42101: Løsning til eksamenssæt, sommer 2013

Opgave 1 x_1 skal gå ind i basis da den har lavest koefficient i Z-rækken og ved hjælp af minimum ration test:

$$\begin{aligned} 15/2 &= 7.5 \\ 24/5 &= 4\tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

ser vi at x_5 skal forlade basis ($4.8 < 7.5$). 1C er derfor det korrekte svar.

Opg. 2: Jeg bruger notation fra tabel nederst på slide 49 fra 18. februar. Fra tableauet i opgaven kan vi aflæse:

$$y^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

og

$$S^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Fra opgaveteksten kan vi også aflæse

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 15 \\ 24 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi regner nu:

$$y^*A - c = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, S^*A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, y^*b = 33, s^*b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi indsætter resultatet i tableau:

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Højre side
1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$	33
	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	6
	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	3

Dvs. rigtig svar er 2D.

Opg. 3: Ny "start" højreside

$$\begin{bmatrix} 15 & +\Delta \\ 24 & \end{bmatrix}$$

Vi udregner "slut" højreside

$$S^*b^{ny} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & +\Delta \\ 24 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & +\frac{2}{3}\Delta \\ 3 & -\frac{1}{3}\Delta \end{bmatrix}$$

Så længe Δvælges så højre side er ≥ 0 vil basis være uændret. Vi regner derfor

$$6 + \frac{2}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -9$$
$$3 - \frac{1}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 9$$

Tilsammen har vi $-9 \leq \Delta \leq 9$ og deraf følger: $6 \leq b_1 \leq 24$ og det rigtige svar er 3F.

Opg 4: Rigtigt svar: 4B. Se side 116-117 i bogen.

Opg 5: I fase 1 vil vi gerne "slippe af med" $\bar{x}_5$ så vi løser

$$\min \bar{x}_5$$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + \bar{x}_5 \quad &= 16 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad + x_6 &= 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5, x_6 \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

I tableau form har vi:

	Eq	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	RHS
Z	0	-1	0	0	0	0	1	0	0
x5	1	0	2	1	2	-1	1	0	16
x6	2	0	5	4	2	0	0	1	24

Vi slipper af med koefficienten i Z-rækken for $\bar{x}_5$ ved at trække eq (1) fra er (0)

	Eq	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	RHS
Z	0	-1	-2	-1	-2	1	0	0	-16
x5	1	0	2	1	2	-1	1	0	16
x6	2	0	5	4	2	0	0	1	24

Vi kan nu start første simplex iteration. Vi skal vælge variabel som skal gå ind i basis. x_1 og x_3 er lige gode. Vi vælger at lade x_1 gå ind i basis. Minimum ratio test viser at x_6 skal forlade basis.

	Eq	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	RHS
Z	0	-1	0	0.6	-1.2	1	0	0.4	-6.4
x5	1		0	-0.6	1.2	-1	1	-0.4	6.4
x1	2		1	0.8	0.4			0.2	4.8

$\bar{x}_5$ er stadig i basis, så vi må fortsætte. x_3 går ind i basis og minimum ratio test viser at $\bar{x}_5$ forlade basis:

	Eq	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	RHS
Z	0	-1	0	0	0	0	1	0	0
x3	1	0	0	-0.5	1	$-\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$
x1	2	0	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$

$\bar{x}_5$ har nu forladt basis og vi er færdige med fase 1. Vi kan starte fase 2. Vi fjerner $\bar{x}_5$ fra tableau og indsætter den oprindelige objektfunktion

	Eq	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	RHS
Z	0	1	-6	-5	-3	0	0	0
x3	1	0	0	-0.5	1	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$
x1	2	0	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$

Igen skal vi slipper af med koefficienter $\neq 0$ i eq (0) for alle basis variable. Vi starter med at eliminere koefficienten for x_1 ved at lægge 6 gange eq. (2) til eq. (0).

	Eq	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	RHS
Z	0	1	0	1	-3	2	2	16
x3	1	0	0	-0.5	1	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$
x1	2	0	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$

og derefter eliminere vi koefficienten for x_3 ved at lægge 3 gange eq. (1) til eq. (0).

	Eq	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	RHS
Z	0	1	0	-0.5	0	-0.5	1	32
x3	1	0	0	-0.5	1	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$
x1	2	0	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$

Vi kan nu gå i gang med første simplex iteration i fase 2. Vi vælger x_2 som ny variabel i basis (vi kunne lige så godt have valg x_4). Minimum ratio test giver at x_1 forlader basis:

	Eq	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	RHS
Z	0	1	0.5	0	0	$-\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{6}$	$33\frac{1}{3}$
x3	1	0	0.5	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$6\frac{2}{3}$
x2	2	0	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$

Ny simplex iteration. x_4 går ind i basis. Minimum ratio test giver at x_2 forlader basis

	Eq	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	RHS
Z	0	1	1.5	1	0	0	1.5	36
x3	1	0	2.5	2	1	0	0.5	12
x4	2	0	3	3	0	1	1	8

$x_1 = x_2 = 0, x_3 = 12$. Objektværdi $Z = 36$

Opg. 6: Svar: 6F. Brug tabel 6.14 på side 214 i bogen.

Opg. 7: Vores kø er af typen $M/M/s/K$ med $s = 1$ og $K = 3$. $\lambda = 2.5, \mu = 3$ (ankomst og "departure" rate udtrykt i antal per time). Vi udregner

$$\rho = \lambda/\mu = 2.5/3 = \frac{5}{2}/3 = \tfrac{5}{6}$$

Nu kan vi udregne P_0:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = \frac{1/6}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^4} = \frac{1/6}{1-\frac{625}{1296}} = \frac{1/6}{\frac{671}{1296}} = \frac{1296}{6 \cdot 671} = \frac{1296}{4026} = 0.32$$

dernæst kan vi udregne L:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} = \frac{5/6}{1/6} - \frac{4\left(\frac{5}{6}\right)^4}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^4} = 5 - \frac{4\frac{625}{1296}}{1-\frac{625}{1296}} = 5 - \frac{\frac{2500}{1296}}{\frac{671}{1296}} \\ &= 5 - \frac{2500}{671} = \frac{855}{671} = 1.274 \end{aligned}$$

og til sidst L_q:

$$L_q = L - (1 - P_0) = \frac{855}{671} - 1 + \frac{1296}{4026} = 0.596$$

Opg. 8: Vi er i tilstanden med 0 kunder med sandsynlighed $P_0 = 0.322$. Dvs. vi må forvente at der ikke er nogen kunder i butikken 32.2% af tiden. 8A er det rigtige svar.

Opg. 9: Vi benytter minimax

		Joakim				
		A	B	C	min	
	A	0	4	-2	-2	
Frederik	B	**2**	3	3	2	**X**
	C	1	-5	4	-5	
	max	2	4	4		
		X				

Vi har et saddelpunkt når Frederik vælger B og Joakim vælger A. Rigtigt svar: 9D

Opg. 10 Tabel fra opgave:

		Joakim		
		J_A	J_B	J_C
	F_A	0	4	-2
Frederik	F_B	2	-1	3
	F_c	1	-5	2

F_B dominerer F_C:

		Joakim		
		J_A	J_B	J_C
Frederik	F_A	0	4	-2
	F_B	2	-1	3

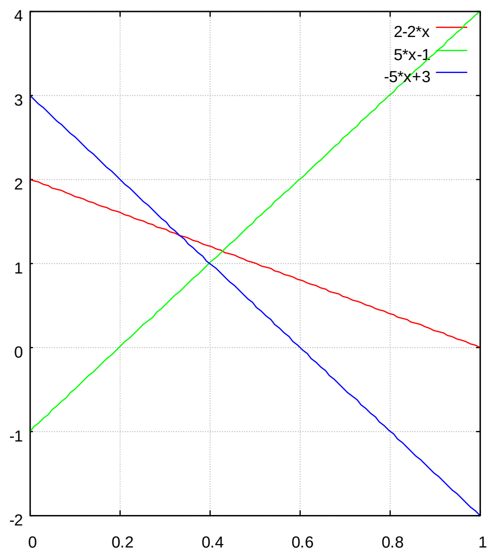
Vi skal løse

$$\max \min\{2x_2, 4x_1 - x_2, -2x_1 + 3x_2\}$$

indsæt $x_2 = 1 - x_1$

$$\begin{aligned} &\max_{x_1 \in [0,1]} \min\{2 - 2x_1, 4x_1 - (1 - x_1), -2x_1 + 3(1 - x_1)\} \\ &= \max_{x_1 \in [0,1]} \min\{2 - 2x_1, 5x_1 - 1, -5x_1 + 3\} \end{aligned}$$

Når vi tegner ser vi at optimum ligger ved skæring mellem anden og tredie linie:



Vi bestemmer x_1:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 1 &= -5x_1 + 3 \\ \Leftrightarrow 10x_1 &= 4 \\ x_1 &= 0.4 \end{aligned}$$

Værdi: 5*0.4-1=1.
Korrekt løsning: 10C

Opg. 11 Med den opdaterede udbyttetabel finder vi spillets værdi ved

$$\max \min\{ux_2, 4x_1 - x_2, -2x_1 + 3x_2\}$$

indsæt $x_2 = 1 - x_1$

$$\begin{aligned} &\max_{x_1 \in [0,1]} \min\{u - ux_1, 4x_1 - (1 - x_1), -2x_1 + 3(1 - x_1)\} \\ &= \max_{x_1 \in [0,1]} \min\{u - ux_1, 5x_1 - 1, -5x_1 + 3\} \end{aligned}$$

Ved at se på figuren vi tegnede i opgave 10 kan vi se at vi ved at ændre u kan gøre hældningen for første linie stejlere og kan opnå at spillets værdi bliver 0.5. Værdien vil fremkomme som skæringen mellem første og anden linie: Vi bestemmer værdien for x_1 således at $5x_1 - 1 = 0.5$.

$$\begin{aligned} 5x_1 - 1 &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 5x_1 &= \frac{3}{2} \\ x_1 &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

og vi bestemmer derefter u så $u - ux_1 = 0.5$ når $x_1 = \frac{3}{10}$

$$\begin{aligned} u - \frac{3}{10}u &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{7}{10}u &= \frac{1}{2} \\ u &= \frac{1 \cdot 10}{2 \cdot 7} \\ u &= \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Dvs. når $u = \frac{5}{7}$ er maximum bestemt ved skæringen mellem første og anden linie og spillets værdi er $\frac{1}{2}$. **Løsning: 11C**

Opgave 12: Vi har en EOQ model med $h = 0.5, d = 2, K = 242$. Vi udregner den optimale ordremængde Q^* vha. formel fra s. 835:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 242}{0.5}} = \sqrt{1936} = 44$$

Dvs. han skal bestille shampoo hver $44/2 =$ hver 22. dag. **Rigtigt svar 12C**

Opgave 13: Vi har $p = 75, c = 50, h = -5$. Parametren α for eksponentialfunktionen er $1/45$. Vi har $F(S) = 1 - e^{-aS} = 1 - e^{-\frac{1}{45}S}$

Optimal inventory level S^* findes ved hjælp af

$$F(S^*) = \frac{p-c}{p+h} = \frac{75-50}{75-5} = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$$

vi indsætter udtryk for $F(S^*)$

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{1}{45}S} &= \frac{5}{14} \\ \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{45}S} &= \frac{9}{14} \\ -\frac{1}{45}S &= \ln\frac{9}{14} \\ S &= -45\ln\frac{9}{14} = 19.88 \end{aligned}$$

Afrundes til 20 blade per sending. **Rigtig svar: 13E**

Opgave 14

	E	F	G	H
A	17	11	7	16
B	6	16	5	10
C	20	6	3	20
D	17	5	11	18

Skridt 1. Vi skaffer nuller i hver række

	E	F	G	H
A	10	4	0	9
B	1	11	0	5
C	17	3	0	17
D	12	0	6	13

Skridt 2: Vi skaffer nuller i hver søjle:

	E	F	G	H
A	9	4	0	4
B	0	11	0	0
C	16	3	0	12
D	11	0	6	8

Vi har stadig ikke en nul-tildeling så vi overdækker nuller (markeret med rødt):

	E	F	G	H
A	9	4	0	4
B	0	11	0	0
C	16	3	0	12
D	11	0	6	8

Trækker 4 fra alle sorte tal og lægger 4 til tal der er dækket to gange. Efter det får vi:

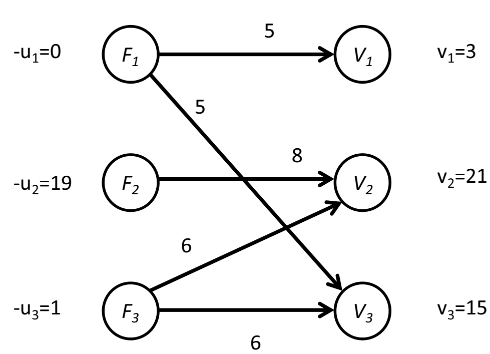
	E	F	G	H
A	5	4	0	0
B	0	15	4	0
C	12	3	0	8
D	7	0	6	4

og nu har vi en nul-tildeling (markeret med de røde tal ovenfor), Når vi indsætter de oprindelige tal kan vi se at den optimal løsning er 30:

	E	F	G	H
A	17	11	7	16
B	6	16	5	10
C	20	6	3	20
D	17	5	11	18

Dvs. rigtigt svar: 14A

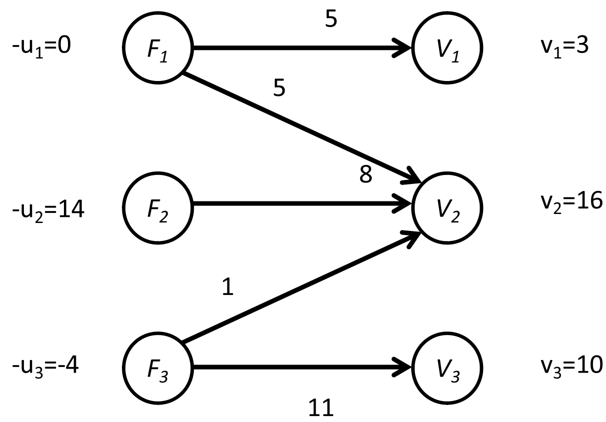
Opgave 15 Start løsning. Tal på kanter angiver hvor meget vi sender gennem den pågældende kant. u_i og v_j er duale variable udregnet som beskrevet i netværks simplex noten.



