

**Teil III**

**Magnetfelder**



# Kapitel 1

## Ergänzungen zur Vektorrechnung

Für die Berechnung von Magnetfeldern werden wieder Vektoren benötigt. Diesmal werden jedoch fast alle Berechnungen in  $\mathbb{R}^3$  sein. Im Vergleich zu den elektrostatischen Feldern spielt zudem die Darstellung von Vektoren (und nicht nur Punkten) in Zylinderkoordinaten eine viel größere Rolle. Desweiteren benötigen wir jetzt das Vektorprodukt von Vektoren.

Wir beginnen zunächst mit einer Wiederholung zur Vektorrechnung mit kartesischen Koordinaten.

### 1.1 Wiederholung

Im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem werden Vektoren in der Form

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y + v_z \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

dargestellt. Dabei sind  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$  die Basisvektoren vom kartesischen Koordinatensystem.

Der Betrag (Länge/Norm) von Vektoren wird wie folgt berechnet:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Vektoren mit Betrag 1 werden als Einheitsvektoren oder normierte Vektoren bezeichnet. Jedem Vektor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  ist der Einheitsvektor  $\vec{v}^0 := \vec{v}/|\vec{v}|$  zugeordnet.

Einfache Rechenoperationen sind Addition und Subtraktion, Multiplikation mit Skalaren und Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \pm \vec{b} &= (a_x \pm b_x) \cdot \vec{e}_x + (a_y \pm b_y) \cdot \vec{e}_y + (a_z \pm b_z) \cdot \vec{e}_z, \\ \lambda \cdot \vec{a} &= (\lambda a_x) \cdot \vec{e}_x + (\lambda a_y) \cdot \vec{e}_y + (\lambda a_z) \cdot \vec{e}_z, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \end{aligned}$$

Für das Skalarprodukt gilt

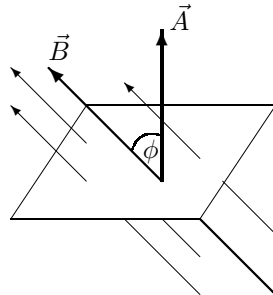
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\phi),$$

wobei  $\phi$  der von den Vektoren eingeschlossene Winkel ist. Außerdem gelten das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz.

**Beispiel 1.1.1.** Es sei

$\vec{B}$  ... die magnetische Feldstärke,

$\vec{A}$  ... der Flächenvektor einer ebenen Fläche,



d.h. der Vektor  $\vec{A}$  steht senkrecht auf der Fläche und sein Betrag entspricht dem Flächeninhalt. Die magnetische Feldstärke  $\vec{B}$  ist ein Vektorfeld und somit i.a. ortsabhängig. Ist aber  $\vec{B}$  homogen (d.h. in jedem Punkt der Fläche gleich), so ist

$$\Phi := \vec{B} \cdot \vec{A} = A \cdot B \cdot \cos(\phi)$$

der magnetische Fluss durch die Fläche  $A$ .

Es sei eine homogene magnetische Feldstärke  $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{Vs}{m^2}$  gegeben. Wir wollen den magnetischen Fluß durch die Dreiecksfläche mit den Eckpunkten

$$P_1 = (0, 0, 0), \quad P_2 = (1m, 3m, 0m) \quad \text{und} \quad P_3 = (6m, -2m, 0m)$$

berechnen.

Wir müssen zunächst den Vektor  $\vec{A}$  ermitteln. Dazu benötigen wir den Flächeninhalt des Dreiecks. Dies ist hier jedoch einfach, weil  $\overrightarrow{P_1P_2}$  und  $\overrightarrow{P_1P_3}$  einen rechten Winkel einschließen. Es ist also

$$A = 1/2 \cdot |\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot |\overrightarrow{P_1P_3}| = 1/2 \cdot \sqrt{10}m \cdot \sqrt{40}m = 10m^2.$$

Außerdem liegt das Dreieck in der  $x-y$ -Ebene, d.h.  $\vec{A}$  ist ein Vielfaches von  $\vec{e}_z$ . Wir erhalten somit den Flächenvektor  $\vec{A} = 10m^2 \cdot \vec{e}_z$ . Also ist

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{Vs}{m^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} 10m^2 = 40Vs.$$

**Aufgabe 1.1.1.** An einem Körper greifen die folgenden Kräfte

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} N, \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} N \quad \text{und} \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} N$$

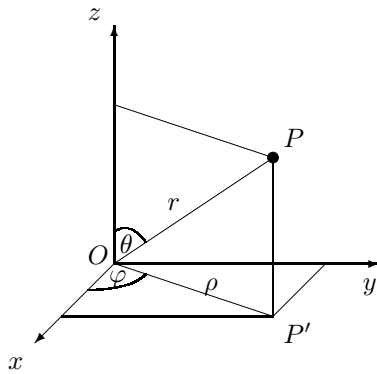
an. Geben Sie die Winkel zwischen der Gesamtkraft und den Vektoren  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$  an.

## 1.2 Koordinatentransformation

Im  $\mathbb{R}^3$  haben wir drei wichtige Koordinatensysteme zur Darstellung von Punkten kennengelernt - kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten. Die Ortsvektoren von Punkten waren wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \text{Kartesische Koordinaten } (x, y, z): \quad \vec{r}(P) &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \text{Zylinderkoordinaten } (\rho, \varphi, z): \quad \vec{r}(P) &= \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \\ \text{Kugelkoordinaten } (r, \theta, \varphi): \quad \vec{r}(P) &= \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei ist



$\rho$  der Abstand von  $P$  zur  $z$ -Achse ( $\rho \geq 0$ ),

$r$  der Abstand von  $P$  zum Koordinatenursprung ( $r \geq 0$ ),

$\theta$  der Winkel ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) zwischen der positiven  $z$ -Achse und Vektor  $\vec{OP}$ ,

$\varphi$  der Winkel ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) zwischen der positiven  $x$ -Achse und Ortsvektor  $\vec{OP'}$ , wobei  $P'$  die Projektion von  $P$  in die  $x-y$ -Ebene ist.

Die Basisvektoren in den Koordinatensystemen entsprechen den normierten Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien. Man erhält die Basisvektoren also durch Ableiten und Normieren des Ortsvektors. Für kartesische Koordinaten ist dies trivial. Man erhält die kanonische Basis.

Die Basisvektoren für das kartesische Koordinatensystem sind

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 1.2.1.** Um in Zylinderkoordinaten den Basisvektor  $\vec{e}_\varphi$  zu erhalten, müssen wir  $\vec{r}(P)$  nach  $\varphi$  ableiten und anschließend den Vektor normieren:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \sin(\varphi) \\ \rho \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normieren}} \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Basisvektoren für Zylinderkoordinaten sind ortsabhängig. Sie lauten

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 1.2.1.** Berechnen Sie die Basisvektoren  $\vec{e}_\rho$  und  $\vec{e}_z$  im Zylinderkoordinatensystem durch Ableiten des Ortsvektors und anschließendes Normieren.

**Aufgabe 1.2.2.** Zeigen Sie, dass der Basisvektor  $\vec{e}_\varphi$  für Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten übereinstimmt.

Die Basisvektoren in Kugelkoordinaten sind

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sie sind ortsabhängig und zueinander orthogonal.

Vektoren bzw. Vektorfelder können wir somit wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_z && (\text{kartesische Koordinaten}) \\ &= a_\rho \cdot \vec{e}_\rho + a_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + a_z \cdot \vec{e}_z && (\text{Zylinderkoordinaten}) \\ &= a_r \cdot \vec{e}_r + a_\theta \cdot \vec{e}_\theta + a_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi && (\text{Kugelkoordinaten}). \end{aligned}$$

Dabei sind  $a_x, a_y, a_z, a_\rho, a_r, a_\varphi, a_\theta \in \mathbb{R}$  die Koordinaten bzgl. der einzelnen Koordinatensysteme. Bei Vektorfeldern sind diese Koordinaten ortsabhängig.

In Formeln kommen häufig Vektoren und Vektorfelder vor, die mit unterschiedlichen Koordinatensystemen dargestellt wurden. Dann ist es meist am einfachsten, diese mit einem einheitlichen Koordinatensystem darzustellen. Es muss also eine Koordinatentransformation durchgeführt werden. Das Vorgehen ist aus der „Linearen Algebra“ bekannt.

