DTU Danmarks Tekniske Universitet

**Skriftlig prøve, den 28. maj, 2013. Side 1 af 9 sider**
**Kursus navn:** Introduktion til Operationsanalyse
**Kursus nummer:** 42101
**Tilladte Hjælpemidler:** Alle skriftlige hjælpemidler. Computer, mobiltelefon, egen lommeregner må ikke anvendes, men der udleveres en TI-30 lommeregner. Besvarelsen kan udarbejdes med blyant eller kuglepen og afleveres på eksamenspapir med tydelig angivelse af studienummer.
**Varighed:** 4 timer
**Vægtning**: Opgavesættet består af 18 opgaver. Opgaverne **5**, **7**, og **15** er tekstopgaver, som besvares i fuld ordlyd. Øvrige opgaver er multiple-choice opgaver, som har netop et korrekt svar. For at besvare en sådan opgave skal man, uden yderligere forklaring, skrive opgavens nummer samt den korrekte svarmulighed. F.eks. kan opgave 2 besvares med "2D". Hvert korrekt svar til en multiple-choice opgave giver 5 point. Man får ikke strafpoint for forkerte svar til en multiple-choice opgave. Korrekte svar til en tekstopgave giver 8 point (opgave 7 og 15) eller 9 point (opgave 5). Man kan samlet opnå 100 point.

---

## LP og følsomhedsanalyse

Firmaet wemakethings har investeret i en ny maskine som kan lave tre produkter A, B og C. Maskinen kan arbejde op til 24 timer i døgnet og er afhængig af en enkelt råvare. Det er højst muligt at få tilført 15 enheder af denne råvare om dagen. Din kollega har opstillet følgende lineære problem for at maksimere profitten forbundet med produktion på maskinen:

$$\max 6x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 15 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 24 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vi vil kalde den model M1 i det følgende. Din kollega har løst problemet ved at tilføje slack variable $x_4$ og $x_5$ svarende til første og anden begrænsning og har dernæst anvendt simplex metoden. Første simplex tableau ser således ud:

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | -6 | -5 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 15 |
| $x_5$ | 0 | 5 | 4 | 2 | 0 | 1 | 24 |

**Opgave 1:** Fra simplex tableauet ovenfor kan vi se at vi skal udføre en simplex iteration. Hvilken variabel skal gå ind i basis (incoming variable) og hvilken variabel skal forlade basis (leaving variable)?

1A) ny basis variabel: $x_1$
forlader basis: $x_4$

1B) ny basis variabel: $x_1$
forlader basis: $x_2$

1C) ny basis variabel: $x_1$
forlader basis: $x_5$

1D) ny basis variabel: $x_4$
forlader basis: $x_1$

1E) ny basis variabel: $x_4$
forlader basis: $x_5$

1F) ny basis variabel: $x_4$
forlader basis: $x_2$

■

Din kollega har desværre en forfærdelig håndskrift så det eneste du kunne tyde af det sidste simplex tableau er:

| $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ? | ? | ? | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{6}$ | ? |
| | ? | ? | ? | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | ? |
| | ? | ? | ? | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | ? |

**Opgave 2:** Brug den fundamentale indsigt til at udfylde hele simplex tableauet. Givet informationen ovenfor, hvilket af følgende tableauer er det sidste simplex tableau?

2A)

| $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{6}$ | 29 |
| | 1 | 0 | 2 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | 4 |
| | 0 | 1 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

2B)

| $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{6}$ | 54 |
| | 1 | 0 | 2 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | 4 |
| | 0 | 1 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 5 |

2C)

| $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | -1 | 6 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{6}$ | 42 |
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | 7 |
| | 1 | 1 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |

2D)

| $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{6}$ | 33 |
| | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | 6 |
| | 1 | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 3 |

2E)

| $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{6}$ | 32 |
| | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | 2 |
| | 1 | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 4 |

2F)

| $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{6}$ | 18 |
| | 0 | 1 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{7}{2}$ |
| | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 2 |

■

**Opgave 3:** Hvor meget kan højresiden $b_1$ i første begrænsning varieres uden at ændre basis? Vælg det rigtige interval nedenfor.

3A) $14 \leq b_1 \leq 27$

3B) $5 \leq b_1 \leq 26$

3C) $13 \leq b_1 \leq 23$

3D) $20 \leq b_1 \leq 30$

3E) $1 \leq b_1 \leq 11$

3F) $6 \leq b_1 \leq 24$

■

Betragt nu følgende model (eneste forskel i forhold til M1 er at uligheden i første begrænsning er vendt og højresiden i samme begrænsning er øget til 16).

$$\max 6x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 16 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 24 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

vi kalder modellen M2.

**Opgave 4:** For at løse M2 med vores standard simplex algoritme tilføjes en surplus variabel $x_4$ og en kunstig variable $\bar{x}_5$ for den første begrænsning og en slack variabel $x_6$ for den sidste begrænsning. Hvordan ser begrænsningerne i udvidet (*augmented*) form ud?

4A)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 \quad &= 16 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad + \bar{x}_5 + x_6 &= 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6 \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

4B)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 \quad &= 16 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad + x_6 &= 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6 \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

4C)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - \bar{x}_5 \quad &= 16 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad - \bar{x}_5 + x_6 &= 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6 \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

4D)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - \bar{x}_5 \quad &= 16 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad - \bar{x}_5 - x_6 &= 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6 \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

4E)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - \bar{x}_5 \quad &= 16 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad - x_6 &= 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6 \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

4F)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 100\bar{x}_5 \quad &= 16 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad - x_6 &= 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6 \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

■

**Opgave 5 (tekstopgave):** Løs model M2 ved hjælp af to fase metoden. Forklar udregningerne undervejs. Bemærk: der er forskellige "genveje" som kan benyttes for at løse problemet og undgå to-fase metoden men der gives **kun fuld point** for opgaven hvis to-fase metoden benyttes.

■

Vi laver nu en sidste ændring i modellen så den ser således ud:

$$\max 6x_1 + 5x_2 - 6x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 16 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 24 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

og kalder denne model M3.

**Opgave 6:** Lad $y_i$ være den duale variable svarende til den $i$te begrænsning. Hvilket lineære programmeringsproblem er det duale til M3?

6A)

$$\min 16y_1 + 24y_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 &\geq 6 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 &\leq 5 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 &= -6 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \\ y_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

6B)

$$\min 6y_1 + 5y_2 - 6y_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 &\geq 6 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 &\geq 5 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 &\geq 6 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

6C)

$$\min 16y_1 + 24y_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 &\geq 6 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 &\geq 5 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 &\geq -6 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

6D)

$$\min 6y_1 + 5y_2 - 6y_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 &\geq 6 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 &\leq 5 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 &= 6 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

6E)

$$\min 16y_1 + 24y_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 &\geq 6 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 &\leq 5 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 &= -6 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

6F)

$$\min 16y_1 + 24y_2$$

subject to

$$\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 &\geq 6 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 &\geq 5 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 &= -6 \\ y_1 &\leq 0 \\ y_2 &\geq 0 \\ y_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

## Køteori

Din ven Frederik har tænkt sig at åbne en frisørsalon. Der er kun en frisør i Frederiks butik (ham selv). I hans frisørsalon kan man ikke bestille tid, men man må sætte sig og vente indtil det bliver ens tur. Desværre er der kun plads til 2 "ventestole" og en enkelt frisørstol i hans butik så der kan kun sidde to kunder i kø mens endnu en kunde bliver klippet. Hvis der allerede er fyldt op i butikken (dvs. der i alt er tre kunder i butikken) bliver nye kunder afvist. Frederik vurderer at betjeningstiden er eksponentialtfordelt med en gennemsnitlig betjeningstid på 20 minutter. Han vurderer også at kunder ankommer efter en Poisson process med en gennemsnitlig ankomstrate på $2\frac{1}{2}$ i timen.

**Opgave 7 (tekstopgave)** Hvad er det forventede antal kunder $L$ i butikken (dvs. totalt antal personer som venter eller som er ved at blive klippet) og hvad er det forventede antal kunder $L_q$ i køen? Vis alle udregninger og forklar overordnet hvordan du løser opgaven.

■

**Opgave 8** Frederik vil gerne have tid til at lære om operationsanalyse mens han passer sin frisørbutik. Når der ikke er nogen kunder i butikken har han tid til at læse og regne opgaver. Hvor stor en procentdel af tiden kan han forvente at der ikke er nogen kunder i butikken (afrund svaret til en decimal)?

8A) 32.2%
8B) 59.6%
8C) 83.3%
8D) 1.3%
8E) 45.8%
8F) 18.9%

## Spilteori

Der er en anden frisørsalon (Joakim klip-klip) i samme område som Frederiks salon. De to butikker er naturligvis i konkurrence mod hinanden. De har hver 3 forskellige strategier (Frederik har strategi $F_A, F_B$ og $F_C$, Joakim har strategi $J_A, J_B$ og $J_C$) for at vinde markedsandele fra modparten. I tabellen nedenfor er Frederiks udbytte ved de forskellige strategier vist. Det antages at spillet er et nul-sums spil. Frederik er rækkespilleren.

| | | Joakim | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $J_A$ | $J_B$ | $J_C$ |
| Frederik | $F_A$ | 0 | 4 | -2 |
| | $F_B$ | 2 | 3 | 3 |
| | $F_C$ | 1 | -5 | 4 |

**Opgave 9:** Bestem den optimale strategi for de to spillere. Hvilken strategi skal Frederik og Joakim benytte og hvad er spillets værdi?

9A) Frederik: $F_A$, Joakim: $J_A$, spillets værdi: 0
9B) Frederik: $F_A$, Joakim: $J_C$, spillets værdi: -2
9C)Frederik: $F_C$, Joakim: $J_C$, spillets værdi: 4
9D) Frederik: $F_B$, Joakim: $J_A$, spillets værdi: 2
9E) Frederik: $F_B$, Joakim: $J_C$, spillets værdi: 3
9F) Frederik: $F_B$, Joakim: $J_B$, spillets værdi: 3

■

Efter yderligere analyse er Frederik kommet frem til at den oprindelige udbytte tabel ikke var helt korrekt og han ønsker nu at bruge følgende udbyttetabel:

| | | Joakim | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $J_A$ | $J_B$ | $J_C$ |
| Frederik | $F_A$ | 0 | 4 | -2 |
| | $F_B$ | 2 | -1 | 3 |
| | $F_C$ | 1 | -5 | 2 |

Frederik indser at det nu er nødvendigt at anvende en blandet strategi.

**Opgave 10:** Lad $(x_1, x_2, x_3)$ angive Frederiks sandsynlighed for at spille strategi $(F_A, F_B, F_C)$. Hvilken blandet strategi skal Frederik benytte og hvad er spillets værdi? Brug gerne dominans og den grafiske metode.

10A) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{3}$. Spillets værdi:$\frac{2}{3}$
10B) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{3}$. Spillets værdi:$\frac{1}{3}$
10C) $x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{3}{5}, x_3 = 0$. Spillets værdi:1
10D) $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{3}$. Spillets værdi: 0
10E) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}, x_3 = \frac{4}{5}$. Spillets værdi:$-\frac{1}{3}$
10F) $x_1 = \frac{2}{7}, x_2 = \frac{5}{7}, x_3 = 0$. Spillets værdi:$\frac{1}{7}$

■

Betragt nu følgende tabel. Bemærk at tabellen er identisk med de to første rækker fra tabellen i opgave 10, bortset fra at et af tallene er udskiftet med en variabel $u$.

| | | Joakim | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $J_A$ | $J_B$ | $J_C$ |
| Frederik | $F_A$ | 0 | 4 | -2 |
| | $F_B$ | $u$ | -1 | 3 |

**Opgave 11:** Er der en værdi af $u$ så spillets værdi bliver $\frac{1}{2}$ og hvis ja, hvilken værdi skal $u$ så have?

| | |
|---|---|
| 11A) Nej, der er ingen værdi af $u$ der medfører at spillets værdi bliver $\frac{1}{2}$. | 11D) Ja, når $u$ sættes til $-2$ vil spillets værdi være $\frac{1}{2}$. |
| 11B) Ja, når $u$ sættes til $\frac{4}{7}$ vil spillets værdi være $\frac{1}{2}$. | 11E) Ja, når $u$ sættes til $\frac{2}{7}$ vil spillets værdi være $\frac{1}{2}$. |
| 11C) Ja, når $u$ sættes til $\frac{5}{7}$ vil spillets værdi være $\frac{1}{2}$. | 11F) Ja, når $u$ sættes til $-\frac{3}{7}$ vil spillets værdi være $\frac{1}{2}$. |

■

## Lagermodeller

Antag at Frederiks forbrug af shampoo er deterministisk og at han bruger præcis to flasker shampoo om dagen. Hver gang Frederik bestiller shampoo hjem koster det 242 kr i forsendelsesomkostninger uanset mængden. Han estimerer sin lageromkostning til at være 50 ører per flaske per dag. Frederik vil naturligvis aldrig tillade at han løber tør for shampoo så efterslæbsomkostninger er ikke relevante.

**Opgave 12:** Hvor tit skal Frederik bestille hårshampoo for at minimere sine lager og forsendelsomkostninger?

| | |
|---|---|
| 12A) Frederik skal bestille shampoo hver 15. dag. | 12D) Frederik skal bestille shampoo hver 10. dag. |
| 12B) Frederik skal bestille shampoo hver 24. dag. | 12E) Frederik skal bestille shampoo hver 14. dag. |
| 12C) Frederik skal bestille shampoo hver 22. dag. | 12F) Frederik skal bestille shampoo hver 25. dag. |

■

Frederik forsøger også at tjene lidt ekstra håndører ved at sælge et livstilsmagasin i sin salon. Frederik kan købe bladet for 50 kr og sælge det for 75 kr. Der udkommer et nyt magasin hver 30 dag. Når det nye magasin udkommer er det tidligere nummer forældet og han kan sælge tiloversblevne eksemplarer til en forretning der sælger brugte bøger og blade for 5 kr per styk. Frederik får en sending blade hver gang det nye magasin udkommer og der er ingen start (setup) omkostninger forbundet med ordren. Efterspørgslen på bladet er eksponetialfordelt med en forventet efterspørgsel på 45 blade i løbet af de 30 dage som magasinet er relevant.

**Opgave 13:** Bestem hvor mange blade Frederik skal have leveret hver gang et nyt magasin udkommer således at han maksimerer sit overskud på bladsalget. Afrund resultatet til nærmeste heltal.

13A) Der skal leveres 58 blade per gang.
13B) Der skal leveres 11 blade per gang.
13C) Der skal leveres 44 blade per gang.
13D) Der skal leveres 56 blade per gang.
13E) Der skal leveres 20 blade per gang.
13F) Der skal leveres 45 blade per gang.

■

## Tildelingsproblemet

Fire venner A,B,C og D er i gang med at renovere en lejlighed. Der er fire opgaver (E,F,G,H) der skal udføres. Talene I tabellen nedenfor estimerer den arbejdstid som hver af de fire venner skal bruge på hver af de fire opgaver. Det er f.eks. estimeret at person A vil bruge 7 timer på at løse opgave G, mens person C kun vil bruge 3 timer på samme opgave. Alle opgaver skal udføres og vennerne er blevet enige om at hver person skal udføre præcis en opgave. De er også blevet enige om at tildele opgaverne således at den totale arbejdstid minimeres.

| | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|
| A | 17 | 11 | 7 | 16 |
| B | 6 | 16 | 5 | 10 |
| C | 20 | 6 | 3 | 20 |
| D | 17 | 5 | 11 | 18 |

**Opgave 14:** Brug den ungarske algoritme (Hungarian algorithm) til at find den optimale tildeling af opgaver til personer baseret på ovenstående tabel. Hvad er objektværdien (kaldet $z$ nedenfor):

14A) $z =30$
14B) $z =25$
14C) $z =39$
14D) $z =28$
14E) $z =23$
14F) $z =20$

■

## Transportproblemet

I denne opgave skal vi se på hvordan vi kan transportere varer fra fabrikker til varelagre. Vi har 3 fabrikker $F_1, F_2$ og $F_3$ og 3 varelagre $V_1, V_2$ og $V_3$. Transportomkostningerne ved at sende et vognlæs mellem hvert par af fabrikker og varelagre er givet ved følgende tabel:

| | | Varelagre | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ |
| Fabrikker | $F_1$ | 3 | 16 | 15 |
| | $F_2$ | 14 | 2 | 3 |
| | $F_3$ | 4 | 20 | 14 |

Fabrikkernes månedlige produktion og varelagrenes månedlige behov (begge målt i vognlæs) er givet ved følgende tabeller:

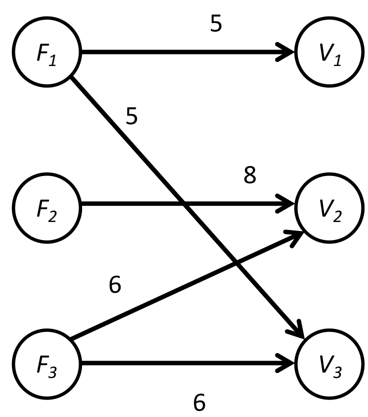
| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|
| Produktion | 10 | 8 | 12 |

| | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ |
|---|---|---|---|
| Efterspørgsel | 5 | 14 | 11 |

En mulig, men ikke nødvendigvis optimal løsning er at sende det antal vognlæs mellem fabrikker og varelagre som er oplyst i tabellen nedenfor

| | | Varelagre | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ |
| Fabrikker | $F_1$ | 5 | | 5 |
| | $F_2$ | | 8 | |
| | $F_3$ | | 6 | 6 |

Denne løsning kan skitseres således (hvor tallet på kanterne angiver ordremængden):




**Opgave 15 (tekstopgave)** Startende fra løsningen foreslået ovenfor, løs transportproblem til optimalitet ved brug af netværks simplex algoritmen, og angiv den optimale løsning. Vis og forklar dine udregninger undervejs.

■

## Dynamisk programmering

Vores ven Frederik er i gang med at planlægge 7 dages ferie. Han har besluttet sig for at se nogle af Europas hovedstæder, men har ikke besluttet sig for hvilke byer han skal besøge og hvor lang tid han skal bruge i hver by. Da det er ferie har Frederik valgt at se bort fra omkostningerne og udelukkende se på den oplevelse han får ud af at besøge byerne. Tabellen nedenfor viser det "oplevelses-udbytte" som Frederik har tildelt besøg til de enkelte byer ved forskellige længder af besøget. For eksempel har han vurderet 2 dage i Berlin til at give et udbytte på 4 mens han kun har tildelt Rom et udbytte på 2 ved samme længde ophold. Som det kan ses i tabellen vil Frederik maksimalt bruge 3 dage i hver by. Frederik ønsker at finde ud af hvor mange dage han skal være i hver by for at maksimere det totale udbytte. Frederik kan undlade at besøge nogle af byerne. I det tilfælde får han intet udbytte fra byerne som udelades (indikeret i tabellen ved at alle byer har et udbytte på 0 ved et ophold på 0 dage).

| Antal dage | Berlin | Paris | London | Rom |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| 3 | 5 | 6 | 5 | 4 |

Vi kan bestemme den optimale rejseplan ved hjælp af dynamisk programmering. For at gøre formlerne simplere nummerer vi byerne således: Berlin er by nummer 1, Paris er by nummer 2, London er by nummer 3 og Rom er by nummer 4

Lad $u_{ij}$ være udbyttet ved at besøge by $i$ i $j$ dage. Denne information findes i ovenstående tabel. Lad $f(i,j)$ være det maksimale udbytte som kan opnås ved i alt at bruge $j$ dage i byerne $1,\ldots,i$. Vi kan udtrykke $f(i,j)$ ved følgende rekursionsformel

$$f(i,j) = \begin{cases} \max_{d\in\{0,\ldots,\min\{3,j\}\}} \{u_{id} + f(i-1, j-d)\} & \text{for } i \geq 1 \\ 0 & \text{for } i = 0 \end{cases}$$

**Opgave 16** Hvilket af følgende udtryk bestemmer det optimale udbytte Frederik kan få ud af sin ferie.

| | |
|---|---|
| 16A) $f(5,10)$ | 16D) $f(4,3)$ |
| 16B) $f(7,7)$ | 16E) $f(4,7)$ |
| 16C) $f(3,4)$ | 16F) $f(7,4)$ |

■

Vi bruger rekursionsformlen til at beregne tabelerne ("-" indikerer kombinationer som ikke har mening):

| $j$ | $f(1,j)$ | $x_1^*$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 1 |
| 2 | 4 | 2 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | - | - |
| 5 | - | - |
| 6 | - | - |
| 7 | - | - |

| $j \backslash x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $f(2,j)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | - | - | - | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 2 | - | - | 3 | 0 |
| 2 | 4 | 5 | 3 | - | 5 | 1 |
| 3 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 1 |
| 4 | - | 7 | 7 | 9 | 9 | 3 |
| 5 | - | - | 8 | 10 | 10 | 3 |
| 6 | - | - | - | 11 | 11 | 3 |
| 7 | - | - | - | - | - | - |

| $j \backslash x_3$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $f(3,j)$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | - | - | - | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 1 | - | - | 3 | 0 |
| 2 | 5 | 4 | 2 | - | 5 | 0 |
| 3 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 0 |
| 4 | 9 | 7 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| 5 | 10 | 10 | 8 | 10 | 10 | 0 |
| 6 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 0 |
| 7 | - | 12 | 12 | 14 | 14 | 3 |

| $j \backslash x_4$ | 0 1 2 3 | $f(4,j)$ | $x_4^*$ |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |

Den sidste tabel er ikke udfyldt. Det er din opgave. Du skal ikke aflevere din tabel, men bruge den til at svare på følgende spørgsmål:

**Opgave 17** Hvilke værdier skal der stå i søjlen under $f(4,j)$?

17A)

| $j$ | $f(4,j)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 4 |
| 2 | 6 |
| 3 | 6 |
| 4 | 9 |
| 5 | 11 |
| 6 | 11 |
| 7 | 14 |

17B)

| $j$ | $f(4,j)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 5 |
| 2 | 6 |
| 3 | 5 |
| 4 | 11 |
| 5 | 12 |
| 6 | 10 |
| 7 | 12 |

17C)

| $j$ | $f(4,j)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 5 |
| 2 | 8 |
| 3 | 9 |
| 4 | 10 |
| 5 | 10 |
| 6 | 13 |
| 7 | 14 |

17D)

| $j$ | $f(4,j)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 6 |
| 4 | 9 |
| 5 | 10 |
| 6 | 11 |
| 7 | 14 |

17E)

| $j$ | $f(4,j)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 9 |
| 2 | 16 |
| 3 | 16 |
| 4 | 17 |
| 5 | 13 |
| 6 | 16 |
| 7 | 3 |

17F)

| $j$ | $f(4,j)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 6 |
| 2 | 7 |
| 3 | 7 |
| 4 | 10 |
| 5 | 10 |
| 6 | 13 |
| 7 | 15 |

■

**Opgave 18** Hvor mange dage skal Frederik være i London og Rom ifølge den optimale løsning?

| | |
|---|---|
| 18A) 1 dag i London, 0 dage i Rom. | 18D) 2 dage i London 1 dag i Rom |
| 18B) 1 dag i London, 1 dag i Rom. | 18E) 3 dage i London, 0 dage i Rom. |
| 18C) 3 dage i London, 3 dage i Rom. | 18F) 3 dage i London, 2 dage i Rom. |

DTU Danmarks Tekniske Universitet

**Skriftlig prøve, den 21. maj, 2014. Side 1 af 13 sider**
**Kursus navn:** Introduktion til Operationsanalyse
**Kursus nummer:** 42101
**Tilladte Hjælpemidler:** Alle skriftlige hjælpemidler. Computer, mobiltelefon, egen lommeregner må ikke anvendes, men der udleveres en TI-30 lommeregner. Besvarelsen kan udarbejdes med blyant eller kuglepen og afleveres på det vedhæftede skema (se sidste side). Svarene kan også afleveres på eksamenspapir hvis der skrives forkert på skemaet. Huske at angive studienummer på alle papirer der afleveres.
**Varighed:** 4 timer
**Vægtning**: Opgavesættet består af 20 multiple-choice opgaver. Hvert korrekt svar til en multiple-choice opgave giver 5 point. Man får ikke strafpoint for forkerte svar til en multiple-choice opgave. Man kan samlet opnå 100 point. **For at besvare en multiple-choice opgave skal man, uden yderligere forklaring, tydeligt notere svaret i det vedhæftede skema (se sidste side).**

---

## LP og følsomhedsanalyse

Betragt følgende LP

$$\max 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ved at indføre slackvariable $x_4$ og $x_5$ kan det skrives på "=" form og sættes op på tableauform:

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | -4 | -3 | -5 | 0 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| $x_5$ | 0 | 2 | 1 | 4 | 0 | 1 | 20 |

**Opgave 1:** Vi ønsker at løse problemet ovenfor med simplex algoritmen. Da $x_3$ har mindst koefficient i $Z$ rækken er det $x_3$ som skal gå ind i basis. Hvilket tableau vil være det næste i simplex algoritmen?

1A)

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 1 | 2 | 0 | 5 | 0 | 50 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| $x_5$ | 0 | -2 | -3 | 0 | -4 | 1 | -20 |

1B)

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 1 | 2 | 0 | 5 | 0 | 55 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| $x_5$ | 0 | -2 | -3 | 0 | -4 | 1 | 5 |

1C)

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 1 | -1 | 4 | 0 | 40 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| $x_5$ | 0 | 0 | -1 | 2 | -2 | 1 | 0 |

1D)

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | -1,5 | -1,75 | 0 | 0 | 1,25 | 30 |
| $x_4$ | 0 | 0,5 | 0,75 | 0 | 1 | -0,25 | 5 |
| $x_3$ | 0 | 0,5 | 0,25 | 1 | 0 | 0,25 | 10 |

1E)

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | -1,5 | -1,75 | 0 | 0 | 1,25 | 25 |
| $x_4$ | 0 | 0,5 | 0,75 | 0 | 1 | -0,25 | 5 |
| $x_3$ | 0 | 0,5 | 0,25 | 1 | 0 | 0,25 | 5 |

1F)

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | -1 | 3 | 0 | 2 | 40 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 10 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0,5 | 2 | 0 | 0,5 | 10 |

■

Et af de optimale tableauer til det lineære programmerings problem ovenfor ser således ud:

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 0,5 | 0 | 3 | 0,5 | 40 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 1,5 | 0 | 2 | -0,5 | 10 |
| $x_3$ | 0 | 0 | -0,5 | 1 | -1 | 0,5 | 0 |

**Opgave 2:** Lad os kalde koefficienten for $x_1$ i objektfunktionen for $c_1$. I det oprindelige LP har vi $c_1 = 4$. I hvilket interval skal $c_1$ ligge for at basis fra den optimale løsning er uændret?

2A) $3\frac{2}{3} \leq c_1 \leq \infty$

2B) $-\infty \leq c_1 \leq \infty$

2C) $3\frac{2}{3} \leq c_1 \leq 5$

2D) $2 \leq c_1 \leq 6\frac{1}{3}$

2E) $-\infty \leq c_1 \leq 6\frac{1}{3}$

2F) $2 \leq c_1 \leq \infty$

■

**Opgave 3:** Lad os kalde tallet på højre siden i anden begrænsning for $b_2$. Dvs. begrænsningen er

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq b_2$$

og i det oprindelige LP har vi $b_2 = 20$. I hvilket interval skal $b_2$ ligge for at basis fra den optimale løsning er uændret?

3A) $20 \leq b_2 \leq 40$

3B) $20 \leq b_2 \leq \infty$

3C) $-\infty \leq b_2 \leq \infty$

3D) $15\frac{2}{3} \leq b_2 \leq 36\frac{1}{3}$

3E) $15\frac{2}{3} \leq b_2 \leq \infty$

3F) $20 \leq b_2 \leq 20$

■

Et firma skærer store, ens, plader af træ ud til mindre produkter. Hver af pladerne bliver udskåret efter et bestemt mønster. Firmaet har et antal forskellige mønstre at vælge i mellem. For hvert mønster er det oplyst hvor mange produkter det resulterer i. F.eks. kunne mønster 1 resultere i 7 enheder af produkt 2 og 5 enheder af produkt 4 og nul enheder af de resterende produkter. Lad $P$ være mængden af produkter og $M$ være mængden af mønstre. For produkt $p \in P$ er behovet for produktet givet ved $b_p$. For hvert mønster $m \in M$ angiver $a_{pm}$ hvor mange produkter af type $p$ som der kommer ud af at udskære en plade efter mønster $m$. Vi ønsker at opstille en model som tilnærmelsesvis finder det minimale antal af plader vi skal bruge for at opfylde behovet for produkter (det er i orden hvis vi får flere end det ønskede antal produkter). Vi lader variablen $x_m$ angive hvor mange plader vi udskærer efter mønster $m$.