Vi udregner reducerede omkostninger:

$$\begin{aligned}\bar{c}_{12} &= 16 - 0 - 21 = -5\\ \bar{c}_{21} &= 14 + 19 - 3 = 30\\ \bar{c}_{23} &= 3 + 19 - 15 = 7\\ \bar{c}_{31} &= 4 + 1 - 3 = 2\end{aligned}$$

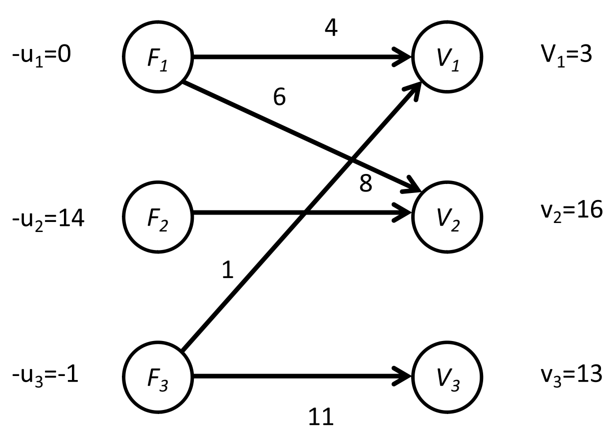
Dvs. kanten (F_1, V_2) skal tilføjes. Det giver cyklen $(F_1, V_2, F_3, V_3, F_1)$. Der flyder 5 enheder på kanten (F_1, V_3) og 6 enheder på kanten (F_3, V_3) så vi kan sende 5 enheder gennem den nye kant og (F_1, V_3) forlader basis. Vi får da følgende løsning:



Vores nye reducerede omkostninger bliver

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_{13} &= 15 - 0 - 10 = 5 \\
\bar{c}_{21} &= 14 + 14 - 3 = 25 \\
\bar{c}_{23} &= 3 + 14 - 10 = 7 \\
\bar{c}_{31} &= 4 - 4 - 3 = -3
\end{aligned}
$$

Vi kan se at løsningen endnu ikke er optimal. Kanten (F_3, V_1) skal tilføjes. Det giver cyklen $(F_3, V_1, F_1, V_2, F_3)$. Der flyder 5 enheder på kanten (F_1, V_1) og 1 enhed på kanten (F_3, V_2). Vi kan derfor sende 1 enhed gennem den nye kant og kanten (F_3, V_2) forlader basis. Vi får da følgende løsning:



Vores nye reducerede omkostninger bliver

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_{13} &= 15 - 0 - 13 = 2 \\
\bar{c}_{21} &= 14 + 14 - 3 = 25 \\
\bar{c}_{23} &= 3 + 14 - 13 = 4 \\
\bar{c}_{32} &= 20 - 1 - 16 = 3
\end{aligned}
$$

Da alle reducerede omkostninger er positive er vi færdige. Den optimale løsning kan ses på den sidste figur eller vi kan udtrykke den i tabel form:

		Varelagre		
		V_1	V_2	V_3
	F_1	4	6	
Fabrikker	F_2		8	
	F_3	1		11

Vi kan udregne omkostningen til $4 \cdot 3 + 6 \cdot 16 + 8 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 11 \cdot 14$=282. Der er ikke oplyst hvilken enhed omkostningerne er målt i.

Opgave 16: 16E er det rigtige svar. $f(i, j)$ var det maksimale udbytte som kan opnås ved i alt at bruge j dage i byerne $1, \ldots, i$. Dvs. når vi sætter $i = 4$ og $j = 7$ finder vi det maksimale udbytte ved at bruge i alt 7 dage i de fire byer.

Opgave 17: Her er alle tabellerne (det var kun den sidste som skulle udregnes, resten var givet i opgaven).

sj	$f(1,j)$	x_1^*
0	0	0
1	3	1
2	4	2
3	5	3
4	-	-
5	-	-
6	-	-
7	-	-

$j \backslash x_2$	0	1	2	3	$f(2,j)$	x_2^*
0	0				0	0
1	3	2			3	0
2	4	5	3		5	1
3	5	6	6	6	6	1
4		7	7	9	9	3
5			8	10	10	3
6				11	11	3
7					-	-

$j \backslash x_3$	0	1	2	3	$f(3,j)$	x_3^*
0	0				0	0
1	3	1			3	0
2	5	4	2		5	0
3	6	6	5	5	6	0
4	9	7	7	8	9	0
5	10	10	8	10	10	0
6	11	11	11	11	11	0
7		12	12	14	14	3

$j \backslash x_4$	0	1	2	3	$f(4,j)$	x_4^*
0	0				0	0
1	3	1			3	0
2	5	4	2		5	0
3	6	6	5	4	6	0
4	9	7	7	7	9	0
5	10	10	8	9	10	0
6	11	11	11	10	11	0
7	14	12	12	13	14	0

17D er det rigtige svar.

Opgave 18 Vi starter fra $f(4, 7)$ og aflæser at Frederik skal være 0 dage i Rom, 3 dage i London, 3 dage i Paris og 1 dag i Berlin. Dvs., **18E** er det korrekte svar.

42101 - løsning til eksamen 21. maj 2014

21. maj 2014

Opgave 1. Svar: **1E**

Begrundelse Som skrevet kommer x_3 i basis. Vi udfører "minimum ratio test" for at finde variablen der skal forlade basis. Vi får x_4 : 10/1=10 og x_5 : 20/4=5. Da værdien for x_5 er lavest er det x_5 som skal forlade basis. Vi ganger derfor den sidste række igennem med 1/4 og opnår

Basis variabel	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Højre side
Z	1						
x_4	0						
x_3	0	1/2	1/4	1	0	1/4	5

Vi skaffer 0'er over et-tallet i kolonnen for x_3 og ender på

Basis variabel	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Højre side
Z	1	-1,5	-1,75	0	0	1,25	25
x_4	0	0,5	0,75	0	1	-0,25	5
x_3	0	0,5	0,25	1	0	0,25	5

■

Et af de optimale tableauer til det lineære programmerings problem ovenfor ser således ud:

	Basis variabel	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Højre side
2C	Z	1	0	0,5	0	3	0,5	40
	x_1	0	1	1,5	0	2	-0,5	10
	x_3	0	0	-0,5	1	-1	0,5	0

Opgave 2. Svar: **2C**

Begrundelse: Hvis vi ændrer objektfunktionen fra

$$\max 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

til

$$\max(4 + \Delta)x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

vil det endelige tableau se således ud:

Basis variabel	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Højre side	
Z	1	0 -1	0,5	0	3	0,5	40	Δ
x_1	0	1	1,5	0	2	-0,5	10	
x_3	0	0	-0,5	1	-1	0,5	0	

For at få et legitimt tableau skal vi skaffe et nul i Z-rækken for x_1. Vi lægger Δ gange række 2 til Z-rækken:

Basis variabel	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Højre side	
Z	1	0	0,5	0	3	0,5	40	
			1,5		2	-0,5	10	Δ
x_1	0	1	1,5	0	2	-0,5	10	
x_3	0	0	-0,5	1	-1	0,5	0	

For at tableauet er optimalt skal der gælde at $0,5 + 1,5\Delta \geq 0$ og $3 + 2\Delta \geq 0$ og $0,5 - 0.5\Delta \geq 0$. Vi isolerer Δ i disse uligheder og finder:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\Delta \geq -\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad \Delta \geq -\frac{1}{3} \\ 2\Delta \geq -3 \quad &\Rightarrow \quad \Delta \geq -\frac{3}{2} \\ -0,5\Delta \geq -0,5 \quad &\Rightarrow \quad \Delta \leq 1 \end{aligned}$$

samlet set har vi:

$$-\frac{1}{3} \leq \Delta \leq 1$$

eller

$$3\frac{2}{3} \leq c_1 \leq 5$$

■

Opgave 3. Svar: **3A**

Begrundelse: Den oprindelige begrænsning er

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 20$$

og vi ændrer den til

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 20 + \Delta$$

Vi kan regne højresiden som den nuværende basis resulterer i ud:

$$b^* = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & -0,5 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 + \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 0,5\Delta \\ 0 + 0,5\Delta \end{bmatrix}$$

Basis er uændret sålænge elementerne i b^* er større end eller lig 0. Der skal altså gælde:

$$\begin{aligned} 10 - 0,5\Delta \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \Delta \leq 20 \\ 0,5\Delta \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \Delta \geq 0 \end{aligned}$$

Dvs.

$$0 \leq \Delta \leq 20$$

eller

$$20 \leq b_2 \leq 40$$

Opgave 4. Svar **4E**

Begrundelse: Modellen i svar 4E er:

$$
\begin{array}{llll}
 & \min \sum_{m \in M} x_m & & (1) \\
\text{subject to} & \sum_{m \in M} a_{pm} x_m & \geq b_p \quad \forall p \in P & (2) \\
 & x_m & \geq 0 \quad \forall m \in M & (3)
\end{array}
$$

Da x_m tæller antallet af plader der udskæres efter mønster m vil objektfunktionen minimerer antallet af plader der bruges. Vi har en begrænsningen (2) for hvert produkt p. Venstresiden tæller op hvor mange produkter af type p vi får udskåret og højresiden angiver behovet. Alt i alt sørger begrænsningen for at behovet for produkter bliver opfyldt. Den sidste begrænsning siger at vi ikke kan udskære et negativt antal plader efter et bestemt mønster. Det ville være en fordel at tilføje at x_m også skal være et heltal, men så bevæger vi os fra lineær programmering til heltalsprogrammering. Modellen i svar 4C ligner, men bemærk at her har vi en begrænsning per mønster, det giver ikke mening. F.eks. vil p'et i b_p på højresiden af begrænsningen være udefineret.

■

Opgave 5. Svar: **5D**

Begrundelse Positive værdier til de kunstige variable $\bar{x}_5$ og $\bar{x}_7$ indikerer at løsningen givet ved x_1, x_2, x_3 ikke opfylder betingelserne givet i det oprindelige LP. Først når både $\bar{x}_5$ og $\bar{x}_7$ antager værdien nul har vi en lovlig løsning til det oprindelige problem. Derfor ønsker vi at minimere $\bar{x}_5 + \bar{x}_7$ i fase 1.

■

Opgave 6. Svar: **6C**

Begrundelse Efter fase 1 har vi følgende tableau.

Basis variabel	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	Højre side
Z	1	0	0	0	0	1	0	1	0
x_4	0	3	0	0	1	-1	0	0	30
x_3	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$
x_2	0	$\frac{1}{6}$	1	0	0	-$\frac{1}{6}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{3}$

vi sletter $\bar{x}_5$ og $\bar{x}_7$ og indsætter den oprindelige objektfunktion

Basis variabel	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	Højre side
Z	1	-2	-4	-7	0	0	0
x_4	0	3	0	0	1	0	30
x_3	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$
x_2	0	$\frac{1}{6}$	1	0	0	-$\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{3}$

Vi skal skaffe nuller i Z-rækken for x_2 og x_3 da de er basis variable. Vi lægger 4 gange sidste række og 7 gange næst-sidste række til Z-rækken og opnår

Basis variabel	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	Højre side
Z	1	1	0	0	0	1	80
x_4	0	3	0	0	1	0	30
x_3	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$
x_2	0	$\frac{1}{6}$	1	0	0	-$\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{3}$

Da alle koefficienter i Z-rækken er positive skal vi ikke udføre nogen iterationer og tableauet er optimalt for fase 2. Objektværdien er derfor 80.

■

Opgave 7: Svar: **7E**

Begrundelse Vi bruger afsnit 6.4 fra bogen. I det duale problem har vi en begrænsning for hver variabel i det primale problem. Variabel x_1 fører til en "$\geq$"-begrænsning, variabel x_2 fører til en "$\leq$"-begrænsning og variabel x_1 fører til en $=$-begrænsning. 7A, 7C og 7E er derfor de eneste muligheder. Ulighederne i det primale fører til at $y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 \leq 0$. Det udelukker 7A og 7C. Tilbage er 7E og vi konstaterer at objektværdi og begrænsninger er ok.

■

Opgave 8: Svar: **8F**

Begrundelse Vi skal finde tallene $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ i det endelige tableau (jeg har sat en streg over symbolerne for at undgå forvirring i det følgende):

Basis variabel	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Højre side
Z	1	$\bar{a}$	?	?	$\bar{b}$	?	?
?	0	?	?	?	$\frac{3}{16}$	-$\frac{1}{16}$	$\bar{c}$
?	0	?	?	?	-$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	?

I en vilkårlig simplex iteration giver den fundamentale at tableauet ser således ud

$$\begin{bmatrix} c_B B^{-1}A - c & | & c_B B^{-1} & | & c_B B^{-1}b \\ B^{-1}A & | & B^{-1} & | & B^{-1}b \end{bmatrix}$$

Vi kan derfor direkte aflæse $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}$. Fra det oprindelige problem har vi $b = \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \end{bmatrix}$ så vi kan udregne $B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ 8\frac{1}{8} \end{bmatrix}$. Dvs. $\bar{c} = \frac{5}{8}$. Fra det oprindelige problem kender vi ligeledes $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ så vi kan udregne $B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix}$ hvilket afslører at basis består af x_1 og x_3 (vi kunne også have fundet ud af det ved at invertere B^{-1} og finde søjlerne fra B i A matricen). Vi finder da $c_B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \end{bmatrix}$. Vi udregner nu $c_B B^{-1}A - c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$hvilket giver os $\bar{a} = 0$ og $c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ giver os $\bar{b} = \frac{5}{4}$. Objektværdien er $c_B B^{-1}b = 37\frac{1}{2}$ (det blev vi dog ikke bedt om at regne ud). Vi opsummerer: $\bar{a} = 0$,$\bar{b} = \frac{5}{4}$ og $\bar{c} = \frac{5}{8}$ så **8F** er det rigtige svar.

■

Opgave 9: Svar: **9B**

Begrundelse Der er tale om et $M/M/s$ køsystem. Vi har $\lambda = 40$, $\mu = 30$ og $s = 2$. Vi finder P_0 ved at benytte formlen nederst på s. 781 i bogen. Dette giver os $P_0 = 0.2$. Med P_0 ved hånden kan vi beregne $L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} = 1.0667$ (vi bruger $\rho = \lambda/s\mu = 2/3$). Det er derfor 9B som er det korrekte svar.

■

Opgave 10: Svar: **10E**

Begrundelse Der står ikke nogen i kø hvis vi er i følgende tilfælde:

- Der er ingen individer i køsystemet.
- Der er præcis en kunde i køsystemet (som så er ved at blive betjent).
- Der er præcis to kunder i køsystemet (som så begge er ved at blive betjent).

Vi kan derfor finde den ønskede sandsynlighed ved at udregne $P_0 + P_1 + P_2$. Vi finder P_1 og P_2 med formlen $P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0$ (som gælder for $n \leq s$). Vi finder $P_0 + P_1 + P_2 = 0.6444$ og vi vælger svar 10E.

■

		Tøfex		
		I	II	III
	A	5	4	-2
Rima	B	2	1	1
	C	-3	-5	1

Opgave 11: Svar: **11B**

Begrundelse Vi ser at strategi II dominerer strategi I for Tøfex. Vi har derfor følgende udbytte tabel

		Tøfex	
		II	III
	A	4	-2
Rima	B	1	1
	C	-5	1

Dernæst ser vi at B dominerer C for Rima og vi kan reducere udbytte tabellen til

		Tøfex	
		II	III
Rima	A	4	-2
	B	1	1

Vi fortsætter på samme måde.Strategi III dominerer II og derefter dominerer strategi B strategi A. Vi ender altså med udbytte tabellen

		Tøfex
		III
Rima	B	1

og konklusionen er at Rima bør følge strategi B.

■

Opgave 12 Svar: **12F**

Begrundelse Da x_4 udtrykker Rima's udbytte skal vi maksimere x_4. Vi kan derfor udelukke svarmulighed D og E. Af de resterende kan vi hurtigt udelukke A og C da begrænsningen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

ikke giver mening. Begrænsningen skulle udtrykke at sandsynligheden vi knytter til de tre strategier skal summere til 1 og så nytter det ikke noget at tage udbyttet med i denne summering. Det rigtige svar skal derfor findes blandt B og F. B er ikke den rigtige da x_4 her er begrænset til at antage værdier større end eller lig med 0. Det går ikke da vi på grund af antagelserne godt kunne have et spil med negativt udfald. Tilbage er så F og vi konstatere at begrænsningerne er korrekt skrevet op her.

■

Opgave 13: Svar: **13D**

Begrundelse Her er tale om den basale EOQ model, Vi har en efterspørgsel på $d = 500$ blokke per måned, en setup cost$K = 250$ og en lageromkostning på $h = 0,01$ kr per blok per måned Vi finder den optimale ordrestørrelse Q :

$$Q = \sqrt{\frac{2dK}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500 \cdot 250}{0,01}} = \sqrt{2500000} = 5000$$

dvs. svarmulighed D er den rigtige.

