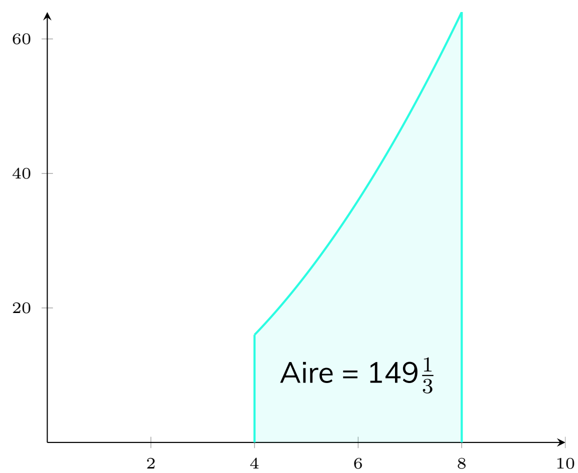
3 | Calcul intégral

Dans ce chapitre, on s'intéresse à calculer l'aire délimitée par une courbe $f(x)$, l'axe des x et les segments verticaux $x = a$ et $x = b$. On appelle les segments verticaux les bornes ou les limites d'intégration. Par exemple, on présente la région bornée par la fonction $f(x) = x^2$, l'axe des x et les segments verticaux $x = 4$ et $x = 8$.



Les outils géométriques ne nous permettent pas de calculer cette aire facilement. Alors, on applique une approximation par rectangles. Pour approximer l'intégrale avec n rectangles, on divise le domaine d'intégration $a = x_0 \leq x \leq x_n = b$ en n sous-intervalles $[a, x_1), [x_1, x_2), \ldots, [x_{n-1}, b]$. On se rappelle que l'aire d'un rectangle est donné par la largeur multiplié par la hauteur du rectangle. Alors, l'aire du premier rectangle est $f(\gamma_0) \times (x_1 - x_0)$, où $\gamma_0 \in [x_0, x_1]$ (arbitraire). L'aire du deuxième rectangle est $f(\gamma_1) \times (x_2 - x_1)$, où $\gamma_1 \in [x_1, x_2]$. L'aire du dernier rectangle est $f(\gamma_n) \times (x_n - x_{n-1})$, où $\gamma_n \in [x_{n-1}, x_n]$.

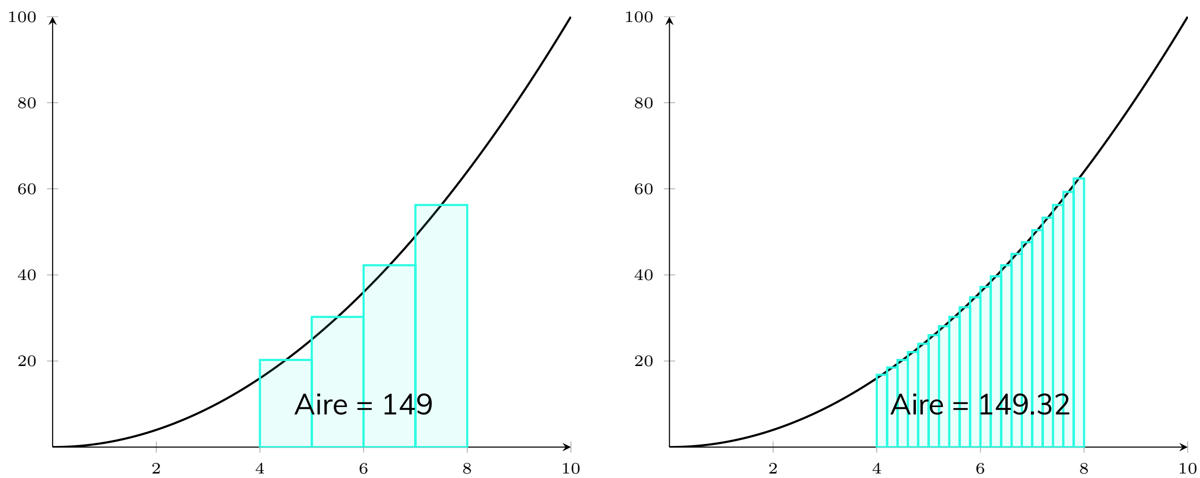
L'aire totale est

$$\begin{aligned} A^* &= f(\gamma_0) \times (x_1 - x_0) + f(\gamma_1) \times (x_2 - x_1) + \cdots + f(\gamma_{n-1}) \times (x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma_i)(x_{i+1} - x_i). \end{aligned} \tag{3.1}$$

En pratique, on sélectionne des intervalles de taille égales $\frac{b-a}{n}$. De plus, le point arbitraire $\gamma_i, i = 0, \ldots, n-1$ peut être le point milieu du segment. La formule en (3.1) devient

$$A^{(m,n)} = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2i+1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right), \tag{3.2}$$

appelé la somme de Riemann (version point milieu). Le graphique de gauche montre cette approximation pour $n = 4$ (alors $\frac{b-a}{n} = 1$) et le graphique de droite montre cette approximation pour $n = 20$ (alors $\frac{b-a}{n} = 0.2$). On remarque que l'approximation devient de plus en plus adéquate lorsqu'on augmente le nombre d'intervalles.

