Notes de cours

ACT-1003 Compléments de mathématiques

Christopher Blier-Wong

Table des matières

Introduction

Le présent ouvrage est le cœur de la matière enseignée dans le cours ACT-1003 Compléments de mathématiques à l'École d'actuariat de l'Université Laval. Il vise à équiper les étudiants en actuariat avec les connaissances mathématiques pour réussir les cours de mathématiques actuarielles pour résoudre des problèmes liés à l'assurance.

Une connaissance des fonctions usuelles et du calcul univarié est prérequise. Le lecteur qui désire plus d'information sur les preuves, surtout pour la première partie de rappel, est dirigé vers le manuel de référence pour le cours :

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2014). Thomas' Calculus : Early Transcendentals (13th Edition). Pearson.

Utilisation de l'ouvrage

Ces notes de cours sont un projet qui sera mis à jour chaque session. Cet ouvrage est en cours de rédaction, ce qui implique que son contenu est continuellement révisé et mis à jour. Alors, il peut y avoir encore des erreurs et son contenu doit être encore amélioré. Pour cette raison, le lecteur est invité à nous communiquer tout commentaire et/ou correction qu'il peut avoir à christopher.blier-wong.1@ulaval.ca. Les conditions suivantes d'utilisation doivent être respectées :

1. Cet ouvrage a été conçu pour des fins pédagogiques, personnelles et non commerciales. Toute utilisation commerciale ou reproduction est interdite.

2. Son contenu demeure la propriété de son auteur.

Ce document contient des exemples troués, qui sont complétés en classe.

Remerciements

J'aimerais premièrement remercier l'École d'actuariat pour me donner l'opportunité d'enseigner ce cours. Je remercie Radu Mitric pour m'avoir partagé du matériel des versions précédentes du cours. Celui-ci a grandement influencé la présente version du cours. J'aimerais aussi remercier mon superviseur au doctorat, Etienne Marceau, ainsi que mes co-superviseurs, Luc Lamontagne et Hélène Cossette, pour me permettre de prendre du temps de mon doctorat pour enseigne ce cours.

Première partie

Rappels sur les fonctions d'une variable

1 | Fonctions, limites et continuité

1.1 | Fonctions

1.1.1 | Fonctions, domaines et images

Définition 1.1.1 : Fonctions, domaines et images

Une fonction f d'un ensemble de départ D vers un ensemble d'arrivé F est une correspondance qui assigne à chaque élément x d'D exactement un élément y de F.

L'ensemble D est le domaine de définition de la fonction : $D = Dom(f)$.

L'image de $f, Ima(f)$, est le sous-ensemble de F constitué de toutes les valeurs possibles de $f(x)$ lorsque x est dans D.

Exemple 1.1.1 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4+x}$. Trouvez :

a) $Dom(x)$ b) $f(5)$ c) $Ima(x)$

1.1.2 | Quelques types de fonctions

Les types de fonctions importantes à savoir sont les fonctions

— polynomiales de type
$$f(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

— exponentielles de type
$$f(x) = a^x$$

— logarithmique de type
$$f(x) = \log_a(x)$$

— Trigonométrique, par exemple
$$f(x) = \sin(x)$$

Les identités trigonométriques suivantes sont importantes :

Tableau 1.1 : Identités trigonométriques

— $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
— $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$
— $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
— $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
— $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
— $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
— $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
— $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
— $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
— $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
— $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
— $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
— $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

1.1.3 | Construire d'autres fonctions

Fonctions composées

Définition 1.1.2 : Fonction composée

Si f et g sont des fonctions, alors la fonction composée $f \circ g$ est définie par
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Le domaine de $f \circ g$ est composé des nombres x dans le domaine de $g(x)$ où $g(x)$ est dans le domaine de f.

On peut interpréter la composition comme appliquer une fonction au résultat d'une autre fonction.

$$\begin{tikzcd} \boxed{x} \arrow[r, bend left, "g"] & \boxed{g(x)} \arrow[r, bend right, "f"'] & \boxed{f(g(x))} \end{tikzcd}$$

Exemple 1.1.2 : Soit $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et $g(x) = \ln x$. Trouver

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$ **c)** $(f \circ f)(x)$ **d)** $(g \circ g)(x)$

et le domaine de chaque.

Fonctions inverses

Définition 1.1.3 : L'inverse d'une fonction

Soit une fonction $y = f(x)$ où la correspondance entre le domaine et l'image est une à une. Alors, l'inverse de f, notée f^{-1}, est créée en interchangeant le domaine et l'image de f. On obtient cette fonction par la relation $x = f^{-1}(y)$.