Am einfachsten ist die Transformation von Zylinderkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten. Wir müssen nur die Formeln für die Basisvektoren einsetzen und  $\rho, \varphi$  bzw.  $r, \theta, \varphi$  mittels  $x, y, z$  darstellen. Es ist z.B.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan(\varphi) = y/x, \quad \cos(\theta) = z/r.$$

**Beispiel 1.2.2.** Sei  $\vec{H}(\rho, \varphi, z) = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$ . Dies ist die Feldstärke eines Magnetfeldes, das durch einen Strom  $\vec{I} = I \cdot \vec{e}_z$  entlang der  $z$ -Achse erzeugt wird. Wir ersetzen in der Formel  $\vec{e}_\varphi$ . Anschließend erweitern wir mit  $\rho$ , um  $x = \rho \cos(\varphi)$  und  $y = \rho \sin(\varphi)$  einsetzen zu können. Also ist

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{I}{2\pi\rho} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi\rho^2} \begin{pmatrix} -\rho \sin(\varphi) \\ \rho \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-yI}{2\pi(x^2 + y^2)} \cdot \vec{e}_x + \frac{xI}{2\pi(x^2 + y^2)} \cdot \vec{e}_y. \end{aligned}$$

Es können natürlich auch Transformationsmatrizen verwendet werden. Wenn also die Basisvektoren den Spalten der Matrix entsprechen, so gilt z.B. für Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Da wir hier ausschließlich mit orthonormalen Basen arbeiten, ist die inverse Matrix gleich der transponierten Matrix. Wenn wir also die Basisvektoren als Zeilen der Matrix verwenden, so gilt

$$\begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Für Kugelkoordinaten ist dies analog.

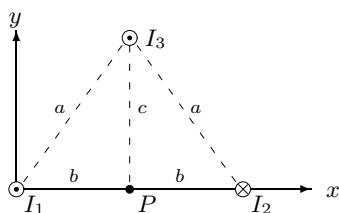
**Beispiel 1.2.3.** Sei  $\vec{a}(x, y, z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \sqrt{x^2 + y^2}\vec{e}_z$  ein Vektorfeld, welches mit kartesischen Koordinaten dargestellt wurde. Wir berechnen die Darstellung mit Zylinderkoordinaten. Mit  $x = \rho \cos(\varphi)$ ,  $y = \rho \sin(\varphi)$  und  $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$  gilt

$$\begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix},$$

d.h.  $\vec{a}(\rho, \varphi, z) = \rho\vec{e}_\rho + \rho\vec{e}_z$ .

**Aufgabe 1.2.3.** Geben Sie das Vektorfeld  $\vec{a}(x, y) = x/y \cdot \vec{e}_x + \vec{e}_y$  in Zylinderkoordinaten an.

**Aufgabe 1.2.4.** Es seien 3 unendlich lange, dünne Leiter parallel zur z-Achse gegeben, in welchen Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  bzw.  $I_3$  fließen (siehe Abbildung).



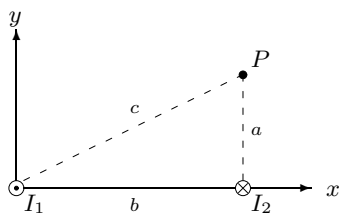
Es seien die folgenden Werte gegeben:

$$I_1 = 35A, \quad I_2 = 25A, \quad I_3 = 45A,$$

$$a = 100\text{mm}, \quad b = 80\text{mm}.$$

Berechnen Sie die magnetische Feldstärke im Punkt P.

**Aufgabe 1.2.5.** Es seien 2 unendlich lange, dünne Leiter parallel zur z-Achse gegeben, in welchen Ströme  $I_1$  und  $I_2$  fließen (siehe Abbildung).



Es seien

$$I_1 = I_2 = I \text{ und } b = 2a.$$

Berechnen Sie die magnetische Feldstärke im Punkt P.

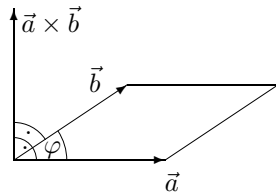
## 1.3 Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

Insbesondere bei der Untersuchung von Magnetfeldern wird neben den bisher vorgestellten Vektoroperationen noch das sogenannte Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt genannt) benötigt.

Es ist nur im 3-dimensionalen Raum definiert.

Seien zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  gegeben. Dann ist das Kreuzprodukt  $\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b}$  der Vektor mit den folgenden Eigenschaften:

1. Vektor  $\vec{c}$  ist zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal, d.h.  $0 = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ .
2. Der Betrag von  $\vec{c}$  entspricht dem Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms, d.h.  $c = a \cdot b \cdot \sin(\varphi)$ .
3. Die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.



Die Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms ist

$$\begin{aligned} c := A &= \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} \\ &= a \cdot (b \cdot \sin(\varphi)). \end{aligned}$$

Seien zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$  gegeben. Dann kann das

Kreuzprodukt  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  formal mittels Determinanten berechnet werden. Mit dem Entwicklungssatz erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{c} &:= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & a_x & b_x \\ \vec{e}_y & a_y & b_y \\ \vec{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.3.1.** Gegeben sei ein Magnetfeld in der  $y-z$ -Ebene mit  $|\vec{B}| = 0.6 \frac{Vs}{m^2}$ , welches mit der  $z$ -Achse einen Winkel von  $30^\circ$  einschließt. Ein Elektron mit  $q = -1.6 \cdot 10^{-19} As$  bewege sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = 0.4 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot \vec{e}_y$  entlang der  $y$ -Achse. Berechnen Sie die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}, \text{ welche auf das Teilchen wirkt.}$$

**Eigenschaften des Kreuzproduktes:**

1.  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
2.  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
3.  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$   
 $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$  (Distributivgesetz)

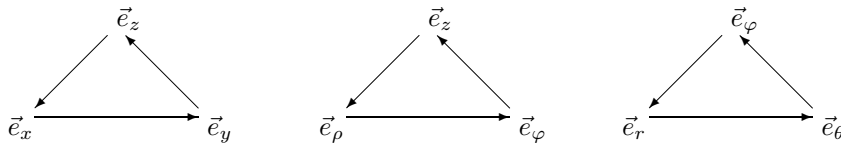
Für die Einheitsvektoren der bekannten Koordinatensysteme gilt

1.  $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$ ,
2.  $\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$ ,



$$3. \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi.$$

Die korrekte Reihenfolge der Vektoren ist durch folgende Diagramme gegeben.



Dabei gibt der Pfeil die Reihenfolge der Vektoren im Kreuzprodukt an. Es ist also z.B.  $\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho$ , aber  $\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$  (vertauschte Reihenfolge bei  $\vec{e}_y, \vec{e}_x$ ).

**Aufgabe 1.3.2.** Berechnen Sie mit Hilfe des Distributivgesetzes

- a)  $2\vec{e}_x \times (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - \vec{e}_z),$
- b)  $(\vec{e}_\varphi + \vec{e}_z) \times (\vec{e}_z - \vec{e}_\varphi).$

Derartige Berechnungen sind aus der Mechanik bekannt.

**Beispiel 1.3.1.** Ein starrer Körper dreht sich um eine durch den Koordinatenursprung gehende Drehachse mit Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\vec{\omega}$  (in Richtung der Drehachse). Die Tangentialgeschwindigkeit in einem Punkt  $P$  ist dann

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times \vec{r}(P).$$

Sei  $\vec{\omega} = \vec{e}_z \left[\frac{1}{s}\right]$  und  $\vec{r}(P) = (3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) [m]$  der Ortsvektor vom Punkt  $P$ . Dann ist  $\vec{r}(P) = (3\sqrt{2} \cdot \vec{e}_\rho + 2\vec{e}_z) [m]$  in Zylinderkoordinaten und somit

$$\begin{aligned} \vec{v}(P) &= \vec{e}_z \times (3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) \left[\frac{m}{s}\right] = (3\vec{e}_y - 3\vec{e}_x) \left[\frac{m}{s}\right] \\ \text{bzw. } \vec{v}(P) &= \vec{e}_z \times (3\sqrt{2} \cdot \vec{e}_\rho + 2\vec{e}_z) \left[\frac{m}{s}\right] = 3\sqrt{2} \cdot \vec{e}_\varphi \left[\frac{m}{s}\right]. \end{aligned}$$

Sind Vektoren in unterschiedlichen Koordinatensystemen gegeben, dann sollte zuerst eine Koordinatentransformation erfolgen.