■

Opgave 14: Svar: **14C**

Begrundelse Problemstillingen kan modeleres med en stokastisk enkelt-periodes model. Efterslæbsomkostningen p er oplyst til at være 250 kr. Indkøbsprisen c er 75 kr og "holding cost" h er 2-10kr = -8 kr. For at finde den optimale ordrestørrelse S^* skal vi løse

$$F(S^*) = \frac{p-c}{p+h} = \frac{250-75}{250-8} = \frac{175}{242}$$

hvor $F()$ er Fordelingsfunktionen for exponentialfordelingen med parameter $\frac{1}{3000}$. Dvs. vi skal løse:

$$1 - e^{-\frac{1}{3000}S^*} = \frac{175}{242} \Rightarrow e^{-\frac{1}{3000}S^*} = 1 - \frac{175}{242} \Rightarrow -\frac{1}{3000}S^* = ln(\frac{67}{242}) \Rightarrow S^* \approx 3852.7$$

så 13C er det korrekte svar.

■

Tildelingsproblemet

Opgave 15: Svar: **15B**

Begrundelse For at kunne løse problemet som et assignment problem må vi først reformulere det som et minimeringsproblem da den ungarnske algoritme er konstrueret til denne type problemer. Vi kan f.eks. konstruere en ny input matrix hvor elementet (i,j) erstattes af $100 - p_{ij}$ hvor p_{ij} er elementet fra den oprindelige matrix. Vores modificerede matrix bliver

33	48	9	8
24	16	6	4
2	11	15	21
32	40	27	22

vi går nu i gang med at bruge den ungarnske algoritme. Først trækker vi det mindste tal i hver række fra alle tal i rækken og opnår:

25	40	1	0
20	12	2	0
0	9	13	19
10	18	5	0

Dernæst trækker vi det mindste tal i hver søjle fra alle tal i søjlen og opnår:

25	31	0	0
20	3	1	0
0	0	12	19
10	9	4	0

Vi kan ikke lave en nul-tildeling så vi overdækker nuller med færrest mulige streger (markeret med fed skrift):

25	31	**0**	**0**
20	3	**1**	**0**
0	**0**	**12**	**19**
10	9	**4**	**0**

Det mindste tal der ikke er skrevet med fed er 3. Vi trækker 3 fra alle ikke markerede tal og lægger det til alle tal der er "streget over" to gange. Vi opnår:

22	28	**0**	0
17	**0**	1	0
0	0	15	22
7	6	4	**0**

I denne matrice er der en nul-tildeling (markeret med fed). Vi finder salgstallene fra den oprindelige matrix for de tilsvarende elementer til: 98, 84, 91 og 78. Det forventede årlige salg af de fire produkter er derfor 98000+84000+91000+78000=351000 og 15B er det rigtige svar.

■

Opgave 16: Svar: **16A**

Begrundelse Det samlede udbud er på 300 kg. Minimum efterspørgslen er på 80+110+90 = 280. Der er altså 20 kg der kan fordeles til enten Hyngby eller Holte filialen. Vi skal derfor splitte både Lyngby og Holte filialerne i to. Vi kalder dem for Ly-A, Ly- B og Ho-A, Ho-B. "A" filialerne skal sikre at minimums efterspørgslen bliver opfyldt og kan derfor ikke forsynes fra "fup lageret". B filialerne kan forsynes både fra fup lageret og fra de oprindelige varelagre. For at sikre minimums efterspørgslen skal Ly-A have en efterspørgsel på 80 og Ho-A skal have en efterspørgsel på 110. Samtidig skal transportomkostningen fra fup-lageret til Ly-A og Ho-A være så stor at det udelukkes at forsyne disse filialer fra fup lageret.Vi bruger symbolet M for at indikere dette. Baseret på dette kan vi udelukke svar B, D og E. Af de tilbageværende kan vi hurtigt udelukke C da denne version tillader at vi opfylder noget af Brønshøjs efterspørgsel ved hjælp af dummy lageret. Endelig kan F udelukkes da denne version ikke tillader at "B" delen af Lyngby filialen serviceres fra de normale varelagre. I praksis betyder dette at efterspørgslen for Lyngby er låst fast til 80 kg. Tilbage står kun mulighed "A" og vi ser at denne version modellerer det oprindelige problem.

■

Opgave 17: Svar: **17D**

Begrundelse Vi starter med $-u_1 = 0$. Vi følger kanterne der forlader A1 og kan opdatere v_1 til $0+c_{A1,B1} = 3$ og v_2 til $0 + 3 = 3$. Fra v_2 kan vi finde $-u_3 = v_3 - c_{A3,B2} = 3 - 8 = -5$. Dernæst bestemmer vi $v_3 = -u_3 + c_{A3,B3} = -5 + 3 = -2$ og til sidst $-u_2 = v_3 - c_{A2,B3} = -2 - 2 = -4$. Alt i alt har vi $u_1 = 0, u_2 = 4, u_3 = 5, v_1 = 3, v_2 = 3, v_3 = -2$ (bemærk fortegn på u variable) og 17D er det rigtige svar.

■

Opgave 18: Svar: **18F**

Begrundelse Vi har $\bar{c}_{11} = c_{A1,B1} - u_1 - v_1 = 3 - 0 + 2 = 5$ og $\bar{c}_{22} = c_{A2,B2} - u_2 - v_2 = 9 - 4 - 3 = 2$. Dvs. 18F er det korrekte svar.

■

Opgave 19: Svar: **19A**

Begrundelse Den korrekte rekursionsformel er:

for $n = 1, 2$:

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n \in \{0,1,\ldots,s_n\}} \{p_n(x_n) \cdot f_{n+1}^*(s_n - x_n)\}$$

når $n = 3$ bruges

$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3 \in \{0,1,\ldots,s_3\}} \{p_3(x_3)\}$$

Vi kan hurtigt udelukke svarmulighed B,D,F da de har $f_{n+1}^*(x_n - s_n)$ i stedet for $f_{n+1}^*(s_n - x_n)$. Udtrykket $f_{n+1}^*(x_n - s_n)$ giver ikke mening idet udtrykket under parentesen skal indikere hvor mange dage der resterer hvis der var s_n dage til rådighed for delprøve n og de resterende delprøver samt at man valgte at bruge x_n dage på delprøve n. Svarmulighed C er også forkert idet den betragter sandsynligheden for at bestå delprøve n som $p_n(s_n)$ - dvs. der tages ikke højde for hvor mange dage man reelt afsætter til delprøven. Svarmulighed E er forkert idet der maksimeres over $x_n \in \{0, 1, \ldots, 4\}$. Det er ikke korrekt da vi ikke nødvendigvis har 4 dage til rådighed, men kun s_n dage.

■

Opgave 20: Svar: **20C**

Begrundelse Her anvender vi dynamisk programmering baseret på rekursionsformlen fra opgave 19. Vi starter fra delprøve 3:

s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	0,75	0
1	0,8	1
2	0,85	2
3	0,88	3
4	0,96	4

Denne tabel aflæses direkte fra tabellen i opgaven. Dernæst går vi til delprøve 2:

	x_2					$f_2^*(s_2)$	x_2^*
s_2	0	1	2	3	4		
0	0,3					0,3	0
1	0,32	0,375				0,375	1
2	0,34	0,4	0,4875			0,4875	2
3	0,352	0,425	0,52	0,525		0,525	3
4	0,384	0,44	0,5525	0,56	0,5625	0,5625	4

Nogle eksempler på hvordan tabellen udregnes er: Elementet for $s_2 = 2$ og $x_2 = 1$ udregnes f.eks. som $p_2(1) \cdot f_3^*(2-1) = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4$. Værdien for $f_2^*(2)$ findes f.eks. som det største i den pågældende række og tallet i x_2^* kolonnen angiver hvordan x_2 skal sættes for at opnå denne værdi. Efter at tabellen er udfyldt kan vi gå til delprøve 1. Tabellen udfyldes igen på samme måde.

	x_1					$f_1^*(s_1)$	x_1^*
s_1	0	1	2	3	4		
0	0,105					0,105	0
1	0,13125	0,135				0,135	1
2	0,170625	0,16875	0,165			0,170625	0
3	0,18375	0,219375	0,20625	0,195		0,219375	1
4	0,196875	0,23625	0,268125	0,24375	0,225	0,268125	2

Vi aflæser at den maksimale sandsynlighed for at bestå kurset er 0,268. Denne sandsynlighed opnås ved at bruge 2 dage på at forberede delprøve 1, 2 dage på at forberede delprøve 2 og 0 dage på at forberede delprøve 3. Dette ses ved at gå baglæns gennem tabellerne. For at opnå den bedste sandsynlighed i tabellen for delprøve 1 skal vi sætte $x_1 = 2$ det giver $s_2 = 4 - 2 = 2$ og det optimale valg i dette tilfælde er $x_2 = 2$

(aflæses i tabellen for delprøve 2). Derefter er der ingen dage tilbage til delprøve 3, men her havde Peter allerede en pæn chance for at bestå prøven, selv uden forberedelse.

42101: Løsninger til Eksamen F2015.

21. maj 2015

Opgave 1. Svar: **1E**

Begrundelse: man enten indsætte hvert punkt i objektfunktionen og udregne objektværdi eller man kan parallelforskyde en linie med hældning -1 indtil den forlader det lovlige område. Det sidste punkt fra den lovlige mængde som linien rammer er den optimale løsning.

Opgave 2. Svar: **2D**

Begrundelse Som skrevet kommer x_1 i basis. Vi udfører "minimum ratio test" for at finde variablen der skal forlade basis. Vi får x_4 : 0/1=0 og x_6 : 10/2=5. Da værdien for x_4 er lavest er det x_4 som skal forlade basis. Vi skal ikke lave minimum ratio test for den anden begrænsning da koefficienten i denne begrænsning under x_1 er negativ.

Opgave 3. Svar: **3E**

Begrundelse

Basis variabel	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Højre side
Z	1	0	0	0	3	2	2	30
x_4	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_5	0	0	0	1	1	1	0	5
x_6	0	0	1	0	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

Vi aflæser $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ fra tableauet ovenfor. Højreside ændringen er: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix}$.

Ændring på højre siden i sidste tableau er: $B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\Delta \\ 0 \\ \frac{1}{3}\Delta \end{bmatrix}$

Derfor bliver den nye højreside $\begin{bmatrix} \frac{5}{3}+\frac{1}{3}\Delta \\ 5 \\ \frac{5}{3}+\frac{1}{3}\Delta \end{bmatrix}$. Alle elementer skal være større end 0 så der må gælde at

$$\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\Delta \geq -\frac{5}{3} \Rightarrow \Delta \geq -5$$

Altså er det rigtige interval for $\Delta = [-5;\infty]$ og b_3 skal ligge i intervallet $[5;\infty]$

Opgave 4. Svar: **4C**

Begrundelse Vi bemærker at den nye værdi for b_3 ligger indenfor intervallet hvor den nuværende basis er lovlig. Vi kan dermed besvare spørgmålet ved at aflæse den pågældende duale variabel. Den duale variabel for begrænsning 3 er 2 så objektfunktionen vil øges med 2 til 32.

Opgave 5. Svar: **5A**

Begrundelse Objektfunktionen og begrænsningerne i 5A gør følgende: objektfunktionen maksimerer hvor meget vand der flyder in i knude E. Første begrænsning sikrer at det vand som flyder ind i B bliver sendt videre til knude C og E. Tilsvarende sikrer begrænsning 2 og 3 at det vand der bliver sendt ind i henholdsvis knude C og D bliver sendt videre. Øvre grænser på x variable sikrer at der ikke bliver sendt mere vand igennem vandledning end den har kapacitet. Nedre grænser på x-variable sikrer at modellen ikke »snyder« og sender vand modsat pilens retning.

De øvrige svar er forkerte af forskellige årsager. I model 5B ganger man f.eks. vandledningernes kapacitet på mængden af vand der flyder i begrænsningerne der skulle sørge at det vand der flyder ind i en af knuderne B,C, D også flyder ud igen. Det betyder at denne egenskab ikke er sikret i denne model.

Opgave 6 og 7. Svar: **6B** og **7A**

Begrundelse Vi løser først for $\theta = 0$:

b.v	Z	x1	x2	x3	x4	x5	RHS
z	1	-1	-2	-3	0	0	0
x4	0	2	3	4	1	0	10
x5	0	1	0	1	0	1	3
z	1	0.5	0.25	0	0.75	0	7.5
x3	0	0.5	0.75	1	0.25	0	2.5
x5	0	0.5	-0.75	0	-0.25	1	0.5

Vi indsætter theta række

b.v	Z	x1	x2	x3	x4	x5	RHS
z	1	0.5	0.25	0	0.75	0	7.5
theta		-1	0	0	0	0	0
x3	0	0.5	0.75	1	0.25	0	2.5
x5	0	0.5	-0.75	0	-0.25	1	0.5

Tableauet ovenfor er optimalt sålænge $\frac{1}{2} - \theta \geq 0$. Dvs. så længe $\theta \leq \frac{1}{2}$. Når θ kommer over $\frac{1}{2}$ så går x_1 i basis. Vi laver pivot operationen markeret i tableauet ovenfor og får følgende tableau.

b.v	Z	x1	x2	x3	x4	x5	RHS
z	1	0	1	0	1	-1	7
theta		0	-1.5	0	-0.5	2	1
x3	0	0	1.5	1	0.5	-1	2
x1	0	1	-1.5	0	-0.5	2	1

Vi kan se at θ optræder under x_2, x_4 og x_5. Der er derfor 3 uligheder der skal være opfyldt for at tableauet er optimalt:

$$\text{(fra } x_2 \text{ :)} \quad 1 - \frac{3}{2}\theta \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\theta \leq 1 \Rightarrow \theta \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{(fra } x_4 \text{ :)} \quad 1 - \frac{1}{2}\theta \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\theta \leq 1 \Rightarrow \theta \leq 2$$

$$\text{(fra } x_5 \text{ :)} \quad -1 + 2\theta \geq 0 \Rightarrow 2\theta \geq -1 \Rightarrow \theta \geq \frac{1}{2}$$

fra disse tre uligheder konkluderer vi at tableauet er optimalt når θ ligger i intervallet $\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{2}{3}$. Vi skulle kun betragte intervallet $[0; \frac{2}{3}]$ så vi er færdige nu. Vi kan opsumere resultaterne i følgende tabel:

θ interval	optimal løsning	Objektværdi
$0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$	$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, \frac{5}{2})$	7,5
$\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{2}{3}$	$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 2)$	$7 + \theta$

Opgave 8 Svar: **8F**

Begrundelse Svaret findes ved at bruge SOB metode.

Opgave 9 Svar: **9A**

Vi bruger slide 28 fra lektion 3. x_1 og x_5 er i basis. Dvs. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Vi udregner $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dernæst udregner vi:

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}, B^{-1}b = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

og

$$c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, c_B B^{-1}A - c = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}, c_B B^{-1}b = 20.$$

Vi indsætter i tableauet og opnår følgende:

Basis variabel	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Højre side
Z	1	0	2	-4	2	0	20
x_1	0	1	4	0	1	0	10
x_5	0	0	-2	6	-1	1	10

En genvej til løsningen er at opskrive starttableauet og pivotere x_1 ind i basis.

Opgave 10 Svar: **10C**

Begrundelse Generelt gælder der ikke $y^*b \leq c\bar{x}$. Denne relation gælder kun hvis $\bar{x}$ er optimal. I det »normale« tilfælde hvor$\bar{x}$ ikke er optimal vil der gælde $y^*b > c\bar{x}$. De øvrige relationer er altid opfyldt pga. svag og stærk dualitetssætning.

