correspond aux dommages matériels au commerce et la v.a D représente les coûts résultant des pertes en affaires. On dispose de l'information suivante :

v.a.	espérance	variance
C	1000	1500^2
D	2000	4000^2

De plus, la covariance entre C et D est de 1800000.

On suppose que la compagnie prévoit émettre $n = 500$ de ces contrats dont les coûts sont i.i.d. Les coûts totaux sont définis par la v.a. S_{TOT}. On définit aussi la v.a. $\overline{X}_n$ par

$$\overline{X}_n = \frac{S_{TOT}}{n}.$$

Questions :

(a) Calculer $E[X]$ et $Var(X)$.

(b) Utiliser l'approximation normale pour évaluer la prime majorée $\Pi_n^{VaR}(X) = VaR_{0.95}\left(\overline{X}_n\right)$ pour $n = 500$. Quel est le comportement de $\Pi_n^{VaR}(X)$ lorsque n augmente ? Expliquer brièvement ce comportement.

(c) Utiliser l'approximation normale pour évaluer la prime majorée $\Pi_n^{TVaR}(X) = TVaR_{0.95}\left(\overline{X}_n\right)$ pour $n = 500$. Quel est le comportement de $\Pi_n^{TVaR}(X)$ lorsque n augmente ? Expliquer brièvement ce comportement.

Chapitre 5

Mutualisation des risques non-vie

5.1 Exercices traditionnels

1. On considère un portefeuille de 10 contrats d'assurance automobile. Pour un contrat, les coûts sont modélisés selon l'approche fréquence sévérité où

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses usuelles. On suppose que $M \sim Pois\,(0.01)$ et $B \sim Exp\,(0.0001)$ où $E\,[B] = \frac{1}{\beta} = 10000$.

Pour des fins de calculs, on suppose que $\Pr\left(N^{TOT} > 3\right) = 0$ où N^{TOT} est le nombre de sinistres pour le portefeuille.

Pour $\kappa = 0.99$, on a $VaR_{0.99}\,(S_{TOT}) = 23673$.

Question.

(a) Soit une v.a. Y obéissant à une loi Erlang(n, β) pour $n \in \mathbb{N}^+$. Montrer que

$$\begin{aligned} E\left[Y \times 1_{(y,\infty)}\,(Y)\right] &= \int_y^{\infty} y f_Y\,(y)\,dy \\ &= \frac{n}{\beta} e^{-\beta y} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\beta y)^j}{j!}. \end{aligned}$$

(b) Calculer le capital économique associé à ce portefeuille si on utilise la mesure $TVaR_{0.99}(S_{TOT})$.

2. On considère un portefeuille de $n = 20$ contrats indépendants d'assurance automobile. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. X_i où

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, M_i > 0 \\ 0, M_i = 0 \end{cases},$$

selon les hypothèses usuelles avec $B_{i,1} \sim B_{i,2} \sim B_{i,2} \sim ... \sim B_i \sim B \sim Exp\left(\frac{1}{4000}\right)$ et $M_i \sim Poisson\left(\lambda_i = 0.01\right)$. On définit les coûts totaux pour le portefeuille par la v.a. $S = X_1 + ... + X_n$.

ATTENTION ! Pour les calculs de $\Pr(...)$, on utilise des valeurs de fonction de masses de probabilité supérieures à 0.0001 (> 0.0001).

On dispose des valeurs de la fonction de répartition $G(x; \alpha, 1)$ d'une loi gamma de paramètres $\alpha = k$ et $\beta = 1$.

Questions :

(a) Calculer $E[X_1]$, $Var(X_1)$ et $\Pr(X_1 > 8000)$.

(b) Calculer $E[S]$, $Var(S)$ et $\Pr(S > 8000)$.

3. On considère un portefeuille non homogène de deux contrats d'assurance automobile. Pour une année, le comportement aléatoire des coûts pour un contrat n'est pas similaire mais il est indépendant à celui de l'autre contrat. Les coûts pour le contrat individuel i sont représentés par la v.a. X_i, où

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}, (i = 1, 2),$$

où la v.a. M_i représente le nombre de sinistres encourus pendant l'année pour le contrat i et $B_{i,k}$ est le montant (la gravité) du $k$ième sinistre pour le contrat i. Les v.a. $B_{i,1}, B_{i,2}, ...$ sont i.i.d. et indépendantes de M_i $(i = 1, 2)$. Cela signifie que $B_{i,1} \sim B_{i,2} \sim ... \sim B_i$, pour $i = 1, 2$. De plus, $M_i \sim Bin(2, 0.05i)$ et $B_i \sim Ga(2, 0.01)$ $(i = 1, 2)$. Les coûts pour l'ensemble du portefeuille sont représentés par la v.a. $S_2 = X_1 + X_2$.

Questions :

(a) Calculer $\Pr(S_2 = 0)$.

(b) Calculer $E[S_2]$ et $Var(S_2)$.

(c) Calculer la probabilité que 2 sinistres se produisent pour l'ensemble du portefeuille pendant l'année.

(d) Calculer $\Pr(S_2 > 150)$.

4. On considère le portefeuille d'une compagnie d'assurance IARD. Le portefeuille est composé de deux lignes d'affaires : assurance automobile aux particuliers et assurance habitation aux particuliers.

   On suppose que tous les risques individuels sont indépendants.

   Informations utiles :

   — Assurance habitation : Modèle fréquence sévérité pour les coûts pour un contrat. Le montant d'un sinistre est en multiple de 1000.

Classe	Nb	$E[M]$	$Var(M)$	$E[B]$	$Var(B)$	$E[X]$	$Var(X)$
1	600	0.02	0.02×0.98	100	3300	2	69.92
2	400	0.04	0.04×0.96	150	7500	6	311.52
Total	1000	–	–	–	–	–	–

   — Assurance automobile : Modèle fréquence sévérité pour les coûts pour un contrat.

Classe	Nb	$E[M]$	$Var(M)$	$E[B]$	$Var(B)$	$E[X]$	$Var(X)$
1	600	0.02	0.02	20	500	0.4	18
2	900	0.04	0.04	10	200	0.4	12
Total	1500	–	–	–	–	–	–

   L'actuaire veut établir le capital économique pour chaque ligne d'affaires et pour le ptf en entier. Il l'utilise l'approximation normale.

   (a) Calculer le capital économique pour chaque ligne d'affaires en ayant recours à la mesure VaR avec $\kappa = 95\%$. Refaire le calcul avec la mesure $TVaR$ avec $\kappa = 95\%$.

   (b) Calculer le capital économique pour le portefeuille en entier en ayant recours à la mesure VaR avec $\kappa = 95\%$. Refaire le calcul avec la mesure $TVaR$ avec $\kappa = 95\%$.

5. On considère le volet incendie d'un contrat d'assurance pour un commerce. On suppose qu'au plus un incendie peut se produire au cours d'une année. Les coûts pour un contrat sont définis par la v.a. X où
$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases},$$
avec $I \sim Bern\,(0.12)$. On définit la v.a. B par
$$B = C + D$$
où la v.a C correspond aux dommages matériels au commerce et la v.a D représente les coûts résultant des pertes en affaires. On dispose de l'information suivante :

v.a.	espérance	variance
C	1000	1500^2
D	2000	4000^2

De plus, la covariance entre C et D est de 1800000.
On suppose que la compagnie prévoit émettre $n = 500$ de ces contrats dont les coûts sont i.i.d. Les coûts totaux sont définis par la v.a. S_{TOT}. On approxime la loi de S_{TOT} par une loi normale. On veut calculer le montant de capital économique associé au portefeuille, $CE_\kappa\,(S_{TOT})$.
Questions :
   (a) Calculer $E\,[X]$ et $Var\,(X)$. Calculer $E\,[S_{TOT}]$ et $Var\,(S_{TOT})$.
   (b) Soit une v.a $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. i.e. $Y = \mu + \sigma Z$, $Z \sim N(0,1)$. Montrer que $TVaR_\kappa\,(Y) = \mu + \frac{1}{1-\kappa}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} = \mu + \sigma TVaR_\kappa\,(Z)$.
   (c) Calculer $CE_\kappa\,(S_{TOT}) = VaR_\kappa\,(S_{TOT}) - E\,[S_{TOT}]$ si on utilise la mesure $VaR_\kappa\,(S_{TOT})$ avec $\kappa = 0.995$.
   (d) Calculer $CE_\kappa\,(S_{TOT}) = TVaR_\kappa\,(S_{TOT}) - E\,[S_{TOT}]$ si on utilise la mesure $TVaR_\kappa\,(S_{TOT})$ avec $\kappa = 0.995$.

6. On considère le portefeuille d'une compagnie d'assurance IARD. Le portefeuille est composé de deux lignes d'affaires : assurance automobile aux particuliers et assurance habitation aux particuliers.
   On suppose que tous les risques individuels sont indépendants.
   Les coûts pour un contrat sont représentés par la v.a. X.
   Informations utiles :

   — Assurance habitation : Modèle fréquence sévérité pour les coûts pour un contrat.

Classe	Nb	$E[X]$	$Var(X)$
1	700	3	80
2	500	6	320
Total	1200	–	–

   — Assurance automobile : Modèle fréquence sévérité pour les coûts pour un contrat.

Classe	Nb	$E[X]$	$Var(X)$
1	900	8	20
2	400	12	15
Total	1300	–	–

   L'actuaire veut établir le capital économique pour l'ensemble du portefeuille.
   Il l'utilise l'approximation normale pour faire ses calculs.
   Questions :

   (a) Calculer l'espérance et la variance du montant total des coûts pour l'ensemble du portefeuille.

   (b) Calculer le capital économique pour l'ensemble du portefeuille en ayant recours à la mesure VaR avec $\kappa = 99\%$.

   (c) Calculer le capital économique pour l'ensemble du portefeuille en ayant recours à la mesure $TVaR$ avec $\kappa = 99\%$.

   (d) Expliquer ce que représente la capital économique. Fournir une interprétation des mesures VaR et $TVaR$ et expliquer ce qui les distingue.

7. On considère un portefeuille de 400 contrats d'assurance vie temporaire 1 an. On ne tient pas compte de l'intérêt. On suppose que les durées de vie des assurés sont i.i.d. La probabilité de décès pour la prochaine année est de 0.008. La prestation de décès est de 1000. Le montant total des coûts est représenté par la v.a. S. On dispose des informations suivantes pour une une v.a. N qui obéit à une loi $Binom\,(400, 0.008)$:

k	$\Pr(N=k)$	$\Pr(N \leq k)$	$E\left[N \times 1_{\{N>k\}}\right]$
0	0.04024	0.04024	3.2
1	0.12981	0.17005	3.07019
2	0.20885	0.37890	2.65250
3	0.22344	0.60234	1.98216
4	0.17885	0.78119	1.26678
5	0.11423	0.89542	0.69563
6	0.06064	0.95606	0.33175
7	0.02753	0.98359	0.13906
8	0.01091	0.99450	0.05181
9	0.00383	0.99833	0.01733
10	0.00121	0.99954	0.00525

On veut calculer le montant de capital économique associé au portefeuille, $CE_\kappa(S)$.

Questions :

(a) Calculer $CE_\kappa(S)$ si on utilise la mesure $VaR_\kappa(S)$ avec $\kappa = 0.9$, 0.95, 0.99, et 0.995.

(b) Calculer $CE_\kappa(S)$ si on utilise la mesure $TVaR_\kappa(S)$ avec $\kappa = 0.9$, 0.95, 0.99, et 0.995.

(c) Pour $\kappa = 0.9$, 0.95, 0.99, et 0.995, calculer $VaR_\kappa(X_i)$ pour $i = 1, 2, ..., 400$. Comparer $\sum_{i=1}^{400} VaR_\kappa(X_i)$ et $VaR_\kappa(S)$. Commenter.

(d) Pour $\kappa = 0.9$, 0.95, 0.99, et 0.995, calculer $TVaR_\kappa(X_i)$ pour $i = 1, 2, ..., 400$. Comparer $\sum_{i=1}^{400} TVaR_\kappa(X_i)$ et $TVaR_\kappa(S)$. Commenter.

8. On considère trois contrats d'assurance dont les coûts pour la prochaine année sont définis par les v.a. indépendantes X_1, X_2 et X_3 avec
$$X_i = \begin{cases} B_i, & M_i = 1 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases},$$
où $I_i \sim Bern\,(0.05i)$ et $B_i \sim Gamma\left(3.5 - i, \beta = \frac{1}{1000}\right)$.

   On définit le montant total des coûts pour le portefeuille par la $S = \sum_{i=1}^{3} X_i$.

   Questions :

   (a) Calculer $E\,[S]$ et $Var\,(S)$.

   (b) Calculer $\Pr\,(S = 0)$.

   (c) Calculer $\Pr\,(S > 1000k)$, pour $k = 1, 5, 10$.

   (d) Calculer $VaR_{0.99}\,(S)$.

9. Les pertes totales pour le portefeuille d'une institution financière est définie par la v.a. $L = L_1 + L_2$ où L_1= les pertes pour les activités d'assurance et L_2 = les pertes pour les activités bancaires.

   Pertes pour les activités d'assurance : $L_1 = S - P$ avec

   — $S = \sum_{i=1}^{100} X_i = \sum_{i=1}^{100} 1000 \times I_i$: coûts totaux pour 100 contrats d'assurance vie temporaire 1 an avec une prestation de décès de 1000 (tous les assurés sont indépendants) ;

   — $P = 5000$: montant total de primes pour financer les coûts d'assurance.

   Pertes pour les activités bancaires : $L_2 = D - T$ avec

   — $D = 5000$: montant total des sommes à rembourser pour les certificats de dépôt ;

   — $T = \sum_{i=1}^{6} Y_i = \sum_{i=1}^{6} 1000 \times J_i$: montant total des remboursements pour 6 prêts (tous les emprunteurs sont indépendants).

   Hypothèse : $I_i \sim Bern\left(\frac{1}{20}\right)$ $(i = 1, 2, ..., 100)$.
   Hypothèse : $J_i \sim Bern\left(\frac{5}{6}\right)$ $(i = 1, 2, ..., 6)$.
   Hypothèse : Les v.a. I_1, ..., I_{100}, J_1, ..., J_6 sont indépendantes.
   Questions :

   (a) Calculer $\Pr(L_1 > 0)$ et $\Pr(L_2 > 0)$. Interpréter ces deux probabilités.

   (b) Indiquer les valeurs possibles que peut prendre la v.a. L.

   (c) Écrire l'expression de $\Pr(L = 1000k)$, pour $k = -6, -5, ..., -1, 0$.

   (d) Calculer $\Pr(L = 1000k)$, pour $k = -6, -5, ..., -1, 0$.

   (e) Calculer $\Pr(L \leq 0)$.

   (f) Calculer $\Pr(L > 0)$. Interpréter cette probabilité.

10. On considère le volet incendie d'un contrat d'assurance pour un commerce. On suppose qu'au plus un incendie peut se produire au cours d'une année. Les coûts pour un contrat sont définis par la v.a. X où

$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases},$$

avec $I \sim Bern\,(0.12)$. On définit la v.a. B par

$$B = C + D$$

où la v.a C correspond aux dommages matériels au commerce et la v.a D représente les coûts résultant des pertes en affaires. On dispose de l'information suivante :

v.a.	espérance	variance
C	1000	1500^2
D	2000	4000^2

De plus, la covariance entre C et D est de 1800000.

On suppose que la compagnie prévoit émettre $n = 500$ de ces contrats dont les coûts sont i.i.d. Les coûts totaux sont définis par la v.a. S. On définit également la v.a du coût moyen par contrat par $\overline{X}_n = \frac{S}{n}$.

Questions :

(a) Calculer $E\,[X]$ et $Var\,(X)$.

(b) Calculer $E\,[S]$ et $Var\,(S)$.

(c) Soit une v.a $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. i.e. $Y = \mu + \sigma Z$, $Z \sim N(0,1)$. Montrer que

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa\,(Y) &= \mu + \frac{1}{1-\kappa}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &= \mu + \sigma TVaR_\kappa\,(Z)\,. \end{aligned}$$

(d) Utiliser l'approximation normale pour calculer $CE_\kappa\,(S) = VaR_\kappa\,(S) - E\,[S]$ si on utilise la mesure $VaR_\kappa\,(S)$ avec $\kappa = 0.995$.

(e) Utiliser l'approximation normale pour calculer $CE_\kappa\,(S) = TVaR_\kappa\,(S) - E\,[S]$ si on utilise la mesure $TVaR_\kappa\,(S)$ avec $\kappa = 0.995$.

(f) Utiliser l'approximation normale pour évaluer la prime majorée $\Pi_n^{VaR}\,(X) = VaR_{0.95}\left(\overline{X}_n\right)$ pour $n = 500$. Quel est le comportement de $\Pi_n^{VaR}\,(X)$ lorsque n augmente ? Expliquer brièvement ce comportement.

(g) Utiliser l'approximation normale pour évaluer la prime majorée $\Pi_n^{TVaR}\,(X) = TVaR_{0.95}\left(\overline{X}_n\right)$ pour $n = 500$. Quel est le comportement de $\Pi_n^{TVaR}\,(X)$ lorsque n augmente ? Expliquer brièvement ce comportement.

11. On considère un portefeuille de 100 titres avec risque de défaut. Tous les titres sont i.i.d. Le coût pour un titre est défini par la v.a. X avec

$$X = 5000I$$

où $I \sim Bern\,(q)$. Pour 60 contrats $q = 0.01$ et pour les 40 autres contrats $q = 0.02$. Les coûts totaux pour le portefeuille est défini par $S = 5000N$ où N est le nombre de défauts. On a obenu les valeurs suivantes pour la v.a. N :

k	$\Pr(N = k)$	$F_N\,(k)$
0	0.243868	0.243868
1	0.346875	0.590743
2	0.243917	0.834660
3	0.113047	0.947706
4	0.038844	0.986551
5	0.010554	0.997105
6	0.002362	0.999467
7	0.000448	0.999915
8	0.000073	0.999988
9	0.000011	0.999998
10	0.000001	1.000000
11	0.000000	1.000000
12	0.000000	1.000000

Questions :

(a) Calculer le capital économique associé à ce portefeuille si on utilise la mesure $VaR_{0.99}\,(S)$.

(b) Calculer le capital économique associé à ce portefeuille si on utilise la mesure $TVaR_{0.99}\,(S_{TOT})$.

12. On considère un portefeuille de 1000 contrats d'assurance habitation de la compagnie d'assurance FGH. La v.a. X_i correspond aux coûts (en milliers \$) du contrat i, avec $E[X_i] = 2$ et $Var(X_i) = 49$ ($i = 1, 2, ...$,1000). On définit les coûts totaux pour le portefeuille par la v.a. $S_{1000} = \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Une prime $\pi_i = (1+\theta) \times E[X_i]$ est chargée pour le contrat i, $i = 1, 2, ...$,1000, où $\theta = 10\%$. On définit la probabilité de ruine $\psi_{1000}(u)$ par la probabilité que la compagnie ne rencontre pas ses engagements si $\theta = 10\%$. La probabilité de ruine ψ_{1000} est évaluée à l'aide de l'approximation normale. L'actuaire A évalue ψ_{1000} en supposant que les coûts des contrats sont indépendants. Chargé de reviser le travail de A, l'actuaire B a constaté que l'hypothèse d'indépendance n'est pas tout à fait appropriée. En effet, le processus de sélection des risques n'a pas été fait correctement. La compagnie d'assurance a émis des contrats à des propriétaires de maisons en rangée. En fait, l'ensemble des 1000 contrats se subdivise en 200 unités de 5 maisons en rangée. L'actuaire B constate aussi que les unités sont suffisamment éloignées de telles sorte que l'hypothèse d'indépendance est justifiée entre les unités. La covariance entre les coûts de deux maisons d'une même unité est de 25.

    Questions :

    (a) Évaluer la probabilité de ruine selon l'approche de l'actuaire A. Expliquer brièvement comment appliquer le théorème central limite.

    (b) Évaluer la probabilité de ruine selon l'approche de l'actuaire B. Expliquer brièvement comment appliquer le théorème central limite.

13. Pour une exposition à un risque spécifique i, les coûts au cours de la prochaine année pour un portefeuille sont définis par la v.a.

$$X_i = \begin{cases} D_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases}$$

où les v.a. $I_i \sim Bern\,(q_i = 0.1i)$ $(i = 1, 2)$, $D_i \sim Gamma\left(\alpha = i, \beta_i = \frac{1}{1000}\right)$ $(i = 1, 2)$. Les v.a. D_1 et D_2 sont indépendantes entre elles et indépendantes du couple (I_1, I_2). On sait que $\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) = 0.06$. On définit les coûts totaux pour le portefeuille par la v.a. $S = X_1 + X_2$.

On dispose des valeurs suivantes de la fonction de répartition d'une loi gamma avec paramètres α et $\beta = \frac{1}{1000}$:

α	1	2	3	4	5
$H\left(4000; \alpha, \beta = \frac{1}{1000}\right)$	0.9817	0.9084	0.7619	0.5665	0.3712

Questions :

(a) Calculer $F_S\,(4000)$.

(b) Calculer $E\,[\min\,(S; 4000)]$.

14. En 2009, le marché est composé de deux compagnies d'assurance vie : les compagnies ABC et DEF, qui offrent des contrats d'assurance vie temporaire 1 an. En 2009, $2n$ nouveaux assurés vont acheter des contrats d'assurance vie temporaire 1 an pour la première fois. Pour calculer les primes des contrats, les deux compagnies utilisent les données de l'Agence centrale des renseignements en assurance (ACRA), recueillies en 2008. L'échantillon est constitué de l'expérience de 28375 contrats répartis en deux classes. Ces classes sont basées sur des caractéristiques facilement observables et connues des deux compagnies lors de l'émission d'un contrat. L'expérience relative au nombre de contrats et au nombre de décès pour l'année 2008 est fournie dans le tableau ci-dessous. Pour chaque classe et pour l'ensemble des données, on indique la valeur de l'estimateur (selon la méthode du maximum de vraisemblance) du paramètre q (probabilité de décès) de la loi Bernoulli :

	Classe 1	Classe 2	Les deux classes
Nb de contrats	14432	13943	28375
Nb de décès	124	351	475
Estimé de q	$\frac{124}{14432} = 0.008592$	$\frac{351}{13943} = 0.025174$	$\frac{475.0}{28375} = 0.016740$

Pour tous les $2n$ contrats, le montant de prestation est $b = 1000$. L'actuaire de la compagnie ABC charge des primes qui ne tiennent pas compte des caractéristiques observables. L'actuaire de la compagnie DEF charge des primes qui tiennent compte des caractéristiques observables. Pour les deux compagnies, la prime chargée est égale à 120% de la prime pure. **Tous les $2n$ nouveaux assurés demandent une évaluation aux deux compagnies d'assurance et choisissent la plus petite prime.** Les $2n$ nouveaux assurés se répartissent également dans les deux classes. La probabilité de ruine pour la compagnie ABC (et DEF) est $\psi_n^{ABC}(u)$ (et $\psi_n^{DEF}(u)$) avec un surplus $u = 0$.

Questions :

(a) Calculez les primes possibles qui peuvent être demandées par chaque compagnie d'assurance. Vous êtes actuaire au sein d'un cabinet conseil. En vous basant sur les informations fournies, expliquez brièvement laquelle des approches des deux actuaires est la plus appropriée.

(b) Pour la compagnie ABC, calculer le revenu total de primes (motiver brièvement votre réponse). Selon vous, qu'elle est la valeur (exacte) de $\psi_n^{ABC}(0)$ pour $n = 200$?

(c) Pour la compagnie DEF, calculer le revenu total de primes (motiver brièvement votre réponse). Selon vous, qu'elle est la valeur (exacte) de $\psi_n^{DEF}(0)$ pour $n = 200$?

(d) **Sans utiliser l'approximation normale** et en vous basant sur votre opinion, démontrer vers quelle limite tend $\psi_n^{ABC}(0)$ quand $n \to \infty$. Commenter brièvement votre résultat.

(e) **Sans utiliser l'approximation normale** et en vous basant sur votre opinion, démontrer vers quelle limite tend $\psi_n^{DEF}(0)$ quand $n \to \infty$. Commenter brièvement votre résultat.

15. Soit le portefeuille constitué de deux risques représentés par les v.a. indépendantes X_1 et X_2 avec

$$\mathcal{L}_{X_1}(t) = 1 - q_1 + q_1 \times \frac{\beta_1}{\beta_1 + t}$$

et

$$\mathcal{L}_{X_2}(t) = 1 - q_2 + q_2 \times \frac{\beta_2}{\beta_2 + t}$$

pour $t \geq 0$.
Hypothèses : $q_1 = 0.05$, $q_2 = 0.1$, $\beta_1 = \frac{1}{2000}$ et $\beta_2 = \frac{1}{1000}$.
Questions :

(a) Calculer $E[X_1]$, $E[X_2]$ et $E[S]$.
(b) Développer l'expression de $F_S(x)$.
(c) Développer l'expression de $\pi_S(x) = E[\max(S - x; 0)]$
(d) Calculer $\kappa = F_S(5000)$ et $TVaR_\kappa(S)$.

16. On considère un portefeuille homogène de risques échangeables X_1, ..., X_n où

$$X_i = I_i \times B_i$$

avec $B_i \sim LNorm\,(\mu = 2, \sigma = 0.9)$ pour $i = 1, 2, ..., n$.
Soit la v.a. mélange $\Theta \sim Beta\,(\alpha = 2, \beta = 18)$.
On a

$$(I_i|\Theta = \theta) \sim Bern\,(\theta)$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
De plus, $(I_1|\Theta = \theta)$, ..., $(I_n|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes.
Enfin, B_1, ..., B_n et $(I_1, ..., I_n)$ sont indépendants.
On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$.
La mesure de risque φ_κ attribuée à une v.a. Y est définie par

$$\varphi_\kappa\,(Y) = E\,[Y] + \sqrt{\mathrm{Var}\,(Y)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$

Questions :

(a) Calculer $E\,[I_1]$ et $Var\,(I_1)$.

(b) Calculer $E\,[X_1]$ et $Var\,(X_1)$.

(c) Calculer $\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)$.

(d) Calculer $E\,[S_n]$ et $\mathrm{Var}\,(S_n)$ pour $n = 200$.

(e) On fixe $\kappa = 95\%$ et $n = 200$.

   i. Calculer $\varphi_\kappa\,(X_1)$ et $\varphi_\kappa\,(S)$ et calculer le bénéfice de mutualisation.

   ii. Commenter sur la valeur du bénéfice de mutualisation en mentionnant clairement la (ou les) propriété(s) concernée(s)

17. Soit la v.a. $\Theta \sim Bern\,(0.2)$.
Soient les v.a. strictement positives X_1, ..., X_n où, sachant $\Theta = \theta$,

$$(X_1|\Theta = \theta)\,, ..., (X_n|\Theta = \theta)$$

sont conditionnellement indépendantes, et

$$E\,[X_i|\Theta = \theta] = 1 + 5\theta,$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$ et $W_n = \frac{S_n}{n}$.
Questions :

(a) Calculer $\lim_{n\to\infty} E\,[W_n|\Theta = 0]$ et $\lim_{n\to\infty} E\,[W_n|\Theta = 1]$.

(b) Calculer $\lim_{n\to\infty} E\,[W_n]$.

(c) Calculer $\lim_{n\to\infty} Var\,(W_n)$.

(d) En utilisant la transformée de Laplace-Stieljes (notation : $L_Y\,(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tY}\right]$ pour une v.a. positive Y), démontrer que W_n tend en distribution vers la v.a. Z où

$$\Pr\,(Z = z_0) = \Pr\,(\Theta = 0)$$

et

$$\Pr\,(Z = z_1) = \Pr\,(\Theta = 1)$$

avec $z_0 = \lim_{n\to\infty} E\,[W_n|\Theta = 0]$ et $z_1 = \lim_{n\to\infty} E\,[W_n|\Theta = 1]$.

i. Étape 1 : Identifier $\lim_{n\to\infty} L_{W_n|\Theta=0}\,(t)$.

ii. Étape 2 : Identifier $\lim_{n\to\infty} L_{W_n|\Theta=1}\,(t)$.

iii. Étape 3 : Identifier $\lim_{n\to\infty} L_{W_n}\,(t)$ et conclure.

18. On considère un portefeuille homogène de risques échangeables X_1, ..., X_n où

$$E\left[X_i|\Theta\right] = \Theta \times 5$$

et

$$Var\left(X_i|\Theta\right) = \Theta \times 10$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
Soit la v.a. mélange $\Theta \sim Gamma\left(\alpha = 2, \beta = 2\right)$.
De plus, $\left(X_1|\Theta = \theta\right), ..., \left(X_n|\Theta = \theta\right)$ sont conditionnellement indépendantes.
Les coûts par contrat sont définis par la v.a. $W_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + ... + X_n\right)$.
Questions :

(a) Développer les expressions de $E\left[W_n|\Theta\right]$ et $Var\left(W_n|\Theta\right)$.

(b) On décompose $Var\left(W_n\right)$ en deux termes :

$$\begin{array}{ll} \text{composante diversifiable :} & E_\Theta\left[Var\left(W_n|\Theta\right)\right] \\ \text{composante non-diversifiable :} & Var_\Theta\left(E\left[W_n|\Theta\right]\right) \end{array}$$

Développer les expressions de $E_\Theta\left[Var\left(W_n|\Theta\right)\right]$ et $Var_\Theta\left(E\left[W_n|\Theta\right]\right)$.

(c) Pour $n = 20$ contrats, calculer $E\left[W_n\right]$ et $Var\left(W_n\right)$ pour $n = 20$.

(d) Pour $n \to \infty$,

— calculer $\lim\limits_{n\to\infty} E\left[W_n\right]$;

— calculer $\lim\limits_{n\to\infty} Var\left(W_n\right)$;

— calculer $\lim\limits_{n\to\infty} E_\Theta\left[Var\left(W_n|\Theta\right)\right]$;

— calculer $\lim\limits_{n\to\infty} Var_\Theta\left(E\left[W_n|\Theta\right]\right)$;

— commenter les résultats obtenus des trois limites en regard de la mutualisation des risques.

(e) Utiliser la transformée de Laplace-Stieltjes pour démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n}\left(x\right) = F_Z\left(x\right)$$

où $Z \sim Gamma\left(\alpha = 2, \beta = \frac{2}{5}\right)$. Comparer $E\left[W_n\right]$ et $E\left[Z\right]$. Calculer $VaR_\kappa\left(Z\right)$, pour $\kappa = 0.01$ et 0.99.