Vi vil benytte en lineær programmeringsmodel så $x_m$ kan være et kommatal. Det er måske ikke umiddelbart en brugbar løsning at udskære f.eks. $5\frac{7}{8}$ plade efter er et særligt mønster, men firmaet vil altid kunne opnå en brugbar løsning der opfylder behovet, ved at runde alle $x_m$variablene op.

**Opgave 4:** Hvilken af følgende lineære programmeringsproblemer modellerer bedst problemstillingen forklaret ovenfor?

4A)

$$\begin{array}{lll} & \min \sum_{m\in M} x_m & \\ \text{subject to} & \sum_{m\in M} b_p x_m \geq a_{pm} & \forall p \in P \\ & x_m \geq 0 & \forall m \in M \end{array}$$

4B)

$$\begin{array}{lll} & \min \sum_{m\in M} x_m & \\ \text{subject to} & \sum_{m\in M} a_{pm} x_m \leq b_p & \forall p \in P \\ & x_m \geq 0 & \forall m \in M \end{array}$$

4C)

$$\begin{array}{lll} & \min \sum_{m\in M} x_m & \\ \text{subject to} & \sum_{p\in P} a_{pm} x_m \geq b_p & \forall m \in M \\ & x_m \geq 0 & \forall m \in M \end{array}$$

4D)

$$\begin{array}{lll} & \min \sum_{m\in M} x_m & \\ \text{subject to} & \sum_{m\in M} a_{pm} x_m \leq b_p & \forall m \in M \\ & x_m \geq 0 & \forall m \in M \end{array}$$

4E)

$$\begin{array}{lll} & \min \sum_{m\in M} x_m & \\ \text{subject to} & \sum_{m\in M} a_{pm} x_m \geq b_p & \forall p \in P \\ & x_m \geq 0 & \forall m \in M \end{array}$$

4F)

$$\begin{array}{lll} & \min \sum_{m\in M} x_m & \\ \text{subject to} & \sum_{m\in M} b_p x_m \leq a_{pm} & \forall p \in P \\ & x_m \geq 0 & \forall m \in M \end{array}$$

■

Betragt følgende LP, lad os kalde modellen **M3**:

$$\max 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 60 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 30 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &\geq 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vi omskriver til "=" form ved at indføre slack variable ($x_4$), surplus variable ($x_6$) og kunstige variable ($\bar{x}_5$ og $\bar{x}_7$). Modellen bliver til:

$$\max 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 60 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \bar{x}_5 &= 30 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - x_6 + \bar{x}_7 &= 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

og problemet kan nu løses med **to fase metoden**.

**Opgave 5:** hvilken objektfunktion skal bruges i første fase?

5A)
$$\max 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

5B)
$$\min 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

5C)
$$\max \bar{x}_5 + \bar{x}_7$$

5D)
$$\min \bar{x}_5 + \bar{x}_7$$

5E)
$$\max x_4 + \bar{x}_5 + x_6 + \bar{x}_7$$

5F)
$$\min x_4 + \bar{x}_5 + x_6 + \bar{x}_7$$

■

Løsningen på fase 1 er følgende tableau.

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\bar{x}_5$ | $x_6$ | $\bar{x}_7$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 30 |
| $x_3$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 1 | 0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $6\frac{2}{3}$ |
| $x_2$ | 0 | $\frac{1}{6}$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $8\frac{1}{3}$ |

Vi har altså bestemt at $x_4 = 30, x_3 = 6\frac{2}{3}, x_2 = 8\frac{1}{3}$ er en lovlig, men ikke nødvendigvis optimal løsning.

**Opgave 6:** Udfør nu fase 2. Hvad er den optimale objektværdi for fase 2 (dvs. den optimale objektværdi for model M3)?

6A) 0

6B) 70

6C) 80

6D) 90

6E) 100

6F) 110

■

Vi betragter nu følgende problem:

$$\max 4x_1 + 8x_2 + 3x_3$$

subject to

$$8x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 60 \quad (1)$$
$$7x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 70 \quad (2)$$
$$9x_1 + 7x_2 + 7x_3 \geq 50 \quad (3)$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \leq 0$$
$$x_3 \in \mathbb{R}$$

**Opgave 7:** Find det duale problem. Lad $y_1, y_2$ og $y_3$ være de duale variable svarende til henholdsvis begrænsning (1), (2) og (3). Hvilket af følgende svar er korrekt.

7A)
$$\min 60y_1 + 70y_2 + 50y_3$$
subject to
$$\begin{aligned} 8y_1 + 7y_2 + 9y_3 &\geq 4 \\ 8y_1 + 4y_2 + 7y_3 &\leq 8 \\ 3y_1 + 4y_2 + 7y_3 &= 3 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

7B)
$$\min 60y_1 + 70y_2 + 50y_3$$
subject to
$$\begin{aligned} 8y_1 + 7y_2 + 9y_3 &\geq 4 \\ 8y_1 + 4y_2 + 7y_3 &= 8 \\ 3y_1 + 4y_2 + 7y_3 &\leq 3 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

7C)
$$\min 60y_1 + 70y_2 + 50y_3$$
subject to
$$\begin{aligned} 8y_1 + 7y_2 + 9y_3 &\geq 4 \\ 8y_1 + 4y_2 + 7y_3 &\leq 8 \\ 3y_1 + 4y_2 + 7y_3 &= 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

7D)
$$\min 60y_1 + 70y_2 + 50y_3$$
subject to
$$\begin{aligned} 8y_1 + 7y_2 + 9y_3 &\leq 4 \\ 8y_1 + 4y_2 + 7y_3 &\leq 8 \\ 3y_1 + 4y_2 + 7y_3 &= 3 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\in \mathbb{R} \\ y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

7E)
$$\min 60y_1 + 70y_2 + 50y_3$$
subject to
$$\begin{aligned} 8y_1 + 7y_2 + 9y_3 &\geq 4 \\ 8y_1 + 4y_2 + 7y_3 &\leq 8 \\ 3y_1 + 4y_2 + 7y_3 &= 3 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\in \mathbb{R} \\ y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

7F)
$$\min 60y_1 + 70y_2 + 50y_3$$
subject to
$$\begin{aligned} 8y_1 + 7y_2 + 9y_3 &\leq 4 \\ 8y_1 + 4y_2 + 7y_3 &\leq 8 \\ 3y_1 + 4y_2 + 7y_3 &\leq 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

■

Betragt nu følgende LP:
$$\max 8x_1 + 6x_2 + 4x_3$$
subject to
$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 20 \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP'et skrives op på "=" form på sædvanlig vis med slack variable $x_4$ og $x_5$ svarende til henholdsvis første og anden begrænsning. En del af det endelige tableau ser således ud:

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | $a$ | ? | ? | $b$ | ? | ? |
| ? | 0 | ? | ? | ? | $\frac{3}{16}$ | -$\frac{1}{16}$ | $c$ |
| ? | 0 | ? | ? | ? | -$\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | ? |

hvor tallene $a, b$ og $c$ er ukendte. Vi ønsker at bestemme disse tal ud fra den øvrige information i tableauet.

**Opgave 8:** Brug den fundamentale indsigt til at bestemme tallene $a$, $b$ og $c$ i tableauet ovenfor. Hvilket svar er korrekt?

8A) $a = \frac{5}{4}, b = 0, c = \frac{5}{8}$

8B) $a = \frac{5}{4}, b = \frac{5}{8}, c = 0$

8C) $a = 0, b = \frac{5}{8}, c = \frac{5}{4}$

8D) $a = \frac{5}{8}, b = \frac{5}{4}, c = 0$

8E) $a = \frac{5}{8}, b = 0, c = \frac{5}{4}$

8F) $a = 0, b = \frac{5}{4}, c = \frac{5}{8}$

■

## Køteori

Supermarkedet Rima ønsker at analysere hvor lange køer de kan forvente når to kasser er åbne samtidig. Det antages at en enkelt, fælles kø leder hen til de to kasser. Det anslås at en enkelt kasse kan betjene 30 kunder i timen og at kunderne ankommer til køen efter en Poisson process med en gennemsnitlig ankomstrate på 40 i timen.

**Opgave 9:** Hvad er det forventede antal kunder der står i kø?

9A) meget tæt på 0

9B) ca. 1 kunde

9C) ca. 2 kunder

9D) ca. 3 kunder

9E) ca. 4 kunder

9F) ca. 5 kunder

■

**Opgave 10:** Hvad er sandsynlighed for at der ikke står nogen kunder i kø?

10A) meget tæt på 0

10B) ca. 0.11

10C) ca. 0.26

10D) ca. 0.48

10E) ca. 0.64

10F) ca. 0.87

■

## Spilteori

Supermarkedet Rima er i skarp konkurrence med Tøfex. Rima overvejer 3 marketingskampagner A,B og C og Tøfex overvejer ligeledes tre kampagner I, II og III. Både Rima og Tøfex har kun kapacitet til at iværksætte en kampagne hver. Salgsafdelingen har udarbejdet følgende udbytte tabel hvor et positivt tal angiver en fordel for rækkespilleren Rima.

| | | Tøfex | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | A | 5 | 4 | -2 |
| Rima | B | 2 | 1 | 1 |
| | C | -3 | -5 | 1 |

**Opgave 11:** Hvilken strategi bør Rima følge?

11A) Strategi A

11B) Strategi B

11C) Strategi C

11D) En blandet strategi med sandsynlighederne $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ til de tre strategier

11E) En blandet strategi med sandsynlighederne $\frac{6}{10}, \frac{4}{10}, 0$ til henholdsvis strategi A, B og C.

11F) En blandet strategi med sandsynlighederne $\frac{5}{10}, \frac{4}{10}, \frac{1}{10}$ til henholdsvis strategi A, B og C.

■

Antag nu at udbyttetabellen er skrevet op på abstrakt form med parametre $a, b, \ldots, h, i$ i stedet for konkrete tal som i opgave 11. Disse parametre kan godt være negative.

| | | Tøfex | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| | A | a | b | c |
| Rima | B | d | e | f |
| | C | g | h | i |

Rima ønsker nu at finde den bedste blandede strategi ved at løse et LP. I LP'et vil beslutningsvariablene $x_1, x_2, x_3$ angive den sandsynlighed der skal knyttes til henholdsvis strategi A,B og C. Beslutningsvariablen $x_4$ vil angive spillets værdi

**Opgave 12:** Hvilket af følgende LP'er bestemmer spillets værdi og den bedste blandede strategi for Rima? Tip: vær omhyggelig, det er kun små forskelle der adskiller de 6 LP'er.

12A)

$$\max x_4$$

subject to

$$\begin{aligned} ax_1 + dx_2 + gx_3 - x_4 &\geq 0 \\ bx_1 + ex_2 + hx_3 - x_4 &\geq 0 \\ cx_1 + fx_2 + ix_3 - x_4 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

12B)

$$\max x_4$$

subject to

$$\begin{aligned} ax_1 + dx_2 + gx_3 - x_4 &\geq 0 \\ bx_1 + ex_2 + hx_3 - x_4 &\geq 0 \\ cx_1 + fx_2 + ix_3 - x_4 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

12C)

$$\max x_4$$

subject to

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 - x_4 &\geq 0 \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 - x_4 &\geq 0 \\ gx_1 + hx_2 + ix_3 - x_4 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_4 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

12D)

$$\min x_4$$

subject to

$$\begin{aligned} ax_1 + dx_2 + gx_3 - x_4 &\geq 0 \\ bx_1 + ex_2 + hx_3 - x_4 &\geq 0 \\ cx_1 + fx_2 + ix_3 - x_4 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

12E)

$$\min x_4$$

subject to

$$\begin{aligned} ax_1 + dx_2 + gx_3 - x_4 &\geq 0 \\ bx_1 + ex_2 + hx_3 - x_4 &\geq 0 \\ cx_1 + fx_2 + ix_3 - x_4 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_4 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

12F)

$$\max x_4$$

subject to

$$\begin{aligned} ax_1 + dx_2 + gx_3 - x_4 &\geq 0 \\ bx_1 + ex_2 + hx_3 - x_4 &\geq 0 \\ cx_1 + fx_2 + ix_3 - x_4 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_4 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

## Lagermodeller

Rima sælger ternet papir og ønsker at bestemme hvor tit og hvor meget der skal bestilles hjem. Der er ikke meget variation i efterspørgslen, så det er fint at bruge en deterministisk model. Rima ønsker at undgå at løbe tør for ternet papir så efterslæb er ikke tilladt. Analyser har vist at efterspørgslen er 500 blokke om måneden, jævnt fordelt. Rima kan købe en blok papir for 1 krone, og der er en opstartsomkostning på 250 kr forbundet med at afgive en ordre. Lageromkostningen er 1 øre per blok per måned.

**Opgave 13:** Hvor mange blokke ternet papir bør Rima bestille hjem per ordre?

13A) 100

13B) $2066\frac{2}{3}$

13C) 4000

13D) 5000

13E) $13333\frac{1}{3}$

13F) 80000

■

I vintermånederne sælger Rima kælke. Rima kan købe en kælk for 75 kr og kan sælge den for 250 kr i vintersæsonen. Når vinteren er ovre har kælkene lille værdi, men Rima kan dog trods alt få 10 kr for kælken. Der vil også være en lageromkostning på 2 kr forbundet med hver kælk der ikke er blevet solgt. Kælkene bestilles hjem ved en enkelt ordre lige før vintersæsonen begynder for at opnå den fordelagtige indkøbspris. Rima har indset at efterspørgslen svinger meget og ønsker at benytte en stokastisk lagermodel. Det antages at efterspørgslen følger en exponential (kontinuært) fordeling med forventet værdi 3000. Efterslæbsomkostningen $p$ (shortage cost) anses for at være lig med 250 kr

**Opgave 14:** Hvor mange kælke bør Rima bestille hjem

14A) ca. 704

14B) ca. 6407

14C) ca. 3853

14D) ca. 8058

14E) ca. 5924

14F) ca. 8366

■

## Tildelingsproblemet

Det er ikke ligegyldigt hvor man placerer varerne i supermarkedet. Nogle positioner leder til mere salg end andre. Nogle særlig gode områder er (A) tæt på indgangen, (B) tæt på kasserne og (C) tæt på mælkeprodukterne, (D) tæt på brødprodukterne da de fleste kunder kommer forbi disse fire områder i løbet af et besøg i supermarkedet. Rima vil gerne have placeret fire produkter: slik, frugt, kaffe og sodavand så det forventede salg **maksimeres**. Tabellen nedenfor angiver det forventede årlige salg målt i antal tusinde kroner ved placering af de 4 produkter på de fire forskellige positioner. Det antages at der kun kan placeres et produkt på hver position.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| Kaffe | 67 | 52 | 91 | 92 |
| Slik | 76 | 84 | 94 | 96 |
| Frugt | 98 | 89 | 85 | 79 |
| Sodavand | 68 | 60 | 73 | 78 |

**Opgave 15:** Problemstillingen kan formuleres som et tildelingsproblem (assignment problem). Løs problemet ved hjælp af eksempelvis den ungarske algoritme. Hvad er det maksimale forventede årlige salg af de fire produkter?

15A) 280000 kr

15B) 351000 kr

15C) 322000 kr

15D) 327000 kr

15E) 362000 kr

15F) 369000 kr

■

## Transportproblemet og netværkssimplex algoritmen

Bemærk at denne opgave benytter notation og metoder fra noten om “Netværks Simplex for transportproblemet“ skrevet af David Pisinger. Det er derfor en god ide at have denne note ved hånden når opgaven løses.

Rima får dagligt bragt kødprodukter ud fra tre forskellige lagre. Hvert lager kan levere 100 kg. Rima i Lyngby skal mindst have 80 kg kød og højst 100 kg. Rima i Holte skal mindst have 110 kg (og der er ingen øvre grænse for leveringen) mens Rima i Brønshøj skal have præcis 90 kg kød. Disse information sammen med transportomkostningerne (målt i antal kr per kg) er givet ved tabellen nedenfor. Det koster for eksempel

3 kr per kg at få bragt varer fra lager 1 til Rima Lyngby mens det koster 4 kr per kg. at kører varer fra lager 1 til Rima i Brønshøj.

| | Lyngby | Holte | Brønshøj | Udbud |
|---|---|---|---|---|
| Lager 1 | 3 | 3 | 4 | 100 |
| Lager 2 | 9 | 9 | 2 | 100 |
| Lager 3 | 3 | 1 | 3 | 100 |
| Minimal efterspørgsel | 80 | 110 | 90 | |
| Maksimal efterspørgsel | 100 | $\infty$ | 90 | |

**Opgave 16:** Ved at tilføje et "fup" (dummy) varelager og opsplitte noget af efterspørgslen er det muligt at formulere problemet skitseret ovenfor som et sædvanligt transportproblem hvor efterspørgslen er fast. Hvilket af de følgende sædvanlige transportproblemer er ækvivalent med ovenstående ($M$ er et passende stort tal og by-navnene er forkortede: "Ly" = lyngby, "Ho" = holte, "Br"=Brønshøj).

16A)

| | Ly-A | Ly-B | Ho-A | Ho-B | Br | Udbud |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lager 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 100 |
| Lager 2 | 9 | 9 | 9 | 9 | 2 | 100 |
| Lager 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| "Fup" lager | M | 0 | M | 0 | M | 20 |
| efterspørgsel | 80 | 20 | 110 | 20 | 90 | |

16D)

| | Ly-A | Ly-B | Ho-A | Ho-B | Br | Udbud |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lager 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 100 |
| Lager 2 | 9 | 9 | 9 | 9 | 2 | 100 |
| Lager 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| "Fup" lager | 0 | M | 0 | M | 0 | 20 |
| efterspørgsel | 80 | 20 | 110 | 20 | 90 | |

16B)

| | Ly-A | Ly-B | Ho-A | Ho-B | Br | Udbud |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lager 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 100 |
| Lager 2 | 9 | 9 | 9 | 9 | 2 | 100 |
| Lager 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| "Fup" lager | 0 | M | 0 | M | M | 20 |
| efterspørgsel | 80 | 20 | 110 | 20 | 90 | |

16E)

| | Ly-A | Ly-B | Ho-A | Ho-B | Br | Udbud |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lager 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 100 |
| Lager 2 | 9 | 9 | 9 | 9 | 2 | 100 |
| Lager 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| "Fup" lager | M | M | 0 | 0 | M | 20 |
| efterspørgsel | 100 | 0 | 130 | 0 | 90 | |

16C)

| | Ly-A | Ly-B | Ho-A | Ho-B | Br | Udbud |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lager 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 100 |
| Lager 2 | 9 | 9 | 9 | 9 | 2 | 100 |
| Lager 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| "Fup" lager | M | 0 | M | 0 | 0 | 20 |
| efterspørgsel | 80 | 20 | 110 | 20 | 90 | |

16F)

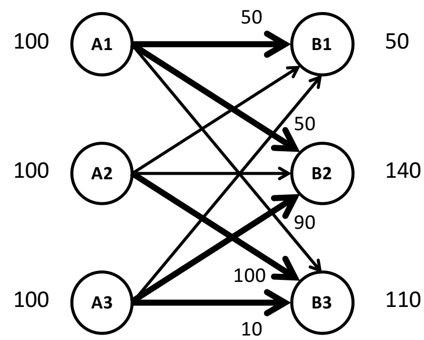
| | Ly-A | Ly-B | Ho-A | Ho-B | Br | Udbud |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lager 1 | 3 | M | 3 | M | 4 | 100 |
| Lager 2 | 9 | M | 9 | M | 2 | 100 |
| Lager 3 | 3 | M | 1 | M | 3 | 100 |
| "Fup" lager | M | 0 | M | 0 | M | 20 |
| efterspørgsel | 80 | 20 | 110 | 20 | 90 | |

■

Betragt nu et et nyt transportproblem (lad os kalde det T2) givet på tabelform som

| | B1 | B2 | B3 | Udbud |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 3 | 3 | 4 | 100 |
| A2 | 9 | 9 | 2 | 100 |
| A3 | 3 | 8 | 3 | 100 |
| Efterspørgsel | 50 | 140 | 110 | |

hvor A1, A2 og A3 leverer varer og B1, B2 og B3 er aftagere. En mulig, men ikke optimal løsning til transportproblemet er vist på figuren nedenfor. Tallene på kanterne indikerer hvor meget der sendes over den tilsvarende kant (som i noten om netværkssimplex)




Ligesom i noten om netværkssimplex lader vi $u_1, u_2$ og $u_3$ være de duale variable der knytter sig til knude $A_1, A_2$ og $A_3$ (og de tilsvarende begrænsninger) mens $v_1$, $v_2$ og $v_3$ er de duale der knytter sig til knude $B_1, B_2$ og $B_3$ (og de tilsvarende begrænsninger).

**Opgave 17:** Antag at $u_1 = 0$. Bestem de resterende duale variable der svarer til løsningen vist på figuren ovenfor. Brug metoden fra noten om netværkssimplex. Hvilket af nedenstående svar er korrekt?

17A)
$$u_1 = 0, u_2 = -4, u_3 = -5,$$
$$v_1 = 3, v_2 = 3, v_3 = -2$$

17B)
$$u_1 = 0, u_2 = 130, u_3 = 40,$$
$$v_1 = 50, v_2 = 50, v_3 = -30$$

17C)
$$u_1 = 0, u_2 = 100, u_3 = 100,$$
$$v_1 = 50, v_2 = 140, v_3 = 110$$

17D)
$$u_1 = 0, u_2 = 4, u_3 = 5,$$
$$v_1 = 3, v_2 = 3, v_3 = -2$$

17E)
$$u_1 = 0, u_2 = -130, u_3 = -40,$$
$$v_1 = 50, v_2 = 50, v_3 = -30$$

17F)
$$u_1 = 0, u_2 = 4, u_3 = 2$$
$$v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 3$$

■

**Opgave 18:** Vi betragter stadig transportproblemet T2 fra opgave 17. I en anden mulig løsning til problemet har de duale variable følgende værdier: $u_1 = 0, u_2 = 4, u_3 = 5, v_1 = -2, v_2 = 3, v_3 = -2$. Udregn den reducerede omkostning $\bar{c}_{11}$ for kanten (A1,B1) og den reducerede omkostning $\bar{c}_{22}$ for kanten (A2,B2). Hvilket af de følgende svar er korrekt?

18A) $\bar{c}_{11} = 1$,$\bar{c}_{22} = 11$

18B) $\bar{c}_{11}$ =-2,$\bar{c}_{22} = 7$

18C)$\bar{c}_{11}$ =2,$\bar{c}_{22} = -7$

18D) $\bar{c}_{11}$ =1,$\bar{c}_{22} = 12$

18E) $\bar{c}_{11}$ =1,$\bar{c}_{22} = 15$

18F) $\bar{c}_{11}$ =5,$\bar{c}_{22} = 2$

■

## Dynamisk programmering

Peter skal til eksamen i et kursus. Eksamen består af tre delprøver, lad os kalde dem delprøve 1, 2 og 3. Peter skal bestå alle delprøver for at bestå eksamen. Peter har ialt fire dage til at læse på eksamen og han ønsker at bestemme hvor mange dage han skal sætte af til at forberede hvert af de tre emner (delprøver) for at maksimere sandsynligheden for at bestå kurset. Hvis vi lader $x_n$ betegne hvor mange dage der bruges på emne $n$ og sandsynligheden for at bestå prøve $n$ med en indsats på $x_n$ dage for $p_n(x_n)$ så er sandsynligheden for at bestå hele kurset $p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) \cdot p_3(x_3)$. Tabellen nedenfor angiver sandsynligheden for at bestå hver delprøve afhængig af arbjedsindsatsen (vi kan f.eks. aflæse at $p_2(3) = 0,7$)

| | Delprøve | | |
|---|---|---|---|
| Antal dage | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0,35 | 0,4 | 0,75 |
| 1 | 0,45 | 0,5 | 0,8 |
| 2 | 0,55 | 0,65 | 0,85 |
| 3 | 0,65 | 0,7 | 0,88 |
| 4 | 0,75 | 0,75 | 0,96 |

**Opgave 19:** Vi ønsker at finde en rekursionsformel $f_n^*(s_n)$ der bestemmer den optimale sandsynlighed for at at bestå delprøverne $n, \ldots, 3$ givet at der er $s_n$ dage til rådighed til forberedelse for delprøverne $n, \ldots, 3$. Dvs $f_1^*(4)$ beregner sandsynligheden for at bestå kurset når den optimale arbejdsindsats vælges. Hvilken af nedenstående rekursionsformler maksimerer sandsynligheden for at bestå kurset?

19A)for $n = 1, 2$:

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in \{0,1,\ldots,s_n\}} \{p_n(x_n) \cdot f_{n+1}^*(s_n - x_n)\}$$

når $n = 3$ bruges

$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3 \in \{0,1,\ldots,s_3\}} \{p_3(x_3)\}$$

19D) for $n = 1, 2$:

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in \{0,1,\ldots,s_n\}} \{p_n(s_n) \cdot f_{n+1}^*(x_n - s_n)\}$$

når $n = 3$ bruges

$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3 \in \{0,1,\ldots,s_3\}} \{p_3(x_3)\}$$

19B) for $n = 1, 2$:

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in \{0,1,\ldots,s_n\}} \{p_n(x_n) \cdot f_{n+1}^*(x_n - s_n)\}$$

når $n = 3$ bruges

$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3 \in \{0,1,\ldots,s_3\}} \{p_3(x_3)\}$$

19E) for $n = 1, 2$:

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in \{0,1,\ldots,4\}} \{p_n(s_n) \cdot f_{n+1}^*(s_n - x_n)\}$$

når $n = 3$ bruges

$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3 \in \{0,1,\ldots,4\}} \{p_3(x_3)\}$$

19C) for $n = 1, 2$:

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in \{0,1,\ldots,s_n\}} \{p_n(s_n) \cdot f_{n+1}^*(s_n - x_n)\}$$

når $n = 3$ bruges:

$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3 \in \{0,1,\ldots,s_3\}} \{p_3(x_3)\}$$

19F) for $n = 1, 2$:

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in \{0,1,\ldots,4\}} \{p_n(s_n) \cdot f_{n+1}^*(x_n - s_n)\}$$

når $n = 3$ bruges

$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3 \in \{0,1,\ldots,4\}} \{p_3(x_3)\}$$

■

**Opgave 20:** Hvad er sandsynligheden for at bestå kurset når den optimale arbejdsindsats vælges?

20A) ca 0,96

20B) ca 0,06

20C) ca 0,27

20D) ca 0,43

20E) ca 0,68

20F) ca 0,56

■

# 42101: Introduktion til operationsanalyse. Eksamen 21. maj 2014

Navn:

Studie nummer:

| Opgave | Svar | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 2 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 3 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 4 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 5 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 6 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 7 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 8 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 9 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 10 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 11 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 12 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 13 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 14 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 15 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 16 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 17 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 18 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 19 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 20 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |

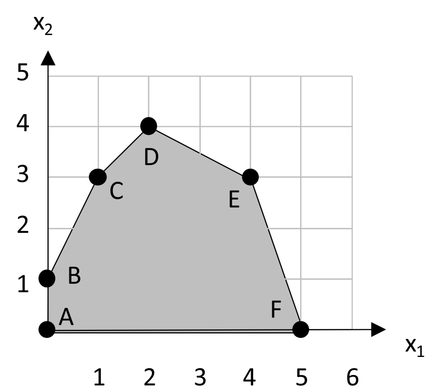
# Danmarks Tekniske Universitet

**Skriftlig prøve, den 21. maj, 2015. Side 1 af 13 sider**
**Kursus navn:** Introduktion til Operationsanalyse
**Kursus nummer:** 42101
**Tilladte Hjælpemidler:** Alle skriftlige hjælpemidler. Computer, mobiltelefon, egen lommeregner må ikke anvendes, men der udleveres en TI-30 lommeregner. Besvarelsen kan udarbejdes med blyant eller kuglepen og afleveres på det vedhæftede skema (se sidste side). Svarene kan også afleveres på eksamenspapir hvis der skrives forkert på skemaet. Husk at angive studienummer på alle papirer der afleveres.
**Varighed:** 4 timer
**Vægtning**: Opgavesættet består af 20 multiple-choice opgaver. Hvert korrekt svar til en multiple-choice opgave giver 5 point. Man får ikke strafpoint for forkerte svar til en multiple-choice opgave. Man kan samlet opnå 100 point. **For at besvare en multiple-choice opgave skal man, uden yderligere forklaring, tydeligt notere svaret i det vedhæftede skema (se sidste side).** Hvis flere svarmuligheder vælges for den samme opgaver regnes opgaven automatisk for forkert besvaret.

