

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования*

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»**

Факультет: Московский институт электроники и математики им. А.Н.Тихонова
Образовательная программа «Прикладная математика»

ОТЧЕТ

**Проект #1478, Научно-исследовательская работа (ДПМ)
«Анализ математической модели динамики мнений с ограниченным доверием
с внешним влиянием»**

Выполнили студенты группы БПМ203:

Иваненко Ольга Владимировна
(ФИО)

Шаяхметова Диана Тагировна
(ФИО)

Руководитель:

Доцент, Манита Лариса Анатольевна
(должность, ФИО руководителя от МИЭМ НИУ ВШЭ)

Москва, 2023

Реферат

Модели динамики мнений представляют собой математический аппарат для изучения процесса формирования мнений в группе взаимодействующих агентов.

Процесс формирования мнений в группе определяется многими факторами, например, графом взаимодействия, алгоритмом взаимодействия, внешними факторами. В частности, структура взаимодействия может быть локальной или глобальной. Под локальным взаимодействием понимается правило, при котором агенты принимают во внимание только своих "ближайших" соседей. При глобальной структуре агенты знают и учитывают информацию всех участников группы.

В рамках данного проекта мы изучаем одну из моделей с локальной структурой взаимодействия, которая получила большое распространение, а именно, модель с ограниченным доверием Хегельмана-Краузе. В моделях с ограниченным доверием реализуется идея, которая состоит в том, что на формирование мнения оказывают влияние только те агенты, мнения которых не сильно отличаются от мнения данного агента (так называемый принцип гомофилии). Аналогичная идея имеет место в моделях коллективного поведения, мотивированных изучением формирования стай птиц, косяков рыб и др.

Динамика в данной модели детерминированная, случайность возникает только при рассмотрении случайного начального профиля мнений. В последние годы активно изучаются различные стохастические модификации модели Хегельмана-Краузе. Это связано с тем, что, во-первых, при передаче информации могут быть ошибки, вызванные неточностью измерений или искажениями при передаче информации. Во-вторых, агенты могут быть подвержены каким-либо внешним воздействиям, а также спонтанным действиям (вызванными также каким-то внешним влиянием).

В рамках проекта исследуются две стохастические модели, основанные на алгоритме Хегельмана-Краузе с учетом случайных внешних воздействий на агентов. Данные модели, по нашему мнению, с одной стороны, позволяют учитывать случайную природу процесса взаимодействия и принятия решений, с другой стороны, могут быть использованы при исследовании открытых многоагентных систем.

В ходе выполнения проекта были получены следующие результаты:

- построены марковские случайные процессы, описывающие динамику систем;
- проведен анализ структуры профилей на больших временах;
- найдены некоторые характеристики на траекториях случайных процессов;
- проанализированы эргодические свойства систем;
- проанализировано влияние разных типов внешних воздействий на алгоритм взаимодействия агентов.

Результаты, полученные в ходе выполнения проекта, могут быть использованы как основа для более глубокого изучения математических свойств процессов, возникающих в данных моделях. Эти знания могут быть использованы в дальнейшем для принятия решений, прогнозирования социальных процессов.

Содержание

1 Введение	4
2 Модель с ограниченным доверием. Обзор основных понятий и результатов	6
3 Постановки задач и основные результаты	11
3.1 Модель с ограниченным доверием со случайными скачками в область положительного влияния	11
3.2 Модель с ограниченным доверием со случайными скачками двух типов . . .	18
3.3 Модель с ограниченным доверием с аддитивным шумом	31
4 Заключение	40
Список литературы	41

1 Введение

Модели динамики мнений представляют собой математический аппарат для изучения процесса формирования мнений в группе взаимодействующих агентов. Модели динамики мнений в настоящее время находят широкое применение как при изучении социальных взаимодействий, в частности, эволюции мнений в онлайн-сообществах, так и в технических областях, например, при моделировании движения автономных устройств ([9], [10], [13], [14], [15], [16]).

Мнения могут представлять собой оценку агентов цены на продукт, вероятность события, степень доверия к информации, положение агента и т.п. В этом случае мнение агента может быть представлено неотрицательным вещественным числом. В моделях типа модели голосования мнения могут принимать лишь конечное число значений, например, 0 и 1. В более сложных ситуациях мнения могут моделироваться в виде вектора или более общего математического объекта.

Процесс формирования мнений в группе определяется многими факторами, например, графом взаимодействия, алгоритмом взаимодействия, внешними факторами. В частности, структура взаимодействия может быть локальной или глобальной. Под локальным взаимодействием понимается правило, при котором агенты принимают во внимание только своих "ближайших" соседей. При глобальной структуре агенты знают и учитывают информацию всех участников группы.

В рамках данного проекта мы изучаем одну из моделей с локальной структурой взаимодействия, которая получила большое распространение, а именно, модель с ограниченным доверием Хегельмана-Краузе. В моделях с ограниченным доверием реализуется идея, которая состоит в том, что на формирование мнения оказывают влияние только те агенты, мнения которых не сильно отличаются от мнения данного агента (так называемый принцип гомофилии). Аналогичная идея имеет место в моделях коллективного поведения, мотивированных изучением формирования стай птиц, косяков рыб и др.

Для классической модели Хегельмана-Краузе известно, что через некоторое конечное время мнения в группе перестают меняться, происходит "заморозка" мнений. При этом возможны две ситуации: мнения всех агентов одинаковы (говорим, что система пришла к консенсусу), либо все агенты разбились на несколько групп (кластеров), в каждом кластере мнения агентов совпадают. Наличие консенсуса или кластеров зависит от многих факторов: распределением начальных мнений агентов, степенью их открытости (характеризуется радиусом доверия), числа агентов в группе. Отметим, что для многих моделей динамики мнений аналитических результатов не так много, имеется большое число открытых проблем. Поэтому широко применяют компьютерное моделирование для выработки гипотез о свойствах модели, для получения новых знаний о ее поведении.

Классическая модель Хегельмана-Краузе задается детерминированным алгоритмом обновления мнений, случайными в данной модели рассматривались лишь начальные данные. Однако даже в таком виде поведение модели оказалось сложным и крайне интерес-

ным. В дальнейшем во многих работах стали появляться стохастические обобщения модели. Это связано с тем, что, во-первых, при передаче информации могут быть ошибки, вызванные неточностью измерений или искажениями при передаче информации. Во-вторых, агенты могут быть подвержены каким-либо внешним воздействиям, а также спонтанным действиям (вероятно, вызванными также каким-то внешним влиянием).

Основные способы учета случайных воздействий следующие:

- ввод в алгоритм обновления мнений аддитивного случайного шума, чаще всего, гауссова белого шума ([6], [7]);
- рассмотрение спонтанных изменений мнений ([8]).

В рамках данного проекта мы строим и исследуем стохастические модели на базе классической модели Хегельмана-Краузе, которые отличаются от существующих моделей структурой внешнего случайного воздействия, а именно, мы предполагаем, что имеется два типа воздействия: условно положительное и условно отрицательное. Мы анализируем влияние соотношения их интенсивностей на поведение системы. Заметим, что данные предположения соответствуют, например, наличию двух противоположных источников информации. И наше исследование посвящено анализу их влияния на распределение мнений в группе. В работе рассмотрен данный подход для модели с аддитивным шумом и для модели со случайными скачками мнений.

В рамках проекта будет разработана имитационная модель для выявления свойств модели, проверки гипотез о свойствах случайного процесса. Будут определены функции на траекториях случайного процесса, имеющие некоторую естественную интерпретацию. Данные функции, вообще говоря, не будут обладать марковским свойством. Тем не менее, мы сможем изучать характеристики соответствующего случайного процесса, используя временные средние.

Исследование математических моделей с различными типами внешних влияний имеет цель разработать более точные и реалистичные способы описания и прогнозирования динамики мнений. Это знание может быть использовано для принятия решений, прогнозирования социальных процессов, разработки стратегий коммуникации и управление общественными процессами с большей эффективностью.

Отчет состоит из Введения, обзора литературы, основной части и заключения. Введение, обзор литературы, раздел 3.1 и заключения подготовлены совместно Иваненко Ольгой и Шаяхметовой Дианой. Раздел 3.2 подготовлен Шаяхметовой Дианой, раздел 3.3 – Иваненко Ольгой.

2 Модель с ограниченным доверием. Обзор основных понятий и результатов

В 2000 году была опубликована статья У. Краузе [1], в которой была определена модель формирования консенсуса в группе экспертов. Экспертам необходимо сформировать совместную оценку некоторой величины. Каждый эксперт в начальный момент уже сформировал свое мнение относительно этой оценки, но затем стартует процесс коммуникации, эксперты обладают информацией о мнениях всех участников экспертной группы и обновляют свое мнение с учетом этой информации. Автор изучает вопрос, при каких условиях эксперты придут к консенсусу относительно оценки значения указанной величины. В работе была сформулирована модель с ограниченным доверием, в которой эксперты при обновлении мнений учитывали только те мнения, которые не сильно отличались от их собственного. Приведем формальную постановку задачи. Имеется группа из n экспертов (или агентов), $x_i(t)$ мнение агента i в момент времени t (в основном, рассматривают нормированные значения мнений $x_i(t) \in [0,1]$). Мнения агентов в момент времени t формируют профиль мнений $x(t)$. Преполагается, что у каждого эксперта (агента) имеется уровень толерантности или уровень доверия ε_i . Тогда на агента i оказывают влияние мнения только тех агентов, которые попали в область его доверия

$$\mathcal{N}_i(t) = \{j : |x_j(t) - x_i(t)| \leq \varepsilon_i\}, \varepsilon_i \in (0, 1]$$

В дальнейшем мы полагаем, что $\varepsilon_i = \varepsilon$.

Алгоритм обновления мнений имеет следующий вид: мнение агента усредняется по мнениям всех его соседей (включая его самого)

$$x_i(t+1) = \frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} x_j(t), \quad (1)$$

В работе [1] были доказаны необходимые и достаточные условия сходимости профиля к консенсусу. Эти условия достаточно сильные, сложно проверяемые, например, необходимое условие состояло в том, что если консенсус достигается, то профиль мнений в любой момент представляет собой ε -профиль, то есть, расстояние между любой соседней парой мнений в ряду упорядоченных мнений не более радиуса доверия. Также доказано, что это условие (ε -профиль в любой момент времени) является достаточным условием сходимости профиля к консенсусу, если число агентов не более 4. Для 5 агентов приведен пример, когда это не так.

Заметим, что указанная работа содержала аналитические результаты для предложенной модели с ограниченным доверием. Тем не менее, она была известна небольшому кругу участников, а широкую известность получила после выхода совместной работы У.Краузе и Р. Хегсельмана в 2002 году [2]. В этой работе помимо уже приведенных аналитических результатов содержалось большое число результатов компьютерного моделирования

и анализ этих результатов. В [2] помимо вопросов формирования консенсуса, большое внимание уделено анализу формирования кластеров, количества кластеров, скорости их формирования, размеров кластеров и т.д. Компьютерное моделирование до сих пор играет важную роль в изучении моделей с ограниченным доверием, позволяя выявлять интересные эффекты, устанавливать свойства, для которых формальные доказательства не получены до сих пор.

Для модели Хегельмана-Краузе, в отличие от многих других моделей динамики мнений, справедливо утверждение: для любого начального профиля $x(0)$ система попадает в неподвижную точку системы (говорят, что профиль "замерзает") за конечное число шагов. В работах [3], [4] было доказано, что время заморозки имеет порядок $O(n^3)$. Казалось бы, что время заморозки должно уменьшаться с ростом радиуса доверия ε , так как агенты используют больше информации, тем не менее, результаты моделирования показали, что время заморозки не является монотонным относительно параметра ε .

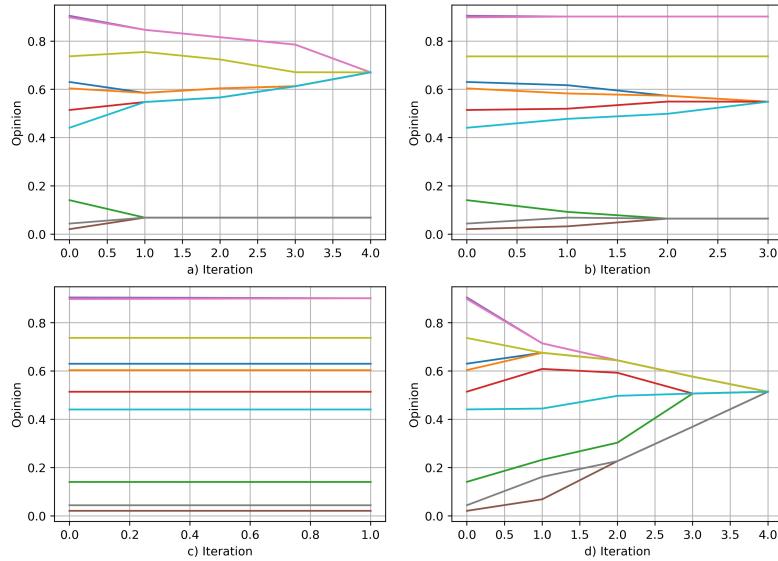


Рис. 1: Траектории классической модели Н-К. 10 агентов; $x_i(0) \sim U(0,1)$; радиус доверия
a) $\varepsilon = 0.2$ b) $\varepsilon = 0.1$ c) $\varepsilon = 0.01$ d) $\varepsilon = 0.4$

Рис. 1 демонстрирует, что количество кластеров влияет радиус доверия. С увеличением радиуса доверия количество кластеров уменьшается в силу увеличения количества взаимодействий между агентами и наоборот.

В модели Хегельмана-Краузе алгоритм изменения мнений является детерминированным при заданном начальном профиле, и когда система достигает неподвижной точки, процесс останавливается. Однако, в реальном мире мнения людей подвергаются изменению вследствие внешнего влияния, которое может интерпретироваться, как реклама, социальные сети, различные социальные взаимодействия и т.д. Поэтому в дальнейшем появились работы, в которых вводились различные стохастические варианты модели

Хегельмана-Краузе ([6], [7], [11]). Например, в работе [6] рассмотрена модель с аддитивным белым шумом:

$$x_i(t+1) = \Pi_{[0,1]} \left(\frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} x_j(t) + \xi_i(t) \right),$$

где $\Pi_{[0,1]}$ - проекция на $[0,1]$,

$$\Pi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 1 \\ x, & \text{если } x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$\xi_i(t)$ – независимые случайные величины с ограниченным носителем, $\xi_i(t) \in [-\eta, \eta]$, $\eta > 0$.

