Universidade Federal de Ouro Preto

Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas

Departamento de Engenharia Elétrica

Processamento Digital de Sinais

Convolução

Ana Luiza Morais Oliveira
Carine Madeira Soares
Vitória Cordeiro Ventura

Professor - Frabricio Javier Erazo Costa

João Monlevade
10 de setembro de 2019

Sumário

1 Introdução

Os sinais podem ser representados tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Por definição, no domínio do tempo o valor da função é conhecido em cada instante no caso de tempo contínuo, ou em instantes separados no caso discreto.

A análise de sinais no domínio temporal apresenta uma grande desvantagem, pois o mesmo omite informações relevantes como ruídos e distorções harmônicas. A conversão de um sinal no domínio do tempo para a frequência pode ser feito através da Transformada de Fourier, que decompõe o sinal em uma soma infinita de componentes senoidais, produzindo um espectro de frequência.

Os sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) tem aplicações significativas em processamento de sinais, no qual suas características fundamentais são linearidade, obedecem o princípio de superposição, e são invariantes no tempo, para qualquer deslocamento na entrada apresentam o mesmo deslocamento na saída. O sinal de saída de um sistema linear invariante no tempo e o resultado do somatório, no intervalo de todos os números inteiros, da multiplicação de entrada $x[n]$ com a resposta ao impulso $h[n]$ é denominada convolução. A expressão matemática é apresentada abaixo:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{1}$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \tag{2}$$

Um sistema de atraso ideal é definido algebricamente por:

$$y[n] = x[n-n_d] \tag{3}$$

$$h[n] = \delta[n-n_d] \tag{4}$$

Este sistema desloca a sequência de entrada para a direita de n_d amostras para formar a saída.

Um sistema média móvel é definido algebricamente por:

$$y[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] \tag{5}$$

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{6}$$

Sua função é calcular a n-ésima amostra da sequência de saída como a média de (M_1+M_2+1) amostras da sequência de entrada em torno da n-ésima amostra.

Um sistema acumulador é definido por:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{7}$$

$$h[n] = u[n] \tag{8}$$

A saída no instante n é o acumulo ou a soma da amostra presente e todas as amostras anteriores. Como dito anteriormente a representação dos sinais pode ser feita na frequência ou no tempo. Conseguimos relacionar as duas representações pela equação abaixo:

$$x[n] * h[n] \leftrightarrow X(e^{jw})H(e^{jw}) \tag{9}$$

A convolução de dois sinais no tempo é equivalente ao produto dos dois na frequência e o produto de dois sinais na frequência é a convolução dos mesmos no tempo.

2 Objetivo

Esse roteiro tem como objetivo implementar uma função que compute a soma da convolução entre duas sequências. Usaremos a metodologia de comparação entre a função pré estabelecida **'conv'** do MATLAB com o código implementado a equação algébrica da convolução. O modo de comparação utilizado será o erro quadrático médio, análise temporal e análise na frequência. A entrada será composta por duas sequências e dois vetores com instantes referentes às sequências. A saída terá o resultado da convolução e as instâncias de tempo equivalentes ao vetor de convolção. Implementaremos os conceitos lecionados nas aulas teóricas da disciplina de Processamento Digital de Sinais.