## LP og følsomhedsanalyse

**Opgave 1:** I denne opgave betragter vi et LP med to variable $x_1$ og $x_2$. Figuren nedenfor illustrerer det lovlige (mulige) område for LPet, Det lovlige område er tegnet gråt og 6 lovlige løsninger A, B,C,D,E,F er indtegnet. Objektfunktionen i det lineære programmeringsproblem er

$$\max 2x_1 + 2x_2$$




Hvilken af de 6 mulige løsninger A-F maksimerer objektfunktionen?

**1A)** Løsning A

**1B)** Løsning B

**1C)** Løsning C

**1D)** Løsning D

**1E)** Løsning E

**1F)** Løsning F

**Opgave 2** Betragt følgende LP som vi kalder (LP1)

$$\max 5x_1 + 1x_2 + 4x_3$$

subject to

$$x_1 - x_2 \leq 0 \quad (1)$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \quad (2)$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \quad (3)$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (4)$$

Når problemet løses med simplex algoritmen tilføjes slack variable $x_4, x_5$ og $x_6$ og følgende tableau er udgangspunkt for videre beregninger

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | -5 | -1 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_5$ | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $x_6$ | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 10 |

I næste iteration af simplex algoritmen vil $x_1$ gå ind i basis. Hvilken variabel vil forlade basis?

**2A)** $x_1$

**2B)** $x_2$

**2C)** $x_3$

**2D)** $x_4$

**2E)** $x_5$

**2F)** $x_6$

**Opgave 3** Det optimale tableau for ovenstående LP (LP1) er vist her:

| Basis variabel | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 | 30 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ |
| $x_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ |

Lad os kalde højresiden i tredie begrænsning i vores originale LP for $b_3$ (dvs. $b_3 = 10$).
I hvilket interval skal $b_3$ ligge for at basis fra den optimale løsning er uændret?

**3A)** $-\infty \leq b_3 \leq \infty$

**3B)** $4 \leq b_3 \leq 12$

**3C)** $10 \leq b_3 \leq 15$

**3D)** $-\infty \leq b_3 \leq 15$

**3E)** $5 \leq b_3 \leq \infty$

**3F)** $-5 \leq b_3 \leq \infty$

**Opgave 4** Hvad sker der med objektværdien for den optimale løsning til LP1 hvis vi øger $b_3$ med 1?

**4A)** Objektværdien vil være uændret

**4B)** Objektværdien vil øges til 31

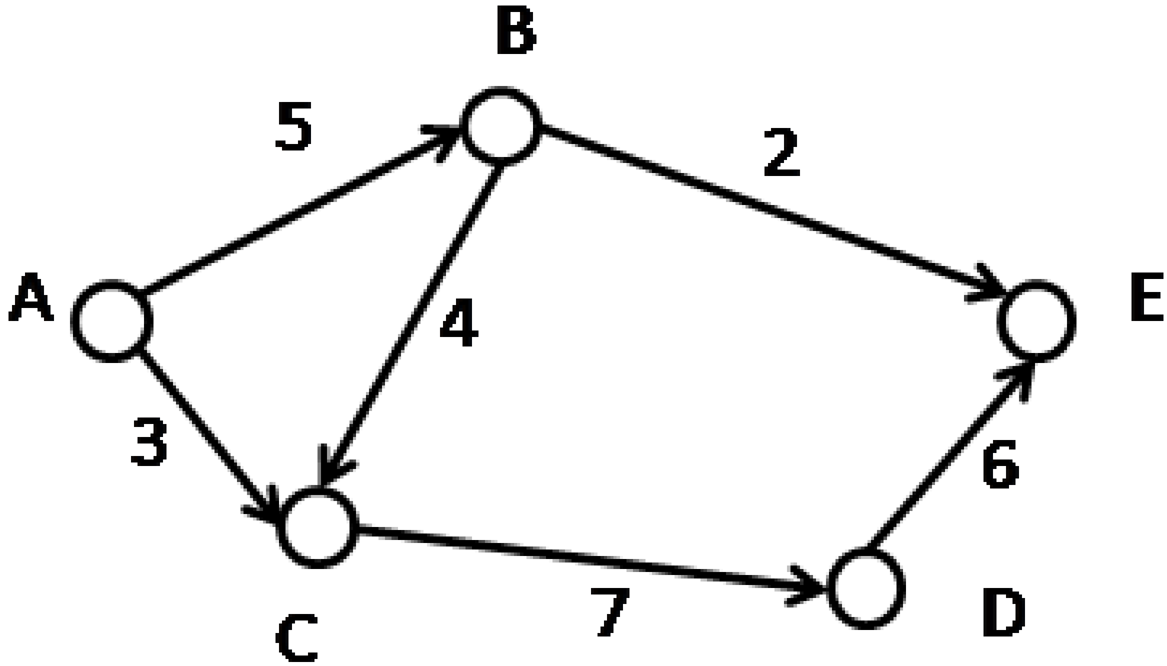
**4C)** Objektværdien vil øges til 32

**4D)** Objektværdien vil øges til 33

**4E)** Objektværdien vil falde til 29

**4F)** Objektværdien vil falde til 28

**Opgave 5** I denne opgave betragter vi nedenstående netværk med 5 knuder A, B,C,D,E og kanter mellem knuderne som vist på figuren. Kanterne repræsenterer vandledninger og kantens retning (pilens retning) angiver i hvilken retning vi kan sende vandet. Vi har en vandkilde i knude A og ønsker at sende vand fra knude A til knude E. Det er kun i knude A at vi kan tilføre vand. I de øvrige knuder kan vi kun sende vandet videre. Tallene på kanterne angiver hvor mange liter vi kan sende i minuttet ved hjælp af kanten (vandledningen). Vi anser mængden af vand i knude A for ubegrænset så det er kun vandledningernes kapacitet som afgør hvor meget vand der kan sendes til knude E. Vi ønsker at opskrive et lineært programmeringsproblem som finder den maksimale mængde vand der kan sendes fra A til E per minut. LPet vil benytte sig af beslutningsvariable $x_{ij}$ som repræsenterer hvor meget vand der sendes fra knude $i$ til knude $j$ per minut. F.eks. vil beslutningsvariablen $x_{BE}$ angive hvor meget vand der sendes fra knude $B$ til knude $E$ per minut



Hvilken af nedenstående modeller modellerer problemet bedst?

**5A)**

$$\max x_{BE} + x_{DE}$$

subject to

$$\begin{aligned} x_{AB} - x_{BE} - x_{BC} &= 0 \\ x_{AC} + x_{BC} - x_{CD} &= 0 \\ x_{CD} - x_{DE} &= 0 \\ x_{AB} \leq 5, x_{AC} \leq 3, x_{BC} &\leq 4 \\ x_{BE} \leq 2, x_{CD} \leq 7, x_{DE} &\leq 6 \\ x_{AB}, x_{AC}, x_{BC}, x_{BE}, x_{CD}, x_{DE} &\geq 0 \end{aligned}$$

**5B)**

$$\min x_{BE} + x_{DE}$$

subject to

$$\begin{aligned} 5x_{AB} + 2x_{BE} - 4x_{BC} &= 0 \\ 3x_{AC} - 4x_{BC} - 7x_{CD} &= 0 \\ 7x_{CD} - 6x_{DE} &= 0 \\ x_{AB} \leq 5, x_{AC} \leq 3, x_{BC} &\leq 4 \\ x_{BE} \leq 2, x_{CD} \leq 7, x_{DE} &\leq 6 \\ x_{AB}, x_{AC}, x_{BC}, x_{BE}, x_{CD}, x_{DE} &\geq 0 \end{aligned}$$

**5C)**

$$\max x_{AB} + x_{AC} + x_{BC} + x_{BE} + x_{CD} + x_{DE}$$

subject to

$$\begin{aligned} x_{AB} + x_{BE} + x_{BC} &= 0 \\ x_{AC} - x_{BC} - x_{CD} &= 0 \\ x_{CD} - x_{DE} &= 0 \\ x_{AB} \leq 5, x_{AC} \leq 3, x_{BC} &\leq 4 \\ x_{BE} \leq 2, x_{CD} \leq 7, x_{DE} &\leq 6 \\ x_{AB}, x_{AC}, x_{BC}, x_{BE}, x_{CD}, x_{DE} &\geq 0 \end{aligned}$$

**5D)**

$$\max x_{BE} + x_{DE}$$

subject to

$$\begin{aligned} x_{AB} + x_{BE} + x_{BC} &= 11 \\ x_{AC} + x_{BC} + x_{CD} &= 14 \\ x_{CD} - x_{DE} &= 13 \\ x_{AB}, x_{AC}, x_{BC}, x_{BE}, x_{CD}, x_{DE} &\geq 0 \end{aligned}$$

**5E)**

$$\max 2x_{BE} + 6x_{DE}$$

subject to

$$\begin{aligned} x_{AB} - x_{BE} - x_{BC} &= 0 \\ x_{AC} + x_{BC} - x_{CD} &= 0 \\ x_{CD} - x_{DE} &= 0 \\ x_{AB}, x_{AC}, x_{BC}, x_{BE}, x_{CD}, x_{DE} &\geq 0 \end{aligned}$$

**5F)**

$$\max 5x_{AB} + 3x_{AC} + 4x_{BC} + 2x_{BE} + 7x_{CD} + 6x_{DE}$$

subject to

$$\begin{aligned} x_{AB} - x_{BE} - x_{BC} &= 0 \\ x_{AC} + x_{BC} - x_{CD} &= 0 \\ x_{CD} - x_{DE} &= 0 \\ x_{AB}, x_{AC}, x_{BC}, x_{BE}, x_{CD}, x_{DE} &\geq 0 \end{aligned}$$

**Opgave 6** Betragt følgende LP

$$\max Z = (1+\theta)x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 10 \\ x_1 + x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vi ønsker at benytte parametrisk programmering til at bestemme hvordan den optimale løsning ændrer sig når $\theta$ ændres i intervallet $\left[0; \frac{2}{3}\right]$. Det viser sig at der er to optimale løsninger til problemet når $\theta$ ændres i intervallet $\left[0; \frac{2}{3}\right]$. Bestem disse to løsninger og deres tilhørende interval:

**6A)**
$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \frac{5}{2})$ når $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$

$(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 0)$ når $\theta \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

**6B)**
$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \frac{5}{2})$ når $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 2)$ når $\theta \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

**6C)**
$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 2)$ når $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$

$(x_1, x_2, x_3) = (3, \frac{4}{3}, 0)$ når $\theta \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

**6D)**
$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \frac{5}{2})$ når $\theta \in [0, \frac{1}{3}]$

$(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 0)$ når $\theta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

**6E)**
$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \frac{5}{2})$ når $\theta \in [0, \frac{1}{3}]$

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 2)$ når $\theta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

**6F)**
$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 2)$ når $\theta \in [0, \frac{1}{3}]$

$(x_1, x_2, x_3) = (3, \frac{4}{3}, 0)$ når $\theta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

**Opgave 7** Vi ser stadig på det parametriske LP fra sidste opgave. Vi ønsker nu at bestemme hvordan objektfunktionen ser ud på de to intervaller. Hvilket af følgende svar er rigtigt:

**7A)**
$Z = 7.5$ når $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$

$Z = 7 + \theta$ når $\theta \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

**7B)**
$Z = 7.5$ når $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$

$Z = 7.5 + \theta$ når $\theta \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

**7C)**
$Z = 7\frac{2}{3} + \theta$ når $\theta \in [0, \frac{1}{3}]$

$Z = 7 + 3\theta$ når $\theta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

**7D)**
$Z = 7.5$ når $\theta \in [0, \frac{1}{3}]$

$Z = 7\frac{2}{3} + \theta$ når $\theta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

**7E)**
$Z = 8 + \theta$ når $\theta \in [0, \frac{1}{3}]$

$Z = 8 + 2\theta$ når $\theta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

**7F)**
$Z = 7 + \theta$ når $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$

$Z = 6 + 3\theta$ når $\theta \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$

**Opgave 8** Betragt følgende LP

$$\min 5x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

subject to

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20 \quad (5)$$
$$x_1 + 5x_2 \leq 25 \quad (6)$$
$$3x_2 + 2x_3 \geq 10 \quad (7)$$
$$x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \quad (8)$$

Lad $y_1, y_2$ og $y_3$ være de duale variable svarende til henholdsvis begrænsning (5),(6) og (7). Hvordan ser det duale problem ud ?

**8A)**

$$\max 20y_1 + 25y_2 + 10y_3$$

subject to

$$y_1 + y_2 \leq 5$$
$$y_1 + 5y_2 + 3y_2 \leq 3$$
$$y_1 + 2y_3 \leq 4$$
$$y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0$$

**8B)**

$$\max 20y_1 + 25y_2 + 10y_3$$

subject to

$$y_1 + y_2 \leq 5$$
$$y_1 + 5y_2 + 3y_2 \leq 3$$
$$y_1 + 2y_3 \leq 4$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq, y_3 \geq 0$$

**8C)**

$$\max 20y_1 + 25y_2 + 10y_3$$

subject to

$$y_1 + y_2 = 5$$
$$y_1 + 5y_2 + 3y_2 \leq 3$$
$$y_1 + 2y_3 \geq 4$$
$$y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0$$

**8D)**

$$\max 20y_1 + 25y_2 + 10y_3$$

subject to

$$y_1 + y_2 = 5$$
$$y_1 + 5y_2 + 3y_2 \geq 3$$
$$y_1 + 2y_3 \leq 4$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

**8E)**

$$\min 20y_1 + 25y_2 + 10y_3$$

subject to

$$y_1 + y_2 = 5$$
$$y_1 + 5y_2 + 3y_2 \geq 3$$
$$y_1 + 2y_3 \leq 4$$
$$y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

**8F)**

$$\max 20y_1 + 25y_2 + 10y_3$$

subject to

$$y_1 + y_2 = 5$$
$$y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 3$$
$$y_1 + 2y_3 \leq 4$$
$$y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0$$

**Opgave 9** Betragt følgende LP til venstre skrevet på standard form og til højre skrevet på udvidet (augmented) form med slackvariable $x_4$ og $x_5$

$$\max 2x_1 + 6x_2 + 4x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\max 2x_1 + 6x_2 + 4x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_4 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_5 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

En mulig, men ikke nødvendigvis optimal, basis løsning er at have $x_1$ og $x_5$ i basis . Hvordan ser LP tableauet svarende til denne basis ud? (hint: tænk på den fundamentale indsigt).

**9A)**

| Basis var. | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 2 | -4 | 2 | 0 | 20 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 1 | 0 | 10 |
| $x_5$ | 0 | 0 | -2 | 6 | -1 | 1 | 10 |

**9B)**

| Basis var. | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 2 | -4 | 2 | 0 | 10 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 1 | -1 | 5 |
| $x_5$ | 0 | 0 | -2 | 6 | 0 | 1 | 10 |

**9C)**

| Basis var. | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 30 |
| $x_1$ | 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $x_5$ | 0 | 2 | 0 | 6 | -1 | 1 | 10 |

**9D)**

| Basis var. | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 2 | -4 | 2 | 0 | 10 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $x_5$ | 0 | 0 | -2 | 6 | -1 | 1 | 10 |

**9E)**

| Basis var. | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 2 | -4 | 2 | 0 | 20 |
| $x_1$ | 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 10 |
| $x_5$ | 0 | 2 | 0 | 6 | -1 | 1 | 10 |

**9F)**

| Basis var. | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Højre side |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 2 | 3 | 2 | 0 | 16 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 1 | 0 | 8 |
| $x_5$ | 0 | 0 | -2 | 4 | -1 | 1 | 12 |

**Opgave 10** Lad os betragte et generelt lineært programmeringsproblem, skrevet på matrixform som vist nedenfor til venstre. Her er $c$ en rækkevektor, x er en søjlevektor (bestående af beslutningsvariable), b er en søjlevektor og $A$ er en matrix. Vi har opskrevet det duale problem nedenfor til højre. Her er $y$ en række vektor bestående af de duale variable.

**Primal**

$$\max cx$$

subject to

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

**Dual**

$$\min yb$$

subject to

$$\begin{aligned} yA &\leq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Antag at begge problemer har lovlige løsninger. Antag at $\bar{x}$ er en lovlig, men ikke nødvendigvis optimal, løsning til det primale problem og at $\bar{y}$ er en lovlig, men ikke nødvendigvis optimal, løsning til det duale problem. Antag ligeledes at $x^*$ er en optimal løsning til det primale problem og at $y^*$ er en optimal løsning til det duale problem. 5 af nedenstående relationer er altid sande med antagelserne ovenfor. En af relationer er ikke altid sand. Hvilken er **ikke** altid sand?

**10A)** $cx^* \leq \bar{y}b$

**10B)** $c\bar{x} \leq cx^*$

**10C)** $y^*b \leq c\bar{x}$

**10D)** $cx^* = y^*b$

**10E)** $c\bar{x} \leq cx^* \leq \bar{y}b$

**10F)** $y^*b \leq \bar{y}b$

**Opgave 11 Transportproblemet** Vi skal hjælpe en produktionsvirksomhed til at planlægge deres produktion de næste 3 måneder. Nedenstående tabel viser behovet for virksomhedens produkt de næste tre måneder og produktionsomkostningen per enhed (som varierer fra måned til måned).

| | Behov (antal enheder) | Produktions omkostning per enhed |
|---|---|---|
| Måned 1 | 10 | 1000 |
| Måned 2 | 18 | 1050 |
| Måned 3 | 13 | 1080 |

Hver måned kan virksomheden maksimalt producere 15 enheder. Produktionen vi udfører en måned kan bruges i den pågældende måned eller gemmes til en af de følgende måneder. Hvis en enhed lægges på lager er omkostningen 25 kr per enhed pr måned. Vi kan naturligvis ikke dække en måneds behov ved at producere varerene på et senere tidspunkt. For eksempel kan vi ikke dække behovet i måned 1 ved hjælp af en produktion i måned 2. Virksomheden ønsker at minimere de samlede produktions og lageromkostninger.

Problemstillingen kan formuleres og løses som et transportproblem. Vi vil have en kilde (supplier) i transportproblemet for hver måned. Kilder repræsenter produktion af produkter. Vi skal ligeledes have en destination for hver måned som repræsenterer behovet for produkterne. Endelig skal vi have en »dummy« eller »fup« destination som kan modtage overskydende produktion (og gøre transportproblemet balanceret). På tabelform vil transportproblemet se således ud. Et par af felterne i tabellen er blevet udfyldt som eksempel. F.eks. indikerer »1000« at behovet for produkter i måned 1 kan dækkes ved en produktion i måned 1 hvor hver enhed vil koste 1000 kr.

| | Destination Måned 1 | Destination Måned 2 | Destination Måned 3 | Fup Destination | Produktions Kapacitet |
|---|---|---|---|---|---|
| Kilde Måned 1 | 1000 | ? | ? | ? | 15 |
| Kilde Måned 2 | ? | ? | ? | ? | 15 |
| Kilde Måned 3 | ? | ? | ? | ? | 15 |
| Behov | 10 | ? | ? | ? | |

Hvad skal der stå i felterne med spørgsmålstegn? (I tabellerne nedenfor har vi forkortet beskrivelserne af søjler og rækker og $M$ repræsenterer et meget stort tal)

**11A)**

| | DM1 | DM2 | DM3 | FD | PK |
|---|---|---|---|---|---|
| KM1 | 1000 | 1000 | 1000 | 25 | 15 |
| KM2 | 0 | 1050 | 1050 | 25 | 15 |
| KM3 | 0 | 0 | 1080 | 25 | 15 |
| Behov | 10 | 18 | 13 | 4 | |

**11B)**

| | DM1 | DM2 | DM3 | FD | PK |
|---|---|---|---|---|---|
| KM1 | 1000 | 1000 | 1000 | 0 | 15 |
| KM2 | 0 | 1050 | 1050 | 0 | 15 |
| KM3 | 0 | 0 | 1080 | 0 | 15 |
| Behov | 10 | 18 | 13 | 4 | |

**11C)**

| | DM1 | DM2 | DM3 | FD | PK |
|---|---|---|---|---|---|
| KM1 | 1000 | 1025 | 1050 | 0 | 15 |
| KM2 | 0 | 1050 | 1075 | 0 | 15 |
| KM3 | 0 | 0 | 1080 | 0 | 15 |
| Behov | 10 | 18 | 13 | 4 | |

**11D)**

| | DM1 | DM2 | DM3 | FD | PK |
|---|---|---|---|---|---|
| KM1 | 1000 | 1000 | 1000 | 25 | 15 |
| KM2 | $M$ | 1050 | 1050 | 25 | 15 |
| KM3 | $M$ | $M$ | 1080 | 25 | 15 |
| Behov | 10 | 18 | 13 | 4 | |

**11E)**

| | DM1 | DM2 | DM3 | FD | PK |
|---|---|---|---|---|---|
| KM1 | 1000 | 1000 | 1000 | 0 | 15 |
| KM2 | $M$ | 1050 | 1050 | 0 | 15 |
| KM3 | $M$ | $M$ | 1080 | 0 | 15 |
| Behov | 10 | 18 | 13 | 4 | |

**11F)**

| | DM1 | DM2 | DM3 | FD | PK |
|---|---|---|---|---|---|
| KM1 | 1000 | 1025 | 1050 | 0 | 15 |
| KM2 | $M$ | 1050 | 1075 | 0 | 15 |
| KM3 | $M$ | $M$ | 1080 | 0 | 15 |
| Behov | 10 | 18 | 13 | 4 | |

**Opgave 12 Tildelingsproblem** Vi skal tildele 4 opgaver til 4 forskellige arbejdshold. Hvert hold skal løse præcis en opgave. Nedenstående matrix viser omkostningen ved at tildele opgaverne til de forskellige hold. Man ønsker naturligvis at finde en tildeling af opgaver til hold der minimerer den samlede omkostning.

| | Opg. 1 | Opg. 2 | Opg. 3 | Opg. 4 |
|---|---|---|---|---|
| Hold 1 | 5 | 4 | 2 | 4 |
| Hold 2 | 2 | 5 | 3 | 7 |
| Hold 3 | 9 | 2 | 6 | 1 |
| Hold 4 | 4 | 6 | 4 | 7 |

Hvad er den samlede omkostning når opgaver fordeles til hold på optimal vis? Problemet kan med fordel løses som et tildelingsproblem (assignment problem)

**12A)** Den samlede omkostning er 9

**12B)** Den samlede omkostning er 11

**12C)** Den samlede omkostning er 13

**12D)** Den samlede omkostning er 10

**12E)** Den samlede omkostning er 12

**12F)** Den samlede omkostning er 14

## Dynamisk programmering

**Opgave 13** Et firma har besluttet at bruge 400.000 kr på markedsføring. Pengene kan bruges på TV-reklamer, radio-reklamer eller reklamer på Internettet. Følgende tabel viser det forventede mersalg ved forskellige investeringer i de tre reklameformer. Det bemærkes at en investering over 300.000 i et enkelt medie ikke fører til ekstra mersalg.

| | TV | Radio | Internet |
|---|---|---|---|
| 0 kr | 0% | 0% | 0% |
| 100.000 kr | 2% | 1,5% | 1,8% |
| 200.000 kr | 3% | 2% | 3,5% |
| 300.000 kr | 3,5% | 2,5% | 4,8% |
| 400.000 kr | 3,5% | 2,5% | 4,8% |

Markedsføringsbudget kan sagtens deles mellem flere medier. I så fald skal mersalget adderes. Dvs. hvis firmaet f.eks. vælger at investere 200.000 kr i TV reklamer og 200.000 kr i radio reklamer så bliver det forventede mersalg på $3 + 2 = 5$ %. Lad os kalde TV investerings mulighed 1, Radio investeringsmulighed 2 og Internet den 3. mulighed. Lad $m_n(x)$ angive mersalget i procent forbundet med en investering på $x$ hundredetusind kroner i medie $n \in \{1, 2, 3\}$. $m_n(x)$ er vist i følgende tabel:

| x \ n | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 2 | 1,5 | 1,8 |
| **2** | 3 | 2 | 3,5 |
| **3** | 3,5 | 2,5 | 4,8 |
| **4** | 3,5 | 2,5 | 4,8 |

Vi ønsker at bestemme en rekursionsformel $f_n^*(s_n)$ der beregner det bedst opnåelige mersalg givet at $s_n$ hundrede tusind kroner er til rådighed og pengene kan bruges på reklamemulighederne $\{1, \ldots, n\}$. Med denne funktion vil $f_3^*(4)$ således beregne det bedst opnåelige mersalg for de tre reklamemuligheder og det oplyste budget på 400.000 kr.

Hvilken af nedenstående rekursionsformler udregner det ønskede?

**13A)** $f_n^*(s_n) = \begin{cases} \max_{x_n \in \{0,\ldots,s_n\}} \left\{m_n(x_n) + f_{n-1}^*(s_n + x_n)\right\} & \text{for } n > 1 \\ \max_{x_n \in \{0,\ldots,s_n\}} \{m_n(x_n)\} & \text{for } n = 1 \end{cases}$

**13B)** $f_n^*(s_n) = \begin{cases} \max_{x_n \in \{0,\ldots,s_n\}} \left\{m_n(s_n) + f_{n-1}^*(s_n - x_n)\right\} & \text{for } n > 1 \\ \max_{x_n \in \{0,\ldots,s_n\}} \{m_n(s_n)\} & \text{for } n = 1 \end{cases}$

**13C)** $f_n^*(s_n) = \begin{cases} \max_{x_n \in \{0,\ldots,s_n\}} \left\{m_n(x_n) + f_{n-1}^*(s_n - x_n)\right\} & \text{for } n > 1 \\ \max_{x_n \in \{0,\ldots,s_n\}} \{m_n(x_n)\} & \text{for } n = 1 \end{cases}$

**13D)** $f_n^*(s_n) = \begin{cases} \max_{x_n \in \{0,\ldots,s_n\}} \left\{m_n(x_n) + f_{n-1}^*(s_n + x_n)\right\} & \text{for } n = 1 \\ \max_{x_n \in \{0,\ldots,s_n\}} \{m_n(x_n)\} & \text{for } n > 1 \end{cases}$

**13E)** $f_n^*(s_n) = \begin{cases} \max_{x_n \in \{0,\ldots,s_n\}} \left\{m_n(s_n) + f_{n-1}^*(s_n + x_n)\right\} & \text{for } n > 1 \\ \max_{x_n \in \{0,\ldots,s_n\}} \{m_n(s_n)\} & \text{for } n = 1 \end{cases}$

**13F)** $f_n^*(s_n) = \begin{cases} \max_{i \in \{0,\ldots,s_n\}} \left\{m_n(s_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)\right\} & \text{for } n > 1 \\ \max_{i \in \{0,\ldots,s_n\}} \{m_n(s_n)\} & \text{for } n = 1 \end{cases}$

**Opgave 14** Brug dynamisk programmering til at bestemme det maksimale mersalg der kan opnås med et budget på 400.000 kr. Hvilken af følgende svarmuligheder er korrekt?

**14A)** Der kan opnås et mersalg på 6%

**14B)** Der kan opnås et mersalg på 6.5 %

**14C)** Der kan opnås et mersalg på 6.8%

**14D)** Der kan opnås et mersalg på 7%

**14E)** Der kan opnås et mersalg på 7.5%

**14F)** Der kan opnås et mersalg på 7.8%

## Spilteori

Vi betragter et nulsumsspil med to spillere. Hver spiller har tre strategier til rådighed. Spiller 1 har strategierne $R_1, R_2$ og $R_3$ mens spiller 2 har strategierne $S_1, S_2$ og $S_3$. Resultatet af spillet afgøres af følgende udbyttetabel hvor positive tal er til fordel for spiller 1.

| | | Spiller 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| | $R_1$ | 5 | -3 | -2 |
| Spiller 1 | $R_2$ | -3 | 4 | -2 |
| | $R_3$ | 4 | 3 | -1 |

**Opgave 15** Hvad er værdien af spillet og hvilken strategi skal spiller 1 benytte (både spiller 1 og spiller 2 vil vælge en ren (pure) strategi).