Для модели такого типа необходимо определять новые понятия, такие, например, как квазиконсенсус. Так как, даже если система в некоторый момент времени достигнет консенсуса, то в следующий момент времени, благодаря влиянию внешнего шума, консенсус разрушится. Под квазисинхронизацией понимается следующее.

Определение. Обозначим

$$d_V(t) = \max_{i,j} |x_i(t) - x_j(t)| \text{ и } d_V = \limsup_{t \rightarrow \infty} d_V(t)$$

1. Если $d_V \leq \varepsilon$, то говорят, что система *приходит к квазиконсенсусу*;
2. Если $P\{d_V \leq \varepsilon\} = 1$, то говорят, что система *достигает квазиконсенсуса почти наверное*;
3. Если $P\{d_V \leq \varepsilon\} = 0$, то говорят, что система *не придет к квазиконсенсусу почти наверное*;
4. Пусть $T = \min\{t : d_V(t') \leq \varepsilon \forall t' \geq t\}$. Если $P\{T < \infty\} = 1$, то говорят, что система *достигнет квазиконсенсуса за конечное время почти наверное*.

Для данной модели было доказано, что существует критическое значение величины шума η : при уровне внешнего влияния ниже критического модель сходится к квазиконсенсусу за конечное время, а при уровне шума выше критического значения сходимости нет.

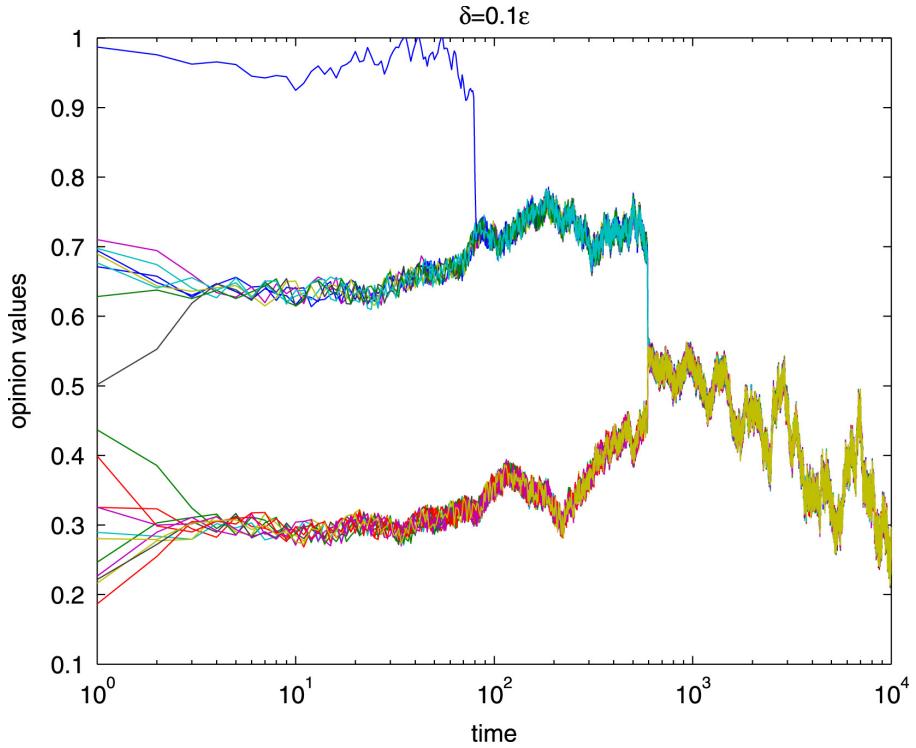


Рис. 2: Пример траекторий модели с внешним влиянием. 20 агентов, радиус доверия $\varepsilon = 0.2$, уровень шума $\eta = 0.1\varepsilon$

В работе [11] рассмотрена неоднородная модель Н-К с коммуникационным шумом:

$$x_i(t+1) = \Pi_{[0,1]} \left(\frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} [x_j(t) + \zeta_{ji}(t)] \right) \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ и } t \geq 0,$$

где $\Pi_{[0,1]}(\cdot)$ обозначает проекцию на отрезок $[0, 1]$, $\zeta_{ji}(t) \in [-\eta, \eta]$, $\eta > 0$, $\eta = const$ — коммуникационный шум при передаче информации от агента j агенту i в момент времени t и $\zeta_{ii}(t) \equiv 0$.

Для модели с коммуникационным шумом было показано, что неоднородный случай демонстрирует иное поведение в отношении квазиконсенсуса в отличие от однородного случая. Повышение уровня доверия у агентов может нарушить квазиконсенсус. Показано, что неоднородность агентов негативно действует на достижение консенсуса, что может объяснить проблемы достижения консенсуса мнений даже в рамках небольшой группы.

В работе [8] рассмотрен другой тип случайных воздействий на динамику мнений. В работе предполагается, что в каждый момент времени t случайно выбранный агент i с вероятностью m спонтанно изменяет свое мнение на любое мнение из отрезка $[0,1]$ и с вероятностью $1 - m$ изменяет свое мнение на среднее арифметическое мнений своих соседей, то есть, действует по классическому алгоритму Н-К. Случай $m = 0$ соответствует правилам классической модели Хегельмана-Краузе [2].

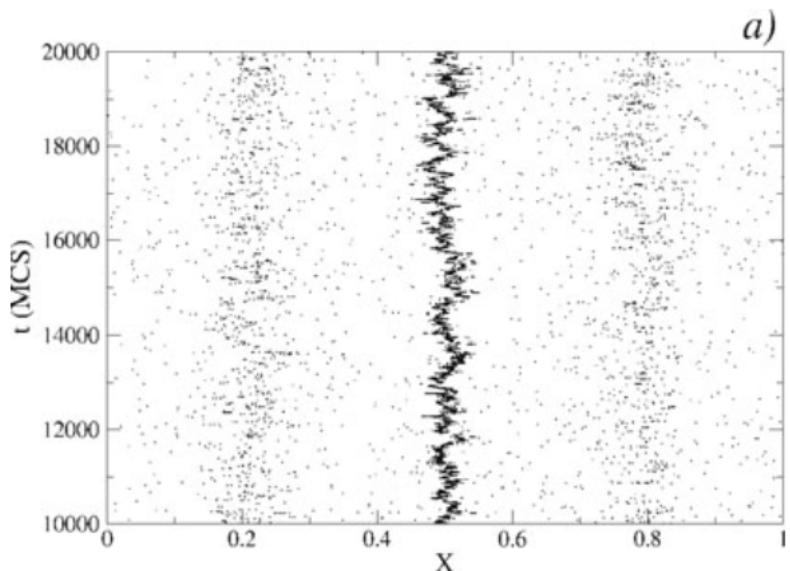


Рис. 3: Пример [8] траекторий модели с неограниченными случайными скачками. 100 агентов, $m = 0,02$.

Результаты компьютерного моделирования выявили наличие интересного феномена в данной модели, которое не наблюдается в модели без шума: при больших значениях радиуса доверия ($\varepsilon = 0.27$) имеется устойчивое состояние - образуется один большой кластер (который доминирует над малыми кластерами), при малых значениях радиуса доверия ($\varepsilon = 0.23$) устойчивое состояние другое — мнения поляризуются (два больших кластера), а при промежуточном значении радиуса доверия ($\varepsilon = 0.242$) система случайно прыгает между этими двумя устойчивыми состояниями. При $\varepsilon = 0.2127$ образуется три больших кластера и несколько кластеров с малой численностью.

В данной работе мы изучим 2 модели с ограниченным доверием и с внешним влиянием. Новизна этих моделей состоит в том, что случайное внешнее влияние является несимметричным. Именно, мы рассмотрим модель с двумя аддитивными шумами, один из которых имеет носитель в правой половине интервала мнений, а второй в левой половине, что соответствует присутствию, как положительного влияния на мнения, так и отрицательного. Во второй модели мы допускаем спонтанные изменения мнений, но не на всем интервале $[0,1]$, а только в одной из половин. Задачи исследования состоят в том, чтобы сформулировать свойства данных моделей, выявить их особенности, которые могут объяснять явления, наблюдаемые в каких-либо ситуациях. Данные модели могут быть полезны при изучении процессов формирования мнений в некоторых социальных группах.

3 Постановки задач и основные результаты

3.1 Модель с ограниченным доверием со случайными скачками в область положительного влияния

В данном разделе мы изучаем модель, которая близка к модели [8], отличие заключается в том, что мы разрешаем агенту менять свое мнение не совсем спонтанно, а на некоторое значение из заданного полуинтервала. Для первой из моделей в качестве такого полуинтервала мы рассматриваем $[\frac{1}{2}, 1]$ и интерпретируем это как влияние рекламы или некоторого источника информации.

Рассматриваем группу n взаимодействующих агентов, обозначаем $x_i(t) \in [0, 1], i = \overline{1, n}$, — мнение агента i в момент времени t . Пусть $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ — профиль мнений в момент времени t : $\vec{x}(t) \in [0, 1]^n$.

Мнения агентов меняются согласно алгоритму:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} \xi_i(t+1) \sim U(\frac{1}{2}, 1), & \text{если } \eta_i(t+1) = 1 \\ \frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} x_j(t), & \text{если } \eta_i(t+1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

где $\eta_i(t)$ — независимые случайные величины с распределением Бернулли

$$\eta_i(t) = \begin{cases} 1, \text{ с вероятностью } \mu \\ 0, \text{ с вероятностью } 1 - \mu \end{cases}$$

Алгоритм (2) можно записать в следующей форме:

$$x_i(t+1) = \frac{(1 - \eta_i(t+1))}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} x_j(t) + \eta_i(t+1) \xi_i(t+1)$$

или $\vec{x}(t+1) = \Phi(\vec{x}(t), \vec{\zeta}(t+1))$, где $\vec{\zeta}(t) = (\vec{\eta}(t), \vec{\xi}(t))$.

Для построенной модели мы выявили следующие свойства.

Утверждение 1. Случайный процесс $\vec{x}(t)$ является марковским процессом с дискретным временем и непрерывным множеством состояний.

Данное утверждение легко следует из теоремы о виде марковского процесса ([5])

Утверждение 2. Подмножество $S = [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1] \times \dots \times [\frac{1}{2}, 1] = [\frac{1}{2}, 1]^n$ является замкнутым (поглощающим) относительно динамики случайного процесса $\vec{x}(t)$, то есть $\Phi(S, \vec{\zeta}(t)) \subset S$.

Данное утверждение легко следует из свойств динамики Хегельмана-Краузе: если все мнения не менее 0.5, то среднее арифметическое также не менее 0.5, скачки также допускаются только в интервал $[\frac{1}{2}, 1]$, следовательно, профиль, попав в множество S уже не сможет из него выйти.

Рассмотрим случайную величину T_a — момент первого попадания профиля мнений $x(t)$ в поглощающее множество $S = [\frac{1}{2}, 1]^n$:

$$T_a = \inf \left\{ t : x_j(t) \geq \frac{1}{2} \forall j = \overline{1, n} \right\}$$

T_a - случайная величина, принимающая неотрицательные значения.

Утверждение 3. Распределение с.в. T_a является собственным, т.е. с вероятностью 1 с.в. T_a конечна.

Утверждение 3 имеет место в силу того, что случайная величина T_a доминируется некоторой случайной величиной, которая имеет геометрическое распределение с вероятностью успеха $p = \mu^n$.

Доказательство. Очевидно, что если в какой-то момент времени t мнения всех агентов изменятся случайно, т.е. $\eta_i(t+1) = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$, то $T_a \leq t+1$.

Будем следить за первым моментом, когда $\eta_i(t+1) = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Назовем это событие успехом. Тогда вероятность успеха $p = \mu^n$. Рассмотрим серию независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Определим случайную величину θ - номер первого успешного испытания. Тогда $\theta \sim Geom(p)$.

Очевидно, что для всех исходов выполняется следующее: $T_a \leq \theta$, следовательно,

$$P\{T_a \geq b\} \leq P\{\theta \geq b\} \Rightarrow \sum_{b=1}^{\infty} P\{T_a < b\} \geq \sum_{b=1}^{\infty} P\{\theta < b\}$$

Отсюда имеем

$$P\{T_a < \infty\} \geq P\{\theta < \infty\} = 1$$

Утверждение 3 доказано.

Заметим, что распределение с.в. T_a зависит от параметров модели: начального профиля, вероятности скачка μ , радиуса доверия.

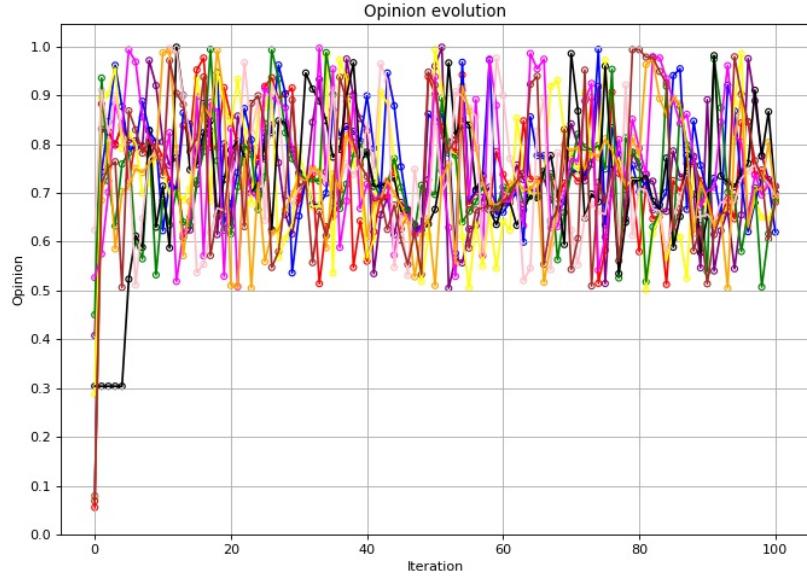


Рис. 4: Пример изменения мнений в модели 1. $n = 10$ агентов; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; вероятность скачка (параметр случайности) $\mu = 0.5$;

Влияние параметров задачи на время попадания в поглощающее множество

Рассмотрим зависимость характеристик времени T_a до попадания всей группы агентов в поглощающее множество от двух различных параметров ε и μ . Напомним, что ε характеризует локальность взаимодействий в группе агентов, тогда как μ — это вероятность агента изменить свое мнение случайным образом (параметр шума в модели).