Opgave 11 Svar: **11F**

Begrundelse Svar A,B og C er klart forkerte. I disse svar kan man f.eks. dække behovet i måned 1 ved hjælp af en produktion i måned 2... og endda helt gratis. Det er nødvendigt at have M under diagonalen som i svar D,E og F for at undgå dette. Svar D og E er forkerte fordi de ikke tager højde for lageromkostningerne (D »forsøger«, men lageromkostningen skal ikke placeres på »dummy« elementet). F er rigtig, her bliver lager omkostningen tilføjet til omkostningen ved at »betjene en måneds efterspørgsel ved hjælp af produktionen fra en tidligere måned. Se i øvrigt eksemplet om fly-produktion fra kapitlet om transportproblemet i bogen.

Opgave 12 svar 12B

5	4	2	4
2	5	3	7
9	2	6	1
4	6	4	7

Trækker mindste tal fra hver række fra:

3	2	0	2
0	3	1	5
8	1	5	0
0	2	0	3

Trækker mindste tal fra hver søjle fra. Overdækker nuller med linier som vist

3	1	0	2	
0	2	1	5	
8	0	5	0	←
0	1	0	3	
↑		↑		

Trækker 1 fra ikke-overdækkede tal. Lægger et til dobbelt-overdækkede tal.

3	0	**0**	1
0	1	1	4
9	0	6	**0**
0	**0**	0	2

Løsning er markeret med fed ovenfor. Det ses at der er flere optimale løsninger. Omkostning aflæses fra den oprindelige tabel som: 2+2+1+6=11,

Opgave 13 Svar: **13C**

Begrundelse

- **A, D og E** er forkert da x_n lægges til s_n. Det betyder at »jo mere penge man bruger, desto flere har man«
- **B** er forkert da »gevinsten for det nuværende trin udregnes som $m_n(s_n)$ (det skal være $m_n(x_n)$) Effekten er at formlen vil kunne vælge en investering på 0 kroner og stadig få et udbytte som svarer til at s_n hunderede tusinde kroner var investeret.
- **F** er forkert da rekursionen benytter f_{n+1} da stop kriteriet er defineret for $n = 1$ vil rekursionen fortsætte i det uendelige.

Opgave 14 Svar: **14D**

- Trin 1: TV. Denne tabel er let at udfylde:

	$f^*(s_1)$	x_1^*
0	0	0
1	2	1
2	3	2
3	3.5	3
4	3.5	4

- Trin 2: Radio. Et element s_2, x_2 hvor $s_2 \geq x_2$ udfyldes vha. af formlen $m_2(x_2) + f_1^*(s_2 - x_2)$ hvor vi bruger tabellen ovenfor til at finde $f_1^*(\cdot)$.

$s_2 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	$f^*(s_2)$	x_2^*
0	0					0	0
1	2	1.5				2	0
2	3	3.5	2			3.5	1
3	3.5	4.5	4	2.5		4.5	1
4	3.5	5	5	4.5	2.5	5	1,2

- Trin 3: internet. Udfyldes ved hjælp af tabellen ovenfor. Jeg har kun udfyldt nederste linie da jeg kan se at der altid vil være en optimal løsning som bruger hele budgettet (for hver markedsføringsmulighed er mersalget altid stigende eller konstant når mere investeres)

$s_2 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	$f^*(s_2)$	x_2^*
0							
1							
2							
3							
4	5	6.3	7	6.8	4.8	7	2

- Vi aflæser at løsningen er et mersalg på 7%. Vi blev ikke bedt om det, men vi kan se at 200.000 kr skal investeres i internet reklamer 100.000 kr skal investeres i radio reklamer og 100,000 skal investers i TV reklamer.

Spilteori

Opgave 15 Svar: **E**

Begrundelse Vi kommer ingen vegne med dominans, men minimax-kriteriet finder en stabil løsning

		Spiller 2			
		S_1	S_2	S_3	min
	R_1	5	-3	-2	-3
Spiller 1	R_2	-3	4	-2	-3
	R_3	4	3	-1	-1 ←
	max	5	4	-1	
				↑	

spiller 1 skal spille strategi R_3 og spiller 2 bør spille strategi S_3. Værdien af spiller er -1.

Opgave 16 Svar: **16F**

Begrundelse I en eksamenssituation vil det være hurtigst at løse opgaven ved hjælp af den grafiske metode da der kun er to strategier. Her løser vi opgaven ved hjælp af et LP. Oprindelige udbytte tabel:

		Spiller 2		
		S_1	S_2	S_3
	R_1	5	-3	0
Spiller 1	R_2	-3	4	-2

Vi lægger 3 til alle elementer

		Spiller 2		
		S_1	S_2	S_3
	R_1	8	0	3
Spiller 1	R_2	0	7	1

og opskriver LPet

$$\max v$$

subject to

$$
\begin{aligned}
8x_1 &\geq v \\
7x_2 &\geq v \\
3x_1 + x_2 &\geq v \\
x_1 + x_2 &= 1 \\
x_1, x_2, v &\geq 0
\end{aligned}
$$

vi reformulerer til

$$\max v$$

subject to

$$
\begin{aligned}
-8x_1 + v &\leq 0 \\
-7x_2 + v &\leq 0 \\
-3x_1 - x_2 + v &\leq 0 \\
x_1 + x_2 &= 1 \\
x_1, x_2, v &\geq 0
\end{aligned}
$$

Vi opskriver på tableau form:

række	b.v.	z	x1	x2	v	x3	x4	x5	RHS
0	Z	1	0	0	-1	0	0	0	0
1	x3	0	-8	0	1	1	0	0	0
2	x4	0	0	-7	1	0	1	0	0
3	x5	0	-3	-1	1	0	0	1	0
4	?	0	1	1	0	0	0	0	1

Vi skal skaffe en basis variabel for røkke 4. Vi kan bruge x_1. Vi får følgende tableau og laver pivot operationer til vi finder den optimale løsning:

række	b.v.	z	x1	x2	v	x3	x4	x5	RHS
0	Z	1	0	0	-1	0	0	0	0
1	x3	0	0	8	1	1	0	0	8
2	x4	0	0	-7	1	0	1	0	0
3	x5	0	0	2	1	0	0	1	3
4	x1	0	1	1	0	0	0	0	1
0	Z	1	0	-7	0	0	1	0	0
1	x3	0	0	15	0	1	-1	0	8
2	v	0	0	-7	1	0	1	0	0
3	x5	0	0	9	0	0	-1	1	3
4	x1	0	1	1	0	0	0	0	1
0	Z	1	0	0	0	0	0.222	0.778	2.333
1	x3	0	0	0	0	1	0.667	-1.67	3
2	v	0	0	0	1	0	0.222	0.778	2.333
3	x2	0	0	1	0	0	-0.11	0.111	0.333
4	x1	0	1	0	0	0	0.111	-0.11	0.667

Vi får $x_1 = \frac{2}{3}$,$x_2 = \frac{1}{3}$ og v=$2\frac{1}{3}$. Vi skal huske at trække 3 fra v for at få spillets værdi som så bliver $-\frac{2}{3}$.

Køteori

Opgave 17 Svar: **17C**

Begrundelse Der er tale om et M/M/s køsystem og t_w svarer til at bestemme W_q. vi har $s = 2$, betjeningsrate $\mu = 1/(40/60) = 1.5$ per time og ankomstrate $\lambda = 1$ per time.

$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{1}{3}, \lambda/\mu = 1/3/2 = 2/3$

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_0} &= \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} = \sum_{n=0}^{1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2(1-\rho)} \\ &= \frac{(\lambda/\mu)^0}{1} + \frac{(\lambda/\mu)^1}{1} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2(1-\rho)} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2(1-\frac{1}{3})} = \frac{5}{3} + \frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{3} + \frac{3}{9} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vi får

$$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s\rho}{s!(1-\rho)^2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}}{2(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{4}{9}\frac{1}{3}}{2\frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12}$$

and

$$W_q = L_q/\lambda = \frac{1}{12}/1 = \frac{1}{12} \text{ time}$$

Dvs. $W_q = \frac{1}{12}$ time eller 5 minutter.

Opgave 18 Svar: **18A**

Begrundelse Sandsynligheden for at der er en eller flere patienter der venter på at en ambulance bliver ledig kan udregnes som $1-(P_0+P_1+P_2)$ (når vi er i en tilstand med 3 eller flere individer i systemet vil der være mindst en patient som venter på en ambulance). Vi har $P_1 = C_1 P_0 = \frac{(\lambda/\mu)}{1} P_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{6}$. $P_2 = C_2 P_0 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!2^0} P_0 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} P_0 = \frac{\frac{4}{9}}{2} P_0 = \frac{2}{9}\frac{1}{2} = \frac{1}{9}$. Dvs. $1-(P_0+P_1+P_2) = 1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}) = 1-(\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}) = 1-\frac{17}{18} = \frac{1}{18}$

Lagermodeller

Opgave 19 Svar: **19F**

Begrundelse Vi har $d = 5000$ liter pr dag. Opstartsomkostning $K = 500$kr. Enhedsomkostning $c_1 = 9$kr hvis ordremængden $Q < 40000$ eller $c_2 = 8.5$ hvis ordremængden $Q \geq 40000$. Vi har en lageromkostning på $h = 0.01kr$ per liter per dag. $Q^* = \sqrt{2dK/h} = \sqrt{2 \cdot 5000 \cdot 500/0.01} = \sqrt{2 \cdot 5000 \cdot 500/0.01} \approx 22360.68L$ Ligger inden for første interval. Hvis denne ordremængde vælges vil prisen per dag være $dK/Q^* + dc_1 + hQ/2 \approx 45223.61$kr. Hvis vi vælger pris nr 2 skal vi bestille 40000 enheder hjem. Det vil give en daglig pris på $dK/40000 + d \cdot 8.5 + hQ/2 \approx 42762.5kr$. Det er klart billigst med den større ordremængde så den vælges.

Opgave 20 Svar: **20B**

Begrundelse Vi bruger formel fra lektion 12, slide 17. Vi har $h = -(10-4)$=-6. $S^* = a + \frac{p-c}{p+h}(b-a) = 10000 + \frac{75-12}{75+-6}5000 = 10000+\frac{63}{69}5000\approx 14565$.

Man kunne også have brugt formlen $F(S^*) = \frac{p-c}{p+h}$ (hvor $F(S^*)$ er fordelingsfunktionen) og isolere S^* i det udtrykket. Det er sådan formlen ovenfor er udledt.

Svar

Opgave 1 Rigtigt svar 1C)

Nedenfor er problemet løst fra start til slut. Tableauet i opgaven er det »midterste«.

b.v.	EQ	Z	x1	x2	x3	x4	RHS
Z	0	1	-3	-4	0	0	
x3	1	0	3	5	1	0	15
x4	2	0	2	4	0	1	20
Z	0	1	- 3/5	0	4/5	0	12
x2	1	0	3/5	1	1/5	0	3
x4	2	0	- 2/5	0	- 4/5	1	8
Z	0	1	0	1	1	0	15
x1	1	0	1	1 2/3	1/3	0	5
x4	2	0	0	2/3	- 2/3	1	10

Opgave 2 Rigtigt svar 2E)

(findes ved hjælp af SOB metoden).

Opgave 3 Rigtigt svar 3B)

Opgaven kan løses ved hjælp af to-fase metoden, men da vi kender en lovlig løsning kan vi springe fase 1 over. Vi kan skrive problemet på "=" form med $\bar{x}_3$ som kunstig variabel for første begrænsning og x_4 som slack variabel for anden begrænsning. Vi har også lavet minimering om til maximering

$$\max -3x_1 - 4x_2$$

hvor

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + \bar{x}_3 &= 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 &= 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Da vi har fået oplyst at $x_1 = 5$ og $x_2 = 0$ udregner vi $x_4 = 10$ (ved hjælp af den anden lighed) og finder at x_1 og x_4 er basis variable. Vi har dermed $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ og kan udregne $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$. Ved hjælp af den fundamentale indsigt kan vi skrive tableauet svarende til denne løsning op:

b.v.	eq	Z	$x_1 x_2$	$\bar{x}_3$ x_4	RHS
Z	0	-1	$yA - c$	$y = c_B B^{-1}$	yb
x_1	1	0	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
x_4	2	0			

Vi har $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $c_B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} -3 & -4 \end{bmatrix}$,$b = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix}$

Vi regner $y = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$, $yb = -15$, $B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$,$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$,$yA - c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$

og indsætter i tableauet:

b.v.	eq	-Z	x_1	x_2	$\bar{x}_3$	x_4	RHS
Z	0	-1	0	-1	-1	0	-15
x_1	1	0	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	5
x_4	2	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	1	10

$\bar{x}_3$ er kunstig variabel og =0 så denne variabel fjerner vi fra tableauet og så anvender vi normal simplex :

b.v.	eq	Z	x1	x2	x3	RHS
Z	0	-1	0	-1	0	-15
x_1	1	0	1	$\frac{5}{3}$	0	5
x_4	2	0	0	$\frac{2}{3}$	1	10

Vi kan se at x_2 skal ind i basis og minimum ratio test giver at x1 går ud:

b.v.	eq	Z	x1	x2	x3	RHS
Z	0	-1	$\frac{3}{5}$	0	0	-12
x_2	1	0	$\frac{3}{5}$	1	0	3
x_4	2	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	8

Tableauet er optimalt og vi aflæser, $Z = 12$.

Opgave 4 Rigtigt svar 4A.

Vi tager udgangspunkt i tableauet fra opgaveteksten og tilføjer en Δ række til objektfunktion:

b.v.	eq	Z	x1	x2	x3	x4	x5	RHS	
Z	0	1	3	0	0	1	0,5	19	
			0	-1	0	0	0	0	Δ
x2	1	0	0	1	0	1	-0,5	1	
x3	2	0	2	0	1	-1	1	8	

Vi gør tableauet legitimt ved at lægge Δ gange række 1 til række 0

b.v.	eq	Z	x1	x2	x3	x4	x5	RHS	
Z	0	1	3	0	0	1	0,5	19	
			0	0	0	1	-0,5	1	Δ
x2	1	0	0	1	0	1	-0,5	1	
x3	2	0	2	0	1	-1	1	8	

Tableauet vil være optimalt så længe alle koefficienter i række 0 er større end eller lig med 0. Der skal derfor gælde

$$1 + \Delta \geq 0 \text{ og } 0.5 - 0.5\Delta \geq 0$$

Af disse to uligheder udleder vi

$$-1 \leq \Delta \leq 1$$

Opgave 5 Rigtigt svar 5C

Vi aflæser:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \\ -\Delta \end{bmatrix}$$

dvs. ny højreside bliver $\begin{bmatrix} 1+\Delta \\ 8-\Delta \end{bmatrix}$. der skal gælde

$$\begin{aligned} 1+\Delta &\geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -1 \\ 8-\Delta &\geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 8 \end{aligned}$$

dvs. samlet set:

$-1 \leq \Delta \leq 8$

Opgave 6 Rigtigt svar D (brug fundamental indsigt)

Vi har $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}$ og $y = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \end{bmatrix}$ (vi bruger betegnelsen y selvom tableauet ikke er optimalt, bogen skelner her). Vi kan udfylde resten af tableauet med den fundamentale indsigt:

b.v.	Z	x1 x2 x3	x4	x5	RHS
Z	1	$yA-c$	0	0,25	yb
?	0	$B^{-1}A$	1	-0,5	$B^{-1}b$
?	0		0	0,25	

$$yb = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \end{bmatrix} = 4,5$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4,5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$yA-c = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2,5 & -1,5 \end{bmatrix}$$

b.v.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	RHS
Z	1	0	-2,5	-1,5	0	0,25	4,5
x_4	0	0	1	0	1	-0,5	1
x_1	0	1	0,5	0,5	0	0,25	4,5

Opgave 7 Rigtigt svar F

x_1 skal øges. Minimum ratio test giver at x_1 kan øges til 2, men så er den øvre grænse på x_1 overtrådt. x_1 øges derfor kun til 1 og vi substituerer y_1 ind i stedet for x_1. Vi har $y_1 = 1 - x_1$. Algebraisk er række nul:

$$Z - 2x_1 - x_2 = 0$$

ved substitution får vi

$$\begin{aligned} Z - 2(1-y_1) - x_2 &= 0 \\ \Rightarrow Z - 2 + 2y_1 - x_2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad 2y_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Række 1 udtrykt algebraisk:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

ved substitution får vi

$$\begin{aligned} 1 - y_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ \Rightarrow -y_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Det nye tableau er derfor

b.v.	Z	y_1	x_2	x_3	RHS
Z	1	2	-1	0	2
x_3	0	-1	1	1	1

Bemærk at $x_3$stadig er basis variabel.

