Université Paris Cité Année 23–24
UFR de Mathématiques et d'Informatique

Master 2 - MMA
Optimisation

TP2 - **Méthodes primales-duales**

On cherche à nouveau à trouver une inconnue u à partir de la donnée bruitée $d = Au + b$. On suppose maintenant que u n'est plus parcimonieuse, mais constante par morceaux. Plus précisément, on a

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}.$$

On se propose donc d'estimer u en minimisant la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\|Ax - d\|_2^2 + \lambda\|Dx\|_1,$$

où $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Construire la donnée d et trouver une première estimation de u en lui appliquant la matrice inverse A^{-1}. Constater que le problème est toujours mal posé.
   (b) La fonction f possède-t-elle un unique minimiseur ?
2. **Méthode duale**
   (a) Calculer la transformée de Legendre-Fenchel de la fonction
   $$f_1 : x \mapsto \frac{1}{2}\|Ax - d\|_2^2$$
   et le gradient de la fonction $y \mapsto f_1^*(-D^T y)$.
   (b) Calculer la transformée de Legendre-Fenchel de $f_2 = \lambda\|\cdot\|_1$ et l'opérateur proximal $\mathrm{prox}_{\tau f_2^*}$, où $\tau > 0$.
   (c) Minimiser la fonction
   $$y \mapsto f_1^*(-D^T y) + f_2^*(y)$$
   à l'aide de l'algorithme FISTA.
   (d) En déduire le minimiseur de f.
3. **Méthode primal-dual de Chambolle-Pock**
   (a) Pourquoi l'algorithme primal-dual de Chambolle-Pock est-il bien adapté pour trouver un minimiseur de la fonction f ?
   (b) Calculer $\mathrm{prox}_{\tau f_1}$.
   (c) Obtenir le minimiseur de f à l'aide de l'algorithme de Chambolle-Pock.

4. **Méthode primal-dual généralisée par Condat et Vu**

   (a) Lorsque l'opérateur A prend une forme plus complexe, il est plus facile de faire une descente de gradient explicite sur f_1. Calculer le gradient de f_1

   (b) Obtenir le minimiseur de f à l'aide de l'algorithme proposé par Condat et Vu, en faisant une descente de gradient explicite sur la variable primale.

5. **PAPC**

   (a) Pourquoi l'algorithme PAPC est-il lui-aussi bien adapté à ce problème d'optimisation ?

   (b) Obtenir le minimiseur de f à l'aide de l'algorithme PAPC.

   (c) Comparer les vitesses de convergence des quatre algorithmes.

   (d) Si on suppose que les vecteurs d et u sont de grande dimension et que A est un opérateur non inversible pour lequel on peut calculer rapidement $A^T Ax$, pour tout x, quel serait l'algorithme le mieux adapté pour minimiser la fonction f ?

6. **Méthode primal-dual généralisée par Condat et Vu (suite)**

   (a) On sait maintenant que $u_4 - u_3 + u_2 - u_1 = 1$. Afin de tenir compte de cette information, on se propose de minimiser la fonction $x \mapsto f(x)$, sous la contrainte $x_4 - x_3 + x_2 - x_1 = 1$. Pourquoi l'algorithme de Condat et Vu est-il bien adapté à ce problème d'optimisation ?

   (b) Calculer l'opérateur proximal de la fonction indicatrice de $\{v \in \mathbb{R}^4 \,/\, v_4 - v_3 + v_2 - v_1 = 1\}$.

   (c) Résoudre ce problème d'optimisation et comparer la solution obtenue aux estimations de u précédentes.