3 Pseudocódigo

```
ALGORITMO: FCONV\\
ENTRADAS: x[n],Tx,h[n],Th\\
SAIDAS: Y,NVC\\
\\
INICIO\\
//Invers o da Sequ ncia h:\\
cadeia hINV;\\
inteiro CONT 1;\\
inteiro i;\\
PARA i DE (length(h)) AT  1\\
hINV(CONT) h(i);\\
CONT CONT + 1;\\
FIM PARA\\
\\
//Tamanho do Vetor Convolu  o e Inst ncias de Tempo:\\
inteiro TVC (length(x) + length(h)) - 1;\\
inteiro PRIM Tx(1);\\
PARA i DE 1 AT  TVC\\
NVC(i) PRIM;\\
PRIM PRIM+1;\\
FIM PARA\\
\\
//Preenchimento com Zeros:\\
inteiro ADD NVC(length(NVC))     Tx(length(Tx));\\
cadeia xAUx x;\\
cadeia hAUx hINV;\\
```

```
PARA i DE 1 A T ADD\\
xAUX [0 xAUx 0];\\
FIM PARA\\
inteiro PREENChE length(xAUx) length(hAUx);\\
PARA i DE ADD A T length(xAUx)\\
hAUX [hAUx 0];\\
FIM PARA\\
hAUx(length(hAUX)) NULL;\\
hAUx(length(hAUX)) NULL;\\
\\
// Deslocamento e Multiplica es\\
real SOMA 0;\\
cadeia Y;\\
PARA i DE 1 A T TVC\\
PARA j DE ADD A T length(hAUx)\\
SOMA SOMA + hAUx(j)*xAUx(j);\\
FIM PARA\\
Y(i) SOMA;\\
SOMA 0;\\
hAUx [0 hAUx];\\
hAUx(length(hAUx)) NULL;\\
FIM PARA\\

FIM\\
```

4 Resultados e Discussões

A função **FCONV** foi desenvolvida como próposito de aplicar a convolução entre dois sinais. Seus parâmetros de entrada consistem em dois sinais aleatórios e dois vetores com as instâncias de tempo de cada sinal. Os parâmetros de saída, como já informados, são o sinal convoluído no tempo e as instâncias de tempo do vetor convolução. Afim de comprovar a eficácia da função desenvolvida foi realizado um teste de comparação mostrado a seguir:

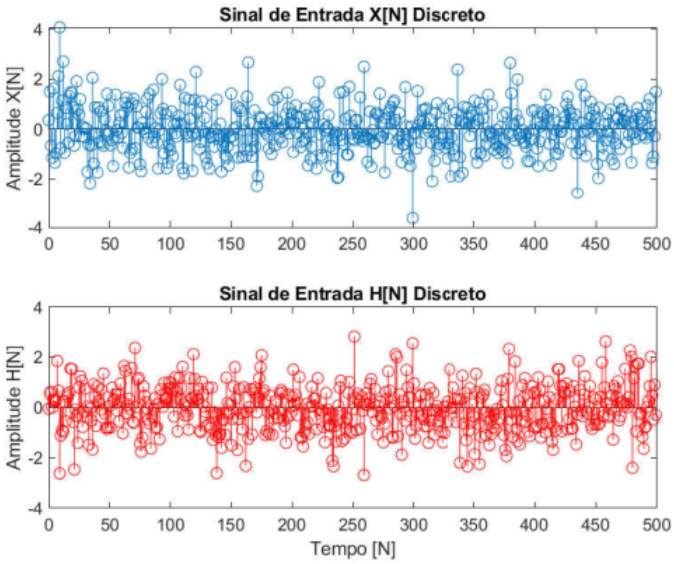

Figura 1: Sinais de entrada

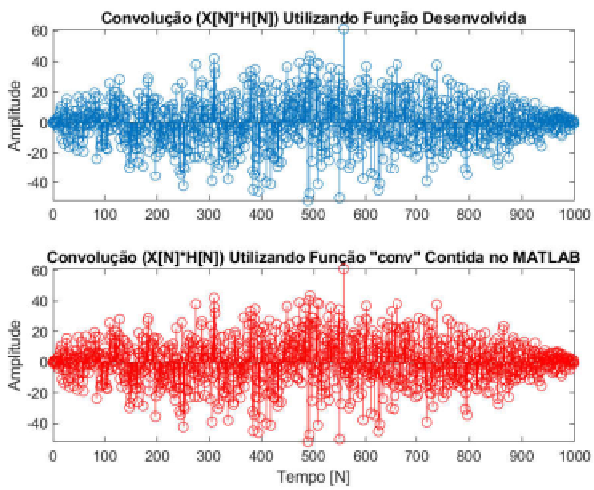

Figura 2: Convolução dos sinais

Ao analisar a figura 2 fica comprovado a eficiência e aplicabilidade da função **FCONV** desenvolvida pelo grupo, além do resultado do erro quadrático ser zero ao comparar as duas convoluções (função pronta e função implementada). Comprovando a eficiência de ambas as funções. O resultado da operação de convolução desenvolvida se assemelha tanto em amplitude quanto no tempo ao se comparar com a função **conv** proveniente do MATLAB.