На Рис. 5 приведена гистограмма T_a для группы из 10 агентов, радиус доверия $\varepsilon = 0.2$, параметр шума $\mu = 0.5$. Мы наблюдаем, что распределение несимметрично, имеет достаточно длинный хвост.

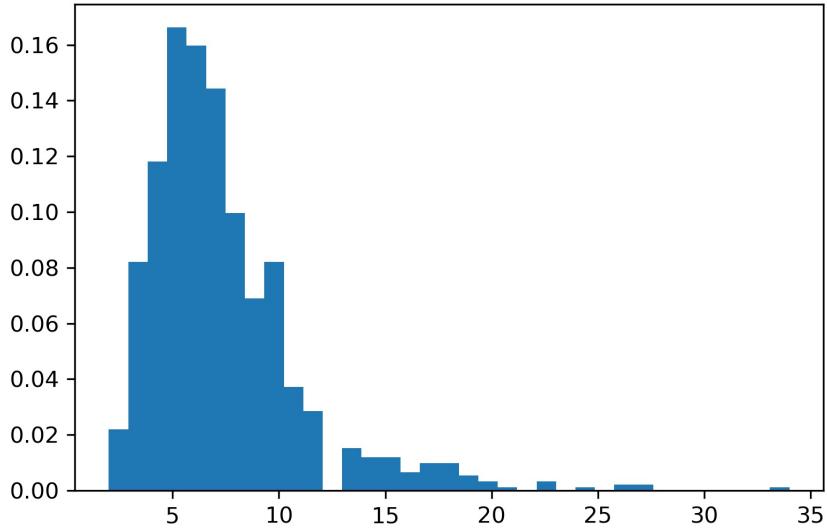


Рис. 5: Гистограмма времени T_a первого попадания профиля мнений в поглощающее множество для модели с ограниченным доверием со случайными скачками. 10 агентов; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; параметр случайности $\mu = 0.5$

Выявить характер функции распределения с.в. T_a нам пока не удалось (вероятно, аналитические результаты получить тут пока нет возможности), поэтому проанализировали среднее время до поглощения (т.е. математическое ожидание T_a).

1. Рассмотрим зависимость среднего значения этой случайной величины от параметра μ при фиксированном ε . (Всюду далее приведены результаты, вычисленные по 100 реализациям). Для нас, кроме того, представляет интерес влияние и начального профиля: мы рассмотрим две ситуации:

- начальные мнения агентов равномерно распределены в интервале $[0,1]$, т.е. взята группа, равномерно однородная по отношению к вопросу, т.е. нет смещений в мнениях на начальном этапе;
- начальные мнения равномерно распределены в нижнем полуинтервале $[0, \frac{1}{2}]$, что может быть интерпретировано как преобладание отрицательного отношения к вопросу обсуждения.

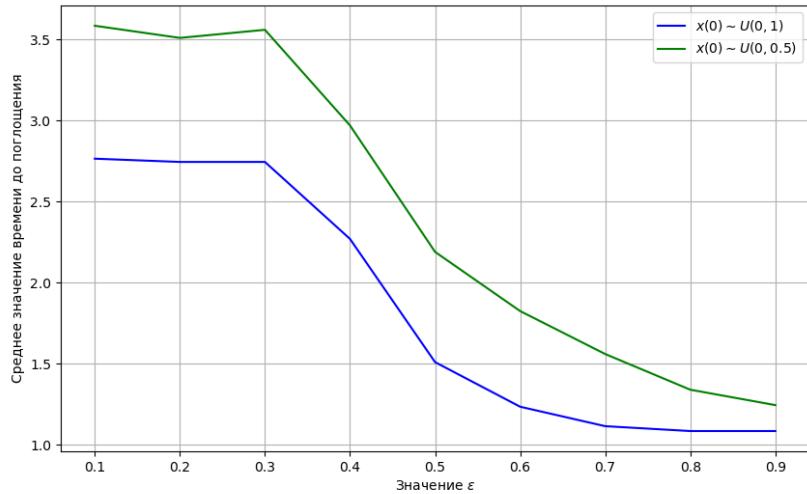


Рис. 6: Зависимость среднего значения времени до поглощения T_a от параметра ε при $\mu = 0.5$. $n = 10$

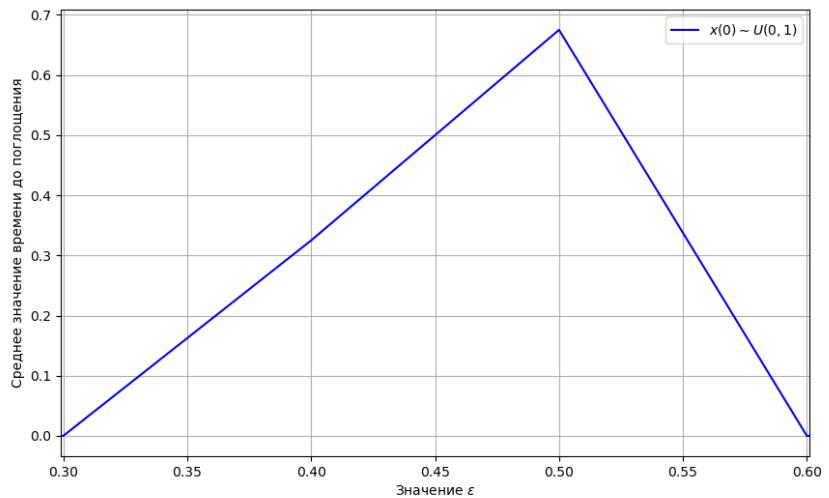


Рис. 7: Зависимость среднего значения времени до поглощения T_a от параметра ε при $\mu = 0.0001$. $n = 10$;

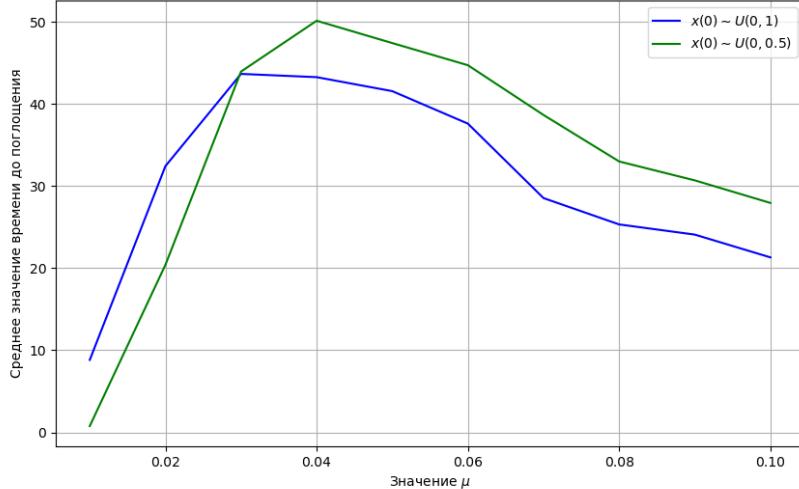


Рис. 8: Зависимость среднего значения времени до поглощения T_a от параметра $\mu \in [0.01, 0.1]$, при $\varepsilon = 0.2$. $n = 10$

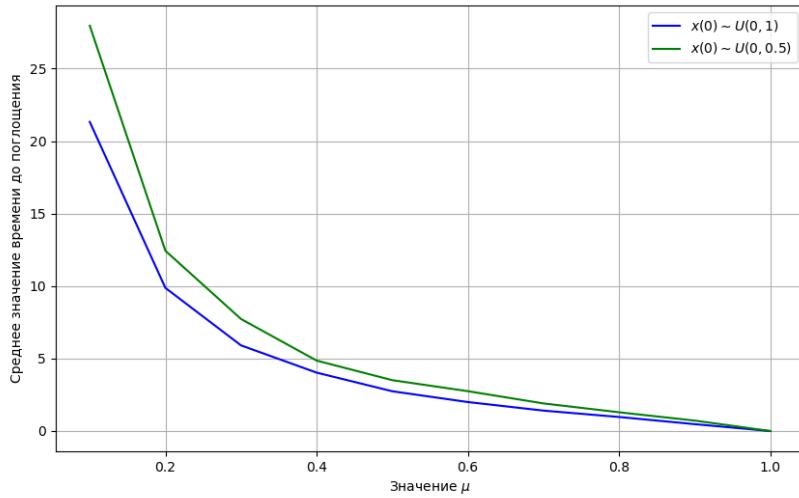


Рис. 9: Зависимость среднего значения времени до поглощения T_a от параметра $\mu \in [0.1, 1.0]$ при уровне доверие $\varepsilon = 0.2$. $n = 10$

Проанализируем результаты моделирования, приведенные на Рис. (6), (7), (8) и (9). Можно сделать вывод об общей тенденции к снижению среднего времени до поглощения с ростом μ и ε , при больших значениях μ ($\mu \in [0.1, 1.0]$ в первом случае и фиксированном значении $\mu = 0.5$ во втором случае). Для меньших значений μ наблюдается иная картина: на рис (7), при $\mu = 0.0001$ наблюдается пик в окрестности значений 0.3 – 0.6 по ε . Отметим, что при иных значениях ε попадение в поглощающее множество не происходит в силу ограниченности времени рассмотрения динамики. Отметим, что подобные пики (отсутствие монотонности по параметру ε) наблюдаются и в классической модели Хегельмана-Краузе. Данный эффект подробно изучался в работе [17]. Наличие пика мож-

но объяснить следующим, что при увеличении ε с одной стороны увеличивается область доверия и агент усредняет мнение по большему числу соседей, уменьшая время до заморозки, с другой стороны на каждом этапе большее число агентов меняют свои позиции, что увеличивает время до заморозки. При некоторых значениях ε эти две тенденции проявляются по-разному, и происходит возрастание среднего времени до поглощения, несмотря на увеличение радиуса доверия.

При рассмотрении зависимости среднего значения времени до поглощения от параметра μ при малых значениях параметра $\mu \in [0.1, 1.0]$ мы также наблюдаем пик в области $[0.02, 0.06]$ по μ .

В случае фиксированного уровня доверия очевидно, что с ростом вероятности скачка в положительную область мнений $[\frac{1}{2}, 1]$ агентам будет нужно меньше времени до поглощения, причем убывание происходит почти экспоненциально.

3.2 Модель с ограниченным доверием со случайными скачками двух типов

В предыдущем разделе мы рассмотрели модель, в которой агент мог спонтанно менять свое мнение на мнение из правого (верхнего) полуинтервала $[0.5, 1]$, что можно объяснить, как периодическое влияние рекламы или какого-то источника информации. В данном разделе мы добавим скачки двух типов в верхний полуинтервал и нижний полуинтервал, моделируя таким образом наличие двух противоположных источников влияния. Как и в предыдущей модели, параметр μ отвечает за скачки мнений, если скачок происходит, то доля скачков "вверх" равна β_1 , доля скачков "вниз" равна β_2 .

Формализация выглядит следующим образом:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} \xi_i(t), & \text{если } \eta_i(t) = 1 \\ \frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} x_j(t), & \text{если } \eta_i(t) = 0 \end{cases}$$

где $\eta_i(t)$ — независимые случайные величины с распределением Бернулли

$$\eta_i(t) = \begin{cases} 1, \text{ с вероятностью } \mu \\ 0, \text{ с вероятностью } 1 - \mu \end{cases}$$

Если мнение агента меняется скачкообразно, то:

$$\xi_i(t) = \begin{cases} \sim U(0, \frac{1}{2}), \text{ если } \gamma_i(t) = -1 \\ \sim U(\frac{1}{2}, 1), \text{ если } \gamma_i(t) = +1 \end{cases}$$

где $\gamma_i(t)$ — независимые случайные величины

$$\gamma_i(t) = \begin{cases} +1, \text{ с вероятностью } \beta_1 \\ -1, \text{ с вероятностью } \beta_2 \end{cases}$$

Здесь β_1 и β_2 можно воспринимать как влияние положительной и отрицательной рекламы соответственно ($\beta_1 + \beta_2 = 1$).

Для случайного процесса $\vec{x}(t)$ верно Утверждение 1 предыдущего раздела, а именно: $\vec{x}(t)$ является марковским процессом с дискретным временем и непрерывным множеством состояний. Однако в данной модели поглощающего множества уже нет в силу того, что скачки происходят в различные интервалы.

