二階數學-不等式、數論、三角函數、二次曲線

林筠臻

2025

Chapter 1

不等式

1.1 簡森不等式 (Jensen's inequality)

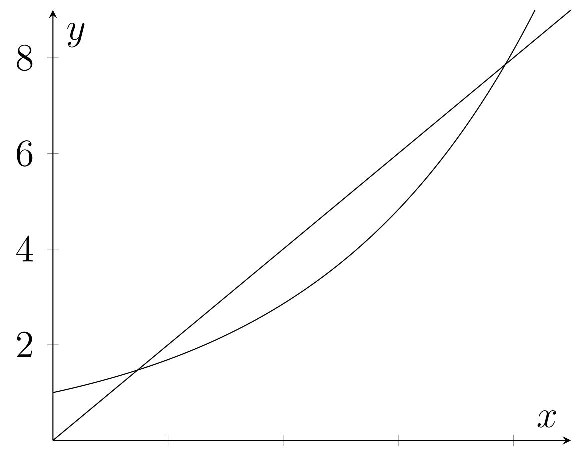
如果 $f(x)$ 是一個凸函數 (凹向上)，則對於任意實數 $x_1, x_2, ..., x_n$ 以及非負權重 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (滿足 $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$)，則

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n) \quad (1.1)$$

等號成立於 $x_1 = x_2 = ... = x_n$

$<$ 證明：利用數學歸納法 $>$

步驟一：證明 n=2 時成立



步驟二：推廣到一般情況

1.1.1

$\angle A\ \angle B\ \angle C$ 爲一三角形的三內角，求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值。

1.2 算幾不等式 (AM-GM inequality)

設 $x_1, x_2, ..., x_n$ 皆爲正數

則

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt{x_1 x_2 ... x_n} \tag{1.2}$$

等號成立於 $x_1 = x_2 = ... = x_n$

$<$ 證明法一：利用數學歸納法 $>$

＜證明法二：利用簡森不等式＞

1.2.1

有一條固定長度的繩子圍成一扇形，此扇形的角度爲多少時會使面積最大？

1.2.2

a,b,c 爲三角形的三邊長，試證 abc$\geq$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)。

1.2.3

承例題 1.1.1，求 $\sin A \sin B \sin C$ 的最大值。

1.3 柯西不等式 (Cauchy—Schwarz inequality)

設 $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ 皆爲實數

則

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2 \quad (1.3)$$

等號成立於 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n}$

$<$ 證明：利用二次函數 $>$

1.3.1

設 a,b,c 爲正實數，且 $a+b+c=1$，求 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$ 之最小值。

（本題參考陳志和老師的講義）

1.3.2

已知實數 a,b,c,d 滿足 $2a^2+3c^2=2b^2+3d^2=(ad-bc)^2=6$，求 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 的值。

（本題參考陳志和老師的講義）

1.4 不等式歷屆試題

109-2

空間中相異四點 $O, A, B.C$ 組成一個三角錐，已知 $\angle AOB = 60°$、$\angle AOC = 30°$，且 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 30$，求此三角錐體積最大值爲何？

109-14

在數據分析中，若有資料 a_k，$k = 1, 2, 3, \ldots, n$，則此資料的變異數 $= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{n} \times (a_k)^2\right] - \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \times a_k\right)\right]^2$。

現在有 1000 筆數值，其中的最大值爲 100，最小值爲 0，則此組數據的變異數最小值爲何？

109-15

假設 ω_9 爲 $x^9-1=0$ 的一根，但 $\omega_9\neq 1$ 且 $\omega_9\neq\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)$，則 $\omega_9+\omega_9^2+\omega_9^3+\omega_9^4$ 的實數部分之最大值爲何？

109-16

坐標平面上有兩個完全不相交的甲、乙橢圓，其長軸長皆爲 20、短軸長皆爲 10，且甲、乙兩橢圓的中心相距 30，在甲橢圓的長軸上有一直線 L 與此長軸夾 45 度，而且將甲橢圓以此直線 L 鏡射就可以得到乙橢圓，甲橢圓上動點 A，乙橢圓上動點 B，求 AB 之最小值爲何？