**Aufgabe 1.3.3.** Die Kraft eines Magnetfeldes auf ein bewegtes, geladenes Teilchen wird mit der Lorentzkraft berechnet:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}.$$

Es sei in einem Punkt  $P = (1m, 1m, 1m)$  ein Feld  $\vec{B} = \sqrt{2}T \cdot \vec{e}_\varphi$  gegeben. Ein Elektron  $q = -1.6 \cdot 10^{-19}As$  bewege sich mit einer Geschwindigkeit

1.  $\vec{v} = 20000 \frac{km}{s} (\vec{e}_x + \vec{e}_y),$
2.  $\vec{v} = 20000 \frac{km}{s} (\vec{e}_x - \vec{e}_y),$
3.  $\vec{v} = 20000 \frac{km}{s} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z).$

Berechnen Sie die auf das Teilchen einwirkende Kraft. Unter welcher Bedingung ist die Kraft Null?



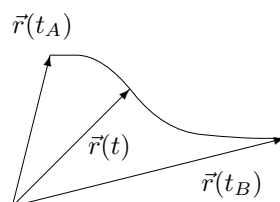
## Kapitel 2

# Kurvenintegrale

Analog zu den elektrostatischen Feldern spielen auch bei der Berechnung von Magnetfeldern Kurvenintegrale (auch Wegintegral oder Linienintegral genannt) eine wichtige Rolle. Wegintegrale haben wir bisher mit kartesischen Koordinaten berechnet. Jetzt werden wir zusätzlich auf die Wegelemente bei anderen Koordinatensystemen eingehen.

### 2.1 Kurven im $\mathbb{R}^3$

Bei Wegintegralen bzw. Kurvenintegralen wird entlang einer Kurve integriert. Bei Magnetfeldern gibt ein solcher Weg meist die Bewegung einer Ladung an. Bei stromdurchflossenen Leitern entspricht die Kurve dem Leiter.



Eine Beschreibung erfolgt mit Ortsvektoren  $\vec{r}(t)$ , die von einem Parameter  $t$  abhängen. Also

$$t \longrightarrow \vec{r}(t).$$

Dabei wird der Parameter  $t \in [t_A, t_E]$  meist als Zeit interpretiert, d.h.  $\vec{r}(t)$  ist der Ortsvektor eines bewegten Teilchens zum Zeitpunkt  $t$ .

Wege bzw. Kurven im  $\mathbb{R}^3$  können als Funktion von Ortsvektoren

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit einer Variablen  $t \in [t_A, t_B]$  beschrieben werden. Dabei geben  $\vec{r}(t_A)$  den Aufpunkt und  $\vec{r}(t_B)$  den Endpunkt der Kurve an.

**Beispiel 2.1.1.** *Befindet sich ein stromdurchflossener Leiter auf der  $z$ -Achse und fließt der Strom in Richtung der  $z$ -Achse, so wird als Parameter meist die*

$z$ -Komponente verwendet. Also ist

$$\vec{r}(z) = z\vec{e}_z \quad \text{mit} \quad z \in [z_A, z_E].$$

Dabei zeigen  $\vec{r}(z_A)$  und  $\vec{r}(z_E)$  auf Anfangs- und Endpunkt des Leiters.

**Aufgabe 2.1.1.** Durch die Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\pi t) \\ R \cdot \sin(\pi t) \\ R \cdot t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [0, 10]$$

wird ein Leiter auf einer Zylinderspule beschrieben. Wieviele Windungen gibt es? Wie groß ist der Abstand zwischen den einzelnen Windungen?

## 2.2 Wiederholung zu Kurvenintegralen

Kurvenintegrale bzw. Wegintegrale kennen wir bereits aus der Elektrostatik. Sie werden z.B. zur Berechnung von Spannungen oder Arbeit verwendet, d.h.

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{bzw.} \quad U_{AB} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Ausgehend von einer Kurvendarstellung  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$  mit  $t \in [t_A, t_B]$  ist das gerichtete Wegelement  $d\vec{s} := \dot{\vec{r}}(t) dt$ . Dabei ist der Tangentialvektor

$$\dot{\vec{r}}(t) := \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$$

die Ableitung der Kurve nach dem Parameter  $t$ .

**Beispiel 2.2.1.** Sei die Kurve  $\vec{r}(t) = t \cdot \vec{e}_z$  gegeben mit  $t \in [0, 3]$ . Dann haben wir also nur eine  $z$ -Komponente  $z(t) = t$ , d.h.  $\dot{z}(t) = 1$ . Also ist  $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_z$  und  $d\vec{s} = \vec{e}_z dt$ .

**Beispiel 2.2.2.** Für die Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\pi t) \\ R \cdot \sin(\pi t) \\ R \cdot t \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} -R\pi \cdot \sin(\pi t) \\ R\pi \cdot \cos(\pi t) \\ R \end{pmatrix} dt.$$

Zur Erinnerung geben wir die typischen Rechenschritte an.

Das Integral  $\int \vec{F} \cdot d\vec{s}$  entlang einer Kurve von  $A$  nach  $B$  erhält man wie folgt:

1. Es ist die (evtl. frei gewählte) Kurve  $\vec{r}(t)$  mit  $t \in [t_A, t_B]$  anzugeben.
2. Es wird die Ableitung  $\dot{\vec{r}}(t)$  berechnet.
3. Wir setzen die Werte von  $x(t)$  und  $y(t)$  (bzw.  $z(t)$ ) ins Feld  $\vec{F}$  ein.
4. Wir bilden das Skalarprodukt  $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}(t)$  mit den Vektoren aus den Schritten 2. und 3.
5. Das Skalarprodukt wird ins Integral eingesetzt und
 
$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} := \int_{t_A}^{t_B} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}(t)) dt \quad \text{berechnet.}$$

Desweiteren werden mitunter die Notationen

$$\begin{aligned} ds &:= |\vec{ds}| = |\dot{\vec{r}}(t)| dt && \dots \text{Länge eines Wegstückes,} \\ s &:= \int ds = \int_{t_A}^{t_B} |\dot{\vec{r}}(t)| dt && \dots \text{Gesamtlänge der Kurve} \end{aligned}$$

verwendet. Die Weglänge  $s$  kann bei einfachen Kurven auch als Parameter verwendet werden. Dann ist der Tangentialvektor  $\frac{d}{ds}\vec{r}(s)$  in allen Punkten der Kurve ein Einheitsvektor.

**Aufgabe 2.2.1.** Gegeben sei das Vektorfeld  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 2y \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie das Kurvenintegral  $\int \vec{F} \cdot \vec{ds}$  über

1. der Strecke von  $(0,0)$  nach  $(1,1)$ ,
2. der Kurve  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$  mit  $t \in [0,1]$ .

## 2.3 Verwendung nichtkartesischer Koordinaten

Soll mit einem anderen Koordinatensystem statt dem kartesischen gerechnet werden, ist der Rechenweg ähnlich, aber nicht gleich. Wir betrachten zunächst die Situation in der Ebene.

Ist eine Kurve in Polarkoordinaten gegeben, so besitzt sie die Darstellung  $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$ . Es ändert sich also auch der Richtungsvektor  $\vec{e}_r$  mit dem Parameter  $t$ . Dann gilt (Produktregel/Kettenregel):

$$\vec{ds} = \left[ \dot{r}(t) \cdot \vec{e}_r + r(t) \cdot \frac{d}{dt} \vec{e}_r \right] dt = \left[ \dot{r}(t) \cdot \vec{e}_r + r(t) \dot{\varphi}(t) \cdot \vec{e}_\varphi \right] dt.$$

Das Wegelement  $\vec{ds}$  lautet in der Ebene wie folgt:

- Kartesische Koordinaten:  $\vec{ds} = [\dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y] dt$
- Polarkoordinaten:  $\vec{ds} = [\dot{r}(t)\vec{e}_r + r(t)\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi] dt$

Es werden häufig Polarkoordinaten zur Berechnung von Kurvenintegralen verwendet, wenn als Parameter der Radius  $t = r$  oder der Winkel  $t = \varphi$  verwendet werden kann. Dann erhält man die folgenden Spezialfälle.

$t = r$ : Es ist  $\dot{\varphi} = 0$  und  $\dot{r} = 1$ . Es folgt  $\vec{ds} = \vec{e}_r dr$ .

