Chapitre 6

Vecteur aléatoire

Jusqu'à présent, on a considéré qu'une seule variable aléatoire. Dans le présent chapitre, on introduit le concept de vecteur de variables aléatoires (discrètes ou continues) définies sur le même espace échantillonal.

6.1 Définitions

Définition 6.1 *Soit un vecteur à n dimensions $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$. Le vecteur $\mathbf{X}$ est dit un vecteur aléatoire composé de n variables aléatoires discrètes, continues ou mixtes.*

Exemple 6.2 *Soit une expérience qui consiste à lancer 2 dés. Soit un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ où X_1 représente le maximum entre les deux dés et X_2 représente la différence, en valeur absolue, entre les deux dés. Trouver le support de $\mathbf{X}$ et énumérer l'ensemble des réalisations possibles.*

Solution. On a $X_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $X_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et par conséquent $\mathbf{X} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Les réalisations possibles du vecteur $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ sont

	2ième lancer: 1	2	3	4	5	6
1er lancer:1	$\mathbf{X} = (1, 0)$	$(2, 1)$	$(3, 2)$	$(4, 3)$	$(5, 4)$	$\mathbf{X} = (6, 5)$
2	$\mathbf{X} = (2, 1)$	$(2, 0)$	$(3, 1)$	$(4, 2)$	$(5, 3)$	$\mathbf{X} = (6, 4)$
3	$(3, 2)$	$(3, 1)$	$(3, 0)$	$(4, 1)$	$(5, 2)$	$(6, 3)$
4	$(4, 3)$	$(4, 2)$	$(4, 1)$	$(4, 0)$	$(5, 1)$	$(6, 2)$
5	$(5, 4)$	$(5, 3)$	$(5, 2)$	$(5, 1)$	$(5, 0)$	$(6, 1)$
6	$(6, 5)$	$(6, 4)$	$(6, 3)$	$(6, 2)$	$(6, 1)$	$(6, 0)$

.

■

Exemple 6.3 *Le contrat d'assurance collective des professeurs de l'Université Laval rembourse notamment les soins dentaires, les médicaments et les frais de physiothérapie. Vous voulez étudier le comportement aléatoire de ces frais pour un assuré donné sur une période d'une année. Autrement dit, vous êtes intéressés par la distribution du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ où*

X_1 : *montant de sinistre soins dentaires par assuré*

X_2 : *montant de sinistre médicaments par assuré*

X_3 : *montant de sinistre physiothérapie par assuré*

6.1.1 Fonction de masse de probabilité conjointe

Définition 6.4 *La fonction de masse de probabilité conjointe du vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *est la fonction* $\Pr(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$ *satisfaisant les conditions suivantes:*

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 &= x_1, ..., X_n = x_n) \geq 0, \ \forall (x_1, ..., x_n), \\ \sum_{x_1} \sum_{x_2} ... \sum_{x_n} \Pr(X_1 &= x_1, ..., X_n = x_n) = 1. \end{aligned}$$

Exemple 6.5 *Soit l'Exemple 6.2. Trouver la fonction de masse de probabilité conjointe de* $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$.

Solution. On a $X_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $X_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Alors, la fonction de masse de probabilité conjointe de $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est donnée par

X_1/X_2	0	1	2	3	4	5
1	$\Pr(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

On a par exemple, $\Pr(X_1 = 5, X_2 = 3) = \frac{2}{36}$, $\Pr(X_1 = 5, X_2 = 5) = 0$ et $\sum_{x_1=1}^{6} \sum_{x_2=0}^{5} \Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = 1$.

■

Exemple 6.6 *On lance 3 fois une pièce de monnaie. Soit les variables aléatoires* X_1, X_2 *et* X_3 *définies par*

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 \text{ si le 1er lancer donne face et 0 sinon} \\ X_2 &= \text{Nombre de faces obtenu dans les 3 lancers} \\ X_3 &= \text{Différence, en valeur absolue, du nombre de face et de pile obtenu.} \end{aligned}$$

Trouver la fonction de masse de probabilité conjointe de $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

Solution. On a $X_1 \in \{0, 1\}$, $X_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $X_3 \in \{1, 3\}$ et l'ensemble suivant des réalisations possibles du vecteur $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$

	FFF	FFP	FPF	PFF	FPP	PFP	PPF	PPP
X_1	1	1	1	0	1	0	0	0
X_2	3	2	2	2	1	1	1	0
X_3	3	1	1	1	1	1	1	3

Pour $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 &= 1, X_2 = 3, X_3 = 3) = \frac{1}{8} \ \{(FFF)\} \\ \Pr(X_1 &= 1, X_2 = 2, X_3 = 1) = \frac{2}{8} \ \{(FFP), (FPF)\} \\ \Pr(X_1 &= 0, X_2 = 2, X_3 = 1) = \frac{1}{8} \ \{(PFF)\} \\ \Pr(X_1 &= 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = \frac{1}{8} \ \{(FPP)\} \\ \Pr(X_1 &= 0, X_2 = 1, X_3 = 1) = \frac{2}{8} \ \{(PFP), (PPF)\} \\ \Pr(X_1 &= 0, X_2 = 0, X_3 = 3) = \frac{1}{8} \ \{(PPP)\}. \end{aligned}$$

■

6.1.2 Fonction de densité de probabilité conjointe

Définition 6.7 *Soit* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *un vecteur aléatoire composé des variables aléatoires continues* $X_1, ..., X_n$ *définies sur le même espace échantillonnal. On dit que* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *possède une fonction de densité de probabilité conjointe continue s'il existe une fonction non-négative de n variables,* $f_{X_1,...,X_n}$ *sur* R^n *telle que pour toute région* D *de* $\mathbb{R}^n$ *formée par des rectangles à* n *dimensions, on a*

$$\Pr((X_1, ..., X_n) \in D) = \int_D ... \int f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n.$$

La fonction $f_{X_1,...,X_n}$ *est dite la fonction de densité de probabilité conjointe du vecteur* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$.

Définition 6.8 *La fonction de densité de probabilité conjointe du vecteur* $\mathbf{X} =(X_1, ..., X_n)$ *est une fonction* $f_{X_1,...,X_n}$ *satisfaisant les deux propriétés suivantes:*

$$\begin{aligned} f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) &\geq 0, \ \forall(x_1, ..., x_n) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n &= 1. \end{aligned}$$

Exemple 6.9 *Soit un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X, Y)$ *avec fonction de densité de probabilité conjointe*

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda xy^2, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

Trouver la valeur de λ *telle que* $f_{X,Y}$ *est une fonction de densité de probabilité conjointe.*

6.1.3 Fonction de répartition conjointe

Définition 6.10 *Soit le vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$. *La fonction de répartition conjointe de* $\mathbf{X}$ *est définie par*

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \Pr(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n).$$

Si $\mathbf{X}$ *est discret, on a*

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \sum_{y_1 \leq x_1} \sum_{y_2 \leq x_2} ... \sum_{y_n \leq x_n} \Pr(X_1 = y_1, ..., X_n = y_n).$$

Si $\mathbf{X}$ *est continu, on a*

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} ... \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,...,X_n}(y_1, ..., y_n)\mathrm{d}y_1...\mathrm{d}y_n.$$

Proposition 6.11 *La fonction de densité de probabilité conjointe du vecteur* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *est obtenue à partir de la fonction de répartition conjointe du vecteur* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *comme suit*

$$\frac{\partial^n}{\partial x_n ... \partial x_1} F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n).$$

Preuve. On a

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} ... \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,...,X_n}(y_1, ..., y_n)\mathrm{d}y_1...\mathrm{d}y_n.$$

En appliquant le théorème de Leibnitz successivement, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) &= \int_{-\infty}^{x_n} ... \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., y_n)\mathrm{d}y_2...\mathrm{d}y_n \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) &= \int_{-\infty}^{x_n} ... \int_{-\infty}^{x_3} f_{X_1,...,X_n}(x_1, x_2, ..., y_n)\mathrm{d}y_3...\mathrm{d}y_n \\ &\cdots \\ \frac{\partial^n}{\partial x_n ... \partial x_1} F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) &= f_{X_1,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

■

Exemple 6.12 *Soit l'Exemple 6.2. Trouver* $F_{X_1,X_2}(3,2)$.

Exemple 6.13 *Soit l'Exemple 6.6. Trouver* $F_{X_1,X_2,X_3}(0,1,3)$.

Proposition 6.14 *La fonction de répartition conjointe* $F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}$ *possède les propriétés suivantes:*

(1) $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,...,x_n)$ est une fonction croissante en $(x_1,...,x_n)$.

(2) $0 \leq F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,...,x_n) \leq 1$.

(3) $\lim\limits_{\substack{x_i \to \infty \\ i \in \{1,\ldots,n\}}} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,...,x_n) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x_1,...,x,...,x_n) = 0$.

(4) $\lim\limits_{\substack{x_i \to \infty \\ i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}}} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,...,x_n) = F_{X_j}(x_j)$.

(5) Si $n = 2$, on a

$$\Pr\left(X_1 > a, X_2 > b\right) = 1 - F_{X_1}\left(a\right) - F_{X_2}\left(b\right) + F_{X_1,X_2}\left(a,b\right).$$

Preuve. Étant donné la loi de DeMorgan $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i^c$, on a $\{X_1 > a \cap X_2 > b\}^c = \{X_1 > a\}^c \cup \{X_2 > b\}^c$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 &> a, X_2 > b) = 1 - \Pr(\{X_1 > a \cap X_2 > b\}^c) \\ &= 1 - \Pr(\{X_1 > a\}^c \cup \{X_2 > b\}^c)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 &> a, X_2 > b) = 1 - \Pr(\{X_1 \leq a\} \cup \{X_2 \leq b\}) \\ &= 1 - (\Pr(X_1 \leq a) + \Pr(X_2 \leq b) - \Pr(X_1 \leq a, X_2 \leq b)) \\ &= 1 - F_{X_1}(a) - F_{X_2}(b) + F_{X_1,X_2}(a,b).\end{aligned}$$

■

(6) Si $n = 2$, on a

$$\Pr\left(a_1 < X_1 \leq a_2, b_1 < X_2 \leq b_2\right) = F_{X_1,X_2}\left(a_2,b_2\right) - F_{X_1,X_2}\left(a_1,b_2\right) - F_{X_1,X_2}\left(a_2,b_1\right) + F_{X_1,X_2}\left(a_1,b_1\right).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 &\leq a_2, X_2 \leq b_2) = \Pr(a_1 < X_1 \leq a_2, b_1 < X_2 \leq b_2) \\ +\Pr(X_1 &\leq a_1, b_1 < X_2 \leq b_2) \\ +\Pr(a_1 &< X_1 \leq a_2, X_2 \leq b_1) \\ +\Pr(X_1 &\leq a_1, X_2 \leq b_1).\end{aligned}$$

On doit donc trouver des expressions en terme de la fonction de répartition conjointe F_{X_1,X_2} pour

$$\Pr(X_1 \leq a_1, b_1 < X_2 \leq b_2) \text{ et } \Pr(a_1 < X_1 \leq a_2, X_2 \leq b_1).$$

On a

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 &\leq a_1, b_1 < X_2 \leq b_2) = \Pr(X_1 \leq a_1, X_2 \leq b_2) - \Pr(X_1 \leq a_1, X_2 \leq b_1) \\ &= F_{X_1,X_2}(a_1,b_2) - F_{X_1,X_2}(a_1,b_1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Pr(a_1 &< X_1 \leq a_2, X_2 \leq b_1) = \Pr(X_1 \leq a_2, X_2 \leq b_1) - \Pr(X_1 \leq a_1, X_2 \leq b_1) \\ &= F_{X_1,X_2}(a_2,b_1) - F_{X_1,X_2}(a_1,b_1).\end{aligned}$$

Conclusion:

$$\begin{aligned}
\Pr(a_1 &< X_1 \leq a_2, b_1 < X_2 \leq b_2) = F_{X_1,X_2}(a_2, b_2) \\
&- (F_{X_1,X_2}(a_1, b_2) - F_{X_1,X_2}(a_1, b_1)) \\
&- (F_{X_1,X_2}(a_2, b_1) - F_{X_1,X_2}(a_1, b_1)) \\
&- F_{X_1,X_2}(a_1, b_1) \\
&= F_{X_1,X_2}(a_2, b_2) - F_{X_1,X_2}(a_1, b_2) - F_{X_1,X_2}(a_2, b_1) + F_{X_1,X_2}(a_1, b_1)
\end{aligned}$$

On peut aussi faire une preuve plus formelle comme pour (5). Ce n'est pas difficile mais juste long. ■

Exemple 6.15 *Soit l'Exemple 6.2. Trouver* $\Pr(4 < X_1 \leq 6, 2 < X_2 \leq 5)$.