**15A)**
Værdien af spillet er -2 og spiller 1 vil vælge strategi $R_1$

**15B)**
Værdien af spillet er 5 og spiller 1 vil vælge strategi $R_1$

**15C)**
Værdien af spillet er 4 og spiller 1 vil vælge strategi $R_2$

**15D)**
Værdien af spillet er -2 og spiller 1 vil vælge strategi $R_2$

**15E)**
Værdien af spillet er -1 og spiller 1 vil vælge strategi $R_3$

**15F)**
Værdien af spillet er 3 og spiller 1 vil vælge strategi $R_3$

**Opgave 16** I denne opgave undersøger vi et spil hvor spiller 1 kun har to strategier til rådighed. Udbyttetabel er vist nedenfor

| | | Spiller 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| | $R_1$ | 5 | -3 | 0 |
| Spiller 1 | $R_2$ | -3 | 4 | -2 |

I dette spil er det nødvendigt at anvende blandede strategier. Bestem sandsynlighederne $x_1$ og $x_2$ som spiller 1 skal knytte til henholdsvis strategi $R_1$ og $R_2$ og bestem spillets værdi.

**16A)** $x_1=\frac{1}{2}$,$x_2=\frac{1}{2}$. Spillets værdi er $\frac{5}{3}$

**16B)** $x_1=\frac{1}{2}$,$x_2=\frac{1}{2}$. Spillets værdi er $-\frac{4}{3}$

**16C)** $x_1=\frac{1}{3}$,$x_2=\frac{2}{3}$. Spillets værdi er $\frac{1}{2}$

**16D)** $x_1=\frac{1}{3}$,$x_2=\frac{2}{3}$. Spillets værdi er $-\frac{1}{2}$

**16E)** $x_1=\frac{2}{3}$,$x_2=\frac{1}{3}$. Spillets værdi er $\frac{7}{3}$

**16F)** $x_1=\frac{2}{3}$,$x_2=\frac{1}{3}$. Spillets værdi er $-\frac{2}{3}$

## Køteori

**Ambulancekørsel** I denne opgave ser vi på en simpel kømodel for betjeningstid for ambulancer. Et tyndt befolket område bliver i dag betjent af tre ambulancer som altid er i beredskab. Ambulancerne er stationeret ved det lokale sygehus. For at spare penge ønsker lokalpolitikerne at undersøge effekten af at skære antallet af ambulancer i beredskab ned til kun to. Det antages at betjeningstiden per udrykning er eksponentielfordelt med en gennemsnitlig betjeningstid på 40 minutter. Betjeningstiden inkluderer kørsel til ulykkesstedet, førstehjælp på stedet og transport til skadestuen. Når patienten er afleveret på skadestuen er ambulancen klar til næste opgave. Det antages at tiden mellem to hændelser der kræver ambulancekørsel er eksponentielt fordelt med en middeltid imellem hændelser på 1 time. Det antages at kundepopulationen er ubegrænset.

Tiden der går fra at en borger ringer 112 til ambulancen er fremme består af ambulancens køretid $t_k$ og ventetiden på at en ambulance bliver ledig $t_w$. Køretiden vil vi ikke se på mens $t_w$ vil være afhængig af antallet af ambulancer der er i beredskab.

**Opgave 17** Bestem den forventede værdi af $t_w$ når der er to ambulancer i beredskab.

**17A)** Den forventede værdi af $t_w$ er ca 10 sekunder

**17B)** Den forventede værdi af $t_w$ er ca 1 minut

**17C)** Den forventede værdi af $t_w$ er ca 5 minutter

**17D)** Den forventede værdi af $t_w$ er ca 10 minutter

**17E)** Den forventede værdi af $t_w$ er ca 25 minutter

**17F)** Den forventede værdi af $t_w$ er ca 45 minutter

**Opgave 18** Hvad er sandsynligheden for at der er en eller flere patienter der venter på at en ambulance bliver ledig når der er to ambulancer i beredskab?

**18A)** Sandsynligheden er $\frac{1}{18}$

**18B)** Sandsynligheden er $\frac{1}{54}$

**18C)** Sandsynligheden er $\frac{1}{2}$

**18D)** Sandsynligheden er $\frac{1}{6}$

**18E)** Sandsynligheden er $\frac{1}{3}$

**18F)** Sandsynligheden er $\frac{1}{12}$

## Lagermodeller

En tankstation sælger 5000 liter benzin per dag. Efterspørgslen varierer så lidt at det er realistisk at benytte en deterministisk lagermodel. Startomkostningen for at få en leverance benzin er 500 kr. Tankstationen kan købe benzin for 9 kr per liter. Hvis ejeren bestiller 40000 liter eller mere på en gang er prisen kun 8,5 kr pr liter (for hele ordren). Lageromkostningen anses for at være 1 øre per liter per dag. Efterslæb er ikke en mulighed i denne opgave.

**Opgave 19** Hvad er den optimale ordremængde $Q^*$ for denne lagermodel?

**19A)** $Q^* = 5000$ Liter

**19B)** $Q^* = 500$ Liter

**19C)** $Q^* \approx 22361$ Liter

**19D)** $Q^* \approx 44721$ Liter

**19E)** $Q^* \approx 2236$ Liter

**19F)** $Q^* = 40000$ Liter

**Opgave 20** Firmaet Julius producerer julepynt. En af deres mest eftertragtede varer er det årlige kalenderlys der produceres i et nyt design hvert år. Lyset sælger som varmt brød i den sæson det er designet til. Hvis firmaet brænder inde med et restparti efter julesalget er overstået har hvert kalenderlys kun ringe værdi. I det tilfælde kan det sælges til en stærkt nedsat pris i næste julesæson.

I hovedsæsonen sælges lyset til 75 kr per styk. Tiloversblevne lys kan sælges den følgende sæson for 10 kr per styk. Dertil kommer at lyset skal ligge på lager i næsten et år. Der må derfor påregnes en lageromkostning på 4 kr per lys som ikke sælges. Julius producerer lysene i en omgang. Produktionsomkostningen er 12 kr pr styk. Erfaringen har vist at efterspørgslen er stokastisk og følger en rektangulær fordeling (også kaldt ligefordeling) i intervallet [10000,15000]. Firmaet anser en kontinuert fordeling for en passende approksimation. Efterslæbsomkostningen $p$ anses for at være 75 kr.

Hvad er den optimale mængde af lys som Julius skal producere?

**20A)** ca. 14846 lys

**20B)** ca. 14565 lys

**20C)** ca. 13889 lys

**20D)** ca. 13706 lys

**20E)** ca. 13696 lys

**20F)** ca. 15000 lys

## 42101: Introduktion til operationsanalyse. Eksamen 21. maj 2015

Navn:

Studie nummer:

| Opgave | Svar | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 2 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 3 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 4 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 5 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 6 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 7 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 8 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 9 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 10 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 11 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 12 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 13 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 14 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 15 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 16 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 17 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 18 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 19 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 20 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |

Danmarks Tekniske Universitet

**Skriftlig prøve, den 20 maj, 2016. Side 1 af 13 sider**
**Kursus navn:** Introduktion til Operationsanalyse
**Kursus nummer:** 42101
**Tilladte Hjælpemidler:** Alle skriftlige hjælpemidler. Computer, mobiltelefon, egen lommeregner må ikke anvendes, men der udleveres en TI-30 lommeregner. Besvarelsen kan udarbejdes med blyant eller kuglepen og afleveres på det vedhæftede skema (se sidste side). Svarene kan også afleveres på eksamenspapir hvis der skrives forkert på skemaet. Husk at angive studienummer på alle papirer der afleveres.
**Varighed:** 4 timer
**Vægtning**: Opgavesættet består af 20 multiple-choice opgaver. Hvert korrekt svar til en multiple-choice opgave giver 5 point. Man får ikke strafpoint for forkerte svar til en multiple-choice opgave. Man kan samlet opnå 100 point. **For at besvare en multiple-choice opgave skal man, uden yderligere forklaring, tydeligt notere svaret i det vedhæftede skema (se sidste side).** Hvis flere svarmuligheder vælges for den samme opgaver regnes opgaven automatisk for forkert besvaret.

**Opgave 1:** Din ven skal løse følgende LP med simplex metoden

$$\max 3x_1 + 4x_2$$

hvor

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Undervejs i beregningerne kommer hun frem til følgende tableau

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | $-\frac{3}{5}$ | 0 | $\frac{4}{5}$ | 0 | 12 |
| x2 | 0 | $\frac{3}{5}$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | 0 | 3 |
| x4 | 0 | $-\frac{2}{5}$ | 0 | -$\frac{4}{5}$ | 1 | 8 |

Hvad bliver næste tableau?

**1A)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 0 | 0 | 2 | $-\frac{3}{2}$ | 0 |
| x2 | 0 | 0 | 1 | -1 | $\frac{3}{2}$ | 15 |
| x1 | 0 | 1 | 0 | 2 | $-\frac{5}{2}$ | -20 |

**1B)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 0 | 0 | 2 | $-\frac{3}{2}$ | 60 |
| x2 | 0 | 0 | 1 | -1 | $\frac{3}{2}$ | 15 |
| x1 | 0 | 1 | 0 | 2 | $-\frac{5}{2}$ | 0 |

**1C)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 15 |
| x1 | 0 | 1 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | 5 |
| x4 | 0 | 0 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | 1 | 10 |

**1D)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 15 |
| x1 | 0 | 1 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | 5 |
| x4 | 0 | 0 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | 1 | 5 |

**1E)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | $-\frac{3}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 15 |
| x2 | 0 | $\frac{3}{5}$ | 1 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 5 |
| x3 | 0 | $-\frac{2}{5}$ | 0 | 1 | $-\frac{5}{2}$ | 10 |

**1F)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | $-\frac{3}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 15 |
| x2 | 0 | $\frac{3}{5}$ | 1 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 15 |
| x3 | 0 | $-\frac{2}{5}$ | 0 | 1 | $-\frac{5}{2}$ | 0 |

**Opgave 2:** Betragt nu følgende LP

$$\min 3x_1 + 4x_2$$

hvor

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\geq 15 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Hvilket af nedenstående LP'er er det duale til LP'et ovenfor?

**2A)**

$$\max 15y_1 + 20y_2$$

hvor

$$\begin{array}{rcl} 3y_1 + 2y_2 & \geq & 3 \\ 5y_1 + 4y_2 & = & 4 \\ y_1 & \geq & 0 \\ y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

**2B)**

$$\max 15y_1 + 20y_2$$

hvor

$$\begin{array}{rcl} 3y_1 + 2y_2 & \leq & 3 \\ 5y_1 + 4y_2 & = & 4 \\ y_1 & \leq & 0 \\ y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

**2C)**

$$\max 15y_1 + 20y_2$$

hvor

$$\begin{array}{rcl} 3y_1 + 2y_2 & \geq & 3 \\ 5y_1 + 4y_2 & = & 4 \\ y_1 & \leq & 0 \\ y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

**2D)**

$$\max 15y_1 + 20y_2$$

hvor

$$\begin{array}{rcl} 3y_1 + 2y_2 & \geq & 3 \\ 5y_1 + 4y_2 & \geq & 4 \\ y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

**2E)**

$$\max 15y_1 + 20y_2$$

hvor

$$\begin{array}{rcl} 3y_1 + 2y_2 & \leq & 3 \\ 5y_1 + 4y_2 & = & 4 \\ y_1 & \geq & 0 \\ y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

**2F)**

$$\max 15y_1 + 20y_2$$

hvor

$$\begin{array}{rcl} 3y_1 + 2y_2 & \leq & 3 \\ 5y_1 + 4y_2 & = & 4 \\ y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

**Opgave 3** Vi betragter nu følgende LP:

$$Z = \min 3x_1 + 4x_2$$

hvor

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 15 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Hvad er den optimale værdi af $Z$? Du kan med fordel benytte at $x_1 = 5$ og $x_2 = 0$ er en lovlig, men ikke nødvendigvis optimal løsning.

**3A)** Den optimale værdi af $Z$ er: $Z = 15$

**3B)** Den optimale værdi af $Z$ er: $Z = 12$

**3C)** Den optimale værdi af $Z$ er: $Z = 8$

**3D)** Den optimale værdi af $Z$ er: $Z = 6$

**3E)** Den optimale værdi af $Z$ er: $Z = 18$

**3F)** Den optimale værdi af $Z$ er: $Z = 20$

**Opgave 4 - Følsomhedsanalyse** Vi løser følgende LP

$$\max x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

hvor

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 18 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Når LP'et løses med simplex algoritmen bliver det endelige tableau:

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0,5 | 19 |
| x2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -0,5 | 1 |
| x3 | 0 | 2 | 0 | 1 | -1 | 1 | 8 |

Vi ønsker nu at undersøge hvad der sker hvis vi øger koefficienten foran $x_2$ i målfunktionen med $\Delta$, dvs. vi betragter objektfunktionen

$$\max x_1 + (3 + \Delta)x_2 + 2x_3$$

I hvilket interval for $\Delta$ er tableauet ovenfor optimalt? ($\Delta$ kan både være positiv og negativ)

**4A)** $-1 \leq \Delta \leq 1$

**4B)** $-1 \leq \Delta \leq 3$

**4C)** $-1 \leq \Delta \leq 0$

**4D)** $0 \leq \Delta \leq 3$

**4E)** $0 \leq \Delta \leq 1$

**4F)** $-1 \leq \Delta \leq \infty$

**Opgave 5 - Følsomhedsanalyse** Vi betragter stadig det oprindelige LP og det tilhørende optimale tableau fra opgave 4. Denne gang ønsker vi at ændre højresiden på første begrænsning. Dvs. vi erstatter første begrænsning med

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 + \Delta$$

I hvilket interval for $\Delta$ er basis uændret? ($\Delta$ kan både være positiv og negativ)

**5A)** $-1 \leq \Delta \leq \infty$

**5B)** $-\infty \leq \Delta \leq 3$

**5C)** $-1 \leq \Delta \leq 8$

**5D)** $-3 \leq \Delta \leq 4$

**5E)** $-\infty \leq \Delta \leq \infty$

**5F)** $-2 \leq \Delta \leq 2$

**Opgave 6** Vi ser stadig på det oprindelige LP fra opgave 4. Denne gang ser vi på et tableau som ikke er optimalt og som kun delvist er udfyldt:

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | ? | ? | ? | 0 | 0,25 | ? |
| ? | 0 | ? | ? | ? | 1 | -0,5 | ? |
| ? | 0 | ? | ? | ? | 0 | 0,25 | ? |

Hvorledes ser resten af tableauet ud?

**6A)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | -2,5 | 0 | -1,5 | 0 | 0,25 | 4,5 |
| x4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -0,5 | 1 |
| x2 | 0 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0 | 0,25 | 4,5 |

**6B)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 0 | -2,5 | 0 | 0 | 0,25 | 3 |
| x1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | -0,5 | 1 |
| x3 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 0,25 | 1 |

**6C)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | -2,5 | 0 | -1,5 | 0 | 0,25 | 13,5 |
| x4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | -0,5 | 1 |
| x2 | 0 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0 | 0,25 | 4,5 |

**6D)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 0 | -2,5 | -1,5 | 0 | 0,25 | 4,5 |
| x4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -0,5 | 1 |
| x1 | 0 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0,25 | 4,5 |

**6E)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 0 | -2,5 | -1,5 | 0 | 0,25 | 9 |
| x4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -0,5 | 1 |
| x1 | 0 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0,25 | 9 |

**6F)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 0 | -2,5 | 0 | 0 | 0,25 | 19 |
| x2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | -0,5 | 1 |
| x3 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 0 | 0,25 | 8 |

**Opgave 7 - simplex med øvre grænser** I denne opgave vil vi se på LP'et

$$\max 2x_1 + x_2$$

hvor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 0 \leq x_1 &\leq 1 \\ 0 \leq x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

De øvre grænser på $x_1$ og $x_2$ kunne håndteres som almindelige begrænsninger, men det er smartere at håndtere dem implicit så man har et mindre tableau og færre slack variable. Hvis $x_1$ når sin øvre grænse vil vi erstatte variablen med $y_1 = 1 - x_1$ og hvis $x_2$ når sin øvre grænse vil vi erstatte den med $y_2 = 1 - x_2$. Vi har følgende start tableau hvor $x_3$ er eneste slackvariabel.

| b.v. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | -2 | -1 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |

Da $x_1$ har den mest negative koefficient i række 0 er det den variabel der skal øges i første simplex iteration. Hvordan ser tableauet ud efter første iteration?

**7A)**

| b.v. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 0 | 1 | 2 | 4 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |

**7D)**

| b.v. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 2 | -1 | 0 | 2 |
| $x_1$ | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 |

**7B)**

| b.v. | Z | $y_1$ | $x_2$ | $x_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | -2 | -1 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |

**7E)**

| b.v. | Z | $y_1$ | $x_2$ | $x_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 2 | -1 | 0 | 2 |
| $y_1$ | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 |

**7C)**

| b.v. | Z | $y_1$ | $x_2$ | $x_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | -2 | -1 | 0 | 0 |
| $y_1$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |

**7F)**

| b.v. | Z | $y_1$ | $x_2$ | $x_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 2 | -1 | 0 | 2 |
| $x_3$ | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 |

**Opgave 8 - dual simplex:** Betragt følgende tableau:

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x3 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 10 |
| x4 | 0 | -3 | -4 | 0 | 1 | -2 |

Vi kan ikke regne videre på tableauet med normal simplex da vi har et negativt tal på højresiden. Vi kan tilgengæld godt anvende dual simplex algoritmen. Udfør derfor en iteration af dual simplex. Hvad er det resulterende tableau?

**8A)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -1 | 0 | $\frac{5}{3}$ | 0 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{4}{3}$ |
| x3 | 0 | 0 | -$\frac{2}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{28}{3}$ |
| x1 | 0 | 1 | -$\frac{4}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

**8D)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -1 | 1,5 | 0 | 0 | 0,25 | 0,5 |
| x3 | 0 | -0,5 | 0 | 1 | 0.5 | 9 |
| x2 | 0 | 0,75 | 1 | 0 | -0,25 | 0,5 |

**8B)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -1 | -1,25 | 0 | 0 | 0,25 | -0,5 |
| x3 | 0 | 0,5 | 0 | 1 | 0,5 | 9 |
| x2 | 0 | -075 | 1 | 0 | -0,25 | 0,5 |

**8E)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -1 | 0 | $-\frac{5}{3}$ | 0 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{4}{3}$ |
| x3 | 0 | 0 | $\frac{2}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{28}{3}$ |
| x1 | 0 | 1 | $\frac{4}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

**8C)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -1 | 0 | $\frac{5}{3}$ | 0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ |
| x3 | 0 | 0 | $\frac{2}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{28}{3}$ |
| x1 | 0 | 1 | $\frac{4}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

**8F)**

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -1 | 1.,25 | 0 | 0 | 0,25 | -0,5 |
| x3 | 0 | -0,5 | 0 | 1 | 0,5 | 9 |
| x2 | 0 | 0,75 | 1 | 0 | -0,25 | 0,5 |

**Opgave 9 - Heltalsprogrammering:** En virksomhed kan producere to produkter. Virksomheden vil tjene 10 kr per enhed af produkt 1 og 20 kr per enhed af produkt 2 de producerer. Virksomheden kan højst producere 200 enheder af produkt 1 og 2 tilsammen. Virksomheden skal producere et heltalligt antal af begge produkter. Hvis virksomheden ønsker at producerer mere end 100 enheder af produkt 2 skal der indkøbes en særlig maskine der koster 500 kr.

Virksomheden ønsker at opstille en heltalsprogrammeringsmodel der maksimerer profitten. Nedenfor er der vist 6 heltalsmodeller hvor $x_1$ og $x_2$ angiver produktionen af henholdsvis produkt 1 og produkt 2 og $y$ er en hjælpevariabel. $Z^+$ er mængden af alle heltal større end eller lig med 0. Hvilken af modellerne er korrekt?

**9A)**

$$\max 10x_1 + 20x_2 - 500y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 200 \\ x_2 - 100y &\leq 100 \\ x_1, x_2 &\geq \mathbb{Z}^+ \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**9B)**

$$\max 10x_1 + 20x_2 - 500y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 200 \\ x_2 + 100y &\leq 100 \\ x_1, x_2 &\geq \mathbb{Z}^+ \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**9C)**

$$\max 10x_1 + 20x_2 + 500y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 200 \\ x_2 - 100y &\leq 100 \\ x_1, x_2 &\geq \mathbb{Z}^+ \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**9D)**

$$\max 10x_1 + 20x_2 - 500y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 200 \\ x_2 - 100y &\leq 200 \\ x_1, x_2 &\geq \mathbb{Z}^+ \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**9E)**

$$\max 10x_1 + 20x_2 - 500y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 200 \\ x_2 + 100y &\leq 200 \\ x_1, x_2 &\geq \mathbb{Z}^+ \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**9F)**

$$\max 10x_1 + 20x_2 + 500y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 200 \\ x_2 + 100y &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq \mathbb{Z}^+ \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**Opgave 10 - Heltalsprogrammering:** Vi betragter følgende heltalsproblem hvor $p_1, p_2, p_3, a_1, a_2, a_3$ og $b$ er konstanter mens $x_1, x_2, x_3$ er variable

$$Z^{IP} = \max p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$$

hvor

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &\leq b \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vi definerer tre lineære programmeringsproblemer A,B og C baseret på modellen:

| A) | B) | C) |
|---|---|---|
| $Z^{LPA} = \max p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$<br>hvor<br>$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &\leq b \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$ | $Z^{LPB} = \max p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$<br>hvor<br>$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &\leq b \\ x_1 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$ | $Z^{LPC} = \max p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$<br>hvor<br>$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &\leq b \\ x_1 &\geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$ |

Antag at alle LP problemerne har en lovlig løsning og antag at $Z^{LPA} = 30$, $Z^{LPB} = 25$ og $Z^{LPC} = 20$. Antag desuden at den optimale løsning til problem C er $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 0$. Baseret på disse oplysninger ønsker vi at bestemme i hvilket interval $Z^{IP}$ må befinde sig i. Nedenfor er der listet flere korrekte intervaller og også nogle forkerte intervaller. Find det korrekte interval der mest præcist definerer $Z^{IP}$

**10A)** $20 \leq Z^{IP} \leq \infty$

**10B)** $20 \leq Z^{IP} \leq 30$

**10C)** $-\infty \leq Z^{IP} \leq 25$

**10D)** $25 \leq Z^{IP} \leq 25$

**10E)** $20 \leq Z^{IP} \leq 20$

**10F)** $20 \leq Z^{IP} \leq 25$

**Opgave 11 - Transportproblemet** I denne opgave betragter vi et transportproblem hvor varer skal fragtes fra 3 fabrikker til 3 varelagere. Vi betegner fabrikkerne A1, A2, A3. Varelagerne kalder vi B1, B2 og B3. Tabellen nedenfor viser transport omkostningerne per enhed imellem hvert par af fabrik/varelager. Tabellen viser også hvor mange varer der er til rådighed i hver fabrik og hvor mange varer hver enkelt varelager efterspørger. Som man kan se efterspørger varelagerne flere varer end fabrikkerne kan levere. Varelager B1 og B2 skal altid have opfyldt deres efterspørgsel mens det er ok at levere mindre til B3 end varelageret efterspørger. De to streger i tabellen indikerer at fabrik A1 ikke kan levere til varelager B1 og fabrik A2 ikke kan levere til B2.

| | B1 | B2 | B3 | Udbud |
|---|---|---|---|---|
| A1 | - | 1 | 9 | 10 |
| A2 | 6 | - | 6 | 15 |
| A3 | 7 | 2 | 4 | 10 |
| Efterspørgsel | 15 | 15 | 15 | |

Nedenfor er der vist 6 forsøg på at modelere problemet som et balanceret transportproblem (modellen vises som en tabel som ovenfor). $M$ er i den forbindelse et meget stort tal (f.eks. $M = 5000$) og F4 er en »fupfabrik«. Hvilken tabel er korrekt?

**11A)**

| | B1 | B2 | B3 | Udbud |
|---|---|---|---|---|
| A1 | M | 1 | 9 | 10 |
| A2 | 6 | M | 6 | 15 |
| A3 | 7 | 2 | 4 | 10 |
| F4 | 0 | 0 | M | 10 |
| Efterspørgsel | 15 | 15 | 15 | |

**11B)**

| | B1 | B2 | B3 | Udbud |
|---|---|---|---|---|
| A1 | M | 1 | 9 | 10 |
| A2 | 6 | M | 6 | 15 |
| A3 | 7 | 2 | 4 | 10 |
| Efterspørgsel | 15 | 15 | 5 | |

**11C)**

| | B1 | B2 | B3 | Udbud |
|---|---|---|---|---|
| A1 | M | 1 | 9 | 15 |
| A2 | 6 | M | 6 | 15 |
| A3 | 7 | 2 | 4 | 15 |
| F4 | 0 | 0 | M | 0 |
| Efterspørgsel | 15 | 15 | 15 | |

**11D)**

| | B1 | B2 | B3 | Udbud |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 0 | 1 | 9 | 10 |
| A2 | 6 | 0 | 6 | 15 |
| A3 | 7 | 2 | 4 | 10 |
| F4 | 0 | 0 | M | 10 |
| Efterspørgsel | 15 | 15 | 15 | |

**11E)**

| | B1 | B2 | B3 | Udbud |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 0 | 1 | 9 | 10 |
| A2 | 6 | 0 | 6 | 15 |
| A3 | 7 | 2 | 4 | 10 |
| Efterspørgsel | 15 | 15 | 5 | |

**11F)**

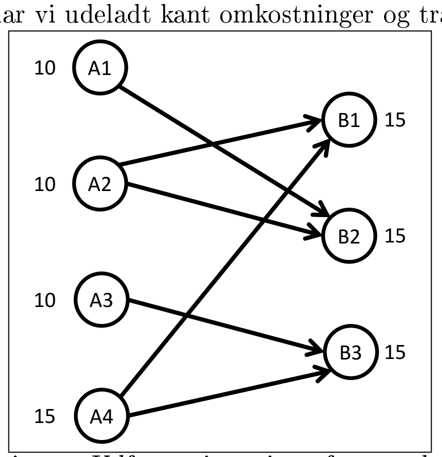
| | B1 | B2 | B3 | Udbud |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 0 | 1 | 9 | 15 |
| A2 | 6 | 0 | 6 | 15 |
| A3 | 7 | 2 | 4 | 15 |
| F4 | 0 | 0 | M | 0 |
| Efterspørgsel | 15 | 15 | 15 | |

**Opgave 12 - Transportproblemet** I denne opgave betragter vi et transportproblem hvor varer skal fragtes fra 4 fabrikker til 3 varelagere. Vi betegner fabrikkerne A1, A2, A3 og A4. Varelagerne kalder vi B1, B2 og B3. Tabellen nedenfor viser transport omkostningerne per enhed imellem hvert par af fabrik/varelager. Tabellen viser også hvor mange varer der er til rådighed i hver fabrik og hvor mange varer hver enkelt varelager efterspørger.

| | B1 | B2 | B3 | Udbud |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 9 | 1 | 9 | 10 |
| A2 | 6 | 4 | 6 | 10 |
| A3 | 7 | 2 | 4 | 10 |
| A4 | 1 | 7 | 6 | 15 |
| Efterspørgsel | 15 | 15 | 15 | |

En lovlig, men ikke optimal løsning er skitseret i tabellen nedenfor. Tabellen hvor mange varer der sendes mellem fabrikker og varelagre for at opfylde behovet. Løsningen er skitseret grafisk i figuren til højre for tabellen. I figuren har vi udeladt kant omkostninger og transportmængder.

| Fra | Til | Antal |
|---|---|---|
| A1 | B2 | 10 |
| A2 | B1 | 5 |
| A2 | B2 | 5 |
| A3 | B3 | 10 |
| A4 | B1 | 10 |
| A4 | B3 | 5 |




Vi ønsker nu at forbedre løsningen. Udfør en iteration af netværkssimplexalgoritmen baseret på ovenstående løsning. Hvilken kant (variabel) skal tilføjes til løsningen hvis man følger algoritmen? Hvor meget skal der sendes via kanten?