19. Soient les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$, $Y_1, ..., Y_n$ et Z avec les informations suivantes

$$\begin{aligned} E[X_i] &= 100 \ (i = 1, ..., n) \\ E[Y_i] &= 200 \ (i = 1, ..., n) \\ E[Z] &= 1.11 \\ Var(X_i) &= 300^2 \ (i = 1, ..., n) \\ Var(Y_i) &= 500^2 \ (i = 1, ..., n) \\ Var(Z) &= 0.03. \end{aligned}$$

On définit la v.a. $W_i = (X_i + Y_i) \times Z$ $(i = 1, 2, ..., n)$ et $S_n = W_1 + ... + W_n$. On considère W_i comme étant les coûts futurs pour la prochaine période de l'entité $i = 1, ..., n$. La v.a. X correspond au facteur d'indexation.

Questions :

(a) Calculer l'espérance de S_n pour $n = 10$.

(b) Calculer la variance de S_n pour $n = 10$.

(c) On examine le comportement de $Var\left(\frac{S_n}{n}\right)$. On décompose

$$Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \left(\frac{E_Z\left[Var\left(\frac{S_n}{n}|Z\right)\right]}{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)} + \frac{Var_Z\left(E\left[\frac{S_n}{n}|Z\right]\right)}{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}\right) Var\left(\frac{S_n}{n}\right).$$

On a

— $\frac{E_R\left[Var\left(\frac{S_n}{n}|R\right)\right]}{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}$: le % de la variabilité des coûts expliqués par la diversication des risques (risque diversifiable) ;

— $\frac{Var_R\left(E\left[\frac{S_n}{n}|R\right]\right)}{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}$: le % de la variabilité des coûts expliqués par le facteur d'indexation (risque non diversifiable).

Calculer ces deux pourcentages pour $n = 10$, 1000 et 1000000.

20. Pour la prochaine, la compagnie ABC Life d'assurance vie prévoit émettre n contrats d'assurance temporaire 1 an. Pour tous les contrats, le montant de prestation en cas de décès est de \$1000. Pour tous les assurés, on suppose que la probabilité de décès est de 2%.

    — On suppose que le montant réclamé pour le contrat j est désigné par la v.a. X_j.

    — On considère que les assurés feront partie de la même catégorie (i.e. que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont identiquement distribuées).

    — Pour $j = 1, ..., n$, on suppose
    $$\Pr(X_j = 0) = 0.98$$
    et
    $$\Pr(X_j = 1000) = 0.02$$

    — On suppose que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes.

    Questions :

    (a) Calculer l'espérance du montant qui peut être versé pour un contrat.

    (b) La compagnie demande une prime égale à 2 fois l'espérance pour chaque contrat. Pour $n = 1$, 2, 20 et 50, calculer la probabilité que la compagnie n'ait pas suffisamment d'argent pour rencontrer ses engagements envers l'assuré.

    (c) Refaire le calcul de (b) pour une prime égale à 3 fois l'espérance.

21. La compagnie d'assurance vie ABC Vie émet des contrats d'assurance vie temporaire 1 an à 10 hommes et à 10 femmes. Le contrat prévoit le paiement de \$100 en cas de décès.

    — La probabilité de décès pour un homme est $q^H = 0.05$.
    — La probabilité de décès pour une femme est $q^F = 0.03$.
    — Le montant réclamé pour le contrat i où l'assuré est un homme est X_i, $i = 1, ..., 10$.
    — Le montant réclamé pour le contrat i où l'assuré est une femme est Y_i, $i = 1, ..., 10$.
    — On définit par S le montant total qui sera réclamé par les 20 assurés au cours de l'année 2000

    $$S = \sum_{i=1}^{10} X_i + \sum_{i=1}^{10} Y_i.$$

    — On suppose que les v.a. $X_1, ..., X_{10}$ sont identiquement distribuées.
    — On suppose que les v.a. $Y_1, ..., Y_{10}$ sont identiquement distribuées.

    Questions :

    (a) Calculer $E[S]$ et $Var(S)$ en supposant que toutes les v.a. sont indépendantes.

    (b) Après coup, l'actuaire de la compagnie s'aperçoit que le service de souscription avait oublié de lui dire que les hommes et les femmes étaient en couple. En fait, on avait assuré 10 couples. En potassant un peu, il constate qu'il doit refaire les calculs en (a), car il a établi que, pour la femme et l'homme d'un même couple, on

    Pr(l'homme décède, la femme décède)=0.01
    Pr(l'homme décède, la femme ne décède pas)=0.04
    Pr(l'homme ne décède pas, la femme décède)=0.02
    Pr(l'homme ne décède pas, la femme ne décède pas)=0.93.

22. On considère un portefeuille de 60 contrats de classe A et 40 contrats de classe B d'assurance vie temporaire 1 an émis par la compagnie d'assurance vie ABC.

    — Contrat de classe A : La prestation de décès est de 1000$.

    — Contrat de classe B : La prestation de décès est de 2000$.

    — Tous les (100) assurés ont des durées de vie indépendantes. Pour tous les (100) assurés, la probabilité de décès est q.

    — On définit par S^{TOT} le montant total de prestations de décès pour le portefeuille au cours de l'année 2004.

    — La prime pour le contrat A est égale à 150% de l'espérance des coûts du contrat A.

    — La prime pour le contrat B est égale à 150% de l'espérance des coûts du contrat B.

    — On sait que
    $$\Pr\left(S^{TOT} = 0\right) = 0.36603234.$$

    Questions :

    (a) Calculer les primes π^A et π^B pour les contrats A et B.

    (b) Calculer la probabilité que la compagnie d'assurance ABC ne rencontre pas ses engagements.

23. On considère un contrat d'assurance-habitation pour le volet protection incendie pour la résidence unifamiliale seulement. On suppose qu'au plus un incendie peut survenir pour une résidence au cours d'une année. Les coûts pour un contrat sont définis par X où

$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases}.$$

avec $E[I] = 0.1$ et $B = U \times c$. La v.a. U représente le pourcentage de dommage (qui prend des valeurs entre 0 et 1) et la constante c représente la valeur de la résidence. Les v.a. U et I sont indépendantes. On suppose que

$$\begin{aligned} \Pr\left(U = \frac{1}{2}\right) &= 0.6 \\ \Pr\left(U = \frac{2}{2}\right) &= 0.4 \end{aligned}$$

et que $c = 200000$. On suppose que le même type de contrat est émis à 4 résidences. Les contrats sont supposés indépendants. On définit la v.a. S_4 par

$$S_4 = X_1 + ... + X_4$$

en prenant la convention que $X_i \sim X$, $i = 1, 2, 3, 4$.
Questions :

(a) Indiquer les valeurs possibles que peut prendre S_4.
(b) Calculer l'espérance et la variance de S_4.
(c) Calculer $\Pr(S_4 = 100000k)$, pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

24. Au 1.1.2006, une institution financière ABC a émis 200 certificats de dépôt d'un an avec un taux de rendement de 5%. Les certificats de dépôt ont tous un capital b en vigueur de 1000\$. La valeur payée par les investiseurs individuels (déposants) correspond à la valeur actualisée de b, i.e. dépôt $= \frac{1000}{1.05}$. On suppose que l'institution ABC versera le capital à l'échéance avec certitude.

    A la même date, l'institution ABC a émis $n = 100$ prêts d'un an avec un capital c en vigueur. Le capital est à rembourser à l'échéance. Un emprunteur a une probabilité de défaut de 2.77% de ne pas payer le capital à échéance i.e. en cas de défaut, l'emprunteur ne remboursera pas la totalité du capital c du prêt. La valeur prêtée par l'institution correspond à l'espérance de la valeur présente (actualisée) du montant qui peut être recourvert par l'institution ABC i.e. montant prêté $= \frac{c}{1.05} \times 0.9723$.

    Le montant c est calculé de telle sorte que le montant total reçu en dépôt est égal au montant total prêté au 1.1.2006.

    On suppose l'indépendance entre les emprunteurs et les déposants.

    Un organigramme des opérations est donné ci-dessous :

    $\boxed{\text{Investisseurs individuels (déposants)}} \leftrightarrow \boxed{\text{Institution ABC}} \leftrightarrow \boxed{\text{Emprunteurs individuels}}$

    Questions :

    (a) Faire le développement pour déterminer l'expression du montant prêté pour un prêt.

    (b) Calculer c.

    (c) Calculer les revenus nets réalisés par l'institution ABC au 31.12.2006 si un défaut seulement se réalise. Calculer la probabilité que cet évèvement se réalise.

    (d) Calculer la probabilité que l'institution puisse rencontrer ses engagements.

    (e) On définit le gain G pour l'institution ABC par la différence entre le montant total des remboursements des prêts et le montant total à verser pour les dépôts. Calculer l'espérance et l'écart-type de G pour $n = 1, 10$, et 100.

25. On considère un portefeuille avec deux contrats d'assurance pour soins de santé et médicaments. Les coûts pour les contrats 1 et 2 sont modélisés selon l'approche forfaitaire avec

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases} .$$

Les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes. On suppose que $I_i \sim Bern(q_i)$ avec $q_i = 0.1 \times i$ et $B_i \sim Exp(\beta_i)$ avec $\beta_i = 0.0005 \times i$. Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a. $S = X_1 + X_2$.

Questions :

(a) Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.

(b) Calculer la probabilité que les coûts totaux pour le portefeuille soient inférieurs à 4000$.

26. On considère un portefeuille de 20000 contrats d'assurance-habitation pour le volet protection incendie pour la résidence unifamiliale seulement.

— Les coûts pour le contrat i sont définis par X_i où

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, M_i > 0 \\ 0, M_i = 0 \end{cases},$$

les v.a. $B_{i,1}, B_{i,2}, ...$ sont i.i.d. et indépendantes de la v.a. de fréquence M_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Par convention, on note $B_{i,k} \sim B_i$ $(i = 1, 2, ..., n\,;\, k = 1, 2, ...)$.

— On suppose que

$$B_i = U_i \times c_i,$$

où la v.a. U_i représente le pourcentage de dommage (qui prend des valeurs entre 0 et 1) et la constante c_i représente la valeur de la résidence. Pour chaque i, les v.a. U_i et M_i sont indépendantes.

— Les résidences sont classées selon deux types de structures. On a les informations suivantes :

	$E[U_i]$	$Var[U_i]$	$E[M_i]$	$Var(M_i)$
Type A	0.2	0.0225	0.021	0.024
Type B	0.5	0.0100	0.035	0.043

— Les résidences sont classées aussi selon leur valeur. La répartition des contrats selon le type et la valeur de la résidence est la suivante :

	Valeur $= c_i = 200$	Valeur $= c_i = 300$	Total
Type A	3000	6000	9000
Type B	7000	4000	11000
Total	10000	10000	20000

— Tous les contrats sont supposés indépendants.

— On définit les coûts totaux pour le portefeuille par

$$S_{20000} = X_1 + ... + X_{20000}.$$

Questions :

(a) Calculer $E[S_{20000}]$ et $Var[S_{20000}]$.

(b) On a recourt à l'approximation normale pour évaluer la somme κ_{20000} à mettre de côté de telle sorte que $\Pr(S_{20000} \leq \kappa_{200000}) = 99\%$.

27. Trois contrats d'assurance maladie sont émis.

   — La durée de couverture est d'un an. On définit par la v.a. X_i le montant qui peut être réclamé au cours de la prochaine année pour l'assuré i (Note : X_i peut être nulle). On suppose que la probabilité qu'au moins une réclamation se produise est de 15% (i.e. $\Pr(I_i = 1)$=15% pour tout i). Si au moins une réclamation se produit, le montant B_i (en milliers \$) obéit à une loi Gamma($\alpha = 2, \beta = 1$). Pour chaque i ($i = 1, 2, 3$), les v.a. I_i et B_i sont indépendantes. On définit $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$. Les v.a. X_i ($i = 1, 2, 3$) sont indépendantes.

   — Données : Supposons que $Y \sim Gamma(\alpha, 1)$. Tableau de $F_Y(y)$

y	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 6$
2	0.5939942	0.1428765	0.01656361
4	0.9084218	0.5665299	0.21486961

   Questions :

   (a) Calculer $E[S_3], Var(S_3)$.

   (b) Calculer $\Pr(S_3 = 0), \Pr(S_3 \leq 2), \Pr(S_3 > 4)$.

28. Deux contrats d'assurance maladie sont émis.

— La durée de couverture est d'un an. On définit par la v.a. X_i le montant qui peut être réclamé au cours de la prochaine année pour l'assuré i (Note : X peut être nulle). On suppose que la probabilité qu'au moins une réclamation se produise est de q_i (i.e. $\Pr(I_i = 1) = q_i\%$). Si au moins une réclamation se produit, le montant total B_i (en milliers \$) obéit à une loi Gamma$(\alpha_i, \beta = 1)$. Pour chaque i $(i = 1, 2)$, les v.a. I_i et B_i sont indépendantes. On définit $S_2 = X_1 + X_2$. Les v.a. B_i $(i = 1, 2)$ sont indépendantes.

— Données :

(a) On suppose que $Y \sim Gamma(\alpha, 1)$. Tableau de $F_Y(y)$

y	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 6$
2	0.5939942	0.1428765	0.01656361
4	0.9084218	0.5665299	0.21486961

(b) On suppose que $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 4$ et $q_1 = 5\%$ et $q_2 = 10\%$

Questions :

(a) On suppose que les I_i $(i = 1, 2)$ sont indépendantes.

i. Calculer $E[S_2], Var[S_2]$.

ii. Calculer $\Pr(S_2 = 0), \Pr(S_2 \leq 2), \Pr(S_2 > 4)$.

iii. Calculer $\Pr(X_1 = 0, X_2 \leq 4)$ et $\Pr(X_1 > 2, X_2 \leq 4)$.

iv. On suppose que

$$\begin{aligned}
\Pr(I_1 &= 0, I_2 = 0) = 0.89 \\
\Pr(I_1 &= 1, I_2 = 0) = 0.01 \\
\Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) = 0.06 \\
\Pr(I_1 &= 1, I_2 = 1) = 0.04
\end{aligned}$$

A. Calculer $E[S_2], Var(S_2)$.

B. Calculer $\Pr(S_2 = 0), \Pr(S_2 \leq 2), \Pr(S_2 > 4)$.

C. Calculer $\Pr(X_1 = 0, X_2 \leq 4)$ et $\Pr(X_1 > 2, X_2 \leq 4)$.

29. Pour l'année 2000, la compagnie ABC General d'assurance générale prévoit émettre n contrats d'assurance automobile. Les actuaires A et B travaillent sur le projet d'identifier le risque que cela pourra représenter pour la compagnie.

    — On suppose que le montant total que le contrat j peut réclamer est désigné par la v.a. X_j.

    — Tous les deux considèrent que les voitures (et leurs conducteurs) assurées feront partie de la même catégorie (i.e. que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont identiquement distribuées).

    — Tous les deux conviennent que la probabilité qu'un assuré réclame au cours d'une année est de 5%.

    — L'actuaire A prétend que le montant réclamé à tout coup est de \$1000.

    — L'actuaire B croit plutôt que le montant réclamé est une v.a. aléatoire de loi exponentielle de paramètre 0.001 (moyenne $= \frac{1}{0.001} = \$1000$).

    — Tous les deux conviennent que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes.

    — On définit par S_n le montant total qui sera réclamé par les n assurés au cours de l'année 2000

    $$S_n = X_1 + ... + X_n = \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

    Questions : (selon les points de vue de A et B)

    (a) Calculer l'espérance $E[X]$ et la variance $Var\,(X)$ du montant qui peut être réclamé par un contrat.

    (b) Calculer l'espérance, $E[S_{200}]$, et la variance, $Var\,(S_{200})$, du montant total de réclamations que la compagnie peut avoir à verser au cours de l'année 2000. Dans quel cas, la variance est la plus élévée.

    (c) La compagnie demande une prime égale à $1.2 \times E[X]$ par contrat. Pour $n = 200$, utiliser l'Approximation Normale pour calculer la probabilité que la compagnie n'ait pas suffisamment d'argent pour rencontrer ses engagements envers les assurés.

    (d) La compagnie demande une prime égale à $E[X] + 2\%(Var\,(X))^{1/2}$ par contrat. L'actuaire A calcule une prime selon ses hypothèses et l'actuaire B calcule une prime selon ses hypothèses. Supposons en fait que c'était l'actuaire B qui avait vu juste, c'est-à-dire que ses hypothèses décrivent adéquatement la réalité. Pour $n = 200$, utiliser l'Approximation Normale pour calculer la probabilité que la compagnie n'ait pas suffisamment d'argent pour rencontrer ses engagements envers les assurés

30. On considère un portefeuille homogène de trois contrats d'assurance automobile. Pour une année, le comportement aléatoire des coûts pour un contrat est similaire et indépendant à celui des autres contrats. Les coûts pour un contrat individuel sont représentés par la v.a. X où

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, M > 0 \\ 0, M = 0 \end{cases},$$

où la v.a. M représente le nombre de sinsitres encourus pendant l'année et B_k est le montant (la gravité) du $k$ième sinistre. Les v.a. B_1, B_2,... sont i.i.d. et indépendantes de M.
On suppose que la montant d'un sinistre obéit à une loi Gamma de paramètres $\alpha = 2$ et $\beta = 0.002$.
On suppose que

$$M \sim Bin(3, 0.1).$$

Les coûts pour l'ensemble du portefeuille sont représentés par la v.a. S_3 où

$$S_3 = X_1 + X_2 + X_3.$$

Quelques questions :

(a) Calculer $\Pr(S_3 = 0)$.
(b) Calculer $E[S_3]$ et $Var\,(S_3)$.
(c) Calculer la probabilité que 4 sinistres se produisent pour l'ensemble du portefeuille pendant l'année.
(d) Calculer la probabilité $\Pr(S_3 > 1500)$.

31. Une compagnie d'assurance veut émettre n contrats d'assurance responsabilité médicale.

— On définit par la v.a. X_i le montant qui peut être réclamé au cours de la prochaine année pour le contrat i

$$X_1 = (1+R)Y_1, ..., X_n = (1+R)Y_n$$

où $Y_i = \begin{cases} B_i, I_i = 1 \\ 0, I_i = 0 \end{cases}$.

— Les v.a. $I_1, ..., I_n$ sont i.i.d. Pour $i = 1, ..., n, I_i \sim Bern(0.20)$.

— Les v.a. $B_1, ..., B_n$ sont i.i.d. Pour $i = 1, ..., n, B_i \sim Exp(\lambda = \frac{1}{10})$ i.e. de moyenne 10.

— L'actuaire croit que les coûts encourus pour tous les contrats vont être multipliés par le (**même**) facteur $(1+R)$ pour la prochaine année, où R est une v.a. discrète

r	$P(R=r)$
0.10	0.7
0.30	0.3

— Les v.a. $I_1, ..., I_n, B_1, ..., B_n, R$ sont indépendantes.

— On définit par la v.a. S_n le coût total pour le portefeuille

$$S_n = X_1 + ... + X_n.$$

— Tableau : Soit une v.a. $U \sim Gamma(\alpha, \beta = \frac{1}{10})$ avec

u	$\Pr(U \leq u)$ pour $\alpha = 1$	u	$\Pr(U \leq u)$ pour $\alpha = 2$
$\frac{20}{1.3}$	0.785	$\frac{20}{1.3}$	0.455
$\frac{20}{1.1}$	0.838	$\frac{20}{1.1}$	0.542
20	0.865	20	0.597
20 (1.1)	0.889	20 (1.1)	0.645
20 (1.3)	0.926	20 (1.3)	0.733

Questions :

(a) Pour n =4, calculer $\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 \leq 20, X_4 \leq 20)$.(**Indice** : conditionner sur la v.a. R)

(b) Pour n =2, calculer $\Pr(S_n \leq 20)$. (**Indice** : conditionner sur la v.a. R)

(c) Pour $n = 100$, calculer $\Pr(S_n \leq 300)$ en utilisant l'approximation normale (qui se base sur T.C.L.) de façon **appropriée**. (**Indice** : conditionner sur la v.a. R)

32. On considère le portefeuille d'une compagnie d'assurance IARD. Le portefeuille est composé de deux lignes d'affaires : assurance automobile aux particuliers et assurance habitation aux particuliers.

    On suppose que tous les risques individuels sont indépendants.

    Informations utiles :

    — Assurance habitation : Modèle fréquence sévérité pour les coûts pour un contrat.

Classe	Nb	$E[X]$	$Var(X)$
1	700	3000	80×1000^2
2	500	6000	320×1000^2
Total	1000	–	–

    — Assurance automobile : Modèle fréquence sévérité pour les coûts pour un contrat.

Classe	Nb	$E[X]$	$Var(X)$
1	900	800	20×1000^2
2	400	1200	15×1000^2
Total	1500	–	–

    L'actuaire utilise l'approximation normale.

    Questions :

    (a) Calculer l'espérance et la variance du montant total des coûts pour l'ensemble du portefeuille.

    (b) Calculer le montant total nécessaire pour l'ensemble du portefeuille de telle sorte que la compagnie d'assurance puisse rencontrer ses engagements avec une probabilité de 99%.

33. Une compagnie d'assurance veut émettre n contrats d'assurance responsabilité médicale. On définit par la v.a. X_i le montant qui peut être réclamé au cours de la prochaine année pour le contrat i

$$X_1 = (1+R)Y_1, ..., X_n = (1+R)Y_n \ .$$

Les v.a. $Y_1, ..., Y_n, R$ sont indépendantes. Le taux d'indexation R (pour la prochaine année) est une v.a. discrète

r	$P(R=r)$
0.10	0.7
0.30	0.3

On sait que

$$\begin{aligned} E[Y_i] &= 10 \\ Var(Y_i) &= 900, \end{aligned}$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
On définit par la v.a. S_n le coût total pour le portefeuille

$$S_n = X_1 + ... + X_n.$$

Une prime de 12 est chargée pour chaque contrat. On définit la probabilité de ruine $\psi_n(u)$ où

$$\psi_n(0) = \Pr\left(S_n > \sum_{i=1}^{n} prime_i\right)$$

et $u = 0$ est le capital initial.
Résultats utiles : Soit la v.a. T_n définie par

$$T_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$$

Avec l'inégalité de Cheby et pour $\alpha > 1$ et $0 < \beta < 1$, on a montré que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(T_n > \alpha E[T_n]) \to 0 \tag{5.1}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(T_n > \beta E[T_n]) \to 1. \tag{5.2}$$

Questions :

(a) Calculer la prime ainsi que l'espérance et la variance de S_n.
(b) Montrer (5.1) et (5.2).
(c) Calculer vers quelle valeur tend la limite, lorsque $n \to \infty$, de la probabilité de ruine ψ_n. (**Suggestions :** conditionner sur la v.a. R et utiliser les résultats).
(d) Commenter brièvement l'assertion suivante : *Plus la compagnie d'assurance émet de contrats, plus elle est certaine de renconter ses engagmentss.*

34. On considère un groupe de n compagnies de réassurance qui assure un ensemble de m plateformes de forage. Les plateformes représentent des risques similaires et indépendants. On définit par la v.a. X les coûts en dommages possibles pour une plateforme au cours de le prochaine année

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, M > 0 \\ 0, \ M = 0 \end{cases} ,$$

où M est une v.a. positive discrète et les v.a. $B_1, B_2, ...$ sont i.i.d. et indépendantes de la v.a. M. On fait la convention que

$$B_1 \sim B_2 \sim ... \sim B$$

avec

$$B \sim Gamma\,(0.2, 0.0002)\,.$$

On suppose que

$$M \sim Poisson(0.1).$$

Les compagnies de réassurance assument une part égale des coûts pour chaque plateforme de forage. On prend la convention que la fonction de répartition évaluée à x d'une v.a. Y avec une loi $Gamma\,(\alpha, \beta)$ est notée $\Gamma(x; \alpha; \beta) = F_Y(x)$ et son espérance est $\frac{\alpha}{\beta}$.

Quelques données :

x	$\frac{2000}{20}$	$\frac{2000}{10}$	2000	10×2000	20×2000
$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(0.1)^j e^{-0.1}}{j!} \Gamma(x; 0.2j; 0.0002)$	0.04599	0.05284	0.08038	0.09505	0.09516
$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1)^j e^{-1}}{j!} \Gamma(x; 0.2j; 0.0002)$	0.23302	0.27681	0.48472	0.63047	0.63210
$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2)^j e^{-2}}{j!} \Gamma(x; 0.2j; 0.0002)$	0.22200	0.27483	0.57640	0.86010	0.86459

Questions :

(a) Expliquer brièvement la distinction entre assurer des risques extraordinaires et des risques *ordinaires* comme des automobiles (assurance automobile aux particuliers).

(b) Calculer la probabilité que les coûts totaux pour une plateforme de forage soient supérieurs à 2000.

(c) On suppose qu'il y a $n = 10$ compagnies de réassurance et $m = 20$ plateformes de forage. Calculer la probabilité que les coûts totaux assumés par une compagnie de réassurance soient supérieurs à 2000.

35. Un assureur a émis 500 contrats d'assurance habitation pour des résidences unifamiliales établies dans la région FGH exposée au risque de tremblements de terre.

Pour une année, les coûts pour ces couvertures sont représentés par les v.a. X_i $(i = 1, ..., 500)$.

Pour une année, on suppose que le nombre de tremblements de terre dans la région FGH est représenté par la v.a. M où

$$M \sim Bernoulli(0.15).$$

Lorsqu'un tremblement de terre se produit dans la région FGH, les coûts de sinistres pour le contrat i correspondent à la v.a.B_i $(i = 1, 2, ..., 500)$ où

$$B_i = U_i \times c_i$$

où la v.a. U_i représente le pourcentage de dommage et la constante c_i représente la valeur de la résidence. La v.a. U_i peut prendre des valeurs entre 0 et 1. Le comportement de la v.a. U_i dépend de l'intensité Θ du tremblement de terre. Sachant que $\Theta = \theta$ $(\theta = 1, 2)$, les v.a. $(U_i\,|\Theta = \theta)$ sont i.i.d. avec

$$\begin{aligned} E\,[U_i\,|\Theta = 1] &= 0.3 \\ Var\,[U_i\,|\Theta = 1] &= 0.04 \\ E\,[U_i\,|\Theta = 2] &= 0.8 \\ Var\,[U_i\,|\Theta = 2] &= 0.01 \end{aligned}$$

et

$$\Pr(\Theta = \theta) = \frac{11 - 4 \times \theta}{10}, \qquad \theta = 1, 2.$$

Les résidences ont tous une valeur de 100.

On définit les coûts totaux pour les 500 contrats par la v.a. S_{500} où

$$S_{500} = X_1 + ... + X_{500}.$$

Questions :

(a) Calculer l'espérance des coûts totaux.

(b) Calculer la probabilité que les coûts totaux excèdent 20000 en utilisant l'approximation normale de façon appropriée. (*Développer les expressions et inscrire les valeurs dans les formules obtenues à la toute fin (i.e. se rendre jusqu'à l'étape du "pitonnage")*)

(c) Commenter brièvement l'assertion suivante : *Pour une compagnie d'assurance, le risque global pour un portefeuille avec des contrats avec couvertures pour catastrophes (propriétés dans une même région) est de même nature que celui pour un portefeuille avec des contrats avec couvertures pour incendie (propriétés bien éloignées l'une de l'autre).*

5.2 Exercices informatiques

1. On considère un portefeuille constitué de n contrats d'assurance automobile. Les coût pour le contrat i sont représentés par la v.a. $X_i, = 1, 2, ..., n$. Les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d. et elles se comporten comme la v.a. X. On suppose que X obéit à une loi binomiale négative composée$(r, q; F_B)$ où $r = 0.5$, $q = \frac{5}{6}$ et $B \sim Gamma\left(\alpha = 0.5, \beta = \frac{1}{10000}\right)$.
   Les coûts pour l'ensemble du portefeuille sont définis par la v.a. $S_n = X_1 + ... + X_n$ où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d. ($X_i \sim X$).
   Questions :
   (a) Indiquer la loi de S_n(paramètres seulement)
   (b) Calculer l'espérance de X et S_n (en fonction de n).
   (c) Calculer $F_X\,(10000)$, $F_{S_{200}}\,(10000 \times 200)$.
   (d) Calculer $VaR_{0.5}\,(X)$ et $VaR_{0.99}\,(X)$.
   (e) Calculer $VaR_{0.5}\,(S_{200})$ et $VaR_{0.99}\,(S_{200})$.
   (f) Calculer $TVaR_{0.5}\,(X)$ et $TVaR_{0.99}\,(X)$.
   (g) Calculer $TVaR_{0.5}\,(S_{200})$ et $TVaR_{0.99}\,(S_{200})$.
   (h) Est-ce que $VaR_{0.5}\,(X_1) + ... + VaR_{0.5}\,(X_{200}) \leq$ ou $\geq VaR_{0.5}\,(S_{200})$?
   (i) Est-ce que $VaR_{0.5}\,(X_1) + ... + VaR_{0.99}\,(X_{200}) \leq$ ou $\geq VaR_{0.99}\,(S_{200})$?
   (j) Est-ce que $TVaR_{0.5}\,(X_1) + ... + TVaR_{0.5}\,(X_{200}) \leq$ ou $\geq TVaR_{0.5}\,(S_{200})$?
   (k) Est-ce que $TVaR_{0.99}\,(X_1) + ... + TVaR_{0.99}\,(X_{200}) \leq$ ou $\geq TVaR_{0.99}\,(S_{200})$?
   (l) Commenter sur h à k.

   Code LaTeX : ex-41001.tex

2. Pour la prochaine année, on suppose que $n = 1000$ contrats d'assurance automobile seront vendus par une compagnie d'assurance IARD. Les coûts pour un contrat d'assurance automobile (v.a. X) sont modélisés selon l'approche fréquence sévérité. Le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson avec $\lambda = 0.005$. Le montant d'un sinistre obéit à une loi exponentielle de moyenne 1000. Le montant total des sinistres pour l'ensemble du portefeuille est représenté par la v.a. $S_n = X_1 + ... + X_n$ où les v.a. X_1, ..., X_n sont i.i.d. (convention : $X_i \sim X$ pour $i = 1, 2, ..., n$). On définit $W_n = \frac{S_n}{n}$.

   Questions :

   (a) Pour un contrat, ...
   - ... écrire l'expression de $F_{X_1}(x)$;
   - ... calculer $F_{X_1}(0)$ et $F_{X_1}(10)$ (**vérification** : $F_{X_1}(5) = 0.9950373$) ;
   - ... expliquer comment obtenir la $VaR_{0.99}(X_1)$;
   - ... calculer $VaR_{0.99}(X_1)$;
   - ... donner l'expression de la $TVaR_{0.99}(X_1)$; et
   - ... calculer $TVaR_{0.99}(X_1)$.

   (b) Pour un portefeuille de $n = 1000$ contrats,
   - ... indiquer la loi de W_n ;
   - ... écrire l'expression de $F_{W_n}(x)$;
   - ... calculer $F_{W_n}(0)$ et $F_{W_n}(10)$ (**vérification** : $F_{W_n}(5) = 0.5639167$) ;
   - ... expliquer comment obtenir la $VaR_{0.99}(W_n)$;
   - ... calculer $VaR_{0.99}(W_n)$;
   - ... donner l'expression de la $TVaR_{0.99}(W_n)$; et
   - ... calculer $TVaR_{0.99}(W_n)$.