110-2

定義「精準度」爲「患者被診斷爲陽性的機率」；定義「岐異度」爲「非患者被診斷爲陰性的機率」。

且已知「精準度」可用一常數 S 表示爲 $S-S^2$，「岐異度」可表示爲 $1-S$。根據一可信資料，某區域有 80% 的人患病，則調整 S 值爲多少時，可使 $P(x)=P(\text{精準度})+P(\text{岐異度})$ 達最大值？

110-3

已知坐標平面上有一變動點 $P(x,y)$，滿足 $x+2y\geq 4$、$4x+y\leq 9$、$2x-3y\geq -6$，且 x^2+y^2 之最大值爲 M，最小值爲 m。求 $(M,m)=$？

110-6

令 $z=9^x+3^y$，且 (x,y) 滿足方程式 $2x+y=4$，求 z 之最小值爲何？

110-15

已知座標 $C(x,y)$ 滿足 $(x,y)|xy=1,x\geq 0,y\geq 0$，且座標 $A(x,y)$ 在 x 軸上，座標 $B(x,y)$ 在 y 軸上。求 $\triangle ABC$ 的面積最大值爲何？

111-7

從 $1, 2, 3, \ldots, 10$ 取值的隨機變數，其變異數最大值爲何？

111-8

已知 t 爲 0 和 π 之間的任意實數，另設 $P(2\cos(t-\frac{\pi}{6}), \cos(t+\frac{\pi}{3}))$，求 P 跟原點距離的最大值爲 M，最小值爲 m，求 $(M, m) =$？

111-11

今有一函數

$f(x)=x^2+(y-2)^2+(z+4)^2+|x|+|y|+|z|$

當 (x,y,z) 爲多少時，$f(x)$ 有最小值。

113-2

求 $2x^2+y^2+(2x-y+3)^2$ 的最小值。

113-3

可微函數 $f(x)$ 滿足對於任意 x, y，使得 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$，求 $|f'(x)|$ 的最小值。

113-8

x, y 爲正實數，求 $\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{x+y}}$ 的最大值。

Chapter 2

數論

2.1 因數與倍數

定義：

設 a,b 皆爲整數，如果存在 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $a = bt$，那麼就稱 a 爲 b 的倍數，b 爲 a 的因數，符號 $b \mid a$。

性質：

(1) $a \mid b$ 且 $b \mid c \Rightarrow a \mid c$

$<$ 證明 $>$

(2) $a \mid b$ 且 $a \mid c \Rightarrow$ 對任意整數 x, y 有 $a \mid bx + cy$

$<$ 證明 $>$

(3) $a \mid b$ 且 $b \mid a \Rightarrow b = \pm a$

$<$ 證明 $>$

(4) 設 p 爲質數，若 $p \mid ab$，則 $p \mid a$ 或 $p \mid b$

$<$ 證明 $>$

2.1.1

證明無論在 12008 的兩個 0 之間添加多少個 3，所得的數都是 19 的倍數。

2.1.2

求最大正整數 n 使 $\frac{n^3+2021}{n+11}$ 是整數。

2.2 質數－埃拉托斯特尼篩法 (Sieve of Eratosthenes)

設 a, b, c 爲正整數，且 $a = bc$，$b > 1$，$c > 1$，則 b, c 中至少有一個小於或等於 $\sqrt{a}$。

$<$ 證明：利用反證法 $>$

2.2.1

確認 899 是否爲質數。

2.3 同餘

定義：

設 n 爲正整數，如果 a 和 b 被 n 除後的餘數相等，則稱 a 與 b 關於模 n 同餘，符號 $a \equiv b \pmod{n}$。

性質：

(1) $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b = kn$

$<$ 證明 $>$

(2) $m \mid n$ 且 $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

$<$ 證明 $>$

(3) $a \equiv b \pmod{n}$ 且 $c \equiv d \pmod{n}$

$\Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n}$ 且 $ac \equiv bd \pmod{n}$

$<$ 證明 $>$

(4) 設 d 是 a, b, n 的公因數且 $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{n}{d}}$

$<$ 證明 $>$

2.3.1

試證：任一正整數 n 與它的各位數字和對模 9 同餘。

2.3.2

試證：任何 11 的倍數 n 的奇數位數字之和與偶數位數字之和對模 11 同餘。

2.3.3

3^{110} 寫成十進位的個位數爲多少？

2.3.4

3^{110} 寫成十進位的十位數爲多少？

2.4 中國剩餘定理

lemma：貝祖定理 (p.24)