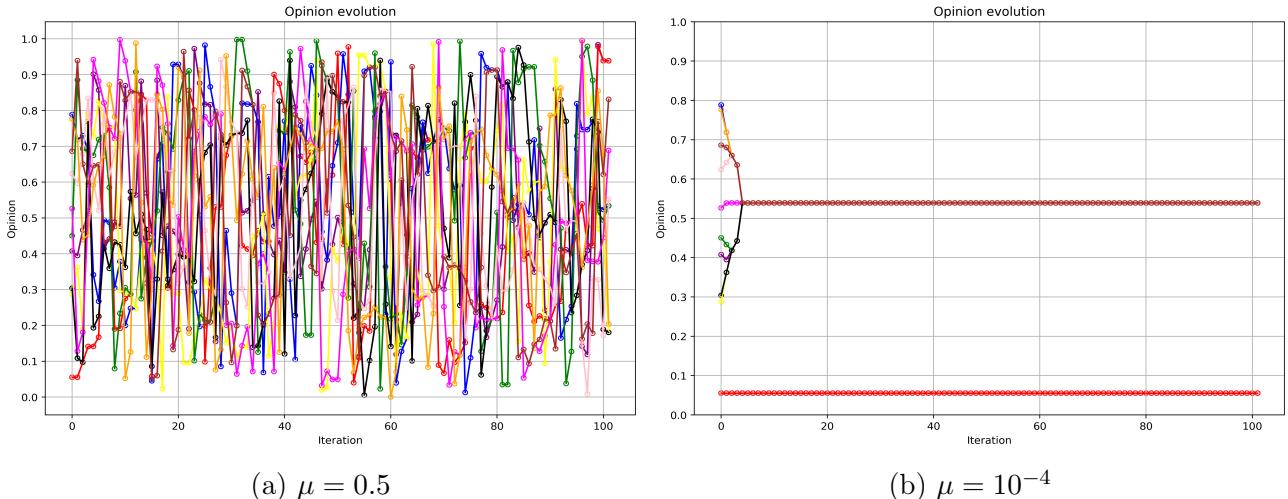
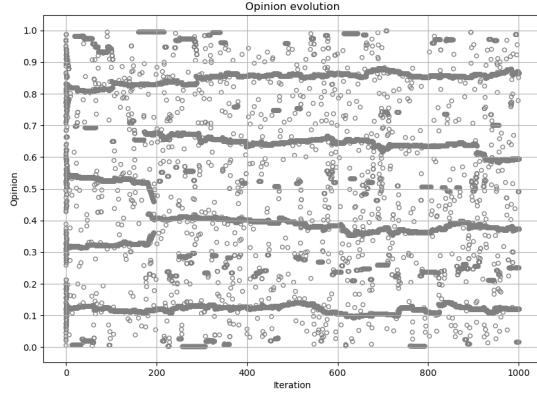


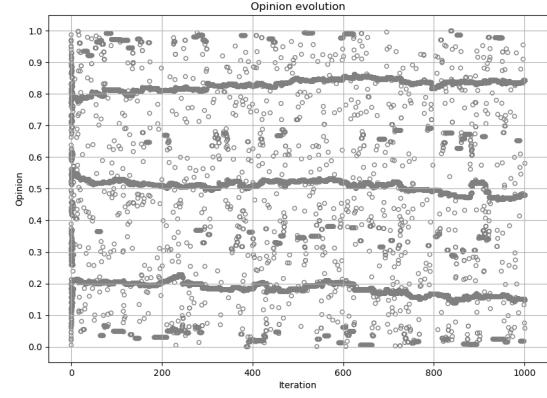
Рис. 10: Эволюция конфигурации в модели с двумя типами скачков. Число агентов $n = 10$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; параметры внешнего влияния $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$

Сравнение поведения модели с результатами для модели [8] с ограниченным доверием со случайными скачками только одного из агентов

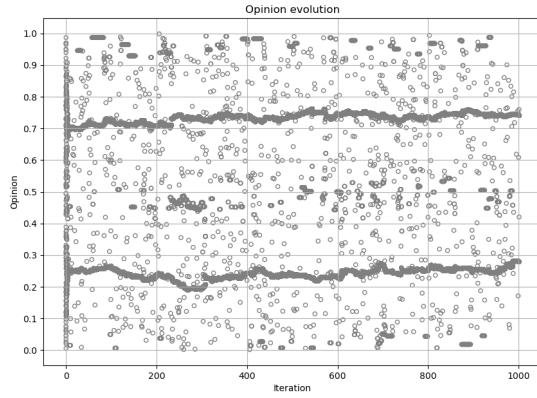
Проанализируем поведение изучаемой модели динамики мнений на больших временах. Рассмотрим следующие значения радиуса доверия: $\varepsilon = 0.1, 0.13, 0.2, 0.4$.



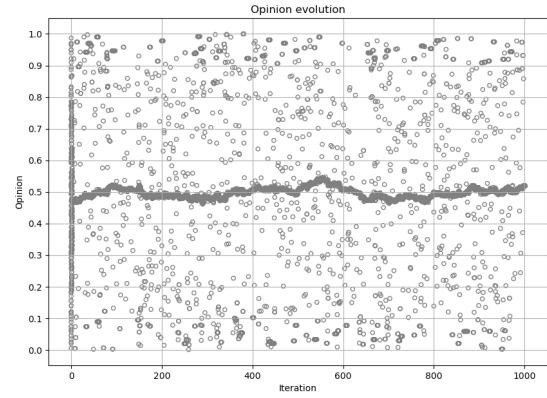
(a) $\varepsilon = 0.1$



(b) $\varepsilon = 0.13$



(c) $\varepsilon = 0.2$



(d) $\varepsilon = 0.4$

Рис. 11: Эволюция конфигурации. Число агентов $n = 100$; $\mu = 0.01$; $\beta_1 = 0.5$

Мы наблюдаем уменьшение числа кластеров с ростом радиуса доверия, как и в классической модели с детерминированной динамикой. Отметим, что наличие случайности в динамике в изучаемой модели влияет на существование малых кластеров, которые отсутствуют в классической модели Хегельмана-Краузе. Полученный результат согласуется с аналогичным результатом, отмеченным в модели с ограниченным доверием, в которой в каждый момент времени случайно выбирался один агент, который с вероятностью μ менял свое мнение спонтанно, и с вероятностью $1 - \mu$ обновлял свое мнение по алгоритму Хегельмана-Краузе.

Заметим, что в рассматриваемой нами модели в каждый момент времени в среднем $n\mu$ агентов могут спонтанно изменить свое мнение, а в описанной выше модели среднее число агентов, спонтанно меняющих свое мнение в некоторый момент времени равно μ , т.е. в n раз меньше.

Однако, можем заметить явление (см. Рис. 12), которое также наблюдали в работе [8]. При некотором значении радиуса доверия (в нашем случае около 0.24) кластеры не являются стабильными. В [8] наблюдали периодическую смену конфигурации с двумя кластерами и конфигурации с одним кластером. В нашем случае феномен не так четко

выражен, по видимому, надо подбирать точнее соотношение параметров в задаче для того, чтобы поймать аналогичный эффект и здесь.

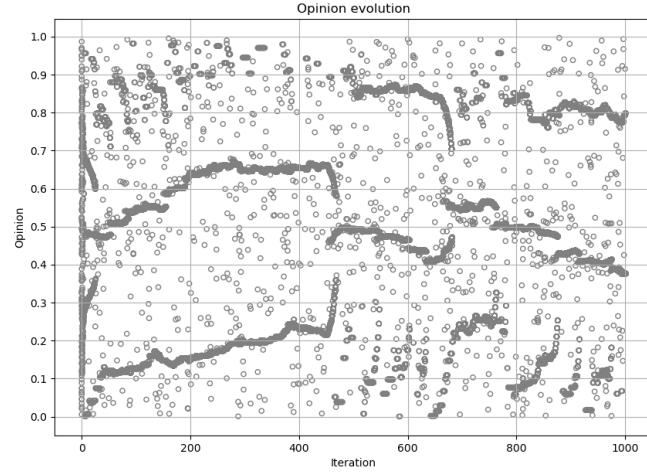


Рис. 12: Эволюция конфигурации, $n = 100$ агентов, $\varepsilon = 0.24$, $\mu = 0.01$, $\beta_1 = 0.5$

Уменьшим вероятность скачка так, что теперь $\mu = 0.001$. Теперь для нас представляют интерес меньшие значения ε . Посмотрим какие визуализации траекторий мы получим в этом случае:

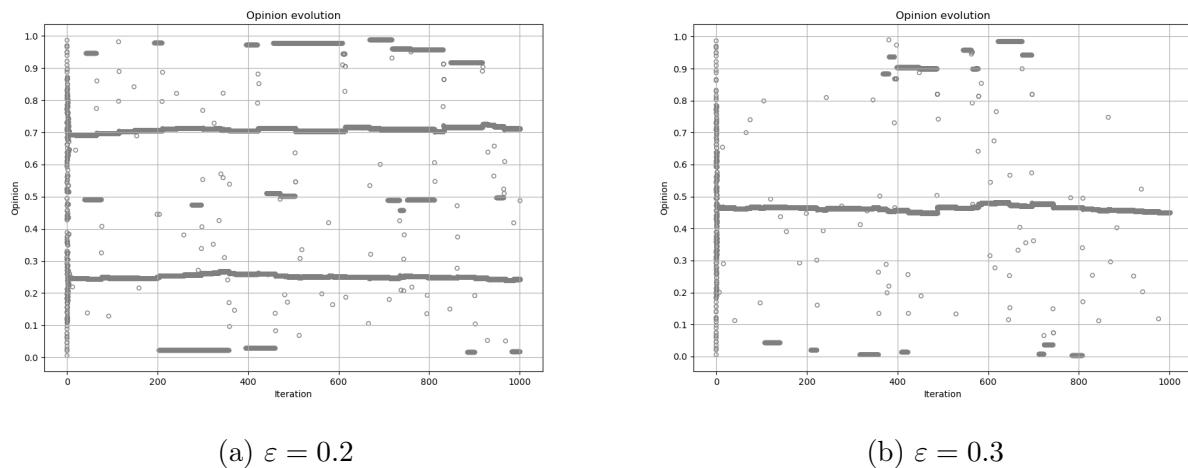


Рис. 13: Эволюция конфигурации. Число агентов $n = 100$; $\mu = 0.001$; $\beta_1 = 0.5$

Уменьшим вероятность скачка еще и получим, что теперь $\mu = 0.0001$. Визуализации траекторий:

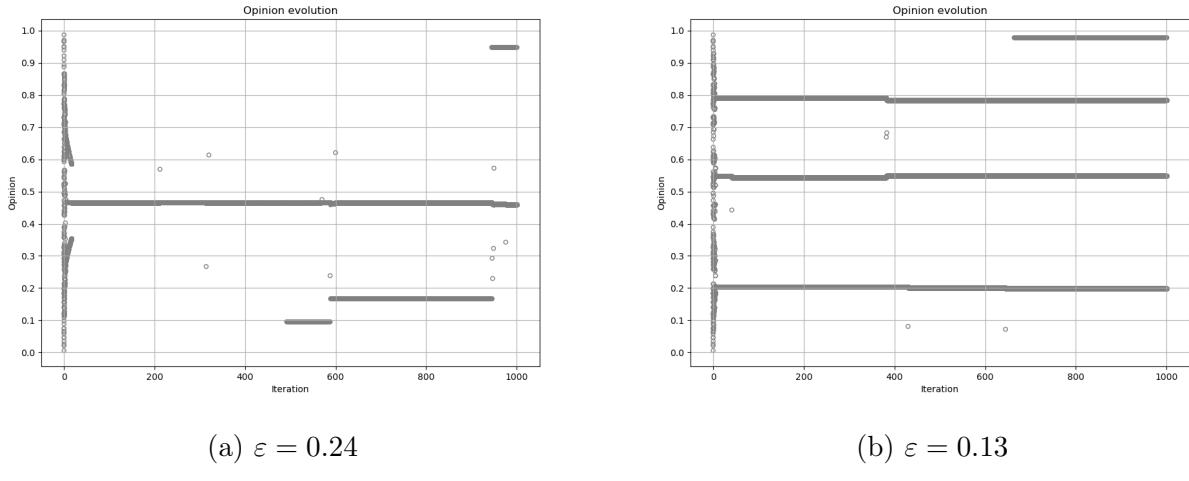


Рис. 14: Эволюция конфигурации. Число агентов $n = 100$; $\mu = 0.0001$; $\beta_1 = 0.5$

Анализ зависимости характеристик процесса от параметров модели

Предположим, что нас интересуют агенты с положительным отношением к данному вопросу, т.е., те, чье мнение не менее 0.5. Изучим вопрос, какие параметры задачи влияют на численность данной группы агентов.

Определим случайный процесс

$$\varkappa(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{x_j(t) \geq 0.5\}}$$

Заметим, что скалярный случайный процесс $\varkappa(t)$ есть функция от исходного векторного случайного процесса $x(t)$, который является марковским. Однако $\varkappa(t)$ уже не является марковским процессом.

Наша задача – выявить, какими свойствами обладает этот процесс на основе анализа результатов компьютерного моделирования.

В данном разделе мы проанализируем влияние соотношения вероятностей β_1 и β_2 скачков вверх и вниз соответственно при фиксированной вероятности скачка μ на поведение среднего значения с.в. $\varkappa(t)$. Результаты моделирования приведены на Рис. 15, 16, 17. В каждом случае средние значения вычислялись по 500 реализациям. С целью изучения влияния положительного и отрицательного внешнего воздействия, было рассмотрено 500 реализаций (траекторий) при различных значениях параметров шума β_1 и $\beta_2 = 1 - \beta_1$ и по ним было найдено среднее значение доли агентов в моменты времени t с мнениями из интервала $[\frac{1}{2}, 1]$.

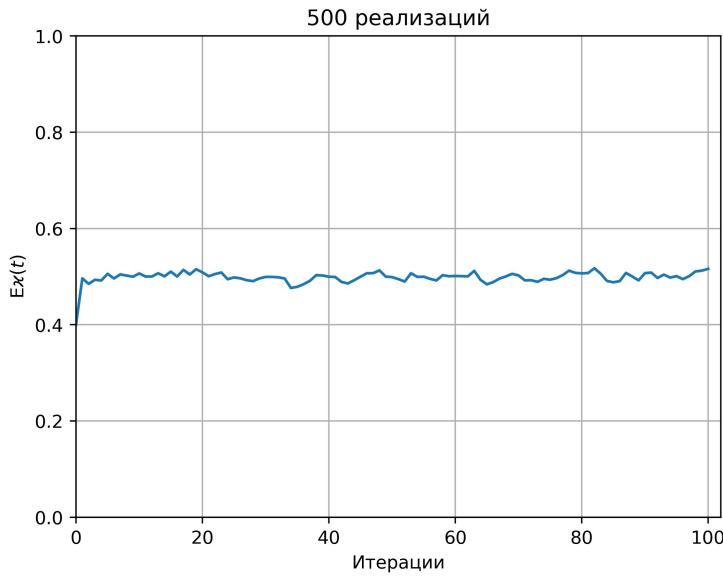


Рис. 15: Среднее значение доли агентов в момент времени t с мнениями выше 0.5 (т.е. оценка $E\varkappa(t)$). Число агентов $n = 100$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; $\mu = 0.5$, параметры $\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.5$

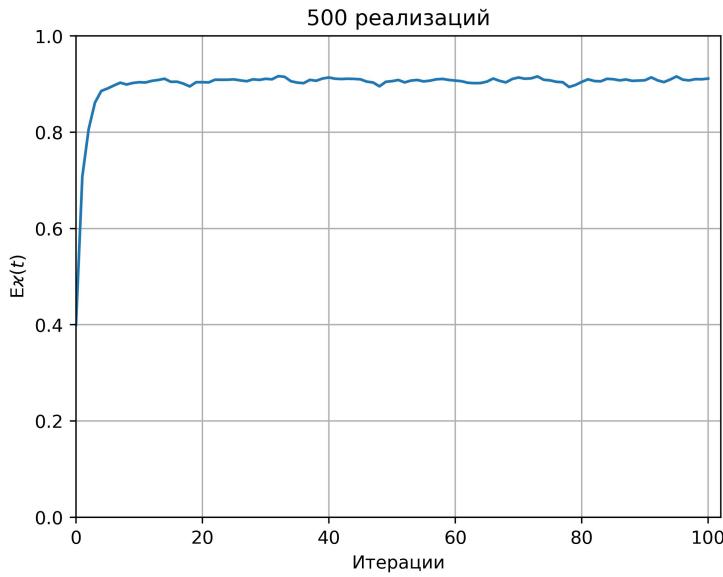


Рис. 16: Среднее значение доли агентов в момент времени t с мнениями выше 0.5. Число агентов $n = 100$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; $\mu = 0.5$, параметры шума $\beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.1$;

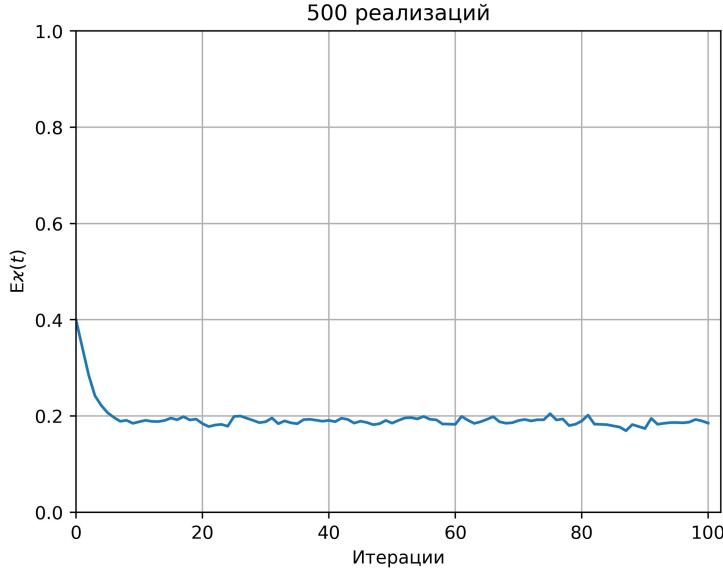


Рис. 17: Среднее значение доли агентов в момент времени t с мнениями выше 0.5. Количество агентов $n = 100$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; $\mu = 0.5$, параметры шума $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.8$.