   Code LaTeX : ex-41002.tex

3. On considère les coûts pour un contrat d'assurance habitation X_i, définis comme :

$$X_i \sim BinNegComp(r_i = r, q_i = q; F_{B_i}),$$

avec $B_i \sim B \sim Gamma(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{5000})$, $r = 2$ et $q = 0.997$. On définit par S_n la somme des engagements d'un assureur pour le portefeuille d'assurance habitation :

$$S_n = X_1 + ... + X_n,$$

où $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d..

(a) Évaluer $E[X_1]$, $VaR_{0.99}(X_1)$ et $TVaR_{0.99}(X_1)$.

(b) Évaluer $E[S_n]$, $VaR_{0.99}(S_n)$ et $TVaR_{0.99}(S_n)$, pour $n = \{10, 100, 1000\}$.

(c) Comparer $\sum_{i=1}^{n} VaR_{0.99}(X_i)$ et $VaR_{0.99}(S_n)$.

(d) Comparer $\sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.99}(X_i)$ et $TVaR_{0.99}(S_n)$.

(e) Calculer la prime selon les deux approches suivantes :

i. prime(A)= $VaR_{0.99}(\frac{S_n}{n})$.

ii. prime(B)= $TVaR_{0.99}(\frac{S_n}{n})$.

Code LaTeX : ex-32030.tex

4. Soit un portefeuille composé de trois contrats d'assurance IARD sont les coûts sont définis par les v.a. X_1, X_2, et X_3 avec

$$X_i = \begin{cases} 0 & , \quad M_i = 0 \\ B_{i,1} & , \quad M_i = 1 \\ B_{i,1} + B_{i,2} & , \quad M_i = 2 \end{cases}$$

où I_1, I_2, I_3, $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$, $B_{3,1}$, $B_{3,2}$ sont indépendantes avec $M_i \sim Binom\left(2, \frac{1}{2}\right)$ $(i = 1, 2, 3)$, $B_{i,k} \sim Gamma\left(1.2, \frac{1}{10}\right)$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2$.
On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Questions :

(a) Identifier la loi de S. Utiliser les fgm ou les transformées de Laplace-Stieltjes.

(b) Calculer $E[S]$ et $Var(S)$.

(c) Calculer $F_S(x)$, $x = 0$, 10, 50, 100.

(d) Calculer $VaR_\kappa(S)$, $\kappa = 0.5$, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999.

(e) Calculer $TVaR_\kappa(S)$, $\kappa = 0.5$, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999.

Code LaTeX : ex-41005.tex

5. Soit un portefeuille composé de trois contrats d'assurance IARD sont les coûts sont définis par les v.a. X_1, X_2, et X_3 avec
$$X_i = \begin{cases} 0 & , \quad M_i = 0 \\ B_{i,1} & , \quad M_i = 1 \\ B_{i,1} + B_{i,2} & , \quad M_i = 2 \end{cases}$$
où (I_1, I_2, I_3), $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$, $B_{3,1}$, $B_{3,2}$ sont indépendants avec $B_{i,k} \sim Gamma\left(1.2, \frac{1}{10}\right)$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2$. De plus, on a
$$\Pr\left(M_1 = m_1, M_2 = m_2, M_3 = m_3\right) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0 \\ \frac{2}{4} & , \quad m_1 = m_2 = m_3 = 1 \\ \frac{1}{4} & , \quad m_1 = m_2 = m_3 = 2 \\ 0 & , \quad \text{autrement} \end{cases}.$$
On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Questions :
   (a) Identifier les lois marginales des v.a. M_1, M_2, M_3.
   (b) Identifier la loi de S.
   (c) Calculer $E\left[S\right]$ et $Var\left(S\right)$.
   (d) Calculer $F_S\left(x\right)$, $x = 0$, 10, 50, 100.
   (e) Calculer $VaR_\kappa\left(S\right)$, $\kappa = 0.1$, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999.
   (f) Calculer $TVaR_\kappa\left(S\right)$, $\kappa = 0.1$, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999.

   Code LaTeX : ex-41006.tex

6. Soient les v.a. ìndépendantes X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 où
   - $X_1 \sim Gamma\,(\alpha = 2, \beta = 1/1000)$: coûts totaux pour la ligne d'affaires 1 ;
   - $\Pi_1 = (1.25)\,E\,[X_1]$: montant total de primes pour la ligne d'affaires 1 ;
   - $X_2 \sim Burr\,(\alpha = 2, \lambda = 200000, \tau = 1.5)$: coûts totaux pour la ligne d'affaires 2 ;
   - $\Pi_2 = (1.10)\,E\,[X_2]$: montant total de primes pour la ligne d'affaires 2 ;
   - $X_3 \sim LL\,(\tau = 4, \lambda = 2000)$: coûts totaux pour la ligne d'affaires 3 ;
   - $\Pi_3 = (1.20)\,E\,[X_3]$: montant total de primes pour la ligne d'affaires 3 ;
   - $X_4 = I_4 \times B_4$ où $I_4 \sim Bern\,(q_4 = 0.1)$ et $B_4 \sim LNorm\,(\mu_4 = 9.5, \sigma_4 = 1)$: montant total des coûts en cas de catastrophes ;
   - $\Pi_4 = (1.30)\,E\,[X_4]$: montant total de primes pour les coûts en catastrophes ;
   - $X_5 = 2N_5$ où $N_5 \sim Bin\,(n_5 = 1000, q_5 = 0.97)$: montant total des prêts à recevoir des emprunteurs ;
   - $\Pi_5 = 0.995 \times E\,[X_5]$: montant total des certificat de dépôt à remettre aux déposants.

   On définit $L_{TOT} = \sum_{i=1}^{5} L_i$ où $L_i = X_i - \Pi_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ et $L_5 = \Pi_5 - X_5$.
   Note : En `R`, on utilise le générateur implicite de R avec une valeur source 20130402.
   Questions :

   (a) Calculer $E\,[X_i]$ et Π_i, pour $i = 1, ..., 5$.
      i. Indiquer les expressions de $E\,[X_i]$ et Π_i, pour $i = 1, ..., 5$.
      ii. Indiquer les valeurs de $E\,[X_i]$ et Π_i, pour $i = 1, ..., 5$.

   (b) Calculer $E\,[L_{TOT}]$.
      - Indiquer l'expression de $E\,[L_{TOT}]$.
      - Indiquer la valeur de $E\,[L_{TOT}]$.

   (c) Produire $m = 100000$ réalisations de $(X_1, ..., X_5)$, $(L_1, ..., L_5)$ et L_{TOT} (**ATTENTION : UNE RÉALISATION** U **PAR V.A.** X, même pour X_4).
      - Indiquer la première réalisation de $(X_1, ..., X_5)$.
      - Indiquer la première réalisation de $(L_1, ..., L_5)$.
      - Indiquer la première réalisation de L_{TOT}.

   (d) Avec (c), calculer une approximation de $E\,[L_{TOT}]$.

   (e) Avec (c), calculer une approximation de $\Pr\,(L_{TOT} > 0)$.
      i. Indiquer l'expression de l'approximation de $\Pr\,(L_{TOT} > 0)$.
      ii. Indiquer la valeur de l'approximation de $\Pr\,(L_{TOT} > 0)$.

   (f) Avec (c), calculer une approximation de $VaR_\kappa\,(L_{TOT})$ pour $\kappa = 0.99$.

   (g) Avec (c), calculer une approximation de $TVaR_\kappa\,(L_{TOT})$ pour $\kappa = 0.99$.

   Code LaTeX : ex-41008.tex

7. Soit la v.a. $X \sim BNComp\,(r, q; F_B)$, où le nombre de sinistres $M \sim BN\left(r = 1.2, q = \frac{1}{4}\right)$ et le montant d'un sinistre $B \sim LN\,(\mu = 2, \sigma = 0.9)$.
   Soit la v.a. $Y \sim PComp\,(\lambda; F_C)$, où le nombre de sinistres $N \sim Pois\,(\lambda = 3)$ et le montant d'un sinistre $C \sim Weibull\left(\tau = 0.5, \beta = \frac{1}{4}\right)$.
   Les v.a. X et Y sont indépendantes.
   On définit $S = X + Y$.
   On utilise le générateur de base du logiciel `R` (`set.seed(2019)`). On produit dans l'ordre les $m = 100000$ réalisations $\left(X^{(1)}, Y^{(1)}\right)$, ..., $\left(X^{(100000)}, Y^{(100000)}\right)$ de (X, Y).
   Questions :
   (a) Calculer les valeurs exactes de $E[X]$, $E[Y]$ et $E[S]$.
   (b) Calculer les valeurs exactes de $Var(X)$, $Var(Y)$ et $Var(S)$.
   (c) Indiquer les valeurs des réalisations $X^{(j)}$ et $Y^{(j)}$ pour $j = 1, 2, 3$. On simule dans l'ordre $M^{(1)}$ puis $X^{(1)}$, $N^{(1)}$ puis $Y^{(1)}$, et ainsi de suite.
   (d) Indiquer les valeurs des réalisations $S^{(j)}$ pour $j = 1, 2, 3$.
   (e) Utiliser les m réalisations pour calculer des valeurs approximatives de $E[X]$, $E[Y]$ et $E[S]$.
   (f) Utiliser les m réalisations pour calculer des valeurs approximatives de $Var(X)$, $Var(Y)$ et $Var(S)$.
   (g) Calculer les approximations de $\Pr(S > x)$ ainsi que les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance (avec un niveau de confiance de 95 %) de ces approximations :

x	borne inf.	approx. $\Pr(S > x)$	borne sup.	erreur standard
100				
200				
300				
400				
500				

   (h) Calculer les approximations de $VaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5$, 0.75, 0.99, 0.999, 0.9999 et déterminer les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance (avec un niveau de confiance de 95 %) de ces approximations.
   (i) Calculer les approximations de $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5$, 0.75, 0.99, 0.999, 0.9999.

   Code LaTeX : ex-41009.tex

8. Soit la v.a. $X_1 \sim PComp\,(\lambda_1; F_{B_1})$, où le nombre de sinistres $M_1 \sim Pois\,(\lambda_1 = 1)$ et le montant d'un sinistre $B_1 \sim LN\,(\mu = 2, \sigma = 0.9)$.
   Soit la v.a. $X_2 \sim PComp\,(\lambda_2; F_{B_2})$, où le nombre de sinistres $M_2 \sim Pois\,(\lambda_2 = 3)$ et le montant d'un sinistre $B_2 \sim Weibull\left(\tau = 0.5, \beta = \frac{1}{4}\right)$.
   Soit la v.a. $X_3 \sim PComp\,(\lambda_3; F_{B_3})$, où le nombre de sinistres $M_3 \sim Pois\,(\lambda_3 = 6)$ et le montant d'un sinistre $B_3 \sim Pareto\,(\alpha = 4, \lambda = 15)$.
   Les v.a. X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.
   On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
   On utilise le générateur de base du logiciel `R` (`set.seed(2019)`).
   Questions :
   (a) Identifier la loi de S. Utiliser cette loi pour produire des réalisations de S. On produit dans l'ordre les réalisations $S^{(1)}$, ..., $S^{(100000)}$ de S.
   (b) Indiquer les valeurs des réalisations $S^{(j)}$ pour $j = 1, 2, 3$.
   (c) Calculer les valeurs exactes de $E\,[S]$ et $\mathrm{Var}\,(S)$.
   (d) Calculer les approximations de $E\,[S]$ et $\mathrm{Var}\,(S)$.
   (e) Calculer les approximations de $\Pr\,(S > x)$ ainsi que les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance (avec un niveau de confiance de 95 %) de ces approximations :

x	borne inf.	approx. $\Pr\,(S > x)$	borne sup.	erreur standard
100				
200				
300				
400				
500				

   (f) Calculer les approximations de $VaR_\kappa\,(S)$ pour $\kappa = 0.5$, 0.75, 0.99, 0.999, 0.9999 et déterminer les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance (avec un niveau de confiance de 95 %) de ces approximations.
   (g) Calculer les approximations de $TVaR_\kappa\,(S)$ pour $\kappa = 0.5$, 0.75, 0.99, 0.999, 0.9999.

   Code LaTeX : ex-41010.tex

9. On considère un portefeuille de n contrats d'assurance maladie de la région ABC. Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $X_i =$ les coûts pour le contrat i, $i = 1, 2, ..., n$. Le portefeuille est exposé aux conditions climatiques de la région ABC qui sont représentées par la v.a. $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$. Sachant que $\Theta = \theta_j$, $(X_i|\Theta = \theta_j)$ obéit à une loi Gamma $(\alpha = 0.25\theta_j, \beta = \frac{1}{4000})$ avec $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 2$, $\Pr(\Theta = \theta_1) = 0.75$ et $\Pr(\Theta = \theta_2) = 0.25$.
   Les coûts par contrat sont définis par la v.a. $W_n = \frac{S_n}{n}$.
   Questions :
   (a) Pour un contrat, ...
      — ... écrire l'expression de $F_{X_1}(x)$;
      — ... calculer $F_{X_1}(5000)$ (vérification : $F_{X_1}(3000) = 0.8697845$) ;
      — ... expliquer comment obtenir $VaR_\kappa(X_1)$;
      — ... calculer $VaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.99$;
      — ... écrire l'expression de $TVaR_\kappa(X_1)$; et
      — ... calculer $TVaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.99$.
   (b) Pour un portefeuille de $n = 10$ contrats, ...
      — ... écrire l'expression de $F_{W_n}(x)$;
      — ... calculer $F_{W_n}(5000)$ (vérification : $F_{W_n}(3000) = 0.9592128$) ;
      — ... expliquer comment obtenir $VaR_\kappa(W_n)$;
      — ... calculer $VaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.99$;
      — ... écrire l'expression de $TVaR_\kappa(W_n)$; et
      — ... calculer $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.99$.

   Code LaTeX : ex-41011.tex

10. On considère un portefeuille homogène de risques échangeables X_1, ..., X_n où

$$X_i = I_i \times b_i$$

avec $b_i = 1000$ pour $i = 1, 2, ..., n$.
Soit la v.a. mélange $\Theta \sim Beta\,(\alpha = 1, \beta = 3)$.
On a

$$(I_i|\Theta = \theta) \sim Bern\,(\theta)$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.
De plus, $(I_1|\Theta = \theta)$, ..., $(I_n|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes.
On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
On définit $N_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$.
Notation pour la fonction beta :

$$I\,(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}\,(1-u)^{\beta-1}\,du = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Questions (expliquer la démarche et indiquer clairement les valeurs demandées) :

(a) Démontrer que

$$\Pr(I_i = 1) = E[\Theta] = \tau_1$$

et que

$$\Pr(I_i = 1, I_j = 1) = E\left[\Theta^2\right] = \tau_2.$$

(b) Démontrer que

$$\Pr(N_n = k) = \binom{n}{k}\frac{I\,(a+k, b+n-k)}{I\,(a,b)}, \quad (k = 0, 1, ..., n)\,.$$

(c) Calculer $\Pr(S_3 = 1000k)$, for $k = 0, 1, 2, 3$. (Pour vérifier : $\Pr(S_3 = 0) = 0.5$)

(d) Calculer $E\,[\max(S_3 - 2000; 0)]$.

(e) Refaire (c) et (d) en supposant $S_3^{'} = 1000N_3^{'}$ où $N_3' \sim Binom\,(3, \tau_1)$. Comparer et commenter brièvement.

Code LaTeX : ex-41012.tex

11. Pour la prochaine année, le montant total des sinistres pour l'ensemble du portefeuille d'assurance automobile est représenté par la v.a. $S_n = X_1 + ... + X_n$ où les v.a. X_1, ..., X_n sont i.i.d. d'assurance IARD. Les coûts pour le contrat i d'assurance automobile sont définis par la v.a. $X_i \sim BNComp\,(r, q; F_B)$, où $r = 0.01$, $q = \frac{2}{3}$ et le montant d'un sinistre $B \sim Gamma\left(\alpha = 0.5, \beta = \frac{1}{2000}\right)$. On définit $W_n = \frac{S_n}{n}$.
Questions :
   (a) Calculer $E[X]$.
   (b) Indiquer la loi de S_n et écrire l'expression de $F_{S_n}(x)$.
   (c) Calculer $F_{S_{1000}}(5000)$.
   (d) On définit la prime $\pi = (1+\eta)\,E[X]$ et la probabilité de ruine $\psi_n(u) = \Pr(S_n > u + n\pi)$, avec un surplus initial $u > 0$.
      i. Calculer $\psi_n(2000)$, pour π_A avec $\eta = -50\%$ pour $n = 400$, 1150, 1200 et 5000. Commenter et expliquer le comportment. Indiquer la valeur de π_A.
      ii. Pour π_A avec $\eta = -50\%$, calculer la plus petite valeur de n de telle sorte que $\psi_n(2000) \geq 50\%$. Interpréter.
      iii. Calculer π_B et η de telle sorte que $\psi_{1000}(2000) = 1\%$.
      iv. Pour $u = 2000$, calculer π_C et η de telle sorte que $VaR_{0.99}(S_{1000}) = u + n\pi$. Quel le lien entre la prime π_C et $VaR_{0.99}(W_{1000})$? Quel est le lien etre π_C et π_B ?
      v. Pour $u = 2000$, calculer π_D et η de telle sorte que $TVaR_{0.99}(S_{1000}) = u + n\pi$. Quel le lien entre la prime π_D et $TVaR_{0.99}(W_{1000})$?

Code LaTeX : ex-info44001.tex

12. Les pertes totales pour le portefeuille d'une institution financière est définie par la v.a. $L = L_1 + L_2$ où L_1= les pertes pour les activités d'assurance et L_2 = les pertes pour les activités bancaires.

    Pertes pour les activités d'assurance : $L_1 = S - P$ avec

    — $S = \sum_{i=1}^{100} X_i = \sum_{i=1}^{100} 1000 \times I_i$: coûts totaux pour 100 contrats d'assurance vie temporaire 1 an avec une prestation de décès de 1000 (tous les assurés sont indépendants) ;

    — $P = 5000$: montant total de primes pour financer les coûts d'assurance.

    Pertes pour les activités bancaires : $L_2 = D - T$ avec

    — $D = 5000$: montant total des sommes à rembourser pour les certificats de dépôt ;

    — $T = \sum_{i=1}^{6} Y_i = \sum_{i=1}^{6} 1000 \times J_i$: montant total des remboursements pour 6 prêts (tous les emprunteurs sont indépendants).

    Hypothèse : $I_i \sim Bern\left(\frac{1}{20}\right)$ $(i = 1, 2, ..., 100)$.
    Hypothèse : $J_i \sim Bern\left(\frac{5}{6}\right)$ $(i = 1, 2, ..., 6)$.
    Hypothèse : Les v.a. I_1, ..., I_{100}, J_1, ..., J_6 sont indépendantes.
    Questions :

    (a) Calculer $\Pr(L_1 > 0)$ et $\Pr(L_2 > 0)$. Interpréter ces deux probabilités.

    (b) Indiquer les valeurs possibles que peut prendre la v.a. L.

    (c) Écrire l'expression de $\Pr(L = 1000k)$, pour $k = -6, -5, ..., -1, 0$.

    (d) Calculer $\Pr(L = 1000k)$, pour $k = -6, -5, ..., -1, 0$.

    (e) Calculer $\Pr(L \leq 0)$.

    (f) Calculer $\Pr(L > 0)$. Interpréter cette probabilité.

    Code LaTeX : ex-info44002

Chapitre 6

Introduction aux méthodes d'allocation de capital

6.1 Exercices traditionnels

1. On rappelle deux des quatres propriétés que doit satisfaire une mesure de risque pour être cohérente.

   — **Invariance à la translation**. Soient un risque X et un scalaire $a \in \mathbb{R}$. Une mesure ς_κ est invariante à la translation si
   $$\varsigma_\kappa (X + a) = \varsigma_\kappa (X) + a,$$
   pour $0 < \kappa < 1$.

   — **Monotonocité**. Soient deux risques X_1 et X_2 tels que $\Pr (X_1 \leq X_2) = 1$. Une mesure ς_κ est monotone si
   $$\varsigma_\kappa (X_1) \leq \varsigma_\kappa (X_2) ,$$
   pour $0 < \kappa < 1$.

   Questions :

   (a) Montrer avec un exemple simple que la mesure $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ ne satisfait pas la propriété d'invariance à la translation.

   (b) Soient les v.a. X_1 et X_2 telles que $X_1 \sim Unif (0, 1)$ et $\Pr (X_2 = 10) = 1$. Utiliser ce contre-exemple pour montrer que la mesure $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ ne satisfait pas la propriété de monotonocité.

   Code LaTeX : ex-50001.tex

2. Soit un portefeuille de n risques X_1, ..., X_n. Le montant total des coûts est défini par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On calcule les primes

$$\Pi_A(S) = E[S] + \sqrt{\operatorname{Var}(S)}\Phi^{-1}(\kappa)$$

et

$$\Pi_B(S) = E[S] + \sqrt{\operatorname{Var}(S)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$

Questions :

(a) Montrer que la fonction

$$\varphi(X_1, ..., X_n) = \Pi_A(S) = \Pi_A\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

est homogène. Utiliser le théorème d'Euler pour identifier la contribution $C^B(X_i)$ (pour chaque risque X_i) associée à la prime $\Pi_A(S)$.

(b) Montrer que la fonction

$$\varphi(X_1, ..., X_n) = \Pi_B(S) = \Pi_B\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

est homogène. Utiliser le théorème d'Euler pour identifier la contribution $C^B(X_i)$ (pour chaque risque X_i) associée à la prime $\Pi_B(S)$.

Code LaTeX : ex-50002.tex

3. Soit le vecteur de v.a. (X_1, X_2, X_3) dont la fonction de répartition conjointe est définie par

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^{2} p_i \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i^2}}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_2}{20i^2}}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_3}{10(5-i^2)}}\right)$$

pour $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
Hypothèses : $p_1 = 0.75$, $p_2 = 0.25$.

(a) Identifier les lois de X_1, X_2 et X_3.

(b) Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$, $\mathrm{Cov}(X_1, X_3)$ et $\mathrm{Cov}(X_2, X_3)$.

(c) Soit $S = X_1 + X_2 + X_3$. Calculer $E[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$.

(d) Calculer la mesure $\sqrt{Var(S)}$ et les contributions $C^{\sqrt{Var}}(X_i)$, $i = 1, 2, 3$, associées à cette mesure.

(e) Soit la prime
$$\Pi_A(S) = E[S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}\Phi^{-1}(\kappa).$$
Utiliser le théorème d'Euler pour calculer les 3 contribution $C^A(X_i)$, $i = 1, 2, 3$, associées à la prime $\Pi_A(S)$.
Comparer $C^A(X_i)$ avec
$$\Pi_A(X_i) = E[X_i] + \sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}\Phi^{-1}(\kappa)$$
pour $i = 1, 2, 3$. Commenter.

(f) Soit la prime
$$\Pi_B(S) = E[S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$
Utiliser le théorème d'Euler pour calculer les 3 contribution $C^B(X_i)$, $i = 1, 2, 3$, associées à la prime $\Pi_B(S)$.
Comparer $C^B(X_i)$ avec
$$\Pi_B(X_i) = E[X_i] + \sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}\frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}$$
pour $i = 1, 2, 3$. Commenter.

Code LaTeX : ex-50003.tex

6.2 Exercices informatiques

1. Soit le vecteur de v.a. indépendantes $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ avec $X_i \sim Gamma\,(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, 3$:

i	α_i	β_i
1	10	1/300
2	4	1/500
3	1	1/1000

On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
On utilise le générateur de base du logiciel `R` (`set.seed(2019)`) pour générer $m = 100000$ (cent milles) réalisations $\underline{X}^{(j)} = \left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$.
Note :

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$	S
1	3642.99	2423.51	361.49	6427.98
m	3001.87	3529.86	289.08	6820.81

Questions :

(a) Calculer $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$.

(b) Utiliser les m réalisations pour calculer des approximations de $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$.

(c) Calculer $\widetilde{VaR}_\kappa\,(S)$, $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}\,(X_1)$, $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}\,(X_2)$ et $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}\,(X_3)$, pour $\kappa = 0.9,\ 0.99,\ 0.999$.

(d) Calculer $\widetilde{TVaR}_\kappa\,(S)$, $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}\,(X_1)$, $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}\,(X_2)$ et $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}\,(X_3)$, pour $\kappa = 0.9,\ 0.99,\ 0.999$.

Code LaTeX : ex-51001.tex

2. Soit le vecteur de v.a. indépendantes $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ avec

$$\begin{aligned} X_1 &\sim Pareto\,(\alpha_P, \lambda) \\ X_2 &\sim Gamma\,(\alpha_G, \beta) \\ X_3 &\sim LN\,(\mu, \sigma) \end{aligned}$$

dont les paramètres sont fixés de telle sorte que $E[X_i] = 100$ et $Var(X_i) = 300^2$. On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.

On utilise le générateur de base du logiciel `R` (`set.seed(2019)`) pour générer $m = 100000$ (cent milles) réalisations $\underline{X}^{(j)} = \left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\right)$ de $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

Note :

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$	S
1	115.1618	26.9021	14.4800	156.5438
m	52.0086	370.2364	11.4204	433.6654

Questions :

(a) Calculer les paramètres pour les 3 lois à partir des informations fournies.

(b) Utiliser les m réalisations pour calculer des approximations de $E[X_1]$, $E[X_2]$, $E[X_3]$ et $E[S]$.

(c) Calculer $\widetilde{VaR}_\kappa(S)$, $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_1)$, $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_2)$ et $\widetilde{C}_\kappa^{VaR}(X_3)$, pour $\kappa = 0.9, 0.99, 0.999$.

(d) Calculer $\widetilde{TVaR}_\kappa(S)$, $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}(X_1)$, $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}(X_2)$ et $\widetilde{C}_\kappa^{TVaR}(X_3)$, pour $\kappa = 0.9, 0.99, 0.999$.

Code LaTeX : ex-51002.tex

Chapitre 7

Estimation des données d'assurance

1. On dispose des données de fréquence suivantes :

k sinistres	0	1	2	3	4	5	6	>6
Nb de contrats avec k sinistres	103704	14075	1834	255	34	4	1	0

   Source : [Nikoloulopoulos and Karlis, 2008].
   Questions :

   (a) Utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de la loi de Poisson.
      i. Indiquer la valeur de l'estimateur $\widehat{\lambda}$ de λ.

   (b) Utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de la loi binomiale négative.
      i. Indiquer la valeur de l'estimateur $\widehat{r}$ de r.
      ii. Indiquer la valeur de l'estimateur $\widehat{q}$ de q.

   (c) Vérifier l'adéquation des deux lois aux données (fusionner les cellules 4, 5 et 6 pour faire le test d'adéquation du khi-deux).
      i. Loi de Poisson. Indiquer la valeur de la statistique Q. Calculer la $p-value$. Indiquer clairement si la loi est rejetée ou non.
      ii. Loi binomiale négative. Indiquer la valeur de la statistique Q. Calculer la $p - value$. Indiquer clairement si la loi est rejetée ou non.

   (d) Utiliser la $p - value$ pour sélectionner une des deux lois.

   Code LaTeX : ex-101005.tex

2. On dispose des données de fréquence suivantes pour l'année 2008 :

k sinistres	0	1	2	3	4	5	6	7	>7
Nb de contrats avec k sinistres	141781	2892	535	152	57	12	3	3	0

Source : [Nikoloulopoulos and Karlis, 2008].

Questions :

(a) Utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de la loi de Poisson.

(b) Utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de la loi binomiale négative.

(c) Vérifier l'adéquation des deux lois aux données.

(d) Choisir une loi en se basant sur un critère statistique.

Code LaTeX : ex-101006.tex

3. Pendant une année, on a observé l'expérience suivante relative aux nombres de sinistres des 307 contrats du portefeuille de la compagnie ABC durant l'année 2007 :

k sinistres	Nb de contrats avec k sinistres
0	120
1	106
2	60
3	15
4	6
5	0

Il n'y pas de contrats qui ont produit plus de 5 sinistres. On suppose que le nombre de sinistres pour un contrat est représenté par la v.a. N où $N \sim Poisson(\lambda)$.

Questions :

(a) Estimer λ par la méthode du maximum de vraisemblance.

(b) Utiliser le test du khi-deux pour vérifier l'adéquation de la loi de Poisson aux données (niveau de confiance de 5%).

(c) À l'aide de a), trouver un intervalle de confiance à 95% pour $P(N = 1)$.

Code LaTeX : ex-101008.tex

4. On dispose des données de sinistres groupées suivantes pour modéliser la loi du montant d'un sinistre B :

i	c_{i-1} (borne inférieure)	c_i (borne supérieure)	n_i
1	0	500	905
2	500	1000	135
3	1000	1500	56
4	1500	2000	26
5	2000	3000	38
6	3000	5000	41
7	5000	10000	23
8	10000	100000	18
		TOTAL	1242

Questions :

(a) Estimer les paramètres des lois gamma, Pareto et lognormale selon la méthode du maiximum de vraisemblance. Indiquer les valeurs obtenues des paramètres. Indiquer les valeurs obtenues du log de la fonction de vraisemblance.

(b) Utiliser le test d'adéquation du khi-deux pour l'adéquation des lois avec les paramètres estimés. Pour chaque loi, indiquer ce que vous avez obtenu comme statistique du test, comme valeur critique et comme *p-value*.

(c) Utiliser le Critère bayesien de Schwartz pour choisir une des lois parmi celles n'ayant pas été rejetées par le test d'adéquation du khi-deux. Pour chaque loi considérée, indiquer la valeur du critère bayesien de Schwartz.

Code LaTeX : ex-101009.tex

5. On dispose des donnés suivantes concernant des ouragans aux États-Unis :

Rank	Hurricane	Year	Category	Damage U.S. billions $
1	SE Florida/Alabama	1926	4	72.303
2	Andrew (SE FL–LA)	1992	4	33.094
3	SW Florida	1944	3	16.864
4	New England	1938	3	16.629
5	SE Florida/Lake Okeechobee	1928	4	13.795
6	Betsy (SE FL–LA)	1965	3	12.434
7	Donna (FL–eastern United States)	1960	4	12.048
8	Camille (MS–LA–VA)	1969	5	10.965
9	Agnes (NW FL, NE United States)	1972	1	10.705
10	Diane (NE United States)	1955	1	10.232
11	Hugo (SC)	1989	4	9.380
12	Carol (NE United States)	1954	3	9.066
13	SE FL–LA–AL	1947	4	8.308
14	Carla (N and central TX)	1961	4	7.069
15	Hazel (SC–NC)	1954	4	7.039
16	NE United States	1944	3	6.536
17	SE Florida	1945	3	6.313
18	Frederic (AL–MS)	1979	3	6.293
19	SE FL	1949	3	5.838
20	Alicia (N TX)	1983	3	4.056
21	Celia (S TX)	1970	3	3.338
22	Dora (NE FL)	1964	2	3.108
23	Opal (NW FL–AL)	1995	3	3.000
24	Cleo (SE FL)	1964	2	2.435
25	Juan (LA)	1985	1	2.399
26	Audrey (LA–N TX)	1957	4	2.396
27	King (SE FL)	1950	3	2.266
28	SE FL–GA–SC	1947	2	2.263
29	SE FL	1935	2	2.191
30	Elena (MS–AL–NW FL)	1985	3	2.064

Source :

— Tableau 7 de [Pielke Jr and Landsea, 1998]

— Voir aussi : [Brazauskas et al., 2009].