$t = \varphi$ : Es ist  $\dot{r} = 0$  und  $\dot{\varphi} = 1$ . Also ist  $\vec{ds} = r\vec{e}_\varphi d\varphi$ .

Im ersten Fall liegt die Kurve auf einem Strahl, im zweiten Fall auf einem Kreis.

**Beispiel 2.3.1.** Wir wollen mit Polarkoordinaten  $U_{AB} = \int \vec{E} \cdot \vec{ds}$  bestimmen mit  $\vec{E}(x,y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$  und den Punkten  $A = (2,0)$ ,  $B = (0,4)$  (in kartesischen Koordinaten).

In Polarkoordinaten ist  $\vec{E}(r, \varphi) = r\vec{e}_r$ . Das Feld ist also radialsymmetrisch.

Es sei  $C = (0, 2)$ . Der Kreisbogen  $\widehat{AC}$  entspricht einem Kreisbogen mit  $r = 2$  und  $\varphi \in [0, \pi/2]$ . Wir verwenden also den Parameter  $\varphi \in [0, \pi/2]$  und das Wegelement  $\vec{ds} = r\vec{e}_\varphi d\varphi = 2\vec{e}_\varphi d\varphi$ . Da  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$  orthogonal zueinander sind, gilt  $\vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$ , d.h.  $U_{AC} = 0$ .

Die Strecke  $\overline{CB}$  liegt auf einem Strahl. Der Winkel  $\varphi = \pi/2$  bleibt also konstant. Wir verwenden den Radius  $r \in [2, 4]$  als Parameter. Das Wegelement ist somit  $\vec{ds} = \vec{e}_r dr$ .

Wir erhalten nun  $\vec{E} \cdot \vec{ds} = r\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr = r dr$ , d.h.

$$U_{CB} = \int_2^4 r dr = r^2/2 \Big|_2^4 = 8 - 2 = 6.$$

In analoger Weise können auch die Wegelemente  $\vec{ds}$  für Zylinder- und Kugelkoordinaten ermittelt werden.

Die Wegelemente  $\vec{ds}$  im 3-dimensionalen Raum lauten wie folgt:

- Kartesische Koordinaten:  $\vec{ds} = [\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z] dt$ ,
- Zylinderkoordinaten:  $\vec{ds} = [\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z] dt$ ,
- Kugelkoordinaten:  $\vec{ds} = [\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi] dt$ .

**Beispiel 2.3.2** (Linienladung). Ein E-Feld einer Linienladung ist in Zylinderkoordinaten

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\vec{e}_\rho.$$

Wir suchen eine Formel zur Berechnung der Spannung zwischen zwei Punkten A und B. Sei  $\vec{r}(t)$  mit  $t \in [t_A, t_B]$  eine Kurve von A nach B. Dann ist in Zylinderkoordinaten

$$\vec{E} \cdot \vec{ds} = \left[\frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\vec{e}_\rho\right] \cdot [\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z] \cdot dt = \frac{\lambda\dot{\rho}}{2\pi\epsilon\rho} dt = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho} d\rho,$$

$$\text{d.h. } U_{AB} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_{\rho_A}^{\rho_B} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln(\rho_B/\rho_A).$$

**Beispiel 2.3.3** (Durchflutungsgesetz). Es sei ein stromdurchflossener Leiter auf der z-Achse gegeben, d.h.  $\vec{I} = I \cdot \vec{e}_z$ . Dann ist entlang jeder geschlossenen Kurve, welche die z-Achse umschließt

$$I = \int \vec{H} \cdot \vec{ds}.$$

Wegen der Symmetrie und der Rechtsschraubenregel können wir  $\vec{H} = H(\rho)\vec{e}_\varphi$  annehmen. Wir integrieren nun entlang eines Kreises mit Radius  $\rho$  um die z-Achse. Dann ist  $\vec{ds} = \vec{e}_\varphi \rho d\varphi$  mit  $\varphi \in [0, 2\pi]$  und somit

$$I = \int \vec{H} \cdot \vec{ds} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} H(\rho)\rho d\varphi = 2\pi H(\rho)\rho.$$

Für das Magnetfeld gilt somit  $H(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho}$ .

**Aufgabe 2.3.1.** Gegeben sei ein Vektorfeld  $\vec{F} = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$  in Zylinderkoordinaten. Berechnen Sie das Integral  $\int \vec{F} \cdot d\vec{s}$  entlang eines Kreises mit Radius  $\rho = 2$ ,  $z = 1$  und  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

## 2.4 Integrale über Vektoren

Bei Magnetfeldern werden Integrale oft über vektoriellen Größen berechnet. Sind die Basisvektoren unabhängig vom Parameter, so kann komponentenweise integriert werden.

Für Vektorfelder  $\vec{f}(t) = f_x(t)\vec{e}_x + f_y(t)\vec{e}_y + f_z(t)\vec{e}_z$  mit  $t \in [t_1, t_2]$  gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{f}(t) dt = \left( \int_{t_1}^{t_2} f_x(t) dt \right) \vec{e}_x + \left( \int_{t_1}^{t_2} f_y(t) dt \right) \vec{e}_y + \left( \int_{t_1}^{t_2} f_z(t) dt \right) \vec{e}_z.$$

Für Vektorfelder in  $\mathbb{R}^2$  gilt dies analog.

**Beispiel 2.4.1.** Wir wollen das Integral  $\int_L \vec{e}_y \times d\vec{s}$  über einem Kreisbogen mit Radius  $R$  und  $\varphi \in [0, \pi]$  berechnen.

Für den Kreisbogen gilt  $d\vec{s} = R\vec{e}_\varphi d\varphi$ . Somit ist

$$\vec{e}_y \times R\vec{e}_\varphi d\varphi = \vec{e}_y \times R(-\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y) d\varphi = R\sin(\varphi)\vec{e}_z d\varphi.$$

Das gesuchte Integral lautet somit

$$\int_L \vec{e}_y \times d\vec{s} = \int_0^\pi R\sin(\varphi)\vec{e}_z d\varphi.$$

Wir integrieren also über einem Vektor. Da aber  $\vec{e}_z$  nicht von der Integrationsvariablen  $\varphi$  abhängt, können wir den Vektor vor das Integral ziehen:

$$\int_0^\pi R\sin(\varphi)\vec{e}_z d\varphi = R\vec{e}_z \int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi = 2R\vec{e}_z.$$

Das Ergebnis der Integration ist also der Vektor  $2R\vec{e}_z$ .

**Aufgabe 2.4.1.** Berechnen Sie das Integral

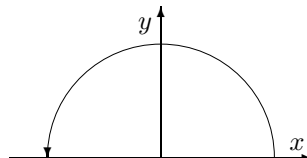
$$\int_{t=0}^3 \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix} dt.$$

Auch die Basisvektoren können abhängig von der Integrationsvariablen sein. Dann muss das Vektorfeld in kartesische Koordinaten umgerechnet werden.

**Beispiel 2.4.2.** Wir wollen  $d\vec{s} = r d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$  entlang einer Kreislinie integrieren.

Wir suchen also den Vektor

$$\vec{L} = \int_L d\vec{s} = \int_0^\pi r d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi.$$



Leider ist der Vektor  $\vec{e}_\varphi$  von  $\varphi$  abhängig, d.h. wir dürfen  $\vec{e}_\varphi$  nicht vor das Integral ziehen. Wir gehen deshalb ins kartesische Koordinatensystem über. Es ist  $\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y$ . Also gilt

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int_0^\pi r \, d\varphi \cdot (-\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y) \\ &= -r\vec{e}_x \underbrace{\int_0^\pi \sin(\varphi) \, d\varphi}_{=2} + r\vec{e}_y \underbrace{\int_0^\pi \cos(\varphi) \, d\varphi}_{=0} \\ &= -2r\vec{e}_x.\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.4.2.** Berechnen Sie das mit Zylinderkoordinaten gegebene Integral

$$\int_{\varphi=0}^\pi \vec{e}_\rho \, d\varphi.$$

Beachten Sie, dass der Vektor  $\vec{e}_\rho$  von  $\varphi$  abhängt.

In den folgenden Kapiteln wollen wir uns einige Anwendungsaufgaben aus der Elektrotechnik ansehen, welche derartige Integrale verwenden.