Анализ результатов компьютерного моделирования, отображенных на Рис. 15, 16, 17 привел к следующим выводам:

1. При $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$ среднее значение доли агентов, находящихся в интервале $[0.5, 1]$ стремится к 0.5. Это означает, что приблизительно половина от всех агентов находятся выше заданного уровня, то есть настроены положительно, в то время как остальные агенты — отрицательно. Данный эффект возникает из-за равенства параметров шума.
2. При $\beta_1 > \beta_2$ больше половины агентов настроены положительно. В случае $\beta_1 < \beta_2$ больше половины агентов настроены отрицательно.

Для модели со случайными скачками в области положительной и отрицательной рекламы была также проанализирована зависимость среднего числа средней доли агентов, полученной при 500 реализациях траектории, от вероятности скачка в положительную область мнений $[0.5, 1]$.

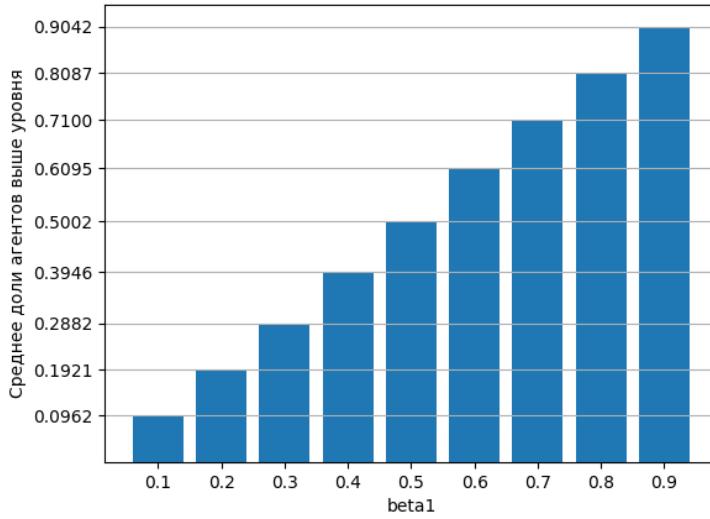


Рис. 18: Зависимость средней доли агентов с мнениями выше 0.5, от параметра β_1 , $\mu = 0.5$, 500 реализаций

Как показывают результаты моделирования, зависимость средней доли агентов, от параметра β_1 прямо пропорциональная и примерно равна вероятности β_1 . Вид графика и зависимость не меняется при вариации значений вероятности скачка (кроме граничных значений интервала $[0,1]$), что доказывает отсутствие влияния параметра μ на среднюю долю агентов, находящихся выше заданного уровня.

Асимптотическая нормальность сечений случайного процесса $\varkappa(t)$

На основе визуального анализа результатов моделирования (Рис. 15, 16, 17), сформировано предположение о том, что сечения случайного процесса $\varkappa(t)$ асимптотически нормальны.

Гипотезу проверим несколькими способами. Начнем с простого — правила трех сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

В нашем случае правило трех сигм выполняется, что дает нам основание предполагать, что случайная величина распределена нормально.

Построим эмпирическую и теоретическую функции распределения (параметры вычислены по выборке). Рис. 19 демонстрирует хорошее приближение теоретической функции эмпирической функцией.

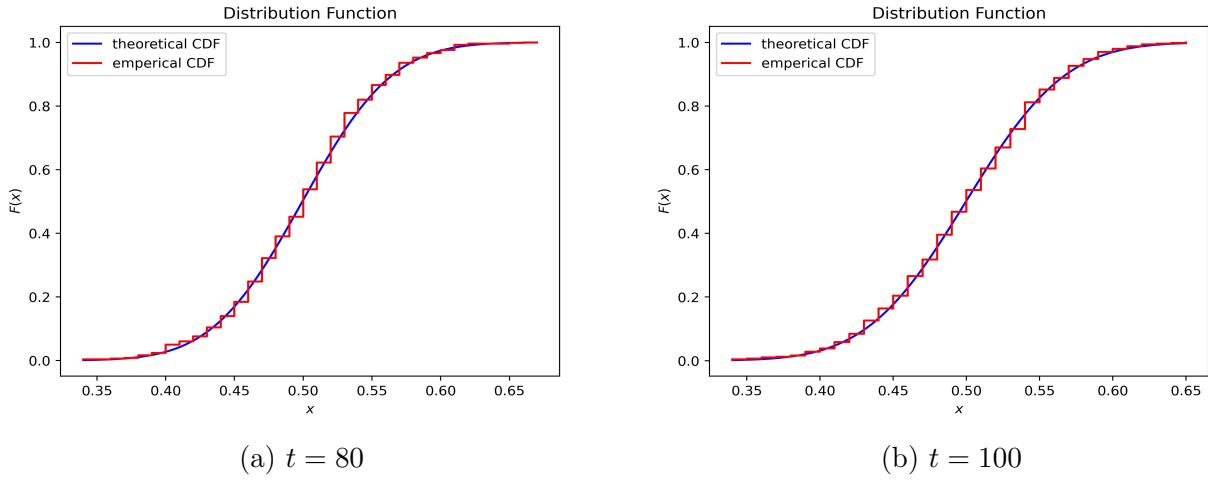


Рис. 19: Функция распределения нормального закона с параметрами $a = 0.5$ и $\sigma = 0.053$ и эмпирическая функция распределения с.в. $\varkappa(t)$. Параметры модели: $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.5$

Второй наглядный способ — диаграмма квантиль-квантиль. Она позволяет визуально сравнить выборочное распределение с теоретическим.

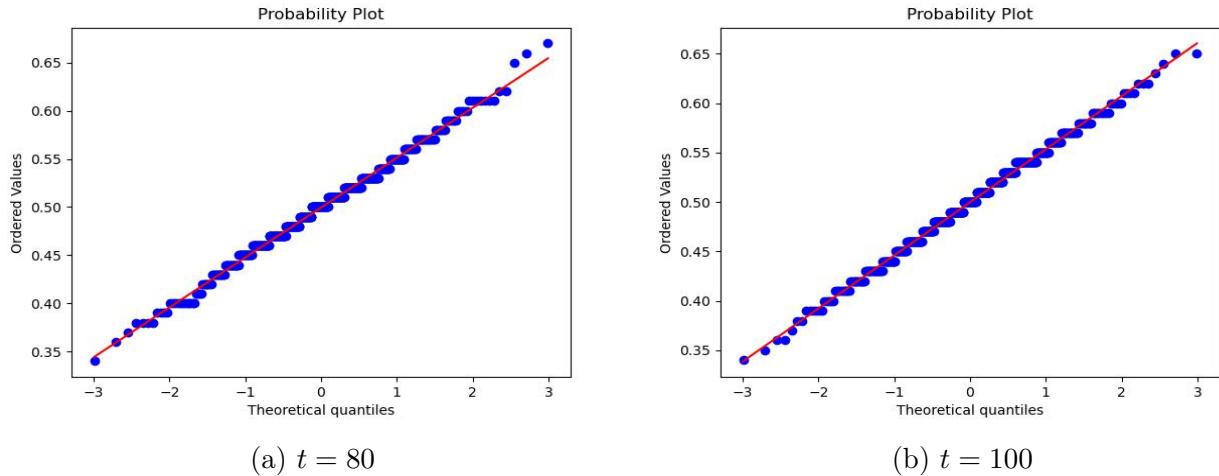


Рис. 20: Квантиль-квантиль

На Рис. 20 по оси абсцисс определены значения из теоретического нормального распределения, а по оси ординат отложены квантили из наших выборок. Как можно заметить, почти все наши наблюдения укладываются на диагонали, что может свидетельствовать о близости распределения выборок к нормальному.

Третий способ — применение критерия Колмогорова-Смирнова. Зададим уровень значимости $\alpha = 0.05$, где:

H_0 : распределение является нормальным

H_1 : распределение не является нормальным

По теореме Колмогорова для статистики $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$, где $\hat{F}_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, $F(x)$ — функция нормального распределения, должно

быть выполнено

$$\forall t > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n}D_n \leq t) = K(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2t^2},$$

где $K(t)$ — распределение Колмогорова.

Согласно критерию согласия Колмогорова: если $n \geq 20$ и уровень значимости α , значение λ_α находится из уравнения $K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$, то гипотеза H_0 отвергается тогда и только тогда, когда $\sqrt{n}D_n \geq \lambda_\alpha$.

Получили, что со значением статистики Колмогорова $D_n = 0.0543$ и вероятностью p-value = 0.1008 для момента времени $t = 80$ мы не отвергаем нулевую гипотезу по критерию Колмогорова-Смирнова. Для случая $t = 100$ статистика Колмогорова принимает значение $D_n = 0.0477$ и с вероятностью p-value = 0.1988 нулевая гипотеза также не отвергается.

Анализ плотности распределения мнений

Для нас представляет интерес такая характеристика, как плотность распределения мнений. Разобьем отрезок допустимых значений мнений $[0,1]$ агентов на N частей. Получим N интервалов:

$$\Delta_1 = \left[0, \frac{1}{N}\right), \Delta_2 = \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right), \dots, \Delta_N = \left[\frac{N-1}{N}, 1\right]$$

Вычислим число агентов, мнения которых в момент времени t попали в j -ый интервал. Обозначим данную величину $\rho_k(t)$

$$\rho_k(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{x_j(t) \in \Delta_k\}}, \quad k = 1, \dots, N$$

Нормируем все ρ_k , поделив на длину интервала: $\tilde{\rho}_k(t) = \frac{\rho_k(t)}{\frac{1}{N}}$

Посмотрим на ρ_k при фиксированных значениях t . В начале возьмем $t = 200$ и затем постепенно будем увеличивать t . Для сбора статистики возьмем $n = 100$, $\mu = 0.01$, параметры шума $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$; $N = 20$ и рассмотрим два случая $\varepsilon = 0.2$ и $\varepsilon = 0.27$.

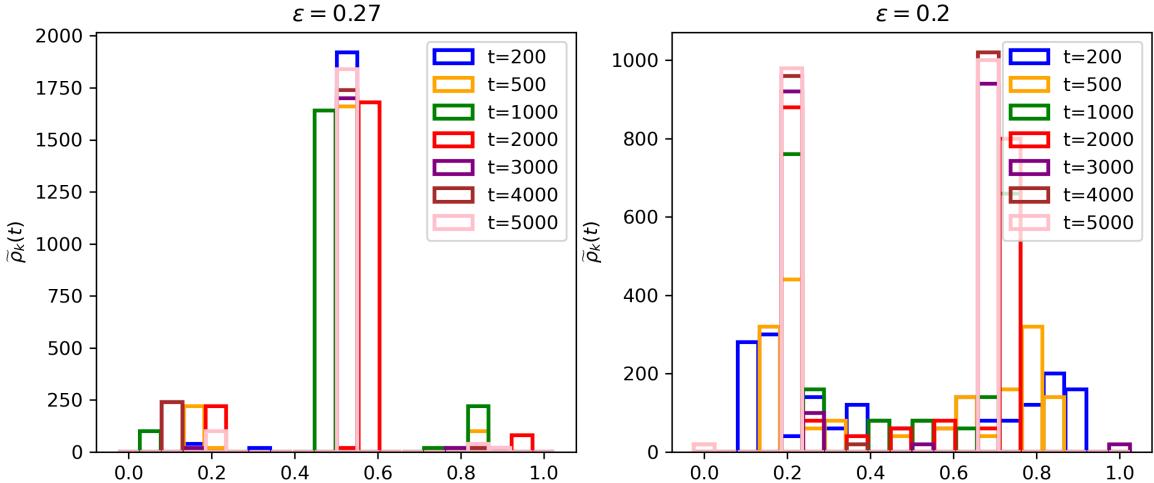


Рис. 21: Плотность распределения мнений

Из Рис. 21 можно заключить, что с ростом значения ε все большая часть мнений оказывается в интервале $[0.4, 0.6]$ при любых значениях времени. С уменьшением уровня доверия происходит разделение мнений на кластеры и их количество уменьшается с увеличением времени. Так, при достаточно больших t (прим. $t = 5000$) примерно половина агентов находится в положительной области, другая половина - в отрицательной.