**12A)** Der skal sendes 10 varer fra A2 til B3

**12B)** Der skal sendes 10 varer fra A3 til B2

**12C)** Der skal sendes 5 varer fra A1 til B3

**12D)** Der skal sendes 10 varer fra A1 til B3

**12E)** Der skal sendes 5 varer fra A2 til B3

**12F)** Der skal sendes 5 varer fra A3 til B2

**Opgave 13 - Assignmentproblemet** Anton, Bente, Carl og Dorte deler en lejlighed i København. De skal fordeles dagens opgaver i lejligheden (f.eks. opvask, madlavning, støvsugning osv.) imellem sig. Vi kalder opgaverne A,B, C og D. Hver beboer skal have præcis en opgave. Hver beboer har givet de fire opgaver en score imellem 1 og 9. En lav score betyder at beboeren synes godt om opgaven, mens en høj score gives til opgaver de ikke bryder sig om. Nedenfor ses en tabel der viser hvordan beboerne bedømmer opgaverne.

| | Opg. A | Opg. B | Opg. C | Opg. D |
|---|---|---|---|---|
| Anton | 2 | 5 | 3 | 7 |
| Bente | 4 | 2 | 5 | 6 |
| Carl | 5 | 5 | 4 | 9 |
| Dorte | 2 | 6 | 1 | 7 |

Vi ønsker at fordele opgaverne blandt beboerne så de hver får en opgave og så summen af scoren for de tildelte opgaver minimeres. Hvad er den laveste samlede score der kan opnås?

**13A)** 12

**13B)** 13

**13C)** 14

**13D)** 15

**13E)** 16

**13F)** 17

**Opgave 14 - Assignmentproblemet** Baggrunden for denne opgave er den samme som for opgave 13, men nu ved vi ikke hvilken score Anton, Bente, Carl og Dorte har tilknyttet til opgaverne (værdierne er anderledes end i opgave 13). Din ven Erik kendte disse værdier og har allerede fundet den optimale løsning til assignmentproblemet ved hjælp af den ungarske algoritme. Du ved desværre kun hvor meget han har trukket fra hver række (noteret til højre for hver række) og hver søjle (noteret under hver søjle) mens han løste problemet (se tabellen nedenfor).

| | Opg. A | Opg. B | Opg. C | Opg. D | |
|---|---|---|---|---|---|
| Anton | ? | ? | ? | ? | 6 |
| Bente | ? | ? | ? | ? | 3 |
| Carl | ? | ? | ? | ? | 2 |
| Dorte | ? | ? | ? | ? | 1 |
| | -1 | -1 | 0 | 1 | |

Erik har f.eks. trukket 6 fra hvert element i første række og lagt 1 til hvert element i søjle 1. Hvilken objektværdi fandt Erik frem til (hvad var summen af scoren på de tildelte opgaver?).

- Hint: Tænk på det duale problem.

**14A)** -2

**14B)** 9

**14C)** 10

**14D)** 11

**14E)** 12

**14F)** 13

**Opgave 15 - Dynamisk programmering** Bemærk: Nedenfor benytter vi os af notationen $A \setminus B$ hvor $A$ og $B$ er to mængder. $A \setminus B$ er den mængde der består af alle de elementer som er i A, men ikke i B. For eksempel: $\{1, 2, 3\} \setminus \{2\} = \{1, 3\}$.

Du har arvet 50000 kr. Dine venner Anton, Bente og Carl har alle startet deres egen virksomhed og vil meget gerne låne penge af dig. De vil alle gerne låne så meget som overhovedet muligt af dig for at finansiere deres forretning og vil gerne betale renter. Du beslutter dig for at låne pengene ud over de næste fire år, med følgende betingelser:

1. Pengene lånes ud et år ad gangen.
2. Hvert år udlåner du de 50000 kr plus eventuelle renter optjent i de foregående år.
3. Du vil ikke låne ud til samme person to år i træk.

Nedenstående tabel (til venstre) viser hvor stor rente hver af dine venner vil betale over de næste fire år. Tabellen til højre viser den samme information i en form der er lettere at regne på. Elementet på række $i$ og søjle $n$ i tabellen til højre betegnes $r(i, n)$.

| | Årlig rente | | | |
|---|---|---|---|---|
| | År 1 | År 2 | År 3 | År 4 |
| Anton | 4% | 2% | 3% | 5% |
| Bente | 6% | 6% | 2% | 3% |
| Carl | 3% | 5% | 4% | 2% |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1,04 | 1,02 | 1,03 | 1,05 |
| 1,06 | 1,06 | 1,02 | 1,03 |
| 1,03 | 1,05 | 1,04 | 1,02 |

Hvis du i år 1 og 3 låner penge ud til Anton og i år 2 og 4 låner ud til Carl vil du således ende med beløbet 50000kr$\cdot 1,04 \cdot 1,05 \cdot 1,03 \cdot 1,02$ eller ca. 57363 kr. Denne løsning er ok da reglen om at man ikke udlåner til sammen person to år i træk er opfyldt. Derimod vil det ikke være ok at låne ud til Anton de første to år og derefter lå ud til Carl i de to sidste år.

Vi kan løse problemet ved hjælp af dynamisk programmering. En mulig fortolkning på trin, tilstand og beslutningsvariabel er følgende: Trinene i problemet svarer til hvert af de fire år, tilstanden $s_n$ i år $n$ svarer til personen man har besluttet at låne ud til i år $n$ og beslutningsvariablen $x_n$ indikerer hvem man vil låne ud til næste år. For at lette notationen vil vi betegne de tre venner med tallene 1,2,3 (for henholdsvis Anton, Bente og Carl).

Vi definerer $f_4^*(s_4) = 50000 \cdot r(s_4, 4)$ og ønsker at opskrive $f_n^*(s_n)$ for $n = 1, 2, 3$ således at det optimale beløb du vil ende med efter de 4 år findes ved udregningen

$$\max_{s_1 \in \{1,2,3\}} f_1^*(s_1)$$

Hvad er den korrekte definition af $f_n^*(s_n)$ for $n = 1, 2, 3$?

**15A)**

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in (\{1,2,3\} \setminus \{s_n\})} \{f_{n+1}(x_n)\} + r(s_n, n)$$

**15B)**

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in \{1,2,3\}} \{f_{n+1}(x_n)\} \cdot r(s_n, n)$$

**15C)**

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in (\{1,2,3\} \setminus \{s_n\})} \{f_{n+1}(x_n)\} \cdot r(x_n, n)$$

**15D)**

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in \{1,2,3\}} \{f_{n+1}(x_n)\} + r(s_n, n)$$

**15E)**

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in (\{1,2,3\} \setminus \{s_n\})} \{f_{n+1}(x_n)\} \cdot r(s_n, n)$$

**15F)**

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in (\{1,2,3\} \setminus \{s_n\})} \{f_{n+1}(x_n)\} + r(x_n, n)$$

**Opgave 16** Hvilket beløb vil du ende med hvis du investerer de 50000 kr optimalt? Eller med andre ord, bestem værdien af

$$\max_{s_1 \in \{1,2,3\}} f_1^*(s_1)$$

**16A)** ca. 58477 kr

**16B)** ca. 59601 kr

**16C)** ca. 59612 kr

**16D)** ca. 60191 kr

**16E)** ca. 60566 kr

**16F)** ca. 61210 kr

**Opgave 17 - spilteori** Vi betragter et nulsumsspil med to spillere og følgende udbyttetabel:

| | | Spiller 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| | $R_1$ | -4 | -2 | -3 |
| Spiller 1 | $R_2$ | 1 | 4 | 1 |
| | $R_3$ | 2 | -1 | -2 |

Spiller 1 har strategierne $R_1, R_2$ og $R_3$ mens spiller 2 har strategierne $S_1, S_2$ og $S_3$. Positive tal er til fordel for spiller 1.

Hvad er værdien af spillet?

**17A)** -2

**17B)** -1

**17C)** 1

**17D)** $\frac{4}{3}$

**17E)** $\frac{5}{3}$

**17F)** 2

**Opgave 18 - spilteori** Vi betragter nu følgende udbyttetabel (stadig et nulsumsspil):

| | | Spiller 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| | $R_1$ | -3 | 2 | 2 |
| Spiller 1 | $R_2$ | -1 | 1 | 1 |
| | $R_3$ | 3 | -2 | 3 |

Vi ønsker igen at bestemme værdien af spillet. Man kan med fordel benytte følgende hints:

- En blandet strategi er nødvendig.
- Det er optimalt for spiller 2 at tildele sandsynligheden 4/7 til strategi $S_2$.

Hvad er værdien af spillet?

**18A)** -1

**18B)** $-\frac{3}{7}$

**18C)** $-\frac{1}{7}$

**18D)** $\frac{1}{7}$

**18E)** $\frac{4}{7}$

**18F)** 1

**Opgave 19 - køteori** Som bekendt betyder det meget for danskerne at kunne slå svenskerne i fodbold. Den danske regering planlægger derfor i al hemmelighed at opsende spionsatellitter der til enhver tid kan overvåge de svenske forberedelser til næste landskamp. Den danske satellitteknologi er desværre ikke helt i top så man forventer hyppige nedbrud. Heldigvis har man god erfaring med at få satellitterne tilbage i drift igen på trods af den store afstand.

Det antages at tiden mellem et nedbrud for en satellit er en dag. Det antages ligeledes at tiden mellem nedbrud følger eksponentialfordelingen. Tiden det tager at få en satellit tilbage i drift antages også at være eksponentialfordelt med en forventet »nedetid« (»reperationstid«) på to timer.

På grund af den ringe driftsikkerhed ønsker regeringen at opsende to spionsatellitter. Hvis begge satellitter er ude af drift på samme tid har man desværre kun ressourcer til at arbejde på at få en satellit tilbage i drift ad gangen og den anden må derfor vente indtil den først nedbrudte satellit er tilbage i drift.

I hvor mange timer per dag kan man forvente at mindst en spionsatellit er i drift?

**19A)** ca. 22 timer

**19B)** ca. 22,2 timer

**19C)** ca. 22,6 timer

**19D)** ca. 22,9 timer

**19E)** ca. 23,1 timer

**19F)** ca. 23,7 timer

**Opgave 20** Bestem $L$ for køsystemet (i gennemsnit, hvor mange satelliter forventes at være ude af drift)

**20A)** $L \approx 0{,}12$

**20B)** $L \approx 0{,}16$

**20C)** $L \approx 0{,}22$

**20D)** $L \approx 0{,}32$

**20E)** $L \approx 0{,}38$

**20F)** $L \approx 0{,}44$

# 42101: Introduktion til operationsanalyse. Eksamen 20. maj 2016

Navn:

Studie nummer:

| Opgave | Svar | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 2 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 3 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 4 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 5 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 6 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 7 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 8 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 9 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 10 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 11 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 12 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 13 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 14 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 15 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 16 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 17 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 18 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 19 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 20 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |

DTU Danmarks Tekniske Universitet

**Skriftlig prøve, den 16. maj, 2017. Side 1 af 15 sider**
**Kursus navn:** Introduktion til Operationsanalyse
**Kursus nummer:** 42101
**Tilladte Hjælpemidler:** Alle skriftlige hjælpemidler. Computer, mobiltelefon, egen lommeregner må ikke anvendes, men der udleveres en TI-30 lommeregner. Besvarelsen kan udarbejdes med blyant eller kuglepen og afleveres på det vedhæftede skema (se sidste side). Svarene kan også afleveres på eksamenspapir hvis der skrives forkert på skemaet. Husk at angive studienummer på alle papirer der afleveres.
**Varighed:** 4 timer
**Vægtning**: Opgavesættet består af 20 multiple-choice opgaver. Hvert korrekt svar til en multiple-choice opgave giver 5 point. Man får ikke strafpoint for forkerte svar til en multiple-choice opgave. Man kan samlet opnå 100 point. **For at besvare en multiple-choice opgave skal man, uden yderligere forklaring, tydeligt notere svaret i det vedhæftede skema (se sidste side).** Hvis flere svarmuligheder vælges for den samme opgave regnes det for et forkert svar.

**Opgave 1: Simplex** Betragt følgende LP

$$\max Z = 6x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

hvor

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 16 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 9 \\ 2x_1 + x_2 + 1x_3 &\le 11 \\ x_i &\ge 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\} \end{aligned}$$

Hvis problemet løses med simplex algoritmen er første tableau ($x_4, x_5$ og $x_6$ er slack variable):

| b.v. | eq. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | -6 | -8 | -6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| x4 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 16 |
| x5 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 9 |
| x6 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 11 |

Udfør en simplex iteration (pivoter en variabel ind i basis og en anden variabel ud). Hvilket af følgende tableau'er vil fremkomme efter denne operation (se næste side)?

**1A)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | -2 | 0 | -2 | 0 | 4 | 0 | 64 |
| $x_2$ | 1 | 0 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0 | 0,5 | 0 | 8 |
| $x_4$ | 2 | 0 | 1,5 | 0 | 1,5 | 1 | -0,5 | 0 | 1 |
| $x_6$ | 3 | 0 | 1,5 | 0 | 0,5 | 0 | -0,5 | 1 | 3 |

**1B)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | -2 | 0 | -2 | 0 | 4 | 0 | 64 |
| $x_2$ | 1 | 0 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0 | 0,5 | 0 | 8 |
| $x_4$ | 2 | 0 | 0,5 | 0 | 0,5 | 1 | -0,5 | 0 | 1 |
| $x_6$ | 3 | 0 | 1,5 | 0 | 0,5 | 0 | -0,5 | 1 | 3 |

**1C)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | -2 | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 64 |
| $x_2$ | 1 | 0 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0 | 8 |
| $x_5$ | 2 | 0 | 1,5 | 0 | 1,5 | -0,5 | 1 | 0 | 1 |
| $x_6$ | 3 | 0 | 1,5 | 0 | 0,5 | -0,5 | 0 | 1 | 3 |

**1D)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | -2 | 0 | -2 | 0 | 4 | 0 | 64 |
| $x_2$ | 1 | 0 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0 | 0,5 | 0 | 8 |
| $x_4$ | 2 | 0 | 1,5 | 0 | 1,5 | 1 | -0,5 | 0 | 2 |
| $x_6$ | 3 | 0 | 1,5 | 0 | 0,5 | 0 | -0,5 | 1 | 4 |

**1E)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | -2 | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 64 |
| $x_2$ | 1 | 0 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0 | 8 |
| $x_5$ | 2 | 0 | 1,5 | 0 | 1,5 | -0,5 | 1 | 0 | 2 |
| $x_6$ | 3 | 0 | 1,5 | 0 | 0,5 | -0,5 | 0 | 1 | 4 |

**1F)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | -2 | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 64 |
| $x_2$ | 1 | 0 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0 | 8 |
| $x_5$ | 2 | 0 | 0,5 | 0 | 0,5 | -0,5 | 1 | 0 | 1 |
| $x_6$ | 3 | 0 | 1,5 | 0 | 0,5 | -0,5 | 0 | 1 | 3 |

**Opgave 2: Fundamental indsigt** Betragt følgende LP

$$\max 10x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

hvor

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 15 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Følgende tableau er en del af et tableau der repræsenterer en lovlig, men ikke nødvendigvis optimal løsning ($x_4$ og $x_5$ er slackvariable for henholdsvis første og anden begrænsning).

| b.v. | eq. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
| ? | 1 | 0 | ? | ? | ? | -0,5 | 0,75 | ? |
| ? | 2 | 0 | ? | ? | ? | 0,5 | -0,25 | ? |

Gør tableauet færdigt ved hjælp af den fundamentale indsigt. Hvilket af følgende tableauer er korrekt?

**2A)**

| b.v. | eq. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | -1,25 | 0 | -3,5 | 6,75 | 55,75 |
| x1 | 1 | 0 | 1 | 0,25 | 0 | -0,5 | 0,75 | 4,75 |
| x3 | 2 | 0 | 0 | 0,25 | 1 | 0,5 | -0,25 | 2,75 |

**2B)**

| b.v. | eq. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 1,25 | 0 | -3,5 | 6,75 | 55,75 |
| x1 | 1 | 0 | 1 | 0,25 | 0 | -0,5 | 0,75 | 4,75 |
| x3 | 2 | 0 | 0 | 0,25 | 1 | 0,5 | -0,25 | 2,75 |

**2C)**

| b.v. | eq. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 1,25 | -3,5 | 6,75 | 55,75 |
| x1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0,25 | -0,5 | 0,75 | 4,75 |
| x2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0,25 | 0,5 | -0,25 | 2,75 |

**2D)**

| b.v. | eq. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | -1,25 | -3,5 | 6,75 | 55,75 |
| x1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0,25 | -0,5 | 0,75 | 4,75 |
| x2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0,25 | 0,5 | -0,25 | 2,75 |

**2E)**

| b.v. | eq. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 1,25 | 0 | -3,5 | 6,75 | 53 |
| x1 | 1 | 0 | 1 | 0,25 | 0 | -0,5 | 0,75 | 4,75 |
| x3 | 2 | 0 | 0 | 0,25 | 1 | 0,5 | -0,25 | 2,75 |

**2F)**

| b.v. | eq. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 1,25 | -3,5 | 6,75 | 53 |
| x1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0,25 | -0,5 | 0,75 | 4,75 |
| x2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0,25 | 0,5 | -0,25 | 2,75 |

**Opgave 3: Fundamental indsigt** Vi betragter et LP problem (skrevet på matrixform)

$$Z^* = \max cx$$

hvor

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

med tre begrænsninger. Du får oplyst at $b = \begin{bmatrix} 19 \\ 19 \\ 4 \end{bmatrix}$ samt at

$$S^* = B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{9} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

i den optimale løsning. Endelig er det oplyst at de tre basis variable i den optimale løsning har koefficienter 2, 0 og 7 i objektfunktionen (dvs. $c_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ for den sidste iteration af simplex algoritmen). Hvad er den optimale værdi af de tre duale variable $y_1, y_2$ og $y_3$ svarende til de tre begrænsninger i det primale problem og hvad er den optimale objektværdi $Z^*$?

**3A)** $y_1 = \frac{38}{3}, y_2 = 19, y_3 = \frac{26}{9}, Z^* = \frac{979}{9}$

**3B)** $y_1 = -\frac{2}{3}, y_2 = 0, y_3 = \frac{17}{9}, Z^* = \frac{182}{9}$

**3C)** $y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = 0, y_3 = -\frac{17}{9}, Z^* = \frac{131}{9}$

**3D)** $y_1 = -\frac{38}{3}, y_2 = 19, y_3 = -\frac{26}{9}, Z^* = \frac{979}{9}$

**3E)** $y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = 0, y_3 = \frac{17}{9}, Z^* = \frac{182}{9}$

**3F)** $y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = 0, y_3 = \frac{17}{9}, Z^* = \frac{131}{9}$

**Opgave 4: Dualitet** Betragt følgende LP

$$\max 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

hvor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 5x_2 + 3x_3 &\geq -2 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\in \mathbb{R} \\ x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Lad $y_1, y_2$ og $y_3$ være de duale variabel svarende henholdsvis første, anden og tredie begrænsning. Opskriv det duale problem ved hjælp af SOB metoden. Hvilken af følgende modeller er korrekt (se næste side).

**4A)**

$$\min 5y_1 - 2y_2 + 7y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &\leq 2 \\ y_1 + 5y_2 + y_3 &= 3 \\ y_1 + 3y_2 &\geq 1 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**4B)**

$$\min 5y_1 - 2y_2 + 7y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &\geq 2 \\ y_1 + 5y_2 + y_3 &= 3 \\ y_1 + 3y_2 &\leq 1 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**4C)**

$$\min 5y_1 - 2y_2 + 7y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &\leq 2 \\ y_1 + 5y_2 + y_3 &\leq 3 \\ y_1 + 3y_2 &\leq 1 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**4D)**

$$\min 5y_1 - 2y_2 + 7y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &\leq 2 \\ 5y_2 + 3y_3 &= 3 \\ y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**4E)**

$$\min 5y_1 - 2y_2 + 7y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &\geq 2 \\ 5y_2 + 3y_3 &= 3 \\ y_1 + y_2 &\leq 1 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**4F)**

$$\min 5y_1 - 2y_2 + 7y_3$$

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &\leq 2 \\ 5y_2 + 3y_3 &\leq 3 \\ y_1 + y_2 &\leq 1 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Opgave 5 - Følsomhedsanalyse** Vi løser følgende LP

$$\max 5x_1 + 9x_2 + 2x_3$$

hvor

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &\leq 19 \\ 2x_2 + x_3 &\leq 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Når LP'et løses med simplex algoritmen bliver det endelige tableau ($x_4, x_5$ og $x_6$ er slack variable):

| b.v. | Z | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 0 | 0 | 3,75 | 0 | 3,25 | 2,5 | 79,25 |
| x4 | 0 | 0 | 0 | 1,75 | 1 | 0,25 | -0,5 | 11,25 |
| x2 | 0 | 0 | 1 | 0,5 | 0 | 0,5 | 0 | 4,5 |
| x1 | 0 | 1 | 0 | 0,25 | 0 | -0,25 | 0,5 | 7,75 |

Vi ønsker nu at undersøge hvad der sker hvis vi øger koefficienten foran $x_1$ i målfunktionen med $\Delta$, dvs. vi betragter objektfunktionen

$$\max(5 + \Delta)x_1 + 9x_2 + 2x_3$$

I hvilket interval for $\Delta$ forbliver basis optimal? ($\Delta$ kan både være positiv og negativ)

**5A)** $-15 \leq \Delta \leq \infty$

**5B)** $-5 \leq \Delta \leq \infty$

**5C)** $-\infty \leq \Delta \leq 13$

**5D)** $-15 \leq \Delta \leq -5$

**5E)** $-15 \leq \Delta \leq 13$

**5F)** $-5 \leq \Delta \leq 13$

**Opgave 6 - Følsomhedsanalyse** Vi betragter stadig det oprindelige LP og det tilhørende optimale tableau fra opgave 5. Denne gang ønsker vi at ændre højresiden på tredie begrænsning. Dvs. vi erstatter tredie begrænsning med

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 + \Delta$$

I hvilket interval for $\Delta$ er basis uændret? ($\Delta$ kan både være positiv og negativ)

**6A)** $-10,5 \leq \Delta \leq 20$

**6B)** $-15,5 \leq \Delta \leq \infty$

**6C)** $-\infty \leq \Delta \leq 22,5$

**6D)** $-\infty \leq \Delta \leq 20$

**6E)** $-15,5 \leq \Delta \leq 22,5$

**6F)** $-10,5 \leq \Delta \leq \infty$

**Opgave 7: Transportproblemet** I denne opgave betragter vi et transportproblem hvor varer skal fragtes fra 3 fabrikker til 3 butikker. Vi betegner fabrikkerne A1, A2, A3. Butikkerne kalder vi B1, B2 og B3. Tabellen nedenfor viser transport omkostningerne per enhed imellem hvert par af fabrik/butik. Tabellen viser også hvor mange varer der er til rådighed i hver fabrik og hvor mange varer hver enkelt butik efterspørger.

| | B1 | B2 | B3 | Udbud |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 3 | 1 | 8 | 18 |
| A2 | 6 | 5 | 3 | 15 |
| A3 | 5 | 2 | 8 | 12 |
| Efterspørgsel | 20 | 12 | 13 | |

En lovlig, men ikke optimal løsning er skitseret i tabellen nedenfor. Tabellen viser hvor mange varer der sendes mellem fabrikker og butikker for at opfylde behovet.

| Fra | A1 | A1 | A2 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Til | B1 | B2 | B1 | B3 | B1 |
| Antal | 6 | 12 | 2 | 13 | 12 |

I denne opgave og den følgende skal du udføre en iteration af netværksimplex algoritmen som beskrevet i noten »Appendix: Netværks Simplex for transportproblemet«. Vi tager udgangspunkt i løsningen ovenfor og undersøger om den kan forbedres. Første skridt er at udregne de duale variable $u_i$ (svarende til fabrikkerne) og $v_j$ (svarende til butikkerne) for den viste løsning. Hvilke duale variable når du frem til ved at følge noten?

**7A)**
$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = -2,$
$v_1 = 3, v_2 = 1, v_3 = 0$

**7B)**
$u_1 = 0, u_2 = -3, u_3 = -2,$
$v_1 = 3, v_2 = 1, v_3 = 0$

**7C)**
$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = -2,$
$v_1 = 3, v_2 = 1, v_3 = 1$

**7D)**
$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = -2,$
$v_1 = 3, v_2 = 1, v_3 = 2$

**7E)**
$u_1 = 0, u_2 = -3, u_3 = -2,$
$v_1 = 3, v_2 = 1, v_3 = 2$

**7F)**
$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0,$
$v_1 = 3, v_2 = 1, v_3 = 1$

**Opgave 8: Transportproblemet** Efter at have bestemt de duale variable i opgave 7 kan vi nu bestemme hvilken kant (variabel) der skal tilføjes til løsningen for at forbedre denne. Hvilket af følgende svar er korrekt:

**8A)** Kanten mellem A3 og B2 skal tilføjes og der skal sendes 12 varer ved hjælp af kanten

**8B)** Kanten mellem A3 og B2 skal tilføjes og der skal sendes 0 varer ved hjælp af kanten

**8C)** Kanten mellem A3 og B3 skal tilføjes og der skal sendes 12 varer ved hjælp af kanten

**8D)** Kanten mellem A3 og B3 skal tilføjes og der skal sendes 13 varer ved hjælp af kanten

**8E)** Kanten mellem A2 og B2 skal tilføjes og der skal sendes 2 varer ved hjælp af kanten

**8F)** Kanten mellem A2 og B2 skal tilføjes og der skal sendes 12 varer ved hjælp af kanten

**Opgave 9: Tildelingsproblemet** I en softwarevirksomhed er der fire udviklerhold. Vi kalder disse hold I, II, III og IV. Virksomheden skal løse fire opgave (A,B,C og D) Tabellen nedenfor viser hvor lang tid (antal dage) man skønner at hver hold vil bruge på hver opgave.

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| A | 5 | 13 | 1 | 6 |
| B | 7 | 12 | 6 | 17 |
| C | 14 | 10 | 19 | 3 |
| D | 3 | 14 | 1 | 2 |

Vi ønsker at finde en tildeling af opgaver som minimerer den samlede tid brugt på de fire opgaver. Løsningen skal sikre at hvert udviklerhold får præcis en opgave. Problemstillingen kan løses som et tildelingsproblem. Løs tildelingsproblem. Hvor mange dage skal der samlet bruges på de fire opgaver?

**9A)** 17 dage

**9B)** 21 dage

**9C)** 18 dage

**9D)** 20 dage

**9E)** 22 dage

**9F)** 19 dage

**Opgave 10: Tildelingsproblemet** Generelt kan et tildelingsproblem løses som et LP

$$\min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in N} x_{ij} &= 1 \quad \forall i \in M \qquad && (u_i) \\
\sum_{i \in M} x_{ij} &= 1 \quad \forall j \in N \qquad && (v_j) \\
x_{ij} &\geq 0 \quad \forall i \in M, j \in N
\end{aligned}$$

hvor $M$ er mængden af opgaver og $N$ er mængden af udviklerhold. $u_i$ er de duale variable svarende til første sæt af begrænsninger og $v_j$ er de duale variable svarende til andet sæt af begrænsninger. Hvilken af følgende duale løsninger er lovlig og optimal for tildelingsproblemet i opgave 9?

**Et hint**: der kan være flere optimale løsninger til det duale problem. Det betyder at selvom du kender en lovlig og optimal løsning til det duale problem, så er det ikke sikkert at du kan finde løsningen i listen af svarmuligheder. I så fald er det nødvendigt at afgøre om en løsning er lovlig og optimal på anden vis.