Exemple 6.16 *Soit l'Exemple 6.9. (a) Trouver l'expression de la fonction de répartition conjointe de* $\mathbf{X}$. *(b) Trouver* $F_{X,Y}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. *(c) Trouver* $\Pr(0.2 < X < 2, 0.4 < Y < 0.5)$.

6.1.4 Distribution marginale

Dans les dernières sous-sections, on a défini différentes fonctions conjointes du vecteur aléatoire $\mathbf{X}$. Cependant, on peut aussi s'intéresser au comportement aléatoire d'une seule des composantes du vecteur.

Définition 6.17 *Soit un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$. *La fonction de masse de probabilité marginale de* X_i *est définie par*

$$\begin{aligned}
\Pr(X_i &= x_i) = \sum_{x_1} ... \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} ... \sum_{x_n} \Pr(X_1 = x_1, ..., X_i = x_i, ..., X_n = x_n) \\
&= \sum_{x_j (j \neq i)} \Pr(X_1 = x_1, ..., X_i = x_i, ..., X_n = x_n).
\end{aligned}$$

Définition 6.18 *Soit un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$. *La fonction de densité de probabilité marginale de* X_i *est définie par*

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_{i-1} \mathrm{d}x_{i+1} ... \mathrm{d}x_n.$$

Définition 6.19 *Soit un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$. *La fonction de répartition marginale de* X_i *est définie par*

$$F_{X_i}(x_i) = \Pr(X_i \leq x_i).$$

Si $\mathbf{X}$ *est discret, on a*

$$\begin{aligned}
F_{X_i}(x_i) &= \sum_{y_i=-\infty}^{x_i} \Pr(X_i = y_i) \\
&= \sum_{y_i=-\infty}^{x_i} \sum_{\substack{y_j=-\infty \\ j \neq i}}^{\infty} \Pr(X_1 = y_1, ..., X_i = y_i, ..., X_n = y_n) \\
&= F_{X_1,...,X_i,...,X_n}(\infty, ..., x_i, \infty, ..., \infty)
\end{aligned}$$

Si $\mathbf{X}$ *est continu, on a*

$$\begin{aligned}
F_{X_i}(x_i) &= \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(y_i) \mathrm{d}y_i \\
&= \int_{-\infty}^{x_i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,...,X_n}(y_1, ..., y_n) \mathrm{d}y_1 ... \mathrm{d}y_{i-1} \mathrm{d}y_{i+1} ... \mathrm{d}y_n \right) \mathrm{d}y_i \\
&= F_{X_1,...,X_i,...X_n}(\infty, ..., x_i, ..., \infty).
\end{aligned}$$

Exemple 6.20 *Soit l'Exemple 6.2. (a) Trouver les fonctions de masse de probabilité marginales de X_1 et X_2. (b) Trouver* $\Pr(X_1 > 3, X_2 > 3)$.

Solution. (a) Dans le tableau, les probabilités marginales ne sont que la somme des lignes ou des colonnes

	$X_2 = 0$	1	2	3	4	5	
$X_1 = 1$	$\Pr(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\Rightarrow \Pr(X_1 = 1) = \frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\Rightarrow \Pr(X_1 = 2) = \frac{3}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\Rightarrow \Pr(X_1 = 3) = \frac{5}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\Rightarrow \Pr(X_1 = 4) = \frac{7}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\Rightarrow \Pr(X_1 = 5) = \frac{9}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\Rightarrow \Pr(X_1 = 6) = \frac{11}{36}$
	$\Rightarrow \Pr(X_2 = 0) = \frac{6}{36}$	$\Rightarrow \Pr(X_2 = 1) = \frac{10}{36}$					

$$\Pr(X_1 = x_1) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & x_1 = 1 \\ \frac{3}{36}, & x_1 = 2 \\ \frac{5}{36}, & x_1 = 3 \\ \frac{7}{36}, & x_1 = 4 \\ \frac{9}{36}, & x_1 = 5 \\ \frac{11}{36}, & x_1 = 6 \end{cases}$$

$$\Pr(X_2 = x_2) = \begin{cases} \frac{6}{36}, & x_2 = 0 \\ \frac{10}{36}, & x_2 = 1 \\ \frac{8}{36}, & x_2 = 2 \\ \frac{6}{36}, & x_2 = 3 \\ \frac{4}{36}, & x_2 = 4 \\ \frac{2}{36}, & x_2 = 5 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 &> 3, X_2 > 3) = 1 - F_{X_1}(3) - F_{X_2}(3) + F_{X_1,X_2}(3,3) \\ &= 1 - \frac{9}{36} - \frac{30}{36} + \frac{9}{36} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■

Exemple 6.21 *Soit l'Exemple 6.6. (a) Trouver* $\Pr(X_3 = 3)$. *(b) Trouver* $F_{X_2}(2)$.

Exemple 6.22 *Soit l'Exemple 6.9. (a) Trouver les fonctions de densité de probabilité marginales de X et Y. (b) Trouver les fonctions de répartition marginales de X et Y. (c) Trouver $F_X(0.5)$ et $F_Y(0.5)$. (d) Trouver* $\Pr(X > 0.5, Y > 0.9)$.

Remarque 6.23 *Comme dans le cas d'une seule variable aléatoire, on a pour chaque X_i $(i = 1, ..., n)$*

$$\sum_{x_i} \Pr(X_i = x_i) = 1$$

si X_i est une variable aléatoire discrète et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_i}(x_i)dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_n \right) \mathrm{d}x_i = 1$$

si X_i est une variable aléatoire continue. Dans l'Exemple 6.2, on a

$$\begin{aligned} \sum_{x_1=1}^{6} \Pr(X_1 &= x_1) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = 1 \\ \sum_{x_2=0}^{5} \Pr(X_2 &= x_2) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = 1. \end{aligned}$$

Dans l'Exemple 6.9, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_X(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{10x(1-x^3)}{3}\mathrm{d}x = \frac{10}{3}\int_0^1 x - x^4\mathrm{d}x = \frac{10}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right) = \frac{10}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = 1 \\ \int_0^1 f_Y(y)\mathrm{d}y &= \int_0^1 5y^4\mathrm{d}y = y^5\Big|_0^1 = 1.\end{aligned}$$

6.1.5 Distribution conditionnelle

Définition 6.24 *Soit un vecteur aléatoire discret* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$*. La fonction de masse de probabilité conjointe conditionnelle de* $(X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n)$ *sachant* $X_i = x_i$ *est définie par*

$$\Pr(X_1 = x_1, ..., X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, ..., X_n = x_n \,|X_i = x_i\,) = \frac{\Pr(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)}{\Pr(X_i = x_i)}.$$

Définition 6.25 *Soit un vecteur aléatoire continu* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$*. La fonction de densité de probabilité conjointe conditionnelle de* $(X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n)$ *sachant* $X_i = x_i$ *est définie par*

$$f_{X_1,...,X_{i-1},X_{i+1},...,X_n|X_i}\,(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \,|x_i\,) = \frac{f_{X_1,...,X_n}\,(x_1, ..., x_n)}{f_{X_i}\,(x_i)}.$$

Définition 6.26 *Soit un vecteur aléatoire discret* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$*. La fonction de répartition conjointe conditionnelle de* $(X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n)$ *sachant* $X_i = x_i$ *est définie par*

$$\begin{aligned}& F_{X_1,...,X_{i-1},X_{i+1},...,X_n|X_i=x_i}\,(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \\ =\;& \frac{\Pr(X_1 \leq x_1, ..., X_{i-1} \leq x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} \leq x_{i+1}, ..., X_n \leq x_n)}{\Pr(X_i = x_i)}\end{aligned}$$

Si $\mathbf{X}$ *est discret, on a*

$$\begin{aligned}& F_{X_1,...,X_{i-1},X_{i+1},...,X_n|X_i=x_i}\,(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \\ =\;& \sum_{y_1=0}^{x_1} ... \sum_{y_{i-1}=0}^{x_{i-1}} \sum_{y_{i+1}=0}^{x_{i+1}} ... \sum_{y_n=0}^{x_n} \frac{\Pr(X_1 = y_1, ..., X_{i-1} = y_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = y_{i+1}, ..., X_n = y_n)}{\Pr(X_i = x_i)}.\end{aligned}$$

Si $\mathbf{X}$ *est continu, on a*

$$\begin{aligned}& F_{X_1,...,X_{i-1},X_{i+1},...,X_n|X_i=x_i}\,(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \\ =\;& \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_{i-1}} \int_{-\infty}^{x_{i+1}} ... \int_{-\infty}^{x_n} \frac{f_{X_1,...,X_n}\,(y_1, ..., y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, ..., y_n)}{f_{X_i}\,(x_i)} \mathrm{d}y_1...\mathrm{d}y_{i-1}\mathrm{d}y_{i+1}...\mathrm{d}y_n.\end{aligned}$$

Exemple 6.27 *Soit l'Exemple 6.2. Trouver l'expression de la fonction de masse de probabilité de* X_1 *sachant* $X_2 = 2$*.*

Exemple 6.28 *Soit l'Exemple 6.6. (a) Trouver* $\Pr(X_1 = 1, X_3 = 1 \,|X_2 = 2\,)$*. (b) Trouver* $\Pr(X_1 \leq 1, X_2 \leq 2 \,|X_3 = 3\,)$*.*

Exemple 6.29 *Soit l'Exemple 6.9. Trouver* $f_{X|Y}(x\,|y\,)$*.*

6.2 Espérance, Variance et Fgm

Définition 6.30 *Soit un vecteur aléatoire discret* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *avec fonction de masse de probabilité conjointe* $\Pr(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$*. Soit une fonction* $g\,(\mathbf{X}) = g(X_1, ..., X_n)$*. Alors,*

$$E\left[g(X_1, ..., X_n)\right] = \sum_{x_1} ... \sum_{x_n} g(x_1, ..., x_n) \Pr(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n).$$

Définition 6.31 *Soit un vecteur aléatoire continu* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *avec fonction de densité de probabilité conjointe* $f_{X_1,...,X_n}$. *Soit une fonction* $g(\mathbf{X}) = g(X_1, ..., X_n)$. *Alors,*

$$E[g(X_1, ..., X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, ..., x_n) f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n.$$

Proposition 6.32 *Soit un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$. *Soit les fonctions* $g_1(X_1, ..., X_n), ..., g_k(X_1, ..., X_n)$ *et les constantes* $c_1, ..., c_k$. *Alors,*

$$E[c_1 g_1(X_1, ..., X_n) + ... + c_k g_k(X_1, ..., X_n)] = c_1 E[g_1(X_1, ..., X_n)] + ... + c_k E[g_k(X_1, ..., X_n)].$$

Exemple 6.33 *Soit* X *et* Y *des variables aléatoires discrètes avec fonction de masse de probabilité conjointe*

$$\Pr(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{x+y}{21}, & x = 1, 2, 3, y = 1, 2 \\ 0, & ailleurs. \end{cases}.$$

Trouver $E[XY]$.