## 2.5 Kraft auf stromdurchflossene Leiter

Es sei  $\vec{B}$  die Flussdichte von einem Magnetfeld. Wenn ein stromdurchflossener endlicher Leiter in dieses Feld gebracht wird, dann wirkt eine Kraft auf diesen Leiter. Es gilt

$$\vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B}.$$

Dabei ist  $d\vec{s}$  das Linienelement des Leiters. Die Richtung dieses Vektors muss stets in Flussrichtung des Stromes zeigen.

Es wird also die Kurve  $\vec{r}(t)$  angegeben, welche die Lage des Leiters beschreibt. Hieraus werden  $d\vec{s} = \dot{\vec{r}} dt$  und die Integralgrenzen ermittelt. Dann berechnet man das Vektorprodukt  $\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$ . Wenn alle Basisvektoren unabhängig vom Parameter  $t$  sind, so kann man komponentenweise integrieren. Ist dies nicht der Fall, muss man  $\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$  vorher in kartesische Koordinaten umrechnen.

**Beispiel 2.5.1.** Auf der  $z$ -Achse befinde sich ein unendlich langer Leiter, in welchem ein Strom  $I_1$  in  $z$ -Richtung fließt. Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld mit

$$\vec{B} = \frac{I_1 \mu}{2\pi a} \vec{e}_\varphi.$$

Parallel zur  $z$ -Achse sei ein Leiter mit  $z \in [z_1, z_2]$  und Abstand  $a$  zur  $z$ -Achse. In ihm fließt ein Strom  $I_2$  in  $z$ -Richtung. Wir wollen die Kraft auf den 2. Leiter berechnen.



Wir berechnen die Kraft mit der Formel

$$\vec{F} = I_2 \int_L \vec{ds} \times \vec{B}.$$

Dabei benötigen wir die Ortsvektoren zum 2. Leiter und das zugehörige Kurvenelement

$$\vec{r}(t) = t\vec{e}_z + a\vec{e}_\rho, \quad t \in [z_1, z_2],$$

$$\vec{ds} = \vec{e}_z dt.$$

Wir berechnen nun das Vektorprodukt

$$\vec{ds} \times \vec{B} = \vec{e}_z dt \times \frac{I_1 \mu}{2\pi a} \vec{e}_\varphi = \frac{I_1 \mu dt}{2\pi a} \vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = \frac{I_1 \mu dt}{2\pi a} (-\vec{e}_\rho)$$

und setzen dieses mit den Integralgrenzen  $t \in [z_1, z_2]$  in das Integral ein. Die Kraft

$$\vec{F} = I_2 \int_L \vec{ds} \times \vec{B} = \frac{I_1 I_2 \mu}{2\pi a} (-\vec{e}_\rho) \int_{z_1}^{z_2} dt = -\frac{\mu I_1 I_2 (z_2 - z_1)}{2\pi a} \vec{e}_\rho.$$

wirkt also in Richtung zur  $z$ -Achse. Die Leiter ziehen sich gegenseitig an.

**Beispiel 2.5.2.** Auf der  $z$ -Achse befindet sich ein unendlich langer Leiter mit einem Strom  $I_1$ , welcher ein Magnetfeld mit

$$\vec{B} = \frac{I_1 \mu}{2\pi a} \vec{e}_\varphi$$

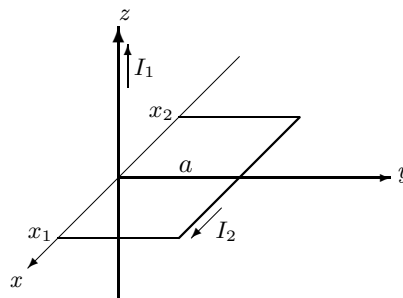
erzeugt. Ein 2. Leiter liegt in der  $x$ - $y$ -Ebene mit Abstand  $a$  zur  $x$ -Achse und  $x \in [x_1, x_2]$ . Der Strom  $I_2$  fließt in Richtung  $\vec{e}_x$ .

Gesucht ist die Kraft auf den 2. Leiter.

**Lösung:** Der 2. Leiter ist gegeben durch die Kurve

$$\vec{r}(x) = x\vec{e}_x + a\vec{e}_y \quad \text{mit } x \in [x_1, x_2].$$

$$\text{Also ist } \vec{ds} = \vec{e}_x dx.$$



Als nächstes transformieren wir die Flussdichte des Magnetfeldes

$$\vec{B} = \frac{I_1 \mu}{2\pi a} \vec{e}_\varphi$$

in kartesische Koordinaten (siehe Beispiel 1.2.2). Wegen der Lage des 2. Leiters kann  $y = a$  gesetzt werden:

$$\vec{B} = \frac{\mu I_1}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu I_1}{2\pi(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu I_1}{2\pi(x^2 + a^2)} \begin{pmatrix} -a \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\vec{ds} \times \vec{B} &= \frac{\mu I_1 dx}{2\pi(x^2 + a^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu I_1}{2\pi} \frac{xdx}{a^2 + x^2} \vec{e}_z, \\ \vec{F} &= I_2 \int_L \vec{ds} \times \vec{B} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi} \vec{e}_z \int_{x_1}^{x_2} \frac{xdx}{a^2 + x^2} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi} \vec{e}_z \cdot \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \vec{e}_z \cdot \ln \left( \frac{a^2 + x_2^2}{a^2 + x_1^2} \right).\end{aligned}$$

Der zweite Leiter wird also nach oben verschoben.

**Beispiel 2.5.3.** Auf der  $z$ -Achse befindet sich ein unendlich langer Leiter mit einem Strom  $I_1$ , welcher ein Magnetfeld mit einer Flussdichte

$$\vec{B} = \frac{I_1 \mu}{2\pi a} \vec{e}_\varphi$$

erzeugt. Ein zweiter Leiter liegt auf der Strecke  $\overline{AB}$  mit  $A = (1m, 1m, 1m)$  und  $B = (2m, 2m, 2m)$ . Der Strom  $I_2$  fließt in Richtung  $\overrightarrow{AB}$ . Gesucht ist die Kraft auf den 2. Leiter.

**Lösung:** Wir bestimmen zunächst die Strecke  $\overline{AB}$  mittels Geradengleichung und geben das Linienelement  $\vec{ds}$  an. Es ist

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \overrightarrow{OA} + t(\overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix} 1m \\ 1m \\ 1m \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1m \\ 1m \\ 1m \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0, 1] \text{ und} \\ \vec{ds} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} m \cdot dt \text{ das zugehörige Linienelement.}\end{aligned}$$

Durch den Strom  $I_1$  entlang der  $z$ -Achse wird ein Magnetfeld erzeugt. Wir benötigen nun die Flussdichte dieses Feldes in allen Punkten des zweiten Leiters. Wir geben also  $\vec{B}$  in kartesischen Koordinaten an und ersetzen  $x, y$  und  $z$  mittels  $\vec{r}(t)$ . Also gilt

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu I_1}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu I_1}{2\pi(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu I_1}{2\pi(2(1+t)^2 m^2)} \begin{pmatrix} -(1+t)m \\ (1+t)m \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu I_1}{4\pi(1+t)m} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nun können wir das Vektorprodukt ausrechnen und in das Integral einsetzen:

$$\vec{ds} \times \vec{B} = \frac{\mu I_1 m dt}{4\pi(1+t)m} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu I_1 dt}{4\pi(1+t)} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= I_2 \int_L \vec{ds} \times \vec{B} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ln|1+t| \Big|_0^1 \\
&= \frac{\mu I_1 I_2 \ln(2)}{4\pi} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.5.1.** In der  $x$ - $y$ -Ebene befinde sich ein kreisförmiger stromdurchflossener Leiter mit Strom  $I$  und Radius  $R$ . Desweiteren sei ein homogenes Magnetfeld  $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$  gegeben.

Welche Kraft wirkt auf ein Leiterstück mit  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ ? Welche Kraft wirkt insgesamt auf den Leiter?