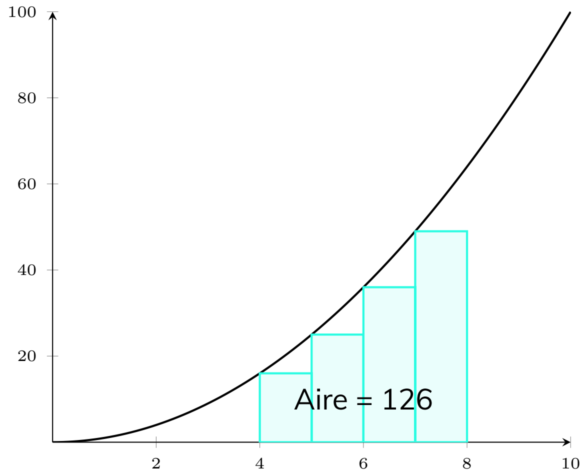


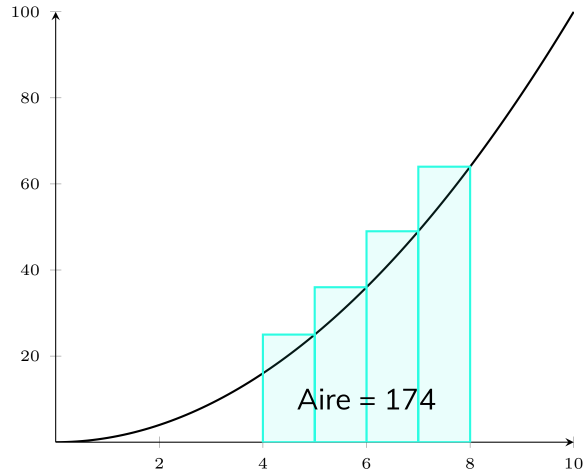
Au lieu de choisir $\gamma_i, i = 0, n-1$ comme point milieu, on pourrait le choisir comme point gauche ou droite de l'intervalle. On a

$$A^{(g,n)} = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right); \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} A^{(d,n)} &= \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Les illustrations montrent respectivement la somme de Riemann de la gauche et de la droite avec $n = 4$.



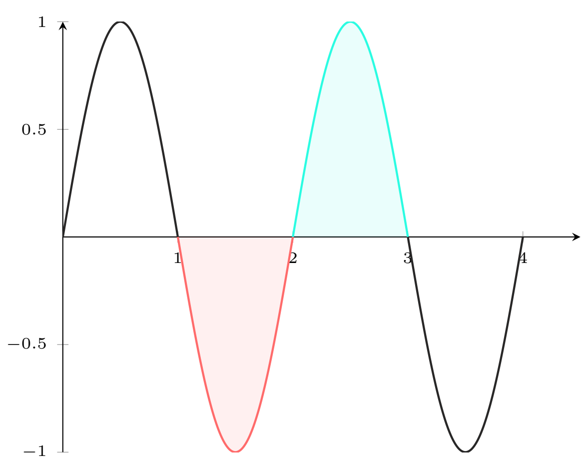


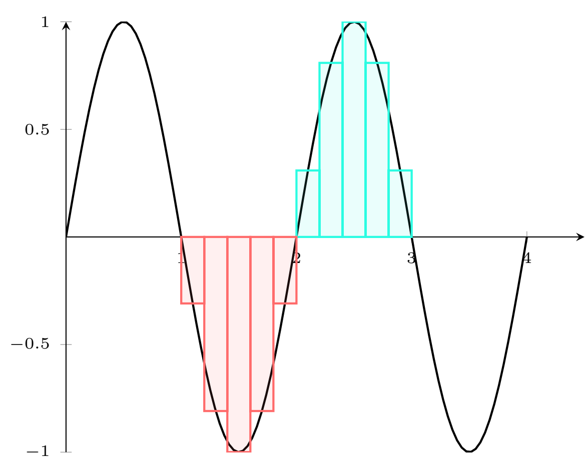
Pour améliorer l'approximation, on laisse n tendre vers l'infini (alors $\frac{b-a}{n}$ tend vers 0). Pour la méthode de droite, on a

$$A = \lim_{n\to\infty} A^{(d,n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

si la limite existe. Cette limite existe si f est continu ou continu par morceaux.