Exemple 6.34 *Soit* X *et* Y *des variables aléatoires continues avec fonction de densité de probabilité conjointe*

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & 0 < x < 10, 0 < y < 10 \\ 0, & ailleurs. \end{cases}.$$

Trouver $E[|X - Y|]$.

6.2.1 Fonction génératrice des moments conjoints

Proposition 6.35 *Soit un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$. *La fonction génératrice des moments conjoints de* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *est définie par*

$$M_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = E\left[\mathrm{e}^{t_1 X_1 + ... + t_n X_n}\right].$$

Proposition 6.36 *Soit un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *avec fonction génératrice des moments conjoints* $M_{X_1,...,X_n}$. *Alors,*

$$\frac{\partial^{k_1+...+k_n}}{\partial t_1^{k_1}...\partial t_n^{k_n}} M_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n)\,|_{(0,...,0)} = E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i^{k_i}\right].$$

Preuve. La preuve est similaire au cas univarié. ■

Exemple 6.37 *Soit un couple de variables aléatoires discrètes* (X_1, X_2) *avec*

$$M_{X_1,X_2}(t_1, t_2) = \left(0.4 + 0.3\mathrm{e}^{t_1} + 0.2\mathrm{e}^{t_2} + 0.1\mathrm{e}^{t_1}\mathrm{e}^{t_2}\right)^2$$

pour t_1, $t_2 > 0$. *(a) Identifier la loi marginale de* X_1. *(b) Identifier la loi marginale de* X_2. *(c) Trouver* $E\left[X_1^2 X_2^3\right]$.

6.2.2 Espérance conditionnelle

Définition 6.38 *Soit un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *et une fonction* $g(X_1, ..., X_n)$. *Soit l'espérance conditionnelle de* $g(X_1, ..., X_n)$ *sachant* $X_i = x_i$ *désignée par*

$$E[g(X_1, ..., X_n)\,|X_i = x_i].$$

Si $\mathbf{X}$ *est discret, on a*

$$E[g(X_1, ..., X_n)\,|X_i = x_i] = \sum_{x_1} ... \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} ... \sum_{x_n} g(x_1, ..., x_n) \Pr(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\,|X_i = x_i).$$

Si $\mathbf{X}$ *est continu, on a*

$$E\left[g(X_1,...,X_n)\left|X_i=x_i\right.\right]=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}g(x_1,...,x_n)f_{X_1,...,X_{i-1},X_{i+1},...,X_n|X_i}\left(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n\left|x_i\right.\right)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}...\mathrm{d}x_n$$

Exemple 6.39 *Soit* X *et* Y *des variables aléatoires discrètes avec fonction de masse de probabilité conjointe*

$$\Pr\left(X=x,Y=y\right)=\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{18},\ x=0,y=0\\ \frac{4}{18},\ x=1,y=0\\ \frac{6}{18},\ x=2,y=0\\ \frac{3}{18},\ x=0,y=1\\ \frac{3}{18},\ x=1,y=1\\ \frac{1}{18},\ x=2,y=1\\ 0,\ ailleurs.\end{array}\right.$$

Trouver $E\left[XY\left|Y=1\right.\right]$.

Exemple 6.40 *Soit* X *et* Y *des variables aléatoires continues avec fonction de densité de probabilité conjointe*

$$f_{X,Y}(x,y)=\left\{\begin{array}{c}8xy,\ 0<x<y<1\\ 0,\ ailleurs.\end{array}\right.$$

Trouver $E\left[X-Y\left|X=\frac{1}{2}\right.\right]$.

6.2.3 Théorèmes de l'espérance et de la variance totale

Proposition 6.41 *Soit les variables aléatoires* X *et* Y *et* $E\left[X\left|Y\right.\right]$ *une fonction de la variable aléatoire* Y *qui prend la valeur* $E\left[X\left|Y=y\right.\right]$ *lorsque* $Y=y$. *Alors,*

$$E\left[X\right]=E\left[E\left[X\left|Y\right.\right]\right].$$

Proposition 6.42 *Soit les variables aléatoires* X *et* Y. *Soit* $E\left[X\left|Y\right.\right]$ *et* $Var\left(X\left|Y\right.\right)$ *des fonctions de la variable aléatoire* Y *qui prennent la valeur* $E\left[X\left|Y=y\right.\right]$ *et* $Var\left(X\left|Y=y\right.\right)$ *lorsque* $Y=y$. *Alors,*

$$Var\left(X\right)=E\left[Var\left(X\left|Y\right.\right)\right]+Var\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right).$$

Preuve. On développe le côté droit de l'égalité. Pour le premier terme, on a

$$Var\left(X\left|Y=y\right.\right)=E\left[X^2\left|Y=y\right.\right]-\left(E\left[X\left|Y=y\right.\right]\right)^2$$

d'où

$$\begin{aligned}E\left[Var\left(X\left|Y\right.\right)\right] &= E\left[E\left[X^2\left|Y\right.\right]-\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right)^2\right]\\ &= E\left[E\left[X^2\left|Y\right.\right]\right]-E\left[\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right)^2\right]\\ &= E\left[X^2\right]-E\left[\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right)^2\right].\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, on a

$$\begin{aligned}Var\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right) &= E\left[\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right)^2\right]-\left(E\left[E\left[X\left|Y\right.\right]\right]\right)^2\\ &= E\left[\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right)^2\right]-\left(E\left[X\right]\right)^2.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}E\left[Var\left(X\left|Y\right.\right)\right]+Var\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right) &= E\left[X^2\right]-E\left[\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right)^2\right]\\ &\quad +E\left[\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right)^2\right]-\left(E\left[X\right]\right)^2\\ &= E\left[X^2\right]-\left(E\left[X\right]\right)^2\\ &= Var\left(X\right).\end{aligned}$$

■

Exemple 6.43 *On considère un portefeuille d'assurance composé de trois types d'assurés: bon, moyen, mauvais. Le montant d'un sinistre pour un assuré est modélisé à l'aide d'une loi exponentielle mais dont le paramètre varie selon la catégorie de l'assuré. Pour les bons assurés, le montant d'un sinistre obéit à une loi exponentielle de paramètre* $\lambda = 0.1$. *Pour les assurés moyens, le montant d'un sinistre obéit à une loi exponentielle de paramètre* $\lambda = 0.05$ *et pour les mauvais assurés le montant d'un sinistre obéit à une loi exponentielle de paramètre* $\lambda = 0.02$. *Le portefeuille comporte 60% de bons, 30% de moyens et 10% de mauvais. (a) Touver l'espérance du montant d'un sinistre quelconque du portefeuille.(b) Trouver la variance du montant d'un sinistre quelconque du portefeuille.*

Exemple 6.44 *Soit des variables aléatoires* X *et* Y *avec fonction de densité de probabilité conjointe*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

(a) Trouver $E[Y]$ *à l'aide de la marginale de* Y. *(b) Trouver* $E[Y]$ *en utilisant la Proposition 6.41.*

Solution. (a)

$$E[Y] = \int_0^1 y f_Y(y) \mathrm{d}y.$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y 2\mathrm{d}x \\ &= 2x \left.\right|_0^y \\ &= 2y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^1 y f_Y(y) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (y)(2y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2y^3}{3} \left.\right|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[E[Y|X]] \\ &= \int_0^1 E[Y|X=x]\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On doit trouver la fonction de densité de probabilité conditionnelle de $(Y|X=x)$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^1 2\mathrm{d}y \\ &= 2y \left.\right|_x^1 \\ &= 2(1-x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X}(y\,|x\,) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\
&= \frac{2}{2\,(1-x)} \\
&= \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\,[Y\,|X=x\,] &= \int_x^1 y f_{Y|X}(y\,|x\,)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{1-x}\int_x^1 y\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{1-x}\frac{y^2}{2}\,|_x^1 \\
&= \frac{1-x^2}{2(1-x)} = \frac{1+x}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\,[Y] &= E\,[E\,[Y\,|X\,]] \\
&= \int_0^1 E\,[Y\,|X=x\,]\,f_X(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)2(1-x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 1-x^2\mathrm{d}x \\
&= x-\frac{x^3}{3}\,|_0^1 \\
&= 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

■

6.3 Construction de distributions par mélange

Un phénomène aléatoire que l'on tente de décrire à l'aide d'une distribution peut provenir de plusieurs phénomènes différents. Par exemple, une réclamation en soins dentaires prise au hasard peut provenir d'un nettoyage, de la réparation d'une dent pour une carie, d'une intervention chirurgicale ou autre. Ces différents phénomènes ont des modes différents. La construction d'une distribution par mélange permet de tenir compte de ces différents modes impliqués dans la modélisation globale. De plus, les modèles obtenus par mélange sont utilisés lorsqu'il y a une incertitude quant à un paramètre de la distribution. Une distribution choisie permet de décrire le comportement de ce paramètre. La distribution résultante possède généralement une queue de distribution plus lourde. Ce type de construction est fort utilisé en actuariat.

Définition 6.45 *Une variable aléatoire X est un mélange de k variables aléatoires $X_1,...,X_k$ si sa fonction de répartition est donnée par*

$$F_X\,(x) = a_1 F_{X_1}\,(x) + ... + a_k F_{X_k}\,(x)\,,$$

où $a_j > 0$ pour tout j et $a_1 + ... + a_k = 1$.

Définition 6.46 *Soit une variable aléatoire discrète Θ, dite variable aléatoire mélange, où $\Theta \in A = \{\theta_1,\theta_2,...\}$. Alors, la distribution de X est dite avec mélange si sa fonction de répartition est de la forme*

$$F_X\,(x) = \sum_{\theta_i \in A} F_{X|\Theta=\theta}\,(x\,|\theta\,)\Pr(\Theta=\theta)\,,$$

où $F_{X|\Theta=\theta}(x|\theta)$ *est la fonction de répartition conditionnelle de* X *sachant* $\Theta = \theta$. *Celle-ci est la fonction de répartition d'une loi connue dont les paramètres varient selon* θ_i, $i \in \mathbb{N}^+$.