Questions :

(a) On utilise la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de la loi lognormale.

(b) Calculer un estimé paramétrique (basé sur la loi lognormale) de $VaR_{0.995}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$, ainsi qu'un intervalle de confiance pour ces quantités.

Code LaTeX : ex-101010.tex

6. On dispose des données de sinistres complètes suivantes :

no	montant	no	montant	no	montant	no	montant
1	61	26	3302	51	7802	76	14824
2	140	27	3526	52	8393	77	14972
3	187	28	3559	53	8422	78	15372
4	513	29	3606	54	8680	79	15463
5	555	30	3693	55	8989	80	15532
6	599	31	3781	56	9294	81	16163
7	745	32	3858	57	9887	82	16386
8	831	33	4177	58	10017	83	17978
9	884	34	4203	59	10448	84	20317
10	1032	35	4280	60	10522	85	22962
11	1128	36	4305	61	11523	86	24199
12	1518	37	4490	62	11667	87	24523
13	1519	38	4537	63	11985	88	24885
14	1594	39	4591	64	12257	89	26935
15	1895	40	4641	65	12466	90	27943
16	1902	41	4866	66	12466	91	28094
17	1951	42	5423	67	13019	92	28716
18	1971	43	5978	68	13173	93	30104
19	2177	44	6115	69	13506	94	31069
20	2189	45	6265	70	13741	95	33548
21	2308	46	6363	71	14166	96	34361
22	2436	47	6785	72	14311	97	38350
23	2565	48	7107	73	14360	98	40588
24	2861	49	7253	74	14502	99	40872
25	3144	50	7504	75	14699	100	50807

On suppose que le montant d'un sinistre obéit à une loi exponentielle avec

$$f_B(x) = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{x}{\gamma}}$$

pour $x \geq 0$.
Le nombre de données de sinistres est $n = 100$. De plus, on a calculé $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1106171$.
Questions :

(a) Déterminer l'estimateur $\widehat{\gamma}$ de γ selon la méthode du maximum de vraisemblance.

(b) Déterminer la variance de $\widehat{\gamma}$. Construire un intervalle de confiance avec un niveau de confiance $\alpha = 5\%$.

(c) Déterminer les valeurs des fonctions $g_2(\widehat{\gamma})$ et utiliser la méthode delta pour construire un intervalle de confiance pour

$$VaR_\kappa(X) = -\gamma \ln(1-\kappa) = g_2(\gamma)$$

avec $\alpha = 0.05$ et $\kappa = 0.99$.

Code LaTeX : ex-101011.tex

Chapitre 8

Processus de comptage

8.1 Exercices traditionnels

1. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène, avec une intensité $\lambda > 0$ $(\dot{t} \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$, où $W_j \sim W \sim Exp(\lambda)$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$.
   Le temps est mesuré en années.
   Hypothèse :
   $$\Pr(\text{"aucun sinistre pendant 2 ans"}) = 0.4.$$
   Questions :
   (a) Calculer la valeur de l'intensité λ du processus $\underline{N}$.
   (b) Calculer la probabilité qu'il se produise un sinistre entre $t = 2$ et $t = 3.6$.
   (c) Calculer la probabilité qu'il s'écoule 24 mois entre le 4e et le 5e sinistres.
   (d) Calculer l'espérance du temps à écouler entre deux sinistres.
   (e) Calculer l'espérance et la variance du nombre de sinistres pendant 18 mois.
   (f) Calculer $E[N(5)|N(2) = 3]$ et $Var(N(5)|N(2) = 3)$.

   Code LaTeX : ex-121008.tex
2. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène, avec une intensité $\lambda > 0$ $(\dot{t} \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$, où $W_j \sim W \sim Exp(\lambda)$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$.
   Le temps est mesuré en années.
   Soit le processus agrégé $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ où $S(0) = 0$ et
   $$S(s+t) - S(s) = \sum_{k=1}^{N(s+t)-N(s)} B_k,\ s \geq 0,\ t > 0$$
   où $\underline{B} = \{B_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. avec $B_k \sim B \sim Gamma(\alpha, \beta)$, $k \in \mathbb{N}^+$.
   Hypothèses :
   — $\Pr(\text{"aucun sinistre pendant 15 mois"}) = 0.1053992245$.
   — $E[S(5) - S(2)] = 108$ et $Var(S(5) - S(2)) = 2700$.

   Questions :

(a) Calculer la valeur de l'intensité λ du processus $\underline{N}$.

(b) Calculer les valeurs des paramètres α et β.

(c) Calculer $\overline{F}_{S(4)-S(2.5)}(x)$, pour $x = 0$, 300 et 600.

(d) Calculer $VaR_\kappa(S(4) - S(2.5))$ et $TVaR_\kappa(S(4) - S(2.5))$, pour $\kappa = 0.1$ et $\kappa = 0.999$.

(e) Calculer $F_{S(5)|S(2)=200}(500)$.

(f) Calculer $E[S(5)|S(2) = 200]$ et $Var(S(5)|S(2) = 200)$.

Code LaTeX : ex-121009.tex

3. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène, avec une intensité $\lambda > 0$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$, où $W_j \sim W \sim Exp(\lambda)$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$.

   Le temps est mesuré en années.

   On dispose des temps d'avènements des 36 premiers sinistres :

   0.1024261 ; 0.2582023 ; 0.2738269 ; 0.3288121 ; 0.4895750 ; 0.5791185 ; 0.8124516 ; 0.8472705 ; 1.6437198 ; 1.8416025 ; 1.9674889 ; 2.2405510 ; 3.2464613 ; 3.5299295 ; 3.9399396 ; 4.1913430 ; 4.2702730 ; 4.4715186 ; 4.8063290 ; 5.2469768 ; 5.3222871 ; 5.5323282 ; 5.5733990 ; 5.5983366 ; 5.9571202 ; 6.1490494 ; 6.2483793 ; 6.8938087 ; 7.1218284 ; 7.1385335 ; 7.1766372 ; 7.6728501 ; 7.6814540 ; 7.8498906 ; 8.0262867 ; 8.3851940.

   Questions :

   (a) On utilise la définition (via les temps inter-sinistres) du processus de Poisson et la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer le paramètre λ d'intensité du processus $\underline{N}$. Faire le développement et calculer la valeur de l'estimateur $\widehat{\lambda}$ de λ.

   (b) À l'aide de la valeur estimée $\widehat{\lambda}$ en [3a], calculer l'espérance du nombre de sinistres pendant une année. Pendant 3 mois. Pendant 18 mois.

   (c) À l'aide de la valeur estimée $\widehat{\lambda}$ en [3a], calculer l'espérance du temps écoulé entre 2 sinistres. Calculer la valeur de la fonction quantile du temps écoulé entre 2 sinistres pour $u = 0.01$ et $u = 0.99$.

   (d) Soit $\underline{N}' = \{N'(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène, avec une intensité $\lambda' = 2 \times \widehat{\lambda}$. Calculer l'espérance du temps écoulé entre 2 sinistres. Calculer la valeur de la fonction quantile du temps écoulé entre 2 sinistres pour $u = 0.01$ et $u = 0.99$.

   (e) Soit $\underline{N}' = \{N'(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène, avec une intensité $\lambda' = \frac{1}{2} \times \widehat{\lambda}$. Calculer l'espérance du temps écoulé entre 2 sinistres. Calculer la valeur de la fonction quantile du temps écoulé entre 2 sinistres pour $u = 0.01$ et $u = 0.99$.

Code LaTeX : ex-121010.tex

4. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène, avec une intensité $\lambda > 0$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$, où $W_j \sim W \sim Exp(\lambda)$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$.

   Le temps est mesuré en années.

   Il s'est produit 30 sinistres sur l'intervalle de temps $(0, 15]$ (période d'observation), dont les temps d'avènements sont les suivants $\{t_1, ..., t_{30}\}$:

   0.5188805 ; 0.8864514 ; 1.3373605 ; 2.0505561 ; 2.1876661 ; 2.3522048 ; 2.5719948 ; 2.9600413 ; 3.0129454 ; 3.2509011 ; 3.5793015 ; 3.9460766 ; 4.0144370 ; 4.8135772 ; 6.1127928 ; 6.3747094 ; 6.4106379 ; 6.9129734 ; 6.9353747 ; 7.6939934 ; 7.7057181 ; 7.7118982 ; 7.9739326 ; 9.5971219 ; 11.3181913 ; 11.3991973 ; 12.2928740 ; 12.5003963 ; 12.5996429 ; 12.7015149.

   Questions :

(a) On utilise la définition (via les temps inter-sinistres) du processus de Poisson et la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer le paramètre λ d'intensité du processus $\underline{N}$.

  i. Identifier l'expression de la fonction de vraisemblance $L(\lambda)$. Attention : on doit tenir compte de la période d'observation.

  ii. Faire le développement et calculer la valeur de l'estimateur $\widehat{\lambda}$ de λ.

(b) Identifier la loi de $(W_{31} - 15 | W_{31} > 15)$, en indiquant clairement ses paramètres selon l'information recueillies en [4a].

(c) Identifier la loi de $(N(25) - N(20) | N(15) = 30)$, en indiquant clairement ses paramètres selon l'information recueillies en [4a].

Code LaTeX : ex-121015.tex

5. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène, avec une intensité $\lambda > 0$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$, où $W_j \sim W \sim Exp(\lambda)$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$.
Le temps est mesuré en années.
Questions :

(a) On suppose que $\underline{N}$ désigne le processus du nombre d'accidents de voiture pour une compagnie d'assurance IARD. La compagnie observe qu'il se produit en moyenne 50 accidents par période de 3 mois. Quelle est la valeur du paramètre λ d'intensité du processus $\underline{N}$? Quelle est l'espérance du temps écoulé entre 2 accidents ?

(b) On suppose que $\underline{N}$ désigne le processus du nombre d'inondations dans la région ABC avec propriétés assurés par une compagnie d'assurance IARD. La compagnie observe qu'il se produit en moyenne 1 inondation par période de 4 ans. Quelle est la valeur du paramètre λ d'intensité du processus $\underline{N}$? Quelle est l'espérance du temps écoulé entre 2 inondations ?

Code LaTeX : ex-121011.tex

6. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson mixte où $\Lambda \sim Gamma(r, \theta)$, $r \in \mathbb{R}^+$. Trouver la distribution du nombre d'événements dans un intervalle de longueur t i.e.de $N(t)$.
Hypothèses : $r = 2.4$ et $\theta = 1.2$.
Questions :

(a) Développer l'expression de $\Pr(N(1) = k)$, $k \in \mathbb{N}$. Calculer les valeurs de cette fonction pour $k = 0, 1, 2, 3$.

(b) Développer l'expression de $\Pr(N(2) - N(1) = k)$, $k \in \mathbb{N}$. Calculer les valeurs de cette fonction pour $k = 0, 1, 2, 3$.

(c) Développer l'expression de $\Pr(N(1) = k_1, N(2) - N(1) = k_2)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Calculer les valeurs de cette fonction pour $(k_1, k_2) = (0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$.

(d) Développer l'expression de $E[N(2) | N(1) = k_1]$, $k_1 \in \mathbb{N}$. Calculer les valeurs de cette fonction pour $k_1 = 0, 1, 2, 3$.

(e) Développer l'expression de $\overline{F}_{T_1}(t) = \overline{F}_{W_1}(t) = \Pr(T_1 > t) = \Pr(W_1 > t)$. Quelle est la loi de W_1 ?

(f) Développer l'expression de $\overline{F}_{W_1,W_2}(t_1, t_2) = \Pr(W_1 > t_1, W_2 > t_2)$. Est-ce que $\overline{F}_{W_1,W_2}(t_1, t_2) = \overline{F}_{W_1}(t_1) \times \overline{F}_{W_2}(t_2)$?

Code LaTeX : ex-121012.tex

7. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson non-homogène, avec une intensité $\lambda(t) = a + bt$, avec $a, b > 0$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. indépendantes $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$. On définit le processus déterministe $\underline{\Lambda} = \{\Lambda(t), t \geq 0\}$, avec $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s$, $t \geq 0$ (note : $\Lambda(0) = 0$).
   Pour les calculs, on fixe $\lambda(t) = 0.5 + 0.05t$.

   (a) Démontrer que $\Lambda(t) = at + \frac{bt^2}{2}$, $t \geq 0$.
   (b) Tracer la forme de la courbe de $E[N(t)]$ en fonction de t, pour $t \in (0, 10]$.
   (c) Calculer $E[N(t+1) - N(t)]$, pour $t = 0$, 10, 20. Commenter.
   (d) Développer l'expression de $E[N(t+s)|N(s) = k]$, pour $k \in \mathbb{N}$. Calculer $E[N(6)|N(3) = 2]$.
   (e) Développer l'expression de $\Pr(N(t+s) = k_2 | N(s) = k_1)$, pour $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_2 = k_1 + l$, $l \in \mathbb{N}$.

   Code LaTeX : ex-121013.tex

8. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson non-homogène, avec une intensité $\lambda(t) = a + bt$, avec $a, b > 0$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. **indépendantes** $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$. On définit le processus déterministe $\underline{\Lambda} = \{\Lambda(t), t \geq 0\}$, avec $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s$, $t \geq 0$ (note : $\Lambda(0) = 0$).
   Hypothèse : $\Lambda(t) = (\beta t)^{\tau}$, $\beta > 0$ et $\tau > 0$.
   Questions :

   (a) Développer l'expression de l'intensité $\lambda(t)$ $(t \geq 0)$ du processus $\underline{N}$.
   (b) Soit $\tau = 1$. À quel processus connu correspond $\underline{N}$?
   (c) Soit $\tau \in (0, 1)$. Décrire le comportement de $\lambda(t)$.
   (d) Soit $\tau > 1$. Décrire le comportement de $\lambda(t)$.
   (e) Développer l'expression de $\Pr(N(t+s) - N(t) = k)$, $k = 0, 1, 2, ...$
   (f) Développer l'expression de $\Pr(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.
   (g) Développer l'expression de
   $$\Pr(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, N(t_3) - N(t_2) = k_3),$$
   pour $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$.
   (h) Identifier la loi de W_1. Suggestion : Développer l'expression de $F_W(t)$, $t \geq 0$.
   (i) Identifier l'expression de
   $$\overline{F}_{W_{i+1}|T_i=t_i}(y) = \overline{F}_{T_{i+1}-t_i|T_i=t_i}(y)$$
   pour $y \geq 0$, $i = 2, 3, ...$
   (j) On fixe $\beta = 2$, $\tau = 1.5$. Soit les réalisations suivantes des v.a. i.i.d. de loi uniforme standard U_1, U_2, U_3 ($U_i \sim Unif(0.1)$, $i = 1, 2, 3$) : 0.87 ; 0.35 ; 0.92. Utiliser un algorithme de simulation basé sur les informations recueillies en [8h] et [8i] (ainsi que la méthode basée sur des inverses de fonctions de répartition) pour calculer les réalisations $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $T_3^{(1)}$ de T_1, T_2, T_3. Tracer le parcours de $\underline{N}$, par rapport à l'axe $\left(0, T_3^{(1)}\right]$.

   Code LaTeX : ex-121016.tex

9. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de renouvellement, avec $N(0) = 0$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j \in \mathbb{N}^+\}$, où $W_j \sim W \sim Weibull(\tau, \beta)$, avec $F_W(x) = 1 - \exp(-(\beta x)^{\tau})$. On définit les temps d'occurences des sinistres par la suite de v.a.

$\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ (par convention) et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j \in \mathbb{N}^+$. Le nombre de sinistres survenus pendant l'intervalle de temps $(0,t]$, $N(t) = N(0,t]$ est obtenu avec

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} = \sup\{k \in \mathbb{N}, T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0.$$

On définit

$$W_s = (W - s | W > s),$$

pour $s \geq 0$.
On considère les 3 hypothèses suivantes :

— H1 : $\tau = 1$, $\beta = 2$ (processus de Poisson) ;
— H2 : $\tau = 0.5$, β est fixé de telle sorte que $E[W] = \frac{1}{2}$ (processus de renouvellement Weibull) ;
— H3 : $\tau = 1.5$, β est fixé de telle sorte que $E[W] = \frac{1}{2}$ (processus de renouvellement Weibull).

Questions :

(a) Développer l'expression de $F_{W_s}(t)$, $t \geq 0$, et $F_{W_s}^{-1}(u)$, $u \in (0,1)$.
(b) Pour H1, H2, et H3, calculer $F_{W_5}^{-1}(u)$, pour $u = 0.01$ et $u = 0.99$. Interpréter.

Code LaTeX : ex-121022.tex

10. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de renouvellement, avec $N(0) = 0$ pour un contrat. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j \in \mathbb{N}^+\}$, où $W_j \sim W$, avec $E[W] < \infty$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ (par convention) et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j \in \mathbb{N}^+$. Le nombre de sinistres survenus pendant l'intervalle de temps $(0,t]$, $N(t) = N(0,t]$ est obtenu avec

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} = \sup\{k \in \mathbb{N}, T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0.$$

pour $t > 0$.
Soit $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ le processus agrégé des sinistres défini à partir du processus de renouvellement $\underline{N}$ où $S(0) = 0$ et

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N(t)} B_j & , \quad N(t) > 0 \\ 0 & , \quad N(t) = 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

où $\underline{B} = \{B_j, j \in \mathbb{N}^+\}$ est une suite de v.a. i.i.d. ($B_j \sim B$), qui est aussi indépendante de $\underline{N}$. À noter que la définition en (8.1) est équivalente aux deux définitions suivantes :

$$S(t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j 1_{\{T_j \leq t\}} \tag{8.2}$$

ou

$$S(t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j 1_{\{N(t) \geq j\}}. \tag{8.3}$$

Question : On suppose que $E[B] < \infty$. De plus, on sait que

$$E[S(t)] = E[N(t)] \times E[B]. \tag{8.4}$$

Utiliser la définition en (8.2) et les hypothèses du modèle pour démontrer (8.4). Important : on ne prend pas l'approche présentée dans la partie du document pour les sommes aléatoires (i.e. en conditionnant sur $N(t)$).

Code LaTeX : ex-121024.tex

# contrat	nombre de mois en vigueur pendant l'année 2017	# de sinistres
1	5	0
2	6	0
3	1	0
4	3	0
5	6	0
6	4	0
7	8	0
8	2	0
9	12	1
10	7	0
11	5	0
12	8	1
13	12	4
14	9	1
15	10	2
16	8	1
17	4	0
18	7	0
19	9	2
20	10	0

Tableau 8.1 – Données pour l'exercice 11.

11. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène avec un paramètre λ, avec $N(0) = 0$ à l'émission d'un contrat.

    On considère un portefeuille homogène (caractéristiques de classification identiques) $n = 20$ contrats d'assurance où $\underline{N}_i = \{N_i(t), t \geq 0\}$ corresponds au processus de comptage démarrant à l'émission du contrat i, $i = 1, 2, ..., n$. Les processus $\underline{N}_1$, ..., $\underline{N}_n$ sont indépendants et identiquement distribués. Les dates d'émission diffèrent d'un contrat à un autre.

    Le tableau 8.1 indique les données de sinistres pendant l'année 2017 pour les n contrats (annuels, renouvelables) en vigueur pendant cette période.

    Approches d'estimation :

    — A0 : on ignore l'information relative au nombre de mois en vigueur pendant l'année 2017 ;

    — A1 : on tient compte de l'information relative au nombre de mois en vigueur pendant l'année 2017 ;

    On utilise la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance pour estimer λ.

    Questions :

    (a) On procède à l'estimation selon A0.

      i. Écrire la fonction de vraisemblance et le log de la fonction de vraisemblance.

      ii. Utiliser la MV pour identifier à l'expression de l'estimateur $\widehat{\lambda}$ du paramètre λ.

      iii. Calculer la valeur de $\widehat{\lambda}$.

    (b) On procède à l'estimation selon A1.

      i. Écrire la fonction de vraisemblance et le log de la fonction de vraisemblance.

      ii. Utiliser la MV pour identifier à l'expression de l'estimateur $\widehat{\lambda}$ du paramètre λ.

      iii. Calculer la valeur de $\widehat{\lambda}$.

    (c) Compte tenu des informations disponibles, indiquer l'approche appropriée. Quelle est l'incidence sur la valeur de $\widehat{\lambda}$ et les valeurs éventuelles à calculer ?

Code LaTeX : ex-121025.tex

12. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de renouvellement, avec $N(0) = 0$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j \in \mathbb{N}^+\}$, où $W_j \sim W \sim Erlang(m, \lambda)$, avec $F_W(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$, $m \in \mathbb{N}^+$, $x \geq 0$. On définit les temps d'occurences des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ (par convention) et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j \in \mathbb{N}^+$. Le nombre de sinistres survenus pendant l'intervalle de temps $(0, t]$, $N(t) = N(0, t]$ est obtenu avec

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} = \sup\{k \in \mathbb{N}, T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0.$$

Question : Démontrer que

$$\Pr(N(t) = k) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{j=mk}^{m(k+1)-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \text{ pour } k \in \mathbb{N} \text{ et } t > 0. \tag{8.5}$$

Que devient l'expression en (8.5) si $m = 1$?

Code LaTeX : ex-121026.tex

8.2 Exercices informatiques

1. On considère les données suivantes pour le nombre de catastrophes survenus au Canada pour les années 1983 à 2016 :

année	nombre	année	nombre	année	nombre	année	nombre	année	nombre
1983	2	1990	1	1997	3	2004	4	2011	14
1984	1	1991	5	1998	5	2005	4	2012	10
1985	2	1992	8	1999	5	2006	4	2013	9
1986	1	1993	5	2000	6	2007	7	2014	7
1987	3	1994	9	2001	7	2008	8	2015	5
1988	3	1995	8	2002	5	2009	10	2016	14
1989	1	1996	8	2003	9	2010	11	–	–

Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson non-homogène, avec une intensité $\lambda_1(t) = a + bt$, avec $a, b > 0$ $(t \geq 0)$ et $\lambda_2(t) = cdt^{d-1}$, avec $a, b > 0$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. indépendantes $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$. On définit le processus déterministe $\underline{\Lambda}_i = \{\Lambda_i(t), t \geq 0\}$, avec $\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s)\,\mathrm{d}s$, $t \geq 0, i \in \{1, 2\}$ (note : $\Lambda_i(0) = 0$). Note : $t = 0$ correspond au 1.1.1983.
On vise à estimer les paramètres a et b pour des fins de prédiction.
Questions :

(a) Écrire la fonction de vraisemblance $L(a, b)$ en tenant compte du format de données.
(b) Estimer les valeurs des paramètres a et b selon la méthode du maximum de vraisemblance. Indiquer la valeur de fonction de vraisemblance aux valeurs de paramètres.
(c) Écrire la fonction de vraisemblance $L(c, d)$ en tenant compte du format de données.
(d) Estimer les valeurs des paramètres c et d selon la méthode du maximum de vraisemblance. Indiquer la valeur de fonction de vraisemblance aux valeurs de paramètres.
(e) Vérifier l'adéquation du modèle à l'aide de la courbe des observations cumulées et des fonctions $\Lambda_i(t), i \in \{1, 2\}, t \in (0, 36]$.
(f) Utiliser la méthode du ratio de vraisemblance pour tester si $b = 0$.

(g) Cacluler la prédiction du nombre espéré de catastrophes pour les années 2017, 2018, 2019, 2020, et 2021.

Code LaTeX : ex-121014.tex

2. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène, avec une intensité $\lambda > 0$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$, où $W_j \sim W \sim Exp(\lambda)$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$.
Pour les calculs, on fixe $\lambda = 1$.
   (a) Soit set.seed(2018). Simuler $m = 5$ parcours de $\underline{N}$ sur $(0, 10]$ avec l'algorithme PP1.
   (b) Soit $\underline{X} = \{X_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. avec $X_k \sim X \sim LNorm\left(\mu = \ln(10) - \frac{1}{2}, \sigma = 1\right)$. Soit $\underline{Z}^{(\delta)} = \left\{Z^{(\delta)}(t), t \geq 0\right\}$ un processus aléatoire avec $Z^{(\delta)}(0) = 0$ et
$$Z^{(\delta)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta T_k} X_k \times 1_{\{T_k \leq t\}}$$
où T_k est l'avènement du k sinistre associé au processus $\underline{N}$ et $\delta = 3\%$ est la force d'intérêt. Calculer 5 réalisations de $Z^{(\delta)}(t)$ pour $t = 10$, avec les 5 réalisations de $\underline{N}$ sur $(0, 10]$.
   (c) Soit set.seed(2018). Refaire [2a] et [2b], avec $m = 1\ 000\ 000$. Calculer une approximation de $VaR_\kappa\left(Z^{(\delta)}(t)\right)$, pour $t = 10$ et $\kappa = 0.99$.

Code LaTeX : ex-121001.tex

3. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène, avec une intensité $\lambda > 0$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$, où $W_j \sim W \sim Exp(\lambda)$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$.
Pour les calculs, on fixe $\lambda = 1$.
   (a) Soit set.seed(2018). Simuler $m = 5$ parcours de $\underline{N}$ sur $(0, 10]$ avec l'algorithme PP2
   (b) Soit $\underline{X} = \{X_k, k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. avec $X_k \sim X \sim LNorm\left(\mu = \ln(10) - \frac{1}{2}, \sigma = 1\right)$. Soit $\underline{Z}^{(\delta)} = \left\{Z^{(\delta)}(t), t \geq 0\right\}$ un processus aléatoire avec $Z^{(\delta)}(0) = 0$ et
$$Z^{(\delta)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta T_k} X_k \times 1_{\{T_k \leq t\}}$$
où T_k est l'avènement du k sinistre associé au processus $\underline{N}$ et $\delta = 3\%$ est la force d'intérêt. Calculer 5 réalisations de $Z^{(\delta)}(t)$ pour $t = 10$, avec les 5 réalisations de $\underline{N}$ sur $(0, 10]$.
   (c) Soit set.seed(2018). Refaire [3a] et [3b], avec $m = 1\ 000\ 000$. Calculer une approximation de $VaR_\kappa\left(Z^{(\delta)}(t)\right)$, pour $t = 10$ et $\kappa = 0.99$.

Note : généralement, l'algorithme PP2 est plus performant.

Code LaTeX : ex-121002.tex

4. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson non-homogène, avec une intensité $\lambda(t) = a + bt$, avec $a, b > 0$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$. On définit le processus déterministe $\underline{\Lambda} = \{\Lambda(t), t \geq 0\}$, avec $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, \mathrm{d}s$, $t \geq 0$ (note : $\Lambda(0) = 0$).
Pour les calculs, on fixe $\lambda(t) = 0.5 + 0.05t$.

(a) Soit set.seed (2018). Simuler $m = 5$ parcours de $\underline{N}$ sur $(0, 10]$ avec l'algorithme PPNH1.

i. Démontrer que $\Lambda(t) = at + bt^2$, $t \geq 0$.

ii. Démontrer que

$$\begin{aligned} F_s(t) &= 1 - \exp\left(-\int_s^{s+t} \lambda(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\left(\Lambda(s+t) - \Lambda(s)\right)\right), \end{aligned}$$

pour $t \geq 0$.

iii. Identifier l'expression de $F_s^{-1}(u)$, $u \in (0, 1)$.

iv. Simuler les parcours.

(b) Soit set.seed (2018). Simuler $m = 5$ parcours de $\underline{N}$ sur $(0, 10]$ avec l'algorithme PPHN2. Note : pour l'application numérique, $t = 10$.

i. Soit une v.a. continue V dont la fonction de densité est

$$f_V(v) = \frac{\lambda(v)}{\Lambda(t)},\ 0 < v < t.$$

Identifier l'expression de $f_V(v)$.

ii. Identifier l'expression de $F_V(v)$,

$$F_V(v) = \begin{cases} \int_0^v f_V(x)\,\mathrm{d}x & , \quad 0 < v \leq t \\ 1 & , \quad v > t \end{cases}$$

où

$$\int_0^v f_V(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Lambda(v)}{\Lambda(t)},\ 0 < v < t.$$

iii. Identifier l'expression de $F_V^{-1}(u)$, $u \in (0, 1)$.

iv. Simuler les parcours.

Code LaTeX : ex-121003.tex

5. Le tableau (source : Tableau 2 de Swiss Re (2010)) ci-dessous contient les coûts totaux de $m = 28$ inondations importantes survenues au Canada pendant les années 1909, 1910, ..., 2008 (100 ans) :

Année	Province	Coût
1954	ON	5395
1948	BC	5172
1950	MB	4652
1996	QC	2699
1997	MB	1230
1948	ON	706
1993	MB	618
2005	ON	587
2005	AB	519
1937	ON	470
1923	NB	463
1955	SK/MB	362
2004	AB	303
1995	AB	285
1936	NB	188
1999	MB	163
1916	ON	161
1909	NB	149
1961	NB	148
1987	QC	147
1996	QC	145
1920	ON	132
1920	BC	131
2004	ON	129
1972	QC	124
1983	NF	115
1974	QC	103

Les coûts sont en 1 millions \$ de 2008.

(a) Identifier les années avec 0 sinistres, avec 1 sinistres, les années avec 2 sinistres, etc.

(b) Tracer le parcours de nombres cumulés d'inondations en fonction du temps.

(c) Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson homogène, avec une intensité $\lambda = a > 0$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$. Note : $t = 0$ correspond au 1.1.1909. On vise à estimer le paramètre a pour des fins de prédiction.

i. Écrire la fonction de vraisemblance $L(a)$ en tenant compte du format de données.

ii. Estimer la valeur du paramètre a selon la méthode du maximum de vraisemblance. Indiquer la valeur de fonction de vraisemblance aux valeurs de paramètres.

iii. Vérifier graphiquement l'adéquation du modèle choisi aux données.

iv. Calculer la prédiction du nombre espéré d'inondations pour les années 2009, 2019.

v. Calculer l'espérance du temps à écouler (à compter du 1.1.2018) avant l'avènement de la prochaine inondation.

vi. Calculer la probabilité qu'il se produise j inondations en 2018, pour $j = 0, 1, 2, 3$.