Opgave 8 Rigtigt svar 8F

Vi starter med tableauet

b.v.	eq	Z	x1	x2	x3	x4	RHS
Z	0	-1	2	1	0	0	0
x3	1	0	1	2	1	0	10
x4	2	0	-3	-4	0	1	-2

Da vi har en negativ højreside i række 2 skal x_4 gå ud af basis og vi skal finde variablen der går ind i basis i stedet. x_1 og x_2 er begge kandidater da de har negative koefficienter i række 2. Vi udfører divisionen $2/3$ for $x_1$og $1/4$ for x_2. Vi ser at værdien er mindst for x_2 så det er x_2 der skal gå ind i basis. Vi laver en normal pivot operation omkring elementet -4 og får:

b.v.	Z	x1	x2	x3	x4	RHS
Z	-1	1,25	0	0	0,25	-0,5
x3	0	-0,5	0	1	0,5	9
x2	0	0,75	1	0	-0,25	0,5

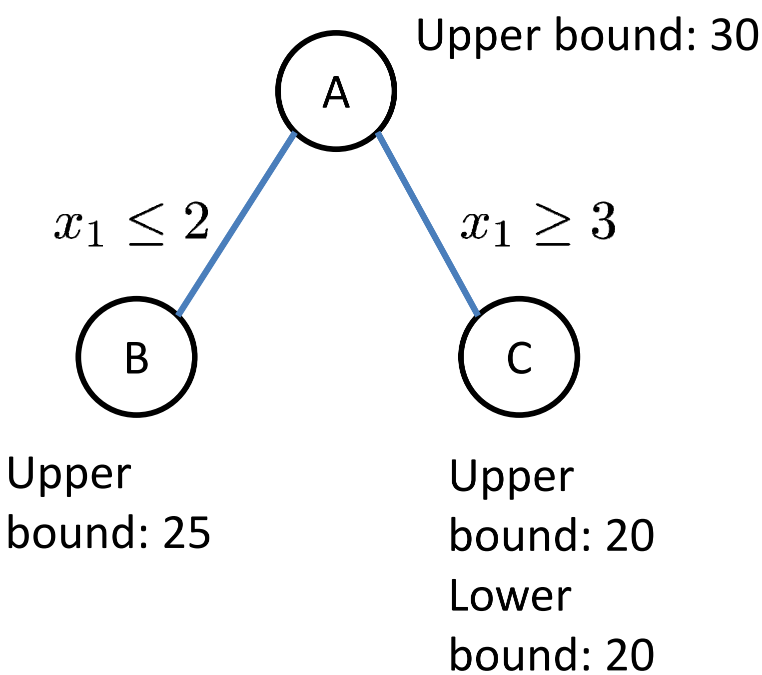
Opgave 9 Rigtigt svar 9A

I svar 9a vil y blive tvunget til at tage værdien 1 når $x_2 \geq 101$. Når y er sat til 1 trækkes der 500 fra objektværdien (vi betaler for den nye maskine).

I svar 9B, 9D og 9E virker begrænsningen der skulle sætte y til 1 ikke som tilsigtet. F.eks. i 9B vil den anden begrænsning tvinge x_2 til at være mindre end eller lig med 100 og det vil aldrig være fordelagtigt at sætte y til 1. I 9C og 9F øges profitten med 500 når y sættes til 1, det er ikke så smart da det var meningen at der skulle være en udgift forbundet med indkøbet af maskinen

Opgave 10 Rigtigt svar F

De tre delproblemer A,B og C svarer til branch and bound træet



den optimale løsning må enten ligge indenfor løsnings rummet defineret i problem B eller defineret i problem C (idet der ikke er nogle heltalsløsninger med $2 < x_1 < 3$). Fra de LP relaxerede løsninger i B og C kan vi konkluderer at der ike kan være en løsning med objektværdi større end 25 (fra delproblem B). Samtidig har vi i delproblem C fundet en heltalsløsning med objektværdi 20. Den optimale løsning har derfor objektværdi 20 eller større. Alt i alt kan vi konkludere

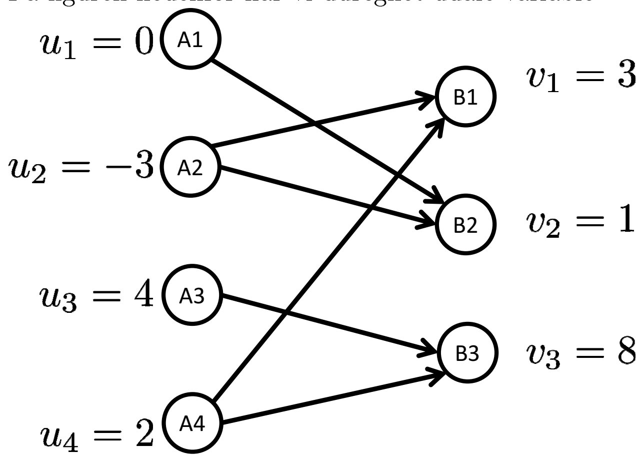
$$20 \leq Z^{IP} \leq 25$$

Opgave 11 Rigtigt svar B

I denne opgave er det ikke nødvendigt at indføre en fupfabrik. Da B1 og B2 skal have opfyldt deres behov må det være b3 der ikke for opfyldt sit behov og vi kan derfor reducere B3's efterspørgsel til 5 og problem et balanceret. Svar 11B og 11E er dermed kandidater for den rigtige løsning. 11E er ikke god da den gør det gratis at tildele frabrik A1 til lager B1 og det var jo netop det vi ønskede at undgår. Af samme årsag er 11D og 11F forkert. 11A er forkert da B3s efterspørgsel skal dækkes i denne model 11C er forkert da vi her øger to af fabrikkernes output.

Opgave 12 Rigtigt svar E

På figuren nedenfor har vi udregnet duale variable



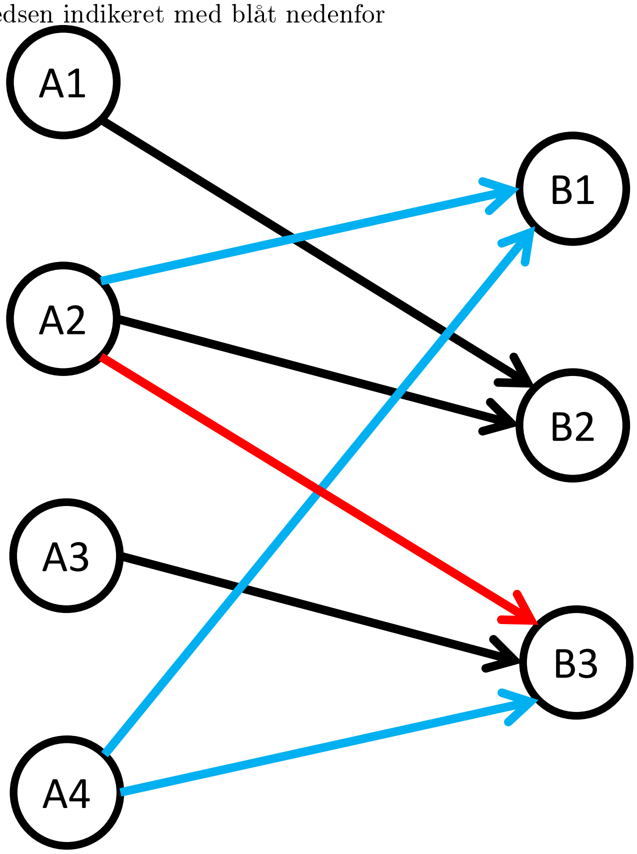
Baseret på de duale variable kan vi udregne reducerede omkostninger for de manglende kanter vha. formlen

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$$

vi får

$\bar{c}_{11} = 9 + 0 - 3 = 6$
$\bar{c}_{13} = 9 + 0 - 8 = 1$
$\bar{c}_{23} = 6 + (-3) - 8 = -5$
$\bar{c}_{31} = 7 + 4 - 3 = 8$
$\bar{c}_{32} = 2 + 4 - 1 = 5$
$\bar{c}_{42} = 7 + 2 - 1 = 8$

Det er således kun kanten fra A2 til B3 der kan forbedre løsningen. Hvis kanten tilføjes (rød) dannes kredsen indikeret med blåt nedenfor



A4->B3 og A2->B1 er bagudrettede kanter i kredsen. På begge kanter strømmer der 5 enheder så vi vil sende 5 enheder over den nye kant og en af de to bagudrettede kanter vil forlade basis. 12E er altså det rigtige svar.

Opgave 13 Rigtigt svar C

starttabel:

2	5	3	7	
4	2	5	6	
5	5	4	9	
2	6	1	7	

Vi trækker mindste tal i hver række fra rækken:

0	3	1	5	
2	0	3	4	
1	1	0	5	
1	5	0	6	

Vi trækker 4 fra den sidste søjle

0	3	1	1	←
2	0	3	0	←
1	1	0	1	
1	5	0	2	
		↑		

Vi overdækker rækkerne og søjlerne markeret med pile. Det mindste ikke-overdækkede element er 1. Vi trækker en fra alle ikke-overdækkede elementer og lægger en til alle dobbelt overdækkede elementer:

0	3	2	1
2	**0**	4	0
0	0	0	**0**
0	4	**0**	1

vi har dermed en nul-assignment som vist ovenfor. Vi går tilbage til den oprindelige tabel for at aflæse objektværdien:

2+2+9+1=14

Opgave 14 Rigtigt svar D

Fra forelæsningen har vi set at det duale problem til assignment problemet er

$$\max \sum_{i \in M} u_i + \sum_{j \in N} v_j$$

hvor

$$\begin{aligned} u_i + v_j \leq c_{ij} & \quad \forall i \in M, j \in N \\ u_i \in \mathbb{R} & \quad \forall i \in M, \\ u_j \in \mathbb{R} & \quad \forall j \in N \end{aligned}$$

Vi har også set at vi kan bruge værdierne trukket fra rækkerne som gæt på u_i og værdierne trukket fra søjlerne som gæt på v_j Når vi har nået en nul-assignment vil disse gæt være både lovlige og optimale for det duale problem. Da objektfunktionenen summerer de duale variable kan vi udlede at den optimale objektværdi for det duale problem er

$$6 + 3 + 2 + 1 - 1 - 1 + 2 = 11$$

Fra stærk dualitet ved vi at den optimale løsning til det primale problem også er 11. Den korrekte løsning er således 14D.

Opgave 15 Rigtigt svar E

Vi kan udelukke svar A,D og F da de adderer renten og vi skal oplagt multiplicere som det fremgår af eksemplet. 15B er forkert da den tillade os at udlåne pengene til samme person to år i træk. 15C er forkert da her vi aflæser renten for det forkerte år. Tilbage står 15E som det korrekte svar.

Opgave 16 Rigtigt svar D

Vi starter bagfra, første tabel er triviel.

s_4	$f_4 * (s_4)$
1	52500
2	51500
3	51000

Dernæst konstruerer vi tabellen for trin 3 baseret på tabellen for trin 4. F.eks. finder vi elementet for $s_3 = 1, x_3 = 2$ som $51500 \cdot 1,03 = 52045$

$s_3 \setminus x_3$	1	2	3	$f_3^*(s3)$	x_3^*
1		53045	52530	53045	2
2	53550		52020	53550	1
3	54600	53560		54600	1

De følgende tabeller bliver:

$s_2 \setminus x_2$	1	2	3	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
1		54621	55692	55692	3
2	56227.7		57876	57876	3
3	55697.25	56227.5		56227.5	2

og

$s_1 \setminus x_1$	1	2	3	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
1		60191.04	58476.6	60191.04	2
2	59033.52		59601.15	59601.15	3
3	57362.76	59612.28		59612.28	2

Vi aflæser at 60191,04 kr er den optimale løsning og for at opnå dette beløb skal man først låne ud til Anton, dernæst til Bente, dernæst til Carl og til sidst til Anton igen.

Opgave 17 Rigtigt svar C

Svaret kan findes ved dominans. Vi dominerer strategier væk i følgende rækkefølge

$$R_1, S_1, R_3, S_2$$

og tilsidst er der kun muligheden R_2, S_3 tilbage.

Opgave 18 Rigtigt svar D

Vi ser at strategi S_3 kan domineres bort. Da der kun er to strategier tilbage for spiller 2 kan vi deducere den optimale sandsynlighed (y_1) for strategi 1 baseret på tippet i opgaveteksten. Vi må have at $y_1 = 1 - y_2 = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$. Søjlespillerens LP er.

$$\min \bar{v}$$

subject to

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j &\leq \bar{v} \quad \forall i = 1, \ldots, m \\ \sum_{j=1}^{n} y_j &= 1 \\ y_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \\ \bar{v} &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vi har tre begrænsninger af den første type. Vi skriver dem op:

$$\begin{aligned}-3y_1+2y_2 &\leq \bar{v}\\ -1y_1+1y_2 &\leq \bar{v}\\ 3y_1-2y_2 &\leq \bar{v}\end{aligned}$$

når vi indsætter værdierne for $y_1$og y_2 får vi

$$\begin{aligned}-\frac{1}{7} &\leq \bar{v}\\ \frac{1}{7} &\leq \bar{v}\\ \frac{1}{7} &\leq \bar{v}\end{aligned}$$

og dermed må vi have at $\bar{v}=\frac{1}{7}$.