## 2.6 Das Gesetz von Biot-Savart

Um einen mit Strom durchflossenen Leiter entsteht ein Magnetfeld. Die Flussdichte  $\vec{B}$  dieses Magnetfeldes in einem Punkt  $P$  kann mit dem Gesetz von Biot-Savart

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{\vec{ds} \times \vec{r}}{r^3}$$

berechnet werden. Analog gilt für die magnetische Feldstärke  $\vec{H} = \vec{B}/\mu$

$$\vec{H}(P) = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\vec{ds} \times \vec{r}}{r^3}.$$

**Achtung:**  $\vec{r}$  ist hier der Abstandsvektor. Es zeigt also von den Punkten auf dem Leiter zum Punkt  $P$ . Wenn wir also mit  $\vec{r}'(P)$  den Ortsvektor von  $P$  kennzeichnen und mit  $\vec{r}'(t)$  den Kurvenverlauf des Leiters, so ist auch der Abstandsvektor parameterabhängig und es gilt  $\vec{r}(t) = \vec{r}'(P) - \vec{r}'(t)$ . Zur Berechnung von  $\vec{ds}$  muss der Kurvenvektor  $\vec{r}'(t)$  verwendet werden, d.h.  $\vec{ds} = \dot{\vec{r}}'(t) \cdot dt$ .

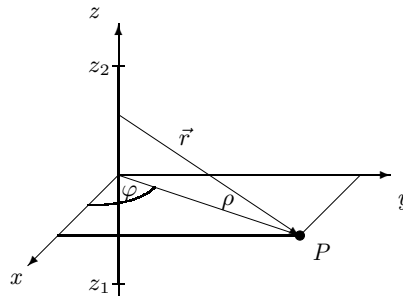
**Beispiel 2.6.1.** Gegeben ist ein endlicher Leiter auf der  $z$ -Achse mit einem Strom  $I$  in Richtung  $\vec{e}_z$ . Sei  $P$  ein Punkt in der  $x$ - $y$ -Ebene mit Abstand  $\rho$  zur  $z$ -Achse. Gesucht ist  $\vec{B}(P)$ .

Wir verwenden den Satz von Biot-Savart

$$\vec{B}(P) = \frac{I\mu}{4\pi} \int_L \frac{\vec{ds} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Es ist  $\vec{r}'(P) = \rho \vec{e}_\rho$ . Für die Beschreibung des Leiters verwenden wir den Parameter  $z$ , d.h.

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(z) &= z \vec{e}_z \quad \text{mit } z \in [z_1, z_2], \\
\vec{ds} &= \vec{e}_z dz.
\end{aligned}$$



Wir erhalten somit den Abstandsvektor  $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho - z \vec{e}_z$  mit  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ . Wir berechnen nun das Vektorprodukt

$$d\vec{s} \times \vec{r} = \vec{e}_z dz \times (\rho \vec{e}_\rho - z \vec{e}_z) = \rho dz \vec{e}_\varphi$$

und setzen dieses in die Formel ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \vec{B}(P) &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho dz \vec{e}_\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu I \rho \vec{e}_\varphi}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu I \rho \vec{e}_\varphi}{4\pi} \frac{1}{\rho^2} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_{z_1}^{z_2} \\ &= \frac{\mu I \vec{e}_\varphi}{4\pi \rho} \left( \frac{z_2}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right). \end{aligned}$$

Der Leiter ist unendlich lang für  $z_2 \rightarrow \infty$  und  $z_1 \rightarrow -\infty$ . Es gilt dann

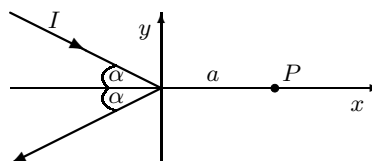
$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2/z^2 + 1}} = 1$$

$$\text{und somit} \quad \vec{B}_\infty(P) = \frac{\mu I \vec{e}_\varphi}{4\pi \rho} (1 + 1) = \frac{\mu I \vec{e}_\varphi}{2\pi \rho}.$$

**Aufgabe 2.6.1.** Ein unendlich langer Leiter mit einem Knick sei in der  $x$ - $y$ -Ebene gegeben (siehe Skizze).

Zeigen Sie, dass im Punkt  $P = (a, 0, 0)$  mit  $a > 0$  gilt:

$$\vec{B} = \frac{\mu I \vec{e}_z}{2\pi a} \cdot \frac{(1 - \cos(\alpha))}{\sin(\alpha)}.$$



Berechnen Sie hierfür mit Hilfe von Beispiel 2.6.1 die magnetischen Flussdichten, welche in  $P$  von den beiden Leiterstücken jeweils erzeugt werden.

**Beispiel 2.6.2.** Wir betrachten eine Leiterschleife in der  $x$ - $y$ -Ebene mit Radius  $R$  und Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Es fließe ein Strom entgegen des Uhrzeigersinns. Wir berechnen die magnetische Flussdichte im Koordinatenursprung:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Berechnungsvariante 1 (Winkel als Parameter): Die Leiterschleife ist gegeben durch die Ortsvektoren

$$\vec{r}'(\varphi) = R \vec{e}_\rho(\varphi) \quad \text{mit dem Winkel} \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Dann ist  $d\vec{s} = \dot{\vec{r}}' d\varphi = R \vec{e}_\varphi d\varphi$ . Es ist  $\vec{r} = \vec{OP} - \vec{r}' = -R \vec{e}_\rho$  und  $r = R$ . Wir erhalten

$$d\vec{s} \times \vec{r} = -R^2 d\varphi \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\rho = R^2 \vec{e}_z d\varphi, \quad \text{d.h.}$$

$$\vec{B} = \frac{I \mu \vec{e}_z}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I \mu \vec{e}_z}{2R}.$$

Berechnungsvariante 2 (Bogenlänge als Parameter): Sei  $s$  die Länge des Kreisbogens ab  $(R, 0)$  gemessen, d.h.  $s \in [0, 2\pi R]$ . Dann ist  $\vec{ds} = \vec{e}_\varphi ds$  und somit

$$\vec{ds} \times \vec{r} = \vec{e}_\varphi ds \times (-R\vec{e}_\rho) = R\vec{e}_z ds.$$

Es folgt

$$\vec{B} = \frac{I\mu\vec{e}_z}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{I\mu\vec{e}_z}{2R}.$$

**Beispiel 2.6.3.** In der  $y$ - $z$ -Ebene sei ein Leiter auf einer Parabel  $z = (y/2)^2/a$  gegeben mit  $y \in [-2a, 2a]$ ,  $a > 0$ . Der Strom fließe von negativem zu positivem  $y$ . Gesucht ist das H-Feld im Punkt  $P = (0, 0, a)$ .

**Lösung:** Wir verwenden den Satz von Biot-Savart und  $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ , d.h.

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\vec{ds} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Als erstes benötigen wir die Kurvenbeschreibung und das Wegelement. Als Parameter verwenden wir dabei  $t = y/2a$ , d.h.  $t \in [-1, 1]$ . Der Leiter ist dann gegeben durch

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2ta \\ t^2a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{ds} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 2ta \end{pmatrix} dt.$$

Hieraus können wir den Abstandsvektor

$$\vec{r} = \vec{OP} - \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2ta \\ a - t^2a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = a \cdot \sqrt{4t^2 + (1 - t^2)^2} = (1 + t^2)a$$

berechnen. Wir erhalten somit das Kreuzprodukt

$$\vec{ds} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 2ta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2ta \\ a - t^2a \end{pmatrix} dt = 2a^2(1 + t^2)\vec{e}_x dt.$$

Wir setzen alle Zwischenergebnisse in den Satz von Biot-Savart ein. Es folgt

$$\vec{H} = \frac{I\vec{e}_x}{2\pi a} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1 + t^2)^2} = \frac{I\vec{e}_x}{2\pi a} \left[ \frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} \arctan(t) \right]_{-1}^1 = \frac{I\vec{e}_x}{2\pi a} \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

**Aufgabe 2.6.2.** In der  $y$ - $z$ -Ebene sei ein unendlich langer Leiter auf einer Parabel  $z = (y/2)^2/a$  gegeben mit  $y \in (-\infty, \infty)$ ,  $a > 0$ . Der Strom fließe von negativem zu positivem  $y$ . Gesucht ist das H-Feld im Punkt  $P = (0, 0, a)$ .

Vergleichen Sie die Aufgabe mit Beispiel 2.6.3. Was ändert sich im Lösungsweg?



## Kapitel 3

# Mehrfachintegrale

Als magnetischen Fluss, der eine Fläche  $A$  durchsetzt, bezeichnet man die Größe

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Dabei ist  $\vec{B}$  die Flussdichte eines gegebenen Magnetfeldes. Vergleicht man Magnetfeld und elektrisches Feld, so ist der magnetische Fluss im Magnetfeld vergleichbar zum Strom im elektrischen Feld. Es wird zur Berechnung von magnetischen Kreisen und Induktivität benötigt.