(d) Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson non-homogène, avec une intensité $\lambda(t) = a + bt$, avec $a, b > 0$ $(t \geq 0)$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. **indépendantes** $\underline{W} = \{W_j, j = 1, 2, ...\}$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j = 1, 2, ...\}$, où $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j = 1, 2, ...$. On définit le processus déterministe $\underline{\Lambda} = \{\Lambda(t), t \geq 0\}$, avec $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s$, $t \geq 0$ (note : $\Lambda(0) = 0$). Note : $t = 0$ correspond au 1.1.1909. On vise à estimer les paramètres a et b pour des fins de prédiction.

i. Écrire la fonction de vraisemblance $L(a,b)$ en tenant compte du format de données.

ii. Estimer les valeurs des paramètres a et b selon la méthode du maximum de vraisemblance. Indiquer la valeur de fonction de vraisemblance aux valeurs de paramètres.

iii. Vérifier graphiquement l'adéquation du modèle choisi aux données.

iv. Utiliser la méthode du ratio de vraisemblance pour tester si $b = 0$.

v. Cacluler la prédiction du nombre espéré de catastrophes pour les années 2009, 2019.

Code LaTeX : ex-121017.tex

6. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de renouvellement, avec $N(0) = 0$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j \in \mathbb{N}^+\}$, où $W_j \sim W \sim Gamma(\alpha, \beta)$, avec $E[W] = \frac{\alpha}{\beta}$ et $F_W(x) = H(x; \alpha, \beta)$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ (par convention) et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j \in \mathbb{N}^+$. Le nombre de sinistres survenus pendant l'intervalle de temps $(0,t]$, $N(t) = N(0,t]$ est obtenu avec

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} = \sup\{k \in \mathbb{N}, T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0. \tag{8.6}$$

L'expression de l'espérance de $N(t)$, i.e., le nombre espéré de sinistres sur l'intervalle de temps $(0,t]$, est donnée par

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} E\left[1_{\{T_k \leq t\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} F_{T_k}(t), \tag{8.7}$$

pour $t > 0$.On considère les 3 hypothèses suivantes :

— H1 : $\alpha = 1$, $\beta = 5$ (processus de Poisson) ;

— H2 : $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$ (processus de renouvellement gamma) ;

— H3 : $\alpha = 5$, $\beta = 25$ (processus de renouvellement gamma).

Questions :

(a) Pour H1, H2 et H3, calculer une approximation de $m(1)$ à l'aide de (8.7) en sommant les termes jusqu'à $k_0 = 1000$.

(b) Identifier l'expression de la fonction de masse de probabilité de $N(t)$.

(c) Pour H1, H2 et H3, calculer les valeurs de $f_{N(1)}(k)$, $k = 0, 1, ..., 100$. Utiliser ces valeurs pour calculer $E[N(1)]$, $Var(N(1))$ et $F_{N(1)}^{-1}(\kappa)$ ($\kappa = 0.9$, 0.99). Comparer les résultats obtenus.

(d) On fournit les réalisations suivantes de la v.a. $U \sim Unif(0,1)$: 0.65 ; 0.24 ; 0.98 ; 0.76 ; 0.34 ; 92 ; 0.03 ; 0.07 ; 0.35 ; 0.51.

i. Proposer un algorithme récursif pour simuler les 10 premiers temps d'arrivée ($T_1^{(1)}$, ..., $T_{10}^{(1)}$) du parcours (1) de $\underline{N}$ à l'aide des temps intersinistres.

ii. Pour H1, H2, et H3 et à l'aide de (8.6), utiliser cet algorithme pour calculer ($T_1^{(1)}$, ..., $T_{10}^{(1)}$).

iii. Pour H1, H2, et H3 et à l'aide de (8.6), utiliser cet algorithme pour calculer la réalisation $N^{(1)}(1)$.

Code LaTeX : ex-121018.tex

7. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de renouvellement, avec $N(0) = 0$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j \in \mathbb{N}^+\}$, où $W_j \sim W \sim Weibull(\alpha, \beta)$, avec $F_W(x) = 1 - \exp(-(\beta x)^\tau)$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ (par convention) et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j \in \mathbb{N}^+$. Le nombre de sinistres survenus pendant l'intervalle de temps $(0, t]$, $N(t) = N(0, t]$ est obtenu avec

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} = \sup\{k \in \mathbb{N}, T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0.$$

La fonction de masse de probabilité de $N(t)$ est donnée par

$$\Pr(N(t) = k) = F_{T_k}(t) - F_{T_{k+1}}(t), \tag{8.8}$$

pour $k \in \mathbb{N}$, avec $F_{T_0}(t) = 1$, pour tout $t > 0$.
Algorithme de simulation :

(1) Simuler la réalisation $\left(U_1^{(j)}, ..., U_6^{(j)}\right)$ du vecteur de v.a. i.i.d. $(U_1, ..., U_6)$ $(U_i \sim Unif(0,1))$;

(2) Simuler la réalisation $\left(W_1^{(j)}, ..., W_6^{(j)}\right)$ de $(W_1, ..., W_6)$ (on utilise la méthode inverse) ;

(3) Simuler la réalisation $\left(T_1^{(j)}, ..., T_6^{(j)}\right)$ de $(T_1, ..., T_6)$ avec $T_i^{(j)} = \sum_{l=1}^{i} W_l^{(j)}$, $i = 1, 2, , ..., 6$;

(4) Répéter (1)-(3) pour $j = 1, 2, ..., n_{sim}$.

On considère les 3 hypothèses suivantes :

— H1 : $\tau = 1$, $\beta = 2$ (processus de Poisson) ;
— H2 : $\tau = 0.5$, β est fixé de telle sorte que $E[W] = \frac{1}{2}$ (processus de renouvellement Weibull) ;
— H3 : $\tau = 1.5$, β est fixé de telle sorte que $E[W] = \frac{1}{2}$ (processus de renouvellement Weibull).

Questions :

(a) Pour H1, H2, et H3, calculer $\Pr(N(1) = 0)$.

(b) En R, on fixe `set.seed(2018)`. Pour H2 et H3, on utilise la simulation Monte-Carlo ($n_{sim} = 100000$) et l'algorithme pour évaluer approximativement les valeurs de $\Pr(N(1) = k)$, $k = 1, 2, ..., 5$.

   i. Indiquer les valeurs de $\left(W_1^{(j)}, ..., W_6^{(j)}\right)$ pour $j = 1, 2$.
   H2 $(j = 1)$: 0.0419644 0.09706495 0.0009765109 0.01209348 0.10337883 0.03207217
   H2 $(j = 2)$: 0.2177773 0.00484945 2.5373254563 0.15663032 0.06338951 0.29825164
   H3 $(j = 1)$: 0.3055285 0.4040597 0.08722691 0.2018096 0.4126374 0.2793407
   H3 $(j = 2)$: 0.5289675 0.1488180 1.19917756 0.4739327 0.3505612 0.5874249

   ii. Indiquer les valeurs de $\left(T_1^{(j)}, ..., T_6^{(j)}\right)$ pour $j = 1, 2$.
   H2 $(j = 1)$: 0.0419644 0.1390294 0.1400059 0.1520993 0.2554782 0.2875503
   H2 $(j = 2)$: 0.2177773 0.2226267 2.7599522 2.9165825 2.9799720 3.2782237
   H3 $(j = 1)$: 0.3055285 0.7095883 0.7968152 0.9986248 1.411262 1.690603
   H3 $(j = 2)$: 0.5289675 0.6777855 1.8769631 2.3508958 2.701457 3.288882

   iii. Évaluer approximativement les valeurs de $F_{T_k}(1)$, $k = 1, 2, ..., 6$.

   iv. Utiliser les valeurs en [7(b)iii] avec l'expression en (8.8) pour évaluer approximativement les valeurs de $\Pr(N(1) = k)$ et $E[\min(N(1); 5)]$, $k = 1, 2, ..., 5$.

Code LaTeX : ex-121019.tex

8. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de renouvellement, avec $N(0) = 0$. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j \in \mathbb{N}^+\}$, où $W_j \sim W \sim Weibull(\alpha, \beta)$, avec $F_W(x) = 1 - \exp(-(\beta x)^\tau)$. On définit les temps d'occurences des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ (par convention) et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j \in \mathbb{N}^+$. Le nombre de sinistres survenus pendant l'intervalle de temps $(0, t]$, $N(t) = N(0, t]$ est obtenu avec

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} = \sup\{k \in \mathbb{N}, T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0.$$

Code LaTeX : ex-121020.tex

On dispose des données suivantes pour les temps d'occurrences des 31 sinistres pour l'intervalle $(0, 15]$: 0.3055285 ; 0.7095883 ; 0.7968152 ; 0.9986248 ; 1.411262 ; 1.690603 ; 2.21957 ; 2.368388 ; 3.567566 ; 4.041499 ; 4.39206 ; 4.979485 ; 6.380634 ; 6.98289 ; 7.753156 ; 8.309093 ; 8.5659 ; 9.045187 ; 9.718129 ; 10.5263 ; 10.7752 ; 11.26835 ; 11.43449 ; 11.55362 ; 12.25831 ; 12.72269 ; 13.02203 ; 14.06437 ; 14.58528 ; 14.67648 ; 14.83452.

On considère les 2 hypothèses suivantes :

— H1 : $\tau = 1$, $\beta =??$ (processus de Poisson) ;

— H2 : $\tau =??$ $\beta =??$ (processus de renouvellement Weibull).

Questions :

(a) Pour H1, utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer le paramètre β. Comparer graphiquement les fonctions de répartition empirique et paramétrique des temps inter-sinistres.

(b) Pour H2, utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres τ et β. Comparer graphiquement les fonctions de répartition empirique et paramétrique des temps inter-sinistres.

(c) Utiliser le test du ratio de vraisemblance pour choisir entre H1 et H2.

(d) Pour H1 et H2, calculer la probabilité qu'aucun sinistre survienne pendant l'intervalle $(15, 16]$, i.e. pendant la prochaine année.

9. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de renouvellement, avec $N(0) = 0$ pour un contrat. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j \in \mathbb{N}^+\}$, où $W_j \sim W \sim Gamma(\alpha, \beta)$, avec $E[W] = \frac{\alpha}{\beta}$ et $F_W(x) = H(x; \alpha, \beta)$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ (par convention) et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j \in \mathbb{N}^+$. Le nombre de sinistres survenus pendant l'intervalle de temps $(0, t]$, $N(t) = N(0, t]$ est obtenu avec

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} = \sup\{k \in \mathbb{N}, T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0.$$

pour $t > 0$.

On dispose des données de fréquence suivantes pour une année de contrat, pour 2000 contrats d'assurance (dont les nombres de sinistres sont supposés i.i.d) :

nb de sinistres	nb de contrats
0	190
1	681
2	692
3	345
4	77
5	13
6	2
>6	0

On considère les 2 hypothèses suivantes :

— H1 : $\alpha = 1$, $\beta =??$ (processus de Poisson) ;

— H2 : $\alpha =??$, $\beta =??$ (processus de renouvellement gamma).

Questions :

(a) Pour H1, utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer le paramètre β. Construire la fonction de vraisemblance. Comparer graphiquement les fonctions de masse de probabilité empirique et paramétrique de $N(1)$.

(b) Pour H2, utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres τ et β. Construire la fonction de vraisemblance. Comparer graphiquement les fonctions de masse de probabilité empirique et paramétrique de $N(1)$.

(c) Utiliser le test du ratio de vraisemblance pour choisir entre H1 et H2.

Code LaTeX : ex-121021.tex

10. Soit $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processus de renouvellement, avec $N(0) = 0$ pour un contrat. On définit les temps inter-sinistres associés à $\underline{N}$ par la suite de v.a. i.i.d. $\underline{W} = \{W_j, j \in \mathbb{N}^+\}$, où $W_j \sim W \sim Gamma(\alpha, \beta)$, avec $E[W] = \frac{\alpha}{\beta}$ et $F_W(x) = H(x; \alpha, \beta)$. On définit les temps d'avènements des sinistres par la suite de v.a. $\underline{T} = \{T_j, j \in \mathbb{N}\}$, où $T_0 = 0$ (par convention) et $T_j = \sum_{l=1}^{j} W_l$, $j \in \mathbb{N}^+$. Le nombre de sinistres survenus pendant l'intervalle de temps $(0, t]$, $N(t) = N(0, t]$ est obtenu avec

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} = \sup\{k \in \mathbb{N}, T_k \leq t\}, \text{ pour } t > 0.$$

pour $t > 0$.
Soit $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ le processus agrégé des sinistres défini à partir du processus de renouvellement $\underline{N}$ où $S(0) = 0$ et

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N(t)} B_j & , \quad N(t) > 0 \\ 0 & , \quad N(t) = 0 \end{cases}$$

où $\underline{B} = \{B_j, j \in \mathbb{N}^+\}$ est une suite de v.a. i.i.d. ($B_j \sim B \sim Gamma(\tau, \lambda)$, avec $E[B] = \frac{\tau}{\lambda}$ et $F_B(x) = H(x; \tau, \lambda)$), qui est aussi indépendante de N.
On considère les 3 hypothèses suivantes :

— H1 : $\alpha = 1$, $\beta = 5$ (processus de Poisson) ;

— H2 : $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$ (processus de renouvellement gamma) ;

— H3 : $\alpha = 5$, $\beta = 25$ (processus de renouvellement gamma).

Hypothèses addtionnelles :

— $\tau = 1.5$ et $\lambda = 1.5$;

— pour des fins d'évaluations numériques $\Pr(N(1) = k) = 0$, pour $k \geq 1000$.

Questions :

(a) Pour H1, H2, et H3, calculer $E[N(1)]$ et $E[S(1)]$.

(b) Pour H1, H2, et H3, calculer $Var(N(1))$.

(c) Pour H1, H2, et H3, calculer $Var(S(1))$.

(d) Pour H1, H2, et H3, calculer $F_{S(1)}(x)$, pour $x = 10$, 20.

(e) Pour H1, H2, et H3, calculer $VaR_\kappa(S(1))$, pour $\kappa = 0.99$ (avec un outil d'optimisation numérique tel que `optimize` en R).

(f) Pour H1, H2, et H3, calculer $TVaR_\kappa(S(1))$, pour $\kappa = 0.99$ (avec un outil d'optimisation numérique tel que `optimize` en R).

Code LaTeX : ex-121023.tex

Chapitre 9

Méthodes récursives d'agrégation

9.1 Exercices traditionnels

1. Soit la v.a. $X \sim BNegComp\,(r, q; F_B)$ avec

$r = 0.2$	$q = \frac{1}{2}$
$\Pr(B = 1000k) = \gamma\,(1-\gamma)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^+$	$\gamma = \frac{1}{4}$

   On dispose des valeurs suivantes :

k	0	1	2	3
$f_X\,(1000k)$	? ? ?	0.02176376	0.01795511	? ? ?

   Calculer $f_X\,(0)$ et utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_X\,(3000)$.

2. Le nombre total de sinistres pour un portefeuille d'assurance automobile composé de 3 classes est défini par la v.a. $N = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j} M_{j,i}$ où $n_1 = 40$, $n_2 = 50$, $n_3 = 30$, $M_{1,i} \sim Pois\,(0.04)$ $(i = 1, 2, ..., n_1)$, $M_{2,i} \sim BN\,(2, 0.97)$ $(i = 1, 2, ..., n_2)$, $M_{3,i} \sim BN\,(3, 0.99)$ $(i = 1, 2, ..., n_3)$, v.a. $M_{j,i}$ = nombre de sinistres pour le contrat i de la classe j $(j = 1, 2, 3)$. Tous les contrats sont indépendants.

   Calculer $f_N\,(k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

3. Les coûts pour un portefeuille de $n = 100$ contrats d'assurance IARD sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les coûts des contrats $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d. Pour $i = 1, 2, ..., n$, $X_i \sim X \sim BNComp\,(r, q; F_B)$ avec $r = 0.2$, $q = \frac{1}{1.2}$ et $f_B\,(1000j) = 0.4 \times 0.6^{j-1}$, pour $j \in \mathbb{N}^+$.

   En utilisant l'algorithme de Panjer, évaluer $f_S\,(1000j)$ pour $j = 0, 1, 2, 3$.

4. On considère un contrat d'assurance habitation pour le volet protection incendie pour la résidence unifamiliale seulement. On suppose qu'au plus un incendie peut survenir pour une résidence au cours d'une année. Les coûts pour un contrat sont définis par X, où

$$X = \begin{cases} B, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases},$$

   avec $E\,[I] = 0.005$ et $B = U \times c$. La v.a. U représente le pourcentage de dommage et la constante c représente la valeur de la résidence. Les v.a. U et I sont indépendantes. On suppose que $\Pr\left(U = \frac{1}{2}\right) = 0.6$, $\Pr\left(U = \frac{2}{2}\right) = 0.4$ et que $c = 200\ 000$. On suppose que le même type de contrat est émis à 100 résidences. Les contrats sont supposés indépendants. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$ en prenant la convention que $X_i \sim X$, $i = 1, 2, ..., 100$.

   Calculer $f_S\,(100\ 000k)$, pour $k = 0, 1, ..., 4$.

5. Les coûts totaux pour portefeuille d'assurance automobile de la compagnie d'assurance générale ABC sont définis par la v.a. $S = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_j} X_{j,i}$ où la v.a. $X_{j,i}$ représente les coûts pour le contrat i dans la classe j, pour $i = 1, 2, ..., n_j$ $(j = 1, 2)$. Les v.a. $X_{1,1}$, ..., X_{1,n_1}, $X_{2,1}$, ..., X_{1,n_2} sont indépendantes. De

plus, $X_{j,i} \sim PComp(\lambda_j; F_{B_j})$ avec $\lambda_1 = 0.036$, $\lambda_2 = 0.054$, $f_{B_1}(10\ 000k) = 0.4 \times 0.6^{k-1}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ et $f_{B_2}(10\ 000k) = 0.5 \times 0.5^{k-1}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$. On mentionne que $E[B_1] = 25\ 000$, $E[B_2] = 20\ 000$, $n_1 = 120$ et $n_2 = 80$.

(a) Calculer l'espérance S.

(b) Indiquer la loi et les paramètres de la loi de S.

(c) Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_S(10\ 000k)$ pour $k = 0, 10, 20, 30$.

(d) Calculer $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.95$ et 0.995.

6. Les coûts pendant une semaine pour une compagnie sont définis par la v.a. X où $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $r = 0.4$, $q = \frac{2}{3}$, $B = \min(C; 5000)$ et $C \sim Weibull\left(0.8, \frac{1}{1000}\right)$. On utilise la méthode *lower* pour approximer la v.a. B par la $\widetilde{B} \in \{1000, 2000, ..., 5000\}$. Cela conduit à l'approximation de la v.a. X par la v.a. $\widetilde{X} \in \{0, 1000, 2000, ...\}$.

   (a) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{B}}(1000k)$ pour $k = 0, 1, ..., 5$.

   (b) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{X}}(1000k)$ pour $k = 0, 1, ..., 7$.

   (c) Approximer $VaR_{0.99}(X)$ par $VaR_{0.99}\left(\widetilde{X}\right)$.

7. On considère un contrat d'assurance auto dont les coûts (v.a. X) sont modélisés selon l'approche fréquence-sévérité. L'actuaire constate que la loi de Poisson n'est pas appropriée pour décrire le comportement du nombre de sinistres pour un contrat (représenté par la v.a. M). Il choisit plutôt de modifier la loi de Poisson de telle sorte que

$$F_M(k) = (1-\theta) + \theta F_{M'}(k),\ (k \in \mathbb{N}),$$

   où $\theta = 0.05$ et $M' \sim Pois(1)$. La fonction de masse de probabilité du montant d'un sinistre est donnée par $f_B(10\ 000j) = 0.4 \times 0.6^{j-1}$, pour $j \in \mathbb{N}^+$.

   (a) Calculer $E[M]$ et $E[X]$.

   (b) Donner l'expression de la f.g.p. de M.

   (c) Calculer $f_X(10\ 000j)$, pour $j = 0, 1, 2, 3$.

8. On examine le risque associé à un contrat d'assurance automobile émis à des assurés du Québec. L'actuaire croit que la population du Québec est composée de bons conducteurs (avec une proportion de 80 %) et de mauvais conducteurs (avec une proportion de 20 %). On modélise les coûts pour un contrat (v.a. X) par l'approche fréquence-sévérité. Si l'assuré est un bon conducteur, le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson de moyenne 0.1. Si l'assuré est un mauvais conducteur, le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson de moyenne 0.25. En cas de sinistre, le montant d'un sinistre obéit à une loi discrète de moyenne 3000 quel que soit le type de conducteur, où $f_B(1000j) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}$, pour $j \in \mathbb{N}^+$. Au moment de l'émission d'un nouveau contrat, on ne dispose pas d'information sur le type de conducteur.

   Calculer $f_X(1000j)$, pour $j = 0, 1, 2, 3$.

9. On considère un portefeuille de contrats d'assurance maladie au cours des 2 prochaines années. Les coûts pour l'année k sont définis par la v.a. W_k, pour $k = 1, 2$. On définit la valeur actualisée des coûts pour les 2 prochaines années par la v.a. $Z = vW_1 + v^2W_2$. Les v.a. W_1 et W_2 sont i.i.d. avec $W_i \sim W$, $(i = 1,\ 2)$. De plus, $W \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $r = 2$, $\beta = 1$ et $B \sim Pa(3, 4000)$. On note que $v = 0.95$.

   Pour évaluer $VaR_\kappa(Z)$, on approxime la v.a. Z par la v.a. discrète $\widetilde{Z} \in \{0, 1000, 2000, ...\}$. On utilise des algorithmes récursifs en appliquant la méthode *lower* de discrétisation avec un pas de discrétisation de 1000 pour définir $\widetilde{Z}$ et obtenir les valeurs de $f_{\widetilde{Z}}(1000k)$, $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Calculer l'espérance et la variance des coûts totaux Z.

   (b) Calculer $\Pr(\widetilde{Z} = 1000k)$ pour $k = 0, 10$ et 20.

(c) Utiliser $VaR_\kappa\left(\widetilde{Z}\right)$ pour évaluer approximativement $VaR_\kappa(Z)$ pour $\kappa = 99$ %.

10. On peut représenter le produit de convolution discret par un produit matriciel.
Soit les v.a. X_1 et X_2 avec
$$f_{X_i}(k) = \Pr(X_i = k) > 0,$$
pour $k = 0, 1, ..., n_1 - 1$, et $f_{X_i}(k) = 0$, pour $k = n, n+1, ...$. Note : $n = \max(n_1, n_2)$ où n_i est tel que $f_{X_i}(k) = \Pr(X_i = k) > 0$, pour $k = 0, 1, ..., n_i - 1$ $(i = 1, 2)$.
On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$, avec
$$f_S(k) = \Pr(S = k) = \sum_{j=0}^{k} f_{X_1}(j)\, f_{X_2}(k-j),$$
pour $k = 0, 1, 2, ..., 2(n-1)$.
On définit les vecteurs suivants :
$$\begin{aligned} \underline{a}^T &= (a_0, a_1 ..., a_{n-1}), \text{ avec } a_k = f_{X_1}(k) \ \ (k = 0, 1, ..., n-1), \\ \underline{b}^T &= (b_0, b_1 ..., b_{n-1}), \text{ avec } b_k = f_{X_2}(k) \ \ (k = 0, 1, ..., n-1), \end{aligned}$$
et
$$\underline{c}^T = \left(c_0, c_1 ..., c_{2(n-1)}\right) \ \ (k = 0, 1, ..., 2(n-1)),$$
où "^{T}" désigne la transposée d'un vecteur ou d'une matrice.
Alors, on a
$$\underline{c} = \underline{a} * \underline{b}$$
est le produit de convolution des vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$. Il est donné par
$$\underline{c}^T = \underline{a}^T \otimes \underline{B} \tag{9.1}$$
où
$$\underline{B} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & ... & b_{n-1} & 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & ... & b_{n-1} & 0 & ... & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 & b_0 & b_1 & ... & b_{n-1} \end{pmatrix}$$
est une matrice avec n lignes et $2n-1$ colonnes. La matrice $\underline{B}$ est appelée la matrice de Toeplitz.
Cette méthode d'effectuer le produit de convolution est élégante.
Hypothèses :

k	$f_{X_1}(k) = a_k$	$f_{X_1}(k) = b_k$
0	0.7	0.3
1	0.2	0.5
2	0.1	0.2

Questions :

(a) Construire la matrice de Toeplitz $\underline{B}$. Rép :
$$\underline{B} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

(b) Effectuer le produit de convolution en (9.1) pour obtenir les valeurs du vecteur $\underline{c}$, i.e., les valeurs de $f_S(k) = c_k$, $k = 0, 1, ..., 2n-2$.

11. Pour la compagnie d'assurance ABC, l'évolution du nombre de décès avec un montant de prestation

de décès $1000i$ $(i = 1, 2, ..., 5)$ est représentée par le processus de Poisson

$$\underline{M}_i = \{M_i(t), t \geq 0\}$$

avec une intensité $\lambda_i = 0.06 - 0.01i$, pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
Les processus $\underline{M}_1$, ..., $\underline{M}_5$ sont indépendants.
Le processus du montant total des sinistres est défini par $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$.
Questions :

(a) Montrer que $\underline{S}$ est un processus Poisson composé avec $S(0) = 0$ et

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} B_k, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases},$$

où $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec un paramètre λ_N et $\{B_k, \quad k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. (et indépendante de $\underline{N}$) où

$$B_k \sim B \in \{1000, 2000, ..., 5000\}.$$

(b) Calculer la valeur de λ_N et calculer les valeurs de la fonction de masse de probabilité de B.

(c) Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_{S(0.25,1.25]}(1000k)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

12. La TLS d'une v.a. Y de loi exponentielle est donnée par

$$\mathcal{L}_Y(t) = \frac{\beta}{\beta + t} \leq 1, \text{ pour } t > 0, \ \beta > 0.$$

Soit $0 < \beta_1 < \beta_2 < \infty$.
Questions :

(a) Vérifier la relation suivante :

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right) = \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) \frac{q}{1 - (1 - q)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)}, \tag{9.2}$$

avec $q = \frac{\beta_1}{\beta_2} \in (0, 1)$.

(b) Soit une v.a. $Y \sim Exp(\beta_1)$ avec $\mathcal{L}_Y(t) = \frac{\beta_1}{\beta_1 + t}$. Démontrer que

$$F_Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k H(x; 1 + k, \beta_2), \ x \geq 0$$

Indiquer les valeurs de γ_k, $k \in \mathbb{N}$.

9.2 Exercices informatiques

1. Soit les v.a. i.i.d. M_1, ..., M_n avec $M_i \sim M$ où

$$\mathcal{P}_M(t) = 0.5 + 0.1t + 0.2t^2 + 0.15t^2 + 0.05t^3,\ t \in [0,1].$$

   On définit $S_n = \sum_{i=1}^n M_i$.
   Utiliser l'algorithme de DePril pour calculer les valeurs de $f_{S_{10}}(k)$, $k = 0, 1, 10, 20$. Les calculs s'effectuent en R. [Note : Les calculs peuvent aussi être effectués avec FFT]

2. Soit les v.a. i.i.d. M_1, ..., M_n avec $M_i \sim M$ où

$$\mathcal{P}_M(t) = 0.6 + 0.3e^{0.1(t-1)} + 0.1e^{0.2(t-1)},\ t \in [0,1].$$

   On définit $N_n = \sum_{i=1}^n M_i$.
   Les valeurs de $f_{N_{100}}(k)$, $k \in \mathbb{N}$, sont calculés avec l'algorithme de DePril.
   Les calculs s'effectuent en R.
   Questions :

   (a) Déduire la fonction de masse de probabilité de M.
   (b) Calculer $E[M]$.
   (c) Calculer $E[N_n]$.
   (d) Calculer $f_{N_{100}}(k)$, $k = 0, 5, 10, 15$.

3. Soit les v.a. i.i.d. $X_1 \sim X_2 \sim X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$ avec $\alpha = 1.5$ et $\lambda = 5$. On approxime les v.a. X_i $(i = 1, 2)$ par les v.a. $\widetilde{X}_i^{(met,h)}$ $(i = 1, 2\,; met = "u"$ (upper) ou $"l"$ (lower)). On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$ et les approximations correspondantes $\widetilde{S}^{(u,h)}$ et $\widetilde{S}^{(l,h)}$. On utilise le produit de convolution pour calculer les valeurs des fonctions de masse de probabilité des v.a. discrètes $\widetilde{S}^{(u,h)}$ et $\widetilde{S}^{(l,h)}$.
   Questions :

   (a) Calculer $VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{(u,h)}\right)$, pour $h = 1$, 0.1 et 0.01 et $\kappa = 0.9$, 0.99, 0.999, 0.9999.
   (b) Calculer $VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{(l,h)}\right)$, pour $h = 1$, 0.1 et 0.01 et $\kappa = 0.9$, 0.99, 0.999, 0.9999.

4. Soit $X \sim BinNeg(r, q; F_B)$ avec $r = 1.5$, $q = \frac{1}{3}$ et $B \sim LNorm\left(\mu = \ln(10) - \frac{0.36}{2}, \sigma = 0.6\right)$. On approxime la v.a. X par la v.a. $\widetilde{X} \sim BinNeg\left(r, q; F_{\widetilde{B}}\right)$ où $\widetilde{B}$ est une v.a. discrète obtenue en discrétisant la v.a. B à la méthode lower avec des pas $h = 1$.

   (a) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{B}}(k)$, $k = 0, 1, 2, ..., 500$. Vérification : $f_{\widetilde{B}}(15) = 0.03008972$.
      i. Indiquer la formule pour calculer ces valeurs.
      ii. Fournir les valeurs de $f_{\widetilde{B}}(k)$, pour $k = 0, 10$.
   (b) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{X}}(k)$, $k = 0, 1, 2, ..., 600$. Vérification : $f_{\widetilde{X}}(15) = 0.01593689$.
      i. Indiquer la méthode utilisée.
      ii. Fournir les valeurs de $f_{\widetilde{X}}(k)$, pour $k = 0, 20$.
   (c) Calculer $F_{\widetilde{X}}(k)$ et $\pi_{\widetilde{X}}(k) = E\left[\max\left(\widetilde{X} - k; 0\right)\right]$ pour $k = 50$. Indiquer les formules pour calculer ces valeurs. Vérification : $F_{\widetilde{X}}(60) = 0.8382003$.
   (d) Soit une v.a. discrète K définie sur $\mathbb{N}$. Démontrer que

$$TVaR_\kappa(K) = VaR_\kappa(K) + \frac{1}{1-\kappa}\pi_K(VaR_\kappa(K))$$

   pour $\kappa \in (0,1)$ et $\pi_K(k) = E[\max(K - k; 0)]$, $k \in \mathbb{N}$.

(e) Calculer $TVaR_{\kappa}\left(\widetilde{X}\right)$ pour $\kappa = F_{\widetilde{X}}(50)$. (**Suggestion** : regarder (4c) et (4d) avant de toucher au clavier).

