Revisión del artículo

“Noether’s Theorems and Energy in General Relativity”

(De Haro, 2021)

arXiv: 2103.17160

Monthly Seminar, 19 de Mayo, 2021

1. Objetivos

- Introducción pedagógica a los teoremas de Noether y su relación con el debate entre Hilbert, Klein, Einstein y Noether sobre la conservación de la energía en la RG.
  - El problema de la conservación de la energía jugó un papel crucial tanto en (i) la génesis de la RG como en (ii) las razones de Noether para demostrar sus teoremas.
- Presentación, desde un punto de vista filosófico, de dos propuestas para la energía (momentum) gravitacional: (i) el pseudo-tensor de Einstein y las expresiones cuasi-locales derivadas de él: Chang et al. (1999), Nester (2004) y Chen et al. (2017, 2018, 2018a), y (ii) el tensor de energía cuasi-local de Brown-York (1993).
  - Defiende ambas propuestas argumentando que la energía (momentum) en la RG se encuentra bien definida, pero afirma que la propuesta de Brown-York (1993) es superior a la propuesta pseudo-tensorial.
- Evalúa y defiende diferentes propuestas a la luz de una discusión filosófica respecto a la conservación de la energía en la RG: Hoefer (2000); Pitts (2010); Lam (2011); Duerr (2019); Read (2020).
  - Se centra principalmente en la supuesta no-unicidad del pesudo-tensor y en las expresiones cuasi-locales de energía (momentum).

2. *La propuesta de Einstein y cinco problemas para la energía y momentum en la RG (Sección 1.3)*

Problemas que se presentan respecto de la energía y momento (localmente definida) del campo gravitacional en RG

(i) Las leyes de conservación en RG son identidades (Hilbert-Klein-Noether) sin contenido físico.
(ii) La carencia de un tensor de energía-momento del campo gravitacional análogo al tensor de energía-momento de la materia.
(iii) A falta de vectores de Killing tipo tiempo, no es posible definir leyes de conservación en su expresión integral en un espacio-tiempo arbitrario.
(iv) El pseudo-tensor energía-momento no es único.
(v) Covariancia y propiedades geométricas adecuadas para el pseudo-tensor.

De Haro se manifiesta:

– en contra de (1)

– (2) puede ser abordado a partir de dos caminos:
i) pseudo-tensor gravitacional
ii) cantidades cuasi-locales >>> dos propuestas
a) Bron- York
b) Chang et al... (modified BY + Hamiltonian formalism)

– efectivamente, si no es posible definir timelike Killing vectors (3) no será posible definir expresiones locales, sin embargo, se puede garantizar la existencia de vectores de Killing conformes en regiones asintóticas.

3. Energía – momentum gravitacional, revisitada (Sección 5)

En esta sección, el autor revisa dos discusiones recientes respecto a los pseudo-tensores. Una desde la física (5.1) y otra desde la filosofía (5.2)

3.1. Los superpotenciales son términos de frontera en el Hamiltoniano de la RG (Sección 5.1)

Chang, Chen, Nester y colaboradores (1999, 2017, 2018, 2018a) defienden el enfoque pseudo-tensorial. Su defensa puede ser vista como un argumento que permite resolver el problema de la no-unicidad. En particular, argumentan que:

(a) Los pseudo-tensores proveen una descripción de la conservación de la energía-momemtum. El superpotencial se puede identificar con una divergencia total en el Hamiltoniano de la RG, por lo que diferentes elecciones del superpotencial corresponden a diferentes condiciones de frontera (términos de superficie). Por lo tanto, la elección de los términos de frontera determina el superpotencial de forma unívoca, a través del teorema de Noether. (Más técnicamente: el pseudo-tensor, incluido su superpotencial, se encuentra fijado, a través del teorema de Noether, por los términos de frontera en la acción).

(b) Para las elecciones adecuadas de las condiciones de contorno, los pseudo-tensores dan los valores esperados de la energía-momentum total medidos en el infinito (fórmulas ADM y Bondi).

(c) Los pseudo-tensores tienen valores bien definidos en cada sistema de coordenadas.