Lorsque le graphique passe sous l'axe des x, l'aire est comptée comme négative. On observe que la fonction sin(πx) oscille entre 1 et -1. L'aire entre sous la courbe entre 1 et 3 est zéro car l'aire entre 1 et 2 est égale à l'aire entre 2 et 3, mais le premier segment est négatif.





3.1 | Sommes

Les formules pour calculer l'aire avec les sommes de Riemann utilisent des notions de sommations. On a utilisé cette notation dans §2.7.4. Dans cette section, on présente quelques résultats et des sommes remarquables.

Définition 3.1.1 : Suites, séries et notation sigma

Étant donné la suite de numéros a_n, une expression de la forme $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots$ est une série infinie. Le numéro a_n est le $n^{\text{ième}}$ terme de la série. La suite

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

est la suite de sommes partielles de la série, où s_n est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle. Si la suite de sommes partielles converge vers une limite L, on dit que la série converge et que sa somme est L. Dans ce cas, on écrit aussi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = L.$$

Si la suite de sommes partielles ne converge pas, on dit que la série diverge.

Dans la notation sigma, on a

$$s_n = \sum_{k=l}^{n} a_k,$$

où

- k est l'indice de sommation ;
- l est l'indice de départ ; K
- n est l'indice de fin ;
- a_k est une formule pour le $n^{\text{ième}}$ terme de la sommation ;
- s_n est la valeur de la somme.

Exemple 3.1.1 : Écrire 1 + 2 + 3 + 4 + 5 en notation sigma.

Exemple 3.1.2 : Écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \ln\left(\frac{4k}{k^2+2}\right)$ sans la notation sigma.

Tableau 3.1 : Règles de sommes finies

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (ca_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$

Tableau 3.2 : Sommes remarquables

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Exemple 3.1.3 : Évaluer la somme suivante : $\sum_{k=1}^{15} 2k$.

Exemple 3.1.4 : Évaluer la somme suivante : $\sum_{k=24}^{56} k^3$.

Il y a deux approches.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=24}^{56} k^3 &= \sum_{k=1}^{33}(k+23)^3 \quad \text{(glissement d'indice)} \\
&= \sum_{k=1}^{33}\left(k^3+3k^2(23)+3k(23)^2+(23)^3\right) \quad \text{(distribuer les termes)} \\
&= \sum_{k=1}^{33}\left(k^3+69k^2+1587k+12167\right) \\
&= \sum_{k=1}^{33}k^3+69\sum_{k=1}^{33}k^2+1587\sum_{k=1}^{33}k+\sum_{k=1}^{33}12167 \\
&= \left(\frac{33(33+1)}{2}\right)^2+69\left(\frac{33(33+1)(2\times 33+1)}{6}\right)+1587\left(\frac{33(33+1)}{2}\right)+33\times 12167 \\
&= 314721+864501+890307+401511 \\
&= 2471040.
\end{aligned}$$

On remarque premièrement que

$$\begin{array}{llllllllll}
\sum_{k=24}^{56} k^3 = & & & & & a_{24}+ & a_{25}+ & a_{26}+ & \cdots+ & a_{56} \\
\sum_{k=1}^{56} k^3 = & a_1+ & a_2+ & \cdots+ & a_{23}+ & a_{24}+ & a_{25}+ & a_{26}+ & \cdots+ & a_{56} \\
\sum_{k=1}^{23} k^3 = & a_1+ & a_2+ & \cdots+ & a_{23} & & & & &
\end{array}$$

La première somme est équivalante à la deuxième somme moins la troisième somme.

Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=24}^{56} k^3 &= \sum_{k=1}^{56} k^3 - \sum_{k=1}^{23} k^3 \\ &= \left(\frac{56(57)}{2}\right)^2 - \left(\frac{23(24)}{2}\right)^2 \\ &= 2547216 - 76176 = 2471040.\end{aligned}$$

3.1.1 | Somme de Riemann

Dans l'introduction du chapitre, on a présenté le calcul intégral comme outil qui permet de calculer l'aire sous la courbe en décomposant la fonction (qui peut être de forme géométrique compliquée) en somme de rectangles (dont l'aire est simple à calculer).

Les sommes remarquables de la section précédente nous aideront à en résoudre plusieures.

Exemple 3.1.5 : Trouver la somme de Riemann de la droite si $f(x) = x^2$ entre 4 et 8. Prendre la limite de cette somme lorsque $n \to \infty$.

