Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente

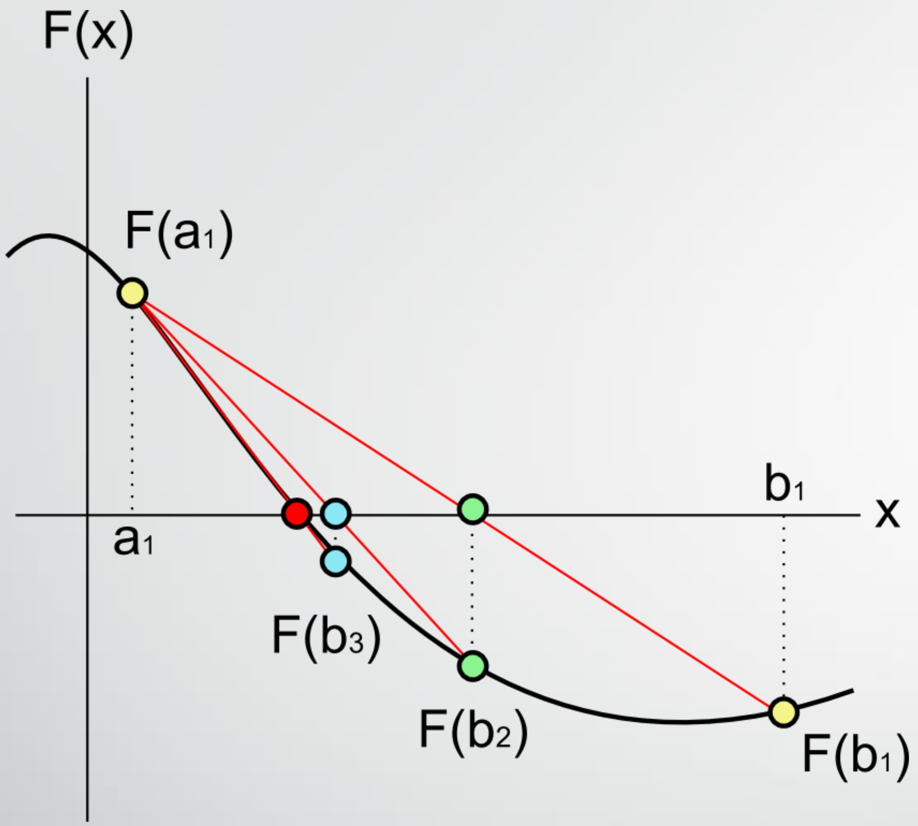
Gopleac Olivia
cl.12 T

Cuprins:

Metoda coardelor
(secantei)

În analiză numerică, **metoda coardei** (sau **metoda falsei poziții**) este o metodă de determinare a rădăcinii unei funcții pe un interval.

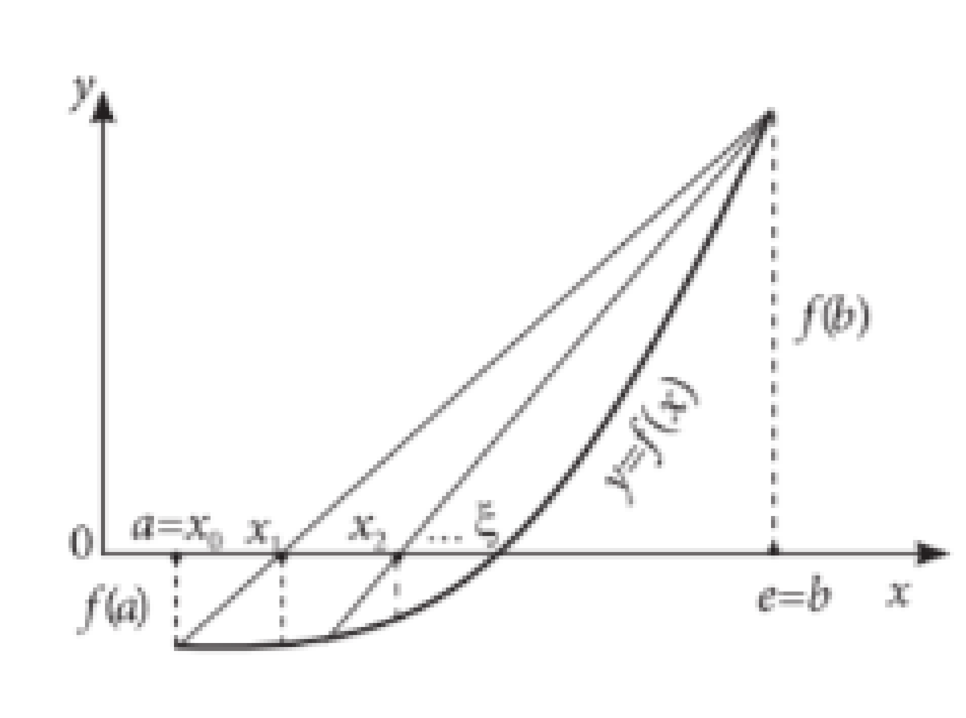
În cazurile în care rezultatul trebuie obținut printr-un număr redus de iterații, cu o exactitate înaltă este potrivită metoda coardelor, care constă în divizarea segmentului în părți proporționale, proporția fiind dată de punctul de intersecție al coardei care uneşte extremitățile segmentului cu axa ox.