Définition 6.47 *Soit une variable aléatoire continue* Θ, *dite variable aléatoire mélange, avec fonction de densité* f_Θ. *Alors, la distribution de* X *est dite avec mélange si sa fonction de répartition est de la forme*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|\Theta=\theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

où $F_{X|\Theta=\theta}(x|\theta)$ *est la fonction de répartition conditionnelle de* X *sachant* $\Theta = \theta$. *Celle-ci est la fonction de répartition d'une loi connue dont les paramètres peuvent prendre une infinité de valeurs.*

Exemple 6.48 *Soit* Θ *une variable aléatoire de mélange avec fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(\Theta = \theta) = \begin{cases} 0.2, & \theta = 2 \\ 0.6, & \theta = 4 \\ 0.2, & \theta = 6 \\ 0, & \textit{ailleurs}. \end{cases}$$

On suppose $(X|\Theta = \theta) \sim Exp\left(\frac{1}{10\theta}\right)$. *(a) Trouver la fonction de répartition de* X. *(b) Trouver* $E[X]$ *et* $Var(X)$.

Exemple 6.49 *On considère un portefeuille de contrats d'assurance où une variable aléatoire* N *représentant le nombre de sinistre pour un assuré donné obéit à une loi de Poisson de paramètre* λ. *Ce paramètre est la réalisation d'une variable aléatoire* Λ *obéissant à une loi gamma de paramètres* α *et* β. *(a) Trouver la loi de* N *où* N *est une variable aléatoire représentant le nombre de sinistre pour un assuré quelconque du portefeuille. (b) Trouver l'espérance du nombre de sinistre pour un assuré quelconque du portefeuille. (c) Trouver la variance du nombre de sinistre pour un assuré quelconque du portefeuille.*

Exemple 6.50 *On considère un portefeuille de contrats d'assurance où le montant d'un sinistre pour un assuré donné obéit à une loi exponentielle de paramètre* λ. *Ce paramètre est la réalisation d'une variable aléatoire* Λ *obéissant à une loi gamma de paramètres* α *et* β. *(a) Trouver la loi de* X *où* X *est une variable aléatoire représentant le montant d'un sinistre pour un assuré quelconque du portefeuille. (b) Trouver l'espérance du montant d'un sinistre pour un assuré quelconque du portefeuille. (c) Trouver la variance du montant d'un sinistre pour un assuré quelconque du portefeuille.*

Exemple 6.51 ***(Ross Chapitre 7, no7)*** *Soit un couple de variables aléatoires* (X, Y) *avec fonction de densité conjointe*

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y} \mathrm{e}^{-(x-y)^2/2}, \ 0 < y < \infty, \ -\infty < x < \infty.$$

(a) Trouver la fonction génératrice des moments conjoints de (X, Y). *(b) Trouver les fonctions génératrices des moments de* X *et* Y.

6.4 Dépendance

6.4.1 Variables aléatoires indépendantes

Définition: Les variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ du vecteur $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ sont dites mutuellement indépendantes pour tout sous-ensemble des réels $A_1, ..., A_n$ si pour les événements $\{X_1 \in A_1\}, ..., \{X_n \in A_n\}$ on a

$$\Pr(X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n) = \Pr(X_1 \in A_1) \times ... \times \Pr(X_n \in A_n).$$

À l'aide des axiomes de probabilité (Chapitre 2), on peut montrer que ce critère d'indépendance est satisfait si et seulement si

$$\begin{aligned}
F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1,...,X_n \leq x_n) \\
&= \Pr(X_1 \leq x_1)... \Pr(X_n \leq x_n) \\
&= F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n), \text{ pour } x_1,...,x_n \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

ou si et seulement si

$$\begin{aligned}
M_{X_1,...,X_n}(t_1,...,t_n) &= E\left[\mathrm{e}^{t_1X_1+...+t_nX_n}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{t_1X_1}...\mathrm{e}^{t_nX_n}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{t_1X_1}\right]...E\left[\mathrm{e}^{t_nX_n}\right] \\
&= M_{X_1}(t_1)...M_{X_n}(t_n) \\
&= \prod_{j=1}^{n} M_{X_j}(t_j).
\end{aligned}$$

Théorème: Soit les variables aléatoires discrètes $X_1,...,X_n$ avec fonction de masse de probabilité conjointe $\Pr(X_1 = x_1,...,X_n = x_n)$. Alors, $X_1,...,X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout nombre réel $x_1,...,x_n$

$$\Pr(X_1 = x_1,...,X_n = x_n) = \Pr(X_1 = x_1)... \Pr(X_n = x_n).$$

Théorème: Soit des variables aléatoires continues $X_1,...,X_n$ définies sur un même espace échantillonnal. Si $f_{X_1,...,X_n}$ est la fonction de densitié de probabilité conjointe de $(X_1,...,X_n)$, alors $X_1,...,X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout nombre réel $x_1,...,x_n$

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = f_{X_1}(x_1)...f_{X_n}(x_n).$$

Exemple 6.52 *Soit l'Exemple 6.40. Peut-on dire que les variables aléatoires X et Y sont mutuellement indépendantes?*

Solution.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, \ 0 < x < y < 1 \\ 0, \ \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_x^1 f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_x^1 8xy\mathrm{d}y \\
&= 8x\frac{y^2}{2}\Big|_x^1 \\
&= 4x(1-x^2), \ 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^y 8xy\mathrm{d}x \\
&= 8y\frac{x^2}{2}\Big|_0^y \\
&= 4y^3, \ 0 < y < 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(x)f_Y(y) &= 16x(1-x^2)y^3 \neq f(x,y) = 8xy \\ &\Rightarrow X \text{ et } Y \text{ ne sont pas mutuellement indépendantes} \end{aligned}$$

■

Proposition 6.53 *Soit un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *où les variables aléatoires* $X_1, ..., X_n$ *sont mutuellement indépendantes. Soit des fonctions* $g_1(X_1), ..., g_n(X_n)$*. Alors,*

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[g_i(X_i)\right].$$

Preuve.

$$\begin{aligned} E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1)...g_n(x_n) f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1)...g_n(x_n) f_{X_1}(x_1)...f_{X_n}(x_n)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1) f_{X_1}(x_1)\mathrm{d}x_1\right) ... \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x_n) f_{X_n}(x_n)\mathrm{d}x_n\right) \\ &= E\left[g_1(X_1)\right] ... E\left[g_n(X_n)\right]. \end{aligned}$$

■

Remarque 6.54 $E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[g_i(X_i)\right]$ *n'implique pas que les variables aléatoires* $X_1, ..., X_n$ *sont mututellement indépendantes.*

Remarque 6.55 *La Proposition 6.32 est valide peu importe que les composantes du vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *soient mutuellement indépendantes ou non. Cette proposition indique que l'espérance est un opérateur linéaire.*

Corollaire 6.56 *Soit un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *où les variables aléatoires* $X_1, ..., X_n$ *sont mutuellement indépendantes. Alors,*

$$M_{X_1+...+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t).$$

Si les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ *sont de plus identiquement distribuées comme la variable aléatoire canonique* X*, on a*

$$M_{X_1+...+X_n}(t) = (M_X(t))^n.$$

Exemple 6.57 *Soit un vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *où les variables aléatoires* $X_1, ..., X_n$ *sont mutuellement indépendantes et* $X_i \sim Normale(\mu_i, \sigma_i)$*. Trouver la distribution de la somme* $X_1 + ... + X_n$*.*

Exemple 6.58 *Soit l'Exemple 6.37. (a) Soit la variable aléatoire* $S = X_1 + X_2$*. (i) Développer l'expression de la foncton génératrice des moments de* S*. (ii) À l'aide de (i), trouver les valeurs de* $\Pr(S = k)$*, pour* $k = 0, 1, 2, ..., k_0$*. Préciser la valeur de* k_0*. (b) Refaire (a) avec* $S = 2 \times X_1 + X_2$*. (c) Refaire (a) avec* $S = X_1 + 2 \times X_2$*.*

Exemple 6.59 *Soit un vecteur de variables aléatoires* $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ *avec*

$$\Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2, M_3 = m_3) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , \quad m_1 = 0,\, m_2 = 1,\, m_3 = 2 \\ \frac{1}{8} & , \quad m_1 = 0,\, m_2 = 2,\, m_3 = 1 \\ \frac{1}{8} & , \quad m_1 = 1,\, m_2 = 0,\, m_3 = 2 \\ \frac{1}{8} & , \quad m_1 = 1,\, m_2 = 2,\, m_3 = 0 \\ \frac{1}{8} & , \quad m_1 = 2,\, m_2 = 0,\, m_3 = 1 \\ \frac{1}{8} & , \quad m_1 = 2,\, m_2 = 1,\, m_3 = 0 \\ \frac{1}{4} & , \quad m_1 = 1,\, m_2 = 1,\, m_3 = 1 \\ 0 & , \quad ailleurs. \end{cases}.$$

On définit $N = M_1 + M_2 + M_3$. *(a) Identifier les lois marginales des variables aléatoires* M_1, M_2, M_3. *(b) Identifier la loi de* N. *(c) Calculer l'espérance et la variance de* N.

Exemple 6.60 *Soit l'Exemple 6.33. (a) Peut-on dire que les variables aléatoires* X *et* Y *sont mutuellement indépendantes? (b) Trouver* $E[X+Y]$ *à l'aide de la fonction de masse de probabilité conjointe et comparer avec* $E[X] + E[Y]$.

Solution. On doit vérifier que $\Pr(X = x, Y = y) = \Pr(X = x)\Pr(Y = y)$. Pour cela, on doit d'abord trouver les marginales $\Pr(X = x)$ et $\Pr(Y = y)$. On a

$$\Pr(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{x+y}{21}, & x = 1, 2, 3, y = 1, 2 \\ 0, & ailleurs. \end{cases}.$$

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{2}{21} + \frac{3}{21} = \frac{5}{21}, & x = 1 \\ \frac{3}{21} + \frac{4}{21} = \frac{7}{21}, & x = 2 \\ \frac{4}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21}, & x = 3 \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

$$\Pr(Y = y) = \begin{cases} \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} = \frac{9}{21}, & y = 1 \\ \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} = \frac{12}{21}, & y = 2 \end{cases}.$$

Par exemple,

$$\Pr(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{21} \neq \Pr(X = 1)\Pr(Y = 1).$$

Les variables aléatoires X et Y ne sont donc pas mutuellement indépendantes. (b)

$$\begin{aligned} E[X+Y] &= \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2}(x+y)\Pr(X = x, Y = y) \\ &= (1+1)\Pr(X = 1, Y = 1) + (1+2)\Pr(X = 1, Y = 2) \\ +(2+1)\Pr(X &= 2, Y = 1) + (2+2)\Pr(X = 2, Y = 2) \\ +(3+1)\Pr(X &= 3, Y = 1) + (3+2)\Pr(X = 3, Y = 2) \\ &= (2)\left(\frac{2}{21}\right) + (3)\left(\frac{3}{21}\right) + (3)\left(\frac{3}{21}\right) + (4)\left(\frac{4}{21}\right) + (4)\left(\frac{4}{21}\right) + (5)\left(\frac{5}{21}\right) \\ &= \frac{79}{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= (1)\left(\frac{5}{21}\right) + (2)\left(\frac{7}{21}\right) + (3)\left(\frac{9}{21}\right) = \frac{46}{21} \\ E[Y] &= (1)\left(\frac{9}{21}\right) + (2)\left(\frac{12}{21}\right) = \frac{33}{21} \\ E[X] + E[Y] &= \frac{46}{21} + \frac{33}{21} = \frac{79}{21} = E[X+Y] \text{ même si } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.} \end{aligned}$$

■

Exemple 6.61 *Soit X et Y des variables aléatoires avec fonction de densité de probabilité conjointe*

$$f_{X,Y}(x,y) = 10\mathrm{e}^{-(5x+2y)},\ x,y > 0.$$

(a) Peut-on dire que les variables aléatoires X et Y sont mutuellement indépendantes? (b)Trouver $E[XY]$.