4.1 Análise no Domínio da Frequência

A convolução discreta no domínio do tempo pode ser feita com base no deslocamento dos impulsos como visto em (2).
O teorema da convolução estabelece que, sob condições apropriadas, a transformada de Fourier de uma convolução de duas funções é igual ao produto ponto a ponto das transformadas de Fourier de cada função. Em outras palavras, convolução no domínio do tempo equivale a multiplicação ponto a ponto na frequência (observar a equação 9). Para comprovação de (9) foram utilizados dois sinais aleatórios $x[n]$ e $h[n]$ com 500 amostras cada ($x[n] = 0, h[n] = 0$ para $n < 0$). Afim de evitar um efeito de sobreposição do espectro (aliasing) utiliza-se um filtro digital passa-baixa Butterworth de ordem 4. A frequência de amostragem do filtro é definida como $fs = 1000Hz$. A frequência de corte pode ser escolhida de acordo com o critério de Nyquist (OPPENHEIM, 1999):

$$f_a \geq 2f_c \tag{10}$$

Onde a frequência de amostragem f_a deve ser pelo menos duas vezes maior que a maior frequência do sinal (frequência de corte f_c). Desta forma qualquer frequência de corte até 499Hz poderia ser adotada para realização da amostragem do sinal. A frequência de corte adotada foi de 450Hz.

$$1000Hz \geq 2f_c \leftrightarrow f_c \leq 499Hz \tag{11}$$

Após a convolução dos sinais no domínio do tempo é utilizada a Transformada de Fourier para análise no domínio da frequência e comprovação do Teorema da Convolução. Ao aplicar a Transformada de Fourier tanto na sequências de entrada e na convolução temos o seguinte resultado:

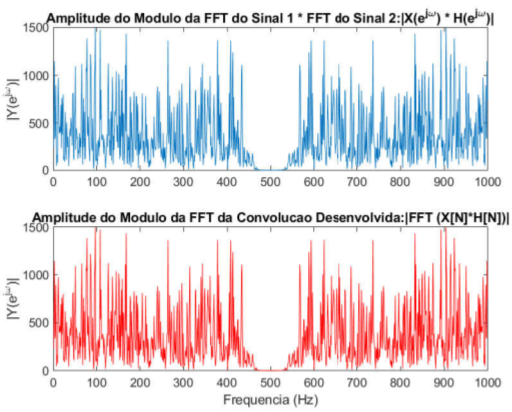

Figura 3: Comparação em amplitude entre a FFT do sinal convoluído x Multiplicação das FFT's dos sinais de etrada

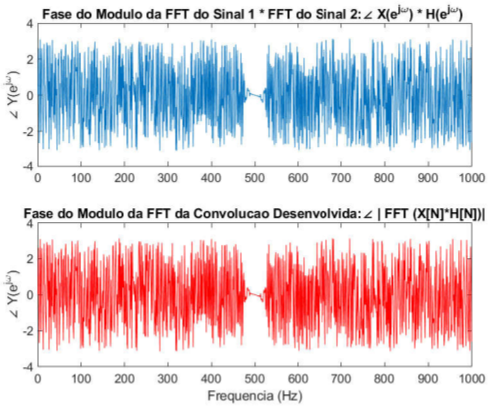

Figura 4: Comparação em fase entre a FFT do sinal convoluído x Multiplicação das FFT's dos sinais de etrada