Влияние распределения начальных мнений на эволюцию профиля мнений

В данном разделе мы рассмотрим отличное от равномерного распределение начальных мнений агентов. В работе [18] также изучалось влияние начального распределения мнений на динамику мнений в модели Деффуанта. В данной модели предполагается, что взаимодействует случайно выбранная пара, если их мнения оказались близкими друг другу. В модели Деффуанта динамика случайна, в отличие от модели Хегельмана-Краузе, поэтому профиль мнений можно рассматривать также как марковский процесс. В [18] показано, что для каждого n существует пороговое значение ε_n^* радиуса доверия, такое что при ε , больших данного порогового значения, мнения всех агентов с вероятностью 1 сходятся к единому мнению (консенсусу), которое совпадает с математическим ожиданием начального распределения (при условии, что у начального распределения конечный второй момент). Авторы объясняют таким образом эффект начального впечатления: начальное впечатление определяет формирование группового мнения.

Далее мы покажем, что в нашей стохастической модели такого эффекта нет.

Будем рассматривать класс Бета-распределений: $x_j(0) \sim B(\alpha, \beta)$. Будем изучать поведение траектории случайного процесса и изменение доли агентов, находящихся выше заданного уровня при разных параметрах Бета-закона.

- 1) $E[x(0)] \rightarrow 0;$

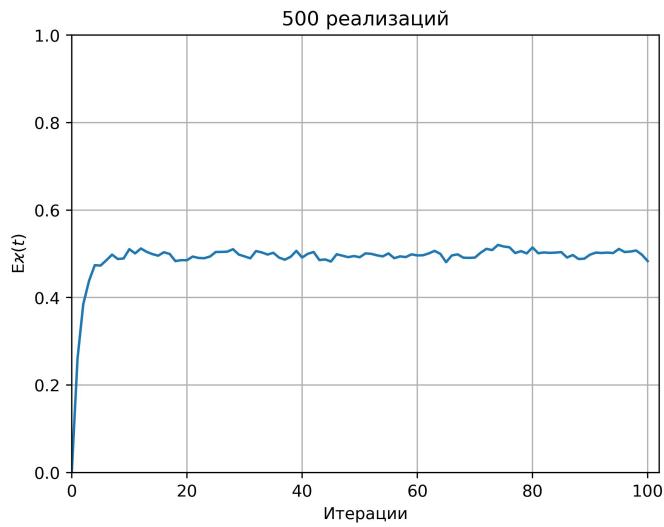


Рис. 22: График $E\xi(t)$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$. Параметры Бета-закона: $\alpha = 1$, $\beta = 100$

2) $E[x(0)] \rightarrow 1$;

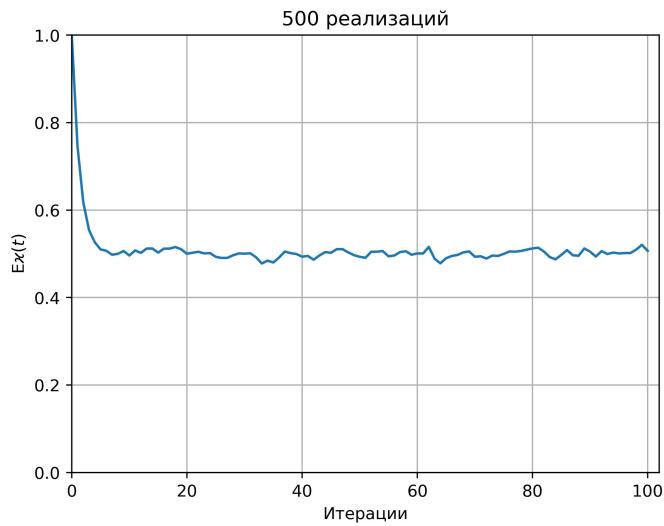


Рис. 23: График $E\xi(t)$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$. Параметры Бета-закона: $\alpha = 1000$, $\beta = 0.0001$

3) параметры Бета-распределения равны $\alpha = \beta$.

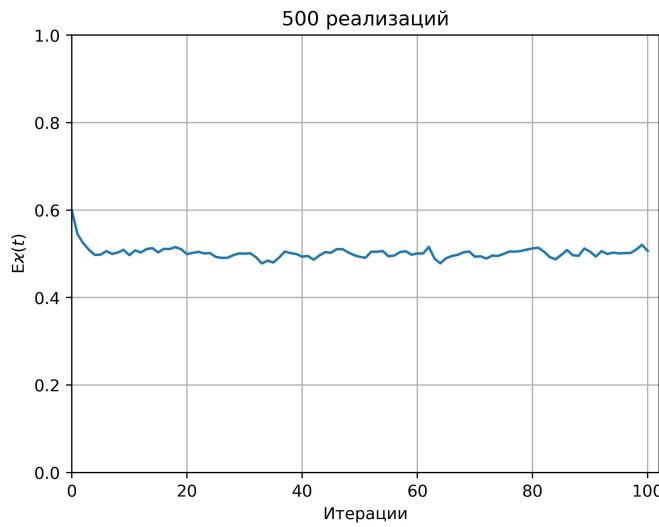


Рис. 24: График $Ex(t)$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$. Параметры Бета-закона: $\alpha = 2$, $\beta = 2$

Таким образом, результаты моделирования позволяют нам заключить, что начальное распределение мнений не влияет на поведение профиля на больших временах. Такое поведение характерно для эргодических систем.

3.3 Модель с ограниченным доверием с аддитивным шумом

Основное предположение модели заключается в том, что каждый агент (независимо от других) подвержен случайному влиянию при обновлении своего мнения. Это влияние может быть вызвано различными факторами, такими как непредсказуемые события, реклама или социальные сети. Мнения агентов изменяются согласно формуле:

$$x_i(t+1) = \frac{\alpha^0}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} x_j(t) + \alpha^1 \xi_i^1(t) + \alpha^2 \xi_i^2(t)$$

где $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2 \in [0, 1]$, $\alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 = 1$, $\alpha^1, \alpha^2 \in [0, 1]$ – интенсивности внешнего влияния (параметры шума), $\xi_i^1(t) \sim U(0, \frac{1}{2})$, $\xi_i^2(t) \sim U(\frac{1}{2}, 1)$ – независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $(0, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, 1)$ соответственно, $t \in [0, t_{\max}]$.

В данной модели случайные величины ξ_i^1 и ξ_i^2 задают "отрицательное" и "положительное" влияние окружающей среды соответственно. Их можно рассматривать также, как влияние двух конкурирующих источников информации.

Можно доказать (аналогично доказательству для модели, описанной в разделе 3.1), что профиль мнений в данной модели также является марковским случайным процессом с дискретным временем и непрерывным пространством состояний.

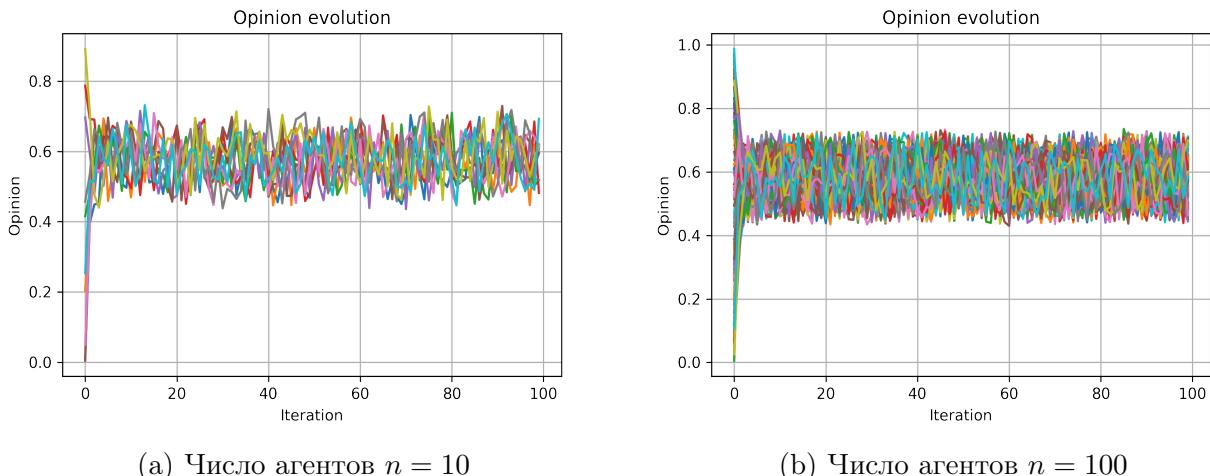


Рис. 25: Пример эволюции конфигурации в модели с аддитивным шумом.
 $x_i(0) \sim U(0,1)$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; $\alpha^0 = 0.4$, $\alpha^1 = 0.2$, $\alpha^2 = 0.4$

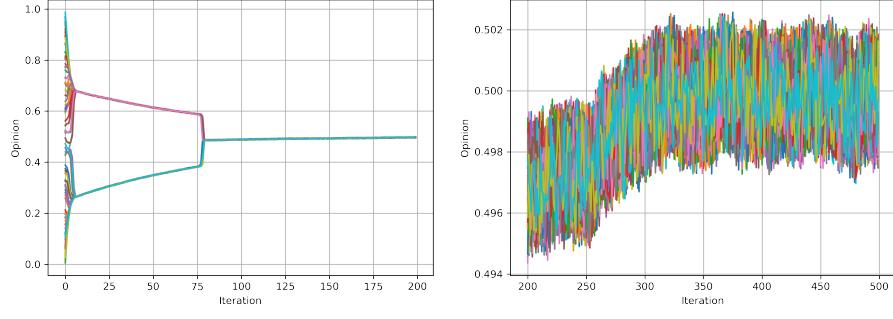


Рис. 26: Эволюция конфигурации в модели с аддитивным шумом. Количество агентов $n = 100$; $x_i(0) \sim U(0, 1)$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; параметры шума $\alpha^1 = \alpha^2 = 0.005$

На Рис. 25 и Рис. 26 приведены примеры динамики профиля мнений для радиуса доверия $\varepsilon = 0.2$, для разных интенсивностей внешних влияний. Отметим, что в отличие от модели, рассмотренной в разделах 3.1-3.2, мы наблюдаем один квазикластер, флуктуирующий во времени, напоминающий движение стаи.

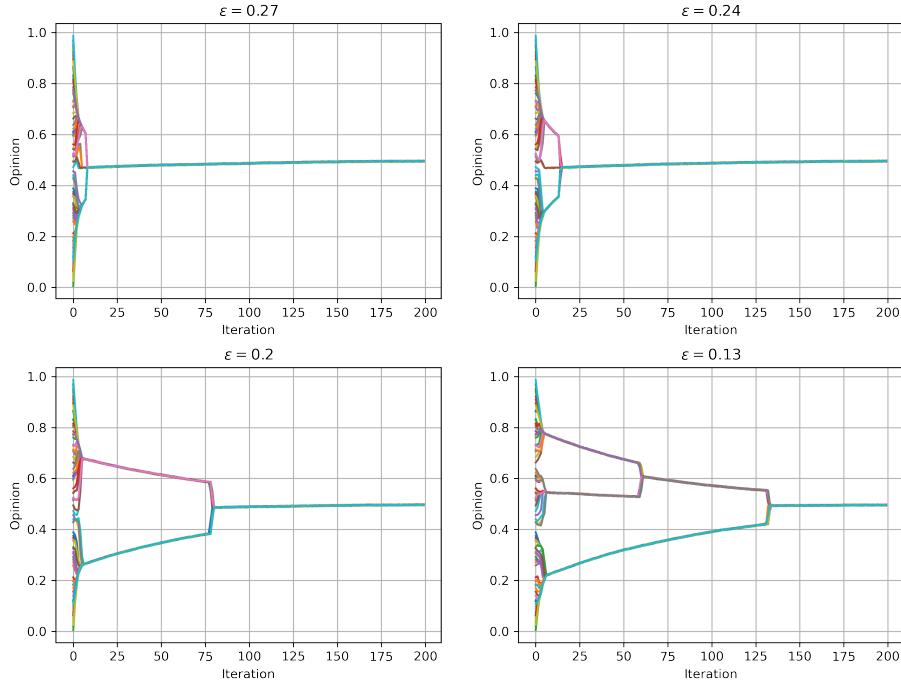


Рис. 27: Эволюция конфигурации в модели с аддитивным шумом для разных значений ε . Число агентов $n = 100$; $x_i(0) \sim U(0, 1)$; $\alpha^0 = 0.99$, $\alpha^1 = \alpha^2 = 0.005$

Результаты моделирования нам демонстрируют, что разные типы скачков перемешивают мнения агентов и образуется некоторая устойчивая группа мнений, которая, конечно, не дает консенсуса, однако уменьшает начальный разброс мнений. Для данной задачи имеется много случайных объектов, характеристики которых интересно изучать, в следующем

разделе мы рассмотрим один из таких объектов, часто встречающийся в литературе.

Анализ доли агентов с мнениями из заданной области

Предположим, что нас интересуют агенты с положительным отношением к данному вопросу, т.е., те, чье мнение не менее 0.5. Изучим вопрос, какие параметры задачи влияют на численность данной группы агентов. Определим случайный процесс

$$\varkappa(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{x_j(t) \geq 0.5\}}$$

Заметим, что скалярный случайный процесс $\varkappa(t)$ есть функция от исходного векторного случайного процесса $x(t)$, который является марковским. Однако $\varkappa(t)$ уже не является марковским процессом.

Наша задача – выявить, какими свойствами обладает этот процесс на основе анализа результатов компьютерного моделирования.