3.2. Discusiones filosóficas recientes sobre la conservación de la energía en la RG y pseudo-tensores (Sección 5.2)

La discusión filosófica en torno a la conservación de la energía en RG gira en torno a dos problemas: la falta de covariancia y la falta de propiedades de transformación adecuadas (dependencia de coordenadas), y el problema de la no integrabilidad (background independence). Algunas de las expresiones de conservación más importantes son las siguientes:

$$\partial_\nu (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0 \qquad (1)$$

$$\int_{S=\partial V} t^{\mu\nu} K_\mu n_\nu \, dS = -\int_{S=\partial V} T^{\mu\nu} K_\mu n_\nu \, dS = 0 \qquad (2)$$

(A) Falta de covariancia y falta de propiedades de transformación (como tensor)

- Las expresiones de conservación locales no son tensoriales, pues los pseudo-tensores dependen de las coordenadas. Por lo tanto, estas no tienen buenas definiciones locales (o globales) de conservación.
- Por ejemplo, Hoefer (2000, p. 194-195): las expresiones de conservación en la RG dependen de las coordenadas, por lo tanto no se encuentran bien definidas.
- Dos comentarios del autor: (i) es más importante la invariancia bajo difeomorfismo que la covariancia. Y los diferentes tipos de difeomorfismos requieren de tratamientos diferentes; (ii) aunque la dependencia de coordenadas puede ser inconveniente (física y técnicamente), la principal preocupación es la ausencia de propiedades de transformación apropiadas del pseudo-tensor.

(B) El problema de la no-integrabilidad: background-dependence

- La conservación de la energía (momentum) requiere la introducción de "estructuras de fondo", como una métrica plana o los vectores de Killing del espacio-tiempo. Sin estas estructuras, las leyes integrales de conservación no expresan leyes de conservación genuinas.

- Si bien Hoefer (2000) y Lam (2011) admiten que expresiones como (2) dan resultados inequívocos, terminan rechazándolas por introducir estructuras de fondo no deseadas.
- En particular, Hoefer (2000, p. 194) crítica la expresión (2) debido a que ésta asume que el espacio-tiempo es asintóticamente plano. Este hecho, de acuerdo a Hoefer, va en contra de la tendencia actual en la física de privilegiar a las cantidades independiente de coordenadas como lo importante.
- Por lo tanto, de acuerdo a De Haro, para Hoefer (A) y (B) son parte de un mismo problema: la dependencia de coordenadas.
- Por otro lado, Lam (2011) es más tolerante con la dependencia de coordenadas: no ve ninguna contradicción en ellas. Pero le preocupa el problema de la no-unicidad y la introducción de los vectores de Killing (los cuales serían un "fondo no-dinámico" no deseado).
- Read (2020) ha respondido, parcialmente a (A) y (B), argumentando que el campo gravitacional posee genuina energía (i) en un sentido débil aplicable en una cierta clase de modelos de la teoría (aquellos con vectores de Killing) y (ii) en un sentido fuerte aplicable en todos los modelos. En particular:
    - En respuesta a (B). Los vectores de Killing no deben verse como una estructura de fondo adicional, sino como una propiedad de la métrica. Los modelos con un vector de Killing son un subconjunto de los modelos dinámicamente posibles de la RG, no son estructuras adicionales.
    - En respuesta a (A). La defensa de Read descansa sobre un funcionalismo y sobre un realismo sobre el pseudo-tensor $t^{\mu\nu}$. La energía puede ser dependiente de coordenadas, pero aun así encontrarse bien definida. Además, $t^{\mu\nu}$ cumple un rol funcional al equilibrar el balance de energía de un sistema (como en la MC).

- De Haro considera que, si bien está de acuerdo con estos argumentos, éstos no darían una respuesta satisfactoria a (A).

4. *¿Qué más se requiere para que aceptemos los pseudo-tensores? (Sección 6.1)*

En contra de (4). La falta de unicidad del pseudo-tensor al estar permitido adicionar un término arbitrario (superpotencial). Es posible determinarla de manera directa en términos de la variación de la acción. Básicamente se corresponde con agregar términos de superficie a la acción sin que por ello se modifiquen las ecuaciones de movimiento

$$\partial_\mu(\sqrt{g}\,T^\mu{}_\nu + t^\mu{}_\nu) = 0\ .$$

$$\sqrt{g}\,T^\mu{}_\nu + t^\mu{}_\nu = \partial_\lambda \mathcal{U}^{\mu\lambda}{}_\nu\ , \qquad \partial_\mu\,\partial_\lambda \mathcal{U}^{\mu\lambda}{}_\nu = 0\ .$$