Opgave 19 Rigtigt svar F

Her er tale om et M/M/1 system med endelig kundepopulation. Vi finder:
$N=2$. Ankomstrate per satellit: $\lambda=1$per dag
$\lambda_0=2,\lambda_1=1,\lambda_2=0$.
Afgangsrate: $\mu_1=\mu_2=12$

$$\begin{aligned}1/P_0 &= \sum_{n=0}^{2}\left(\frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)\\ &= \frac{2}{2}1+\frac{2}{1}\frac{1}{12}+\frac{2}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^2=1+\frac{1}{6}+\frac{2}{144}=\frac{144+24+2}{144}=\frac{170}{144}\end{aligned}$$

$$P_0=\frac{144}{170}=0.847$$

$$P_1=C_1P_0=\frac{N!}{(N-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1P_0=\frac{2}{1}\frac{1}{12}P_0=\frac{1}{6}P_0=\frac{144}{1020}=0.141$$

$$P_2=1-P_1-P_0=\frac{1020-7\cdot 144}{1020}=1-\frac{1008}{1020}=0.01176$$

P_2 udtrykker hvor ofte begge satellitter er ude af drift. Det betyder at det forventede antal timer per dag hvor begge satellitter er i drift er $24\cdot(1-P_2)\approx 23,7$ timer

Opgave 20 $L=N-\frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)=2-12(1-P_0)=2-12(\frac{26}{170})=0.164705882$

Opgave 1

1C er korrekt. Her er hele simplex beregningen. I opgaven skal man finde det andet tableau

b.v.	eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS
Z	0	1	-6	-8	-6	0	0	0	0
x4	1	0	1	2	1	1	0	0	16
x5	2	0	2	1	2	0	1	0	9
x6	3	0	2	1	1	0	0	1	11
b.v.	eq.		x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS
Z	0	1	-2	0	-2	4	0	0	64
x2	1	0	0.5	1	0.5	0.5	0	0	8
x5	2	0	1.5	0	1.5	-0.5	1	0	1
x6	3	0	1.5	0	0.5	-0.5	0	1	3
b.v.	eq.		x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS
Z	0	1	0	0	0	3.33	1.33	0	65.33
x2	1	0	0	1	0	0.67	-0.33	0	7.67
x1	2	0	1	0	1	-0.33	0.67	0	0.67
x6	3	0	0	0	-1	0	-1	1	2

Opgave 2

Vi aflæser at $B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.75 \\ 0.5 & -0.25 \end{bmatrix}$. Vi udregner $B = \left(B^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ og vi kan se at det må være x_1 og x_2 der er basis variable. Vi bruger nu fundamental indsigt til at udfylde resten af tableauet

$$c_B = \begin{bmatrix} 10 & 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} -3.5 & 6.75 \end{bmatrix}$$
$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0.25 \end{bmatrix}$$
$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4.75 \\ 2.75 \end{bmatrix}$$
$$c_B B^{-1}A - c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.25 \end{bmatrix}$$
$$c_B B^{-1}b = 55.75$$

Vi indsætter i tableau:

b.v.	eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	RHS
Z	0	1	0	0	1,25	-3,5	6,75	55,75
x1	1	0	1	0	0,25	-0,5	0,75	4,75
x2	2	0	0	1	0,25	0,5	-0,25	2,75

Dvs. 2C er korrekt

Opgave 3

Igen bruger vi fundamental indsigt. $y^* = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{9} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{17}{9} \end{bmatrix}$ og

$Z^* = c_B B^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{17}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 19 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{182}{9}$

Dvs. 3E er korrekt

Opgave 4

Det duale problem er:

$$\min 5y_1 - 2y_2 + 7y_3$$

hvor

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &\geq 2 \\ y_1 + 5y_2 + y_3 &= 3 \\ y_1 + 3y_2 &\leq 1 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\leq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dvs. 4B er korrekt

opgave 5

Vi tager udgangspunkt i det endelig tableau og tilføjer Δ række.

b.v.	eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS	
Z	0	1	0	0	3,75	0	3,25	2,5	79,25	
			-1	0	0	0	0	0	0	Δ
x4	1	0	0	0	1,75	1	0,25	-0,5	11,25	
x2	2	0	0	1	0,5	0	0,5	0	4,5	
x1	3	0	1	0	0,25	0	-0,25	0,5	7,75	

Vi gør tableauet legitimt ved at lægge tredje række til delta-rækken:

b.v.	eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS	
Z	0	1	0	0	3,75	0	3,25	2,5	79,25	
			0	0	0,25	0	-0,25	0,5	7,75	Δ
x4	1	0	0	0	1,75	1	0,25	-0,5	11,25	
x2	2	0	0	1	0,5	0	0,5	0	4,5	
x1	3	0	1	0	0,25	0	-0,25	0,5	7,75	

Vi kan nu opskriver uligheder som Δ skal opfylde for at hvert element i række nul forbliver ikke-negativt:

$$\begin{aligned} 3.75 + 0.25\Delta \geq 0 \Rightarrow &\quad 0.25\Delta \geq -3.75 \Rightarrow \quad \Delta \geq -15 \\ 3.25 - 0.25\Delta \geq 0 \Rightarrow &-0.25\Delta \geq -3.25 \Rightarrow 0.25\Delta \leq 13 \\ 2.5 + 0.5\Delta \geq 0 \Rightarrow &\quad 0.5\Delta \geq -2.5 \Rightarrow \quad \Delta \geq -5 \end{aligned}$$

Alt i alt har vi: $-5 \leq \Delta \leq 13$ og 5F er korrekt

Opgave 6

$$B^{-1}b + B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,25 \\ 4,5 \\ 7,75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0,25 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & -0,25 & 0,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,25 \\ 4,5 \\ 7,75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,5\Delta \\ 0 \\ 0,5\Delta \end{bmatrix}$$

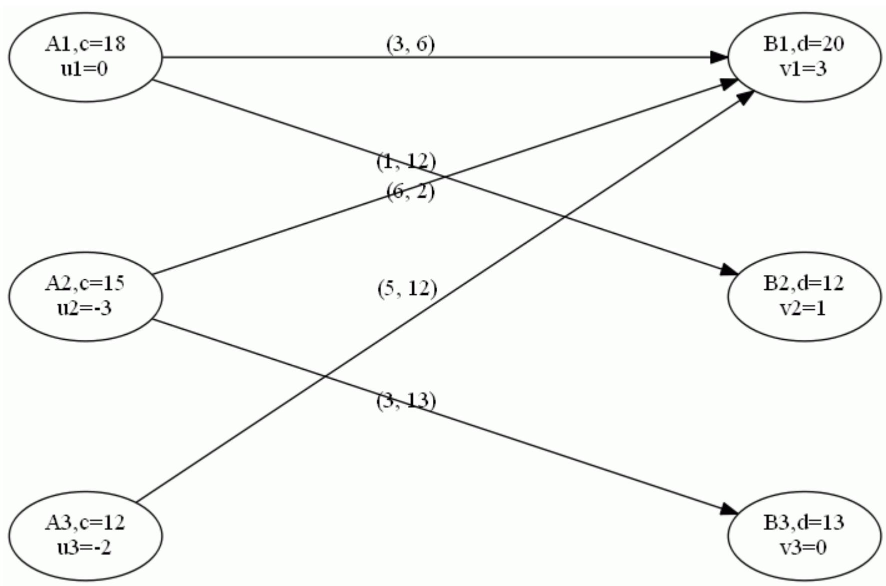
Vi opskriver uligheder som Δ skal opfylde for at hvert element i højre-siden forbliver ikke-negativt:

$$\begin{aligned} 11,25 - 0,5\Delta \geq 0 \Rightarrow & -0,5\Delta \geq -11,25 \Rightarrow \quad \Delta \leq 22,5 \\ 7,75 + 0,5\Delta \geq 0 \Rightarrow & \quad 0,5\Delta \geq -7,75 \Rightarrow \Delta \geq -15,5 \end{aligned}$$

Dvs. $-15,5 \leq \Delta \leq 22,5$ og 6E er korrekt

Opgave 7: Transportproblemet

Startløsning med duale variable udregnet:



Dvs. rigtigt svar er 7B

Opgave 8: Transportproblemet

Vi udregner reduceret omkostning for de kanter som ikke er med i løsningen vi fik oplyst i opgaven:

- reduceret omkostning for kant (A1,B3): 8
- reduceret omkostning for kant (A2,B2): 1
- reduceret omkostning for kant (A3,B2): -1
- reduceret omkostning for kant (A3,B3): 6

Vi kan se at det kun er kanten (A3,B2) som har negativ reduceret omkostning og denne kant skal tilføjes. Når kanten tilføjes opstår der en kreds: A3,B2,A1,B1,A3. De modsat rettede kanter i kredsen er (A1,B2) og (A3,B1). I startløsningen flyder der 12 varer over begge disse kanter så vi kan sende 12 varer over den nye kant (A3,B2). Det rigtige svar er derfor: 8A

opgave 9

Opgave 9: Rigtigt svar 9F

Start

	I	II	III	IV
A	5	13	1	6
B	7	12	6	17
C	14	10	19	3
D	3	14	1	2

Find værdier der skal trækkes fra rækker:

5	13	1	6	1
7	12	6	17	6
14	10	19	3	3
3	14	1	2	1

Find værdier der skal trækkes fra søjler:

4	12	0	5	
1	6	0	11	
11	7	16	0	
2	13	0	1	
1	6	0	0	

Overdæk (markeret med pile). Mindste ikke-overdækkede tal er 1

3	6	0	5		0
0	0	0	11	←	-1
10	1	16	0		0
1	7	0	1		0
		↑	↑		
1	1	0	0		

Resultat:

2	5	**0**	5
0	**0**	1	12
9	0	16	**0**
0	6	0	1

Objektværdi er 19

Opgave 10

Rigtigt svar: 10D

Opgave 10: Duale variable kan findes ved at finde ud af hvor meget vi alt i alt har trukket fra hver række og søjle (summere de røde tal fra opgave 9)

.	.	.	.	1 (u_1)
.	.	.	.	5 (u_2)
.	.	.	.	3 (u_3)
.	.	.	.	1 (u_4)
2 (v_1)	7 (v_2)	0 (v_3)	0 (v_4)	

I opgave 9 er der flere måder at vælge overdækkende linier og afhængigt af valget vil de duale variable få forskellige værdier. Jeg kan få øje på to måder at overdække, så man kan prøve begge og se hvilken der giver et sæt af duale variable som passer med svar-mulighederne. Alternativt kan man gøre følgende:

Da vi kender den optimale værdi for det primale problem Z=19 ved vi (fra svag dualitets sætning) at hvis en lovlig løsning til det duale problem har objektværdi 19 så er den også optimal.

Fra slides'ne ved vi at det duale til tildelingsproblemet er

$$\max \sum_{i \in M} u_i + \sum_{j \in N} v_j$$

$$\begin{aligned} u_i + v_j \leq c_{ij} \quad & \forall i \in M, j \in N \\ u_i \in \mathbb{R} \quad & \forall i \in M, \\ v_j \in \mathbb{R} \quad & \forall j \in N \end{aligned}$$

Dvs. objektværdien for det duale problem udregnes ved at summere de duale variable. Med den viden kan vi forkaste svarmulighed C,E og F da disse løsninger har objektværdi 5, 20 og 11. Tilbage står mulighed A, B og D. For de tre løsninger udregner vi $u_i + v_j$ for alle i og j og sammenligner med c_{ij}. Dermed kan vi undersøge om begrænsningen i det duale er overtrådt. Vi ser at begrænsningen er overtrådt for et enkelt element i løsning A og B (markeret med rødt nedenfor), mens alle begrænsningerne er overholdt for løsning D. Svar D er derfor både lovlig og optimal.

A

	$u_i + v_j$				u_i
	2	9	1	1	1
	6	13	5	5	5
	3	11	3	3	3
	2	9	1	1	1
v_j	1	8	0	0	

B:

	$u_i + v_j$				u_i
	1	8	0	0	0
	7	14	6	6	6
	4	11	3	3	3
	2	9	1	1	1
v_j	1	8	0	0	

D:

	$u_i + v_j$				u_i
	3	8	1	1	1
	7	12	5	5	5
	5	10	3	3	3
	3	8	1	1	1
v_j	2	7	0	0	

c_{ij} :

	I	II	III	IV
A	5	13	1	6
B	7	12	6	17
C	14	10	19	3
D	3	14	1	2

Opgave 11

Rigtigt svar: 11F

		Spiller 2		
		S_1	S_2	S_3
	R_1	2	-3	2
Spiller 1	R_2	2	-2	-1
	R_3	-2	3	3

S3 er domineret af S2:

		Spiller 2	
		S_1	S_2
	R_1	2	-3
Spiller 1	R_2	2	-2
	R_3	-2	3

R1 er domineret af R2

		Spiller 2	
		S_1	S_2
Spiller 1	R_2	2	-2
	R_3	-2	3

Intet saddelpunkt. Vi skal bruge en blandet strategi. x_2 sandsynlighed for strategi 2, x_3 sandsynlighed for strategi 3:

$$\max_{x_2,x_3} \min\{2x_2 - 2x_3, -2x_2 + 3x_3\}$$

$x_3 = 1 - x_2$:

$$\max_{x_2} \min\{2x_2 - 2(1-x_2), -2x_2 + 3(1-x_2)\}$$
$$= \max_{x_2} \min\{2x_2 - 2 + 2x_2, -2x_2 + 3 - 3x_2)\} = \max_{x_2} \min\{4x_2 - 2, -5x_2 + 3)\}$$

Skæring mellem de to linier:

$$4x_2 - 2 = -5x_2 + 3 \Rightarrow$$
$$9x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{9}$$

Spillets værdi: $4\frac{5}{9} - 2 = \frac{2}{9} = 0,222$

Opgave 12

Rigtigt svar: 12F

		Spiller 2	
		S_1	S_2
	R_1	2	3
Spiller 1	R_2	a	-2

$$\max_{x_1,x_2} \min\{2x_1 + ax_2, 3x_1 - 2x_2\}$$

$x_2 = 1 - x_1$

$$\max_{x_1} \min\{2x_1 + a(1-x_1), 3x_1 - 2(1-x_1)\}$$

$$\max_{x_1} \min\{2x_1 + a - ax_1, 3x_1 - 2 + 2x_1)\} = \max_{x_1} \min\{(2-a)x_1 + a, 5x_1 - 2)\}$$

vi ser at det andet led maksimalt kan have værdien 3 når $x_1$bevæger sig inden for intervallet $[0;1]$ og derfor kan vi ikke opnå at spillets værdi bliver 4.

12F er derfor rigtig.

Opgave 13

Modellen

$$\max p_A x_A + p_B x_B + 9000y$$

hvor

$$\begin{aligned} x_A + x_B &\leq 10000 \\ x_A &\leq 4500 \\ y &\leq 1 + \frac{1}{10001}(x_A - x_B - 1) \\ x_A, x_B &\geq 0 \\ x_A, x_B &\in \mathbb{Z} \\ y &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

er korrekt. Dvs. svar 13B er korrekt

De to første begrænsninger følger direkte fra opgaveteksten mens begrænsningen

$$y \leq 1 + \frac{1}{10001}(x_A - x_B - 1) \tag{1}$$

er den »komplicerede«. Hvis $x_A > x_B$ vil der gælde at $x_A - x_B - 1 \geq 0$ og højresiden på uligheden ovenfor vil være mindst et. Det betyder at y kan sættes til værdien 1 og det vil være fordelagtigt da vi maximerer objektfunktionen. Hvis $x_A \leq x_B$ vil der gælde at $x_A - x_B - 1 < 0$. Det betyder at højresiden på ulighed 1 vil være strengt mindre end 1 og y vil kun kunne tage værdien 0 og vi får altså ikke glæde af »bonussen« for at producere flere enheder af produkt A end af produkt B. Vi ganger med $\frac{1}{10001}$ for at sikre at venstresiden ikke kan blive negativ for input som ellers opfylder modellens betingelser. Hvis $x_A = 0$ og $x_B = 10000$ vil opfylde alle betingelser i opgaven og $x_A - x_B - 1 = -10001$ i det tilfælde vil højresiden blive præcis 0.

Opgave 14

14D er korrekt

Med »forgreningen« $x_2 \leq 1$ eller $x_2 \geq 2$ er løsningsrummet splittet i to, lad os kalde de to mulige løsningsrum for A ($x_2 \leq 1$) og B ($x_2 \geq 2$). Den optimale heltalsløsning må ligge indenfor et af disse to områder.

- Vi får at vide at der ikke er nogen lovlig løsning i løsningsrum B. Altså må den optimale heltalsløsning ligge i løsningsrum A.
- Når vi løser LP relaxeringen til løsningsrum A får vi en heltals-løsning. Vi får derfor både en upper og lower bound på 4 for den bedste heltals-løsning i løsningsrum A. Med andre ord den bedste heltals løsning i løsningsrum A har objektværdi 4 og den er pga. argumentationen ovenfor også optimal for det oprindelige problem. 14D er altså korrekt.

Opgave 15

15D er korrekt.

Når vi kun kan bruge varetype 1 er det bedste vi kan gøre at tage så mange elementer af varetypen med som muligt (da $p_m > 0$). Når resterende kapacitet er s_1 skal vi derfor tage $\left\lfloor \frac{s_1}{w_1} \right\rfloor$ elementer af varetype et med (vi bliver nødt til at afrunde da antallet af elementer vi tager med skal være heltalligt. Vi må runde ned for ikke at overskride den resterende kapacitet). For at få profitten skal vi gange med p_1.