Comparando os sinais concluiu-se que o resultado também foi satisfatório onde tivemos o erro quadrático de $1.1654e^{-31}$, considerado irrelevante. Ao efetuar a Transforma de Fourier computacionalmente através do MATLAB verificou-se a necessidade da adição de zeros nos sinais (zero padding). O mecanismo de completar com zeros é utilizado para igualar o período dos sinais da Transformada de Fourier (fft) com o sinal convoluído já que os mesmos não possuem o mesmo tamanho. O valor zero é escolhido justamente por não influenciar na amplitude da Transformada assim obtendo uma estimativa precisa da amplitude do sinal (MATHWORKS, 2017).

5 Conclusão

O estudo da convolução quanto da Transformada de Fourierhttps://www.overleaf.com/project/5d72 são de extrema importância no âmbito da Engenharia Elétrica. Ao realizar o trabalho ficaram evidenciadas tanto as propriedades da convolução quanto sua relação dualística entre tempo e frequência.O algoritmo desenvolvido **FCONV** desempenha um papel importante na assimilação de conceitos,pois através dele se faz melhor o entendimento de como é realizada a convolução discreta dos sinais.
O Teorema da Convolução pôde ser demonstrado via simulação e os resultados obtidos se mostram satisfatórios tanto em amplitude quanto em fase levando a concluir que a convolução entre dois sinais no tempo implica explicitamente na multiplicação destes sinais em frequência.