Solution. On doit vérifier si $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Pour ce faire, on doit trouver les fonctions de densité marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty 10\mathrm{e}^{-(5x+2y)}\mathrm{d}y \\ &= 10\mathrm{e}^{-5x}\frac{\mathrm{e}^{-2y}}{-2}\Big|_0^\infty \\ &= 5\mathrm{e}^{-5x} \\ &\Rightarrow X \sim Exp(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^\infty 10\mathrm{e}^{-(5x+2y)}\mathrm{d}x \\ &= 10\mathrm{e}^{-2y}\frac{\mathrm{e}^{-5x}}{-5}\Big|_0^\infty \\ &= 2\mathrm{e}^{-2y} \\ &\Rightarrow Y \sim Exp(2) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_X(x)f_Y(y) \\ 10\mathrm{e}^{-(5x+2y)} &= \left(5\mathrm{e}^{-5x}\right)\left(2\mathrm{e}^{-2y}\right) \end{aligned}$$

nous permettant d'affirmer que les variables aléatoires X et Y sont mutuellement indépendantes. (b) Étant donné que les variables aléatoires X et Y sont mutuellement indépendantes, on a $E[XY] = E[X]E[Y]$. Alors,

$$\begin{aligned} E[XY] &= E[X]E[Y] \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

■

Proposition 6.62 *Soit X et Y des variables aléatoires avec fonction de masse de probabilité conjointe*

$$\Pr(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{6},\ x = -5, y = 0 \\ \frac{1}{6},\ x = -5, y = 25 \\ \frac{2}{6},\ x = 0, y = 25 \\ \frac{1}{6},\ x = 5, y = 0 \\ \frac{1}{6},\ x = 5, y = 25 \\ 0,\ ailleurs. \end{cases}$$

(a) Peut-on dire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes? (b) Trouver $E[XY]$ à l'aide de la fonction de masse de probabilité conjointe et comparer avec $E[X]E[Y]$.

Solution. (a) On doit trouver les fonctions de masse de probabilité marginales de X et Y.

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{2}{6}, & x = -5 \\ \frac{2}{6}, & x = 0 \\ \frac{2}{6}, & x = 5 \end{cases}$$

$$\Pr(Y = y) = \begin{cases} \frac{2}{6}, & y = 0 \\ \frac{4}{6}, & y = 25 \end{cases}$$

Par exemple,

$$\Pr(X = 5, Y = 0) = \frac{1}{6} \neq \Pr(X = 5)\Pr(Y = 0) = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Les variables aléatoires X et Y ne sont donc pas indépendantes. (b)

$$\begin{aligned} E[XY] &= (-5)(0)\Pr(X = -5, Y = 0) + (-5)(25)\Pr(X = -5, Y = 25) \\ +(0)(0)\Pr(X &= 0, Y = 0) + (0)(25)\Pr(X = 0, Y = 25) \\ +(5)(0)\Pr(X &= 5, Y = 0) + (5)(25)\Pr(X = 5, Y = 25) \\ &= (-125)\left(\frac{1}{6}\right) + (125)\left(\frac{1}{6}\right) = 0 \\ E[X] &= (-5)\Pr(X = -5) + (0)\Pr(X = 0) + (5)\Pr(X = 5) \\ &= (-5)\left(\frac{2}{6}\right) + (5)\left(\frac{2}{6}\right) = 0 \\ E[Y] &= (0)\Pr(Y = 0) + (25)\Pr(Y = 25) \\ &= (25)\left(\frac{4}{6}\right) \\ &\Rightarrow E[XY] = 0 = E[X]E[Y] \text{ même si } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes} \end{aligned}$$

■

6.4.2 Covariance et corrélation

Nous sommes intéressés à évaluer le sens de variation de deux variables aléatoires et à quantifier la lien de dépendance entre celles-ci. La covariance entre deux variables aléatoires nous donne de l'information sur le sens de la relation linéaire existant entre elles. En revanche, la corrélation, qui dépend de la covariance, est une mesure du degré de dépendance linéaire entre les variables aléatoires.

Définition 6.63 *Soit des variables aléatoires X et Y. La covariance entre X et Y, désignée par $Cov(X,Y)$, est définie par*

$$Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

Dans le cas d'une covariance positive entre deux variables aléatoires, on dit que celles-ci sont positivement corrélées et celles-ci varient dans le même sens. Si une des variables aléatoires augmente l'autre augmente également. Il en va de même si une des variables aléatoires diminue. La covariance peut aussi être négative. On dit dans ce cas que les variables aléatoires sont négativement corrélées. Si une variable aléatoire augmente, l'autre diminue et vice-versa. La covariance peut également être nulle impliquant que les variables aléatoires sont non corrélées. Celles-ci ne sont toutefois pas nécessairement mutuellement indépendantes. On ne peut rien conclure lorsque l'on sait uniquement que la covariance est nulle.

Proposition 6.64 *Soit des variables aléatoires X et Y. Alors,*

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Proposition 6.65 *La covariance possède les propriétés suivantes:*

(1) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

(2) $Cov(X,X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = Var(X)$

(3) Si X et Y sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors $Cov(X,Y) = 0$.

Preuve.

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= E[X]E[Y] - E[X]E[Y] \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

(4) Soit c une constante. Alors, $Cov(c,X) = 0$.

Preuve.

$$\begin{aligned} Cov(c,X) &= E[cX] - E[c]E[X] \\ &= cE[X] - cE[X] \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

(5) Soit c une constante. Alors, $Cov(cX,Y) = cCov(X,Y)$.

Preuve.

$$\begin{aligned} Cov(cX,Y) &= E[cXY] - E[cX]E[Y] \\ &= cE[XY] - cE[X]E[Y] \\ &= c\left(E[XY] - E[X]E[Y]\right) \\ &= cCov(X,Y). \end{aligned}$$

■

(6) Soit des vecteurs aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ et des constantes a_i, $i \in \{1, ..., n\}$ et b_j, $j \in \{1, ..., m\}$.

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j Cov\left(X_i, Y_j\right).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j - E\left[\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right]\right)\right] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - E[X_i])\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j (Y_j - E[Y_j])\right)\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j (X_i - E[X_i])(Y_j - E[Y_j])\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j E\left[(X_i - E[X_i])(Y_j - E[Y_j])\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j Cov(X_i, Y_j). \end{aligned}$$

■

Proposition 6.66 *Soit le vecteur aléatoire* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$. *Alors,*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var\left(X_i\right) + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) &= Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} a_j X_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var\left(X_i\right) + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j Cov(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var\left(X_i\right) + 2\sum\sum_{i < j} a_i a_j Cov(X_i, X_j). \end{aligned}$$

■

Remarque 6.67 *Si les variables aléatoires* $X_1, ..., X_n$ *sont mutuellement indépendantes dans la Proposition 6.66, alors*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var\left(X_i\right).$$

Exemple 6.68 *Soit l'Exemple 6.40. (a) Trouver* $Cov(3X + 2Y, 4X + 3Y + 50)$. *(b) Trouver* $Var(3X + 2Y)$.

Solution. (a)

$$\begin{aligned} Cov(3X + 2Y, 4X + 3Y + 50) &= 12Cov(X, X) + 9Cov(X, Y) + 3Cov(X, 50) \\ &\quad +8Cov(Y, X) + 6Cov(Y, Y) + 2Cov(Y, 50) \\ &= 12Var(X) + 17Cov(X, Y) + 6Var(Y). \end{aligned}$$

On a

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 8xy, \ 0 < x < y < 1 \\ 0, \ \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$f_X(x) = 4x(1 - x^2), \ 0 < x < 1.$$
$$f_Y(y) = 4y^3, \ 0 < y < 1.$$

$$\begin{aligned} E\left[X\right] &= \int_0^1 (x)\, 4x(1 - x^2)\mathrm{d}x \\ &= 4\int_0^1 x^2 - x^4 \mathrm{d}x \\ &= 4\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \mid_0^1\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[Y\right] &= \int\limits_0^1 (y)\, 4y^3 \mathrm{d}y \\ &= 4\int\limits_0^1 y^4 \mathrm{d}y \\ &= 4\left(\frac{y^5}{5}\left.\right|_0^1\right) \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= \int\limits_0^1 \left(x^2\right) 4x(1-x^2) \mathrm{d}x \\ &= 4\int\limits_0^1 x^3 - x^5 \mathrm{d}x \\ &= 4\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\left.\right|_0^1\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[Y^2\right] &= \int\limits_0^1 \left(y^2\right) 4y^3 \mathrm{d}x \\ &= 4\int\limits_0^1 y^5 \mathrm{d}y \\ &= 4\left(\frac{y^6}{6}\left.\right|_0^1\right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\left(X\right) &= E\left[X^2\right] - E^2\left[X\right] = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225} \\ Var\left(Y\right) &= E\left[Y^2\right] - E^2\left[Y\right] = \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{2}{75} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_0^1 \int_0^y (xy)\, 8xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 8 \int_0^1 \int_0^y x^2 y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 8 \int_0^1 y^2 \left(\frac{x^3}{3} |_0^y \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{3} \int_0^1 y^5 \mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{3} \left(\frac{y^6}{6} |_0^1 \right) \\
&= \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov\,(X, Y) &= E[XY] - E[X]\, E[Y] \\
&= \frac{4}{9} - \left(\frac{8}{15}\right)\left(\frac{4}{5}\right) \\
&= \frac{100}{225} - \frac{96}{225} \\
&= \frac{4}{225}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov(3X + 2Y, 4X + 3Y + 50) &= 12Var(X) + 17Cov(X, Y) + 6Var(Y) \\
&= (12)\left(\frac{11}{225}\right) + (17)\left(\frac{4}{225}\right) + (6)\left(\frac{2}{75}\right) \\
&= \frac{236}{225}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
Var(3X + 2Y) &= Cov(3X + 2Y, 3X + 2Y) \\
&= 9Cov(X, X) + 6Cov(X, Y) + 6Cov(Y, X) + 4Cov(Y, Y) \\
&= 3^2 Var(X) + 2^2 Var(Y) + (2)\,(6)\, Cov(X, Y) \\
&= (9)\left(\frac{11}{225}\right) + (4)\left(\frac{2}{75}\right) + (2)\,(6)\left(\frac{4}{225}\right) \\
&= \frac{171}{225} \\
&= \frac{19}{25}.
\end{aligned}$$

■

Exemple 6.69 *Soit l'Exemple 6.37. Développer l'expression et calculer la valeur de* $Cov\,(X_1, X_2)$.