L'idée de la fonction inverse est qu'on peut retrouver le domaine initial de la fonction en inversant son image :

$$\begin{tikzcd} \boxed{x} \arrow[r, bend left, "f"] & \boxed{y = f(x)} \arrow[r, bend right, "f^{-1}"'] & \boxed{x} \end{tikzcd}$$

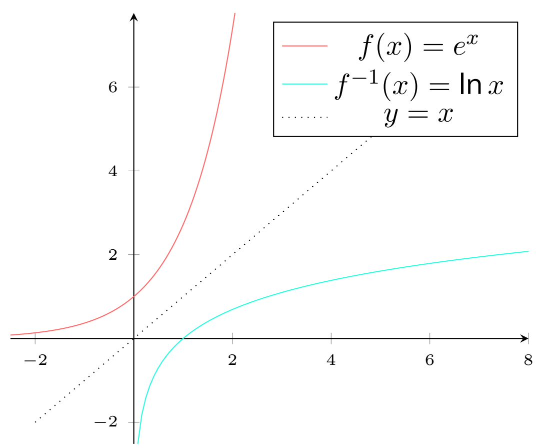
Exemple 1.1.3 : Trouver les inverses des fonctions :

a) $f(x) = 2x + 1$ **b)** $f(x) = x^2$ **c)** $f(x) = \log_3(x)$

Les graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à $y = x$.

Exemple 1.1.4 : Trouver l'inverse de la fonction $f(x) = e^x$. Dessiner le graphique de f et f^{-1}.

Soit $f(x) = e^x$. Alors, $f^{-1}(x) = \ln x$. On a



1.1.4 | Formes indéterminées

Dans le calcul infinitésimal, on fait souvent face à des quantités indéterminées. La prochaine section présente les limites, où on devra traiter les formes indéterminées. Les formes :

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

Dans ces cas, on a quelques approches classiques pour s'en débarrasser :

— factorisation ;

— mise au même dénominateur ;

— multiplication par un conjugué ;

— prendre le logarithme ou l'exponentielle ;

— utiliser la règle de l'Hôpital.

1.2 | Limites

Afin de motiver la notion de limite, on examine premièrement la fonction

$$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}.$$

Le domaine de f est, $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ car f n'est pas définie au point 2. Cependant, on remarque que plus on s'approche de 2 par la gauche, plus la fonction s'approche de la valeur 5 et plus on s'approche de 2 par la droite, plus la fonction s'approche vers la valeur 5.

x	$f(x)$
1.999	4.997000
1.9999	4.999700
1.99999	4.999970
1.999999	4.999997

x	$f(x)$
2.001	5.003000
2.0001	5.000300
2.00001	5.000030
2.000001	5.000003

La limite de f au point c est notée $\lim_{x\to c} f(x)$. Dans le tableau de gauche, on s'approchait de la valeur $x = 2$ de la gauche, c.-à-d. $x < 2$. On dit alors qu'on approche $f(x)$ de la gauche et on note $\lim_{x\to c^-} f(x)$. Dans le tableau de droit, on s'approchait de la valeur $x = 2$ de la droite, c.-à-d. $x > 2$. On dit alors qu'on approche $f(x)$ de la droite et on note $\lim_{x\to c^+} f(x)$.

Théorème 1.2.1

Une fonction $f(x)$ a une limite quand x approche c si et seulement si elle a une limite à gauche et une limite à droite à c et ces limites sont égales :

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^-} f(x) = L \text{ et } \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

Tableau 1.2 : Règles de limites

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$
5. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right] \left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]$
6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$, si $n \in \mathbb{N}$
8. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{1/n} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{1/n}$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0, n \in \mathbb{N}$
9. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{1/n} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{1/n}$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq 0, n \in 1, 3, 5, 7, \ldots$

Exemple 1.2.1 : Utilisez les règles de limites pour évaluer $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt[3]{\dfrac{(6-x)(x-4)}{x^2-3x-6}}$.