**10A)**
$u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 3, u_4 = 1,$
$v_1 = 1, v_2 = 8, v_3 = 0, v_4 = 0$

**10B)**
$u_1 = 0, u_2 = 6, u_3 = 3, u_4 = 1,$
$v_1 = 1, v_2 = 8, v_3 = 0, v_4 = 0$

**10C)**
$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 1, u_4 = 1,$
$v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 0, v_4 = 0$

**10D)**
$u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 3, u_4 = 1,$
$v_1 = 2, v_2 = 7, v_3 = 0, v_4 = 0$

**10E)**
$u_1 = 1, u_2 = 6, u_3 = 3, u_4 = 1,$
$v_1 = 1, v_2 = 8, v_3 = 0, v_4 = 0$

**10F)**
$u_1 = 2, u_2 = 1, u_3 = 1, u_4 = 1,$
$v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 2, v_4 = 2$

**Opgave 11: Spilteori** Vi betragter et nulsumsspil med to spillere og følgende udbyttetabel:

| | | Spiller 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| | $R_1$ | 2 | -3 | 2 |
| Spiller 1 | $R_2$ | 2 | -2 | -1 |
| | $R_3$ | -2 | 3 | 3 |

Spiller 1 har strategierne $R_1, R_2$ og $R_3$ mens spiller 2 har strategierne $S_1, S_2$ og $S_3$. Positive tal er til fordel for spiller 1.

Hvad er spillets værdi?

**11A)** -1

**11B)** 0

**11C)** $\frac{1}{9}$

**11D)** $\frac{7}{9}$

**11E)** 2

**11F)** $\frac{2}{9}$

**Opgave 12: Spilteori** Vi betragter et nulsumsspil med to spillere og følgende udbyttetabel ($a$ er et tal vi ønsker at bestemme, positive tal er til fordel for spiller 1):

| | | Spiller 2 | |
|---|---|---|---|
| | | $S_1$ | $S_2$ |
| | $R_1$ | 2 | 3 |
| Spiller 1 | $R_2$ | $a$ | -2 |

Er det muligt at vælge $a$ så spillets værdi bliver 4?

**A)** Ja, når $a = 4$ bliver spillets værdi 4

**B)** Ja, når $a = 5$ bliver spillets værdi 4

**C)** Ja, når $a = 6$ bliver spillets værdi 4

**D)** Ja, når $a = 7$ bliver spillets værdi 4

**E)** Ja, når $a = 8$ bliver spillets værdi 4

**F)** Nej, det er ikke muligt at vælge $a$ så spillets værdi bliver 4.

**Opgave 13: Heltalsprogrammering** Et firma kan producere to produkter A og B.

- Firmaet tjener $p_A$ kr per enhed af type A der produceres og $p_B$ kr per enhed af type B. $p_A$ og $p_B$ er to konstanter der begge er større end 0.
- Lad $x_A \geq 0$ og $x_B \geq 0$ være heltalsvariable der indikerer hvor mange enheder af henholdsvis produkt A og B der produceres.
- Firmaet kan højst producere 10000 enheder alt i alt. D.v.s der skal gælde at $x_A + x_B \leq 10000$
- Firmaet kan højst producere 4500 enheder af produkt A.
- Hvis firmaet producerer flere enheder af type A end type B vil firmaet yderligere tjene 9000 kr.

Vi ønsker at opskrive en heltalsprogrammeringsmodel der kan bestemme hvor mange produkter af hver type der skal produceres for at maksimere indtjeningen. Modellen bruger variablene $x_A$ og $x_B$ samt en binær hjælpevariabel $y \in \{0,1\}$. Hvilken af følgende modeller er korrekt?

**13A)**

$$\max p_A x_A + p_B x_B + 9000y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\leq 10000 \\ x_A &\leq 4500 \\ y &\leq x_A - x_B \\ x_A, x_B &\geq 0 \\ x_A, x_B &\in \mathbb{Z} \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**13B)**

$$\max p_A x_A + p_B x_B + 9000y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\leq 10000 \\ x_A &\leq 4500 \\ y &\leq 1 + \frac{1}{10001}(x_A - x_B - 1) \\ x_A, x_B &\geq 0 \\ x_A, x_B &\in \mathbb{Z} \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**13C)**

$$\max p_A x_A + p_B x_B + 9000y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\leq 10000 \\ x_A &\leq 4500 \\ y &\leq x_A + x_B \\ x_A, x_B &\geq 0 \\ x_A, x_B &\in \mathbb{Z} \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**13D)**

$$\max p_A x_A + p_B x_B + 9000y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\leq 10000 \\ x_A &\leq 4500 \\ y &\leq x_A - x_B + 1 \\ x_A, x_B &\geq 0 \\ x_A, x_B &\in \mathbb{Z} \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**13E)**

$$\max p_A x_A + p_B x_B + 9000y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\leq 10000 \\ x_A &\leq 4500 \\ y &\leq 1 + \frac{1}{10000}(x_A - x_B + 1) \\ x_A, x_B &\geq 0 \\ x_A, x_B &\in \mathbb{Z} \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**13F)**

$$\max p_A x_A + p_B x_B + 9000y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\leq 10000 \\ x_A &\leq 4500 \\ 10000y &\geq x_A \\ x_A, x_B &\geq 0 \\ x_A, x_B &\in \mathbb{Z} \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

**Opgave 14: Heltalsprogrammering** En af dine holdkammerater fra 42101 har forsøgt at løse et heltalsproblem med branch-and-bound metoden. Problemet har tre variable $x_1, x_2, x_3$ og det kan skrives på matrix form som følger:

$$Z^{IP} = \max cx$$

hvor

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq \mathbf{0} \\ x &\in \mathbb{Z}^3 \end{aligned}$$

hvor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ er vektoren af beslutningsvariable og $A$, $b$ og $c$ er passende matricer og vektorer. Din holdkammerat fortæller følgende:

- LP relaxeringen af heltalsproblemet som opstår ved at fjerne heltalsbegrænsningen er:

  $$z^{LP} = \max cx$$

  hvor

  $$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

  Vi kalder dette LP problem for »Start-LP« . Løsningen til dette LP problem er $x_1$ =1,3. $x_2$ =1,7 og $x_3 = 0$. Objektværdien er $Z^{LP}$ =4,7

- Hvis man tilføjer begrænsningen $x_2 \leq 1$ til »start-LP« får man en løsning $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 0)$ med objektværdi 4

- Hvis man i stedet tilføjer begrænsningen $x_2 \geq 2$ til »start-LP« så har det lineære programmerings problem ingen lovlig løsning.

Hvad kan vi konkludere på baggrund af oplysningerne?

**14A)** Heltalsproblemet er ubegrænset. $z^{IP}$ kan blive så stor det skal være

**14B)** Heltalsproblemet har ingen lovlige løsninger

**14C)** Den optimale løsning til heltalsproblemet har en objektværdi der er større end 4,7

**14D)** Den optimale løsning til heltalsproblemet har objektværdi $z^{IP} = 4$

**14E)** Den optimale løsning til heltalsproblemet har objektværdi $z^{IP} = 3$

**14F)** Den optimale løsning til heltalsproblemet har objektværdi $z^{IP}$ =4,7

**Opgave 15: Dynamisk programmering** I denne opgave ser vi på det ubegrænsede rygsækproblem. I problemstillingen har vi $n$ varetyper til rådighed. Lad $N = \{1, \ldots, n\}$. $p_m > 0$ angiver profitten af varetype $m \in N$, $w_m > 0$ angiver vægten af varetype $m \in N$ og $c$ er rygsækkens kapacitet. I det ubegrænsede rygsækproblem antager vi at vi har et ubegrænset antal varer af hver type til rådighed. I den version af problemet som blev gennemgået ved forelæsningerne (kaldet 0-1 rygsækproblemet) var der kun en af hver varetype. I det følgende repræsenterer $\mathbb{Z}_+$ mængden af heltal der er større end eller lig med 0 og Notationen $\lfloor x \rfloor$ udtrykker $x$ rundet **ned** til nærmeste heltal og $\lceil x \rceil$ udtrykker $x$ rundet **op** til nærmeste heltal. F.eks. $\lfloor 3,4 \rfloor = 3$ og $\lceil 3,4 \rceil = 4$.

En model for det ubegrænsede rygsækproblem er:

$$\max \sum_{m \in N} p_m x_m$$

hvor

$$\sum_{m \in N} w_m x_m \leq c$$

$$x_m \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall m \in N$$

Rekursionsformlen for det ubegrænsede rygsækproblem er næsten som for 0-1 rygsækproblemet. Vi benytter funktionerne.

- $f_m(s_m, x_m)$ =Bedst mulige samlede profit for varerne $1, \ldots, m$ når den resterende kapacitet er $s_m$ og vi tager $x_m \in \mathbb{Z}_+$ varer af type $m$ med i rygsækken.
- $f_m^*(s_m)$ =Bedst mulige samlede profit for varerne $1, \ldots, m$ når den resterende kapacitet er $s_m$.

Formlerne for de to funktioner er:

$$\begin{aligned} f_m(s_m, x_m) &= p_m x_m + f_{m-1}^*(s_m - w_m x_m) \\ f_m^*(s_m) &= \max_{\substack{x_m \in \mathbb{Z}_+ \\ x_m \leq \lfloor s_m / w_m \rfloor}} \{f_m(s_m, x_m)\} \end{aligned}$$

Vi mangler at definere $f_1^*(s_1)$. Hvilken definition er korrekt for det ubegrænsede rygsækproblem?

**15A)** $f_1^*(s_1) = \begin{cases} p_1 & \text{hvis } s_1 \geq w_1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

**15B)** $f_1^*(s_1) = 0$

**15C)** $f_1^*(s_1) = \begin{cases} p_1 s_1 & \text{hvis } s_1 \geq w_1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

**15D)** $f_1^*(s_1) = p_1 \left\lfloor \frac{s_1}{w_1} \right\rfloor$

**15E)** $f_1^*(s_1) = p_1 \left\lceil \frac{s_1}{w_1} \right\rceil$

**15F)** $f_1^*(s_1) = p_1$

**Opgave 16: Dynamisk programmering** Vi vil nu løse et ubegrænset rygsækproblem. Vi har $n = 3$, $c = 6$ og følgende profit og vægte

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 10 | 6 | 1 |
| $w_i$ | 4 | 3 | 2 |

Den optimale profit for det ubegrænsede rygsækproblem kan findes ved at beregne $f_n^*(c)$. Vi ønsker derfor at beregne $f_3^*(6)$. Som en ekstra test ønskes også værdien for $f_2^*(4)$. Hvilket af følgende svar er korrekt:

**16A)** $f_3^*(6) = 17$, $f_2^*(4)= 12$

**16B)** $f_3^*(6) =14$, $f_2^*(4)=10$

**16C)** $f_3^*(6) = 12$, $f_2^*(4)=10$

**16D)** $f_3^*(6) =12$, $f_2^*(4)= 7$

**16E)** $f_3^*(6) =11$, $f_2^*(4)=10$

**16F)** $f_3^*(6) =11$, $f_2^*(4)= 7$

**Opgave 17: Totalt unimodulære matricer** En af følgende matricer er totalt unimodulær. Hvilken er det?
[hint: betragt en opsplitning af rækkerne hvor de første 3 rækker hører til en mængde og de sidste 2 rækker hører til en anden mængde]

**17A)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**17B)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**17C)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**17D)**

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**17E)**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**17F)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**Opgave 18: Køteori** Vi ønsker at analysere ventetiden på et offentligt kontor. Der en medarbejder ansat til at betjene borgerne. Det antages at tiden mellem to borgere henvender sig på kontoret er eksponentialfordelt. I gennemsnit er der 25 minutter mellem hver henvendelse. Betjeningstiden antages ligeledes at være eksponentieltfordelt og i gennemsnit kan den ene medarbejder servicere tre borgere per time. Hvis medarbejderen er optaget med at betjene en anden borger vil nyankommne stille sig i kø. Det antages at køen er ubegrænset og det antages ligeledes at »kundepopulationen« er ubegrænset

Hvor lang tid må en borger i gennemsnit forventede at bruge på et besøg på kontoret (tid i kø plus betjeningstid)?

**18A)** 25 minutter

**18B)** 20 minutter

**18C)** 1 time

**18D)** 75 minutter

**18E)** 48 minutter

**18F)** 100 minutter

**Opgave 19: Køteori** Hvor mange kunder vil der i gennemsnit stå i kø på kontoret?

**19A)** Køen vil i gennemsnit have 16/5 kunder

**19B)** Køen vil i gennemsnit have 16/3 kunder

**19C)** Køen vil i gennemsnit have 7/5 kunder

**19D)** Køen vil i gennemsnit have 7/3 kunder

**19E)** Køen vil i gennemsnit have 4 kunder

**19F)** Køen vil i gennemsnit have 3 kunder

**Opgave 20: Køteori** Chefen på kontoret har bemærket at medarbejderen til tider ikke har noget at lave. Der er simpelthen ingen borgere at betjene. Chefen vil derfor have medarbejderen til at udfylde regneark når der ikke er nogen borgere der ønsker betjening. Medarbejderens arbejdsdag er 7,5 timer lang. Hvor mange minutter per dag kan chefen forvente at medarbejderen kan bruge på at udfylde regneark?

**20A)** 5 minutter

**20B)** 30 minutter

**20C)** 45 minutter

**20D)** 60 minutter

**20E)** 90 minutter

**20F)** 120 minutter

# 42101: Introduktion til operationsanalyse. Eksamen 16. maj 2017

Navn:

Studie nummer:

| Opgave | Svar | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 2 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 3 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 4 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 5 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 6 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 7 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 8 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 9 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 10 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 11 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 12 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 13 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 14 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 15 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 16 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 17 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 18 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 19 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 20 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |

DTU Danmarks Tekniske Universitet

**Written exam, december 12th, 2018. Page 1 of 23 pages**
**Course name:** Introduction to Operations Research
**Course number:** 42101
**Allowed aids:** All aids are permitted. Use of internet is not allowed.
**Duration:** 4 hours
**Weights of questions**: The exam consists of 19 questions. Question 1 is a a text-based exercise and a full answer including explanations should be handed in. All other questions are multiple-choice questions.

The text question counts for 10 points. Each correct answer to a multiple choice questions gives 5 point. A wrong answer gives 0 points. Only one answer is allowed per multiple choice question. If more than one answer is selected for a multiple choice questions then the answer is counted as wrong. The maximum number of points are 100.

Answers to multiple choice questions are indicated on the form below. Answers to multiple choice tasks can also be handed in on exam papers if you make a mistake on the form. Remember to write study number of all pages you hand in.

| Task | Answer | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Text question | | | | | |
| 2 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 3 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 4 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 5 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 6 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 7 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 8 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 9 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 10 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 11 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 12 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 13 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 14 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 15 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 16 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 17 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 18 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 19 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |

**Name:**

**Study Number:**

**Question 1: Linear programming, graphical method (text question, 10 points)**

Consider the following LP:

$$\max Z = 2x_1 + x_2$$

subject to

$$-x_1 + 3x_2 = 3 \quad (1)$$
$$3x_1 + x_2 \geq 6 \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 \leq 10 \quad (3)$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4)$$

Show the constraints and feasible region in a 2D coordinate system. Use the graphical method to determine the optimal solution. Report the value of $x_1, x_2$ and $Z$ in the optimal solution. Be as precise as possible and explain how you found the solution (solutions found by computer are not given any points in this exercise).

**Question 2: Simplex algorithm**

We are solving a linear programming problem with a maximizing objective function. While solving it we reach the following simplex tableau:

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | -1.5 | 11 | 0 | 4.5 | 18 |
| $x_4$ | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | -1 | 10 |
| $x_1$ | 2 | 0 | 1 | 0.5 | 2 | 0 | 0.5 | 2 |

Perform one iteration of the simplex algorithm, starting from the tableau above. What does the resulting tableau look like?

**2A)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 3 | 0 | 17 | 0 | 6 | 24 |
| $x_4$ | 1 | 0 | 0 | -4 | -8 | 1 | -3 | 1 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 2 | 4 | 0 | 1 | 3 |

**2B)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 17 | 3 | 6 | 24 |
| $x_2$ | 1 | 0 | 0 | 1 | -4 | 1 | -3 | 2 |
| $x_1$ | 2 | 0 | 1 | 0 | 4 | -3 | 1 | 4 |

**2C)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 3 | 17 | 0 | 0 | 6 | 24 |
| $x_4$ | 1 | 0 | -2 | -4 | 0 | 1 | -3 | 2 |
| $x_3$ | 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

**2D)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 3 | 0 | 17 | 0 | 6 | 24 |
| $x_4$ | 1 | 0 | -4 | 0 | -8 | 1 | -3 | 1 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 2 | 1 | 4 | 0 | 1 | 3 |

**2E)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 3 | 0 | 17 | 0 | 6 | 24 |
| $x_4$ | 1 | 0 | 0 | -4 | -8 | 1 | -3 | 2 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 2 | 4 | 0 | 1 | 4 |

**2F)**

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 3 | 0 | 17 | 0 | 6 | 24 |
| $x_4$ | 1 | 0 | -4 | 0 | -8 | 1 | -3 | 2 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 2 | 1 | 4 | 0 | 1 | 4 |

**Question 3: Minimum ratio test**

In the tableau below we have illustrated a part of a simplex tableau. $x_1$ is about to enter the basis. Which variable should leave the basis?

| b.v. | eq. | Z | $x_1$ | ... | RHS |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | -1.5 | ... | 10 |
| $x_2$ | 1 | 0 | 3 | ... | 0 |
| $x_3$ | 2 | 0 | 2 | ... | 1 |
| $x_4$ | 3 | 0 | 1 | ... | 2 |
| $x_5$ | 4 | 0 | 0 | ... | 3 |
| $x_6$ | 5 | 0 | -1 | ... | 4 |
| $x_7$ | 6 | 0 | -2 | ... | 5 |

**3A)** $x_2$

**3B)** $x_3$

**3C)** $x_4$

**3D)** $x_5$

**3E)** $x_6$

**3F)** $x_7$

**Question 4: Fundamental insight**

You are given a LP on matrix form

$$\max cx$$

subject to

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

with

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

Furthermore, you are given the following partial tableau ($x_4, x_5$ and $x_6$ are slack variables for the three constraints in the LP, as usual).

| eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | ? | ? | ? | 2 | 0 | 1 | ? |
| 1 | 0 | ? | ? | ? | 1 | 0 | -0.5 | ? |
| 2 | 0 | ? | ? | ? | -2 | 0 | 1.5 | ? |
| 3 | 0 | ? | ? | ? | 0 | 1 | 0 | ? |

Notice that the column with information about basis variables is left out on purpose. Complete the tableau using the fundamental insight. Which answer is correct?

**4A)**

| eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 14 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 24 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -0.5 | 2 |
| 2 | 0 | -2 | 0 | 1 | -2 | 0 | 1.5 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |

**4B)**

| eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 10 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 24 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -0.5 | 2.5 |
| 2 | 0 | -2 | 0 | 1 | -2 | 0 | 1.5 | 1.5 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 |

**4C)**

| eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 14 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 24 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -0.5 | 2.5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 2 | -2 | 0 | 1.5 | 1.5 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 |

**4D)**

| eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 10 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 31 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -0.5 | 2 |
| 2 | 0 | -2 | 0 | 1 | -2 | 0 | 1.5 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |

**4E)**

| eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 10 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 31 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -0.5 | 2.5 |
| 2 | 0 | -2 | 0 | 1 | -2 | 0 | 1.5 | 1.5 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 |

**4F)**

| eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 14 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 31 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -0.5 | 2.5 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 2 | -2 | 0 | 1.5 | 1.5 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 |

**Question 5: Duality**

Consider the following LP

$$\max 5x_1 + 8x_2 + 4x_3$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1 \quad (5)$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \quad (6)$$
$$3x_1 + 1x_2 + 4x_3 \geq 3 \quad (7)$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R} \quad (8)$$

The variables of the dual problem are denoted $y_1, y_2$ and $y_3$ (corresponding to the constraints (5), (6) and (7)). Write up the dual problem. Which of the following answers is correct?

**5A)**

$$\min 1y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 &\geq 5 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\leq 8 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 &= 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

**5B)**

$$\min 1y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 &\leq 5 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 8 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 &= 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

**5C)**

$$\min 1y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 &\leq 5 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &= 8 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 &\geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**5D)**

$$\min 1y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 &\geq 5 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 8 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 &\geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**5E)**

$$\min 1y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 &\geq 5 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 8 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 &\geq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

**5F)**

$$\min 1y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 &\geq 5 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\leq 8 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 &= 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Question 6 - Sensitivity analysis objective function**

You are given a LP on matrix form

$$\max Z = cx$$

subject to

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

with

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

When writing on augmented form we have slack variables

$$x_s = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

as usual. The optimal basis consists of variables $x_2, x_5$ and $x_1$. The optimal objective value is $Z^* = 24.5$. We now wish to investigate what happens if we change $c$ to $c = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Delta & 0 \end{bmatrix}$ where $\Delta \in \mathbb{R}$.

Determine the interval for $\Delta$ in which the basis stays optimal and determine the objective value in this interval.

**6A)** basis is optimal for $\Delta \in [-8; \infty[$ and $Z^* = 24.5 + 2\Delta$ in this interval

**6B)** basis is optimal for $\Delta \in [-8; \infty[$ and $Z^* = 24.5 + 1.5\Delta$ in this interval

**6C)** basis is optimal for $\Delta \in [-8; \infty[$ and $Z^* = 24.5 + \Delta$ in this interval

**6D)** basis is optimal for $\Delta \in [-4.4; \infty[$ and $Z^* = 24.5 + 2\Delta$ in this interval

**6E)** basis is optimal for $\Delta \in [-4.4; \infty[$ and $Z^* = 24.5 + 1.5\Delta$ in this interval

**6F)** basis is optimal for $\Delta \in [-4.4; \infty[$ and $Z^* = 24.5 + \Delta$ in this interval

**Question 7 - Sensitivity analysis right hand side**

Consider again the LP from question 6 (with $c = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$). We now consider a right hand side

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix}$$

Determine the interval for $\Delta$ in which the basis stays feasible and determine the objective value in this interval.

**7A)** basis is feasible for $\Delta \in [-11; 2.75]$ and $Z^* = 24.5 + 1.5\Delta$ in this interval

**7B)** basis is feasible for $\Delta \in [-11; 2.75]$ and $Z^* = 24.5 + 2\Delta$ in this interval

**7C)** basis is feasible for $\Delta \in [-0.25; 2.75]$ and $Z^* = 24.5 + 1.5\Delta$ in this interval

**7D)** basis is feasible for $\Delta \in [-11; \infty[$ and $Z^* = 24.5 + 1.5\Delta$ in this interval

**7E)** basis is feasible for $\Delta \in [-11; \infty[$ and $Z^* = 24.5 + 2\Delta$ in this interval

**7F)** basis is feasible for $\Delta \in [-0.25; 2.75]$ and $Z^* = 24.5 + 2\Delta$ in this interval

**Question 8: LP with negative variables**

Consider the following LP

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 + 4x_3 &\leq 2 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq -7 \end{aligned}$$

Since $x_3$ can be negative we need to rewrite the problem before applying the simplex algorithm. Which of the following formulations are equivalent to the model above and how do $x_3$ and $x_3'$ relate ($x_3'$ is used in the models proposed below).

**8A)**

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3' + 7$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 + 4x_3' &\leq 2 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3' &\leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' &\geq 0 \end{aligned}$$

and

$$x_3' = x_3 - 7$$

**8B)**

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3' - 7$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 + 4x_3' &\leq 2 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3' &\leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' &\geq 0 \end{aligned}$$

and

$$x_3' = x_3 + 7$$

**8C)**

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3' - 7$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 + 4x_3' &\leq 30 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3' &\leq 19 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' &\geq 0 \end{aligned}$$

and

$$x_3' = x_3 + 7$$

**8D)**

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3' + 7$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 + 4x_3' &\leq 30 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3' &\leq 19 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' &\geq 0 \end{aligned}$$

and

$$x_3' = x_3 - 7$$

**8E)**

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3' + 7$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 - 4x_3' &\leq 2 \\ 1x_1 + 3x_2 - 2x_3' &\leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' &\geq 0 \end{aligned}$$

and

$$x_3' = x_3 - 7$$

**8F)**

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3' - 7$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 - 4x_3' &\leq 30 \\ 1x_1 + 3x_2 - 2x_3' &\leq 19 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' &\geq 0 \end{aligned}$$

and

$$x_3' = x_3 + 7$$

**Question 9:**

In this question we consider three optimization problems denoted P, D and IP. All three problems are defined by the same matrix $A$ and the same vectors $c$ (row-vector) and $b$ (column vector):

| (P) | (D) | (IP) |
|---|---|---|
| $\max Z = cx$<br>subject to<br>$Ax \leq b$<br>$x \geq 0$ | $\min W = yb$<br>subject to<br>$yA \geq c$<br>$y \geq 0$ | $\max Z_{IP} = cx$<br>subject to<br>$Ax \leq b$<br>$x \geq 0$<br>$x \in \mathbb{Z}$ |

Problem P is a linear programming problem. Problem D is a linear programming problem and is the dual of P. Problem IP is an integer programming problem. We assume that all three problems are feasible. Let $\bar{x}$ be the optimal solution to P, let $\bar{y}$ be a feasible solution to D and let $\bar{x}'$ be the optimal solution to IP. One of the following statements is guaranteed to be true. Which one?

**9A)** $c\bar{x}' < c\bar{x} < \bar{y}b$

**9B)** $c\bar{x}' \leq c\bar{x} \leq \bar{y}b$

**9C)** $c\bar{x}' \leq c\bar{x} = \bar{y}b$

**9D)** $c\bar{x} < \bar{y}b < c\bar{x}'$

**9E)** $c\bar{x} \leq \bar{y}b \leq c\bar{x}'$

**9F)** $c\bar{x} = \bar{y}b \leq c\bar{x}'$

**Question 10: Integer Programming Modelling 1**

A retired executive has up to \$8 million that he wishes to invest in apartment buildings. Table 1 states the purchase price and the expected 10-year return (also in millions of dollars) of the four buildings that he is considering.

| | Building | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Price (million \$) | 4.0 | 3.8 | 6.0 | 7.2 |
| Return (million \$) | 4.5 | 4.1 | 8.0 | 7.0 |

Table 1: Question 10 Data

The executive wishes to choose investments that maximize his total return. Assume that every option is available on an all or nothing basis. Which of the following integer linear programming models can be used to find an optimal investment plan given the input data from Table 1?

**10A)**

$$
\begin{aligned}
\texttt{Maximize:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\texttt{s.t.} \quad & 4.0x_1 + 3.8x_2 + 6.0x_3 + 7.2x_4 \leq 8.0 \\
& x_i \in \{0,1\} \quad \text{for } i = 1,2,3,4,
\end{aligned}
$$

where the decision variable $x_i \in \{0,1\}$ indicates whether the executive invests in building $i = 1,2,3,4$ ($x_i = 1$) or not ($x_i = 0$).

**10B)**

$$\begin{aligned} \texttt{Maximize:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \texttt{s.t.} \quad & 4.0x_1 + 3.8x_2 + 6.0x_3 + 7.2x_4 \leq 8.0 \\ & x_i \geq 0 \qquad \text{for } i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

where the decision variable $x_i \geq 0$ indicates the amount of money the executive invests in building $i = 1, 2, 3, 4$.

**10C)**

$$\begin{aligned} \texttt{Maximize:} \quad & 4.0x_1 + 3.8x_2 + 6.0x_3 + 7.2x_4 \\ \texttt{s.t.} \quad & 4.5x_1 + 4.1x_2 + 8.0x_3 + 7.0x_4 \leq 8.0 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

where the decision variable $x_i \in \{0, 1\}$ indicates whether the executive invests in building $i = 1, 2, 3, 4$ ($x_i = 1$) or not ($x_i = 0$).

**10D)**

$$\begin{aligned} \texttt{Maximize:} \quad & 4.0x_1 + 3.8x_2 + 6.0x_3 + 7.2x_4 \\ \texttt{s.t.} \quad & 4.5x_1 + 4.1x_2 + 8.0x_3 + 7.0x_4 \leq 8.0 \\ & x_i \geq 0 \qquad \text{for } i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

where the decision variable $x_i \geq 0$ indicates the amount of money the executive invests in building $i = 1, 2, 3, 4$.

**10E)**

$$\begin{aligned} \texttt{Maximize:} \quad & 4.5x_1 + 4.1x_2 + 8.0x_3 + 7.0x_4 \\ \texttt{s.t.} \quad & 4.0x_1 + 3.8x_2 + 6.0x_3 + 7.2x_4 \leq 8.0 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

where the decision variable $x_i \in \{0, 1\}$ indicates whether the executive invests in building $i = 1, 2, 3, 4$ ($x_i = 1$) or not ($x_i = 0$).