Die Fläche entspricht meist der Fläche, welche von einer Leiterschleife eingeschlossen wird. Das gerichtete Flächenelement ist

$$d\vec{A} = \vec{n}^0 \cdot dA,$$

wobei  $dA$  das ungerichtete Flächenelement ist und  $\vec{n}^0$  der Normalenvektor der Fläche. Wir wollen zunächst die Berechnung für einfache Flächen wiederholen.

### 3.1 Flächen und Flächenelemente

Eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$  kann man durch einen Ortsvektor beschreiben, der von zwei Parametern  $u, v$  abhängt. Die Koordinaten  $x, y$  und  $z$  der Flächenpunkte sind also Funktionen dieser Parameter:

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = x(u, v) \vec{e}_x + y(u, v) \vec{e}_y + z(u, v) \vec{e}_z.$$

Die Parameter  $u, v \in \mathbb{R}$  heißen Flächenparameter.

Zu den Flächen, welche wir bereits untersucht haben, gehören Ebenen, Zylindermantel und Kugeloberfläche.

**Ebenen** haben die Darstellung

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}(P_0) + u\vec{a} + v\vec{b} \quad \text{mit} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist  $\vec{r}(P_0)$  der Ortsvektor eines Punktes der Ebene. Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind die Richtungsvektoren. Sie müssen linear unabhängig sein, d.h.  $|\vec{a} \times \vec{b}| \neq 0$ .

Es sind	Normalenvektor:	$\vec{n}^0 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{ \vec{a} \times \vec{b} },$
	ungerichtetes Flächenelement:	$dA =  \vec{a} \times \vec{b}  \cdot du \cdot dv,$
	gerichtetes Flächenelement:	$d\vec{A} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot du \cdot dv.$

Wir werden fast ausschließlich mit Ebenen arbeiten. Zur Ergänzung geben wir aber noch den Zylindermantel und die Kugeloberfläche an.

Der **Zylindermantel** symm. zur z-Achse mit Radius  $\rho$  hat die Darstellung

$$\vec{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} x(\varphi, z) \\ y(\varphi, z) \\ z(\varphi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$

Es sind	Normalenvektor:	$\vec{n}^0 = \vec{e}_\rho,$
	ungerichtetes Flächenelement:	$dA = \rho \cdot d\varphi \cdot dz,$
	gerichtetes Flächenelement:	$d\vec{A} = \rho \vec{e}_\rho \cdot d\varphi \cdot dz.$

Bei der **Kugeloberfläche** ist der Radius  $r$  konstant. Die Winkel  $\theta$  und  $\varphi$  werden als Parameter verwendet:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \\ z(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Es sind	Normalenvektor:	$\vec{n}^0 = \vec{e}_r,$
	ungerichtetes Flächenelement:	$dA = r^2 \sin(\theta) \cdot d\varphi \cdot d\theta,$
	gerichtetes Flächenelement:	$d\vec{A} = r^2 \sin(\theta) \vec{e}_r \cdot d\varphi \cdot d\theta.$

Wenn eine Flächendarstellung  $\vec{r}(u, v)$  vorliegt bei der die Parameter  $u, v$  auf Intervalle beschränkt sind, dann entsprechen die Intervallgrenzen den Integralgrenzen im Integral  $\iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$ , wobei in einer beliebigen Reihenfolge bzgl.  $u$  und  $v$  integriert wird.

**Beispiel 3.1.1.** Gegeben ist ein Magnetfeld  $\vec{B} = B(\rho) \cdot \vec{e}_z$  und eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius  $R$  in der  $x$ - $y$ -Ebene. Wir wollen den magnetischen Fluss durch die vom Leiter aufgespannte Fläche berechnen.

Mit Zylinderkoordinaten ist  $\vec{n}^0 = \vec{e}_z$  und  $dA = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$ , und somit gilt

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint B(\rho) dA = \int_{\rho=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} B(\rho) \rho d\varphi d\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^R B(\rho) \rho d\rho.$$

Dies kann ausgerechnet werden, wenn  $B(\rho)$  explizit gegeben ist.



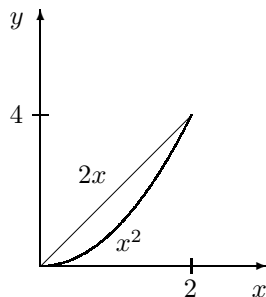
## 3.2 Bestimmung von Integralgrenzen

Bei Flächen- und Volumenintegralen waren die Variablen bisher auf Intervalle begrenzt. Wir wollen nun diese Einschränkung fallen lassen. Hierzu betrachten wir zunächst Integrale der Form

$$\iint f(x, y) dA.$$

Im Allgemeinen ist die Grundmenge kein Rechteck oder Kreisausschnitt. Die Variablen sind nicht einfach in Intervallen.

**Beispiel 3.2.1.** Wir berechnen den Flächeninhalt von folgendem Gebiet, d.h. wir bestimmen das Integral  $A = \iint dA$ . Das Gebiet wird von Funktionen  $y = g_1(x) = x^2$  und  $y = g_2(x) = 2x$  begrenzt. Es ist  $x \in [0, 2]$ . Ein solcher Flächeninhalt kann berechnet werden, indem man über der Differenz  $g_2(x) - g_1(x)$  integriert, d.h.



$$A = \int_{x=0}^2 [2x - x^2] dx = \left[ x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^2 = \frac{4}{3}.$$

Man sieht aber auch, dass man das Integral wie folgt schreiben kann:

$$A = \int_{x=0}^2 [g_2(x) - g_1(x)] dx = \int_{x=0}^2 \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx.$$

**Beispiel 3.2.2.** Es soll nun die Funktion  $f(x, y) = x + y$  über dem Gebiet aus Beispiel 3.2.1 integriert werden.

Dann ist für fixiertes  $x \in [0, 2]$  die Variable  $y$  im Bereich  $y \in [x^2, 2x]$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^2 \int_{y=x^2}^{2x} (x + y) dy dx &= \int_{x=0}^2 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{2x} dx \\ &= \int_{x=0}^2 [(2x^2 + 2x^2) - (x^3 + x^4/2)] dx = \int_{x=0}^2 [4x^2 - x^3 - x^4/2] dx \\ &= \left[ \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{10}x^5 \right]_0^2 = \frac{52}{15}. \end{aligned}$$

Wir können aber auch ein  $y \in [0, 4]$  fixieren. Dann ist die Variable  $x$  im Intervall  $[y/2, \sqrt{y}]$ . Die Integrationsgrenzen für  $x$  hängen also von  $y$  ab. Wir erhalten somit das Integral

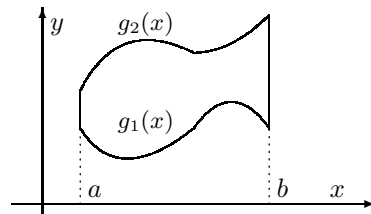
$$\begin{aligned} \int_{y=0}^4 \int_{x=y/2}^{\sqrt{y}} (x + y) dx dy &= \int_{y=0}^4 \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=y/2}^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_{y=0}^4 \left[ \frac{y}{2} + y\sqrt{y} \right] - \left[ \frac{y^2}{8} + \frac{y^2}{2} \right] dy = \int_{y=0}^4 \left[ \frac{y}{2} + y\sqrt{y} - \frac{5y^2}{8} \right] dy \\ &= \left[ \frac{y^2}{4} + \frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{5y^3}{24} \right]_{y=0}^4 = 4 + \frac{64}{5} - \frac{40}{3} = \frac{52}{15}. \end{aligned}$$

Wenn eine Funktion  $f(x, y)$  über einer Fläche der folgenden Form integriert werden soll, dann ist das Integral

$$\int_{x=a}^b \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

zu bestimmen. Dies gilt analog hierzu auch für Körper im  $\mathbb{R}^3$ .

Soll die Reihenfolge der Variablen vertauscht werden, müssen auch die Integralsgrenzen geändert werden.