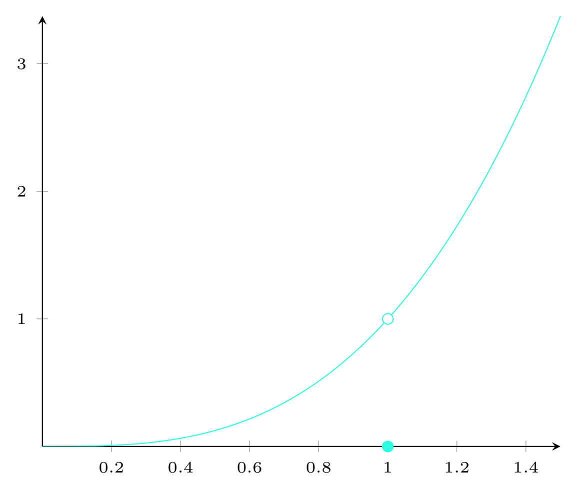
En combinant les règles 1 à 6, on déduit que si f est une fonction polynomiale ou une fonction rationnelle, et a est dans le domaine de f, on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Si $f(x) = g(x)$ lorsque $x \neq a$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. En autres mots, $\lim_{x\to a} f(x)$ n'a pas besoin d'être égal à $f(a)$ pour que la limite existe.

Exemple 1.2.2 : Évaluer $\lim_{x\to 1} f(x)$ si $f(x) \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$.

On obtient le graphique suivant :



Soit $g(x) = x^3$. Alors, $f(x) = g(x)$ lorsque $x \neq 1$. Avec la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} g(x) \\ &= \lim_{x\to 1} x^3 = 1.\end{aligned}$$

Parfois, lorsqu'on applique une substitution directe une fonction rationnelle, on obtient une forme indéterminée comme $\frac{0}{0}$. Dans ces cas, on a recours à quelques techniques :

1. factoriser pour éliminer au moins un des termes qui causent un 0 ;
2. multiplier par un conjugué (comme $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$).

Exemple 1.2.3 : Évaluez $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{u^4 - 1}{u^3 - 1}$ (Taylor, exercice 2.2.33).

Exemple 1.2.4 : Évaluez $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9+x} - 3}{x}$.

Parfois, on ne peut pas évaluer la limite directement à un point, mais on peut trouver deux fonctions qui bornent cette fonction autour d'un point. Le théorème suivant permet d'évaluer la limite.

Théorème 1.2.2 : Le théorème du sandwich

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ lorsque x est autour de c (excepté possiblement à c) et

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

on a

$$\lim_{x \to c} g(x) = L.$$

Exemple 1.2.5 : Trouver la limite de $x^2 \sin \frac{2\pi}{x}$ lorsque x approche 0.

Premièrement, on ne peut pas utiliser

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{2\pi}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \lim_{x \to 0} \sin \frac{2\pi}{x}$$

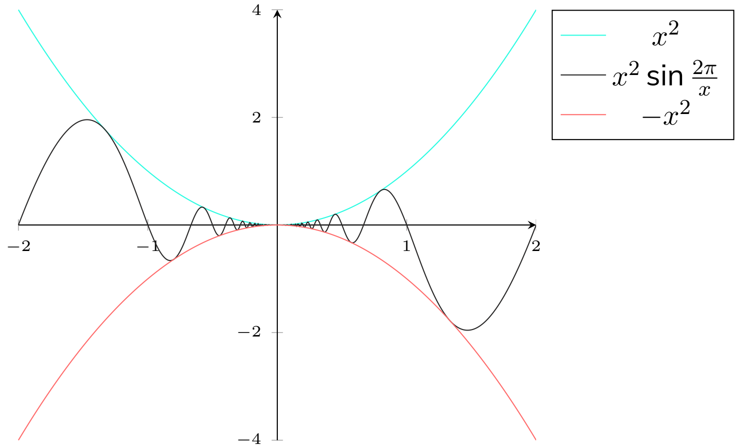
car la limite $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{2\pi}{x}$ n'existe pas. Ainsi, on utilise le théorème du sandwich.

On remarque premièrement que l'image de $\sin \frac{1}{x}$ est $[-1, 1]$. Alors,

$$-1 \leq \sin \frac{2\pi}{x} \leq 1.$$

Ensuite, puisque x^2 est toujours positif, l'inégalité suivante tient :

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{2\pi}{x} \leq x^2.$$



On applique le théorème. On a

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = 0; \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0,$$

qui implique

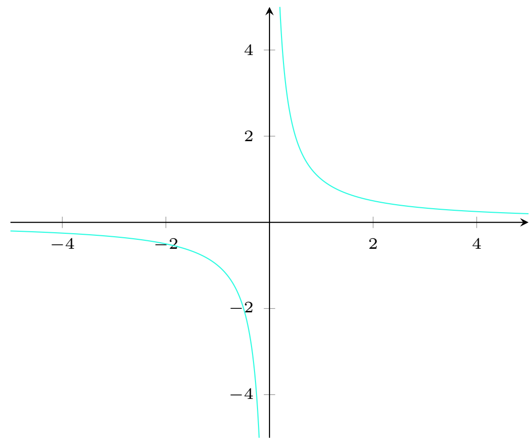
$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{2\pi}{x} = 0.$$

Tableau 1.3 : Limites usuelles

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (x > 0)$
4. $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad |x| < 1$
5. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

1.2.1 | Limites impliquant l'infini

Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$:



Les théorèmes utilisés précédemment s'appliquent même si x tends vers $\pm\infty$ (sauf possiblement les règles 3, 5 et 6 lorsqu'un cas est indéfini). Dans notre cas, on a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

Exemple 1.2.6 : Évaluez $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-10x^2+9x-2)$.