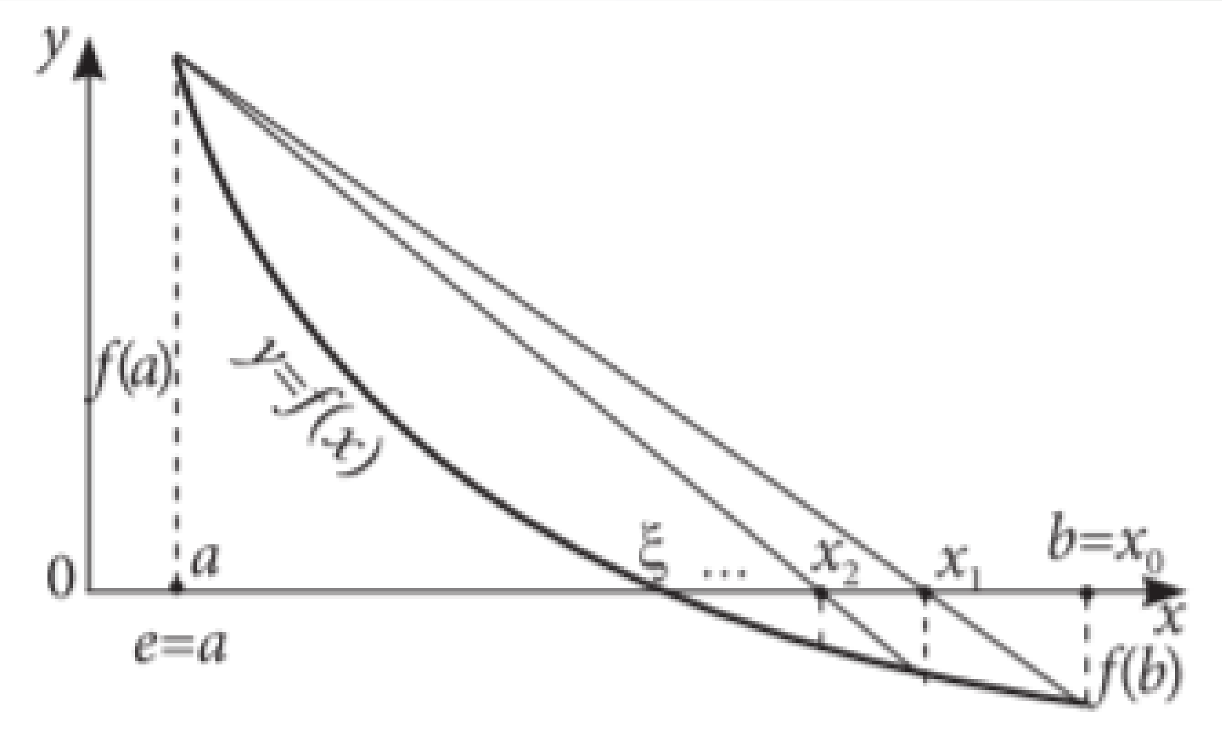
Etapele successive ale metodei coardei pe intervalul [a_1;b_1]. Rădăcina funcției este punctul marcat cu culoarea roşie

Metoda falsei poziții începe cu două puncte a_1 și b_1 astfel încât $f(a_1)$ și $f(b_1)$ sunt de semne opuse, ceea ce înseamnă, conform teoremei valorilor intermediare că funcția continuă f are cel puțin un zero în intervalul $[a_1, b_1]$.

Reprezentarea grafica



Apropierea succesivă de soluția ecuației prin metoda coardelor



Fie dată funcția $f(x)$, care posedă următoarele proprietăți:

1. $f(x)$ continuă pe segmentul $[a, b]$ şi $f(a) \times f(c) < 0$.

2. Pe segmentul $[a, b]$ există $f'(x) \neq 0$; $f''(x) \neq 0$, continui, iar semnul lor pe $[a, b]$ este constant.

Proprietățile enumerate garantează existența soluției unice a ecuației $f(x) = 0$ pe $[a, b]$.

Metoda coardelor presupune alegerea în calitate de aproximare a soluției punctul determinat de intersecția dreptei ce trece prin punctele $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$ cu axa ox.