5. Soit la v.a. $S = X_1 + X_2$ où les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes avec $X_1 \sim LN\left(8, 1^2\right)$ et $X_2 \sim Ga\left(4, \frac{1}{1000}\right)$. Pour $i = 1, 2$, on approxime X_i par $\widetilde{X}_i$ en appliquant la méthode *lower* de discrétisation avec un pas de discrétisation de 1000 (suggestion : il est suffisant de discrétiser sur le support $\{0, 1000, ..., 500\ 000\}$. On approxime la v.a. S par la v.a. $\widetilde{S} = \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 \in \{0, 1000, ...\}$

   (a) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{S}}(1000k)$, pour $k = 10$, 20 et 30.

   (b) Utiliser $VaR_{\kappa}\left(\widetilde{S}\right)$ pour approximer $VaR_{\kappa}(S)$ pour $\kappa = 0.95$ et 0.995.

6. Soit les v.a. indépendantes $X_1 \sim Binom(10, 0.2)$ et $X_2 \sim Binom(20, 0.3)$. On définit $S = X_1 + X_2 \in \{0, 1, 2, ..., 30\}$. Utiliser la FFT pour calculer les valeurs exactes de $f_S(k)$, $k = 0, 1, 2, ..., 30$ (Suggestion : appliquer la FFT avec des vecteurs comprenant 32 éléments).

7. Les coûts pour un portefeuille de 1000 contrats d'assurance IARD sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Les v.a. X_1, ..., X_{1000} sont i.i.d. avec $X_i \sim BNComp(r, q; F_B)$, où $r = 0.01$, $q = \frac{1}{4}$ et $B \sim Pa(2.5, 15\ 000)$. On évalue approximativement la v.a. X par la v.a. $\widetilde{X}$ qui résulte de la discrétisation de la v.a. B avec un pas de discrétisation $h = 1000$. Cela signifie que $\widetilde{B}$ et $\widetilde{X} \in \{0, 1000, 2000, ..., 40000 \times 1000\}$. On a recours à la méthode *lower* pour discrétiser la v.a. B. On évalue approximativement S par $\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{1000} \widetilde{X}_i$.

   (a) Calculer l'espérance de S.

   (b) Déterminer les valeurs de $f_{\widetilde{S}}(1000k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et évaluer $E\left[\widetilde{S}\right]$, $E\left[\max\left(\widetilde{S} - 2\ 000\ 000; 0\right)\right]$, $F_{\widetilde{S}}(500\ 000)$, $F_{\widetilde{S}}(1\ 000\ 000)$ et $F_{\widetilde{S}}(2\ 000\ 000)$.

8. Pour la classe j ($j = 1, 2, ..., 5$), les coûts sont définis par les processus de Poisson (homogène) composé $\underline{X}_j = \{X_j(t), t \geq 0\}$ où le processus de Poisson homogène sous-jacent est représenté

$$\underline{M}_j = \{M_j(t), t \geq 0\}$$

avec une intensité $\lambda_j = 0.6 - 0.1j$, pour $j = 1, 2, 3, 4, 5$, et la suite de v.a. i.i.d. (montants de sinistres) sous-jacente est notée par

$$\underline{B}_j = \left\{B_{j,k}, k \in \mathbb{N}^+\right\},$$

avec $B_{j,k} \sim B_j \sim Erlang\left(j, \frac{1}{1000}\right)$, $k \in \mathbb{N}^+$ et $j = 1, 2, ..., 5$.
Les processus $\underline{M}_1$, ..., $\underline{M}_5$ sont indépendants.
Les suites $\underline{B}_1$, ..., $\underline{B}_5$ sont indépendantes.
Les processus $\underline{M}_1$, ..., $\underline{M}_5$ et les suites $\underline{B}_1$, ..., $\underline{B}_5$ sont indépendants.
Ainsi, les processus $\underline{X}_1$, ..., $\underline{X}_5$ sont indépendants.
On définit le processus agrégé des coûts totaux pour le portefeuille par $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ avec

$$S(t) = \sum_{j=1}^{5} X_j(t)$$

pour $t \geq 0$.
Questions :

   (a) Montrer que $\underline{S}$ est un processus Poisson composé avec $S(0) = 0$ et

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} C_k, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases},$$

   où $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ (avec $S(t) = \sum_{j=1}^{5} X_j(t)$, $t \geq 0$) est le processus de Poisson homogène sous-jacent avec un paramètre λ_N et $\underline{C} = \{C_k, \quad k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. (et indépendante de $\underline{N}$) où $C_k \sim C$ et

$$F_C(x) = \sum_{j=1}^{5} p_j H\left(x; k, \frac{1}{1000}\right), \ x \geq 0.$$

(b) Calculer la valeur de λ_N et calculer les valeurs de p_j, $j = 1, 2, ..., 5$.

(c) Calculer $F_C(x)$, $x = 2000$ et 8000.

(d) Démontrer que

$$F_{S(s,s+t]}(x) = \gamma_{(s,s+t]}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{(s,s+t]}(k) H\left(x; k, \frac{1}{1000}\right), \tag{9.3}$$

où $\gamma_{(s,s+t]}(k)$ sont des probabilités telles que $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{(s,s+t]}(k) = 1$. Les probabilités sont calculées avec l'algorithme de Panjer. [Note : les probabilités peuvent aussi avec la FFT].

(e) Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $\gamma_{(0.25,1.25]}(k)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

(f) Pour des fins d'évaluation et on l'avait dans les chapitres précédents, on approxime $F_{S(s,s+t]}(x)$ en (9.3) par

$$\widetilde{F}_{S(s,s+t]}(x) = \gamma_{(s,s+t]}(0) + \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_{(s,s+t]}(k) H\left(x; k, \frac{1}{1000}\right), \tag{9.4}$$

i.e., on approxime la somme infinie de termes par une somme finie de termes, en s'assurant que $\gamma_{(s,s+t]}(0) + \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_{(s,s+t]}(k) = 1$. Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $\gamma_{(0.25,1.25]}(k)$, $k = 0, 1, 2, 3, ..., k_0$ et la relation en (9.4) pour évaluer approximativement $F_{S(s,s+t]}(x)$ par $\widetilde{F}_{S(s,s+t]}(x)$, pour $x = 0$, 2000, 8000, 20000. On fixe $k_0 = 100$.

9. Pour la classe j ($j = 1, 2, ..., 5$), les coûts sont définis par les processus de Poisson (homogène) composé $\underline{X}_j = \{X_j(t), t \geq 0\}$ où le processus de Poisson homogène sous-jacent est représenté

$$\underline{M}_j = \{M_j(t), t \geq 0\}$$

avec une intensité $\lambda_j = 0.6 - 0.1j$, pour $j = 1, 2, 3, 4, 5$, et la suite de v.a. i.i.d. (montants de sinistres) sous-jacente est notée par

$$\underline{B}_j = \left\{B_{j,k}, k \in \mathbb{N}^+\right\},$$

avec $B_{j,k} \sim B_j$, $k \in \mathbb{N}^+$ et $j = 1, 2, ..., 5$. Pour $j = 1, 2, ..., 5$, la v.a. B_j discrète (i.e. déjà discrétisée) obéit à une loi de Pareto discrète avec

$$f_{B_j}(0) = \begin{cases} 0 & , \quad k = 0 \text{ et } k \in \{201, 202, ...\} \\ \left(\frac{\eta_j}{\eta_j + 100(k-1)}\right)^{\alpha_j} - \left(\frac{\eta_j}{\eta_j + 100k}\right)^{\alpha_j} & , \quad k \in \{1, 2, ..., 199\} \\ \left(\frac{\eta_j}{\eta_j + 100 \times 199}\right)^{\alpha_j} & , \quad k = 200 \end{cases}.$$

[Note : cette loi discrète résulte de la discrétision de la loi Pareto continue, avec la méthode "lower" et $h = 100$, et en supposant une limite par sinistre de 20000].

Les processus $\underline{M}_1$, ..., $\underline{M}_5$ sont indépendants.

Les suites $\underline{B}_1$, ..., $\underline{B}_5$ sont indépendantes.

Les processus $\underline{M}_1$, ..., $\underline{M}_5$ et les suites $\underline{B}_1$, ..., $\underline{B}_5$ sont indépendants.

Ainsi, les processus $\underline{X}_1$, ..., $\underline{X}_5$ sont indépendants.

On définit le processus agrégé des coûts totaux pour le portefeuille par $\underline{S} = \{S(t), t \geq 0\}$ avec

$$S(t) = \sum_{j=1}^{5} X_j(t)$$

pour $t \geq 0$.
Hypothèses :

j	1	2	3	4	5
α_j	2.9	2.7	2.5	2.3	2.1
η_j	1900	1700	1500	1300	1100

Questions :

(a) Montrer que $\underline{S}$ est un processus Poisson composé avec $S(0) = 0$ et

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} C_k, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases},$$

où $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ (avec $S(t) = \sum_{j=1}^{5} X_j(t)$, $t \geq 0$) est le processus de Poisson homogène sous-jacent avec un paramètre λ_N et $\underline{C} = \{C_k, \quad k \in \mathbb{N}^+\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. (et indépendante de $\underline{N}$) où $C_k \sim C$ et

$$f_C(100k) = \sum_{j=1}^{5} p_j f_{B_j}(100k), \; k \in \mathbb{N}.$$

(b) Calculer la valeur de λ_N et calculer les valeurs de p_j, $j = 1, 2, ..., 5$.

(c) Calculer $f_C(100k)$, $k = 20$ et 80.

(d) Calculer $E[C]$, $E\left[N_{(2.2,3.8]}\right]$ et $E\left[S_{(2.2,3.8]}\right]$.

(e) Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 4 \times 200$. Indiquer les valeurs de $f_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80$.

(f) Calculer $F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 100$.

(g) Calculer

$$\pi_{(2.2,3.8]}(100k) = E\left[\max\left(S_{(2.2,3.8]} - 100k; 0\right)\right],$$

pour $k = 0, 20, 80, 200$.

(h) Calculer $TVaR_\kappa\left(S_{(2.2,3.8]}\right)$, $\kappa = F_{S_{(2.2,3.8]}}(100k)$, $k = 0, 20, 80, 100$.

10. À partir des données de sinistres, un actuaire conclut que les coûts en sinistres, représentés par la v.a. X, obéissent à une loi mélange exponentielle avec

$$\mathcal{L}_X(t) = \alpha\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right) + (1 - \alpha)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)$$

où $0 < \beta_1 < \beta_2 < \infty$ et $\alpha \in (0, 1)$.
Questions :

(a) Démontrer que

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{P}_K\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)$$

où $\mathcal{P}_K$ est la fgp d'une v.a. discrète K définie sur $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, ...\}$ et

$$\mathcal{P}_K(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k r^k,$$

pour $r \in [0, 1]$, $\gamma_k \in [0, 1]$, et $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = 1$. [Note : $\gamma_0 = 0$]. Identifier les expressions de γ_k en fonction de $q = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ et α.

(b) Soit les v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n avec $X_i \sim X$, $i = 1, 2, ..., n$. On note

$$\mathcal{L}_{X_i}(t) = \mathcal{P}_{K_i}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)$$

avec $\mathcal{P}_{K_i}(r) = \mathcal{P}_K(r)$, $i = 1, 2, ..., n$. Rappel : $\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right) \in [0,1]$, $t > 0$.

On définit

$$S_n = X_1 + ... + X_n.$$

i. Démontrer

$$\mathcal{L}_{S_n}(t) = \mathcal{P}_{M_n}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right)$$

pour $t > 0$, où

$$\mathcal{P}_{M_n}(r) = \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k r^k$$

pour $r \in [0,1]$, $\eta_k \in [0,1]$, et $\sum_{k=n}^{\infty} \eta_k = 1$. On interprète $M_n = K_1 + ... + K_n$, où K_1, ..., K_n sont des v.a. i.i.d. avec $K_i \sim K$, $i = 1, 2, ..., n$.

ii. À partir de l'algorithme de DePril, développer un algorithme récursif pour calculer les probabilités η_k, $k \in \{n, n+1, ...\}$. Identifier le point de départ et la relation récursive. On ne peut pas appliquer directement l'algorithme de DePril. Indiquer l'expression de $F_S(x)$ (somme infinie de termes).

iii. Hypothèses : $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = \frac{5}{8}$ tel que $E[X] = 7$. On fixe $n = 20$. Calculer $E[S_n]$. Calculer les valeurs de q, γ_k ($k = 1, 2, ..., 5$), η_k ($k = 20, 21, ..., 25$). Calculer $F_{S_n}(x)$, pour $x = 100$, 140, 200, 300. Dans les calculs de F_{S_n}, on somme 1000 termes.

Chapitre 10

Distributions multivariées et agrégation des risques

Matériel complémentaire

1. Soit une v.a. X pour laquelle la fgm $\mathcal{M}_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$ existe pour des valeurs de $t > 0$. Le principe de prime d'Esscher est définie par

$$\Pi_h(X) = \frac{E\left[X\mathrm{e}^{hX}\right]}{E\left[\mathrm{e}^{hX}\right]} = \left.\frac{\mathcal{M}'_X(t)}{\mathcal{M}_X(t)}\right|_{t=h}, \text{ pour un certain } h > 0.$$

Ce principe est notamment utilisée en finance mathématique. On peut aussi utiliser la transformée d'Esscher, notée par

$$\frac{E\left[X\mathrm{e}^{hX}\right]}{E\left[\mathrm{e}^{hX}\right]} = E\left[X\frac{\mathrm{e}^{hX}}{E\left[\mathrm{e}^{hX}\right]}\right],$$

pour définir une mesure de risque

$$\rho_h^{ESS}(X) = \frac{E\left[X\mathrm{e}^{hX}\right]}{E\left[\mathrm{e}^{hX}\right]} = E\left[X\frac{\mathrm{e}^{hX}}{E\left[\mathrm{e}^{hX}\right]}\right], \text{ pour un certain } h > 0.$$

La mesure d'Esscher n'est pas homogène.

2. Soit une v.a. X dont la fgm $\mathcal{M}_X(t)$ existe pour $0 < t < t^*$, où $t^* < \infty$ ou $t^* = \infty$.
L'inégalité suivante est obtenue à partir de l'inégalité de Markov :

$$\overline{F}_X(x) = \Pr(X > x) \leq e^{-tx}\mathcal{M}_X(t), \tag{10.1}$$

pour $t > 0$.
On fixe $\kappa \in (0,1)$. On définit $t_\kappa \in (0,1)$ où

$$t_\kappa = \underset{t>0}{\arg\min}\varphi_\kappa(t),$$

i.e. t_κ correspond au $t > 0$ qui minimise la fonction φ_κ. On précise que $\varphi_\kappa(t)$ est convexe pour $0 < t < t^*$.
On définit la mesure de risque ρ_κ par

$$\rho_\kappa(X) = eVaR_\kappa(X) = \varphi_\kappa(t_\kappa),$$

appelée la mesure de "VaR entropique". La mesure Var entropique est cohérente. Important : cette mesure de risque peut être calculée uniquement pour des v.a. X dont la fgm existe. Ainsi, on ne peut pas développer l'expression $eVaR_{\kappa}(X)$ pour $X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$.

10.1 Exercices - traditionnels

1. Soit la paire de v.a. comonotones (X_1, X_2) où
$$X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$$
et
$$X_2 \sim LNorm\left(\mu = \ln(100) - \frac{1}{2}, \sigma = 1\right).$$
Calculer $VaR_{0.95}(S)$ pour $S = X_1 + X_2$.

2. (a) Soit un couple de v.a. comonotones (X_1, X_2) avec
$$X_1 \sim Pareto(\alpha = 3, \lambda = 2000) \text{ et } X_2 \sim Weibull\left(\tau = 0.5, \beta = \frac{1}{2000}\right).$$
On a produit la réalisation suivante de la loi exponentielle avec moyenne 1400 : 3728. Produire une réalisation de (X_1, X_2). Produire une réalisation de $S = X_1 + X_2$.

   (b) Soit un couple de v.a. antimonotones (X_1, X_2) avec
$$X_1 \sim Pareto(\alpha = 3, \lambda = 2000) \text{ et } X_2 \sim Weibull\left(\tau = 0.5, \beta = \frac{1}{2000}\right).$$
On a produit la réalisation suivante de la loi exponentielle avec moyenne 1400 : 3728. Produire une réalisation de (X_1, X_2). Produire une réalisation de $S = X_1 + X_2$.

3. Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) où
$$X_1 \sim LNorm(\mu_1, \sigma_1)$$
et
$$X_2 \sim LNorm(\mu_2, \sigma_2),$$
avec $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.
Note : $E[X_i] = \exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)$, pour $i = 1, 2$.
On définit
$$S = X_1 + X_2.$$

Questions :

   (a) Les composantes de (X_1, X_2) sont comonotones.

      i. Montrer que
$$S \sim LNorm(a, b).$$
Identifier a et b en fonction de μ_1, μ_2 et σ.

      ii. Si $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$ et $\sigma = 1$, calculer $F_S(40)$.

   (b) Les composantes de (X_1, X_2) sont antimonotones.

      i. Montrer que
$$F_S(x) = \Phi(c) - \Phi(d),$$
pour $x \geq e > 0$.
Identifier c, d et e en fonction de x, μ_1, μ_2 et σ.

      ii. Si $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$ et $\sigma = 1$, calculer $F_S(40)$.

4. On considère l'exercice annuel d'une institution financière. À la fin de l'année, les engagements de l'institution sont définis par la v.a. $S = X_1 + X_2$ où $X_i = c_i e^{a_i R + b_i}$, $i = 1, 2$.
On a
$$R \sim Norm\left(\mu_R = 0.05, \sigma_R^2 = (0.015)^2\right)$$
et

i	a_i	b_i	c_i
1	-3.2	-0.12	1000
2	-4.3	-0.35	2000

Information : $VaR_{0.995}(Z) = 2.575829$ où $Z \sim Norm(0,1)$.
Important : aucune simulation et aucune approximation ne doivent être faites pour les calculs.
Questions :
   (a) Calculer l'espérance et l'écart-type de S.
   (b) Calculer $VaR_{0.005}(R)$ et $VaR_{0.995}(R)$.
   (c) Calculer $VaR_{0.005}(S)$ et $VaR_{0.995}(S)$.

5. Soit un couple de v.a. antimonotones (X_1, X_2), où
$$f_{X_i}(k) = \alpha_i(k)$$
pour $k = 0, 1, 2, ..., m$. De plus, on suppose que $\alpha_1(0) > 0.5$ et $\alpha_2(0) > 0.5$. On définit $S = X_1 + X_2$.
Questions :
   (a) Montrer que
$$f_{X_1,X_2}(k_1,k_2) = \begin{cases} \gamma(0,0), & k_1 = k_2 = 0 \\ \gamma(k_1,0), & k_1 > 0, k_2 = 0 \\ \gamma(0,k_2), & k_1 = 0, k_2 > 0 \\ 0 & k_1 > 0, k_2 > 0 \end{cases}$$
   et identifier les expression de $\gamma(0,0)$, $\gamma(k_1,0)$ et $\gamma(0,k_2)$.
   (b) Montrer que
$$E[X_1 X_2] = 0$$
   et
$$Cov(X_1, X_2) = -E[X_1]E[X_2].$$
   De plus, si $X_1 \sim X_2 \sim X$, alors on a
$$Var(S) = 2E\left[X^2\right].$$
   (c) Montrer que
$$f_S(k) = \begin{cases} \gamma(0,0), & k = 0 \\ \gamma(k,0) + \gamma(0,k), & k = 1, ..., m \end{cases}.$$
   (d) Montrer que
$$E[\max(S-k;0)] = \sum_{i=1}^{2} E[\max(X_i - k;0)],$$
   pour $k = 0, 1, 2, ..., m$.
   (e) Vérifier les résultats des items précédents (sauf le cas identiquement distribué) avec
$$\alpha_i(k) = \begin{cases} (1-q_i) + q_i \times \binom{10}{k}(\eta_i)^k (1-\eta_i)^{10-k}, & k = 0, \\ q_i \times \binom{10}{k}(\eta_i)^k (1-\eta_i)^{10-k}, & k = 1, 2, ..., 10, \end{cases}$$
   où $q_1 = 0.3$, $q_2 = 0.2$, $\eta_1 = 0.5$ et $\eta_2 = 0.6$. Calculer aussi l'espérance et la variance de S. Refaire les calculs en supposant que les v.a. X_1 et X_2 sont comonotones.

6. Soit la v.a. $S = X_1 + X_2$ où $X_1 \sim Unif\,(0,2)$ et $X_2 \sim Unif\,(0,1)$.
   Questions :
   (a) On suppose que les v.a. X_1 et X_2 sont comonotones. Identifier l'expression de $F_S\,(x)$.
   (b) On suppose que les v.a. X_1 et X_2 sont antimonotones. Identifier l'expression de $F_S\,(x)$.
7. Soit la v.a. $S = X_1 + X_2$ où $X_1 \sim Norm\,(0,3)$ et $X_2 \sim Norm\,(0,1)$.
   Questions :
   (a) On suppose que les v.a. X_1 et X_2 sont comonotones. Identifier l'expression de $F_S\,(x)$.
   (b) On suppose que les v.a. X_1 et X_2 sont antimonotones. Identifier l'expression de $F_S\,(x)$.
8. Soit une paire de v.a. continues positives $\underline{X} = (X_1, X_2)$ où $F_{\underline{X}} \in \Gamma\,(F_{X_1}, F_{X_n})$, la classe de Fréchet générée par les marginales F_{X_1} et F_{X_2}. Soit $F_{\underline{X}^{\max}}, F_{\underline{X}^{\min}} \in \Gamma\,(F_{X_1}, F_{X_2})$ et où

$$F_{\underline{X}^{\min}}\,(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}}\,(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}^{\max}}\,(x_1, x_2)\,,\; x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+,$$

   avec

$$F_{\underline{X}^{\max}}\,(x_1, x_2) = \min\left(F_{X_1}\,(x)\,, F_{X_2}\,(x_n)\right)$$

   et

$$F_{\underline{X}^{\min}}\,(x_1, x_2) = \max\left(F_{X_1}\,(x) + F_{X_2}\,(x_n) - 1; 0\right).$$

   Démontrer

$$Cov\left(X_1^{\min}, X_2^{\min}\right) \leq Cov\,(X_1, X_2) \leq Cov\left(X_1^{\max}, X_2^{\max}\right)$$

   et

$$\rho_P\left(X_1^{\min}, X_2^{\min}\right) \leq \rho_P\,(X_1, X_2) \leq \rho_P\left(X_1^{\max}, X_2^{\max}\right).$$

9. Soit les paires de v.a. continues positives $\underline{X} = (X_1, X_2)$ et $\underline{X}' = (X_1', X_2')$ où $F_{\underline{X}}$ et $F_{\underline{X}'} \in \Gamma\,(F_1, F_2)$, la classe de Fréchet générée par les marginales F_1 et F_2 (note : $F_{X_1} = F_{X_1'} = F_1$ et $F_{X_2} = F_{X_2'} = F_2$). De plus, $E\,[X_i] < \infty$. On sait que

$$F_{\underline{X}}\,(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}'}\,(x_1, x_2)\,,\; x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

   On définit

$$M = \max\,(X_1, X_2) \quad \text{et} \quad M' = \max\,(X_1', X_2')\,.$$

   Questions :
   (a) Démontrer

$$Cov\,(X_1, X_2) \leq Cov\,(X_1', X_2')$$

   et

$$\rho_P\,(X_1, X_2) \leq \rho_P\,(X_1', X_2')\,.$$

   (b) Établir la relation entre $F_M\,(x)$ et $F_{M'}\,(x)$, pour $x \geq 0$.
   (c) Établir la relation entre $E\,[M]$ et $E\,[M']$.
   (d) Établir la relation entre $E\,[\max\,(M - x; 0)]$ et $E\,[\max\,(M - x; 0)]$, pour $x \geq 0$.
10. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) avec

$$F_{X_1}\,(x) = 0.9 + 0.1\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right) \quad \text{et} \quad F_{X_2}\,(x) = 0.8 + 0.2\,(1 - e^{-x})\,, \quad x \geq 0.$$

   On définit $S = X_1 + X_2$.
   Hypothèses :
   — H_1 : $F_{X_1,X_2}\,(x_1, x_2) = \min\left(F_{X_1}\,(x_1)\,; F_{X_2}\,(x_2)\right)$;
   — H_2 : $F_{X_1,X_2}\,(x_1, x_2) = \max\left(F_{X_1}\,(x_1) + F_{X_2}\,(x_2) - 1; 0\right)$.

Questions :

(a) H_1 : Calculer $VaR_{\kappa}(S)$, $\kappa = 0.5$, 0.85 et 0.999.

(b) H_1 : Calculer $TVaR_{\kappa}(S)$, $\kappa = 0.5$, 0.85 et 0.999.

(c) H_1 et H_2 : Calculer $\Pr(S = 0)$.

(d) H_1 et H_2 : Calculer $\Pr(X_1 = 0, X_2 > 0)$.

(e) H_1 et H_2 : Calculer $\Pr(X_1 > 0, X_2 = 0)$.

(f) H_1 et H_2 : Calculer $\Pr(X_1 > 0, X_2 > 0)$.

(g) H_2 :

i. Développer l'expression de $\Pr(X_1 > x, X_2 = 0)$.

ii. Développer l'expression de $\Pr(X_1 = 0, X_2 > x)$.

iii. Démontrer
$$\Pr(S > x) = \Pr(X_1 > x, X_2 = 0) + \Pr(X_1 = 0, X_2 > x),$$
pour $x > 0$.

iv. Démontrer que
$$F_S(x) = F_{X_1}(x) + F_{X_2}(x) - 1, \text{ pour } x > 0.$$

v. Démontrer que
$$E[\max(S - x; 0)] = E[\max(X_1 - x; 0)] + E[\max(X_2 - x; 0)], \text{ pour } x > 0.$$

vi. Calculer $\kappa = F_S(3)$, puis calculer $VaR_{\kappa}(S)$ et $TVaR_{\kappa}(S)$.

11. Démontrer que la mesure d'Esscher ρ_h^{ESS} n'est pas homogène.

12. Utiliser l'inégalité en (10.1) pour démontrer que
$$VaR_{\kappa}(X) \leq \varphi_{\kappa}(t) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\mathcal{M}_X(t)}{1-\kappa}\right),$$
pour $0 < t < t^*$. Suggestion : poser $\overline{F}_X(x) = 1 - \kappa$ et isoler x (qui se trouve dans la borne).

13. Soit $X \sim Norm(\mu, \sigma^2)$. On définit $\varphi_{\kappa}(t) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\mathcal{M}_X(t)}{1-\kappa}\right)$, $t > 0$.

(a) Identifier l'expression de $\varphi_{\kappa}(t)$ selon ces hypothèses.

(b) Identifier $t_{\kappa} \in (0, 1)$ où
$$t_{\kappa} = \underset{t>0}{\arg\min} \varphi_{\kappa}(t),$$
i.e. trouver l'expression du $t > 0$ qui minimise la fonction φ_{κ}.

(c) Démontrer que
$$eVaR_{\kappa}(X) = \mu + \sigma\sqrt{-2\ln(1-\kappa)}.$$

14. Soit $X \sim PoisComp(\lambda = 1, B)$ avec $B \sim Exp(1)$. On définit $\varphi_{\kappa}(t) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\mathcal{M}_X(t)}{1-\kappa}\right)$, $0 < t < 1$.

(a) Identifier l'expression de $\varphi_{\kappa}(t)$ selon ces hypothèses.

(b) Identifier $t_{\kappa} \in (0, 1)$ où
$$t_{\kappa} = \underset{t\in(0,1)}{\arg\min} \varphi_{\kappa}(t).$$

(c) Calculer $eVaR_{0.9}(X)$.

15. Soit le couple de v.a. $\underline{X}^{(\theta)} = \left(X_1^{(\theta)}, X_2^{(\theta)}\right)$ avec
$$F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x_1, x_2) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) + \theta\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2},$$

pour $\theta \in [-1,1]$, $x_1, x_2 \geq 0$.
Questions :

(a) Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, on a
$$F_{\underline{X}^{(\theta)}}(x_1, x_2) \leq F_{\underline{X}^{(\theta')}}(x_1, x_2)$$
pour $x_1, x_2 \geq 0$.

(b) On définit
$$M^{(\theta)} = \max\left(X_1^{(\theta)}, X_2^{(\theta)}\right) \quad \text{et} \quad M^{(\theta')} = \max\left(X_1^{(\theta')}, X_2^{(\theta')}\right).$$

i. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $F_{M^{(\theta)}}(x)$ et $F_{M^{(\theta')}}(x)$, pour $x \geq 0$.
ii. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $E\left[M^{(\theta)}\right]$ et $E\left[M^{(\theta')}\right]$.
iii. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $VaR_\kappa\left(M^{(\theta)}\right)$ et $VaR_\kappa\left(M^{(\theta')}\right)$, pour κ fixé dans $(0,1)$.
iv. Interpréter.

(c) On définit
$$M^{(\theta)} = \min\left(X_1^{(\theta)}, X_2^{(\theta)}\right) \quad \text{et} \quad M^{(\theta')} = \min\left(X_1^{(\theta')}, X_2^{(\theta')}\right).$$

i. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $F_{M^{(\theta)}}(x)$ et $F_{M^{(\theta')}}(x)$, pour $x \geq 0$.
ii. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $E\left[M^{(\theta)}\right]$ et $E\left[M^{(\theta')}\right]$.
iii. Si $-1 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$, établir la relation entre $VaR_\kappa\left(M^{(\theta)}\right)$ et $VaR_\kappa\left(M^{(\theta')}\right)$, pour κ fixé dans $(0,1)$.
iv. Interpréter.

16. Soit le couple de v.a. discrètes $\underline{X} = (X_1, X_2)$ dont la fgp conjointe est donnée par
$$\mathcal{P}_{\underline{X}}(t_1, t_2) = (0.18 + 0.05t_1 + 0.05t_2 + 0.72t_1t_2)^3.$$
On définit $S = X_1 + X_2$.
Questions :

(a) Identifier la distribution marginale de X_1. Fournir l'expression de sa fonction de masse de probabilité.
(b) Identifier la distribution marginale de X_2. Fournir l'expression de sa fonction de masse de probabilité.
(c) Identifier l'expression de la fgp $\mathcal{P}_S(t)$ de S.
(d) Utiliser $\mathcal{P}_S(t)$ pour calculer les toutes les valeurs de $f_S(k)$.
(e) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2=0\}}\right]$.
(f) Calculer $\rho_{0.02}^{ESS}(S)$.