3.2 | L'intégrale définie

Définition 3.2.1 : L'intégrale définie

oit $f(x)$ une fonction définie sur $[a,b]$. On dit que J est l'intégrale définie de f sur $[a,b]$ et que J est la limite des sommes de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, si les conditions suivantes sont respectées :

Pour un numéro $\varepsilon > 0$, il existe un numéro correspondant $\delta > 0$ tel que pour toute partition $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ sur $[a,b]$ avec $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ et $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, alors

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J \right| < \varepsilon.$$

Alors, J est l'intégrale définie de $f(x)$ entre a et b et est notée

$$J = \int_a^b f(x)dx.$$

Tableau 3.3 : Règles d'intégrales définies

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\displaystyle\int_a^b kf(x) = k\int_a^b f(x)dx$
4. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
6. $\displaystyle(b-a)\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]} f(x)$
7. Si $f(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Tableau 3.4 : Formules d'intégrales de base (Tableau 8.1 de Taylor)

1. $\displaystyle\int kdx = kx + C \quad$ (peu importe c)
2. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq 1)$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
4. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$
5. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\displaystyle\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
9. $\displaystyle\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
10. $\displaystyle\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
11. $\displaystyle\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

CONNAITRE LES RÈGLES 1 À 7 PAR COEUR

12. $\displaystyle\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$
13. $\displaystyle\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$
14. $\displaystyle\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
15. $\displaystyle\int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
16. $\displaystyle\int \sinh x dx = \cosh x + C$
17. $\displaystyle\int \cosh x dx = \sinh x + C$
18. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
19. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
20. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$
21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
22. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Remarque 3.2.2

Le cas particulier $a = 0$ et $b = 1$ de l'intégrale définie mène à

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

3.3 | Théorème fondamental du calcul

Définition 3.3.1 : Valeur moyenne d'une fonction

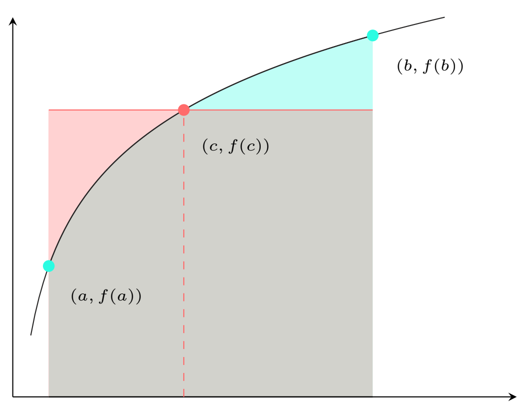
Si $f(x)$ est intégrable sur $[a, b]$, alors sa valeur moyenne sur $[a, b]$ est

$$moy(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Théorème 3.3.2 : Le théorème des accroissements finis pour les intégrales définies

Si f est continu sur $[a, b]$, alors il existe au moins un point $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$



Théorème 3.3.3 : Le théorème fondamental du calcul, partie 1

Si f est continu sur $[a, b]$, alors $F(x) = \int_a^b f(t)dt$ continu sur $[a, b]$ et différentiable sur (a, b)

et sa dérivée est $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

La preuve n'est pas à l'étude, mais dépend du théorème des accroissements finis pour les intégrales définies. La partie 1 du théorème fondamental du calcul nous permet de faire le lien entre la dérivée et l'intégrale. L'accroissement de la somme cumulative d'une fonction donne la fonction originale.

Exemple 3.3.1 : Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = \int_3^x 3e^{-t}dt$.

Théorème 3.3.4 : Le théorème fondamental du calcul, partie 2

Si f est continu sur $[a, b]$ et *F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La preuve n'est pas à l'étude non plus. Ce théorème nous permet d'évaluer l'intégrale aux bornes, sans devoir passer par la somme de Riemann. Alors, pour calculer l'intégrale de f sur $[a, b]$, on doit trouver la primitive F de f et calculer la différence entre les bornes, $F(b) - F(a)$.

Exemple 3.3.2 : Évaluer $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx$.

3.4 | L'aire entre deux courbes

Définition 3.4.1 : L'aire sous la courbe d'une fonction positive

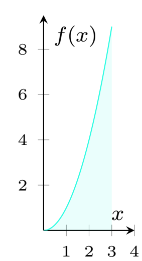
Si $y = f(x)$ est non négatif et intégrable sur une intervale fermée $[a, b]$, alors l'aire sous la courbe de $f(x)$ sur $[a, b]$ est l'intégrale de f de a à b,

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemple 3.4.1 : Trouver l'aire sous la courbe $f(x) = x^2$ entre 0 et 3.