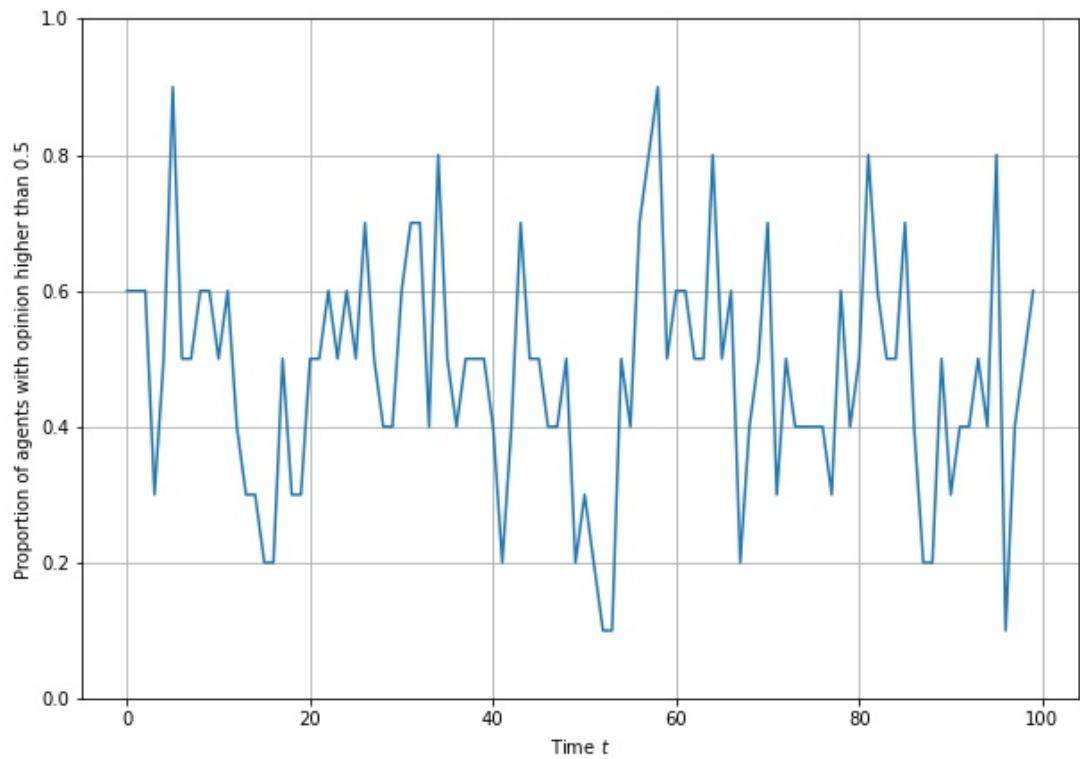


Рис. 28: Доля агентов с мнениями выше 0.5 как функция от t . Количество агентов $n = 100$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; параметры шума $\alpha^1 = 0.2, \alpha^2 = 0.4; t_{\max} = 100$

На Рис. 28 приведена одна из реализаций (траектория) случайного процесса $\varkappa(t)$.

Построим оценку $E\kappa(t)$. Для этого было смоделировано 500 траекторий случайного процесса $\kappa(t)$ и вычислено среднее по ансамблю.

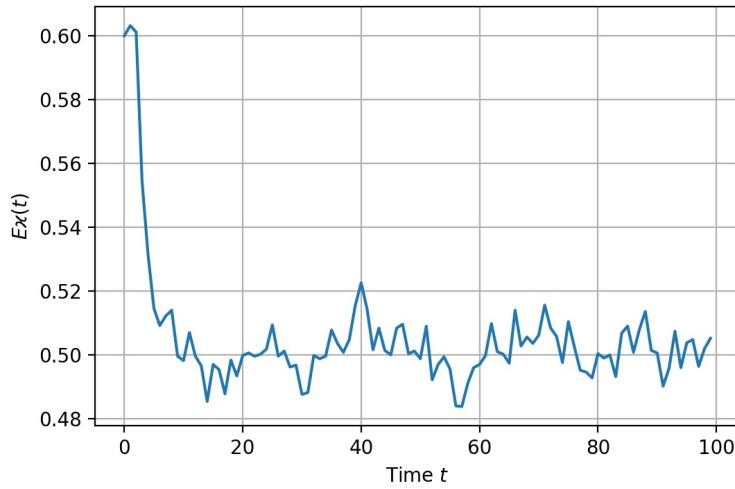


Рис. 29: Среднее значение доли агентов в момент времени t с мнениями выше 0.5. Число агентов $n = 100$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; $\alpha^0 = 0.6, \alpha^1 = 0.2, \alpha^2 = 0.2$

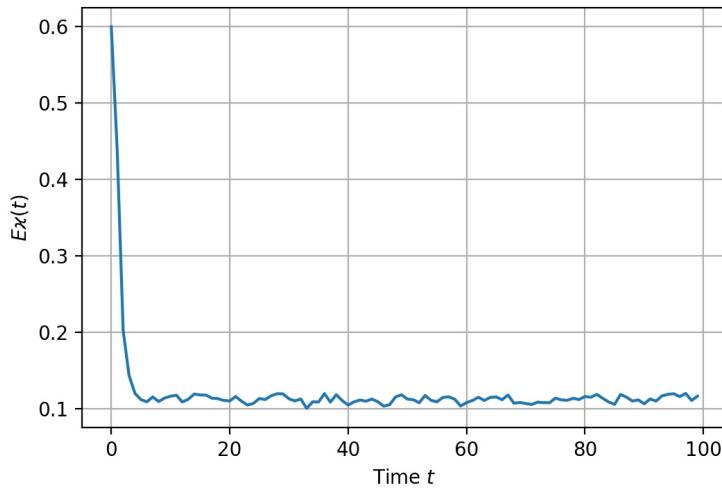


Рис. 30: Среднее значение доли агентов в момент времени t с мнениями выше 0.5. Число агентов $n = 100$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; $\alpha^0 = 0.4, \alpha^1 = 0.4, \alpha^2 = 0.2$

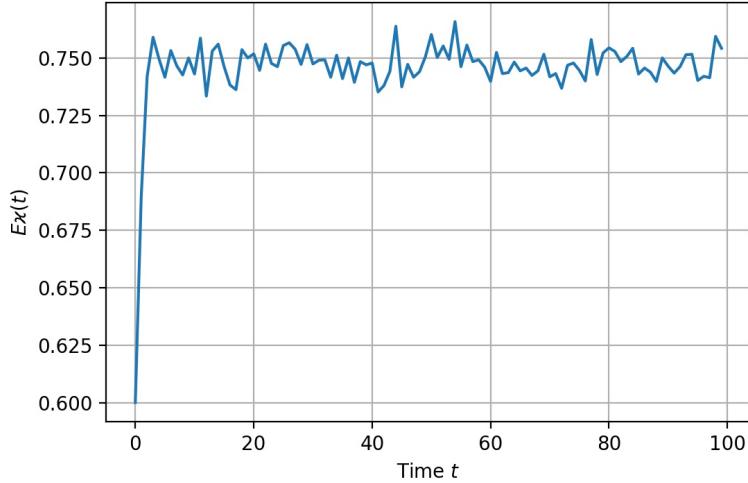


Рис. 31: Среднее значение доли агентов в момент времени t с мнениями выше 0.5. Число агентов $n = 100$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; $\alpha^0 = 0.2$, $\alpha^1 = 0.3$, $\alpha^2 = 0.5$;

Результаты моделирования приведены на Рис. 29, 30, 31. Анализ этих результатов выделяет следующие свойства модели:

1. При $\alpha^1 = \alpha^2$ доля агентов с мнениями на интервале $[0.5, 1]$ стремится к 0.5. То есть, примерно половина агентов имеют положительное мнение по данному вопросу, а половина – отрицательное. Заметим, что в классической модели Хегсельмана - Краузе для начального профиля, образованного из независимых, равномерно распределенных на $[0, 1]$ мнений, если образуется консенсус, то среднее значение консенсуса равно 0.5. В нашем случае при равенстве параметров α^1 (вероятность скачка вниз) и α^2 (вероятность скачка вверх) внешнее случайное воздействие равномерно распределено на $[0, 1]$, т.е. симметрично относительно уровня 0.5.
2. С ростом параметра α^1 (вероятность скачка вниз) среднее случайного процесса $\varkappa(t)$ уменьшается, однако зависимость менее очевидная, в отличие от модели, описанной в разделе 3.2.

Асимптотическая нормальность сечений случайного процесса $\varkappa(t)$ в модели с аддитивными шумами

Проведем анализ вида распределения сечений случайного процесса $\varkappa(t)$ при разных значениях t аналогично тому, как это было сделано для модели в разделе 3.2.

Проверим гипотезу об асимптотической (на больших временах) нормальности сечений $\varkappa(t)$. Положим $n = 100$, уровень доверия $\varepsilon = 0.2$ и $\alpha^0 = 0.6$, $\alpha^1 = \alpha^2 = 0.2$. Возьмем моменты времени $t = 100$ и $t = 200$ и проведем 500 симуляций.

Сначала оценим близость эмпирической и теоретической функций графически. Построим эмпирическую и теоретическую функции распределения. Визуально (Рис. 32) ги-

гипотеза о нормальном законе распределения сечений не отвергается.

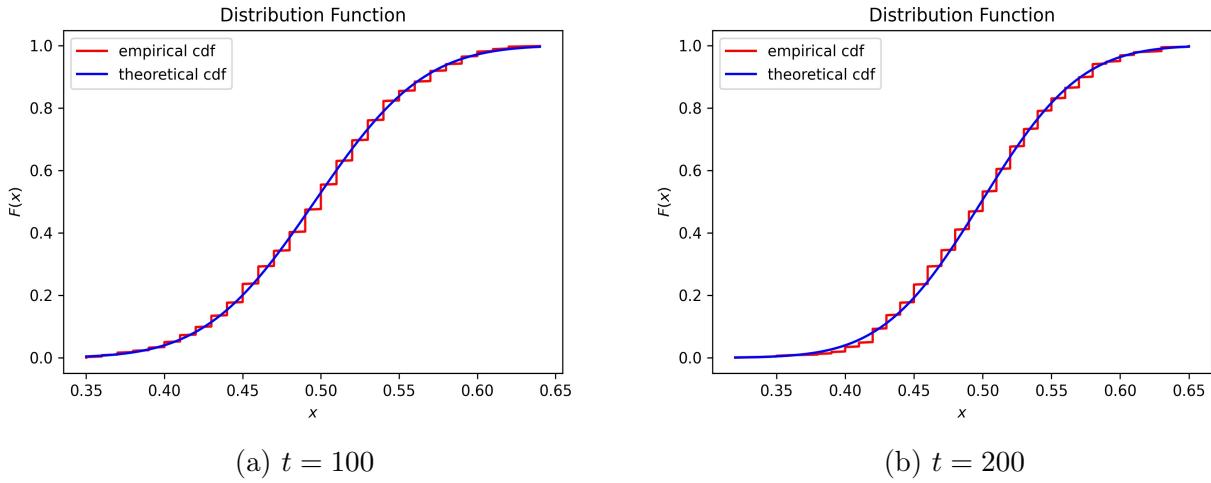


Рис. 32: Функция распределения нормального закона с параметрами $\mu = 0.5$ и $\sigma = 0.055$ и эмпирическая функция распределения с.в. $\varkappa(t)$

Для оценки степени отклонения данных от теоретического распределения можно построить график квантиль-квантиль (Рис. 33). Наблюдаем на концах некоторые отклонения.

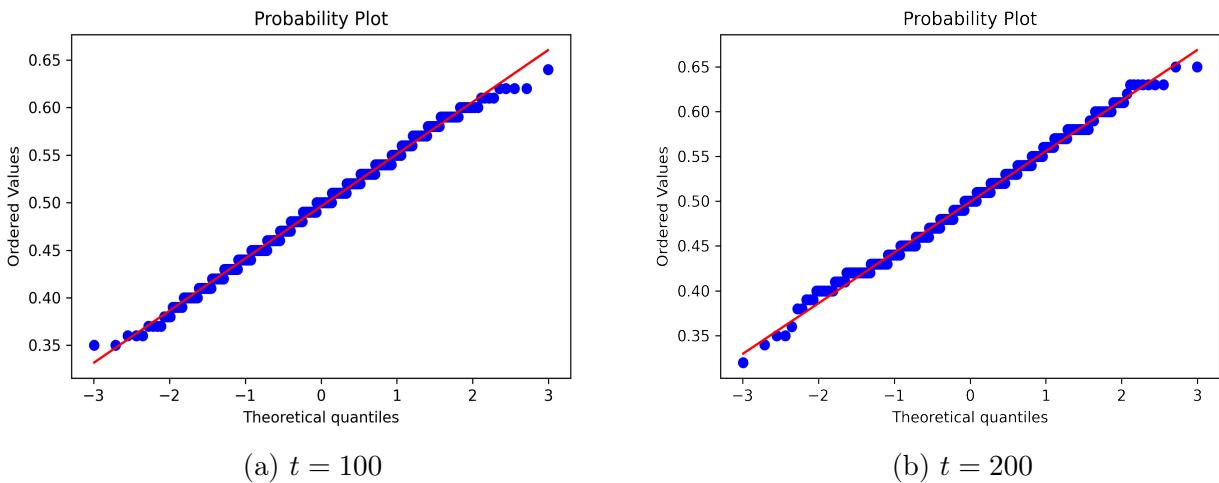


Рис. 33: Квантиль-квантиль

Сформулируем статистическую гипотезу, которую нужно проверить. Применим критерий Колмогорова-Смирнова. Зададим уровень значимости $\alpha = 0.05$

H_0 : случайная величина $\varkappa(t)$ распределена нормально с параметрами

H_1 : случайная величина $\varkappa(t)$ не распределена нормально

После проверки гипотезы тестом Колмогорова для $t = 100$ значение статистики $D_n = 0.053$ и значение p-value оказывается равным 0.118, то есть с такой вероятностью гипотеза H_0 не отвергается. Для случая $t = 200$ получаем $D_n = 0.05$, p-value = 0.158.

Также проверка гипотезы была проведена для модели с другой численностью группы агентов и различными параметрами α^1 и α^2 . Во всех случаях гипотеза H_0 не отвергалась.

Таким образом, при работе с данными можно полагать, что на больших временах они подчиняются нормальному закону.

Анализ плотности распределения мнений

Для нас представляет интерес такая характеристика, как плотность распределения мнений. Разобъем отрезок допустимых значений мнений $[0,1]$ агентов на N частей. Получим N интервалов:

$$\Delta_1 = \left[0, \frac{1}{N}\right), \Delta_2 = \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right), \dots, \Delta_N = \left[\frac{N-1}{N}, 1\right]$$

Вычислим число агентов, мнения которых в момент времени t попали в j -ый интервал. Обозначим данную величину $\rho_k(t)$

$$\rho_k(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{x_j(t) \in \Delta_k\}}, \quad k = 1, \dots, N$$

Нормируем все ρ_k , поделив на длину интервала: $\tilde{\rho}_k(t) = \frac{\rho_k(t)}{\frac{1}{N}}$

Посмотрим на ρ_k при фиксированных значениях t . В начале возьмем $t = 200$ и затем постепенно будем увеличивать t . Для сбора статистики возьмем $n = 100$, $\alpha^0 = 0.99$, параметры шума $\alpha^1 = \alpha^2 = 0.005$, $N = 20$ и рассмотрим два случая $\varepsilon = 0.2$ и $\varepsilon = 0.27$.