17. Soit les v.a. continues indépendantes $Y_i \sim Gamma(\gamma_i, 1)$, pour $i = 1, 2, ..., 5$. Soit un vecteur de v.a. continues $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ où
$$X_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta_i)$$
pour des valeurs fixées de α_i, $i = 1, 2, 3$. De plus, on a
$$X_1 = \tfrac{1}{\beta_1}(Y_1 + Y_4) \quad X_2 = \tfrac{1}{\beta_2}(Y_2 + Y_4 + Y_5) \quad X_3 = \tfrac{1}{\beta_3}(Y_3 + Y_4 + Y_5)$$

avec

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma_4 \leq \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ 0 &\leq \gamma_5 \leq \min(\alpha_2 - \gamma_4, \alpha_3 - \gamma_4). \end{aligned}$$

Convention : si $\gamma_i = 0$, alors $Y_i = 0$, $i = 1, 2, ..., 5$.
On définit

$$S = X_1 + X_2 + X_3.$$

Questions :

(a) Développer les expressions des fgm ($\mathcal{M}_{\underline{X}}$) et de TLS ($\mathcal{L}_{\underline{X}}$) de $\underline{X}$.

(b) Développer les expressions des covariances pour les paires (X_1, X_2), (X_1, X_3), (X_2, X_3).

(c) Développer l'expression de $\rho_h^{ESS}(S)$. On observe que $\mathcal{M}_S(t)$ existe pour $t \in (0, t_0)$. Identifier la valeur de t_0.

(d) On définit la mesure de risque

$$\rho_\kappa(Y) = E[Y] + \frac{1}{1-\kappa}\sqrt{Var(Y)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}.$$

Questions : On suppose que $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, ..., 5$ (tout en satisfaisant les contraintes).

i. Montrer que la fonction

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = \rho_\kappa(S) = \rho_\kappa(X_1 + X_2 + X_3)$$

est homogène.

ii. Calculer $E[X_i]$ et $Var(X_i)$, $i = 1, 2, 3$.

iii. Développer l'expression de $\rho_\kappa(S)$.

iv. Appliquer le théorème d'Euler à la mesure $\rho_\kappa(S)$ pour développer les expressions des contributions $C_\kappa^\rho(X_i; S)$, $i = 1, 2, 3$.

(e) Soit $\alpha_i = 0.5i$, $i = 1, 2, 3$, $\gamma_4 = 0.1$, $\gamma_5 = 0.2$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. Calculer $eVaR_{0.99}(S)$.

18. Soit les v.a. indépendantes Y_0, Y_1, Y_2 où

$$Y_0 \sim Gamma(\gamma = 2, 1),$$

$$Y_1 \sim Y_2 \sim Gamma(\alpha - \gamma = 3, 1).$$

Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) où $X_1 = Y_0 + Y_1$ et $X_2 = Y_0 + Y_2$.
Pour $S = X_1 + X_2$ et $\theta = 0.2$, calculer les valeurs des expressions de

$$\Pi_\theta(S) = \frac{1}{\theta}\ln E[\exp(\theta S)]$$

et

$$\varphi_\theta(S) = \frac{E[S\exp(\theta S)]}{E[\exp(\theta S)]}$$

où

$$E[S\exp(rS)] = \frac{\mathrm{d}E[\exp(rS)]}{\mathrm{d}r}.$$

19. Soit une paire de v.a. discrète (M_1, M_2) dont la f.g.p. bivariée est

$$P_{M_1,M_2}(t_1, t_2) = 0.6 + 0.1t_2^5 + 0.05t_1^1t_2^4 + 0.05t_1^2t_2^3 + 0.05t_1^3t_2^2 + 0.05t_1^4t_2^1 + 0.1t_1^5.$$

La fonction de masses de probabilité de (M_1, M_2) est notée par f_{M_1,M_2}.
Questions :

(a) Indiquer les paires de valeurs prises par (M_1, M_2) pour lesquelles la valeur de f_{M_1,M_2} est non-nulle. Spécifier clairement les valeurs prises par f_{M_1,M_2}.

(b) Indiquer les valeurs non-nulles des fonctions de masses de probabilité marginales de M_1 et M_2.

(c) Calculer $Cov\,(M_1, M_2)$. À partir de la valeur de $Cov\,(M_1, M_2)$, que pouvons-nous déduire de la relation de dépendance entre les v.a. M_1 et M_2 ? Si nécessaire, vous pouvez utiliser un contre-exemple pour appuyer votre réponse.

(d) On définit $N = M_1 + M_2$.

i. Démontrer que la v.a. N peut être représentée comme une fonction d'une v.a. K qui obéit à une loi discrète très connue (et fournie en annexe).

ii. Indiquer clairement les valeurs (non-nulles) de la fonction de masses de probabilité de la v.a. K et de celle de la v.a. N.

20. Soit un couple de v.a. (Θ_1, Θ_2) avec une la fgm $M_{\Theta_1,\Theta_2}(t_1, t_2)$.
Un couple de v.a. (M_1, M_2) est défini de telle sorte que

— $(M_1|\Theta_1 = \theta_1)$ et $(M_2|\Theta_2 = \theta_2)$ sont conditionnellement indépendantes

— $(M_i|\Theta_i = \theta_i) \sim Pois\,(\theta_i \lambda_i)$ pour $i = 1, 2$.

De plus, $E\,[\Theta_i] = 1$, pour $i = 1,\ 2$.

Questions :

(a) Développer l'expression de la f.g.p. de (M_1, M_2) en fonction de la fgm de (Θ_1, Θ_2).

(b) Démontrer que

$$Cov\,(M_1, M_2) = a \times \mathrm{Cov}\,(\Theta_1, \Theta_2)$$

et identifier clairement a.

(c) Démontrer que

$$\rho_P\,(M_1, M_2) = b \times \rho_P\,(\Theta_1, \Theta_2)$$

et identifier clairement b.

(d) Soit

$$M_{\Theta_1,\Theta_2}(t_1, t_2) = (1 - t_1)^{-1}(1 - t_2)^{-1}(1 - t_1 - t_2)^{-1}.$$

De plus, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. On définit $N = M_1 + M_2$.

i. Développer l'expression de la f.g.p. de N.

ii. Expliquer que la v.a. N peut être représentée comme la somme de deux v.a. indépendantes dont les distributions sont très connues (voir annexes).

iii. Utiliser cette représentation pour calculer $f_N(0)$, $f_N(1)$ et $f_N(2)$.

21. Soient les v.a. comonotones X_i de loi exponentielle avec paramètre $\beta_i = \frac{1}{10i}$ où $i = 1, 2, 3, 4, 5$. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{5} X_i$.

(a) Identifier la loi de S.

(b) Calculer $\Pr(S \le 200)$.

(c) Calculer $VaR_{0.95}(S)$.

22. Soient les v.a. comonotones X_i de loi de Pareto avec paramètres $\alpha = 3$ et $\lambda_i = 20i$ où $i = 1, 2, 3, 4, 5$. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{5} X_i$.

(a) Identifier la loi de S.

(b) Calculer $\Pr(S \le 200)$.

(c) Calculer $VaR_{0.95}(S)$.

23. On considère un couple de v.a. (X_1, X_2) comonotones où $X_1 \sim LN\left(4, 2^2\right)$ et $X_2 \sim Pa\,(2.1, 440)$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.
Calculer les valeurs exactes de $VaR_{0.95}\,(S)$ et $TVaR_{0.95}\,(S)$. (2857.417)
24. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) obéissant à une loi gamma bivariée Cheriyan – Ramabhadran – Mathai – Moschopoulos avec $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.2$, $\alpha_1 = 2.5$, $\alpha_2 = 5$. On définit $S = X_1 + X_2$.
   (a) Développer l'expression de $F_S\,(x)$.
   (b) Calculer $E\,[S]$ et $\mathrm{Var}\,(S)$ pour $\gamma_0 = 0$, 1 et 2.
   (c) Calculer $VaR_\kappa\,(S)$ et $TVaR_\kappa\,(S)$ pour $\gamma_0 = 0$, 1 et 2 et $\kappa = 0.99$.
25. On considère le modèle Poisson choc commun pour le vecteur aléatoire $(M_1, ..., M_n)$ qui est défini avec $M_i = J_i + J_0$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Les v.a. J_0, J_1, ..., J_n sont indépendantes où $J_0 \sim Pois\,(\gamma_0)$ avec $0 \leq \gamma_0 \leq \min\,(\lambda_1; ...; \lambda_n)$ et $J_i \sim Pois\,(\gamma_i = \lambda_i - \gamma_0)$. Le vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ obéit à une loi Poisson composée multivariée où $X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$ avec les hypothèses usuelles et $B_{i,1} \sim B_{i,2} \sim ... \sim B_i \sim Ga\,(\alpha_i, 1/1000)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. De plus, on définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les hypothèses addtionnelles sont : $n = 1000$; $\lambda_i = 0.003$, $i = 1, 2, ..., 500$; $\lambda_i = 0.004$, $i = 501, 502, ..., 1000$; $\alpha_i = 2$, $i = 1, 2, ..., 500$; $\alpha_i = 1$, $i = 501, 502, ..., 1000$.
   (a) Indiquer les caractéristiques de la loi de S.
   (b) Calculer $VaR_\kappa\,(X_i)$, $TVaR_\kappa\,(X_i)$ pour $i = 1, 2, ..., 1000$ et $\kappa = 0.995$.
   (c) Calculer $VaR_\kappa\,(S)$, $TVaR_\kappa\,(S)$ pour $\gamma_0 = 0$, 0.001, 0.002 et $\kappa = 0.995$.
26. On considère un portefeuille constitué de deux lignes d'affaires dont les coûts sont définis par le couple de v.a. (X_1, X_2) obéissant à la loi Poisson composée bivariée décrite ci-dessus. Les paramètres de la loi de Poisson bivariée sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\alpha_0 = 0.5$. Le montant d'un sinistre de la ligne i est définie par la v.a. $B_i = 100U_i$ où $\Pr\big(U_i = \frac{k}{5}\big) = \binom{4}{k-1}(0.6i - 0.4)^{k-1}(1.4 - 0.6i)^{4-(k-1)}$ pour $i = 1, 2$. On définit $S = X_1 + X_2$.
   (a) Calculer les espérances de X_1, X_2 et S.
   (b) Calculer la covariance de $\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)$.
   (c) Calculer la variance de S.
   (d) Calculer $\Pr\,(S = 100k)$, pour $k = 0, 1, ..., 5$.
   (e) Calculer $VaR_\kappa\,(X_1)$, $TVaR_\kappa\,(X_1)$, $VaR_\kappa\,(X_2)$, $TVaR_\kappa\,(X_2)$, $VaR_\kappa\,(S)$, $TVaR_\kappa\,(S)$, pour $\kappa = 0.99$ et $\kappa = 0.995$.
27. On considère un portefeuille de n contrats d'assurance vie. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. $X_i = bI_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ avec $b = 1000$. Les v.a. I_1, ..., I_n sont i.i.d.. La v.a. I_i obéit à une loi de Bernoulli de moyenne 0.05. On suppose le modèle avec mélange commun pour décrire la relation de dépendance entre les v.a. I_1, ..., I_n. On suppose que
$$\Pr(I_i = 1 \mid \Theta = \theta) = 1 - r^\theta \text{ et } \Pr(I_i = 0 \mid \Theta = \theta) = r^\theta,$$
avec $\theta > 0$. Sachant $\Theta = \theta$, les v.a. I_1,..., I_n sont conditionnellement indépendantes. On suppose que Θ obéit à une loi $Ga\,(\alpha, \alpha)$ de moyenne 1. On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Isoler la valeur de r pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.
   (b) Pour $n = 10$, calculer $\Pr\,(S = kb)$ pour $k = 0,1,...,5$ et pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.
   (c) Calculer $\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$ pour $i \neq j$ et pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.
   (d) Calculer $\mathrm{Var}\,(S)$ pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.
   (e) Calculer $VaR_{0.99}\,(S)$ pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.
   (f) Calculer $TVaR_{0.99}\,(S)$ pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.
   (g) Calculer $\mathrm{Var}\,(S)$, $VaR_{0.99}\,(S)$ et $TVaR_{0.99}\,(S)$ en supposant l'indépendance entre les v.a. I_1, ..., I_{10}.

28. On considère un portefeuille composé de 2 lignes d'affaires, qui est exposé à 1 seul type de catastrophe. Les coûts pour les lignes d'affaires sont définis par les v.a. X_1,X_2 où

$$X_i = \sum_{k_i=1}^{M^{(i)}} B_{i,k_i}^{(i)} + \sum_{k_0=1}^{M^{(0)}} B_{i,k_0}^{(0)}$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. Les v.a. $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ sont indépendantes avec $M^{(j)} \sim Pois(\gamma_j)$, $j = 0, 1, 2$. Pour le type 0 fixé de risque, $\left(B_{1,k_0}^{(0)}, B_{2,k_0}^{(0)}\right)$ forment une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. où

$$\left(B_{1,k_0}^{(0)}, B_{2,k_0}^{(0)}\right) \sim \left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right),$$

pour $k_0 \in \mathbb{N}^+$. De plus, $\left\{B_{i,k_i}^{(i)}, k_i \in \mathbb{N}^+\right\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. où $B_{i,k_i}^{(i)} \sim B_i^{(i)}$ pour $i = 1, 2$. Les suites $\left\{\left(B_{1,k_0}^{(0)}, B_{2,k_0}^{(0)}\right), k_0 \in \mathbb{N}^+\right\}$, $\left\{B_{1,k_1}^{(1)}, k_1 \in \mathbb{N}^+\right\}$, $\left\{B_{2,k_2}^{(2)}, k_2 \in \mathbb{N}^+\right\}$ et les v.a. $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ sont indépendantes. Le couple $\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right)$ obéit à une loi exponentielle bivariée EFGM avec $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$. De plus, $B_1^{(1)} \sim Exp\left(\frac{5}{8}\right)$ et $B_2^{(2)} \sim Exp\left(\frac{5}{9}\right)$. Enfin, $\gamma_j = j + 1$ pour $j = 0, 1, 2$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Calculer les espérances de X_1, X_2 et S.

(b) Calculer les variances de X_1 et X_2.

(c) Calculer la covariance entre X_1 et X_2 pour $\theta = -1,\ 0,\ 1$ (paramètre de la loi bivariée de $\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right)$).

(d) Calculer la variance de S pour $\theta = -1,\ 0,\ 1$ (paramètre de la loi bivariée de $\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right)$).

(e) Indiquer les caractéristiques des lois de X_1, X_2 et S. Calculer $F_S(20)$.

(f) Calculer $VaR_{0.99}(S)$. (37.3761, 38.2743, 39.1082)

29. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est définie par

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1, i_2)\, H(x_1; i_1, \beta)\, H(x_2; i_2, \beta),$$

où $p_{1,2}(i_1, i_2)$ sont des probabilités i.e. $p_{1,2}(i_1, i_2) \geq 0$ (pour i_1, $i_2 \in \{1, 2\}$) et $\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1, i_2) = 1$. De plus, on a $\sum_{i_1=1}^{2} p_{1,2}(i_1, i_2) = p_2(i_2)$ et $\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1, i_2) = p_1(i_1)$. On suppose que $\beta = \frac{1}{10}$. On définit $S = X_1 + X_2$.

Hypothèses additionnelles :

Hypothèse H1		
$i_1\|i_2$	1	2
1	0.42	0.18
2	0.28	0.12

Hypothèse H2		
$i_1\|i_2$	1	2
1	0.55	0.05
2	0.15	0.25

Hypothèse H3		
$i_1\|i_2$	1	2
1	0.32	0.28
2	0.38	0.02

Les calculs ci-dessous doivent être faits avec les hypothèses H1, H2, H3 :

(a) Calculer $F_{X_1,X_2}(30, 20)$.

(b) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2>20\}}\right]$.

(c) Calculer $E\left[\max(X_1 - 30; 0)\max(X_2 - 20; 0)\right]$.

(d) Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$, $E[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$.

(e) Calculer $F_S(50)$.

30. Soit un couple de v.a. (I_1, I_2) dont la fonction de masse de probabilité conjointe est $f_{I_1,I_2}(i_1, i_2)$, i_1, $i_2 \in \{0, 1\}$. Soient les n vecteurs aléatoires i.i.d. $(I_{1,1}, I_{2,1})$, ..., $(I_{1,n}, I_{2,n})$ où $(I_{1,i}, I_{2,i}) \sim (I_1, I_2)$, pour

$i = 1, 2, ..., n$. On définit le couple (M_1, M_2) où $M_j = \sum_{i=1}^{n} I_{j,i}$, $j = 1, 2$. On définit $N = M_1 + M_2$. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) où $X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$, où $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. avec $B_{i,k} \sim B_i$ $(i = 1, 2)$. De plus, $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$, $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$ et (M_1, M_2) sont indépendants. Enfin, $B_1 \sim B_2 \sim Exp(\beta)$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Identifier la f.g.p. de (M_1, M_2) et de N. Identifier la f.m.p. de (M_1, M_2) et de N.

(b) Développer l'expression de la covariance de (M_1, M_2).

(c) Identifier la f.g.m. de (X_1, X_2) et de S.

(d) Développer l'expression de la covariance de (X_1, X_2).

(e) Calculer les espérances de X_1, X_2 et S.

(f) Calculer les variances de X_1 et X_2.

(g) On suppose que $\beta = \frac{1}{10}$ et $n = 10$. Hypothèses additionnelles :

Hypothèse H1		
$i_1 \mid i_2$	0	1
0	0.42	0.18
1	0.28	0.12

Hypothèse H2		
$i_1 \mid i_2$	0	1
0	0.55	0.05
1	0.15	0.25

Hypothèse H3		
$i_1 \mid i_2$	0	1
0	0.32	0.28
1	0.38	0.02

Questions pour les 3 hypothèses H1, H2, H3 :

i. Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ et $\mathrm{Var}(S)$.

ii. Calculer $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.

31. Soit un couple de v.a. (I_1, I_2) dont la fonction de masse de probabilité conjointe est $f_{I_1,I_2}(i_1, i_2)$, i_1, $i_2 \in \{0, 1\}$. On a $f_{I_1,I_2}(1, 1) = f_{I_1,I_2}(0, 0) = \frac{(1+\rho)}{4}$ pour $-1 \leq \rho \leq 1$. Le paramètre ρ correspond au coefficient de corrélation entre (I_1, I_2). Soit une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. $(I_{1,1}, I_{2,1})$, $(I_{1,1}, I_{2,1})$, ... où $(I_{1,i}, I_{2,i}) \sim (I_1, I_2)$, pour $i \in \mathbb{N}^+$. Soient les v.a. indépendantes K_0, K_1 et K_2 où $K_i \sim Pois(\gamma_i)$, $i = 0, 1, 2$. On définit le couple (M_1, M_2) où $M_j = K_j + \sum_{i=1}^{K_0} I_{j,i}$, $j = 1, 2$. La suite $(I_{1,1}, I_{2,1})$, $(I_{1,1}, I_{2,1})$, ... est indépendante de K_0, K_1 et K_2. On définit $N = M_1 + M_2$. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) où $X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$, où $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$ forme une suite i.i.d. de v.a. avec $B_{i,k} \sim B_i$ $(i = 1, 2)$. De plus, $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$, $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$ et (M_1, M_2) sont indépendants. Enfin, $B_1 \sim B_2 \sim Exp(\beta)$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Identifier la f.g.p. et la f.m.p. de (M_1, M_2).

(b) Identifier la f.g.p. et la f.m.p. de N.

(c) Développer l'expression de la covariance de (M_1, M_2).

(d) Identifier la f.g.m. de (X_1, X_2) et de S.

(e) Développer l'expression de la covariance de (X_1, X_2).

(f) On suppose que $\beta = \frac{1}{10}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\gamma_0 = 3$ $\gamma_i = \lambda_i - 1.5$. Questions à faire pour $\rho = -0.9$, 0, 0.9 :

i. Calculer $E[N]$ et $E[S]$.

ii. Calculer $\mathrm{Cov}(M_1, M_2)$ et $\mathrm{Var}(N)$.

iii. Calculer $VaR_{0.99}(N)$ et $TVaR_{0.99}(N)$.

iv. Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ et $\mathrm{Var}(S)$.

v. Calculer $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.

32. On considère le volet incendie d'un contrat d'assurance pour un commerce. On suppose qu'au plus un incendie peut se produire au cours d'une année. Les coûts pour un contrat sont définis par la v.a. $X = I \times B$ avec $I \sim Bern(0.1)$. La v.a. B est définie par $B = C_1 + C_2$, où la v.a. C_1 correspond aux dommages matériels au commerce et la v.a. C_2 représente les coûts résultant des pertes en affaires. La paire de v.a. (C_1, C_2) obéit à la loi de Pareto bivariée avec $\alpha = 3$, $\lambda_1 = 20$ et $\lambda_2 = 40$. De plus, la v.a. I est indépendante du couple de v.a. (C_1, C_2).

(a) Calculer $E[B]$, $\mathrm{Cov}(C_1, C_2)$ et $\mathrm{Var}(B)$.
(b) Calculer l'espérance et la variance de X.
(c) Trouver l'expression de f_B et F_B.
(d) Calculer $\Pr(X > 70)$.

10.2 Exercices - informatique

1. Soit le vecteur de v.a. comonotones (X_1, X_2, X_3) avec

$$\begin{aligned} X_1 &\sim Pareto\,(\alpha = 1.5, \lambda = 50) \\ X_2 &\sim Exp\left(\beta = \frac{1}{100}\right) \\ X_3 &\sim LNorm\left(\mu = \ln(100) - \frac{1}{2}, \sigma = 1\right). \end{aligned}$$

On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Questions :

(a) Développer l'expression de $VaR_\kappa(S)$.
(b) Calculer $VaR_{0.99}(S)$. Vérification : $VaR_{0.95}(S) = 932.1745$
(c) Avec un outil d'optimisation, calculer $F_S(2000)$. Vérification : $F_S(1000) = 0.9562015$ (calculée en R avec `optimize`)

2. Soit un couple de v.a. $X_1 \in \{x_{1,1}, ..., x_{1,m}\}$ et $X_2 \in \{x_{2,1}, ..., x_{2,m}\}$ avec

$$x_{1,j} = -100 \times \ln\left(1 - \tfrac{j}{m+1}\right) \quad \text{et} \quad x_{2,j} = 100 \times \mathrm{e}^{-\frac{0.04}{2} + 0.2 \times \Phi^{-1}\left(\frac{j}{m+1}\right)} \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, m.$$

De plus, $\Pr(X_i = x_{i,j}) = \frac{1}{m}$, pour $i = 1, 2$ et $j = 1, 2, ..., m$.
On définit $S = X_1 + X_2$.
Questions :

(a) Hypothèses : $m = 4$; X_1 et X_2 sont comonotoniques.
   i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.
   ii. Calculer $VaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
   iii. Calculer $TVaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
   iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
   v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
   vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.
   vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.
   viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

(b) Hypothèses : $m = 4$; X_1 et X_2 sont antimonotoniques.
   i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.
   ii. Calculer $VaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
   iii. Calculer $TVaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
   iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
   v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
   vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.

vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.
viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

(c) Hypothèses : $m = 1000$; X_1 et X_2 sont comonotoniques.
i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.
ii. Calculer $VaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iii. Calculer $TVaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.
vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.
viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

(d) Hypothèses : $m = 1000$; X_1 et X_2 sont antimonotoniques.
i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.
ii. Calculer $VaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iii. Calculer $TVaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.
vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.
viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

(e) Hypothèses : $m = 1000000$; X_1 et X_2 sont comonotoniques.
i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.
ii. Calculer $VaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iii. Calculer $TVaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.
vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.
viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

(f) Hypothèses : $m = 1000000$; X_1 et X_2 sont antimonotoniques.
i. Calculer $E[X_i]$, $Var(X_i)$ pour $i = 1, 2$.
ii. Calculer $VaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iii. Calculer $TVaR_\kappa(X_i)$, pour $i = 1, 2$ et $\kappa = 0.5$, 0.75 et 0.95.
iv. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.
v. Calculer $E[\max(S - x; 0)]$, pour $x = 200$, 400, et 600.
vi. Calculer $VaR_{0.5}(S)$ et $TVaR_{0.5}(S)$.
vii. Calculer $VaR_{0.75}(S)$ et $TVaR_{0.75}(S)$.

viii. Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. Pour la mesure sous-additive, calculer la valeur de l'indice du bénéfice de mutualisation.

3. Soit le couple de v.a. (Θ_1, Θ_2) obéissant à une loi gamma bivariée où

$$M_{\Theta_1,\Theta_2}(t_1, t_2) = \left(\frac{(1-\gamma)}{\left(1 - \frac{1-\gamma}{r} t_1\right)\left(1 - \frac{1-\gamma}{r} t_2\right) - \gamma} \right)^r$$

avec

$$\Theta_1 \sim \Theta_2 \sim Gamma(r, r).$$

Soit le couple de v.a. (M_1, M_2) où $(M_1|\Theta_1 = \theta_1)$ et $(M_2|\Theta_2 = \theta_2)$ sont conditionnellement indépendantes avec

$$(M_1|\Theta_1 = \theta_1) \sim Pois(\lambda_1\theta_1) \quad \text{et} \quad (M_2|\Theta_2 = \theta_2) \sim Pois(\lambda_2\theta_2).$$

Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) avec

$$X_1 = \begin{cases} \sum_{k_1=1}^{M_1} B_{1,k_1} & , M_1 > 0 \\ 0 & , M_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{cases} \sum_{k_2=1}^{M_2} B_{2,k_2} & , M_2 > 0 \\ 0 & , M_2 = 0 \end{cases},$$

où

$$\begin{array}{l} \underline{B}_1 = \{B_{1,k_1}, k_1 \in \mathbb{N}^+\} \text{ avec } B_{1,k_1} \sim B_1 \sim Binom(n_1, q_1) \\ \underline{B}_2 = \{B_{2,k_2}, k_2 \in \mathbb{N}^+\} \text{ avec } B_{2,k_2} \sim B_2 \sim Binom(n_2, q_2) \\ \underline{B}_1, \underline{B}_2 \text{ et } (M_1, M_2) \text{ sont indépendantes.} \end{array}$$

Hypothèses :

$r = 2$	$\lambda_1 = 1.5$	$\lambda_2 = 2$	$\gamma = 0.8$
$n_1 = 10$	$q_1 = 0.2$	$n_2 = 10$	$q_2 = 0.3$

On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.
La mesure TVaR est utilisée pour calculer le capital.
Questions :

(a) Développer l'expression de la fgp de (M_1, M_2).

(b) Développer l'expression de la fonction caractéristique de (X_1, X_2).

(c) Développer l'expression de la fonction caractéristique de S.

(d) Calculer les valeurs de $f_S(k)$, $k = 0, 1, 2, ..., 4095$.

i. Indiquer la méthode pour calculer les valeurs de $f_S(k)$.

ii. Indiquer les valeurs de $F_S(k)$, $k = 30, 40$. Vérification : $F_S(35) = 0.988977$.

Chapitre 11

Théorie des copules et agrégation des risques

11.1 Exercices traditionnels

1. (Trivedi and Zimmer (2007), Table 3.1). Soit la fonction de répartition

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1 - \left(e^{-\theta\beta_1 x_1} + e^{-\theta\beta_2 x_2} - e^{-\theta(\beta_1 x_1+\beta_2 x_2)}\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

pour $x_1, x_2 \geq 0$ et $\theta > 0$.

   (a) Identifier les marginales $F_{X_1}(x_1)$ et $F_{X_2}(x_2)$.

   (b) Utiliser la méthode par inversion pour identifier la copule $C_\theta(u_1,u_2)$ associée à F_{X_1,X_2}.

2. Soit la fonction de répartition

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \left(1-e^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-e^{-\beta_2 x_2}\right) + \theta\left(1-e^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-e^{-\beta_2 x_2}\right)e^{-\beta_1 x_1}e^{-\beta_2 x_2},$$

pour $x_1, x_2 \geq 0$ et $-1 \leq \theta \leq 1$.

   (a) Identifier les marginales $F_{X_1}(x_1)$ et $F_{X_2}(x_2)$.

   (b) Utiliser la méthode par inversion pour identifier la copule $C_\theta(u_1,u_2)$ associée à F_{X_1,X_2}.

3. Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) avec

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1 - e^{-\beta_1 x_1} - e^{-\beta_2 x_2} + \left(e^{\theta\beta_1 x_1} + e^{\theta\beta_2 x_2} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}}$$

pour $x_1, x_2 \geq 0$ et $\theta > 0$.

   (a) Identifier les marginales $F_{X_1}(x_1)$ et $F_{X_2}(x_2)$.

   (b) Utiliser la méthode par inversion pour identifier la copule $C_\theta(u_1,u_2)$ associée à F_{X_1,X_2}.

4. Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) avec

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1 - e^{-\frac{x_1}{10}} - e^{-\frac{x_2}{6}} + \left(e^{\frac{x_1}{5}} + e^{\frac{x_2}{3}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

pour $x_1, x_2 \geq 0$.

   (a) Identifier les marginales $F_{X_1}(x_1)$ et $F_{X_2}(x_2)$.

   (b) Identifier la copule C associée à F_{X_1,X_2} par la méthode d'inversion.

(c) Soit le couple de v.a. (Y_1, Y_2) où

$$F_{Y_1,Y_2}(x_1, x_2) = C\left(F_{Y_1}(x_1), F_{Y_2}(x_2)\right)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{Y_1}(x_1) &= 1 - \left(\frac{20}{20 + x_1}\right)^3 \\ F_{Y_2}(x_2) &= H\left(x_2; 2; \frac{1}{10}\right) \end{aligned}$$

Calculer les valeurs suivantes :

i. $\Pr(5 < Y_1 \leq 15, 6 < Y_1 \leq 11)$.
ii. Calculer $\Pr(Y_1 > 50 | Y_2 > 30)$.
iii. Utiliser la méthode des rectangles pour évaluer $F_S(60)$, avec $m = 20$.

5. Soit un couple de v.a. (U_1, U_2) dont la fonction de répartition est définie par

$$F_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\max(u_1 + u_2 - 1; 0) + \frac{1}{2}\min(u_1; u_2),$$

pour $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$. On définit $S = U_1 + U_2$.
Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) où $X_i \sim N(0,1)$, pour $i = 1, 2$. On définit $X_i = F_{X_i}^{-1}(U_i)$, pour $i = 1, 2$. On définit $T = X_1 + X_2$.
Questions :

(a) Démontrer que $U_i \sim Unif(0,1)$ $(i = 1, 2)$.
(b) Dessiner le graphique de nuages de points (U_1, U_2).
(c) Développer l'expression et calculer la valeur de $Cov(U_1, U_2)$.
(d) Développer l'expression de $F_S(x)$.
(e) Développer l'expression et calculer la valeur de $Cov(X_1, X_2)$.
(f) Développer l'expression de $F_T(x)$. Calculer $F_T(-1)$ et $F_T(1)$.