Solution. On a déjà trouvé, à partir de la fonction génératrice des moments conjoints, la fonction de masse de probabilité conjointe et les fonctions de masse de probabilité marginales données par

$$\Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \begin{cases} 0.16, & x_1 = 0,\, x_2 = 0 \\ 0.24, & x_1 = 1,\, x_2 = 0 \\ 0.16, & x_1 = 0,\, x_2 = 1 \\ 0.20, & x_1 = 1,\, x_2 = 1 \\ 0.09, & x_1 = 2,\, x_2 = 0 \\ 0.04 & x_1 = 0,\, x_2 = 2 \\ 0.06, & x_1 = 2,\, x_2 = 1 \\ 0.04, & x_1 = 1,\, x_2 = 2 \\ 0.01, & x_1 = 2,\, x_2 = 2 \\ 0 & \textit{ailleurs.} \end{cases}.$$

$$\Pr(X_1 = x_1) = \begin{cases} 0.36, & x_1 = 0 \\ 0.48, & x_1 = 1 \\ 0.16, & x_1 = 2 \\ 0, & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$$\Pr(X_2 = x_2) = \begin{cases} 0.49, & x_2 = 0 \\ 0.42, & x_2 = 1 \\ 0.09, & x_2 = 2 \\ 0, & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[X_1X_2] &= \sum_{x_1=0}^{2}\sum_{x_2=0}^{2} x_1x_2 \Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= (1)(1)(0.2) + (1)(2)(0.04) + (2)(1)(0.06) + (2)(2)(0.01) \\ &= 0.44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X_1] &= \sum_{x_1=0}^{2} x_1 \Pr(X_1 = x_1) \\ &= (1)(0.48) + (2)(0.16) \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X_2] &= \sum_{x_2=0}^{2} x_2 \Pr(X_2 = x_2) \\ &= (1)(0.42) + (2)(0.09) \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] \\ &= 0.44 - (0.8)(0.6) \\ &= -0.04 \end{aligned}$$

■

La covariance nous permet de savoir si les variables aléatoires sont positivement ou négativement corrélées. Toutefois, la covariance étant fonction de l'unité de mesure des variables aléatoires, elle ne nous permet pas de mesurer le degré de dépendance entre les variables. Pour ce faire, on doit utiliser la covariance entre des variables aléatoires centrées et réduites.

Définition 6.70 *Soit des variables aléatoires X et Y. Le coefficient de corrélation linéaire (aussi appelé coefficient de corrélation de Pearson) de deux variables aléatoires X et Y, désigné par $\rho_P(X,Y)$, est défini, si $Var(X)>0, Var(Y)>0$, par*

$$\begin{aligned}
\rho_P(X,Y) &= Cov\left(\frac{(X-E[X])}{\sqrt{Var(X)}}, \frac{(Y-E[Y])}{\sqrt{Var(Y)}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} Cov((X-E[X]),(Y-E[Y])) \\
&= \frac{1}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}\left(Cov(X,Y)-Cov(X,E[Y])-Cov(E[X],Y)+Cov(E[X],E[Y])\right) \\
&= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}.
\end{aligned}$$

Proposition 6.71 *Soit des variables aléatoires X et Y et le coefficient de corrélation de Pearson $\rho_P(X,Y)$. Alors,*

$$-1 \leq \rho_P(X,Y) \leq 1.$$

Preuve. Soit X et Y des variables aléatoires telles que $Var(X)=\sigma_X^2$ et $Var(Y)=\sigma_Y^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
0 &\leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{Var(X)}{\sigma_X^2}+\frac{Var(Y)}{\sigma_Y^2}+\frac{2Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \\
&\Rightarrow 2+\frac{2Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = 2\left(1+\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right) \geq 0 \\
&\Rightarrow 1+\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \geq 0 \\
&\Rightarrow \rho_P(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \geq -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{Var(X)}{\sigma_X^2}+\frac{Var(Y)}{\sigma_Y^2}-\frac{2Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \\
&\Rightarrow 2-\frac{2Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = 2\left(1-\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right) \geq 0 \\
&\Rightarrow 1-\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \geq 0 \\
&\Rightarrow \rho_P(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \leq 1
\end{aligned}$$

■

Proposition 6.72 *Soit les variables aléatoires X et Y et le coefficient de corrélation linéaire $\rho_P(X,Y)$. Alors,*

$$\begin{aligned}
\rho_P(X,Y) &= 1 \Longleftrightarrow Y = a+\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X \\
\rho_P(X,Y) &= -1 \Longleftrightarrow Y = a+\left(-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)X
\end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\rho_P(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{Cov(X,a+bX)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{bVar(X)}{\sigma_X\sigma_Y} = 1 \text{ ssi } b=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \\
\rho_P(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{Cov(X,a+bX)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{bVar(X)}{\sigma_X\sigma_Y} = -1 \text{ ssi } b=-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}
\end{aligned}$$

■

Remarque 6.73 *Le coefficient de corrélation est une mesure du degré de dépendance* ***linéaire*** *entre deux variables aléatoires. Celui-ci n'est donc pas approprié pour juger de corrélations non linéaires entre des variables aléatoires.*

Remarque 6.74 *Un coefficient de corrélation linéaire de -1 ou 1 indique une corrélation linéaire parfaite entre deux variables aléatoires alors qu'un coefficient de corrélation de Pearson de* 0 *indique qu'il n'y a aucun lien* ***linéaire*** *entre les deux variables aléatoires et non que ce sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Les valeurs intermédiaires du coefficient de corrélation de Pearson, c'est-à-dire un nombre entre -1 et 1, renseignent sur le degré de dépendance linéaire (forte ou faible) entre les deux variables aléatoires.*

Exemple 6.75 *Soit des variables aléatoires discrètes X et $Y = X^2$ avec fonction de masse de probabilité conjointe*

$$\Pr(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{2}{6}, \ x = -5, y = 25 \\ \frac{2}{6}, \ x = 0, y = 0 \\ \frac{2}{6}, \ x = 5, y = 25 \\ 0, \ ailleurs. \end{cases}$$

Trouver $\rho_P(X, Y)$.

Exercice 6.76 *Soit X une variable aléatoire continue uniforme sur $(0, 1)$ et $Y = X^2$. Trouver $\rho_P(X, Y)$ et interpréter.*

Solution. On obtient $\rho_P = 0.968$. Même si la relation de dépendance entre X et Y n'est pas linéaire, le coefficient de corrélation nous indique qu'il y a une forte association linéaire entre X et Y indiquant que le regroupement des points (X, Y) forme presque une droite. ■

Exercice 6.77 *Soit X une variable aléatoire continue uniforme sur $(-1, 1)$ et $Y = X^2$. Trouver $\rho_P(X, Y)$ et interpréter.*

Solution. On obtient $\rho = 0$ indiquant qu'il n'y a aucun lien linéaire entre les variables aléatoires X et Y. ■

Exercice 6.78 *Chapitre 6: Exemples 2b), 2c) et 2h) du livre de Ross, 9ième Édition.Distribution de fonctions de plusieurs variables aléatoires*

6.4.3 Distribution d'une fonction de plusieurs variables aléatoires

Dans les Sections 4.3 et 5.5 nous avons trouvé la distribution d'une fonction g d'une seule variable aléatoire X, c'est-à-dire de $g(X)$. Nous voulons maintenant trouver la distribution d'une fonction g de plusieurs variables aléatoires $X_1, ..., X_n$, soit $g(X_1, ..., X_n)$.

Exemple 6.79 *Soit X et Y des variables aléatoires discrètes indépendantes telles que*

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 0.1, \ x = 1 \\ 0.2, \ x = 2 \\ 0.7, \ x = 3 \\ 0, \ ailleurs. \end{cases}$$

et

$$\Pr(Y = y) = \begin{cases} 0.2, \ y = 2 \\ 0.8, \ y = 4 \\ 0, \ ailleurs. \end{cases}$$

(a) Trouver la fonction de masse de probabilité de $U = XY$. (b) Trouver la fonction de masse de probabilité de $V = \frac{X}{Y}$.

Solution. Étant donné que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a

$$\Pr(X=x, Y=y) = \Pr(X=x)\Pr(Y=y) = \begin{cases} 0.02, & x=1, y=2 \\ 0.08, & x=1, y=4 \\ 0.04, & x=2, y=2 \\ 0.16, & x=2, y=4 \\ 0.14, & x=3, y=2 \\ 0.56, & x=3, y=4 \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

(a)

$$\Pr(U=u) = \begin{cases} 0.02, & u=2 \\ 0.12, & u=4 \\ 0.14, & u=6 \\ 0.16, & u=8 \\ 0.56, & u=12 \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

(b)

$$\Pr(V=v) = \begin{cases} 0.08, & v=\frac{1}{4} \\ 0.18, & v=\frac{1}{2} \\ 0.56, & v=\frac{3}{4} \\ 0.04, & v=1 \\ 0.14, & v=\frac{3}{2} \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

■

Exemple 6.80 *Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim Gamma(\alpha_i, 1)$, $i \in \{1,2\}$. Trouver la fonction de densité de probabilité de la fonction $U = \frac{X_1}{X_1+X_2}$.*

Solution.

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \Pr(U \leq u) \\ &= \Pr\left(\frac{X_1}{X_1+X_2} \leq u\right) \\ &= \Pr(X_1 \leq u(X_1+X_2)) \\ &= \Pr(X_1(1-u) \leq uX_2) \\ &= \Pr\left(X_1 \leq \left(\frac{u}{1-u}\right)X_2\right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ indép.} \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2} \frac{x_1^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-x_1}x_2^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-x_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Leibnitz, on obtient

$$\begin{aligned}
f_U(u) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}F_U(u) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^\infty x_2^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-x_2}\left(\int_0^{\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}x_1^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-x_1}\right)\mathrm{d}x_1+\left(\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2\right)^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2-0\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^\infty x_2^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-x_2}\left(0+\left(\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2\right)^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2-0\right)\mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^\infty x_2^{\alpha_2-1}\mathrm{e}^{-x_2}\left(\left(\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2\right)^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{u}{1-u}\right)x_2}\left(\frac{x_2}{(1-u)^2}\right)\right)\mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\left(\frac{u}{1-u}\right)^{\alpha_1-1}\frac{1}{(1-u)^2}\int_0^\infty x_2^{(\alpha_1+\alpha_2)-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{1-u}\right)x_2}\mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\frac{u^{\alpha_1-1}}{(1-u)^{\alpha_1+1}}\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\left(\frac{1}{1-u}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}}\int_0^\infty\frac{\left(\frac{1}{1-u}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}x_2^{(\alpha_1+\alpha_2)-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{1-u}\right)x_2}\mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\alpha_2-1}
\end{aligned}$$

On a donc que $U \sim Beta(\alpha_1, \alpha_2)$. ■

Exemple 6.81 *Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim Exp(1)$ et $X_2 \sim Gamma(\alpha, \lambda)$. Trouver la distribution de $U = X_1/X_2$.*

Solution.

$$\begin{aligned}
F_U(u) &= \Pr(U \leq u) \\
&= \Pr\left(\frac{X_1}{X_2} \leq u\right) \\
&= \Pr(X_1 \leq uX_2) \\
&= \int_0^\infty\int_0^{ux_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^\infty\int_0^{ux_2}\mathrm{e}^{-x_1}\frac{\lambda^\alpha x_2^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x_2}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^\infty\frac{\lambda^\alpha x_2^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x_2}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{ux_2}\mathrm{e}^{-x_1}\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^\infty\frac{\lambda^\alpha x_2^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x_2}}{\Gamma(\alpha)}\left(1-\mathrm{e}^{-ux_2}\right)\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^\infty\frac{\lambda^\alpha x_2^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x_2}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x_2-\int_0^\infty\frac{\lambda^\alpha x_2^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\lambda+u)x_2}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x_2 \\
&= 1-\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+u)^\alpha}\int_0^\infty\frac{(\lambda+u)^\alpha x_2^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\lambda+u)x_2}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x_2 \\
&= 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+u}\right)^\alpha
\end{aligned}$$

On a donc que $U \sim Pareto(\alpha, \lambda)$. ■

Exemple 6.82 *Soit X et Y des variables aléatoires avec fonction de densité de probabilité conjointe*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{8}\mathrm{e}^{-\frac{x+y}{2}},\ x>0, y>0 \\ 0,\ ailleurs. \end{cases}.$$

Trouver la distribution de la fonction $U = \frac{Y}{X}$.