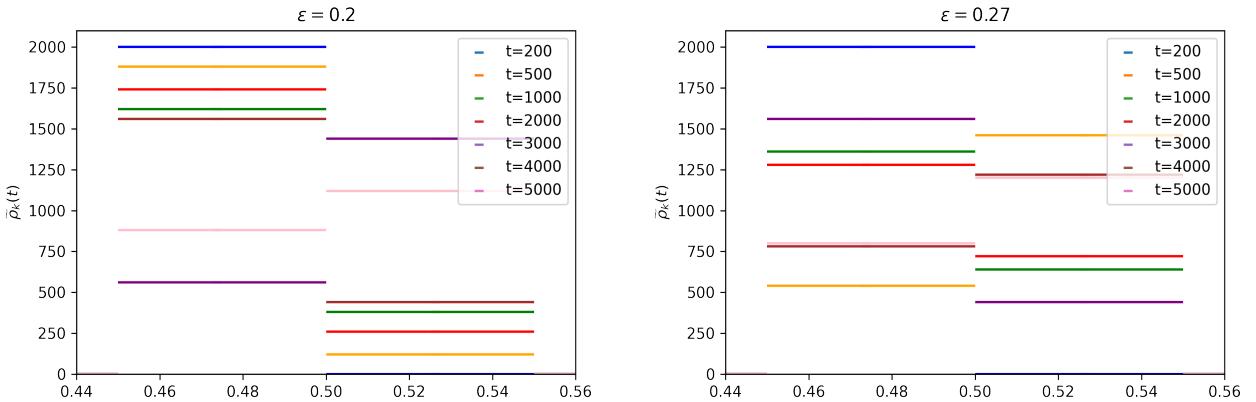


Рис. 34: Плотность распределения мнений

Из Рис. 34 можно заметить, что с увеличением времени мнения агентов стабилизируются: становится меньше доминирования положительной или отрицательной области.

Диаметр притягивающего множества

Для данной модели была выявлена особенность изменения диаметра притягивающего множества в зависимости от параметров модели. В частности представляет интерес зависимость диаметра "трубки" от коэффициента α^0 , характеризующего взаимодействие агентов согласно Хегсельмана-Краузе.

Определим средний диаметр притягивающего множества как:

$$d = \frac{1}{t_{\max}} \sum_{t=0}^{t_{\max}} \left(\max_i(x_i(t)) - \min_i(x_i(t)) \right)$$

Для сбора статистики для каждого значения $1-\alpha = 1-\alpha^1-\alpha^2$ выбирались разные α^1 и α^2 , так чтобы $\alpha^1 + \alpha^2 = \alpha$, где $\alpha \in (0, 1)$ — наперед заданная величина. Для моделирования было сделано 100 симуляций и вычислено среднее по каждой реализации.

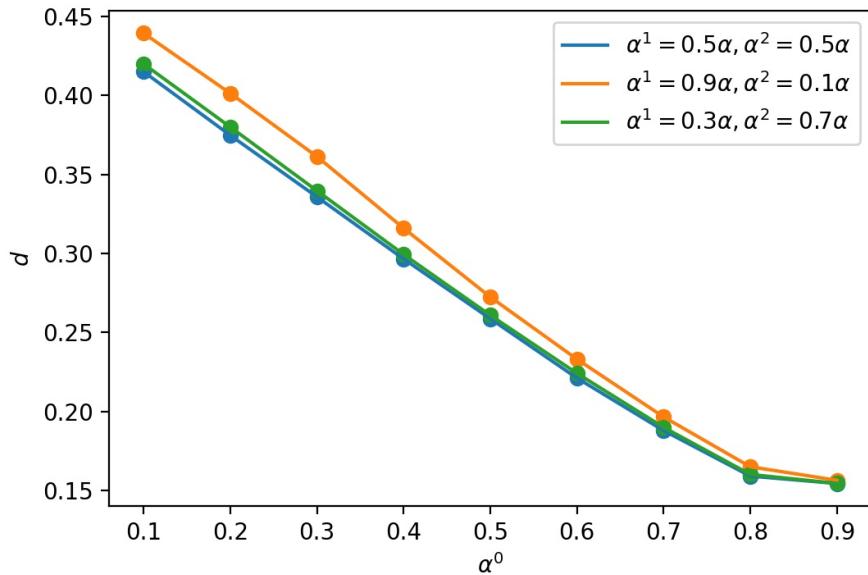


Рис. 35: Зависимость диаметра притягивающего множества от параметра шума для модели с аддитивным шумом. Число агентов $n = 100$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; $t_{\max} = 100$

Из Рис. 35 видно, что диаметр притягивающего множества уменьшается с увеличением коэффициента α^0 , что может иметь вполне естественную интерпретацию: чем меньше коэффициент α^0 , тем больше коэффициенты α^1 и α^2 , то есть тем больше случайное влияние на систему и агенты больше подвержены резкому изменению своего мнения. Аналогично, при увеличении коэффициента перед НК, α^1 и α^2 уменьшаются, что делает взаимодействие в социальной группе менее случайным.

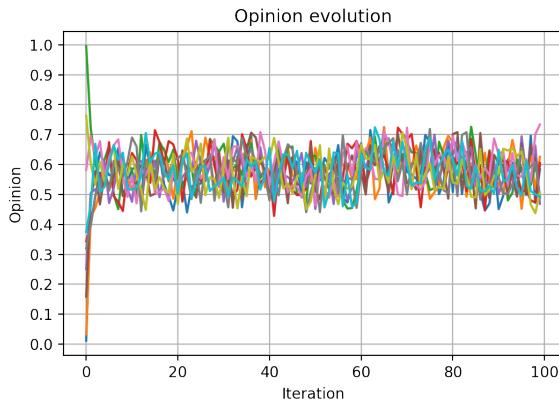
Анализ поведения траектории случайного процесса при бета - распределении начального профиля

Предположим теперь, что начальный профиль имеет Бета-распределение $x(0) \sim B(\alpha, \beta)$ и посмотрим, как будет себя вести траектория случайного процесса и изменятся ли полученные ранее статистические характеристики.

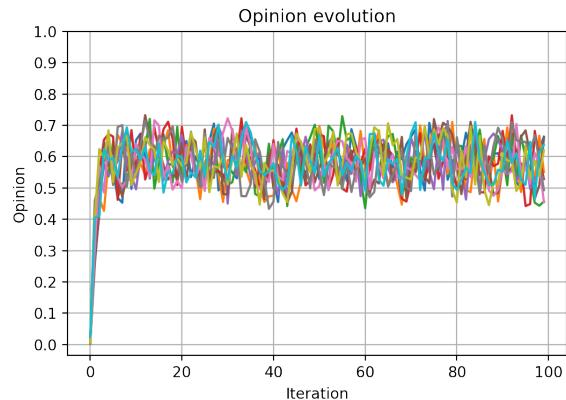
Рассмотрим 3 случая:

- 1) $E[x(0)] \rightarrow 0$,
- 2) $E[x(0)] \rightarrow 1$,
- 3) параметры Бета-распределения равны $\alpha = \beta$,

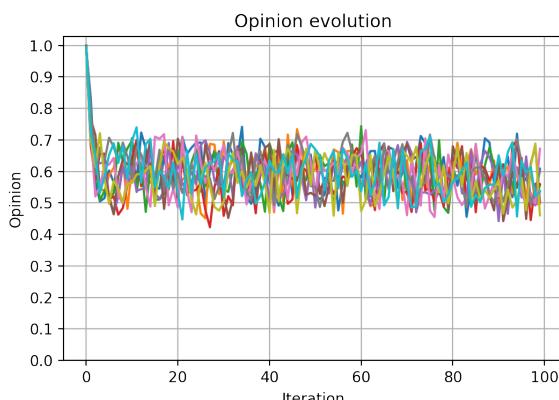
и проанализируем динамику случайного процесса $\vec{x}(t)$ при данных начальных профилях.



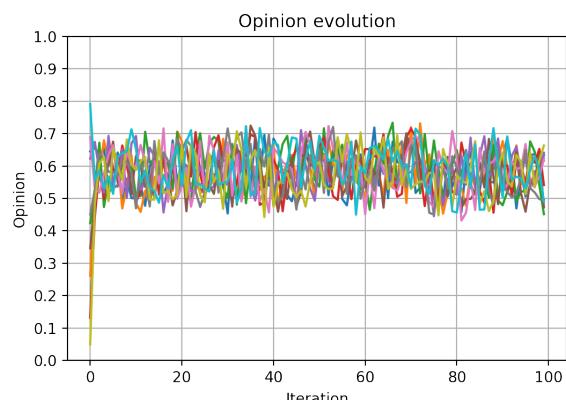
(a) $x_j(0) \sim U(0, 1)$



(b) $x_j(0) \sim B(1, 100)$



(c) $x_j(0) \sim B(100, 1)$



(d) $x_j(0) \sim B(2, 2)$

Рис. 36: Эволюция конфигураций для модели с аддитивным шумом. $n = 10$; радиус доверия $\varepsilon = 0.2$; параметры шума $\alpha^1 = 0.2, \alpha^2 = 0.4$.

Можно заметить, что вне зависимости от начального распределения профиля мнений при прочих равных параметрах эволюция конфигураций на больших временах не меняется. Что свидетельствует об эргодичности соответствующей системы.

4 Заключение

В рамках данного проекта мы исследовали математические модели динамики мнений с ограниченным доверием с внешним влиянием, основанные на классической модели Хегельмана-Краузе. Влияние внешних факторов моделируется двумя способами. В первой модели предполагается, что с некоторой положительной вероятностью μ мнение агента меняется спонтанно (по некоторому заданному закону распределения), а с вероятностью $1 - \mu$ агент действует по классическому алгоритму Хегельмана-Краузе. Во второй модели изменение мнения задается линейной выпуклой комбинацией алгоритма Хегельмана-Краузе и скачками двух типов.

Для моделей:

- Построены имитационные модели.
- Доказано, что случайный процесс, определяющий профиль мнений в момент времени t является марковским процессом с дискретным временем и непрерывным пространством состояний.
- Исследовано поведение профиля мнений для разных параметров модели, проанализировано влияние параметров случайности на структуру профиля на больших временах.
- Выявлены некоторые свойства, связанные с эргодичностью процессов.
- Для модели со скачками одного типа доказано, что за конечное время система достигает поглощающее множество; проведен анализ зависимости среднего времени до поглощения от параметров задачи.
- Для модели со случайными скачками двух типов показано, что средняя доля агентов с мнением выше 0.5 практически совпадает с вероятностью скачка в верхний полупротивервал.
- Для модели с аддитивным шумом определен средний диаметр притягивающего множества и его зависимость от параметров задачи.

Полученные результаты могут помочь лучше понять и описать процессы формирования и изменения мнений при наличии внешних случайных воздействий. Это исследование также может быть полезным для применения в различных социальных и информационных системах.

В качестве дальнейших исследований предполагается провести анализ плотности распределения мнений и выписать уравнение для ее динамики.

Список литературы

- [1] Krause U., "A Discrete Nonlinear and Non-Autonomous Model of Consensus Formation". Communications in Difference Equations, 10.1201/b16999-21, 2000
- [2] Hegselmann R., Krause U., "Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation", Journal of Artificial Societies and Social Simulation (JASSS), 5(3), 1-33, 2002
- [3] Bhattacharyya A., Braverman M., Chazelle B. and Nguyen H. L., "On the convergence of the Hegselmann-Krause system", Proceedings of the 4th Innovations in Theoretical Computer Science conference (ICTS 2013), Berkeley CA, January 2013
- [4] Martinez S., Bullo F., Cortes J. and Frazzoli E., "On Synchronous Robotic Networks - Part II: Time Complexity of Rendezvous and Deployment Algorithms", IEEE Trans. Automat. Control 52, No. 12, 2214–2226, 2007
- [5] Булинский А.В., Ширяев А.Н., "Теория случайных процессов" 2003, 400 с. ISBN 5-9221-0335-0
- [6] Su W., Chen G., Hong Y., "Noise leads to quasi-consensus of Hegselmann–Krause opinion dynamics", Automatica, v. 85, p. 448-454, 2017
- [7] Nyczka P., "A Model of Opinion Dynamics with Bounded Confidence and Noise", Institute of Theoretical Physics, University of Wroclaw, pl. Maxa Borna v.9, p.50-204. <https://arxiv.org/abs/1106.0008>
- [8] Pineda M., Toral R., Hernandez-Garcia E., "The noisy Hegselmann-Krause model for opinion dynamics", The European Physical Journal B, 490 (2013)
- [9] Zha Q., Kou G., Zhang H., Liang H., Chen X., Li C., Dong Y., "Opinion dynamics in finance and business: a literature review and research opportunities", Financial Innovation 6, 44 (2020)
- [10] Peralta A.F., Kertesz J., Iniguez G., "Opinion dynamics in social networks: From models to data", arXiv:2201.01322v4 2022
- [11] Chen G., Su W., Ding S., Hong Y., "Heterogeneous Hegselmann-Krause Dynamics with Environment and Communication Noise", IEEE Transactions on Automatic Control, v. 65, p. 3409-3424, 2020
- [12] Pasquale G.D., Valcher M.E., "Multi-dimensional extensions of the Hegselmann-Krause model", arXiv:2204.08515v1, 2022
- [13] Proskurnikov A.V, Tempo R., "A Tutorial on Modeling and Analysis of Dynamic Social Networks. Part II", v.45, p.166-190, 2018

- [14] Kerckhove C.V., Martin S., Gend P., Rentfrow P.J., Hendrickx J.M., Blondel V.D., "Modelling influence and opinion evolution in online collective behaviour", Public Library of Science, v. 11(6), p. 1-25, 2016
- [15] Quattrociocchi W., Scala A., Caldarelli G., "Opinion dynamics on interacting networks: Media competition and social influence", Scientific Reports, v. 4, 4938 (2014)
- [16] Yang B., Yu Q., Fan Y., "A Hybrid Opinion Formation and Polarization Model", Entropy, 24(11), 1692, 2022
- [17] Slanina F., "Dynamical phase transitions in Hegselmann-Krause model of opinion dynamics and consensus". Eur. Phys. J. B 79, 99–106 (2011)
- [18] Shang Y., "Deffuant Model with General Opinion Distributions: First Impression and Critical Confidence Bound". Complexity. 19. 10.1002/cplx.21465 (2013)