- ACT-1002 -

Analyse probabiliste des risques actuariels

Exercices de dépannage pour l'examen I

Préparé par :
Jérémie Boudreault

Session :
Hiver 2017

Université Laval

Table des matières

1 Exercices de dépannage pour l'examen I

1.1 Prise de photos au sommet d'une montagne

Lors de la dernière randonnée à montagne de la famille de Paul, il décide d'immortaliser ce moment une fois en haut et de prendre des photos de sa famille avec le beau paysage. On considère qu'il doit toujours y avoir un membre de la famille de 5 personnes qui doit s'occuper de prendre la photo. On se s'intéresse pas à la personne qui a pris la photo, mais l'ordre des gens sur la photo est important. De plus, les membres de la famille ne prennent pas toujours part à la prise de photo.

a) Combien peut-il y avoir de photos différentes possibles ? (Rép : 205)
b) ... si Marie et Paul ne participent aux photos que s'ils y sont ensemble ? (Rép : 107)
c) ... et si Jean et Matthieu ne peuvent être l'un à coté de l'autre sur une photo ? (En plus de la condition b) (Rép : 89)

1.2 Enfants tous en rond

À la maternelle, un jeu classique est de se mettre en rond puis de tenir une grosse toile de plastique que l'on agite le plus fort que l'on peut. La classe de maternelle compte 12 enfants, dont 2 jumeaux identiques qui doivent toujours être un à coté de l'autre.

a) Combien y-a-t'il de façon possible de placer ces élèves autour de la toile ? (Rép : 3628800)
b) ... si la classe compte aussi 2 soeurs qui ne peuvent être une à coté de l'autre ? (Rép : 2903040)

1.3 Choix de repas au McDonald's

Il est 3h du matin. 8 amis se pointent au McDonalds's à la suite d'une soirée bien arrosée. La caissière leur annonce qu'il ne restent plus que 5 repas disponibles, soit un Hamburger, un Junior au Poulet, un Cheese Burger, un Cheese Bacon et une Poutine. Déchirés, les amis se résolvent que seulement 5 d'entre eux pourront manger. (Autrement dit, il ne reste pas 5 choix de repas, mais bien seulement 5 repas)

a) Combien de combinaisons possible d'amis/repas sont possibles ? (Rép : 6720)
b) ... si 2 amis ne veulent pas du repas «Hamburger» ? (Rép : 5040)
c) ... si 3 amis sont végétariens ? (Rép : 480)
d) ... en combinant les conditions b et c ? (Rép : 288)

1.4 Vaches sur une ferme

Philippe, fermier d'expérience, possède 5 enclos et 12 vaches. Les vaches sont identiques (i.e elles sont indifférentiables) mais les enclos sont différents.

a) Combien y-a-t'il de façons différentes de placer les vaches dans les enclos, si les enclos peuvent contenir aucune vache ? (Rép : 1820)
b) ... si les enclos doivent contenir au minimum une vache ? (Rép : 330)

La nouvelle copine du fermier, Kim, décide de nommer les vaches, de sorte que les vaches sont désormais différentiables entre elles. Il n'y a aucun minimum de vaches par enclos.

c) Combien y-a-t'il de façons différentes de placer les vaches dans les enclos ? (Rép : 244140625)

1.5 Lancers d'un dé

On lance simultanément 6 dés réguliers (i.e la probabilité d'avoir un des six chiffres pour chacun des dés est donc de 1/6).

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une suite de 6 chiffres ? (Rép : 0.0154321)
b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le chiffre 3 et 3 fois le chiffre 6 ? (Rép : 0.0004286694)
c) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le même chiffre et 3 fois un chiffre différent du premier ? (Rép : 0.006430041)
d) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois le même chiffre et 2 fois un autre chiffre différent du premier ? (Rép : 0.009645062)

1.6 Jeu de cartes

On tire 5 cartes sans remise à partir d'un jeu duquel on a laissé les deux jokers (i.e. le jeu compte donc 54 cartes).