Opgave 16

Rigtigt svar 16C

Instansen vi skal løse er så lille at det strengt taget ikke er nødvendig at skrive tabeller op. Det er ret let at overbevise sig om at $f_3^*(6) = 12$ (når rygsækkens kapacitet er 6 det smarteste at bruge varetype 2 to gange). $f_2^*(4)$ er endnu lettere da udregningen svarer til at rygsækkens kapacitet er 4 og vi kun må bruge varetype 1 og 2. Det ses let at $f_2^*(4)$=10 idet det smarteste er at bruge varetype 1 en gang.

I det følgende udfører vi de detaljerede beregninger.

Vi starter $m = 1$

s_1	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	10	1
5	10	1
6	10	1

$m = 2$ (x_2 kan højst være 2 da $\lfloor c/w_2 \rfloor = \lfloor 6/3 \rfloor = 2$)

$s_2 \backslash x_2$	0	1	2	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
0	0			0	0
1	0			0	0
2	0			0	0
3	0	6		6	1
4	10	6		**10**	0
5	10	6		10	0
6	10	6	12	12	2

I tabellen ovenfor kan vi aflæse $f_2^*(4)$=10

$m = 3$ (x_3 kan højst være 3 da $\lfloor c/w_3 \rfloor = \lfloor 6/2 \rfloor = 3$)

$s_3 \backslash x_3$	0	1	2	3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	0				0	0
1	0				0	0
2	0	1			1	1
3	6	1			6	0
4	10	1	2		10	0
5	10	7	2		10	0
6	12	11	2	3	**12**	0

I tabellen ovenfor kan vi aflæse $f_3^*(6) = 12$

Opgave 17

17C er korrekt. Vi bruger reglen fra slides (lektion 6) hvor vi skal dele rækkerne i matricen i to mængder P_1 og P_2. Vi ser først og fremmest at matricen er en (0,1,-1) matrix med højst to ikke-nul elementer i hver søjle så forudsætningerne for reglen er opfyldt. Nedenfor er der vist en opdeling af rækkerne (P_1 : over stregen, P_2: under stregen)

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Alle søjler har to ikke-nul elementer.

- Søjle 1 og 4 har ikke-nul elementer med forskelligt fortegn. Ikke-nul elementerne i søjle 1 er i P_1 ikke-nul elementerne i søjle 4 er i P_2 så disse to søjler opfylder kravene
- Søjle 2 og 3 har ikke-nul elementer med samme fortegn. I begge tilfælde er ikke-nul elementerne i forskellige mængder og disse to søjler opfylder også kravene.

De øvrige matricer er konstrueret så det ikke er muligt at lave opdelingen. I alle de andre matricer kan man finde to rækker A og B således at der er to søjler der har begge deres ikke nul-elementer i række A og B. Den ene af disse søjler vil have ikke-nul elementer med samme fortegn og den anden vil have ikke nul-elementer med modsat fortegn (eksempel: række 1 og 5 i svar 14A). Sådanne matricer kan ikke være totalt unimodulære.

Opgave 18

18F er korrekt

Der er tale om et M/M/1 system

- Ankomstrate λ= 60/25 per time
- betjenings rate μ =3 per time
- $\rho = \lambda/\mu$=$\frac{60/25}{3} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$
- $L = \rho/(1-\rho) = \frac{4}{5}/\frac{1}{5} = 4$
- $W = L/\lambda = 4/\frac{60}{25} = \frac{100}{60} = \frac{5}{3} = 1.66$ time=100 minutter

Opgave 19

19A er korrekt

$L_q = \rho^2/(1-\rho) = \left(\frac{4}{5}\right)^2/\frac{1}{5} = \frac{16}{25}/\frac{1}{5} = \frac{16}{5}$

Opgave 20

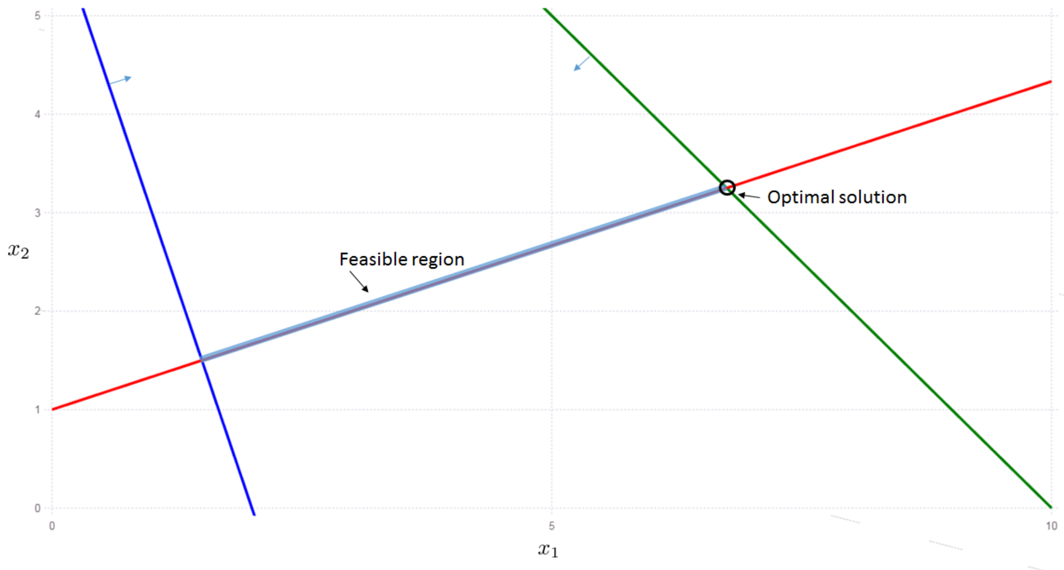
20E er korrekt

Medarbejderen er ledig når der ikke er nogen kunder i systemet. Sandsynligheden for dette er udtrykt ved P_0. Vi udregner denne:

$P_0 = 1 - \rho = \frac{1}{5}$

Dvs. medarbejderen har $\frac{1}{5} \cdot 7,5 \cdot 60 = 90$minutter til at udfylde regneark

Task 1: The feasible region is



Using the graphical method (not shown) we see that the optimal solution is found at the intersection of constraint (1) and (3). To find their intersection we need to solve

$$-x_1 + 3x_2 = 3$$
$$x_1 + x_2 = 10$$

We isolate $x_1$in the second equation and insert in the first equation to obtain

$$-(10 - x_2) + 3x_2 = 3 \Rightarrow -10 + 4x_2 = 3 \Rightarrow 4x_2 = 13 \Rightarrow x_2 = \frac{13}{4}$$

and by inserting this in the second constraint we get

$$x_1 + \frac{13}{4} = 10 \Rightarrow x_1 = \frac{40 - 13}{4} = \frac{27}{4}$$

We then obtain

$$Z = 2x_1 + x_2 = \frac{54}{4} + \frac{13}{4} = \frac{67}{4} = 16.75$$

Task 2: 2F is correct. The computation is shown below

b.v.	eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	RHS	m.r.t.
Z	0	1	0	-1.5	11	0	4.5	18	
x4	1	0	0	2	0	1	-1	10	5
x1	2	0	1	0.5	2	0	0.5	2	4
Z	0	1	3	0	17	0	6	24	
x4	1	0	-4	0	-8	1	-3	2	
x2	2	0	2	1	4	0	1	4	

Task 3: A: x_2 should leave the basis. We only have to consider x_2, x_3, x_4 as these are the ones with coefficient greater than zero 0 in the column of x_1. Of these x_2 has ratio $\frac{0}{3} = 0$ which is minimal.

Task 4: Answer: 4E

From the tableau we read:

$$S^* = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ -2 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, y^* = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Then we compute:

$$S^* A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, y^* A - c = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}, y^* b = 31, B^{-1} b = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

We insert the information into the tableau using:

$$\begin{bmatrix} y^*A - c & | & y^* & | & y^*b \\ S^*A & | & S^* & | & S^*b \end{bmatrix}$$

eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
0	1	10	0	0	2	0	1	31
1	0	2	1	0	1	0	-0.5	2.5
2	0	-2	0	1	-2	0	1.5	1.5
3	0	1	0	0	0	1	0	15

task 5: using the SOB rule we determine that 5A is correct:

$$\min 1y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

subject to

$$\begin{aligned} 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 &\geq 5 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\leq 8 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 &= 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Task 6 Correct answer: 6F

The calculations are shown below. Since x_2 is a basis variable we need to put the first tableau on proper form by adding row 1 to the Δ row.

b.v.	eq.	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	RHS
Z	0	1	0	0	5.5	2	0	1.5	24.5
Delta		0	0	-1	0	0	0	0	0
x2	1	0	0	1	1.25	0.25	0	0	1
x5	2	0	0	0	-0.25	-0.25	1	0	0
x1	3	0	1	0	0.75	0	0	0.25	2.75
Z	0	1	0	0	5.5	2	0	1.5	24.5
Delta		0	0	0	1.25	0.25	0	0	1
x2	1	0	0	1	1.25	0.25	0	0	1
x5	2	0	0	0	-0.25	-0.25	1	0	0
x1	3	0	1	0	0.75	0	0	0.25	2.75

After that we can read out the following inequalities (from the last tableau) for $\Delta:$
$5.5 + 1.25\Delta \geq 0 \Rightarrow 1.25\Delta \geq -5.5 \Rightarrow \Delta \geq -4.4$
$2 + 0.25\Delta \geq 0 \Rightarrow 0.25\Delta \geq -2 \Rightarrow \Delta \geq -8$
From this we see that the basis is optimal for $\Delta \in [-4.4; \infty]$ and $Z^* = 24.5 + \Delta$ in this interval.

Task 7 Correct answer: 7D

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$S^*(b + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix}) = S^*b + S^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25\Delta \end{bmatrix}$$

from this we get the inequality:

$$2.75 + 0.25\Delta \geq 0 \Rightarrow 0.25\Delta \geq -2.75 \Rightarrow \Delta \geq -11$$

The dual variable corresponding to the third constraint is 1.5 so
basis is optimal for $\Delta \in [-11; \infty]$ and $Z^* = 24.5 + 1.5\Delta$ in this interval

Task 8 Correct answer is 8C
Our initial LP is:

$$\max 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 + 4x_3 &\leq 2 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq -7 \end{aligned}$$

In order to reformulate it to an LP with non-negative variables we define $x_3' = x_3 + 7$. This in turns means that $x_3 = x_3'$-7. We substitute the last expression into the LP above and get:

$$\max 2x_1 + 3x_2 + x_3' - 7$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 + 4(x_3' - 7) &\leq 2 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2(x_3' - 7) &\leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' &\geq 0 \end{aligned}$$

From this we compute:

$$\max 2x_1 + 3x_2 + x_3' - 7$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 1x_2 + 4x_3' - 28 &\leq 2 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3' - 14 &\leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3' &\geq 0 \end{aligned}$$

and then we move constraints to the right hand side of the constraints to get:

$$\max 2x_1 + 3x_2 + x_3' - 7$$

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 1x_2 + 4x_3' &\le 30 \\
1x_1 + 3x_2 + 2x_3' &\le 19 \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3' &\ge 0
\end{aligned}
$$

Task 9 Correct answer 9B:

$c\bar{x}' \le c\bar{x} \le \bar{y}b$

Explanation:

$c\bar{x}' \le c\bar{x}$ because P is the LP relaxation of IP and P provides an upper bound.

$c\bar{x} \le \bar{y}b$ follows from weak duality. We cannot say $c\bar{x} = \bar{y}b$ since $\bar{y}$ was just a feasible solution and not the optimal solution.

Task 10 Correct answer 10E

Task 11 Correct answer 11D

Task 12 Correct answer 12C

Task 13 Correct answer 13A

Task 14 Correct answer 14D

Task 15 Correct answer 15A

Task 16 Correct answer 16E

Task 17 Correct answer 17B

Task 18 Correct answer 18C

Task 19 Correct answer 19A

42101 Written Examination - Fall 2018

December 4, 2019

Question 10 - Correct Response: E

Explanation: This a binary knapsack problem with four decision variable sand a maximization objective. The objective coefficients are given in row 2 of the table, while the constraint coefficients are given in row 1.

Question 11 - Correct Response: D

Explanation: Binary variables y are used to model whether a distribution center is opened or not. If opened, a distribution center can provide all necessary demand (11+18+15+25=69 thousand truckloads). Hence, y_j must be linked to the distribution variables x_{ij} through a constraint of the form

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} \leq 69 * \cdot y_j$$

the formulation must also ensure that all demand is met through constraints of the form

$$x_{i1} + x_{i1} + x_{i1} \geq d_i$$

, where d_i is the demand (in thousands of truckloads) for city i. Note also that the objective **must** be linear.

Question 12 - Correct Response: C

Explanation: Follow the nearest neighbour heuristic outlined on slides 17 & 18 of lecture 9. Its length can be computed from the table of costs.

Question 13 - Correct Response: A

Explanation: Performing a two-opt exchange on edges (8,6) and (5,7) for tour 1-2-**8-6**-3-**5-7**-4-1 results in the tour 1-2-**8-5-** 3-**6-7**-4-1. The length of the two tours can be computed using the table of costs. The difference is computed by subtracting the length of the second from the first.

Question 14 - Correct Response: D

Explanation: The best lower bound is 209 (the only integer solution). This can be used to fathom nodes a and b since their upper bound is worse (207). We can also fathom node c since its upper bound is only as good as the best lower bound. The only "live" node is d, which has an upper bound of 213.

Question 14 - Correct Response: A

Explanation: The first four constraints (10) sum over j, thus each of these rows has four consecutive ones (the constraint coefficient of each variable is one). The second four constraints sum over i, thus there should be three zeros in between each value of one in the constraint matrix. A zero states that the variable is not in the constraint. For example, the fifth row of A says pick out variables x_{11}, x_{21}, x_{31} and x_{41} (sums over i for $j = 1$). Note no variable has a coefficient of -1 in the formulation, so any A matrix containing such an element can be dismissed.

Question 16 - Correct Response: E

Explanation: The constraint matrix is totally unimodular. It fulfills the sufficient conditions for total unimodularity (2 non zeros per column, all entries 0,1,or -1, and the 8 rows can be partitioned into sets $\{1, 2, 3, 4\}$ & $\{5, 6, 7, 8\}$. Integrality of the solution is only ensured if the right hand side is integer. The objective function does not change the feasible region. Branch-and-Bound is not necessary if the solution is naturally integer.

Question 17 - Correct Response: B

Explanation: Perform one iteration of network simplex. The dual variables for the solution given are

$$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = -6, v_1 = 3, v_2 = 7, v_3 = 2, v_4 = 0, \text{ and } v_5 = -4$$

The entering variable is then x_{32} (reduced cost -10) and this can be increased to at most 10 tonnes (cycle l3-c2-l2-c4-l3). The solution value is $950.

Question 18 - Correct Response: C

Explanation: Use $c_{ij} + u_i - v_j$ for all variables with positive values.

Question 19 - Correct Response: A

Explanation: Multiplying the right hand side by -1 yields $[-3 \;\; -5 \;\; 2]$. The most negative right hand side corresponds to row 2. The pivot row is therefore row 2, and the element we pivot on is in column x_1 (provided by the ratio test). There is only one option satisfying these steps.

1 Svar til eksamen i »Introduktion til operationsanalyse«, Forår 2019

1.1 Opgave 1

svar 1E er korrekt. I Punkt E er objektværdien $7 - \frac{1}{2} = 6.5$, i alle andre punkter er objektværdien lavere.