設 a,b 爲非零整數，必可找到整數 x,y 使 $ax+by=(a,b)$

延伸：

若 $(a,b)=1$，必可找到整數 x,y 使 $ax+by=1$

取模 b 後，$ax\equiv 1 \pmod b$

設 m,n 爲互質的自然數，a,b 爲整數，則同餘式 $\begin{cases} x\equiv a \pmod m \\ x\equiv b \pmod n \end{cases}$ 有共同解 x_0。

且所有共同整數解也是一個同餘式：$x\equiv x_0 \pmod{nm}$

$<$ 證明 $>$

2.4.1

今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二。問物幾何？

三人同行七十稀，五樹梅花廿一支，七子團圓正半月，除百零五便得知。

2.4.2

解同餘式 $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$

補充：貝祖定理

設 a, b 爲非零整數，必可找到整數 x, y 使 $ax + by = (a, b)$

$<$ 證明 $>$

2.5 數論歷屆試題

108-1

下列何者爲 3？

(1) $\log_5 625$

(2) 1211×7725 除以 11 的餘數

(3) $\sqrt{2}\sin\theta + \cos\theta$ 的最大值

(4) 過 $(0,0),(0,1),(1,0)$ 的圓面積

(5) $P(3,4)$ 到圓 $C: x^2+y^2=2$ 的最近距離

108-7

$\frac{3-\cos\theta}{2+\sin\theta}$ 最大值爲 $a+\frac{\sqrt{b}}{3}$，則 $a+b$ 除以 5 的餘數？

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4

108-8

$\alpha=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$，$\beta=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$，$|t\alpha^{2018}+(1-t)\beta^{2018}|$ 的最小值爲 $\sqrt{\frac{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}}{4\sqrt{2}}}$，請問 $a+b+c$ 除以 5 的餘數？

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 4

109-3

5^{2020} 除以 11 的餘數爲何？

Chapter 3

三角函數

3.1 反三角函數

反三角函數是三角函數的反函數，如下：

$$\sin^{-1} x = \theta \Leftrightarrow \sin x = \theta$$

$$\cos^{-1} x = \theta \Leftrightarrow \cos x = \theta$$

$$\tan^{-1} x = \theta \Leftrightarrow \tan x = \theta$$

3.1.1

寫出下列各項的值：

$\sin^{-1}(1)$、$\sin^{-1}(\frac{1}{2})$、$\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$、$\sin^{-1}(-\frac{\pi}{8})$、$\sin^{-1}(\frac{-3\pi}{2})$。

3.1.2

假設 $\theta = \sin^{-1}(x)$，$x > 0$。畫一個其中一個角度爲 θ 的直角三角形，並以 x 表示三邊長。

3.1.3

承上題，現在有一個函數 $f(x) = \tan(\sin^{-1}(x))$，請以沒有三角函數的方式表示 $f(x)$。

3.1.4

承上題，用相似的方法簡化 $\cos(\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}})$。

並計算 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cos(\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}})$。

3.2 積化和差、和差化積

積化和差：

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]
\end{aligned}$$

$<$ 推導 $>$

三乘積化和差：

$$\sin A\sin B\sin C =$$
$$\frac{1}{4}[\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)+\sin(-A+B+C)-\sin(A+B+C)]$$

$<$ 推導 $>$

和差化積：

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})\\
\sin x - \sin y &= 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})\\
\cos x + \cos y &= 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})\\
\cos x - \cos y &= -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})
\end{aligned}$$

< 推導 >

3.2.1

A、B、C 爲三角形的三內角，若 $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sqrt{3}$，求 $\sin A \sin B \sin C$。

3.2.2

請寫出 $\sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + ... + \sin n$ 的一般式。

3.2.3

求 $\sin(\phi) + \sin(\phi + \theta) + \sin(\phi + 2\theta) + ... + \sin(\phi + n\theta)$ 的一般式。