a) Quelle est la probabilité de piger les deux jokers et deux as et une autre carte qui n'est pas un as ? (Rép : 0.000091067)
b) Quelle est la probabilité de piger deux jokers et deux as ou plus ? (Rép : 0.0000923317)
c) Quelle est la probabilité d'obtenir une suite ? (Rép : 0.0032379)
d) Quelle est la probabilité d'obtenir 5 cartes de la même sorte ($\heartsuit\diamondsuit\spadesuit\clubsuit$) , si l'on considère qu'un joker peut faire office de n'importe quelle sorte ? (Rép : 0.00379825)

1.7 Pile ou Face

On lance une pièce de monnaie truquée, dont la probabilité d'avoir pile est de 70%.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 piles et 7 faces en 10 lancers ? (Rép : 0.0090017)
b) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 3 faces dans les lancers 8 à 10 et d'obtenir exactement 3 piles et 7 faces en 10 lancers ? (Rép : 0.0026255)
c) Quelle est la probabilité conditionnelle d'avoir obtenu 3 faces dans les lancers 8 à 10, sachant qu'on a obtenu 3 piles et 7 faces en 10 lancers ? (Rép : 0.2916667)
d) Quelle est la probabilité d'avoir toujours obtenu un résultat différent du lancer précédent en 10 lancers ? (Rép : 0.00081682)
e) ... et en 9 lancers ? (Rép : 0.00194481)
f) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 faces en 40 lancers ? (Rép : 0.999402072)

1.8 Bières bues à un party par deux colocs

Le réfrigérateur de deux colocataires, Cédrick et Daehli, compte 16 bières : 6 blanches, 4 rousses, 3 blondes et 3 noires. En vue d'une petite soirée, Cédrick prend les 16 bières du réfrigérateur qu'il place dans son sac pour lui et Daehli. Lors de la soirée, à chaque fois que Cédrick se prend une bière parmi celles qu'il a emportées, il prend le soin d'en amener une à son coloc aussi (i.e Cédrick est toujours le premier à se choisir une bière, et choisit par la suite celle pour

Daehli.) Ils ont bu 4 bières chacun au cours de la soirée.

a) Quelle est la probabilité que Cédrick ait bu les 3 bières noires ? (Rép : 0.007142857)
b) Quelle est la probabilité que les bières non bues soient : 1 blanche, 2 blondes, 3 noires et 2 rousses ? (Rép : 0.008391608)
c) ... et que Daehli ait bu 3 blanches et une blonde, et que la première bière de Cédrick soit une rousse ? (Rép : 0.000599401)

1.9 Preuve

Démontrer que : $max(0, \Pr[A] + \Pr[B] - 1) \leqslant \Pr[A \cap B] \leqslant min(\Pr[A], \Pr[B])$

1.10 Analyse de survie des étudiants en actuariat

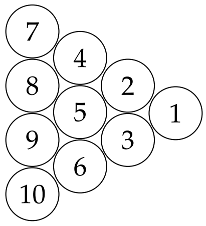
Nous nous sommes amusés à modéliser la survie des étudiants dans le bac en actuariat. Les moments où un étudiant peut quitter le bac sont définis comme : Durant de la première session, durant la seconde session, et finalement à n'importe quel moment à partir de la troisième session jusqu'à la fin de Bac. Ainsi, nous pouvons définir les probabilité de survie suivantes :

- Probabilité de survivre à la première session = 0.60
- Probabilité de survivre à la deuxième session, sachant qu'on a survécu à la première session = 0.80
- Probabilité d'obtenir son bac, sachant qu'on a survécu à la deuxième session = 0.95

a) Vous débutez votre première session. Qu'elle est la probabilité que vous obteniez votre Bac ? (Rép : 0.456)
b) Vous êtes à la fin de la deuxième session. Votre ami a lâché le bac. Qu'elles sont les probabilités respectives qu'il ait lâché au cours de la première et au cours de la seconde session ? (Rép : 10/13 et 3/13)
c) Vous et votre ami avez tous deux passé la première session. Quelle est la probabilité que vous obteniez tous les deux votre Bac ? (Considérer la survie dans le Bac de chaque personne comme des événements indépendants) (Rép : 0.5776)
d) S'il y a 150 étudiants qui débutent le Bac, 80 autres étudiants qui ont survécu à la première session et 60 autres à la seconde, combien d'étudiants parmi ceux-ci obtiendront leur diplôme, si les probabilités de survie définies se réalisent parfaitement ? (La survie des étudiants est encore considérée comme indépendante) (Rép : 186 élèves)