Avec la substitution directe, on obtient

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-10x^2+9x-2)=\infty-\infty+\infty,$$

qui n'est pas défini. On peut penser que le premier infini est "plus grand" que le deuxième "infini", car son exposant est plus élevé. On peut vérifier ceci en factorisant. On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(x^3-10x^2+9x-2) &= \lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}x^3\times\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\\ &= \infty\times(1-0+0-0)=\infty.\end{aligned}$$

Lorsque $f(x)$ est une fonction rationnelle et que x tend vers l'infini, on peut avoir des cas indéfinis $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Dans ce cas, on divise le numérateur et le dénominateur par l'ordre du polynôme le plus élevé dans le dénominateur.

Exemple 1.2.7 : Évaluez $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x+1}{12x^3+15x^2-4x+1}$.

Exemple 1.2.8 : Évaluez $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^5 - 4}{x^2 + 3}$.

1.2.2 | La définition précise d'une limite

Les techniques pour évaluer les limites dans cette section sont basées sur les principes de substitution directe. Par contre, on a pas présenté de justification formelle pour motiver ce *qu'est* une limite. Dans cette sous-section, on présente ces idées.

Définition 1.2.3 : La définition précise d'une limite

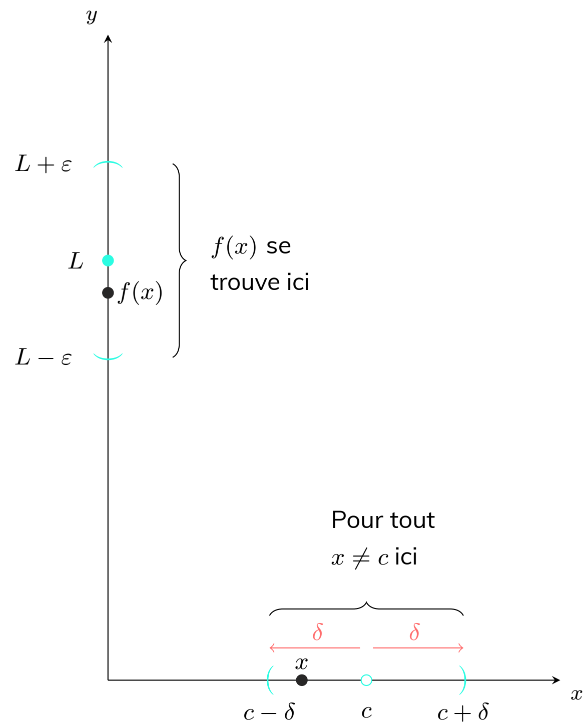
Soit $f(x)$, une fonction définie sur un intervalle ouvert autour de c, excepté possiblement à c lui-même. On dit que la limite de $f(x)$ quand x approche c est le numéro L, et on écrit

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

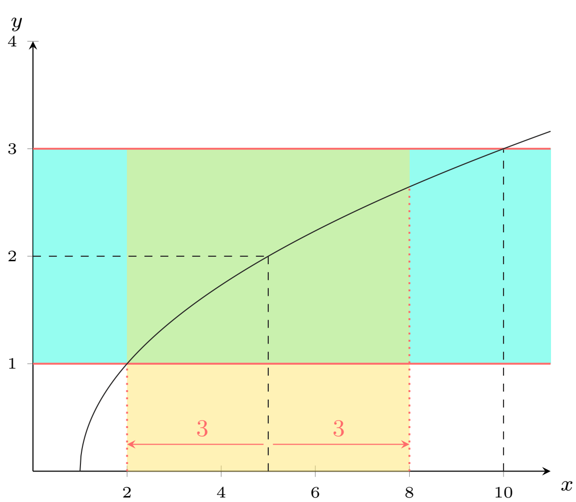
si, pour tout numéro $\epsilon > 0$, il existe un numéro correspondant $\delta > 0$ tel que pour tout x,