Solution.

$$\begin{aligned}
F_U(u) &= \Pr(U \leq u) \\
&= \Pr\left(\frac{Y}{X} \leq u\right) \\
&= \Pr(Y \leq uX) \\
&= \int_0^\infty \int_0^{ux} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_0^{ux} \frac{x}{8}\mathrm{e}^{-\frac{x+y}{2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{x}{8}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \int_0^{ux} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{x}{8}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}}{\frac{-1}{2}} |_0^{ux}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{x}{8}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(-2\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} |_0^{ux}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{x}{8}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} (-2)\left(\mathrm{e}^{-\frac{ux}{2}} - 1\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{ux}{2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x - \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\frac{(1+u)x}{2}}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma(2)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(2)}x^{2-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x - \frac{\Gamma(2)}{\left(\frac{1+u}{2}\right)^2}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{1+u}{2}\right)^2}{\Gamma(2)}x^{2-1}\mathrm{e}^{-\frac{x(1+u)}{2}}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(4 - \frac{4}{(1+u)^2}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{1+u}\right)^2,\ u > 0.
\end{aligned}$$

On a donc $U \sim Pareto(\alpha = 2, \lambda = 1)$. ■

Exemple 6.83 *Soit N_i une variable aléatoire représentant le nombre de sinistre pour le contrat i, $i = 1, .., n$ d'un portefeuille d'assurance composé de n contrats. On suppose $N_i \sim Poisson(\lambda_i)$. Soit la variable aléatoire $N = N_1 + ... + N_n$ représentant le nombre total de sinistres pour un portefeuille de n contrats. On suppose les contrats indépendants. Trouver la distribution de N.*

On est souvent intéressé à connaître la distribution de la somme ou la différence de variables aléatoires indépendantes. Pour ce faire on définit ci-dessous le produit de convolution de fonctions de masse de probabilité ou de fonctions de densité qui correspond à la fonction de masse de probabilité ou à la fonction de densité de probabilité de la **somme** de deux variables aléatoires indépendantes.

Théorème 6.84 *Soit X et Y des variables aléatoires continues indépendantes avec fonction de densité de probabilité f_X et f_Y respectivement. Le produit de convolution de X et Y est*

$$f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s-y) f_Y(y) \mathrm{d}y.$$

Preuve. Dans un premier temps, on trouve la fonction de répartition de $X + Y$

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(s) &= \Pr(X + Y \leq s) \\
&= \iint_{x+y \leq s} f_{X,Y}(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x+y \leq s} f_X(x) f_Y(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s-y} f_X(x) f_Y(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \left(\int_{-\infty}^{s-y} f_X(x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(s-y) f_Y(y) \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Ensuite, on dérive la fonction de répartition pour obtenir la fonction de densité de probabilité de $X + Y$.

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{X+Y}(s) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_{-\infty}^{\infty} F_X(s-y) f_Y(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_X(s-y) f_Y(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s-y) f_Y(y) \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

■

Remarque 6.85 *Dans le cas de variables aléatoires discrètes, on remplace l'intégrale par une somme.*

Remarque 6.86 *On désigne souvent le produit de convolution par $f_{X+Y}(s) = f_X * f_Y(s)$.*

Exemple 6.87 *Soit X et Y des variables aléatoires discrètes et indépendantes telles que*

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 0.1, & x = 0 \\ 0.3, & x = 1 \\ 0.4, & x = 2 \\ 0.2, & x = 3 \\ 0, & \textit{ailleurs}. \end{cases}$$

et

$$\Pr(Y = y) = \begin{cases} 0.5, & y = 1 \\ 0.4, & y = 2 \\ 0.1, & y = 3 \\ 0, & \textit{ailleurs}. \end{cases}$$

Trouver le produit de convolution des fonctions de masse de probabilité de X et Y.

Solution. On a $X \in \{0,1,2,3\}$ et $Y \in \{1,2,3\}$ et par conséquent $U \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

$$\Pr(U=s) = \Pr(X+Y=s) = \sum_{y=1}^{s} \Pr(X=s-y)\Pr(Y=y),$$

$$\begin{aligned}
\Pr(U &= 1) = \sum_{y=1}^{1} \Pr(X=1-y)\Pr(Y=y) \\
&= \Pr(X=0)\Pr(Y=1) = (0.1)\,(0.5) = 0.05.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(U &= 2) = \sum_{y=1}^{2} \Pr(X=2-y)\Pr(Y=y) \\
&= \Pr(X=1)\Pr(Y=1) + \Pr(X=0)\Pr(Y=2) \\
&= (0.3)\,(0.5) + (0.1)\,(0.4) = 0.19.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(U &= 3) = \sum_{y=1}^{3} \Pr(X=3-y)\Pr(Y=y) \\
&= \Pr(X=2)\Pr(Y=1) + \Pr(X=1)\Pr(Y=2) + \Pr(X=0)\Pr(Y=3) \\
&= (0.4)\,(0.5) + (0.3)\,(0.4) + (0.1)\,(0.1) = 0.33.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(U &= 4) = \sum_{y=1}^{4} \Pr(X=4-y)\Pr(Y=y) \\
&= \Pr(X=3)\Pr(Y=1) + \Pr(X=2)\Pr(Y=2) + \Pr(X=1)\Pr(Y=3) \\
&= (0.2)\,(0.5) + (0.4)\,(0.4) + (0.3)\,(0.1) = 0.29.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(U &= 5) = \sum_{y=1}^{5} \Pr(X=5-y)\Pr(Y=y) \\
&= \Pr(X=4)\Pr(Y=1) + \Pr(X=3)\Pr(Y=2) + \Pr(X=2)\Pr(Y=3) + \Pr(X=1)\Pr(Y=4) \\
&= (0) + (0.2)\,(0.4) + (0.4)\,(0.1) + (0) = 0.12.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(U &= 6) = \sum_{y=1}^{6} \Pr(X=6-y)\Pr(Y=y) \\
&= \Pr(X=3)\Pr(Y=3) \\
&= (0.2)\,(0.1) = 0.02.
\end{aligned}$$

$$\Pr(U=u) = \begin{cases} 0.05, & u=1 \\ 0.19, & u=2 \\ 0.33, & u=3 \\ 0.29, & u=4 \\ 0.12, & u=5 \\ 0.02, & u=6 \\ 0, & \textit{ailleurs}. \end{cases}$$

■

Exemple 6.88 *Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim Gamma(\alpha_i, \lambda)$, $i \in \{1,2\}$. Trouver le produit de convolution des fonctions de densité de X_1 et X_2.*

Exemple 6.89 *Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur $(0,1)$. Trouver le produit de convolution des fonctions de densité de X et Y.*

Exercice 6.90 *Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim U(0,a)$ et $Y \sim U(0,b)$, où $0 < a < b$. Trouver le produit de convolution des fonctions de densité de X et Y.*

Solution.

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{u}{ab}, & 0 \leq u < a \\ \frac{1}{b}, & a \leq u < b \\ \frac{a+b-u}{ab}, & b \leq u < a+b \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

■

Exercice 6.91 *Chapitre 6: Exemples 3c), 3d), 3f) du livre de Ross, 9ième Édition.*

6.4.4 Distribution conjointe de fonctions de plusieurs variables aléatoires

Théorème 6.92 *Soit $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur de variables aléatoires continues avec fonction de densité de probabilité conjointe $f_{X_1,...,X_n}$ et les variables aléatoires $Y_1 = g_1(X_1, ..., X_n)$, $Y_2 = g_2(X_1, ..., X_n)$, ..., $Y_n = g_n(X_1, ..., X_n)$. Supposons que les fonctions $g_1, ..., g_n$ sont des fonctions inversibles et qu'elles ont des dérivées partielles en tout point $(x_1, ..., x_n)$ telles que le déterminant suivant est différent de 0*

$$J(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Sous ces conditions, la fonction de densité de probabilité conjointe de $(Y_1, ..., Y_n)$ est donnée par

$$f_{Y_1,...,Y_n}(y_1, ..., y_n) = f_{X_1,...,X_n}(h_1(y_1, ..., y_n), ..., h_n(y_1, ..., y_n)) \left|J(x_1, ..., x_n)\right|^{-1},$$

où $x_i = h_i(y_1, ..., y_n)$ pour $i = 1, ..., n$.

Remarque 6.93 *La matrice jacobienne est la matrice des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction vectorielle. Soit F une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Une telle fonction est définie par ses m fonctions composantes à valeurs réelles :*

$$F : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}.$$

Les dérivées partielles de ces fonctions en un point $\mathbf{M}$, si elles existent, peuvent être rangées dans une matrice à m lignes et n colonnes, appelée matrice jacobienne de $\mathbf{F}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Si $m = n$, alors la matrice jacobienne de $\mathbf{F}$ est une matrice carrée. Nous pouvons alors calculer son déterminant $det(F)$, appelé le déterminant jacobien, ou jacobien. Dire que le jacobien est non nul revient donc à dire que la matrice jacobienne est inversible.

Exemple 6.94 *Soit des variables aléatoires indépendantes X_i, $i \in \{1, 2\}$, telles que $X_i \sim Exp(\lambda_i)$. Soit les fonctions $U = X_1 + X_2$ et $V = X_1 - X_2$. Trouver la fonction de densité de probabilité conjointe de (U, V).*

Exemple 6.95 *Soit des variables aléatoires indépendantes X_i, $i \in \{1, 2\}$, telles que $X_i \sim Gamma(\alpha_i, \lambda)$. Soit les fonctions $U = X_1 + X_2$ et $V = \frac{X_1}{X_1+X_2}$. Trouver la fonction de densité de probabilité conjointe de (U, V).*

Exercice 6.96 *Chapitre 6: Exemples 7d), 7e) du livre de Ross, 9ième Édition.*

6.5 Lois multivariées usuelles

6.5.1 Loi multinomiale

Définition 6.97 *Soit n essais indépendants d'une même expérience aléatoire ayant à chaque essai r résultats possibles avec probabilités p_i $(i = 1, ..., r)$ d'obtenir le ième résultat et $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Soit X_i $(i = 1, ..., r)$ des variables aléatoires représentant le nombre de fois que l'on obtient le ième résultat en n essais. Alors, le vecteur $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_r)$ est dit obéir à une loi multinomiale de paramètres n et p_i $(i = 1, ..., r)$ dont la fonction de masse de probabilité conjointe est définie par*

$$\Pr(X_1 = x_1, ..., X_r = x_r) = \binom{n}{x_1, ..., x_r} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_r^{x_r}.$$

Remarque 6.98 *La loi multinomiale est une généralisation à r événements de la loi binomiale.*

Exemple 6.99 *Un dé honnête est lancé 9 fois. Trouver la probabilité que l'on obtienne 3 fois le chiffre 1, 2 fois les chiffres 2 et 3, 1 fois les chiffres 4 et 5, et aucune fois le chiffre 6.*

Solution. Soit X_i une variable aléatoire représentant le nombre de fois que l'on obtient le chiffre i dans les 9 essais. Alors,

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1 &= 3, X_2 = 2, X_3 = 2, X_4 = 1, X_5 = 1, X_6 = 0) \\
&= \binom{9}{3,2,2,1,1,0} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \\
&= \frac{9!}{3!2!2!1!1!0!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \\
&= 0.0015.
\end{aligned}$$

■

6.5.2 Loi normale multivariée

Définition 6.100 *Un vecteur $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ est dit obéir à une loi normale mulitivariée de paramètres $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ si sa fonction de densité conjointe est définie par*

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})},$$

où $\boldsymbol{\mu}$ est le vecteur des moyennes et $\boldsymbol{\Sigma}$ est la matrice variance-covariance de $\mathbf{X}$ donnée par

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix},$$

où $\sigma_{i,j} = Cov(X_i, X_j)$.