**Beispiel 3.2.3.** Wir berechnen das Integral

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (y \cdot z) \, dz \, dy \, dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (y \cdot z) \, dz \, dy \, dx &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \left[ y \cdot z^2/2 \right]_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \left[ y/2 \cdot (1-x^2-y^2) \right] dy \, dx = \int_{x=0}^1 \left[ \frac{y^2}{4}(1-x^2) - \frac{y^4}{8} \right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left[ \frac{1-x^2}{4}(1-x^2) - \frac{(1-x^2)^2}{8} \right] dx = \int_{x=0}^1 \frac{(1-x^2)^2}{8} dx \\ &= \int_{x=0}^1 \frac{(1-2x^2+x^4)}{8} dx = \left[ \frac{x}{8} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{40} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Die beiden äußeren Integrale deuten auf einen Kreis mit Radius 1 hin. Am innersten Integral erkennt man zudem die Kugelgleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  mit  $R = 1$ .

Das angegebene Integrationsgebiet ist also der Durchschnitt von  $\mathbb{R}_+^3$  mit einer Kugel mit Radius  $R = 1$  und Mittelpunkt  $(0, 0, 0)$ .

**Aufgabe 3.2.1.** Berechnen Sie die Aufgabe aus Beispiel 3.2.3 mittels Kugelkoordinaten.

**Aufgabe 3.2.2.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_{x=1}^2 \int_{y=1}^x \left( \frac{1}{y^2} + e^x \right) dy \, dx$$

und skizzieren Sie die Fläche, welche durch die angegebenen Grenzen beschrieben wird. Wie sieht das Integral aus, wenn bei der Integration die Reihenfolge der Variablen geändert wird? Berechnen Sie auch dieses Integral und vergleichen Sie die Ergebnisse.

**Aufgabe 3.2.3.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_{x=0}^2 \int_{y=x}^2 (x^2 + 4xy) dy \, dx$$

und skizzieren Sie die Fläche, welche durch die angegebenen Grenzen beschrieben wird. Wie sieht das Integral aus, wenn bei der Integration die Reihenfolge der Variablen geändert wird? Berechnen Sie auch dieses Integral und vergleichen Sie die Ergebnisse.

### 3.3 Anwendung: Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss eines Magnetfeldes  $\Phi$  gibt an, wieviel Flussdichte eine gegebene Fläche in Richtung der Flächennormalen durchsetzt:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Ist die Fläche geschlossen, d.h. Gesamtoberfläche eines Körpers, so gilt stets

$$\Phi = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0.$$

Benötigt wird der magnetische Fluss z.B. zur Berechnung der Induktivität von Spulen.

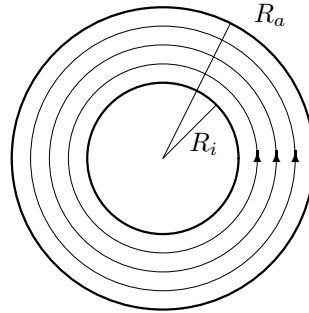
Als Spulen bezeichnet man Bauelemente, welche magnetische Energie speichern können. Die einfachste Spulenform ist die Ringkernspule (Toroidspule). Diese besteht aus einem ringförmigen Kern ( $\mu \gg \mu_0$ ), welcher gleichmäßig und dicht mit dünnem Draht bewickelt ist.

Hat dieser Draht  $N$  Windungen und fließt in ihm ein Strom  $I$ , so wird im Kern ein magnetisches Feld mit

$$\vec{H} = \frac{NI}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi \quad \text{bzw.} \quad \vec{B} = \frac{NI\mu}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

erzeugt. Diese Formel erhält man mit dem Durchflutungsgesetz und Zylinderkoordinaten.

Vereinfachend kann mitunter angenommen werden, dass der Wert  $B$  der Flussdichte im Ringkern überall gleich ist. Dies ist z.B. für  $R_a \approx R_i$  möglich.

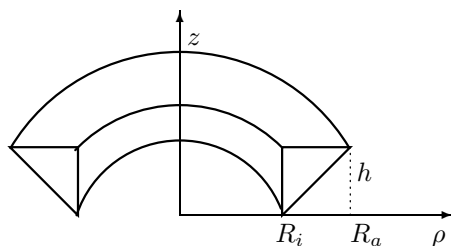


Wird der Wert  $B$  der Flussdichte im Ringkern als überall gleich angenommen, so kann der Abstand  $\rho$  durch den durchschnittlichen Radius  $R_m = (R_i + R_a)/2$  ersetzt werden. Es ist dann

$$\vec{B} = \frac{NI\mu}{2\pi R_m} \vec{e}_\varphi = \frac{NI\mu}{l_m} \vec{e}_\varphi.$$

Dabei ist  $l_m = 2\pi R_m$  der durchschnittliche Umfang des Kerns.

**Beispiel 3.3.1.** Es sei eine Ringkernspule gegeben mit der magnetischen Flussdichte  $\vec{B} = \frac{NI\mu}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$ . Der Querschnitt der Spule sei ein Dreieck. Wir wollen den magnetischen Fluss in der Ringspule berechnen.



Für die Querschnittsflächen verwenden wir das Flächenelement

$$d\vec{A} = d\rho dz \vec{e}_\varphi.$$

Die Integralgrenzen können jedoch nicht durch einfache Intervalle angegeben werden.

Ist  $\rho \in [R_i, R_a]$  fixiert, so ist  $z \in [z_u, h]$  mit  $z_u = \frac{h(\rho - R_i)}{R_a - R_i}$  vom Wert  $\rho$  abhängig. Wir erhalten somit

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{\rho=R_i}^{R_a} \int_{z=z_u}^h \frac{IN\mu}{2\pi\rho} dz d\rho = \frac{IN\mu}{2\pi} \int_{\rho=R_i}^{R_a} (h - z_u) \frac{d\rho}{\rho}.$$

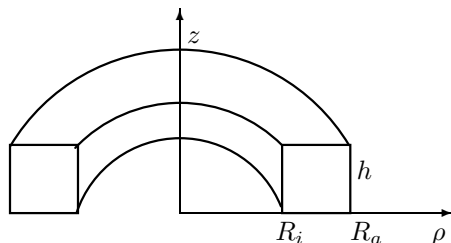
Es ist nun

$$h - z_u = h - \frac{h(\rho - R_i)}{R_a - R_i} = h \cdot \frac{(R_a - R_i) - (\rho - R_i)}{R_a - R_i} = h \cdot \frac{R_a - \rho}{R_a - R_i}.$$

Wir können nun die Berechnung des Flusses  $\Phi$  fortsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{IN\mu h}{2\pi(R_a - R_i)} \int_{\rho=R_i}^{R_a} \frac{R_a - \rho}{\rho} d\rho = \frac{IN\mu h}{2\pi(R_a - R_i)} \left[ R_a \cdot \ln(\rho) - \rho \right]_{\rho=R_i}^{R_a} \\ &= \frac{IN\mu h}{2\pi(R_a - R_i)} \left[ R_a \cdot \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right) - (R_a - R_i) \right]. \end{aligned}$$

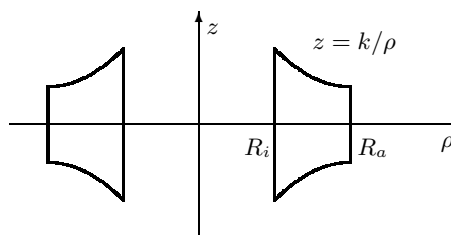
**Aufgabe 3.3.1.** Es sei eine Ringkernspule gegeben mit  $\vec{B} = \frac{IN\mu}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$ .



Der Querschnitt der Spule sei ein Rechteck, wie in der Abbildung angegeben.

Berechnen Sie den magnetischen Fluss in der Ringspule.

**Aufgabe 3.3.2.** Es sei eine Ringkernspule gegeben mit  $\vec{B} = \frac{IN\mu}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$ .



Wie groß ist der magnetische Fluss in der Spule, wenn für den gegebenen Querschnitt (siehe Abbildung)

$$R_i = R, \quad R_a = 2R \text{ und } k = R^2$$

gilt?

**Aufgabe 3.3.3.** Gegeben sei ein magnetisches Feld, dessen Flussdichte in Zylinderkoordinaten durch

$$\vec{B} = B_0 \cdot e^{-\rho/R} \cdot \vec{e}_z$$

gegeben ist. Wie groß ist der magnetische Fluss durch eine kreisförmige Leiterschleife in der  $x$ - $y$ -Ebene mit Radius  $R$  und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung?