Sinais e Sistemas II - T02

Trabalho Final

Osmar Pinto Oliveira Junior - 218125108

Maio, 2021

Sumário

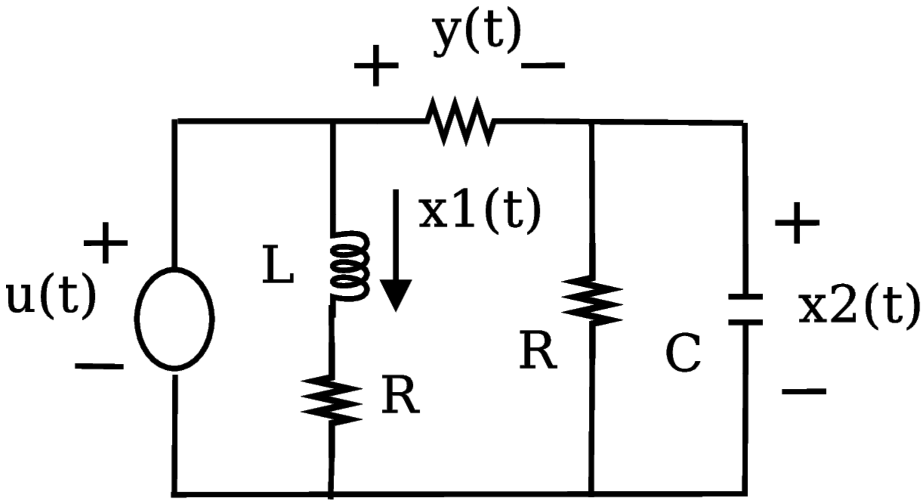


Figura 1: Circuito a ser analisado

1 Motivação

O trabalho final consiste em aplicarmos o conhecimento adquirido para resolução de sistemas a partir de espaço de estados analíticamente num primeiro momento, e com o apoio de um software matemático em segundo momento.

2 Desenvolvimento

Temos o sistema a ser analisado sendo um circuito simples com entradas e saídas já delitimadas, que podemos ver em 1.

Fazendo a análise do circuito encontramos as seguintes relações:

$$\dot{x_1} = -\frac{Rx_1}{L} + \frac{u(t)}{L}$$

$$\dot{x_2} = -\frac{-2x_2}{RC} + \frac{u(t)}{RC}$$

$$y(t) = -x_2 + u(t)$$

E então podemos montar nosso sistem de espaço de estados sendo:

$$A = \begin{bmatrix} -1R/L & 0 \\ 0 & -2/RC \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 1/RC \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = 1$$

Depois de definir a equação do espaço de estados, podemos substituir alguns valores e vamos encontrar e^{At} utilizando três métodos solicitados: diagonalização de matrizes (método de Jordan), teorema de Cayley-Hamilton e transformada inversa de Laplace.

Os valores a serem substituídos são: $R = 2$, $L = 1$ e $C = 9$.

Começando com o mais simples nesse caso que seria o método de diagonalização pois a matriz já se encontra diagonalizada, sendo os valores da diagonal principal os autovalores que são distintos, não necessitando do método de Jordan. Do mesmo modo o teorema de Cayley-Hamilton tambem se torna simples já que temos a matriz diagonal, simplesmente substituindo λ por $e^{-\lambda t}$.

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{9}t} \end{bmatrix}$$

Para resolvermos pela transformada inversa de Laplace precisamos encontrar $(sI - A)^{-1}$ onde temos alguns dos passos:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{1}{9}} \end{bmatrix}$$

No fim, aplicando a transformada inversa de laplace temos o resultado, que é exatamente o mesmo dos outros métodos:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{9}t} \end{bmatrix}$$

Prosseguindo com a solução temos os valores iniciais sendo $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ e $u(t) = 1$ para $t > 0$ conseguimos definir a expressão analítica como:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Substituindo todos os termos:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{9}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{9}(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{18} \end{bmatrix} d\tau + 1$$

Fazendo os calculos necessários temos:

$$y(t) = -\frac{e^{-\frac{1}{9}t}}{2} + \frac{1}{2}$$

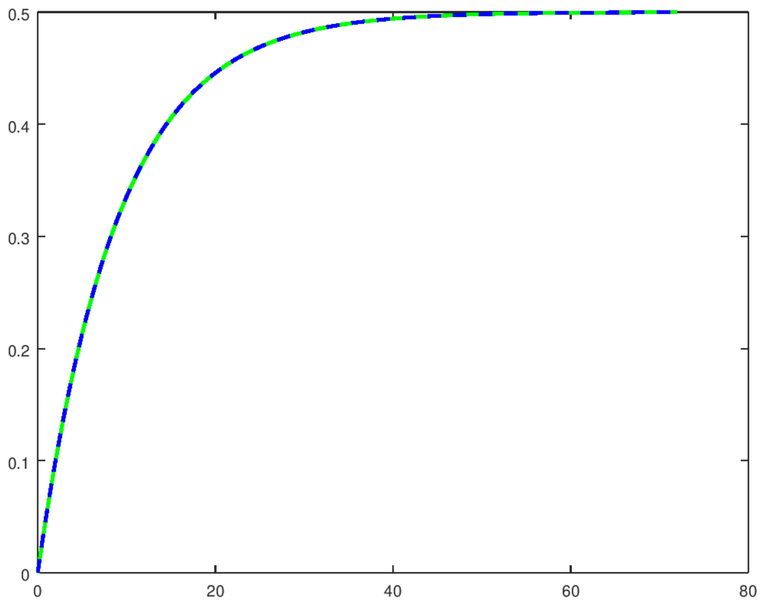


Figura 2: Simulado verde, Analítico azul tracejado

3 Resultados obtidos

Partindo para o software matemático, fazemos a análise da resolução do sistema a partir de funções prontas da biblioteca e comparamos com o resultado analítico. Como podemos ver na figura 2, as curvas se sobrepõe, o que sugere que o resultado analítico da saída do sistema é coerente com o resultado da função do Octave.

Prosseguindo com as análises, agora obtemos uma transformação de similaridade tal qual solicitado que $z_1(T)$ seja a corrente no capacitor e $z_2(t)$ tensão no indutor. Fazendo $z(t) = Tx(t)$ conseguimos achar:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Que satisfaz $det(T) \neq 0$ que é necessário, e após simulação e comparação com o $y(t)$ simulado anteriormente podemos ver na figura 3 Tambem analisamos os vetores de estados $x(t)$ e $z(t)$ e podemos perceber que chegamos no resultado esperado, onde o tracejado em 4a corresponde a exatamente a derivada do verde em 4b e o mesmo ocorre ao contrário. Podemos perceber que como esperado, mesmo alterando os estados dentro do sistema, a saída do sistema continua a mesma.

Seguindo em frente vamos analisar o caso para resposta a entrada nula para: $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x(0) = v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ analisando os gráficos gerados, podemos ver que em 5a o caminho tomado atravessa duas dimensões, enquanto em 5b por termos usado um estado inicial sendo um autovetor, observamos que o resultado esperado dos estados somente afeta uma das variáveis do sistema.

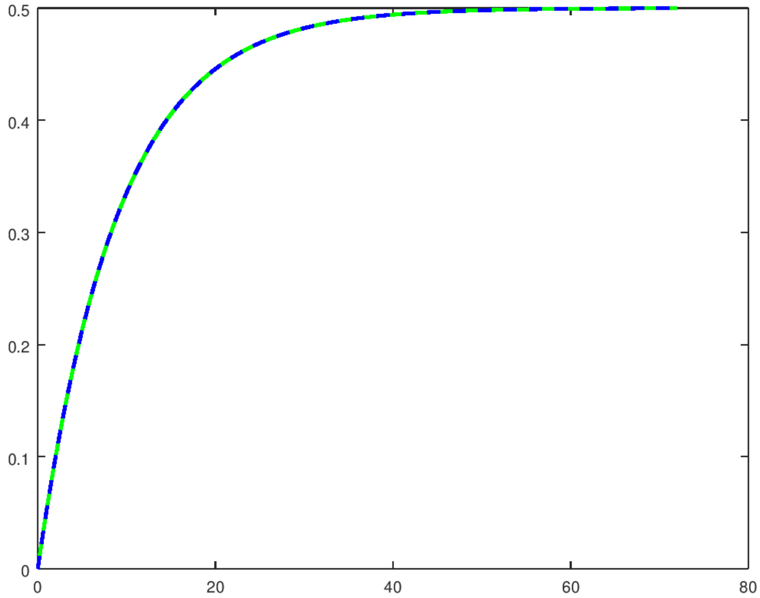
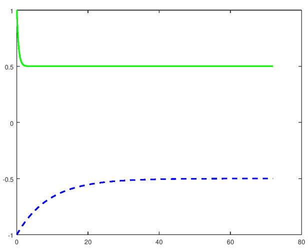
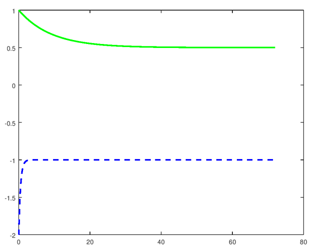