**10F**

$$\begin{aligned} \texttt{Maximize:} \quad & 4.5x_1 + 4.1x_2 + 8.0x_3 + 7.0x_4 \\ \texttt{s.t.} \quad & 4.0x_1 + 3.8x_2 + 6.0x_3 + 7.2x_4 \leq 8.0 \\ & x_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

where the decision variable $x_i \geq 0$ indicates the amount of money the executive invests in building $i = 1, 2, 3, 4$.

**Question 11: Integer Programming Modelling 2**

Neddo Grocery Company is considering three locations for new distribution centers to serve its customers in four nearby cities. Table 2 states the fixed cost (in millions of dollars) of opening a potential center, the number (in thousands) of truckloads forecast to be demanded at each city over the next five years, and the transportation cost (in millions of dollars) per thousand truckloads moved from each center location to each city.

| | | Fixed Cost (million \$) | Transportation Cost (million \$ / thousand truckloads) City 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Center | 1 | 200 | 6 | 5 | 9 | 3 |
| | 2 | 400 | 4 | 3 | 5 | 6 |
| | 3 | 300 | 5 | 8 | 2 | 4 |
| Demand (thousand truckloads) | | | 11 | 18 | 15 | 25 |

Table 2: Question 11 Data

Neddo seek a minimum cost distribution system, assuming any distribution center can meet any or all demands. Which of the following is an integer linear programming model that can be used to find an optimal solution for the data given in Table 2?

**11A)**

$$
\begin{aligned}
\texttt{Minimize:}\quad & 6x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 5x_{21} + 3x_{22} + 8x_{23} + 9x_{31} + 5x_{32} + 2x_{33} \\
& 3x_{41} + 6x_{42} + 4x_{43} + 200y_1 + 400y_2 + 300y_3 \\
\texttt{s.t.}\quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 11 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 18 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 15 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq 25 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4 \text{ for } j = 1, 2, 3 \\
& y_j \in \{0, 1\} \quad \text{for } j = 1, 2, 3,
\end{aligned}
$$

where the decision variable $x_{ij}$ indicates whether city $i = 1, 2, 3, 4$ is served by distribution center $j = 1, 2, 3$ ($x_{ij} = 1$) or not ($x_{ij} = 0$), and decision variable $y_j$ indicates whether distribution center $j$ is opened ($y_j = 1$) or not ($y_j = 0$).

**11B)**

$$
\begin{aligned}
\texttt{Minimize:}\quad & 6x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 5x_{21} + 3x_{22} + 8x_{23} + 9x_{31} + 5x_{32} + 2x_{33} \\
& 3x_{41} + 6x_{42} + 4x_{43} + 200y_1 + 400y_2 + 300y_3 \\
\texttt{s.t.}\quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 11 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 18 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 15 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq 25 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4 \text{ for } j = 1, 2, 3 \\
& y_j \in \{0, 1\} \quad \text{for } j = 1, 2, 3,
\end{aligned}
$$

where the decision variable $x_{ij}$ indicates the number of thousand truckloads serving city $i = 1, 2, 3, 4$ from distribution center $j = 1, 2, 3$, and decision variable $y_j$ indicates whether distribution center $j$ is opened ($y_j = 1$) or not ($y_j = 0$).

**11C)**

$$\begin{aligned}
\texttt{Minimize:}\quad & 6x_{11}\cdot y_1 + 4x_{12}\cdot y_2 + 5x_{13}\cdot y_3 + 5x_{21}\cdot y_1 + 3x_{22}\cdot y_2 + 8x_{23}\cdot y_3 \\
& +9x_{31}\cdot y_1 + 5x_{32}\cdot y_2 + 2x_{33}\cdot y_3 + 3x_{41}\cdot y_1 + 6x_{42}\cdot y_2 + 4x_{43}\cdot y_3 \\
& +200y_1 + 400y_2 + 300y_3 \\
\texttt{s.t.}\quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 11 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 18 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 15 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq 25 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4 \text{ for } j = 1, 2, 3 \\
& y_j \in \{0, 1\} \quad \text{for } j = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

where the decision variable $x_{ij}$ indicates the number of thousand truckloads serving city $i = 1, 2, 3, 4$ from distribution center $j = 1, 2, 3$, and decision variable $y_j$ indicates whether distribution center $j$ is opened ($y_j = 1$) or not ($y_j = 0$).

**11D)**

$$\begin{aligned}
\texttt{Minimize:}\quad & 6x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 5x_{21} + 3x_{22} + 8x_{23} + 9x_{31} + 5x_{32} + 2x_{33} \\
& 3x_{41} + 6x_{42} + 4x_{43} + 200y_1 + 400y_2 + 300y_3 \\
\texttt{s.t.}\quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 11 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 18 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 15 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} \geq 25 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 69\cdot y_1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \leq 69\cdot y_2 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \leq 69\cdot y_3 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4 \text{ for } j = 1, 2, 3 \\
& y_j \in \{0, 1\} \quad \text{for } j = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

where the decision variable $x_{ij}$ indicates the number of thousand truckloads serving city $i = 1, 2, 3, 4$ from distribution center $j = 1, 2, 3$, and decision variable $y_j$ indicates whether distribution center $j$ is opened ($y_j = 1$) or not ($y_j = 0$).

**11E)**

$$\begin{aligned}
\texttt{Minimize:}\quad & 6x_{11}+4x_{12}+5x_{13}+5x_{21}+3x_{22}+8x_{23}+9x_{31}+5x_{32}+2x_{33}\\
& 3x_{41}+6x_{42}+4x_{43}+200y_1+400y_2+300y_3\\
\texttt{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}\leq 11\\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}\leq 18\\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}\leq 15\\
& x_{41}+x_{42}+x_{43}\leq 25\\
& x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}\geq 69\cdot y_1\\
& x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}\geq 69\cdot y_2\\
& x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}\geq 69\cdot y_3\\
& x_{ij}\geq 0 \quad \text{for } i=1,2,3,4 \text{ for } j=1,2,3\\
& y_j\in\{0,1\} \quad \text{for } j=1,2,3,
\end{aligned}$$

where the decision variable $x_{ij}$ indicates the number of thousand truckloads serving city $i = 1,2,3,4$ from distribution center $j = 1,2,3$, and decision variable $y_j$ indicates whether distribution center $j$ is opened ($y_j = 1$) or not ($y_j = 0$).

**11F)**

$$\begin{aligned}
\texttt{Minimize:}\quad & 6x_{11}+4x_{12}+5x_{13}+5x_{21}+3x_{22}+8x_{23}+9x_{31}+5x_{32}+2x_{33}\\
& 3x_{41}+6x_{42}+4x_{43}+200y_1+400y_2+300y_3\\
\texttt{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}\geq 11\\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}\geq 18\\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}\geq 15\\
& x_{41}+x_{42}+x_{43}\geq 25\\
& x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}\leq 69\cdot y_1\\
& x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}\leq 69\cdot y_2\\
& x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}\leq 69\cdot y_3\\
& x_{ij}\in\{0,1\} \quad \text{for } i=1,2,3,4 \text{ for } j=1,2,3\\
& y_j\in\{0,1\} \quad \text{for } j=1,2,3,
\end{aligned}$$

where the decision variable $x_{ij}$ indicates whether city $i = 1,2,3,4$ is served by distribution center $j = 1,2,3$ ($x_{ij} = 1$) or not ($x_{ij} = 0$), and decision variable $y_j$ indicates whether distribution center $j$ is opened ($y_j = 1$) or not ($y_j = 0$).

**Question 12: Heuristics 1**

Consider the following 8-city symmetric traveling salesman problem whose links have the associated distances (in km) shown in Table 3, where a dash indicates the absence of a connection. Using the data given in Table 3, start at City 1 and apply the Nearest Neighbour greedy heuristic to generate a feasible solution to the travelling salesman problem. Which of the following correctly states the tour you generate and its total distance?

| | | Distances (km) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | City | | | | | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| City | 1 | | 12 | 17 | 21 | 18 | - | 9 | 15 |
| | 2 | | | 20 | 25 | 34 | 16 | 22 | 19 |
| | 3 | | | | - | 19 | 13 | 21 | 18 |
| | 4 | | | | | 10 | 16 | 14 | 20 |
| | 5 | | | | | | 21 | 23 | 25 |
| | 6 | | | | | | | 18 | 14 |
| | 7 | | | | | | | | 26 |
| | 8 | | | | | | | | |

Table 3: Question 12 and 13 Data

**12A)** 1-7-4-5-3-8-2-6-1, length = 117 km

**12B)** 1-7-4-5-3-8-2-6-1, length = 110 km

**12C)** 1-7-4-5-3-6-8-2-1, length = 110 km

**12D)** 1-7-4-5-3-6-8-2-1, length = 112 km

**12E)** 1-2-8-6-3-5-7-4-1, length = 135 km

**12F)** 1-2-8-6-3-5-7-4-1, length = 136 km

**Question 13 - Heuristics 2**

Given the tour 1-2-8-6-3-5-7-4-1, use the data in Table 3 and apply the 2-opt exchange improvement heuristic using edges (8,6) and (5,7). Which of the following correctly states the new tour and the objective value difference compared to the old tour. A negative number indicates the new tour is shorter by the given amount.

**13A)** 1-2-8-5-3-6-7-4-1, +6 km

**13B)** 1-2-8-5-3-6-7-4-1, -6 km

**13C)** 1-2-8-7-5-3-6-4-1, +14 km

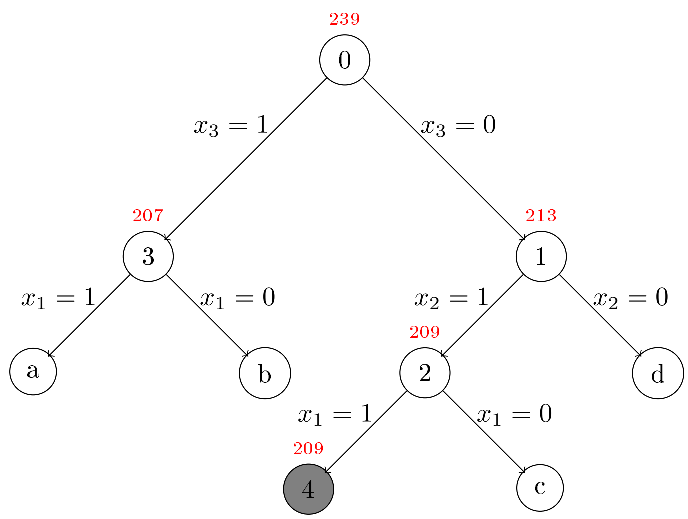
**13D)** 1-2-8-7-5-3-6-4-1, -14 km

**13E)** 1-4-7-6-8-2-5-3-1, +20 km

**13F)** 1-4-7-6-8-2-5-3-1, -20 km

**Question 14 - Branch & Bound**

The tree below shows the incomplete solution of a maximizing integer linear programming problem obtained using the LP-Based Branch & Bound method. The numbers above each node in red font indicate the optimal objective value of the associated LP-relaxation. The numbers inside each node indicate the order in which the nodes have been evaluated (starting at 0). Nodes $a, b, c$, and $d$ remain unexplored.




Node 4 has just been solved and produced the **first** incumbent solution with a value of 209. Which of the following observations is true. **Note that only one of the following is true.**

**14A)**

All remaining unexplored nodes can be fathomed. The optimal objective value of the integer linear program is equal to 209.

**14B)**

None of the remaining unexplored nodes can be fathomed. Each provides the possibility of finding a solution with a better objective value than 209.

**14C)**

Nodes $a$, $b$, and $c$ can be fathomed. The current best lower bound on the optimal solution is 209, while the best upper bound is 238.

**14D)**

Nodes $a$, $b$, and $c$ can be fathomed. The current best lower bound on the optimal solution is 209, while the best upper bound is 213.

**14E)**

Only nodes $a$ and $b$ can be fathomed. The current best lower bound on the optimal solution is 207, while the best upper bound is 238.

**14F)**

Only nodes $a$ and $b$ can be fathomed. The current best lower bound on the optimal solution is 207, while the best upper bound is 209.

**Question 15 - Assignment Problem 1**

The sister communities program pairs cities in Japan with cities in Australia that have a similar size and economic base. Visits are then arranged between the sister communities to improve international understanding. Table 4 states the program's compatibility scores (0 to 100) for the four Japanese and Australian cities about to join the program. Each Japanese city must be paired with exactly one of the Australian cities.

| | | Compatibility Score (0-100) | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Australia | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Japan | 1 | 80 | 65 | 83 | 77 |
| | 2 | 54 | 87 | 61 | 66 |
| | 3 | 92 | 45 | 53 | 59 |
| | 4 | 70 | 61 | 81 | 76 |

Table 4: Question 15 Data

You recognize this as an assignment problem. Using decision variables $x_{ij} \in \{0,1\}$ that indicate whether Japanese city $i = 1,2,3,4$ is paired with Australian city $j = 1,2,3,4$ ($x_{ij} = 1$) or not ($x_{ij} = 0$), you define the following formulation:

$$\texttt{Maximize:} \quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \rho_{ij}x_{ij} \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad \text{for } i = 1,2,3,4 \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad \text{for } j = 1,2,3,4 \tag{11}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{for } i = 1,2,3,4, \text{ for } j = 1,2,3,4, \tag{12}$$

where $\rho_{ij}$ gives the compatibility score between Japanese city $i$ and Australian city $j$ from Table 4.

You would like to analyze whether or not the constraint coefficient matrix is totally unimodular or not. Given the constraint ordering in the above formulation, and assuming your variables are ordered as follows

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix}$$

Which of the following correctly states the coefficient constraint matrix $A$?

**15A)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**15B)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**15C)**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**15D)**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**15E)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**15F)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Question 16 - Total UniModularity**

Consider the formulation given in Question 15 and the following statements:

1. The constraint coefficient matrix is not totally unimodular; however, all basic feasible solutions are naturally integral.
2. The constraint coefficient matrix is totally unimodular; however, if the objective function is changed, it is possible for fractional (i.e. non integral) basic feasible solutions to exist.
3. The matrix is totally unimodular. All basic feasible solutions are guaranteed to be integral as long as the right hand side values remain integer.
4. The optimal objective value of the problem and that of its Linear Programming Relaxation are exactly the same.
5. When solving the problem, the LP-based Branch & Bound method is almost certainly necessary.

Which of the above statements are true?

**16A)** No statements are true

**16B)** Only Statements 1 & 5

**16C)** Only Statement 1

**16D)** Only Statements 2 & 4

**16E)** Only Statements 3 & 4

**16F)** Only Statement 5

**Question 17 - Transportation Problem**

A mining company extracts gravel from three locations L1, L2, and L3. The weekly production of gravel for each mine is 90, 130, and 80 tonnes of gravel, respectively. The company has long standing contracts with five customers C1, C2, C3, C4, and C5 requiring 80, 50, 60, 40, and 70 tonnes of gravel per week, respectively. The company would like to minimize the total transportation costs and knows the cost (in \$) of transporting one tonne of gravel between any (location, customer) pair. All costs are specified in Table 5.

| | | Transportation Costs (\$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Customer | | | | |
| | | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
| Location | L1 | 3 | 7 | 5 | 4 | 6 |
| | L2 | 2 | 5 | 4 | 2 | 4 |
| | L3 | 4 | 3 | 8 | 6 | 2 |

Table 5: Question 17 and 18 Data

You model the problem as follows:

$$\texttt{minimize} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} \tag{13}$$

$$\texttt{subject to:} \quad -\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = -s_i \text{ for } i = 1, 2, 3 \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = d_j \text{ for } j = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{15}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, 3 \text{ and } j = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{16}$$

where $c_{ij}$ denotes the cost of transporting one tonne of gravel from location $i = 1, 2, 3$ to customer $j = 1, 2, 3, 4, 5$ (given in Table 5), and $x_{ij}$ indicates the number of tonnes of gravel sent from location $i$ to customer $j$. Let $u_i$ be the dual variable on the $i$-th supply constraint and $v_j$ be the dual variable on the $j$-th demand constraint.

Using the information in Table 5, start from the basic feasible solution $x_{11} = 80, x_{12} = 10, x_{22} = 40, x_{23} = 60, x_{24} = 30, x_{34} = 10$ and $x_{35} = 70$ and perform one iteration of the network simplex algorithm. Which of the following basic feasible solutions is moved to and what is its value?

(**Select the entering variable with most negative reduced cost and assume the dual variable** $u_1 = 0$)

**17A)** $x_{11} = 80, x_{12} = 10, x_{22} = 30, x_{23} = 60, x_{24} = 40, x_{32} = 10$, and $x_{35} = 70$, value =\$960

**17B)** $x_{11} = 80, x_{12} = 10, x_{22} = 30, x_{23} = 60, x_{24} = 40, x_{32} = 10$, and $x_{35} = 70$, value =\$950

**17C)** $x_{11} = 70, x_{12} = 20, x_{22} = 30, x_{23} = 60, x_{24} = 40, x_{31} = 10$, and $x_{35} = 70$, value =\$1000

**17D)** $x_{11} = 70, x_{12} = 20, x_{22} = 30, x_{23} = 60, x_{24} = 40, x_{31} = 10$, and $x_{35} = 70$, value =\$1010

**17E)** $x_{11} = 80, x_{13} = 10, x_{22} = 50, x_{23} = 50, x_{24} = 30, x_{34} = 10$, and $x_{35} = 70$, value =\$1000

**17F)** $x_{11} = 80, x_{13} = 10, x_{22} = 50, x_{23} = 50, x_{24} = 30, x_{34} = 10$, and $x_{35} = 70$, value =\$1010

**Question 18**

Consider the basic feasible solution $x_{11} = 80, x_{13} = 10, x_{22} = 50, x_{23} = 50, x_{24} = 30, x_{34} = 10$, and $x_{35} = 70$. Using the data in Table 5 and assuming $u_1$=0, which of the following is the associated dual solution?

**18A)** $u_1 = 0, u_2 = 2, u_3 = -2, v_1 = 3, v_2 = 7, v_3 = 6, v_4 = 4$, and $v_5 = 0$

**18B)** $u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = -2, v_1 = 3, v_2 = 7, v_3 = 6, v_4 = -4$, and $v_5 = 0$

**18C)** $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = -3, v_1 = 3, v_2 = 6, v_3 = 5, v_4 = 3$, and $v_5 = -1$

**18D)** $u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = -1, v_1 = 3, v_2 = 7, v_3 = 6, v_4 = 4$, and $v_5 = 1$

**18E)** $u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = -1, v_1 = -3, v_2 = -7, v_3 = 6, v_4 = 4$, and $v_5 = 1$

**18F)** $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = -3, v_1 = -3, v_2 = 6, v_3 = 5, v_4 = 3$, and $v_5 = 1$

**Question 19 - Dual Simplex**

Consider the following Linear Program:

$$\begin{aligned} \texttt{Minimize:} \quad & Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \texttt{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ & 4x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5 \\ & -x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

When solving this with the Dual Simplex Algorithm, what are the first two tableau obtained (**Hint: first write the problem in maximization form and choose the leaving variable to be the row with most negative right hand side.)**

**19A)**

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s_1$ | 0 | -1 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | -3 |
| $s_2$ | 0 | -4 | -2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -5 |
| $s_3$ | 0 | 1 | 1 | -3 | 0 | 0 | 1 | 2 |

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{13}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | -$\frac{5}{4}$ |
| $s_1$ | 0 | 0 | -$\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{4}$ | 1 | -$\frac{1}{4}$ | 0 | -$\frac{7}{4}$ |
| $x_1$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | -$\frac{1}{4}$ | 0 | -$\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{5}{4}$ |
| $s_3$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | -$\frac{11}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ |

**19B)**

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s_1$ | 0 | -1 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| $s_2$ | 0 | -4 | -2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $s_3$ | 0 | 1 | 1 | -3 | 0 | 0 | 1 | -2 |

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{13}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | -$\frac{5}{4}$ |
| $s_1$ | 0 | 0 | -$\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{4}$ | 1 | -$\frac{1}{4}$ | 0 | -$\frac{7}{4}$ |
| $x_1$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | -$\frac{1}{4}$ | 0 | -$\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{5}{4}$ |
| $s_3$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | -$\frac{11}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ |

**19C)**

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s_1$ | 0 | -1 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| $s_2$ | 0 | -4 | -2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $s_3$ | 0 | 1 | 1 | -3 | 0 | 0 | 1 | -2 |

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{13}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{5}{4}$ |
| $s_1$ | 0 | 0 | -$\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{4}$ | 1 | -$\frac{1}{4}$ | 0 | -$\frac{7}{4}$ |
| $x_1$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | -$\frac{1}{4}$ | 0 | -$\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{5}{4}$ |
| $s_3$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | -$\frac{11}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ |

**19D)**

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s_1$ | 0 | -1 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | -3 |
| $s_2$ | 0 | -4 | -2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -5 |
| $s_3$ | 0 | 1 | 1 | -3 | 0 | 0 | 1 | 2 |

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 1 | 5 | 1 | 0 | 0 | -3 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 1 | -2 | -1 | 0 | 0 | 3 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 2 | -7 | -4 | 1 | 0 | 7 |
| $s_3$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 |

**19E)**

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s_1$ | 0 | -1 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | -3 |
| $s_2$ | 0 | -4 | -2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -5 |
| $s_3$ | 0 | 1 | 1 | -3 | 0 | 0 | 1 | 2 |

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 1 | 5 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 1 | -2 | -1 | 0 | 0 | 3 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 2 | -7 | -4 | 1 | 0 | 7 |
| $s_3$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 |

**19F)**

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s_1$ | 0 | -1 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| $s_2$ | 0 | -4 | -2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $s_3$ | 0 | 1 | 1 | -3 | 0 | 0 | 1 | -2 |

| | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 1 | 0 | 1 | 5 | 1 | 0 | 0 | -3 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 1 | -2 | -1 | 0 | 0 | 3 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 2 | -7 | -4 | 1 | 0 | 7 |
| $s_3$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 |

DTU Danmarks Tekniske Universitet

**Skriftlig prøve, den 20. maj, 2019. Side 1 af 16 sider**
**Kursus navn:** Introduktion til Operationsanalyse
**Kursus nummer:** 42101
**Tilladte Hjælpemidler:** Alle hjælpemidler. Besvarelsen kan udarbejdes med blyant eller kuglepen. Svar på multiple-choice opgaver afleveres på nedenstående skema. Svarene kan også afleveres på eksamenspapir hvis der skrives forkert på skemaet. Husk at angive studienummer på alle papirer der afleveres.
**Varighed:** 4 timer
**Vægtning**: Opgavesættet består af 23 opgaver. Opgaverne 14, 22 og 23 er tekstopgaver, som besvares i fuld ordlyd. Øvrige opgaver er multiple-choice opgaver, som besvares ved brug af nedenstående tabel. Denne side afleveres sammen med tekst-ark for opgaverne 14, 22 og 23.

Tekstopgave 14 tæller for 5 point. Tekstopgave 22 og 23 tæller samlet for 10 point. Hvert korrekt svar til en multiple-choice opgave giver 5 point. Man får ikke strafpoint for forkerte svar til en multiple-choice opgave. Man kan samlet opnå 115 point. **Hvis flere svarmuligheder vælges for en multiple-choice opgave regnes det for et forkert svar.**

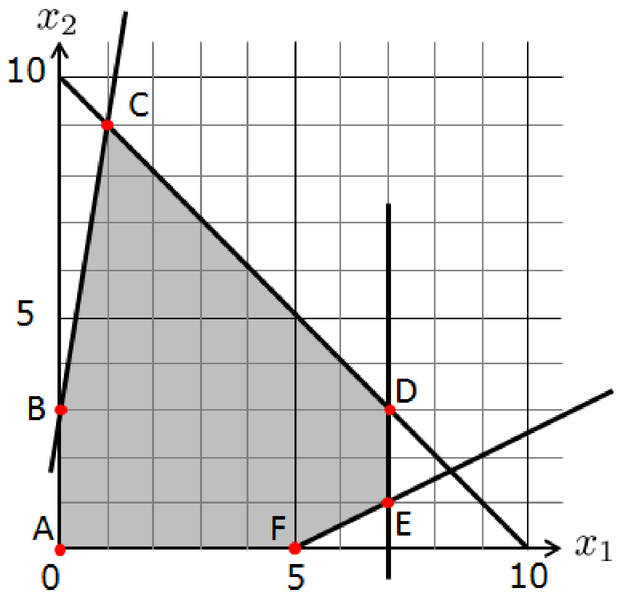
| Opgave | Svar | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 2 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 3 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 4 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 5 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 6 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 7 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 8 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 9 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 10 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 11 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 12 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 13 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 14 | Tekst opgave | | | | | |
| 15 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 16 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 17 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 18 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 19 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 20 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 21 | A: ☐ | B: ☐ | C: ☐ | D: ☐ | E: ☐ | F: ☐ |
| 22 | Tekst opgave | | | | | |
| 23 | Tekst opgave | | | | | |

**Navn:**

**Studie nummer:**

**Opgave 1: Grafisk metode** På figuren nedenfor er det lovlige løsningsrum til et lineært programmeringsproblem skitseret med gråt. Objektfunktionen er

$$Z = \max x_1 - \frac{1}{2}x_2$$




Seks løsninger (A til F) er indtegnet på figuren. Hvilken løsning er optimal?

**1A)** Løsning A er optimal

**1B)** Løsning B er optimal

**1C)** Løsning C er optimal

**1D)** Løsning D er optimal

**1E)** Løsning E er optimal

**1F)** Løsning F er optimal

**Opgave 2: Simplex metoden** Vi betragter følgende simplex tableau for et maksimeringsproblem ($x_4$, $x_5$ og $x_6$ er slack variable).

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | -1 | 3 | 5 | 0 | 0 | 20 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $x_5$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | -2 | 1 | 0 | 0 |
| $x_6$ | 3 | 0 | 0 | 4 | 3 | -1 | 0 | 1 | 16 |

Udfør en simplex iteration på ovenstående tableau. Hvordan ser det næste tableau ud?

**2A)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 3 | 1 | 0 | 22 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | -2 | 1 | 0 | 2 |
| $x_6$ | 3 | 0 | 0 | 0 | -5 | 7 | -4 | 1 | 16 |

**2B)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{15}{4}$ | $\frac{19}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 22 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $x_5$ | 2 | 0 | 0 | 0 | $\frac{5}{4}$ | $-\frac{7}{4}$ | 1 | $-\frac{1}{4}$ | 2 |
| $x_2$ | 3 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 4 |

**2C)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 3 | 1 | 0 | 20 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | -2 | 1 | 0 | 4 |
| $x_6$ | 3 | 0 | 0 | 0 | -5 | 7 | -4 | 1 | 16 |

**2D)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{15}{4}$ | $\frac{19}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 24 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $x_5$ | 2 | 0 | 0 | 0 | $\frac{5}{4}$ | $-\frac{7}{4}$ | 1 | $-\frac{1}{4}$ | 4 |
| $x_2$ | 3 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 4 |

**2E)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{15}{4}$ | $\frac{19}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 24 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $x_5$ | 2 | 0 | 0 | 0 | $\frac{5}{4}$ | $-\frac{7}{4}$ | 1 | $-\frac{1}{4}$ | -4 |
| $x_2$ | 3 | 0 | 0 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 4 |

**2F)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 | 3 | 1 | 0 | 20 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 2 | -2 | 1 | 0 | 0 |
| $x_6$ | 3 | 0 | 0 | 0 | -5 | 7 | -4 | 1 | 16 |

**Opgave 3: Følsomhedsanalyse, højreside** Betragt følgende LP

$$Z = \max 10x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &\leq 9 \\ 1x_2 + 1x_3 &\leq 19 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 14 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Når vi skriver problemet på udvidet form tilføjes slack variable $x_4, x_5, x_6$ for de tre begrænsninger som normalt. Den optimale basis består af variablene $x_1, x_5, x_2$. Vi ønsker at undersøge hvad der sker når højresiden på første begrænsning ændres. Vi ændrer derfor højresiden på den første begrænsning til $9 + \Delta$.

Hvilket interval skal $\Delta$ tilhøre for at basis forbliver optimal og hvad er objektværdien (udtrykt som funktion af $\Delta$) indenfor dette interval?