Remarque 6.101 *Soit $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire obéissant à une loi normale multivariée de paramètres $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. On peut montrer que la loi marginale de X_i, $i = 1, ..., n$, est une loi normale de paramètres $(\mu_i, \sigma_{i,i})$.*

Remarque 6.102 *Petit rappel sur l'inversion d'une matrice...Soit $\mathbf{A}$ une matrice inversible. Alors,*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} adj(\mathbf{A})$$

où adj$(\mathbf{A})$ *correspond à la matrice adjointe de* $\mathbf{A}$, *c'est-à-dire la transposée de la matrice des cofacteurs de* $\mathbf{A}$. *Ne pas oublier l'ordre des signes dans la matrice des cofacteurs, soit*

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Exemple 6.103 *Soit un vecteur* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ *obéissant à une loi normale multivariée de paramètres* $(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ *tels que*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= (5, 10, 15) \\ \mathbf{\Sigma} &= \begin{pmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 11 \\ 5 & 11 & 25 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Trouver $f_{X_1,X_2,X_3}(4, 13, 8)$. *(b) Trouver* $Var\,(X_1 + X_2 + X_3)$.

Solution.

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\det(\mathbf{\Sigma})}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{\Sigma}) &= \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 11 \\ 5 & 11 & 25 \end{vmatrix} = (10)\begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 11 & 25 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} + (5)\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} \\ &= (10)\left((12)(25) - (11)(11)\right) - (3)\left((3)(25) - (5)(11)\right) + (5)\left((3)(11) - (5)(12)\right) \\ &= (10)(179) - (3)(20) + (5)(-27) \\ &= 1595 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathbf{\Sigma})}\begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \end{pmatrix}^t \\ &= \frac{1}{1595}\begin{pmatrix} 179 & -20 & -27 \\ -20 & 225 & -95 \\ -27 & -95 & 111 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} \frac{179}{1595} & -\frac{20}{1595} & \frac{-27}{1595} \\ -\frac{20}{1595} & \frac{225}{1595} & \frac{-95}{1595} \\ \frac{-27}{1595} & \frac{-95}{1595} & \frac{111}{1595} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= \left((12)(25) - (11)(11)\right) = 179 \\ C_{1,2} &= -\left((3)(25) - (5)(11)\right) = -20 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) &= (4 - 5\ 13 - 10\ 8 - 15) \\ &= (-1\ 3\ \ -7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}\right) &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{179}{1595} & -\frac{20}{1595} & \frac{-27}{1595} \\ -\frac{20}{1595} & \frac{225}{1595} & \frac{-95}{1595} \\ \frac{-27}{1595} & \frac{-95}{1595} & \frac{111}{1595} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{50}{1595} & \frac{1360}{1595} & -\frac{1035}{1595} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{50}{1595} + \frac{4080}{1595} + \frac{7245}{1595} \\
&= \frac{11375}{1595} \\
&= \frac{2275}{319}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1595}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2275}{319}\right)} \\
&= 0.00004495.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
Var\left(X_1+X_2+X_3\right) &= Var\left(X_1\right)+Var\left(X_2\right)+Var\left(X_3\right)+2Cov\left(X_1,X_2\right)+2Cov\left(X_1,X_3\right)+2Cov\left(X_2,X_3\right) \\
&= 10+12+25+(2)(3)+(2)(5)+(2)(11) \\
&= 85.
\end{aligned}$$

■

Définition 6.104 *Soit un couple de variables aléatoires (X,Y) obéissant à une loi normale bivariée de paramètres $(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$. (a) Développer une expression, sous forme non matricielle, de la fonction de densité conjointe de (X,Y). (b) Trouver la loi de la variable aléatoire $(X\,|Y=y)$. (c) Si $\mu_X=2.8$, $\mu_Y=110$, $\sigma_X^2=0.16$, $\sigma_Y^2=100$ et $\rho_P\left(X,Y\right)=0.6$, trouver...(i)* $\Pr(106<Y<124)$ *(ii)* $\Pr(106<Y<124\,|X=3.2)$.

Solution. (a)

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det\left(\boldsymbol{\Sigma}\right)}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}\right)^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}\right)}$$

$$\begin{aligned}
\det\left(\boldsymbol{\Sigma}\right) &= \begin{vmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{X,Y} \\ \sigma_{X,Y} & \sigma_Y^2 \end{vmatrix} \\
&= \sigma_X^2\sigma_Y^2-\left(\sigma_{X,Y}\right)^2 \\
&= \sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\frac{\left(\sigma_{X,Y}\right)^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\rho_P\left(X,Y\right)=\frac{Cov\left(X,Y\right)}{\sqrt{Var\left(X\right)Var\left(Y\right)}}=\frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\Rightarrow \det\left(\boldsymbol{\Sigma}\right)=\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho_P\left(X,Y\right)^2\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathbf{\Sigma})}\begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2}\end{pmatrix}^t \\
&= \frac{1}{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)}\begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & -\sigma_{X,Y} \\ -\sigma_{X,Y} & \sigma_X^2\end{pmatrix}^t \\
&= \frac{1}{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)}\begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & -\sigma_{X,Y} \\ -\sigma_{X,Y} & \sigma_X^2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} & \frac{-\sigma_{X,Y}}{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} \\ \frac{-\sigma_{X,Y}}{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} & \frac{1}{\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) &= \begin{pmatrix} x-\mu_X & y-\mu_Y\end{pmatrix}\mathbf{\Sigma}^{-1}\begin{pmatrix} x-\mu_X \\ y-\mu_Y\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x-\mu_X & y-\mu_Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} & \frac{-\sigma_{X,Y}}{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} \\ \frac{-\sigma_{X,Y}}{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} & \frac{1}{\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\mu_X \\ y-\mu_Y\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{x-\mu_X}{\sigma_X^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} - \frac{\sigma_{X,Y}(y-\mu_Y)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} & \frac{-\sigma_{X,Y}(x-\mu_X)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} + \frac{(y-\mu_Y)}{\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\mu_X \\ y-\mu_Y\end{pmatrix} \\
&= \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} - \frac{\sigma_{X,Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} - \frac{\sigma_{X,Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2\left(1-\rho_P(X,Y\right.} \\
&= \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2\left(1-\rho(X,Y)^2\right)} - \frac{2\sigma_{X,Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(1-\rho(X,Y)^2\right)} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2\left(1-\rho(X,Y)^2\right)} \\
&= \frac{1}{\left(1-\rho(X,Y)^2\right)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - \frac{2\sigma_{X,Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\left(1-\rho(X,Y)^2\right)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho(X,Y)\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_P(X,Y)^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho_P(X,Y)\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x\,|y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho(X,Y)^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_P(X,Y)^2\right)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho_P(X,Y)\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho_P(X,Y)^2}\sigma_X}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\left(\mu_X+\rho_P(X,Y)\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)\right)}{\sigma_X\sqrt{1-\rho_P(X,Y)^2}}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (X\,|Y=y) \sim N\left(\mu_X+\rho_P(X,Y)\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y), \sigma_X\sqrt{1-\rho_P(X,Y)^2}\right)$$

(c) (i)

$$\begin{aligned}
\Pr(106 &< Y < 124) = \Pr\left(\frac{106-110}{\sqrt{100}} < \frac{Y-110}{\sqrt{100}} < \frac{124-110}{\sqrt{100}}\right) \\
&= \Pr(-0.4 < Z < 1.4) \\
&= \Phi(1.4) - (1-\Phi(0.4)) \\
&= 0.9192 - (1-0.6554) \\
&= 0.5746
\end{aligned}$$

(ii) On a $(Y\,|X=3.2\,) \sim Normale$ de paramètres

$$\begin{aligned}
E\left[Y\,|X=3.2\right] &= \mu_Y + \rho\left(X,Y\right)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(3.2-\mu_X) \\
&= 110 + (0.6)\left(\frac{10}{0.4}\right)(3.2-2.8) \\
&= 116 \\
Var\left(Y\,|X=3.2\,\right) &= \sigma_Y^2(1-\rho\left(X,Y\right)^2) \\
&= (100)\,(1-0.36) \\
&= 64 \\
&\Rightarrow (Y\,|X=3.2\,) \sim Normale(\mu=116, \sigma=8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(106 &< Y < 124\,|X=3.2\,) = \Pr\left(\frac{106-116}{8} < \frac{Y-116}{8} < \frac{124-116}{8}\,|X=3.2\right) \\
&= \Pr(-1.25 < Z < 1) \\
&= \Phi(1) - (1-\Phi(1.25)) \\
&= 0.8413 - (1-0.8944) \\
&= 0.7357.
\end{aligned}$$

■

Exemple 6.105 *Soit un couple de variables aléatoires (X,Y) obéissant à une loi normale bivariée avec paramètres*

$$\begin{aligned}
\mu_X &= 5,\ \sigma_X^2 = 1 \\
\mu_Y &= 10,\ \sigma_Y^2 = 25 \\
\rho_P\left(X,Y\right) &> 0.
\end{aligned}$$

Si $\Pr(4 < Y < 16\,|X=5\,) = 0.954$*, trouver le coefficient de corrélation* $\rho_P\left(X,Y\right)$*.*

Solution. On a $(Y\,|X=5\,) \sim Normale$ de paramètres

$$\begin{aligned}
E\left[Y\,|X=5\right] &= \mu_Y + \rho_P\left(X,Y\right)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(5-\mu_X) \\
&= 10 + \rho_P\left(X,Y\right)\left(\frac{5}{1}\right)(5-5) \\
&= 10 \\
Var\left(Y\,|X=5\,\right) &= \sigma_Y^2(1-\rho_P\left(X,Y\right)^2) \\
&= 25(1-\rho_P\left(X,Y\right)^2) \\
&\Rightarrow (Y\,|X=5\,) \sim Normale\left(10, 5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}\right).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Pr(4 &< Y < 16 \,|X = 5) = \Pr\left(\frac{4-10}{5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}} < \frac{Y-10}{5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}} < \frac{16-10}{5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}} \,|X=5\right) \\
&= \Phi\left(\frac{6}{5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}}\right) - \Phi\left(\frac{-6}{5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{6}{5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{6}{5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}}\right)\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{6}{5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}}\right) - 1 \\
&= 0.954
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 2\Phi\left(\frac{6}{5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}}\right) = 1.954 \\
&\Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{6}{5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}}\right) = 0.977 \\
&\Rightarrow \quad \frac{6}{5\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2}} = 2 \\
&\Rightarrow \quad 10\sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2} = 6 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{1-\rho_P\left(X,Y\right)^2} = 0.6 \\
&\Rightarrow \quad 1-\rho_P\left(X,Y\right)^2 = 0.36 \\
&\Rightarrow \quad \rho_P\left(X,Y\right) = 0.8.
\end{aligned}
$$

■