Selon la définition 3.4.1 , on a

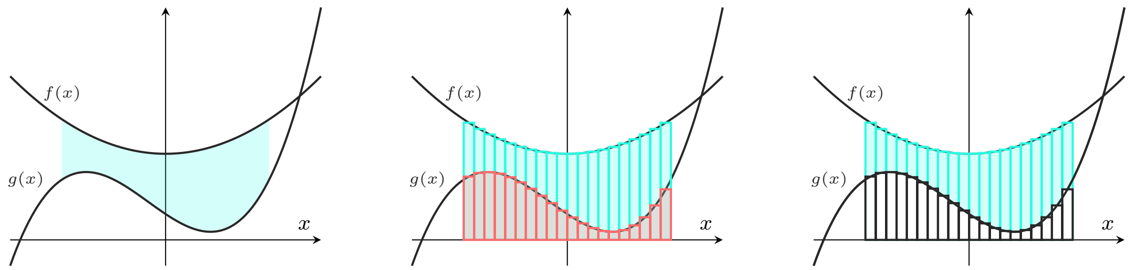
$$A = \int_0^3 x^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9 - 0 = 9.$$



Définition 3.4.2 : L'aire entre deux courbes

Si f et g sont des fontions continues sur $[a, b]$ et $f(x) > g(x) \; \forall \; x \in [a, b]$, alors l'aire de la région entre les de f et de g est l'intégrale de $f - g$ entre a et b :

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$



Exemple 3.4.2 : Calculer l'aire délimitée par les fonctions $y = x, y = 1$ et $y = x^3/8$ dans le premier quadrant.

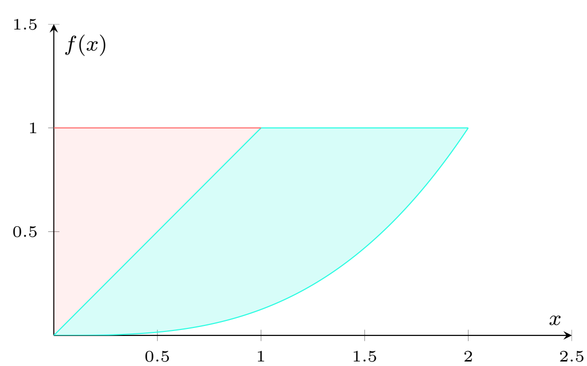
On cherche les points d'intersection entre chaque fonction. Entre $y = x$ et $y = 1$, on a $x = 1$. Entre $y = x$ et $y = x^3/8$, on a

$$x = x^3/8 \Rightarrow x = 0$$
$$x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Entre $y = 1$ et $y = x^3/8$, on a

$$\begin{aligned} x^3/8 &= 1 \\ x^3 &= 8 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

L'aire désirée se situe en bleu dans le graphique suivant :



On a plusieurs méthodes pour évaluer l'aire en bleu, dont :

1. En séparant $0 < x < 1$ et $1 < x < 2$: $\displaystyle\int_{x=0}^{1} \left(x - \frac{x^3}{8}\right) dx + \int_{1}^{2} \left(1 - \frac{x^3}{3}\right) dx$;
2. En calculant l'aire entre $y = 1$ et $y = x^3/8$ et en retirant le triangle en rouge : $\displaystyle\int_{x=0}^{2} \left(1 - \frac{x^3}{8}\right) dx - \frac{1 \times 1}{2}$;
3. En intégrant avec des barres horizontales : $\displaystyle\int_{y=0}^{1} (8\sqrt[3]{y} - y)\, dy$.

La méthode 3 semble la plus simple. On a

$$\int_{y=0}^{1} \left(\sqrt[3]{8y} - y\right) dy = 2\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} - \frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{1}$$
$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

3.5 | L'intégrale indéfinie

Dans §2.7.5, on a introduit l'intégrale indéfinie comme l'ensemble des primitives d'une fonction. L'intégrale définie est un numéro, alors que l'intégrale définie est une fonction qui dépend de x. En effet, on peut écrire

$$\int f(x)dx = \int_c^x f(t)dt.$$

Selon le théorème 3.3.4 , on a

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int_c^x f(t)dt \\ &= F(x) - F(c).\end{aligned}$$

Vu que c est une constante arbitraire, $F(c)$ l'est aussi. Alors,

$$\int f(x)dx = F(x) - C.$$

On remarque que la variable d'intégration t n'est jamais utilisée car l'intégrale dépend seulement des limites d'intégration.

3.6 | La méthode de substitution

L'opération inverse de la dérivée en chaîne mène à la règle de substitution, qu'on formule dans le prochain théorème.

Théorème 3.6.1 : La règle de substitution

Si $u = g(x)$ est une fonction différentiable sur le domaine I, et f est continu sur I, alors

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du. \tag{3.5}$$

La procédure pour effectuer une substitution est

1. Substituer $u = g(x)$ et $du = \frac{du}{dx}dx = g'(x)dx$ pour obtenir $\int f(u)du$.
2. Intégrer par rapport à u.
3. Remplacer u par $g(x)$.

On procède avec un exemple.

Exemple 3.6.1 : Évaluer $\int e^{3x}\left(e^{3x}+1\right)^4 dx$.

La méthode de substitution est utile lorsqu'on identifie une fonction composée, et que la dérivée de la fonction intérieure multiplie la fonction composée.