Dada la acción S:

$$S[\phi;x] = \int \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}(\phi;x)$$

$$\sum_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\right)\eta_{ak} \;=\; \partial_\mu J^\mu_k\ .$$

$$J^\mu_k = -\sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\,\phi_a)}\,\frac{\partial \delta\phi_a}{\partial \xi^k} - \mathcal{L}\,\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial \xi^k} + \frac{\partial \Lambda^\mu}{\partial \xi^k}\ .$$

Sea el Lagrangiano de Einstein

$$\begin{aligned} 2\kappa\,\mathcal{L}_{\mathrm{E}}(g_{\mu\nu},\partial_\lambda g_{\mu\nu}) &:= \sqrt{g}\,g^{\mu\nu}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}) \\ &= \sqrt{g}\,R - \partial_\mu(\sqrt{g}\,(g^{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}))\ , \end{aligned}$$

Siguiendo a Chang, Chen, Nester...

La energía-momento sobre una superficie Sigma (quasi-local energy-mometum), asociada al pseudo-tensor y su superpotencial corresponde al Hamiltoniano H cuyo término de borde está dado por determinada expresión (y viceversa).

$$\partial_\mu(\sqrt{g}\,G^\mu{}_\nu) = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,G^{\alpha\beta}\,\partial_\nu g_{\alpha\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\mu G^\mu{}_\nu = 0\ ,$$

$$t^\mu{}_\nu = -\frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{E}}{\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta})}\,\partial_\nu\, g_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_\mathrm{E}\,\delta^\mu_\nu - \frac{\partial\Lambda^\mu}{\partial\xi^\nu}\ .$$

* * *
Esto se desprende del teorema de Gauss (teorema de la divergencia), a partir del cual la creación o destrucción de una dada cantidad solo puede ser modificada a partir del flujo de esa cantidad que entra o sale de la superficie de esa región.

$$\int_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\,d\,V = \int_{\partial V}\mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{a}.$$

$$\int_S \nabla\cdot\mathbf{F}\,d\,A = \int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,d\,s.$$

Referencias

Brown, J. D. and York, Jr., J. W. (1993). ‘Quasilocal Energy and Conserved Charges Derived from the Gravitational Action’. Physical Review D, 47, pp. 1407-1419.

Chang, C. -C., Nester, J. M., and Chen, C.-M (1999). ‘Pseudotensors and Quasilocal Energy- Momentum’. Physical Review Letters, 83.10: 1897.

Chen, C.-M., Nester, J. M., Tung, R.-S. (2017). ‘Gravitational Energy for GR and Poincaŕe

Gauge Theories: a Covariant Hamiltonian Approach'. In: Ni, W.-T. (Ed.), One Hundred Years of General Relativity. From Genesis and Empirical Foundations to Gravitational Waves, Cos- mology and Quantum Gravity, Volume 1, pp. 187-261.

Chen, C.-M., Liu, J.-L, Nester, J. M. (2018). 'Gravitational Energy is Well-Defined'. Interna- tional Journal of Modern Physics D, 27 (14), 1847017. arXiv: 1805.07692. (Page numbers refer to the arXiv version).

Chen, C.-M., Liu, J.-L., Nester, J. M. (2018a). 'Quasi-Local Energy from a Minkowski Reference'. General Relativity and Gravitation, 50, 158, pp. 1-14.

Duerr, P. M. (2019). 'Fantastic Beasts and Where (Not) to Find them: Energy Conservation and Local Gravitational Energy in General Relativity'. Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 65, pp. 1-14.

Hoefer, C. (2000). 'Energy Conservation in GTR'. Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 31 (2), pp. 187-199.

Duerr, P. M. (2019a). 'Against 'functional gravitational energy': a critical note on functionalism, selective realism, and geometric objects and gravitational energy'. Synthese.

Lam, V. (2011). 'Gravitational and Nongravitational Energy: The Need for Background Struc- tures'. Philosophy of Science, 78, pp. 1012-1023.

Pitts, J. B. (2010). 'Gauge-Invariant Localization of infinitely many Gravitational Energies from All Possible Auxiliary Structures'. General Relativity and Gravitation, 42, pp. 601-622.

Read, J. (2016a). Background Independence in Classical and Quantum Gravity [Master's thesis]. University of Oxford. https://ora.ox.ac.uk/objects/uuid:b22844af-aac9-4adc-a6c5-1e2815c59655

Read, J. (2020). 'Functional Gravitational Energy'. The British Journal for the Philosophy of Science, 71, pp. 205-232.