Question individualisée n°36 : Les matrices

Calcul de la matrice des cofacteurs d'une matrice carrée

L'objectif sera pour vous de permettre aux utilisateurs de votre librairie de pouvoir calculer, pour une matrice carrée donnée, sa matrice des cofacteurs.

Nous allons voir comment calculer, simplement, la matrice des cofacteurs d'une matrice. Supposons l'existence d'une matrice carrée à *n* lignes et *n* colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Comment est définie la matrice des cofacteurs?

La matrice des cofacteurs pour *M* est notée *C* et elle est définie de la façon suivante :

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

avec $c_{i,j}=(-1)^{i+j}det(M_{i,j})$, *det()* le déterminant de la matrice passée en paramètre et $M_{i,j}$ une sous-matrice de M construite en retirant la ligne *i* et la colonne *j*, i.e.

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Comment calculer le déterminant d'une matrice carrée N ?

C'est simple !

Il est possible d'utiliser la méthode de Laplace. Elle fonctionne de la façon suivante :

1. Sélectionner une ligne *i* de la matrice N : le calcul du déterminant va se faire en suivant cette ligne,
2. Calculer $det(N)=\sum_{j=1}^{n} n_{i,j}(-1)^{i+j}\det(N_{i,j})$ avec $N_{i,j}$ la sous-matrice obtenue à partir de *N* en lui retirant la ligne *i* et la colonne *j*. Dans l'énoncé de la formule, $n_{i,j}$ représente l'élément en ligne *i* et colonne *j* de la matrice *N*.

La méthode de Laplace est donc <u>une méthode récursive</u>.

Scanned by CamScanner