Figura 3: Simulado verde, Saída da transformação de similaridade em azul tracejado

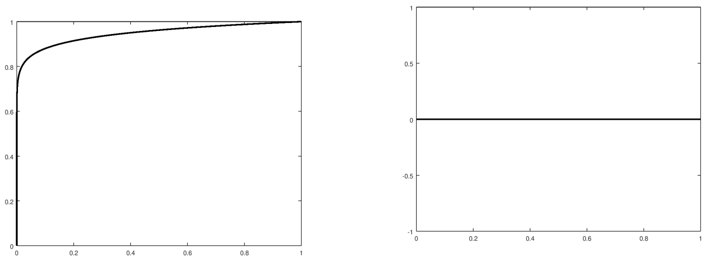


(a) $x_1(t)$ em verde e $z_1(t)$ em azul tracejado



(b) $x_1(t)$ em verde e $z_1(t)$ em azul tracejado

Figura 4: Comparação $x(t)$ e $z(t)$



(a) $x_1(t)$ X $x_2(t)$ para x(0) = [1; 1]

(b) $x_1(t)$ X $x_2(t)$ para x(0) = v = [1; 0]

Figura 5: Análise da alteração do estado inicial

Para achar um $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ precisamos definir um P tal que satisfaça $A^T P + PA + Q = 0$ com $Q > 0(Q = Q^T)$ e verificar se $P > 0(P = P^T)$

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Tentando resolver a equação com $Q = I$, fazendo os calculos necessários e resolvendo o sistema linear encontrado temos:

$$a = \frac{1}{4}, b = 0, c = \frac{9}{2}$$

Como temos os autovalores sendo positivos, temos um sistema assintoticamente estável. Como podemos ver no gráfico simulado na figura 6, podemos concluir que temos o decrescimento do custo de $V(x)$, fazendo com que P seja um candidato para resolução do nosso problema.

Podemos analisar se o nosso sistema é controlável ou observável a partir de dois critérios: $det([B, AB]) \neq 0$ significa que o sistema é controlável e $det([C, CA]) \neq 0$ significa que é observável.

Fazendo o calculo pelo Octave, então temos que $det([B, AB]) = 0.10$ e $det([C, CA]) = 0$ o que sugere que o nosso sistema é controlável e não observável.

4 Conclusões

Podemos concluir que além do espaço de estados ser um método eficaz de análise de sistemas, o auxílio de um software matemático pode fazer grande diferença na solução do mesmo.

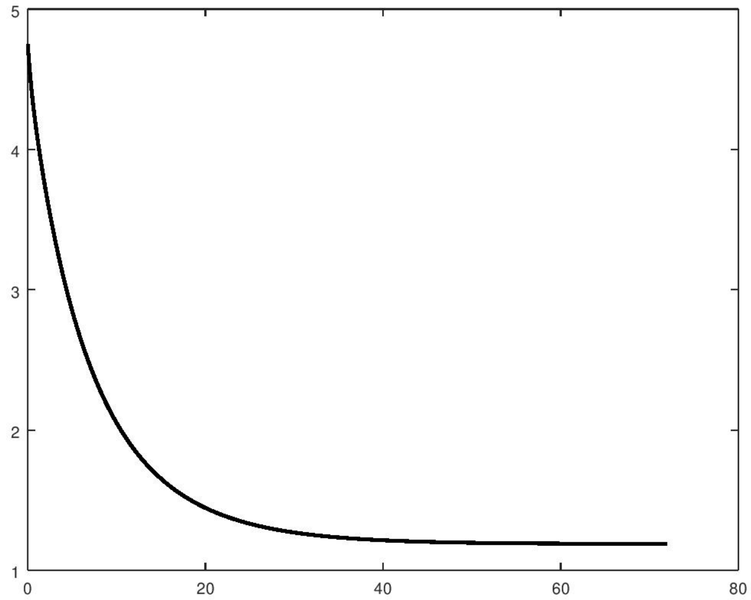


Figura 6: V(x) analisado