6. On définit la copule C pour $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3)$ par

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3) &= \frac{1}{3}\max(u_1 + u_2 - 1; 0)\,u_3 \\ &+ \frac{1}{3}\max(u_1 + u_3 - 1; 0)\,u_2 \\ &+ \frac{1}{3}\max(u_2 + u_3 - 1; 0)\,u_1. \end{aligned}$$

(a) Identifier les expressions de $C(u_1, u_2)$, $C(u_1, u_3)$, $C(u_2, u_3)$.
(b) Calculer $\rho_P(U_i, U_j)$, pour $i \neq j$.
(c) Soit le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ avec

$$F_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), F_{X_3}(x_3)\right)$$

où $X_i \sim N(0,1)$, pour $i = 1, 2, 3$.

i. Calculer $P\left(\bigcup_{i=1}^{3} \{X_i \in (-1, 1]\}\right)$.
ii. Pour $S = X_1 + X_2 + X_3$, identifer l'expression de $F_S(x)$. Comparer avec l'expression de $T = Y_1 + Y_2 + Y_3$, où $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ obéit à une loi normale trivariée avec $\rho_P(Y_i, Y_j) = \rho_P(X_i, X_j)$, pour $i \neq j$. Comparer $VaR_\kappa(S)$ et $VaR_\kappa(T)$, pour $\kappa = 0.5$, 0.75, 0.99 et 0.999.

7. Soit la fonction de répartition

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1 - \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+x_1}\right)^{\alpha_1\theta} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+x_2}\right)^{\alpha_2\theta} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+x_1}\right)^{\alpha_1\theta}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+x_2}\right)^{\alpha_2\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

pour $x_1, x_2 \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ et $\theta \geq 1$.
Questions :

(a) Identifier les marginales $F_{X_1}(x_1)$ et $F_{X_2}(x_2)$.
(b) Démontrer à quelle relation de dépendance correspond le cas particulier $\theta = 1$.
(c) Utiliser la méthode par inversion pour identifier la copule $C_\theta(u_1, u_2)$ associée à F_{X_1,X_2}.
(d) Développer l'expression de $C_{2|1}$.
(e) On définit le couple de v.a. (Y_1, Y_2) où

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = C(F_{Y_1}(y_1), F_{Y_2}(y_2))$$

et

$$\begin{aligned} Y_1 &\sim LN(2,1) \\ Y_2 &\sim Beta(2,1) \end{aligned}$$

On a les réalisations indépendantes 0.76 et 0.83 d'une loi uniforme (avec $\theta = 2$).

i. Utiliser la méthode conditionnelle pour simuler une réalisation de (U_1, U_2) dont la fonction de répartition conjointe est la copule C.
ii. Simuler une réalisation de (Y_1, Y_2).

8. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) avec

$$\begin{aligned} X_1 &\sim LN(\mu_1, \sigma_1) \\ X_2 &\sim LN(\mu_2, \sigma_2) \end{aligned}$$

et dont $F_{X_1,X_2} \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$.
Questions :

(a) Développer l'expression pour la valeur minimale de $\rho_P(X_1, X_2)$. Indiquer clairement la structure de dépendance conduisant à cette valeur. On note par $\left(X_1^{(a)}, X_2^{(a)}\right)$ le couple de v.a. avec $F_{X_1^{(a)},X_2^{(a)}} \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$ qui est définie par cette structure de dépendance.
(b) Développer l'expression pour la valeur maximale de $\rho_P(X_1, X_2)$. Indiquer clairement la structure de dépendance conduisant à cette valeur. On note par $\left(X_1^{(b)}, X_2^{(b)}\right)$ le couple de v.a. avec $F_{X_1^{(b)},X_2^{(b)}} \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$ qui est définie par cette structure de dépendance.
(c) On définit $S^{(a)} = X_1^{(a)} + X_2^{(a)}$ et $S^{(b)} = X_1^{(b)} + X_2^{(b)}$. On fixe $\mu_1 = 1.9$, $\mu_2 = 2$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0.9$. On utilise les réalisations suivantes d'une loi uniforme standard :

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U^{(j)}$	0.02	0.15	0.28	0.30	0.46	0.51	0.63	0.74	0.87	0.99

i. Produire 10 réalisations de $S^{(a)}$ et $S^{(b)}$. Indiquer la valeur minimale et la valeur maximale des réalisations.
ii. Calculer une approximation de $F_{S^{(a)}}(x)$ et $F_{S^{(b)}}(x)$, pour $x = 15$.
iii. Calculer une approximation de $E\left[\max\left(S^{(a)} - x; 0\right)\right]$ et $E\left[\max\left(S^{(b)} - x; 0\right)\right]$ pour $x = 20$.

9. Soit le couple de v.a. (R_1, R_2) dont la fonction de répartition est définie par les marginales

$$F_{R_i}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\frac{x-\mu_i}{\sigma}}{\sqrt{2 + \left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2}}\right),\ i = 1, 2,$$

avec $\mu_1 = 0.06$, $\mu_2 = 0.05$, $\sigma_1 = 0.2$ et $\sigma_2 = 0.15$ ainsi que par la copule de Gumbel avec $\alpha = 4$ où

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \exp\left(-\left\{(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right\}^{(1/\alpha)}\right),$$

pour $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$ et $\alpha \geq 1$.
Soit $X = B \times 1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}}$ où $B \sim Weibull\left(0.5, \frac{1}{1000}\right)$ est indépendante du couple de v.a. (R_1, R_2).
Questions :
   (a) Calculer $F_{R_1,R_2}(-0.1, -0.1)$.
   (b) Calculer $E\left[1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}}\right]$.
   (c) Développer l'expression de $F_X(x)$.
   (d) Calculer $F_X(0)$ et $F_X(10000)$.
   (e) Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_{0.995}(X)$.

10. Soit un couple de v.a. (U_1, U_2) dont la fonction de répartition est définie par

$$F_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\max(u_1 + u_2 - 1; 0) + \frac{1}{2}\min(u_1; u_2),$$

pour $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$. On définit $S = U_1 + U_2$.
Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) où $X_i \sim N(0, 1)$, pour $i = 1, 2$. On définit $X_i = F_{X_i}^{-1}(U_i)$, pour $i = 1, 2$.
On définit $T = X_1 + X_2$.
Questions :
   (a) Démontrer que $U_i \sim Unif(0, 1)$ $(i = 1, 2)$.
   (b) Dessiner le graphique de nuages de points (U_1, U_2).
   (c) Développer l'expression et calculer la valeur de $Cov(U_1, U_2)$.
   (d) Développer l'expression de $F_S(x)$.
   (e) Développer l'expression et calculer la valeur de $Cov(X_1, X_2)$.
   (f) Développer l'expression de $F_T(x)$. Calculer $F_T(-1)$ et $F_T(1)$.
   (g) Démontrer que $U_i \sim Unif(0, 1)$ $(i = 1, 2)$.
   (h) Dessiner le graphique de nuages de points (U_1, U_2).
   (i) Développer l'expression et calculer la valeur de $Cov(U_1, U_2)$.
   (j) Développer l'expression de $F_S(x)$.
   (k) Développer l'expression et calculer la valeur de $Cov(X_1, X_2)$.

11. Let $\underline{X} = (X_1, X_2)$ be a pair of continuous rvs with cdf

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right)$$

for $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$ and

$$X_1 \sim Exp(1) \quad \text{and} \quad X_2 \sim Exp(1).$$

Also,

$$\tau(X_1, X_2) = 0.5.$$

Let

$$S = B \times 1_{\{X_1 > 5 | X_2 > 5\}}$$

and

$$T = B \times 1_{\{\min(X_1, X_2) > 5\}}$$

with

$$B \sim Gamma\left(\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2 \times 100}\right).$$

Questions :

(a) Let C_a be

$$C_\alpha (u_1, u_2) = \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

for $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$ and $\alpha > 0$. Compute $\lambda_U (X_1, X_2)$, $\Pr(X_1 > 5 | X_2 > 5)$, $E[S]$, and $E[T]$.

(b) Let C_a be

$$C_\alpha (u_1, u_2) = \exp\left(- \{(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\}^{(1/\alpha)}\right),$$

for $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$ and $\alpha \geq 1$. Compute $\lambda_U (X_1, X_2)$, $\Pr(X_1 > 5 | X_2 > 5)$, $E[S]$, and $E[T]$.

12. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) où $F_{X_1,X_2} \in \mathcal{CF}(F_1, F_2)$ où F_1 est la fonction de répartition d'une loi $B\hat{e}ta\,(\alpha = 2, \beta = 1)$ et F_2 est la fonction de répartition d'une loi $U(0,1)$. Calculer les valeurs minimale et maximale que peut prendre le coefficient de corrélation de Pearson $\rho_P (X_1, X_2)$.

13. Soit la v.a. $X = B \times 1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}}$, représentant les coûts pour une institution financière à la suite d'une débâcle sur les marchés financiers. Les v.a. R_1 et R_2 représentent les rendements quotidiens de deux indices boursiers connus. La v.a. $B \sim Pa\,(1.5, 1000)$ est indépendante du couple de v.a. (R_1, R_2). La loi bivariée entre R_1 et R_2 est définie par les marginales

$$\begin{aligned} R_1 &\sim N\left(0.08, 0.2^2\right), \\ R_2 &\sim N\left(0.085, 0.3^2\right), \end{aligned}$$

ainsi que par la copule de Gumbel avec $\alpha = 4$.

(a) Développer l'expression de $E[\max(X - d; 0)]$.

(b) Calculer $E\left[1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}}\right]$.

(c) Calculer $E[\max(X - d; 0)]$ avec $d = 9000$.

14. On considère le couple de v.a. (M_1, M_2) où $M_i \sim Pois\,(10)$ pour $i = 1, 2$. La loi conjointe de (M_1, M_2) est définie en fonction de la copule de Frank avec un paramètre de dépendance $\gamma = 10.889335$. On définit $N = M_1 + M_2$.

(a) Calculer $\mathrm{Cov}\,(M_1, M_2)$.

(b) Calculer $E[N]$ et $\mathrm{Var}\,(N)$.

(c) Calculer $\Pr(N = 0)$, $\Pr(N = 10)$ et $\Pr(N = 20)$.

(d) Calculer $VaR_{0.99}(N)$ et $TVaR_{0.99}(N)$.

15. On suppose que les coûts qui surviennent à la suite d'un sinistre sont représentés par la paire de v.a. B_1 (coûts en sinistres) et B_2 (frais de règlement) dont les lois marginales sont $B_1 \sim Pa\,(2.4, 14\ 000)$ et $B_2 \sim Exp\left(\frac{1}{5000}\right)$. La dépendance entre les v.a. B_1 et B_2 est définie par la copule de Clayton avec $C(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\gamma} + u_2^{-\gamma} - 1\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$ avec $\gamma = 8$.

On veut produire une réalisation $\left(B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\right)$ de (B_1, B_2) selon la méthode conditionnelle. On a produit une réalisation

$$\left(V_1^{(1)} = 0.24, V_2^{(1)} = 0.78\right)$$

de (V_1, V_2) où V_1 et V_2 sont des v.a. indépendantes de loi uniforme $(0,1)$. On utilise la réalisation $\left(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}\right)$ et $F_{U_2|U_1=u_1}(u_2)$ pour produire la réalisation $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ de (U_1, U_2). On se sert de $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ pour produire $\left(B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\right)$. Calculer $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ et $\left(B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\right)$.

16. On considère un portefeuille de 4 titres avec risque de défaut. Pour le titre i ($i = 1, 2, 3, 4$), le montant en vigueur est 10 000 et la durée jusqu'au défaut T_i obéit à une loi exponentielle d'espérance 20. On suppose une perte totale du montant en vigueur en cas de défaut. On examine le risque global du portefeuille sur une année. Le taux annuel d'intérêt est nul. À cette fin, il est important de bien comprendre le comportement du nombre de défauts pour l'ensemble du portefeuille $N = \sum_{i=1}^{4} 1(T_i \leq 1)$ où

$$1(T_i \leq 1) = \begin{cases} 1, \text{ si } T_i \leq 1 \text{ (défaut survient durant l'année)} \\ 0, \text{ si } T_i > 1 \text{ (sinon)} \end{cases}.$$

La structure de dépendance entre les v.a. $T_1, ..., T_4$ est définie à l'aide de la copule de Clayton. Pour des fins de comparaison, on a aussi fait les calculs pour les cas où les v.a. $T_1, ..., T_4$ sont indépendantes et comonotones.

(a) On suppose que les v.a. $T_1, ..., T_4$ sont indépendantes. Calculer $\Pr(N = k)$, pour $k = 0, 1, ..., 4$.

(b) On suppose que les v.a. $T_1, ..., T_4$ sont comonotones. Calculer $\Pr(N = k)$, pour $k = 0, 1, ..., 4$.

(c) On suppose que la structure de dépendance entre les v.a. $T_1, ..., T_4$ est définie à l'aide de la copule de Clayton où $\alpha = 5$. Calculer $\Pr(N = k)$, pour $k = 0, 1$.

17. On considère un portefeuille avec deux risques dont les coûts sont définis par les v.a. X_1 et X_2 avec $X_i \sim BComp(n, q; F_B)$, où $n = 2$, $q = 0.15$, $B \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$, pour $i = 1, 2$. Le nombre de sinistres pour les deux contrats sont définis par les v.a. M_1 et M_2. On suppose que

$$F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = C_\alpha\left(F_{M_1}(m_1), F_{M_2}(m_2)\right),$$

où C_α est la copule de Frank avec $\alpha = 10$. Les montants de sinistres sont indépendants d'un contrat à l'autre. On définit les v.a. $N = M_1 + M_2$ et $S = X_1 + X_2$.

(a) Calculer $f_{M_1,M_2}(0,0)$ et $f_{M_1,M_2}(1,2)$.

(b) Calculer $\Pr(N = k)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(c) Calculer $\Pr(S \leq 1500)$.

(d) Calculer l'espérance et la variance de N.

(e) Calculer l'espérance et la variance de S.

11.2 Exercices informatiques

1. Soit le copule de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule de Clayton est représentée par

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \left(u_1^{-a} + u_2^{-a} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$.

De plus, $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$ et $X_2 \sim Pareto(1.8, 800)$.

On utilise l'algorithme suivant pour produire **des réalisations de** (U_1, U_2) pour la copule de Clayton :

— On simule les réalisations $Z_1^{(j)}$ et $Z_2^{(j)}$ des v.a. indépendantes Z_1 et Z_2 où $Z_i \sim Exp(1)$ pour $i = 1, 2$.

— On simule la réalisation $\Theta^{(j)}$ de la v.a. $\Theta \sim Ga\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$.

— On calcule $U_i^{(j)} = \left(1 + \frac{Z_i^{(j)}}{\Theta^{(j)}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$, $i = 1, 2$.

On définit $S = X_1 + X_2$.
Soit la suite de réalisations indépendantes d'une loi $Unif\,(0,1)$ produites $V = \left\{V^{(j)}, j \in \mathbb{N}\right\}$ avec le générateur congruentiel linéaire du chapitre 5 de Marceau (2013). La valeur initiale $V^{(0)}$ est obtenue à partir de la valeur source $y_0 = 20141111$.
Pour produire les réalisations de $Z_1^{(j)}$, on utilise les réalisations $V^{(3(j-1)+1)}$.
Pour produire les réalisations de $Z_2^{(j)}$, on utilise les réalisations $V^{(3(j-1)+2)}$.
Pour produire les réalisations de $\Theta^{(j)}$, on utilise les réalisations $V^{(3j)}$.
Questions : On fait les calculs suivants pour $\alpha = 1, 5, 10$.

(a) Produire les 10000 réalisations de (U_1, U_2).
(b) Produire les 10000 réalisations de (X_1, X_2).
(c) Produire les 10000 réalisations de S.
(d) Calculer des approximations de $VaR_\kappa\,(S)$ et $TVaR_\kappa\,(S)$, $\kappa = 0.001$, 0.01, 0.1, 0.05, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95, 0.99, 0.999..
(e) Calculer des approximations de $E\left[\max\left(S-d;0\right)\right]$, $d = 500 \times k$, $k = 0, 1, 2, ..., 10$.
(f) Calculer une approximation de $E\left[X_1 \times 1_{\{S>d\}}\right]$, $d = 500 \times k$, $k = 0, 1, 2, ..., 10$.

2. Soit un couple de v.a. (M_1, M_2) où

$$F_{M_1,M_2}\,(k_1,k_2) = C\left(F_{M_1}\,(k_1)\,, F_{M_2}\,(k_2)\right)$$

pour $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. On suppose $M_i \sim Poisson\,(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. On définit le coefficient de corrélation de Pearson par

$$\rho_P\,(M_1, M_2) = \frac{Cov\,(M_1, M_2)}{\sqrt{Var\,(M_1)\,Var\,(M_2)}}.$$

(a) Calculer les valeurs de $\rho_P\,(M_1, M_2)$ pour $C\,(u_1, u_2) = \min\,(u_1; u_2)$ pour les combinaisons suivantes.

$\lambda_1 \vert \lambda_2$	1	2	3	4	5
1		–	–	–	–
2			–	–	–
3				–	–
4					–
5					

(b) Calculer les valeurs de $\rho_P\,(M_1, M_2)$ pour $C\,(u_1, u_2) = \max\,(u_1 + u_2 - 1; 0)$.

$\lambda_1 \vert \lambda_2$	1	2	3	4	5
1		–	–	–	–
2			–	–	–
3				–	–
4					–
5					

(c) Soit la copule

$$C\,(u_1, u_2) = \theta \min\,(u_1; u_2) + (1-\theta)\max\,(u_1 + u_2 - 1; 0)\,.$$

Pour les combinaisons ci-dessous, identifier la valeur θ de telle sorte que $\rho_P\,(M_1, M_2) = 0$:

$\lambda_1 \vert \lambda_2$	1	2	3	4	5
1		–	–	–	–
2			–	–	–
3				–	–
4					–
5					

Calculer
$$E\left[\max\left(M_1+M_2-k;0\right)\right]$$
et
$$E\left[\max\left(M_1^{\perp}+M_2^{\perp}-k;0\right)\right]$$
pour $k=0,1,2,....,20$ pour quelques (ou toutes les) combinaisons (ex : $\lambda_1=1,\lambda_2=5$ et $\lambda_1=2,\lambda_2=3$). Comparer. Est-ce qu'un couple de v.a. non-corrélées sont aussi indépendantes ?

3. Soit un couple de v.a. (M_1,M_2) où
$$F_{M_1,M_2}\left(k_1,k_2\right)=C\left(F_{M_1}\left(k_1\right),F_{M_2}\left(k_2\right)\right)$$
pour $k_1,k_2\in\mathbb{N}$.
On suppose $M_i\sim Binom\left(10,q_i\right)$, $i=1,2$, avec $q_1=0.3$ et $q_2=0.2$.
Le coefficient de corrélation de Pearson est
$$\rho_P\left(M_1,M_2\right)=\frac{Cov\left(M_1,M_2\right)}{\sqrt{Var\left(M_1\right)Var\left(M_2\right)}}.$$

Questions :

(a) Calculer les valeurs de $\rho_P\left(M_1,M_2\right)$ pour $C\left(u_1,u_2\right)=\min\left(u_1;u_2\right).$

(b) Calculer les valeurs de $\rho_P\left(M_1,M_2\right)$ pour $C\left(u_1,u_2\right)=\max\left(u_1+u_2-1;0\right)$.

(c) Soit la copule
$$C\left(u_1,u_2\right)=\theta\min\left(u_1;u_2\right)+\left(1-\theta\right)\max\left(u_1+u_2-1;0\right).$$

i. Identifier la valeur θ de telle sorte que $\rho_P\left(M_1,M_2\right)=0$.

ii. Calculer
$$E\left[\max\left(M_1+M_2-k;0\right)\right]$$
et
$$E\left[\max\left(M_1^{\perp}+M_2^{\perp}-k;0\right)\right]$$
pour $k=0,8,10$. Note : $\left(M_1^{\perp},M_2^{\perp}\right)$ = couple de v.a. indépendantes avec $M_1^{\perp}\sim M_1$ et $M_2^{\perp}\sim M_2$. (Pour vérifier : $E\left[\max\left(M_1+M_2-4;0\right)\right]=$________ et $E\left[\max\left(M_1^{\perp}+M_2^{\perp}-k;0\right)\right]=$________)

(d) Comparer les valeurs obtenues en 3(c)ii. Est-ce que 2 v.a. non-corrélées sont aussi indépendantes ?

4. Soit la paire de v.a. (X_1,X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule de Clayton (paramètre de dépendance $\alpha=5$),
$$X_1\sim LN\left(\mu,\sigma^2=1\right)\ \text{(tel que } E\left[X_1\right]=300)$$
et
$$X_2\sim Gamma\left(\alpha=3,\beta=\frac{1}{100}\right).$$
On définit la v.a $S=X_1+X_2$.
On a recours au générateur congruentiel mixte défini par la relation récurrente $x_n=\left(ax_{n-1}+c\right)\mathrm{mod}m$ $(n=1,2,...)$ avec $a=41358$, $c=0$, $m=2147483647$ et $x_0=20111221$.
On produit dans l'ordre $m=1000$ réalisations de (X_1,X_2) en utilisant la méthode conditionnelle afin de produire les 1000 réalisations de S. .
NOTE : Simuler dans l'ordre les paires de réalisations indépendantes de la loi uniforme i.e. on doit avoir

j	$V_1^{(j)}$	$V_2^{(j)}$
1	0.318375756	0.384504876
2	0.352653871	0.058777102
...		
1000	0.601626189	0.055934591

Informations relatives à la copule de Clayton :

$$\begin{aligned} C_\alpha(u_1,u_2) &= \left(u_1^{-a}+u_2^{-a}-1\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ C_{2|1}(u_2|u_1) &= \frac{1}{u_1^{\alpha+1}}\left(u_1^{-a}+u_2^{-a}-1\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}} \\ c(u_1,u_2) &= \frac{1+\alpha}{(u_1u_2)^{\alpha+1}}\left(u_1^{-a}+u_2^{-a}-1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i=1,2$.
Questions :

(a) Produire $m=1000$ réalisations de (U_1,U_2) à partir de la copule de Clayton en ayant recours à la **méthode conditionnelle**. Indiquer les réalisations 1 et 2 de (U_1,U_2). (Pour vérifier : réalisation 3 $\left(U_1^{(3)},U_2^{(3)}\right)$ de (U_1,U_2) est $(0.903377524, 0.96849821)$)

(b) À partir des $m=1000$ réalisations de(U_1,U_2), produire $m=1000$ réalisations de (X_1,X_2). Indiquer les réalisations 1 et 2 de (X_1,X_2). (Pour vérifier : réalisation 3 $\left(X_1^{(3)},X_2^{(3)}\right)$ de (U_1,U_2) est $(668.3566405, 691.8885654)$)

(c) À partir des $m=1000$ réalisations de (X_1,X_2), produire $m=1000$ réalisations de S. Indiquer les réalisations 1 et 2 de S.

(d) À partir des $m=1000$ réalisations de (X_1,X_2) et S, ...

i. ... calculer l'approximation de $F_S(1000)$;

ii. ... calculer les approximations de $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa=0.95$;

iii. ... calculer les approximation de les parts allouées aux deux risque selon la règle de la TVaR, $TVaR_\kappa(X_1;S)$ et $TVaR_\kappa(X_2;S)$ pour $\kappa=0.95$.

5. Soit le couple de v.a. (X_1,X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule de Gumbel (avec un paramètre de dépendance $\alpha=5$), une marginale exponentielle pour X_1 ($X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{20}\right)$) et une marginale gamma pour X_2 ($X_2 \sim Ga(2,0.2)$).

(a) Développer l'expression de F_{X_1,X_2}. Calculer $F_{X_1,X_2}(50,30)$ et $\Pr(X_1>50, X_2>30)$.

(b) Développer les expressions de $C_{2|1}(u_1,u_2)$ et de $F_{X_2|X_1=x_1}(x_2)$. Calculer $F_{X_2|X_1=50}(30)$.

(c) Développer les expressions de $c(u_1,u_2)$ et de f_{X_1,X_2}. Calculer $f_{X_1,X_2}(50,30)$.

(d) On définit $S=X_1+X_2$. Utiliser la méthode de discrétisation *lower* avec $h=1$ pour évaluer $\Pr(S\leq 150)$. Évaluer $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.

(e) Utiliser la méthode de discrétisation *lower* avec $h=1$ pour évaluer $E[g(X_1,X_2)]$ avec

$$g(x_1,x_2) = \min\{x_1,100\} + \min\left\{\max\left\{\frac{x_1}{100}-0.1;0\right\};0.6\right\}x_2.$$

(21.4798)

6. Soit le copule de v.a. (X_1,X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule de Frank, $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{500}\right)$ et $X_2 \sim LN\left(5,2^2\right)$. On définit les v.a. $S=X_1+X_2$ et $T=X_1-X_2$. On a recours au GNPA défini à l'algorithme **??**, où la relation récurrente est $x_n = (ax_{n-1}+c) \bmod m$ ($n=1,2,...$) avec $a = 41\ 358$, $c=0$, $m = 2\ 147\ 483\ 647$ et $x_0 = 343\ 463\ 463$. La n-ième réalisation produite par GNPA est désignée par $V^{(n)} = \frac{x_n}{m}$. On produit dans l'ordre 100 000 réalisations de (X_1,X_2) en utilisant la méthode conditionnelle afin de produire les 100 000 réalisations de S et de T. Simuler dans l'ordre les paires de réalisations indépendantes de la loi uniforme i.e. on doit avoir

j	$V_1^{(2j-1)}$	$V_2^{(2j)}$
1	0.318375756	0.384504876
2	0.352653871	0.058777102

Pour la réalisation j, on utilise $\left(V^{(2j-1)},V^{(2j)}\right)$ pour produire la réalisation $\left(U_1^{(j)},U_2^{(j)}\right)$ du couple (U_1,U_2) associée à la copule. On sait que $E[S]=1596.6332$ et $E[T]=-596.6332$.

(a) On suppose que le paramètre de dépendance α de la copule de Frank est -10. À partir des réalisations de S et T, calculer des approximations de $VaR_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(T)$, $TVaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(T)$ pour $\kappa = 0.5$ et 0.995. Les premières réalisations de X_1 et X_2 sont 603.403 et 84.63605. À partir des 100 000 réalisations, les approximations obtenues de $E[S]$ et $E[T]$ sont 1583.671 et -587.705.

(b) On suppose que le paramètre de dépendance α de la copule de Frank est 10. À partir des réalisations de S et T, calculer des approximations de $VaR_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(T)$, $TVaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(T)$ pour $\kappa = 0.5$ et 0.995. Les premières réalisations de X_1 et X_2 sont 603.4032 et 685.338. À partir des 100 000 réalisations, les approximations obtenues de $E[S]$ et $E[T]$ sont 1614.672 et -618.706.

7. Soit le vecteur de v.a. (X_1, X_2, X_3) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule multivariée C, $X_1 \sim LN(5, 2^2)$, $X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{500}\right)$ et $X_3 \sim Pa(2.8, 1800)$. On suppose que $\tau(X_1, X_2) = 0.5$, $\tau(X_1, X_3) = 0.7$ et $\tau(X_2, X_3) = 0.3$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2 + X_3$. On a recours au GNPA défini à l'algorithme **??**, avec $a = 41\ 358$, $c = 0$, $m = 2\ 147\ 483\ 647$ et $x_0 = 343\ 463\ 463$. On produit dans l'ordre 100 000 réalisations de (X_1, X_2, X_3) en utilisant les algorithmes de simulation propres aux copules normale et de Student afin de produire les 100 000 réalisations de S. La valeur de $E[S]$ est 2596.633.

   (a) La copule C est la copule normale. À partir des réalisations de S, calculer des approximations de $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5$ et 0.995. Les premières réalisations de X_1, X_2 et X_3 sont 425.6796, 748.3264 et 672.461. À partir des 100 000 réalisations, l'approximation obtenue pour $E[S]$ est 2584.252.

   (b) La copule C est la copule de Student avec $\nu = 4$. On utilise les mêmes réalisations de loi normale qu'en (a) et, ensuite, on produit les 100 000 réalisations de la loi du khi-deux (nécessaires pour l'application de l'algorithme de simulation). À partir des réalisations de S, évaluer approximativement $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5$ et 0.995. Les premières réalisations de X_1, X_2 et X_3 sont 643.5938, 935.6793 et 758.5113. À partir des 100 000 réalisations, l'approximation obtenue pour $E[S]$ est 2572.15.

8. Un portefeuille est constitué de 2 lignes d'affaires. Le nombre de sinistres pour la ligne i est représenté par la v.a. M_i pour $i = 1, 2$ où $M_1 \sim BN(r = 4, q = 0.5)$ et $M_2 \sim Pois(3)$. La loi conjointe de (M_1, M_2) est définie en fonction de la copule de Clayton, de la copule de Gumbel ou de la copule de survie associée à la copule de Clayton. Le paramètre de dépendance de chaque copule est fixé de telle sorte que la covariance de (M_1, M_2) soit égale à $0.5(\mathrm{Var}(M_1)\,\mathrm{Var}(M_2))^{\frac{1}{2}}$. On définit $S = M_1 + M_2$. Les questions suivantes sont faites pour les trois copules.

   (a) Calculer $\mathrm{Cov}(M_1, M_2)$ et le paramètre de dépendance de chaque copule.

   (b) Calculer $f_{M_1,M_2}(8, 9)$.

   (c) Développer l'expression de $f_S(k) = \Pr(S = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et calculer $f_S(k)$ pour $k = 0$, 1 et 10.

   (d) Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$.

   (e) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2 > VaR_{0.99}(X_2)\}}\right]$.

9. On considère le couple de v.a. (M_1, M_2) où $M_i \sim Pois(10)$ pour $i = 1, 2$. La loi conjointe de (M_1, M_2) est définie en fonction de la copule de Clayton avec un paramètre de dépendance $\gamma = 5$. On définit $N = M_1 + M_2$.

   (a) Calculer $f_{M_1,M_2}(5, 6)$ et $f_{M_1,M_2}(7, 7)$.

   (b) Calculer $\mathrm{Cov}(M_1, M_2)$.

   (c) Calculer $E[N]$ et $\mathrm{Var}(N)$.

   (d) Calculer $\Pr(N = 0)$, $\Pr(N = 10)$ et $\Pr(N = 20)$.

   (e) Calculer $VaR_{0.99}(N)$ et $TVaR_{0.99}(N)$.

Bibliographie

[Brazauskas et al., 2009] Brazauskas, V., Jones, B. L., and Zitikis, R. (2009). Robust fitting of claim severity distributions and the method of trimmed moments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(6) :2028–2043.

[Marceau, 2013] Marceau, E. (2013). *Modélisation et évaluation Quantitative des risques en actuariat : modèles sur une période*. Springer.

[Nikoloulopoulos and Karlis, 2008] Nikoloulopoulos, A. K. and Karlis, D. (2008). On modeling count data : a comparison of some well-known discrete distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78(3) :437–457.

[Pielke Jr and Landsea, 1998] Pielke Jr, R. A. and Landsea, C. W. (1998). Normalized hurricane damages in the united states : 1925–95. *Weather and Forecasting*, 13(3) :621–631.