**3A)** $\Delta \in [-\frac{7}{2}; \frac{1}{3}]$ og $Z = \frac{91}{2} + \frac{7}{2}\Delta$

**3B)** $\Delta \in [0; \frac{1}{3}]$ og $Z = \frac{91}{2} + \frac{7}{2}\Delta$

**3C)** $\Delta \in [-9; \frac{1}{3}]$ og $Z = \frac{91}{2} + \frac{7}{2}\Delta$

**3D)** $\Delta \in [-\frac{7}{2}; \frac{1}{3}]$ og $Z = \frac{91}{2} + \Delta$

**3E)** $\Delta \in [0; \frac{1}{3}]$ og $Z = \frac{91}{2} + \Delta$

**3F)** $\Delta \in [-9; \frac{1}{3}]$ og $Z = \frac{91}{2} + \Delta$

**Opgave 4: Fundamental indsigt** Betragt følgende LP

$$\max 5x_1 + 9x_2 + 8x_3$$

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 &\leq 15 \\ 3x_1 + 3x_3 &\leq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 &\leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Når vi skriver problemet på udvidet form tilføjes slack variable $x_4, x_5, x_6$ for de tre begrænsninger som normalt. Hvilket tableau svarer til følgende valg af basisvariable: $x_B = [x_1, x_2, x_4]$?

**4A)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | $\frac{33}{2}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{7}{6}$ | $\frac{9}{2}$ | $\frac{115}{2}$ |
| $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 1 |
| $x_2$ | 2 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{11}{2}$ |
| $x_4$ | 3 | 0 | -3 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 3 |

**4D)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 33 | 0 | 0 | 0 | 7 | 9 | 115 |
| $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 2 |
| $x_2$ | 2 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | 11 |
| $x_4$ | 3 | 0 | -3 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 6 |

**4B)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{33}{2}$ | 0 | $-\frac{13}{3}$ | $\frac{9}{2}$ | 32 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 1 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{3}{2}$ | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 3 |
| $x_4$ | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 | -1 | 8 |

**4E)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{33}{2}$ | 0 | $-\frac{13}{3}$ | $\frac{9}{2}$ | 41 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 1 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{3}{2}$ | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 4 |
| $x_4$ | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 | -1 | 6 |

**4C)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{33}{2}$ | 0 | $\frac{13}{3}$ | $\frac{9}{2}$ | 32 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 1 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{3}{2}$ | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 3 |
| $x_4$ | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 | -1 | 8 |

**4F)**

| b.v | eq. | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | $\frac{33}{2}$ | 0 | $\frac{13}{3}$ | $\frac{9}{2}$ | 41 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 1 |
| $x_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{3}{2}$ | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 4 |
| $x_4$ | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 1 | -1 | 6 |

**Opgave 5: 2-fase metode, udvidet form** Betragt følgende LP

$$\max 6x_1 + 3x_2 + 8x_3$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &\leq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\geq 13 \\ 4x_1 + 2x_3 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

For at løse problemet med 2-fase metoden skal problemet først gøres klar til fase 1 ved at tilføje kunstige variable samt surplus og slack variable. Objektfunktionen skal også ændres så fase 1 leder til en løsning hvor alle kunstige variable har værdien 0 (hvis muligt). Hvilken af følgende modeller er et korrekt udgangspunkt for fase 1? Variable med »streg over« er kunstige variable.

**5A)**

$$\min \bar{x}_6$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_5 &= 13 \\ 4x_1 + 2x_3 + \bar{x}_6 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \bar{x}_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

**5B)**

$$\min \bar{x}_6$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 &= 13 \\ 4x_1 + 2x_3 + \bar{x}_6 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \bar{x}_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

**5C)**

$$\min \bar{x}_6 + \bar{x}_7$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_5 + \bar{x}_6 &= 13 \\ 4x_1 + 2x_3 + \bar{x}_7 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

**5D)**

$$\min \bar{x}_7 + \bar{x}_9$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - x_4 + \bar{x}_5 &= 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_6 + \bar{x}_7 &= 13 \\ 4x_1 + 2x_3 - x_8 + \bar{x}_9 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7, x_8, \bar{x}_9 &\geq 0 \end{aligned}$$

**5E)**

$$\min \bar{x}_7$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + \bar{x}_5 &= 13 \\ 4x_1 + 2x_3 - x_6 + \bar{x}_7 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

**5F)**

$$\min \bar{x}_5 + \bar{x}_7$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - x_4 + \bar{x}_5 &= 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 &= 13 \\ 4x_1 + 2x_3 + \bar{x}_7 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6, \bar{x}_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Opgave 6: Dualitet** Opskriv det duale problem til følgende LP:

$$\min 4x_1 + 2x_2 + 8x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 15 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leq 19 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Lad $y_1, y_2$ og $y_3$ være duale variable svarende til henholdsvis første, anden og tredie begrænsning. Hvilken af følgende svarmuligheder er korrekt ?

**6A)**

$$\max 15y_1 + 6y_2 + 19y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 3y_3 &\leq 4 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 &= 8 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**6B)**

$$\max 15y_1 + 6y_2 + 19y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 3y_3 &\leq 4 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 &= 8 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**6C)**

$$\max 15y_1 + 6y_2 + 19y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq 4 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 &\leq 2 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 &= 8 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\geq 0 \\ y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

**6D)**

$$\max 15y_1 + 6y_2 + 19y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq 4 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 &\leq 2 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 &= 8 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**6E)**

$$\max 15y_1 + 6y_2 + 19y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq 4 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 &\leq 2 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 &= 8 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

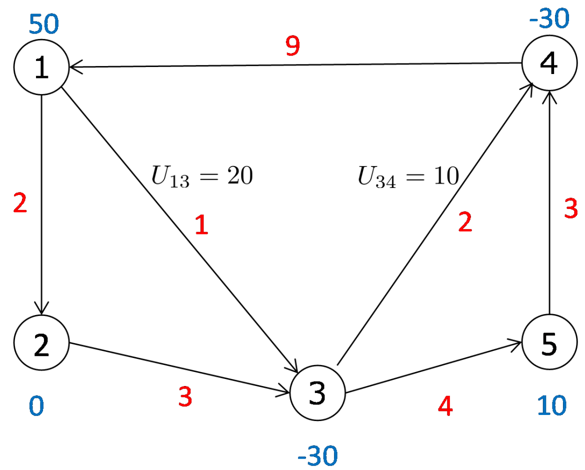
**6F)**

$$\max 15y_1 + 6y_2 + 19y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 3y_3 &\leq 4 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 &= 8 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\geq 0 \\ y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

**Opgave 7: Minimum cost flow** Vi betragter et »minimum cost flow« problem defineret på følgende graf




Grafen skal forstås på samme måde som graferne vist til forelæsningerne: Pilenes retning angiver i hvilken retning man kan sende varer, røde tal angiver omkostningen per vare man sender via kanten. De blå tal viser udbud og efterspørgsel i hver knude. Positive tal indikerer at der er et overskud af varer i knuden mens negative tal indikerer at knuden efterspørger varer. På udvalgte kanter er der angivet en øvre grænse for mængden af varer der kan strømme over kanten. Specifikt kan der højst strømme 20 varer via kanten fra knude 1 til 3 og der kan højst strømme 10 varer via kanten fra knude 3 til 4. For de øvrige kanter er der ingen øvre grænser for mængden af varer der kan transporteres. Der kan naturligvis ikke sendes et negativt antal varer via en kant. Når problemet modeleres som et LP bruges variable $x_{ij}$ til at indikere mængden af varer der sendes via kanten fra knude $i$ til $j$.

Nedenfor er der foreslået 6 løsninger til problemet. Løsningerne viser variablene der har en værdi forskellig fra nul. De variable som ikke er vist har værdien nul. Udvælg den bedste løsning (løsningen skal være lovlig og have den bedste objektværdi blandt de lovlige løsninger).

**7A)**

$x_{13} = 50 \qquad x_{34} = 20 \qquad x_{54} = 10$

**7B)**

$x_{12} = 30 \qquad x_{13} = 20 \qquad x_{23} = 30$
$x_{34} = 10 \qquad x_{35} = 10 \qquad x_{54} = 20$

**7C)**

$x_{13} = 1 \qquad x_{34} = 1 \qquad x_{35} = 1 \qquad x_{54} = 1$

**7D)**

$x_{12} = 50 \qquad x_{23} = 50 \qquad x_{35} = 20 \qquad x_{54} = 10$

**7E)**

$x_{12} = 20 \qquad x_{13} = 10 \qquad x_{24} = 20 \qquad x_{54} = 30$

**7F)**

$x_{12} = 10 \qquad x_{13} = 20 \qquad x_{23} = 10$
$x_{41} = 20 \qquad x_{54} = 10$

**Opgave 8: Lineær programmering** Betragt følgende LP

$$\max x_1 + 2x_2$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 \leq 11$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 27$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Hvor mange lovlige hjørnepunktsløsninger (»corner point feasible solutions«) eksisterer der for dette LP?

**8A)** 0

**8B)** 1

**8C)** 3

**8D)** 4

**8E)** 5

**8F)** 6

**Opgave 9: Fundamental indsigt** Et firma producerer to produkter. Firmaet kan sælge det første produkt for 3000 kr per enhed og det andet produkt for 8000 kr per enhed. Firmaet blander tre forskellige råstoffer for at producere de to produkter. For at producere en enhed af produkt 1 skal firmaet bruge 1 liter af råstof 1, 1 liter af råstof 2 og 1 liter af råstof 3. For at producere en enhed af produkt 2 skal firmaet bruge 4 liter af råstof 1 og 1 liter af råstof 2. Firmaet har 13 liter af råstof 1, 8 liter af råstof 2 og 8 liter af råstof 3.

Firmaet kan derfor løse nedenstående LP for at bestemme hvor mange enheder af de to produkter de skal producere for at maksimere indtjeningen. $x_i$ angiver hvor man enheder af produkt $i$ firmaet skal producere.

$$\max 3x_1 + 8x_2$$

$$1x_1 + 4x_2 \leq 13$$
$$1x_1 + 1x_2 \leq 8$$
$$1x_1 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Når firmaet løser LP'et finder de at den optimale løsning er $x_1 = \frac{19}{3}, x_2 = \frac{5}{3}$ (det er okay at variablene ikke er heltallige, produktet er på væskeform og firmaet kan sælge brøkdele af en hel enhed).

Firmaet overvejer at fremstille et tredie produkt. For at fremstille en enhed af det nye produkt vil man skulle bruge tre liter af råstof 2 og to liter af råstof 3. Firmaet ønsker at bestemme en pris for det nye produkt så firmaets indtægt øges. Hvilken af følgende svarmuligheder er mest præcis?

**9A)** produktet skal koste mere end 4333 kr per enhed. Hvis det sælges for 4333 kr per enhed eller mindre vil det ikke øge indtjeningen.

**9B)** produktet skal koste mere end 3000 kr per enhed. Hvis det sælges for 3000 kr per enhed eller mindre vil det ikke øge indtjeningen.

**9C)** produktet skal koste mere end 3333 kr per enhed. Hvis det sælges for 3333kr per enhed eller mindre vil det ikke øge indtjeningen.

**9D)** produktet skal koste mere end 4000 kr per enhed. Hvis det sælges for 4000 kr per enhed eller mindre vil det ikke øge indtjeningen.

**9E)** produktet skal koste mere end 4 kr per enhed. Hvis det sælges for 4 kr per enhed eller mindre vil det ikke øge indtjeningen.

**9F)** produktet skal koste mere end 3,33 kr per enhed. Hvis det sælges for 3,33 kr per enhed eller mindre vil det ikke øge indtjeningen.

**Opgave 10: Complementary slackness** Vi betragter et LP

$$\max c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &\leq b_3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

hvor $c_j$, $a_{ij}$ og $b_i$ er konstanter ($i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3\}$). Lad $x_4, x_5$ og $x_6$ være slack variable for første, anden og tredie begrænsning. Din makker har tildelt værdier til $c_j$, $a_{ij}$ og $b_i$ og løst problemet til optimalitet. Han fortæller at slack variablene har værdierne $x_4 = 0$, $x_5 = 3$ og $x_6 = 0$. Lad $y_1$,$y_2$ og $y_3$ være de duale variable svarende til de tre begrænsninger ($y_i$ svarer til den i'te begrænsning). Som bekendt kan de optimale duale variable aflæses fra simplextableauet når LP'et er løst til optimalitet.

Kan du, baseret på din makkers oplysninger, sige noget om værdien af de duale variable svarende til den optimale løsning? Hvilket af nedenstående svar er mest præcist?

**10A)** Der må gælde at $y_1 = 0, y_2 = 3$, og $y_3 = 0$

**10B)** Der må gælde at $y_1 \geq 0, y_2 = 0$, og $y_3 \geq 0$

**10C)** Der må gælde at $y_1 > 0, y_2 = 0$, og $y_3 > 0$

**10D)** Der må gælde at $y_1 = b_1, y_2 = b_2$, og $y_3 = b_3$

**10E)** Der må gælde at $y_1 = c_1, y_2 = c_2$, og $y_3 = c_3$

**10F)** Det er ikke mulig at sige noget om værdien af de duale variable baseret på oplysningerne i opgaven.

**Opgave 11: Heltalsprogrammering og modellering**

Betragt følgende tre matematiske modeller. Model 1 er defineret ved:

$$\max 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5$$
$$2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 10x_5 \leq 13$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}$$

Model 2 er defineret ved:

$$\max 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5$$
$$2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 10x_5 \leq 13$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ og heltal}$$

Model 3 er defineret ved:

$$\max 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5$$
$$2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 10x_5 \leq 13$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Optimum af model 1 kaldes $z_1$, optimum af model 2 benævnes $z_2$ og optimum af model 3 kalder vi $z_3$. Hvilke forhold imellem $z_1$, $z_2$ og $z_3$ er der:

**11A)** $z_2 \leq z_1 \leq z_3$

**11B)** $z_2 \geq z_1 \geq z_3$

**11C)** $z_3 \leq z_2 \leq z_1$

**11D)** $z_3 \geq z_2 \geq z_1$

**11E)** $z_1 \leq z_2 \leq z_3$

**11F)** $z_1 \geq z_2 \geq z_3$

**Opgave 12: Konstruktionsheuristikker**

Betragt følgende knapsack problem:

$$\max 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 1x_6$$
$$2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 4x_6 \leq 13$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$$

som vi har set i undervisningen. For hvert element er der givet en profit (som indgår i objektfunktionen) og en vægt (som indgår i kapacitetsbegrænsingen). På højre side af kapacitetsbegrænsningen har vi rygsækkens kapacitet.

En grådig heuristik **H** for knapsack problemet (model 1) defineres som følgende: For hvert element udregn forholdet mellem profit og vægt (dvs. $\frac{\text{profit}}{\text{vægt}}$). Tag elementerne i faldende rækkefølge af forholdet mellem profit og vægt. Hvis elementet kan være i rygsækken tilføj det, ellers se bort fra elementet. Gå dernæste videre til næste element. Vi stopper når vi har tjekket samtlige elementer eller når vi har opbrugt al kapaciteten. Hvis to eller flere elementer har samme forhold vælges rækkefølgen tilfældigt.

Brug den grådige heuristik på modellen ovenfor. Hvad er værdien af løsningen og hvilke elementer kommer med i løsningen?

**11A)** $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ og alle andre $x_i = 0$ og optimumsværdi 20

**12B)** $x_1 = x_2 = x_6 = 1$ og alle andre $x_i = 0$ og optimumsværdi 14

**12C)** $x_2 = x_3 = 1$ og alle andre $x_i = 0$ og optimumsværdi 16

**12D)** $x_4 = x_5 = 1$ og alle andre $x_i = 0$ og optimumsværdi 11

**12E)** $x_1 = 1$ og alle andre $x_i = 0$ og optimumsværdi 4

**12F)** $x_2 = 1$ og alle andre $x_i = 0$ og optimumsværdi 9

**Opgave 13: Heltalsprogrammering og modellering. Udfyldningsproblemet I**

Givet en mængde $N$ bestående af $n$ elementer. Hvert element $i$ har en vægt $v_i$, og samlet har vi en kapacitet på $b$. Da består *udfyldningsproblemet* i at vælge en delmængde af $N$ der udnytter kapaciteten bedst muligt, dvs. kommer så tæt på $b$ som muligt, men ikke overskrider $b$. Lad $x_i$ være en binær variable. Lad $x_i = 1$ hvis element $i$ er valgt og 0 ellers.

Hvordan ser en heltalsprogrammeringsmodel ud for udfyldningsproblemet:

**13A)**

$$\begin{gathered} \max n - \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \text{st.} \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n \end{gathered}$$

**13B)**

$$\begin{gathered} \max \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \text{st.} \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \leq b \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{gathered}$$

**13C)**

$$\begin{gathered} \max \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \text{st.} \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 1 \\ x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n \end{gathered}$$

**13D)**

$$\begin{gathered} \max \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \text{st.} \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \leq b \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{gathered}$$

**13E)**

$$\begin{gathered} \max \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \\ \text{st.} \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \leq b \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{gathered}$$

**13F)**

$$\begin{gathered} \max \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \\ \text{st.} \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n \end{gathered}$$

**Opgave 14: Heltalsprogrammering og modellering. Udfyldningsproblemet II**

Udfyldningsproblemet som defineret i opgave 13 kan ses som et specialtilfælde af knapsack problemet. Derfor kan vi bruge heuristikken **H** fra opgave 12 til at finde en lovlig løsning til udfyldningsproblemet. Hvad bliver $\frac{\text{profit}}{\text{vægt}}$ når vi bruger **H** på udfyldningsproblemet? Er det godt eller dårligt?

**Opgave 15: Produktionsplanlægning**

Vi betragter et produktionsplanlægningsproblem over $n$ tidsperioder. Givet er en efterspørgsel $d_t$ for hver tidsperiode $t$. Vi skal opfylde efterspørgslen $d_t$ i tidsperiode $t$ og til det har vi en maskine. Her er produktionsomkostningerne pr enhed $p_t$ i tidsperioden $t$. Der er ikke nogen omkostning forbundet med at lægge en enhed på lager fra en tidsperiode til den næste. Vi må derimod betale for at starte produktionen i en given tidsperiode. Dette varierer også med tiden og koster $f_t$ for tidsperiode $t$. Vi ønsker således at opfylde efterspørgslen med så lille omkostning som muligt og modellen bliver derfor:

$$\begin{aligned}
\min \sum_{t=1}^{n} p_t x_t + \sum_{t=1}^{n} f_t y_t & \\
& s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \quad \text{for all } t = 1, 2, \ldots, n \\
& x_t \leq M y_t \quad \text{for all } t = 1, 2, \ldots, n \\
& s_0 = 0, s_t, x_t \geq 0 \quad \text{for all } t = 1, 2, \ldots, n \\
& y_t \in \{0, 1\} \quad \text{for all } t = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}$$

I modellen er $x_t$ antal enheder der produceres i periode $t$, $y_t$ er en binær variabel der er 1 hvis der bliver produceret i periode $t$ og $s_t$ er antal enheder der bliver lagt på lager i tidsperiode $t$. Vi definerer $s_0 = s_n = 0$. Bemærk at anden begrænsning indeholder $M$, den skal sikre at hvis $y_t$ er lig 1 så er alle mulige værdier for $x_t$ lovlige, hvis derimod $y_t$ er lig med 0 så kan $x_t$ kun være 0. Hvordan kan vi udregne det mindste $M$ som sikrer at begrænsningen er lovlig.

**15A)** $M = n$

**15B)** $M = n \cdot \max_{t=1,2,\ldots,n}\{d_t\}$

**15C)** $M = \sum_{t=1}^{n} d_t$

**15D)** $M = \sum_{t=1}^{n} p_t$

**15E)** $M = \sum_{t=1}^{n} x_t$

**15F)** $M = \sum_{t=1}^{n} y_t$

**Opgave 16: Produktionsplanlægning, modellering af heltalsprogrammering**

I produktionsplanlægningsproblemet fra opgave 15 får vi nu en ekstra maskine. Dermed har vi nu to maskiner. De to maskiner har forskellige enhedsomkostninger $p1_t$ og $p2_t$ samt to forskellige opstartsomkostninger $f1_t$ og $f2_t$. Bemærk der er stadig kun et lager. Vi indfører variablene $x1_t$ og $x2_t$ som antal enheder der produceres på maskine 1 hhv 2 til tiden $t$ samt $y1_t$ og $y2_t$ der som binær variabel beskriver om maskine 1 hhv. maskine 2 bruges i tidsperiode $t$. Omskriv $s_{t-1} + x_t = d_t + s_t$ så den tager højde for at der er to maskiner.

**16A)** $s_{t-1} + x1_t = d_t + s_t$ og $s_{t-1} + x2_t = d_t + s_t$

**16B)** $s_{t-1} + x1_t + x2_t = d_t + s_t$

**16C)** $s_{t-1} + x1_t + x2_t \geq d_t + s_t$

**16D)** $s_{t-1} + y1_t \cdot x1_t + y2_t \cdot x2_t = d_t + s_t$

**16E)** $x1_t + x2_t = d_t + s_t$

**16F)** $s_{t-1} + x1_t + x2_{t+1} = d_t + s_t$

### Opgave 17: Produktionsplanlægning, modellering af heltalsprogrammering

I forhold til opgave 16 søger vi nu at udvide produktionsplanlægningsmodellen så der i enhver tidsperiode $t$ må maskine 1 og 2 ikke køre samtidig. Hvordan beskrives dette i modellen:

**17A)** $x1_t + x2_t \leq My1_t \quad \forall t = 1, \ldots, n$

**17B)** $x1_t \leq y1_t$ og $x2_t \leq y2_t \quad \forall t = 1, \ldots, n$

**17C)** $x1_t \leq My1_t$ og $x2_t \leq My2_t \quad \forall t = 1, \ldots, n$

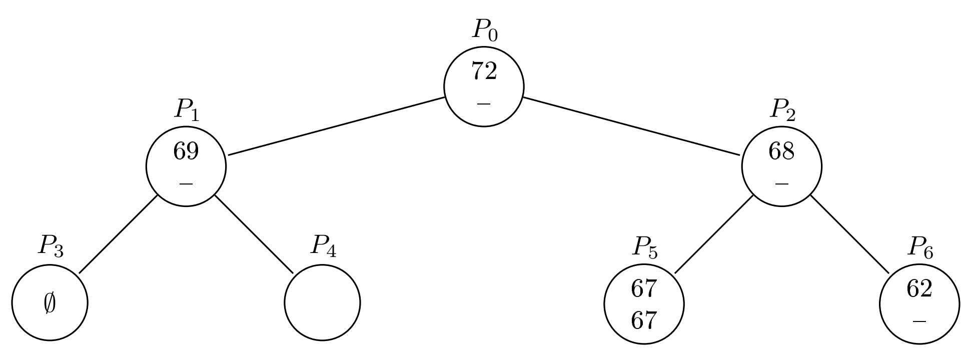
**17D)** $y1_t \leq y2_t \quad \forall t = 1, \ldots, n$

**17E)** $y1_t + y2_t \leq 1 \quad \forall t = 1, \ldots, n$

**17F)** $y1_t = y2_t \quad \forall t = 1, \ldots, n$

### Opgave 18: Brand & Bound

Betragt heltalsprogrammeringsproblemet $P$ $z = \max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0 \text{ og heltal}\}$. Dette kan løses ved brug af Branch & Bound. Figur 1 viser hvordan et Branch & Bound træ har udviklet sig under udførelse af vores Branch & Bound metode. Knude $P_4$ i træet har endnu ikke været analyseret (dvs. øvre og nedre grænser ikke er beregnet). Symbolet $\emptyset$ angiver at løsningen for det givne delproblem er ulovlig, og knude $P_5$ hvor der er angivet to værdier angiver at øvre grænse samtidig er en lovlig løsning til det oprindelige heltalsprogrammeringsproblem. Værdierne i træets knuder svarer til den øvre grænse for det delproblem som knuden repræsenterer. Så rod-knuden i træet (delproblem $P_0$) har en øvre grænse på 72.




Figur 1: Branch & Bound træ for heltalsprogrammeringsproblemet $P$

Hvad er den øvre grænse for en optimal løsning med den viden vi har fra Branch & Bound træet?

**18A)** $+\infty$

**18B)** 72

**18C)** 69

**18D)** 68

**18E)** 67

**18F)** 62

**Opgave 19: Branch & Bound II**

Igen med baggrund i figur 1. Hvad er den højeste øvre grænse på $P_4$ der gør det muligt at eliminere $P_4$ og dermed ikke branche videre på knuden?

**19A)** 64

**19B)** 66

**19C)** 67

**19D)** 71

**19E)** 72

**19F)** 73

**Opgave 20: TSP heuristikker I**

Betragt følgende symmetriske TSP (Traveling Salesman Problem) med seks byer. Tabel 1 angiver afstandene mellem byerne i kilometer En mulig heuristik til at finde en lovlig løsning til TSP er følgende: Gennemgå kanterne i stigende rækkefølge. Hvis en kant:

1. IKKE genererer en subtour eller
2. IKKE giver mere end to kanter valgt for en given knude

da tilføjes kanten. Dernæst gå videre til næste kant. Stop når alle kanterne har være tjekket eller når der er genereret en tour.

| | | Distances (km) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | City | | | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| City | 1 | | 11 | 19 | 13 | 21 | 18 |
| | 2 | | | 10 | 16 | 14 | 20 |
| | 3 | | | | 21 | 23 | 25 |
| | 4 | | | | | 18 | 15 |
| | 5 | | | | | | 17 |
| | 6 | | | | | | |

Tabel 1: Data til TSP problem

Angiv løsning og længde for datasættet i tabel 1 ved brug af den beskrevne heuristik. Bemærk at eftersom afstandene er symmetriske dvs. afstanden fra $a$ til $b$ er den samme som afstanden fra $b$ til $a$ kan touren gennemløbes for samme længde i to "retninger". Så i f.eks. svar 20A så repræsenterer 1-3-2-6-4-5-1 også 1-5-4-6-2-3-1.

**20A)** 1-3-2-6-4-5-1, længde = 103 km

**20B)** 1-6-5-2-3-4-1, længde = 93 km

**20C)** 1-2-3-6-5-4-1, længde = 94 km

**20D)** 1-6-5-4-3-2-1, længde = 95 km

**20E)** 1-2-4-6-5-3-1, længde = 101 km

**20F)** 1-2-3-5-6-4-1, længde = 89 km

**Opgave 21: TSP heuristikker II**

Givet touren 1-6-5-2-3-4-1 brug data fra tabel 1 og udfør en 2-opt exchange improvement ved at bruge kanterne $(1,6)$ og $(3,4)$. Hvilke af følgende udsagn beskriver den nye tour og forskellen i objektfunktionsværdi sammenlignet med den gamle tour. Et negativt tal indikerer den nye tour er kortere med den angivne størrelse.

**21A)** 1-4-6-5-2-3-1, -5 km

**21B)** 1-6-5-2-3-4-1, ingen ændring i objektfunktionsværdi

**21C)** 1-6-5-3-2-4-1, +4 km

**21D)** 1-3-4-6-5-2-1, +4 km

**21E)** 1-4-5-6-3-2-1, +1 km

**21F)** 1-3-4-5-6-2-1, +13 km

**Opgave 22: Transport problem I**

Tabel 2 angiver omkostningerne pr enhed samt produktion og forbrug for et transport problem med 3 fabrikker ("factories") og 3 lagre ("supply stores") (The Transporation Problem).

| | | Lager | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| Fabrik | 1 | 5 | 10 | 8 |
| | 2 | 4 | 7 | 11 |
| | 3 | 9 | 5 | 8 |

Tabel 2: Transport problem

De tre fabrikker producerer henholdsvis 20, 30 og 40 enheder og lagrene aftager 35, 35 og 20 enheder. Vi definerer $x_{ij}$ som det antal enheder der sendes fra fabrik $i$ til lager $j$. Vi starter med at bruge den grådige heuristik som beskrevet i slides om transport problemet, hvor fabrikker gennemløbes i rækkefølgene 1, 2 og 3. Hvad er den lovlige løsning som den grådige heuristik genererer og hvad er værdien af løsningen?

**Opgave 23: Transport problem II**

Givet transport problemet defineret i opgave 22. Brug network simplex metoden til at løse problemet. Hvis der i en iteration er flere kanter med $\bar{c}_{ij} < 0$ vælg da den mest negative. Hvad er den optimale løsning for dette transport problem? Vis udregningerne for hver iteration.