3.3 $\sin^n\theta$ 與 $\cos^n\theta$ 降次

< 推導 >

3.4 三角函數歷屆試題

108-4

下列何者等於 $\cos 3\theta$？

(1) $\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta$

(2) $\cos 2\theta\sin\theta-\sin 2\theta\cos\theta$

(3) $\cos^2\theta-\tan\theta$

(4) $\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

(5) $\cos 2\theta\cos\theta-\sin^2\theta\sin\theta$

108-5

下列何者最大？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n-1}}$

(2) $8\sin 60^\circ$

(3) $(2020+31460)$ 除以 7 的餘數

(4) $10\cos 45^\circ$

(5) $\log_2 115$

108-7

下列何者爲 3？

(1) $\log_5 625$

(2) 1211×7725 除以 11 的餘數

(3) $\sqrt{2}\sin\theta + \cos\theta$ 的最大值

(4) 過 $(0,0)$、$(0,1)$、$(1,0)$ 的圓面積

(5) $P(3,4)$ 到圓 $C: x^2 + y^2 = 2$ 的最近距離

108-10

令 $f(\theta) = \begin{cases} 1, & \sin\theta > 0 \\ 0, & \sin\theta = 0 \\ -1, & \sin\theta < 0 \end{cases}$，下列何者敘述正確？

(1) 存在 x 使得 $(f(x), f(2x), f(3x), f(4x)) = (1, 1, -1, -1)$

(2) 存在 x 使得 $(f(x), f(2x), f(3x), f(4x)) = (1, 1, -1, 0)$

(3) 存在 x 使得 $(f(x), f(2x), f(3x), f(4x)) = (1, -1, 1, 0)$

(4) 存在 x 使得 $(f(x), f(2x), f(3x), f(4x)) = (-1, -1, 1, 0)$

(5) 存在 x 使得 $(f(x), f(2x), f(3x), f(4x)) = (1, -1, 1, -1)$

109-8

設 $S_N(x)=\sum_{k=1}^{N}\cos(kx)=\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\cdots+\cos(Nx)$，若 $S_{100}\left(\frac{4\pi}{199}\right)=\cos(A\pi)-\frac{1}{2}$，求 A 的值爲多少？

111-8

已知 t 爲 0 和 π 之間的任意實數，另設 $P\left(2\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right),\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right)$，求 P 跟原點距離的最大值爲 M，最小值爲 m，求 (M,m) 爲多少？

113-14

$x^2-2(\sin a\sin b)x+1=0$ 有實數解，求 $\sin^2 a+\cos^2 b$。

Chapter 4

二次曲線

4.1 離心率

定義：

$$e = \frac{\overline{PF}}{d(P, L)}$$

其中 L 爲準線、F 爲 (其中一個) 焦點、P 爲曲線上的所有點、e 爲離心率。

$e = 0$：圓

$0 < e < 1$：橢圓

$e = 1$：拋物線

$e > 1$：拋物線

4.2 二次曲線的極式

考慮焦點在原點的情況。

1. 準線爲 $x = d$，$d > 0$。

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

2. 準線爲 $x = d$，$d < 0$。

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

3. 準線爲 $y = d$，$d > 0$。

$$r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta}$$

4. 準線爲 $y = d$，$d < 0$。

$$r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta}$$

若是雙曲線取的是離焦點近的分支，要取另一個分支把式中的 $+$ 換成 $-$ 或 $-$ 換成 $+$。

$<$ 推導 $>$

4.2.1

一拋物線焦點在原點，準線爲 $y=-6$，求其極方程式。

4.2.2

一圓錐曲線的方程式爲 $r=\frac{10}{3-2\cos\theta}$，求其離心率、焦點、準線，判斷是何種曲線？並作其圖。

4.2.3

(a) 描繪曲線 $r=\frac{12}{2+4\sin\theta^\circ}$。

4.2.4

(a) 地球繞太陽運行的離心率爲 0.017，主軸長爲 2.99×10^8 公里，求軌道的極方程式。

(b) 求近日距離及遠日距離。

4.3 二次曲線歷屆試題

109-16

座標平面上有兩個完全不相交的甲、乙橢圓，其長軸長皆爲 20、短軸長皆爲 10，且甲、乙兩橢圓的中心相距 30，在甲橢圓的長軸上有一直線 L 與此長軸夾 45°，而且將甲橢圓以此直線 L 鏡射就可以得到乙橢圓，甲橢圓上動點 A，乙橢圓上動點 B，求 $\overline{AB}$ 之最小值爲多少？