1.2 Opgave 2

Svar 2F

Pivotrækken og kolonnen er markeret med rød skrift.

b.v	eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	0	1	0	-1	3	5	0	0	20
x_1	1	0	1	0	1	1	0	0	4
x_5	2	0	0	1	2	-2	1	0	0
x_6	3	0	0	4	3	-1	0	1	16

b.v	eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	0	1	0	0	5	3	1	0	20
x_1	1	0	1	0	1	1	0	0	4
x_2	2	0	0	1	2	-2	1	0	0
x_6	3	0	0	0	-5	7	-4	1	16

1.3 Opgave 3

Svar: 3c$\Delta \in [-9; \frac{1}{3}]$ og $z = \frac{91}{2} + \frac{7}{2}\Delta$

Baseret på oplysningerne om de optimale basis variable kan vi opstille B og derefter udregne B^{-1}:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vi skal sikre

$$B^{-1}(b + \delta) = B^{-1}b + B^{-1}\delta \geq 0$$

Da vi ændrer på den første begrænsning er $\delta = \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vi får

$$B^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 19 \\ 14 \end{bmatrix} + B^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{75}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta \\ \frac{3}{4}\Delta \\ -\frac{3}{4}\Delta \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. der er tre uligheder der skal være opfyldt:

$$\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -9$$
$$\frac{75}{4} + \frac{3}{4}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -\frac{75}{3} = -25$$
$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq \frac{1}{3}$$

af dette udleder vi at $-9 \leq \Delta \leq \frac{1}{3}$. For at finde ændring i objektværdi skal vi udregne den optimale objektværdi og de duale variable:

$$y^* = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$Z^* = c_B B^{-1} b = \frac{91}{2}$$

dvs. objektværdien som funktion af delta er $Z^*(\Delta) = \frac{91}{2} + \frac{7}{2}\Delta$ så længe $-9 \leq \Delta \leq \frac{1}{3}$.

1.4 Opgave 4

Svar: 4E

Vi har $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

baseret på oplysningerne om basis variable kan vi finde B og c_B og vi kan udregne B^{-1}

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi bruger nu fundamental indsigt til at udregne de enkelte dele af det endelige tableau:

$$S^*A = B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, y^* = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{13}{3} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}, y^*A - c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{33}{2} \end{bmatrix}, Z^* = y^*b = 41, S^*b = B^{-1}b =$$

og vi indsætter resultaterne:

b.v	eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	0	1	0	0	$-\frac{33}{2}$	0	$-\frac{13}{3}$	$\frac{9}{2}$	41
x_1	1	0	1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	1
x_2	2	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	4
x_4	3	0	0	0	3	1	1	-1	6

1.5 Opgave 5

svar 5C

- Første begrænsning er en $\leq$ begrænsning så vi skal tilføje en slack variabel (x_4)
- Anden begrænsning er en $\geq$ begrænsning så vi skal tilføje en surplus variabel (x_5) og en kunstig variabel ($\bar{x}_6$)
- Tredie begrænsning er en $=$ begrænsning så vi skal tilføje en kunstig variabel ($\bar{x}_7$)

Vi skal minimere værdien af de to kunstige variable så det rigtige svar er:

$$\min \bar{x}_6 + \bar{x}_7$$

$$\begin{aligned} 1x_2 + 1x_3 + x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_5 + \bar{x}_6 &= 13 \\ 4x_1 + 2x_3 + \bar{x}_7 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.6 Opgave 6

Svar 6F

Vi bruger SOB reglen og finder:

Primalt:	Dualt:
$$\min 4x_1 + 2x_2 + 8x_3$$ $$\begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leq 19 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$	$$\max 15y_1 + 6y_2 + 19y_3$$ hvor $$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 3y_3 &\leq 4 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\ 3y_1 + 3y_3 + 3y_3 &= 8 \\ y_1 &\in \mathbb{R} \\ y_2 &\geq 0 \\ y_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

1.7 Opgave 7

Svar: 7B

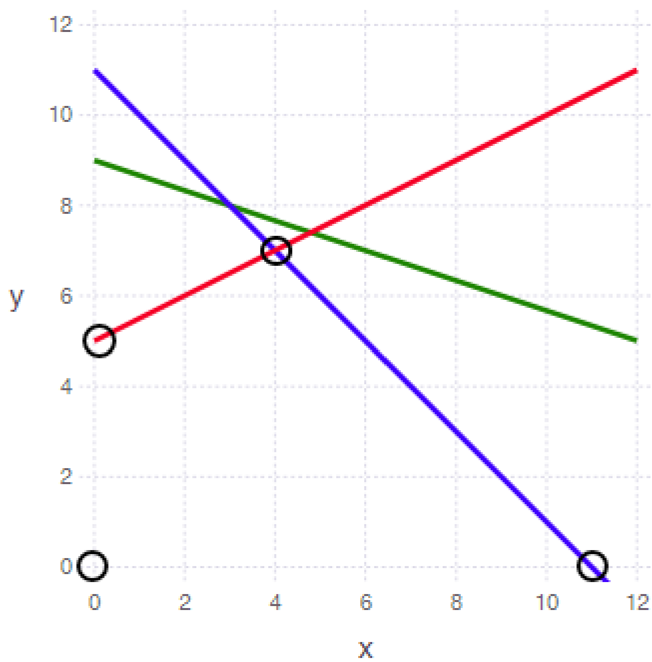
$$\begin{aligned} x_{12} &= 30 \\ x_{13} &= 20 \\ x_{23} &= 30 \\ x_{34} &= 10 \\ x_{35} &= 10 \\ x_{54} &= 20 \end{aligned}$$

7B er det eneste svar der opfylder alle begrænsninger. Svar A, C, D,E og F er alle ugyldige.

1.8 Opgave 8

Svar: 8D

For at løse denne opgave er det lettest at tegne det lovlige løsningsområde. Det lovlige løsningsområde er afgrænset af de tre liniestykker og de to koordinat akser. Bemærk at den en begrænsning er overflødig. Vi tæller 4 CPF løsninger.



1.9 Opgave 9

svar 9D

$$\max 3x_1 + 8x_2$$

$$\begin{aligned} 1x_1 + 4x_2 &\leq 13 \\ 1x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\ 1x_1 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vi ser at x_1, x_2 og x_5 må være i basis da den sidste begrænsning ikke er opfyldt fuldt ud. Vi har derfor

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}, y^* = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Vi skal sikre

$$y^* A_{ny} - c < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} < c \Rightarrow c > 4$$

produktet skal koste mere end 4000 kr per enhed. Hvis det sælges for 4000 kr per enhed eller mindre vil det ikke øge indtjeningen.

1.10 Opgave 10

svar: 10B

Slackvariablenes værdier fortæller os at i den optimale løsning er første og tredie begrænsning »fuldt opbrugte« - mens venstre siden på den anden begrænsning er strengt mindre en højresiden. Sagt med andre ord, hvis x_1^*, x_2^* og x_3^* er værdierne af x_1, x_2 og x_3 i den optimale så gælder der:

$$a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* + a_{13}x_3^* = b_1$$
$$a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* + a_{23}x_3^* < b_2$$
$$a_{31}x_1^* + a_{32}x_2^* + a_{33}x_3^* = b_3$$

Ifølge complementary slackness sætningen opfylder optimale løsninger x og y at:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = b_i \text{ eller } y_i = 0$$

- Da $a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* + a_{23}x_3^* < b_2$ må der gælde at $y_2 = 0$ for at ovenstående kan være opfyldt
- Da $a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* + a_{13}x_3^* = b_1$ er der ikke nogen specifikke krav til y_1 og der gælder blot $y_1 \geq 0$ (det gælder altid for de duale variablene når det primale problem er på standard form)
- Ligeledes, da $a_{31}x_1^* + a_{32}x_2^* + a_{33}x_3^* = b_3$ er der ikke nogen specifikke krav til y_3 og der gælder blot $y_3 \geq 0$

Det korrekte svar er derfor 10B.

Bemærk at der i praksis ofte vil gælde at $y_1 > 0$ og $y_3 > 0$, men det kan man ikke udlede ud fra complementary slackness sætningen og afhængig af valget af a_{ij} og b_i vil der sommetider gælde $y_1 = 0$ eller $y_3 = 0$ (så 10C er ikke korrekt).

1.11 Opgave 11

Svar 11E eller 11D: Model 1 er et knapsack problem og model 3 er LP-relakseringen af samme model. Derfor $z_3 \geq z_1$. Model 3 er desuden også en relaksering a model 2. I model 2 skal alle variable være heltallige og ikke-negative, i model 3 skal de blot opfylde at de ikke er heltallige. Derfor har vi $z_3 \geq z_2$. I model 2 kan man godt vælge hvert element flere gange modsat knapsack problemet. Model 2 bliver nogle gange anset som værende en variant af knapsack problemet. Derfor er optimum af model 1 også lovlig løsning til model 2, men vi kan muligvis lave en der er endnu bedre, derfor $z_2 \geq z_1$.

1.12 Opgave 12

Svar 12B: Først udregner vi $\frac{\text{profit}}{\text{vægt}}$ for hvert element. Lad os kalde det p_i for det i'te element. Vi får da $p_1 = 2; p_2 = 1,5; p_3 = 1; p_4 = 0,75; p_5 = 0,5; p_6 = 0,25$. Først vælger vi element 1. Restkapaciteten er da 11. Så vælges element 2 og restkapaciteten er da 6. Nu tjekker vi i rækkefælge elementerne 3, 4, og 5 og for disse tre er deres vægt større end restkapaciteten og derfor kommer de ikke med. Til slut tjekker vi element 6 og da det kan være der kommer det med i løsningen og restkapaciteten er 1. Værdien af løsningen er så profitterne af 1, 2 og 6 som er 14.

1.13 Opgave 13

Svar 13F: Udfyldningsproblemet er egentlig bare et specialtilfælde af knapsack problemet hvor profit = vægt eftersom vi ska udnytte kapaciteten så godt som muligt (max sum af vægte) men ikke må gå ud over kapaciteten (og derfor kapacitetsbegrænsningen). Så vi får v_i som koefficienter i målfunktionen og vi får v_i som koefficienter på kapacitetsbegrænsningen.

1.14 Opgave 14

Eftersom profit og vægt er identiske for alle elementer er forholdet $\frac{\text{profit}}{\text{vægt}}$ for alle elementer lig med 1. Dermed vil det være tilfældigt rækkefølge elementerne vælges i.

1.15 Opgave 15

Svar 15C: Hvis vi vælger at bruge en maskine i en given periode t_0 skal vi teoretisk set kunne producere for denne periode og resten af tidshorisonten, dvs. $\sum_{t=t_0}^{n} d_t$. Største værdi for dette er for t_0 lig første tidsperiode hvor vi kan komme til at producerer for hele tidshorisonten.

1.16 Opgave 16

Svar 16B: Balancebegrænsningen sikrer at "inflow"for en tidsperiode er lig "outflow". Lagervariablene forbliver det samme og demanded d_t er også identisk. Det eneste der ændrer sig at vi istedet for at have en produktionsvariabel x_t har to $x1_t$ og $x2_t$. Disse indgår i stedet for x_t i balanceligningen.

1.17 Opgave 17

Svar 17E: Eftersom begge maskiner må ikke køre samtidig kan $y1_t$ og $y2_t$ ikke være 1 samtidig. Det skal også være muligt at ingen af maskiner kører for en tidsperiode.

1.18 Opgave 18

Svar 18C: I P_5 har en vi lovlig løsning på 67 og og P_6 har en øvre grænse, så den halvdel af branch & bound træet bidrager med en øvre grænse på 67. I den anden halvdel har vi endnu ikke løst P_4 og dermed kan få en øvre grænse på 69. Den største værdi at 69 og 67 er således den øvre grænse for hele branch & bound træet.

1.19 Opgave 19

Svar 19C: Hvis vi skal lukke hele branch & bound træet skal vi have en øvre grænse og (lovlig løsning) i P_4 der lukker hele branch. Dermed skal vi have en værdi større end 62 for at lukke P_6. Endelig kan den øvre grænse ikke blive højere end 69 da det er den øvre grænse for P_1 og værdien af den øvre grænse ikke kan stige fra "barn"til "forældre"knude.

1.20 Opgave 20

Svar 20F: Kanterne tjekkes i følgende rækkefølge (fed skrift betyder at kanten vælges til løsningen): $(\mathbf{2},\mathbf{3})$, $(\mathbf{1},\mathbf{2})$, $(1,4)$, $(2,5)$, $(\mathbf{4},\mathbf{6})$, (2,4), $(\mathbf{5},\mathbf{6})$, $(1,6)$, $(4,5)$, $(1,3)$, $(2,6)$, $(\mathbf{3},\mathbf{4})$, $(\mathbf{1},\mathbf{5})$. Der er stadig kanter der ikke er tjekket, men der er nu dannet en tour. Nu kan vi udregne summen af alle de valgte kanter og får 89 km.

1.21 Opgave 21

Svar 21A: Når vi fjerne $(1,6)$ og $(3,4)$ deles touren i to deltoure $6-5-2-3$ og $4-1$. Disse kan kun sættes sammen igen på en måde så de danner en lovlig løsning, nemlig med brug af kanterne $(1,3)$ og $(4,6)$.

1.22 Opgave 22

Vi bruger den grådige algoritme fra David Pisingers note, startende med fabrik nr 1. Løsningen skal være så billig som mulig så vi lægger så meget flow som muligt på den billigste kant, fortsætter videre til næstbilligste osv. indtil hele flowet fra fabrik nr. 1 er brugt. Så fortsætter vi til fabrik nr. 2 osv. Det giver følgende løsning: $x_{11} = 20, x_{21} = x_{22} = 15, x_{32} = x_{33} = 20$, alle andre variable er 0. Værdien af dette flow er 525.

1.23 Opgave 23

Vi starter med udgangspunkt i løsningen ovenfor og definerer u_1 til 0. Vi får da afstande/omkostninger i forhold til den nuværende løsning $u_1 = 0; u_2 = 1; u_3 = 3; v_1 = 5; v_2 = 8; v_3 = 11$. Så kan vi udregne de reducerede omkostninger for hver kan der *ikke* er med i den nuværende løsning: $\bar{c}_{12} = c_{12} + u_1 - v_2 = 2; \bar{c}_{13} = -3; \bar{c}_{23} = 1; \bar{c}_{31} = 7$.

Så for hver enhed flow på kanten $(1, 3)$ sænkes min målfunktion med 3. Indsættes $(1, 3)$ i den nuværende løsning haves en kreds $1_f - 3_l - 3_f - 2_l - 2_f - 1_l - 1_f$. Subscript f (fabrik) og l (lager) er bare indsat så det er lettere at følge kredsen. Betragter vi de kanter vi benytter "baglæns"$(3_l, 3_f), (2_l, 2_f), (1_l, 1_f)$ er flowet 15 på kanten $(2_l, 2_f)$ den begrænsende faktor. Vi hæver flowet med 15 på alle kanter der benyttes fra fabrik mod lager og sænker 15 på alle kanter vi benytter fra lager mod fabrik.

Ny løsning er $x_{11} = 5, x_{13} = 15, x_{21} = 30; x_{32} = 35; x_{33} = 5$ værdien af denne løsning er 480. Påny udregnes $u_1 = 0; u_2 = 1; u_3 = 0; v_1 = 5; v_2 = 5; v_3 = 8$. Så kan vi udregne de reducerede omkostninger for hver kan der *ikke* er med i den nuværende løsning: $\bar{c}_{12} = c_{12} + u_1 - v_2 = 5; \bar{c}_{22} = 4; \bar{c}_{23} = 3; \bar{c}_{31} = 4$. Alle reducerede omkostning er ≥ 0 og dermed er den fundne løsning også en optimale løsning.