6 Anexos

```
clc
clear all
clear vars
%Funcao MAIN do PROGRAMA

%Crie duas sequencias com frequencia de amostragem fs = 1000Hz e com 500
%amostras (x[n] = 0, h[n] = 0 para n < 0) e comprove computacionalmente a
%relacao entre convolucao no tempo e multiplicacao na frequencia.Utilize a
%funcao fft. Lembre que a resolucao espectral deltaf = fs/N.
%Criacao das Sequencias Aleatorias:
x = randn(1,500);
Tx = [0:1:499];
h = randn(1,500);
Th = [0:1:499];
%Para evitar aliasing (sobreposicao dos sinais) e utilizado um filtro
%digital. Para este trabalho foi utilizado um filtro digital passa-baixa
%Butterworth ordem 4 com frequencia de corte fc e frequencia de amostragem
%fs.
%Pelo criterio de Nyquist tem-se:
%Fs >= 2*fc ; ou seja, a Frequencia de amostragem deve obrigatoriamente ser
%maior que 2 vezes a maior frequencia deste sinal (frequencia de corte fc).
%Como Fs = 1000Hz a frequencia de corte Fc fica determinada como no maximo
%499Hz.
Fs = 1000;
Fc = 450;
%Filtragem do Sinal:
[b,a] = butter(4,Fc/(Fs/2));
x = filter(b,a,x);
h = filter(b,a,h);
%Chamada da Funcao FCONV e comparacao desta funcao com a funcao conv contida na bilioteca↙
do
%MATLAB.
[Y,NVC] = FCONV(x,Tx,h,Th);
%Completando o Sinal 1 e Sinal 2 com zeros para que este tenha o mesmo tamanho da
%convolucao e assim seja possível realizar a comparação entre os dois
%sinais.
Completa1 = zeros(1,length(x)-1); %Adicao de 499
zeros
Completa2 = zeros(1,length(h)-1); %Adicao de 499
zeros
%Transformada de Fourier do Sinal 1:
fftx = fft([x Completa1]);
%Transformada de Fourier do Sinal 2:
ffth = fft([h Completa2]);
%Multiplicacao na frequencia entre os sinais 1 e 2:
%Modulo:
fftyMFREQ = abs(fftx.*ffth);
%Fase:
fftyPFREQ = angle(fftx.*ffth);
%Transformada de Fourier do Sinal Convoluído
%Modulo:
```

```
ffty2MFREQ = abs(fft(Y));
%Fase
ffty2PFREQ = angle(fft(Y));
%Comparacao em Magnitude:
figure(3)
subplot(2,1,1)
plot(fftyMFREQ)
title('Amplitude do Modulo da FFT do Sinal 1 * FFT do Sinal 2:|X(e^{j\omega}) * H(e^
{j\omega})|');
ylabel('|Y(e^{j\omega})|');
subplot(2,1,2)

plot(ffty2MFREQ,'r')
title('Amplitude do Modulo da FFT da Convolucao Desenvolvida:|FFT (X[N]*H[N])|');
ylabel('|Y(e^{j\omega})|');
xlabel('Frequencia (Hz)')

%Comparacao em Fase:
figure(4)
subplot(2,1,1)
plot(fftyPFREQ)
title('Fase do Modulo da FFT do Sinal 1 * FFT do Sinal 2:\angle X(e^{j\omega}) * H(e^
{j\omega}) ');
ylabel('\angle Y(e^{j\omega})');
subplot(2,1,2)
plot(ffty2PFREQ,'r')
title('Fase do Modulo da FFT da Convolucao Desenvolvida:\angle | FFT (X[N]*H[N])|');
ylabel('\angle Y(e^{j\omega})');
xlabel('Frequencia (Hz)');
```

```
%Função utilizada para realizar a convolução entre dois sinais randômicos e
%comparação com a função conv contida na biblioteca do MATLAB.
function [Y,NVC] = FCONV(x,Tx,h,Th)
%Função conv contida na biblioteca do MATLAB.
CONV = conv(x,h);
%Inversão da Sequência h;
CONT = 1;
hINV = [];
for i=length(h):-1:1
hINV(CONT) = h(i);
CONT = CONT+1;
end

%Tamanho do Vetor Convolução e Vetor Convolução;
TVC = (length(x) + length(h)) - 1;
PRIM = Tx(1);
for i=1:TVC
NVC(i) = PRIM;
PRIM = PRIM+1;
end

%Preenchimento com Zeros para ficarem no mesmo tamanho;
ADD = NVC(length(NVC)) - Tx(length(Tx));
xAUx = x;
hAUx = hINV;
for i=1:1:ADD

xAUx = [0 xAUx 0];
end
PREENChE = length(xAUx) - length(hAUx);
for i=ADD:1:length(xAUx)
hAUx = [hAUx 0];
end
hAUx(length(hAUx)) = [];
hAUx(length(hAUx)) = [];
%Deslocamento e Multiplicações;
SOMA = 0;
Y = [];
for i=1:1:TVC
for j=ADD:1:length(hAUx)
SOMA = SOMA + hAUx(j)*xAUx(j); %Realiza as Multiplicações;
end
Y(i) = SOMA; %Aloca no Vetor Convolução;
SOMA = 0;
%Deslocamento do Vetor h;
hAUx = [0 hAUx];
hAUx(length(hAUx)) = [];
end

%Comparação entre a Função conv contida no MATLAB e a resposta da função
%desenvolvida.
```

```
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(Tx,x)
title('Sinal de Entrada X[N] Discreto');
ylabel('Amplitude X[N]');
subplot(2,1,2)
plot(Th,h,'r')
title('Sinal de Entrada H[N] Discreto');
xlabel('Tempo [N]');
ylabel('Amplitude H[N]');
figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(NVC,Y)
title('Convolução (X[N]*H[N]) Utilizando Função Desenvolvida');
ylabel('Amplitude');
subplot(2,1,2)
plot(NVC,CONV,'r')

title('Convolução (X[N]*H[N]) Utilizando Função "conv" Contida no MATLAB');
xlabel('Tempo [N]');
ylabel('Amplitude');

end
```

7 Referências

MATHWORKS, M. https://www.mathworks.com/help/signal/ug/amplitude-estimation-and-zero-padding.html, 2019.9

OPPENHEIM, A. V. Discrete-time signal processing. [S.l.]: Pearson Education India, 1999.