Parfois, la substitution n'est pas évidente car ce n'est pas toutes les parties de la substitution qui sont retirées.

Exemple 3.6.2 : Utiliser la substitution $u = x^4 + 1$ pour évaluer l'intégrale $\int x^7\sqrt{x^4+1}dx$.

3.6.1 | Substitutions dans les intégrales définies

Théorème 3.6.2 : La règle de substitution

Si $u = g(x)$ est une fonction différentiable sur le domaine $[a, b]$, et f est continu sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du, \tag{3.6}$$

où $\alpha = g^{-1}(a)$ et $\beta = g^{-1}(b)$.

3.7 | Intégrale par parties

L'intégration par parties est une technique d'intégration souvent utilisée dans les application actuarielles. Comprendre son utilité maintenant est un excellent investissement pour le reste de vos études.

La formule pour l'intégrale par parties est

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Cette formule est plus simple à retenir sous la forme différentielle. Soit $u = f(x)$ et $v = g(x)$. Avec la règle de substitution, on obtient

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu. \tag{3.7}}$$

Cette technique est utile lorsqu'une fonction u de x est encombrante dans l'intégrale, mais que u' est plus simple (et $\int v dx$ n'est pas compliqué). Cette relation est une conséquence de la règle de produit de la dérivée :

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v + uv' \\ uv' &= (uv)' - u'v \\ \int uv' dx &= \int (uv)' dx - \int u'v dx \\ \int uv' dx &= uv - \int u'v dx.\end{aligned}$$

On obtient le résultat final avec

$$v' dx = \frac{dv}{dx} dx = dv$$

et

$$u' dx = \frac{du}{dx} dx = du.$$

Par exemple, les fonctions du type

- $\int x^n e^x dx$
- $\int x^n \cos x dx$
- $\int x^n \sin x dx$

peuvent être résolus avec l'intégrale par parties avec $u = x^n$ car $u' = nx^{n-1}$ est plus simple que u. En appliquant tour à tour l'intégrale par parties, la variable x disparait.

Exemple 3.7.1 : Évaluer $\int xe^{-3x} dx$.

Exemple 3.7.2 : Soit la fonction $H(n) = \int x^n e^{-kx} dx$, où n est une constante positive et k est un réel. Trouver $H'(x)$ en fonction de $H(n-1)$.

Ce résultat est appelé une formule de réduction, car on peut remplacer une intégrale contenant une puissance par une autre intégrale contenant une puissance moins élevée. Ces formules mènent à l'intégration tabulaire, une technique pour simplifier les intégrales pouvant s'exprimer sous une formule de réduction.

Exemple 3.7.3 : Trouver $\int x^4 e^{-3x} dx$ avec l'intégration tabulaire.

Pour utiliser l'intégration tabulaire, on place la fonction u dans la colonne à la gauche à la deuxième rangée et on dérive tour à tour jusqu'à ce qu'on atteint 0. Dans la colonne du milieu, on place le signe de l'intégrale par parties, qui alterne à chaque itération. Dans la colonne de droit, on place la fonction $\frac{dv}{dx}$ dans la première rangée et on intègre tour à tour.

u et dérivés		$\frac{dv}{dx}$ et intégrales
		$\cancel{e^{-3x}}$
x^4	(+)	$-\frac{1}{3}e^{-3x}$
$4x^3$	(-)	$\frac{1}{3^2}e^{-3x}$
$12x^2$	(+)	$-\frac{1}{3^3}e^{-3x}$
$24x$	(-)	$\frac{1}{3^4}e^{-3x}$
24	(+)	$-\frac{1}{3^5}e^{-3x}$
$\emptyset$		

Ensuite, on ignore la première et la dernière rangée. Chaque terme de l'intégrale est le produit des rangées :

$$\begin{aligned}\int x^4 e^{-3x} dx &= -\frac{1}{3}x^4 e^{-3x} - \frac{4}{3^2}x^3 e^{-3x} - \frac{12}{3^3}x^2 e^{-3x} - \frac{24}{3^4}x e^{-3x} - \frac{24}{3^5}e^{-3x} + C \\ &= -e^{-3x}\left(\frac{x^4}{3} + \frac{4x^3}{3^2} + \frac{12x^2}{3^3} + \frac{24x}{3^4} + \frac{24}{3^5}\right) + C.\end{aligned}$$

La formule de la règle de substitution avec l'intégrale définie est

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{3.8}$$

3.8 | Fonctions rationnelles

On s'intéresse maintenant à résoudre des intégrales dont la forme est un ratio de fonctions polynomiales, par exemple,

$$\frac{20x^3 - 6x^2 + x}{4x - 1}, \quad \frac{1}{t^2 - 7t + 12}.$$

3.8.1 | Factoriser

Quand l'ordre du numérateur est plus élevé que l'ordre du dénominateur, on utilise la division longue pour sortir des facteurs du ratio. Quand l'ordre du dénominateur est plus élevé que l'ordre du numérateur, on utilise des fractions partielles pour décomposer la fraction en ratios plus simples à intégrer.