1.11 Probabilité de réussite au BeerPong

Un jeu consiste à lancer une balle de ping-pong dans l'un des 10 verres placés de l'autre coté d'une table. La probabilité d'obtenir le verre numéroté i en lançant la balle est inversement proportionnelle au carré du numéro du verre. Soit X la variable aléatoire du numéro du verre obtenu à un lancer. On suppose que la probabilité de n'obtenir aucun verre est nulle.



a) Trouver la fonction de masse de probabilité de la variable aléatoire X. (Rép : $\Pr[X = 1; 2; 3; ...] = 0.645; 0.161; 0.0717; ...$)
b) Trouver la fonction de répartition de X en tracer le graphique.
c) Trouver la fonction quantile de X et en tracer le graphique.
d) Si on pose la valeur de la variable aléatoire $X = 0$ si aucun verre n'est obtenu, on définit aussi $\Pr[X = 0] = 30\%$. Trouver la nouvelle fonction de masse de probabilité. (Rép : $\Pr[X = 0; 1; 2; 3; ...] = 0.30; 0.4516; 0.1129; 0.05019; ...$)

On définit la variable aléatoire $Y = X|X \leqslant 3$ avec X tel que défini à la lettre d.

e) Définir la fonction de masse de Y. (Rép : $\Pr[Y = 0; 1; 2; 3] = 0.328; 0.494; 0.123; 0.055$)
f) Calculer $E[Y]$ et $Var[Y]$. (Rép : 0.905 et 0.6618)
g) Calculer $E\left[Y \times 1_{\{Y \geqslant 2\}}\right]$ et $E[5Y - 2]$. (Rép : 0.412 et 2.526)
h) Calculer $Var[25 - 3Y]$. (Rép : 5.957)
i) Calculer $\Pr[|Y - 2| \leqslant 1]$. (Rép : 0.672)

1.12 Cyclistes en ordre

Le club de cyclistes de Québec désire se placer d'une façon bien particulière pour leur prochaine sortie à vélo. Les cyclistes se placent un à la suite de l'autre. Le club compte N cyclistes, dont m sont considérés comme mauvais et le reste, comme bon. Les cyclistes en tête et en queue de file doivent être de bons cyclistes et ce choix est important pour le club. Une fois ces deux cyclistes choisis, les cyclistes bons sont considérés comme indifférentiables, de même que les cyclistes mauvais. On veut qu'il y ait au minimum k cyclistes bons entre chaque cycliste mauvais. Le premier et le dernier cycliste sont suivi/précédé par un mauvais cycliste. Exprimer le nombre de combinaisons de files possibles pour la prochaine sortie du club de cyclistes de Québec en fonction de N, m et k.

1.13 Profit au Dagobert

Le nouveau propriétaire du Dagobert a sous-estimé la soif des étudiants en actuariat pour le party qu'ils organisent et a malencontreusement acheté une quantité trop faible d'alcool. Ainsi, la probabilité qu'un étudiant ne puisse boire à sa soif est de 5% si le prix du billet est à 20$ et de 10% si le billet est à 10$. La politique du bar veut que si une personne ne peut pas boire à sa soif, elle se verra rembourser la valeur de son billet multipliée par 20. Les probabilités pour le prix du billet dépendent du feeling du propriétaire et sont définies comme suit : Pr [Prix du billet = 10$] = 0.60 et Pr [Prix du billet = 20$] = 0.40. Il y aura 100 étudiants à cette soirée, et ce, peu importe le prix du billet.

a) Quelle est la probabilité que le Dagobert essuie une perte pour cette soirée (i.e que le revenu net soit inférieur à 0) ? (Rép : 0.7190542)