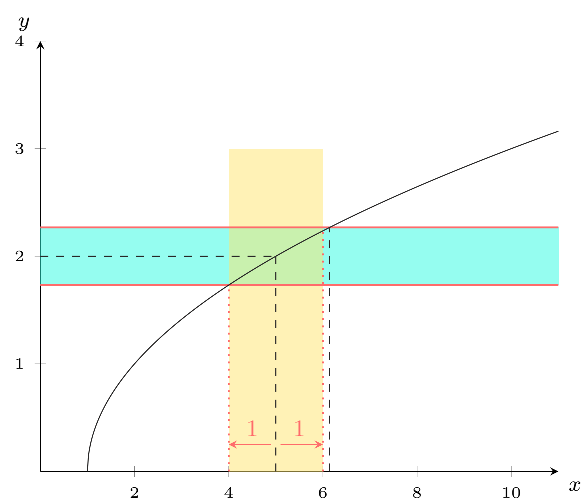
$$0 < |x - c| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon.$$

L'illustration suivante est recréée de la figure 2.17 dans Taylor. Elle permet de présenter l'intuition derrière la définition précise d'une limite. Elle mentionne que si on accepte une tolérance ε autour de L, on doit prouver qu'il existe une distance δ telle que x est près de de c et que $f(x)$ est dans la tolérance de L.



Les graphiques suivants montrent ce qu'il se passe lorsqu'on réduit la taille de δ dans la fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$





Exemple 1.2.9 : Utiliser la définition d'une limite (avec ε et δ) pour démontrer le résultat suivant :

$$\lim_{x \to 2} (2x+3) = 7.$$

Approche 1 : On a $f(x) = 2x+3$, $L = 7$ et $c = 2$. On doit montrer que si $|x-4| \leq \delta$, alors $|(2x+3)-7| \leq \varepsilon$.

On doit premièrement trouver un candidat pour δ :

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &\leq \varepsilon \\ |2x + 3 - 7| &\leq \varepsilon \\ |x - 2| &\leq \varepsilon \\ |x - 2| &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Soit $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Si

$$\begin{aligned} |x - 2| &\leq \delta \\ |x - 2| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 2|x - 2| &\leq \varepsilon \\ |2x - 4| &\leq \varepsilon \\ |2x + 3 - 7| &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

on a $|f(x) - L| \leq \varepsilon$.

Approche 2 :

La première étape est de trouver les valeurs de x tels que $|f(x) - L| < \varepsilon$. On a

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &< \varepsilon \\ |2x + 3 - 7| &< \varepsilon \\ -\varepsilon < 2x - 4 &< \varepsilon \\ 4 - \varepsilon < 2x &< 4 + \varepsilon \\ 2 - \frac{\varepsilon}{2} < x &< 2 + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

La deuxième étape est de trouver une valeur de δ tel que la dernière inégalité est satisfaite. On obtient

$$\begin{aligned} |x - c| &< \delta \\ |x - 2| &< \delta \\ 2 - \delta < x &< 2 + \delta. \end{aligned}$$

Pour la borne inférieure, on a

$$\begin{aligned} 2 - \delta &= 2 - \frac{\varepsilon}{2} \\ \delta &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Pour la borne supérieure, on a

$$\begin{aligned} 2 + \delta &= 2 + \frac{\varepsilon}{2} \\ \delta &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Soit $\delta^* = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\} = \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, $|f(x) - L| < \varepsilon$ lorsque $|x - c| < \delta^*$.

Exemple 1.2.10 : Utiliser la définition d'une limite (avec ε et δ) pour démontrer le résultat suivant :

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - x) = 6.$$

1.3 | Continuité

Une fonction f est dite continue à c si $\lim_{x\to c} = f(c)$. Ceci implique trois conditions :

1. $\lim_{x\to c} = L$ doit exister ;
2. $f(c)$ doit exister ;
3. $f(c) = L$.

Exemple 1.3.1 : Étudiez la continuité de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 16}$.

Si la fonction n'est pas continue à $x = c$, on dit que f est discontinu à c.

Exemple 1.3.2 : Étudiez la continuité de la fonction $f(x) \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$.

Proposition 1.3.1

Si f et g sont des fonctions continues au point a, alors les fonctions suivantes sont aussi continues en a :

- $f \pm g$;
- cf ;
- fg ;
- $\dfrac{f}{g}$, pourvu que $g(a) \neq 0$.

Théorème 1.3.2 : Limites de fonctions continues

Soit f, une fonction continue au point b et $\lim_{x \to c} g(x) = b$, alors

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right).$$

Exemple 1.3.3 : Trouver la valeur de a tel que la limite de $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(5 + |\cos x|\right), & x < 0 \\ \ln\left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+a}\right), & x \geq 0 \end{cases}.$$