Exemple 3.8.1 : Trouver l'intégrale de $\frac{20x^3 - 6x^2 + x}{4x - 1}$.

3.8.2 | Fractions partielles

Lorsque l'ordre de la fonction polynomiale au dénominateur est plus élevé que l'ordre de la fonction polynomiale au numérateur, on sépare la fraction en fractions partielles.

Démarche pour les fractions partielles.

Soit f et g, deux fonction polynomiales. Si l'ordre de f est inférieur à l'ordre de g, alors $\frac{f}{g}$ se décompose en fractions partielles avec la forme

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \text{ et / ou } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}, r = 1, 2, \ldots.$$

Remarque 3.8.1

Il est possible de devoir combiner la factorisation et la fraction partielle si l'ordre de f est plus élevé que l'ordre de g.

Exemple 3.8.2 : Factoriser ou trouver les fractions partielles de

$$\frac{2x^4+x^3+6x^2-x+3}{x^3+x}.$$

L'ordre du numérateur est plus élevé que l'ordre du dénominateur. Alors, on commence par la factorisation :

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1. \\ x^3+x) & 2x^4+x^3+6x^2-x+3 \\ & -2x^4 \quad -2x^2 \\ \hline & x^3+4x^2-x \\ & -x^3 \quad -x \\ \hline & 4x^2-2x+3 \end{array}$$

On conclut que

$$\frac{2x^4+x^3+6x^2-x+3}{x^3+x} = 2x+1+\frac{4x^2-2x+3}{x(x^2+1)}.$$

On décompose le dernier terme avec les fractions partielles. On a

$$\frac{4x^2-2x+3}{x(x^2+1)} = \frac{A+Bx}{x^2+1}+\frac{C}{x}$$
$$4x^2-2x+3 = Ax+Bx^2+Cx^2+C.$$

$$A = -2 \qquad C = 3 \qquad \begin{aligned} 4 &= B + C \\ B &= 4 - 3 \\ B &= 1. \end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{4x^2 - 3x + 3}{x(x^2 + 1)} = \frac{x - 2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x}.$$

On conclut que

$$\frac{2x^4 + x^3 + 6x^2 - x + 3}{x^3 + x} = 2x + 1 + \frac{x - 2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x}.$$

Exemple 3.8.3 : Trouver l'intégrale de $\frac{1}{t^2 - 7t + 12}$.

On remarque que l'ordre du numérateur est 0 et l'ordre du dénominateur est 2. De plus, on peut décomposer $t^2 - 7t + 12$ en $(t - 4)(t - 3)$. Ainsi, on peut utiliser la méthode de fractions polynomiales pour résoudre l'intégrale.

$$\frac{1}{t^2 - 7t + 12} = \frac{1}{(t - 4)(t - 3)} = \frac{A}{t - 4} + \frac{B}{t - 3}.$$

Ensuite, on multiplie les deux côtés de l'équation par $(t - 4)(t - 3)$ pour se débarrasser des dénominateurs.

$$1 = A(t - 3) + B(t - 4).$$

Ensuite, il y a deux manières de procéder. La première fonctionne toujours mais la deuxième est plus rapide.

1. On distribue premièrement les facteurs dans le côté droit de l'équation et on regroupe les termes similaires :

$$\begin{aligned} 1 &= At - 3A + Bt - 4B \\ 1 &= (A + B)t + (-3A - 4B). \end{aligned}$$

Puisque le côté gauche n'a pas de termes en t, donc le coefficient associé à t sont 0, et on doit avoir $A + B = 0$. De plus, puisque les constantes à la gauche somment à 1, on doit avoir $-3A - 4B = 1$. De la première égalité, on a $A = -B$, qu'on remplace dans la deuxième égalité :

$$\begin{aligned} -3(-B) - 4B &= 1 \\ -B &= 1 \\ B &= -1. \end{aligned}$$

Finalement, avec $A = -B$, on obtient $A = 1$. On conclut

$$\frac{1}{t^2 - 7t + 12} = \frac{1}{t - 4} + \frac{-1}{t - 3}.$$

2.

La forme de fractions partielles nous permet de résoudre l'intégrale.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2-7t+12}dt &= \int \frac{1}{t-4} - \frac{1}{t-3}dt \\ &= \ln|t-4| - \ln|t-3| + C \\ &= \ln\left|\frac{t-4}{t-3}\right| + C.\end{aligned}$$

3.9 | L'intégrale impropre

Les intégrales définies qu'on a vu dans ce chapitre avaient un domaine fini et l'image de la fonction à intégrer était finie. Cette section détaille comment intégrer les fonctions qui ne respectent pas ces conditions.

3.9.1 | Type 1

Définition 3.9.1 : L'intégrale impropre de type I

L'intégrale impropre est une intégrale avec l'infini comme borne d'intégration. Il y a trois types :

1. Si $f(x)$ est continu sur $[a, \infty)$, on a
$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{3.9}$$
2. Si $f(x)$ est continu sur $(-\infty, b)$, on a
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{3.10}$$
3. Si $f(x)$ est continu sur $(-\infty, \infty)$, on a
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx \tag{3.11}$$
   où c est une constante réelle.

On dit que l'intégrale
- Converge si la limite existe (l'aire est finie)
- Diverge sinon (l'aire sous la courbe est infinie)

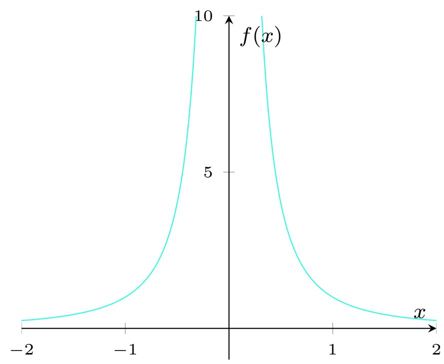
Exemple 3.9.1 : Évaluez l'intégrale $\int_0^\infty e^{-kx}dx$.

3.9.2 | Type II

Considérons la fonction $f(x) = x^{-2}$. On s'intéresse à l'aire sous cette courbe entre -1 et 1. Ainsi, on intègre :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} \\ &= -1 - 1 = -2.\end{aligned}$$

Le résultat est négatif. Lorsqu'on regarde le graphique de $f(x)$, on remarque que c'est strictement positif.



Ce phénomène se produit car il y a une asymptote verticale à $x = 0$. En fait, l'intégrale diverge. Ce type d'intégrale est dite *impropre de type II* et on ne peut pas évaluer l'intégrale en appliquant le théorème 3.3.4

Définition 3.9.2 : L'intégrale impropre de type II

L'intégrale impropre de type II est une intégrale où la fonction à intégrer admet la valeur infinie dans le domaine d'intégration. Il y a trois types :

1. Si $f(x)$ est continu sur $(a, b]$, et discontinu à a, on a
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx \tag{3.12}$$
2. Si $f(x)$ est continu sur $[a, b)$, et discontinu à b, on a
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx \tag{3.13}$$
3. Si $f(x)$ est discontinu à c, avec $a < c < b$, et continu sur $[a, c) \cup (c, b]$, on a
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{3.14}$$

On dit que l'intégrale
- — converge, si la limite existe (l'aire est finie) ;
- — diverge, sinon (l'aire sous la courbe est infinie).

Exemple 3.9.2 : Est-ce que l'intégrale $\int_{0.2}^{1} \frac{1}{5x-1} dx$ converge ?

3.9.3 | Convergence d'intégrales

Théorème 3.9.3 : Test de comparaison direct

Soient f et g, des fonctions continues sur $(a, \infty]$ avec $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \geq a$. Alors,

1. $$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{converge si} \quad \int_a^\infty g(x)dx \quad \text{converge.}$$
2. $$\int_a^\infty g(x)dx \quad \text{diverge si} \quad \int_a^\infty f(x)dx \quad \text{diverge.}$$

Cette règle est un corrolaire de la règle de dominance (régle 7 du tableau 3.3).

Exemple 3.9.3 : Est-ce que l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ converge ?

Théorème 3.9.4 : Test de comparaison limite

Si les fonctions positives f et g sont continues sur $(a, \infty]$, *et si*

Bornes inversées

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty,$$

alors les deux intégrales

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^\infty f(x)dx$$

convergent ou divergent.

Exemple 3.9.4 : Étudier la convergence de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dy}{1+e^y}$.

Il y a trois méthodes.

1. *Évaluation directe* : on peut évaluer l'intégrale. Soit $u = e^y, du = e^y du$. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dy}{1+e^y} &= \int_1^\infty \frac{1}{u(1+u)} du \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} du \quad \text{(fractions partielles)} \\
&= \ln u - \ln(1+u)|_1^\infty \\
&= \ln\left(\frac{u}{u+1}\right)\Big|_1^\infty \\
&= \lim_{u\to\infty} \ln\left(\frac{u}{u+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+1}\right) \\
&= \lim_{u\to\infty} \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{u}}\right) + \ln(2) \\
&= \ln\left(\frac{1}{1+0}\right) + \ln 2 \\
&= \ln(1) + \ln 2 = 0 + \ln 2 = \ln 2,
\end{aligned}$$

alors l'intégrale converge.

2. *Test de comparaison direct* :

3. *Test de comparaison limite* :