Pentru realizarea metodei se stabileşte extremitatea e a segmentului $[a, b]$ prin care se va duce o serie de coarde. Această extremitate este determinată de condiția:

$$f(e) \times f''(e) > 0.$$

Cealaltă extremitate a segmentului [a, b] se consideră aproximare inițială a soluției: xo . Prin punctele (e, f(e)) şi (xo , f(xo)) se construieşte o coardă. Se determină punctul x1 în care coarda intersectează axa ox. Punctul x1 este considerat următoarea aproximare a soluției.

Procesul se repetă, coarda următoare fiind dusă prin punctele (e, f(e)) şi (x1 , f(x1)). Astfel se obține şirul de aproximări xo, x1, x2, … xi, xi+1, … xn …, limita căruia este soluția exactă a ecuației f(x) = 0.

Punctele e şi xo sînt cunoscute. Folosind ecuația dreptei ce trece prin două puncte, putem determina aproximarea x1 (f(x1) = 0):

$$\frac{x-x_0}{e-x_0}=\frac{y-f(x_0)}{f(e)-f(x_0)}, \qquad (1)$$

de unde

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f(e)-f(x_0)}(e-x_0). \qquad (2)$$

În general, avînd calculată aproximarea x_{i-1} , putem determina următoarea aproximare x_i prin formula recurentă:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f(e) - f(x_{i-1})}(e - x_{i-1}), \qquad (3)$$

i = 1, 2, …

Se demonstrează că şirul de valori x1, x2, … xi , xi+1, … xn … calculate după formula (3) converge către soluția ξ a ecuației f(x) = 0.

Eroarea metodei

Faptul că şirul aproximărilor succesive prin metoda coardelor converge către soluția exactă implică următoarea concluzie: eroarea soluției calculate va fi invers proporțională cu numărul de iterații efectuate. Totuşi se poate determina şi formula care permite estimarea erorii de calcul.

Daca f(x) satisface condițiile precedenta. Dacă ξ – soluția exactă a ecuației f(x) = 0 pe segmentul [a, b], iar M1 şi m1 – marginea superioară şi inferioară a f ′(x) pe acelaşi segment, din teorema Lagrange şi formula recurentă pentru calculul aproximărilor succesive rezultă:

$$|\xi - x_i| \le \left|\frac{M_1 - m_1}{m_1}\right| \times |x_i - x_{i-1}|, \text{ sau } \left|\frac{M_1 - m_1}{m_1}\right| \times |x_i - x_{i-1}| \le \varepsilon. \qquad (4)$$

Prin urmare, dacă se cere calculul soluției cu o exactitate dată ε, calculele se vor repeta conform formulei (3) pînă cînd inegalitatea (4) nu va deveni una adevărată.

Algoritmizarea metodei

Aplicarea metodei coardelor necesită o cercetare prealabilă a funcției f(x), pentru stabilirea extremității fixe, din care vor fi trasate coardele. Numărul n de aproximări succesive ale soluției poate fi indicat în enunțul problemei sau determinat de o condiție.

În ambele cazuri calculul se realizează conform formulei (3). Condiția de oprire în primul caz va fi aplicarea repetată de n ori a formulei (3); în cel de al doilea – îndeplinirea condiției (4).

Determinarea extremității fixe.

Pentru a evita calculul $f''(x)$, se va folosi următorul procedeu: se determină semnul f(x) în punctul c de intersecție cu axa ox al dreptei care trece prin punctele (a, f(a)) şi (b, f(b)). Fixă va fi acea extremitate e a segmentului [a, b], pentru care se îndeplineşte condiția: $f(e)\times f(c) < 0$.

A1. Algoritmul de calcul pentru un număr prestabilit n de aproximări succesive:

Pasul 1. Determinarea extremității fixe e și a aproximării x_0:

$$c \Leftarrow a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a);$$

dacă $f(c) \times f(a) < 0$, atunci $e \Leftarrow a$, $x_0 \Leftarrow b$, altfel $e \Leftarrow b$, $x_0 \Leftarrow a$; $i \Leftarrow 0$.

Pasul 2. Calculul x_{i+1} conform formulei $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f(e) - f(x_i)}(e - x_i)$.

Pasul 3. Dacă $i + 1 = n$, atunci soluția calculată $x \Leftarrow x_i$. SFÎRȘIT.
În caz contrar, $i \Leftarrow i+1$ și se revine la *pasul 2*.

A2. Algoritmul de calcul pentru o exactitate ε dată:

Deoarece în formula de estimare a erorii figurează mărimile M1 şi m1 , atunci cînd valorile lor nu sînt indicate în enunțul problemei, este necesară descrierea analitică a f ′(x) şi calcularea M1 şi m1 .

Pasul 1. Determinarea extremității fixe *e* și a aproximării x_0:

$$c \Leftarrow a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a);$$

dacă $f(c) \times f(a) < 0$, atunci $e \Leftarrow a, x_0 \Leftarrow b$, altfel $e \Leftarrow b, x_0 \Leftarrow a$; $i \Leftarrow 0$.

Pasul 2. Calculul x_{i+1} conform formulei $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f(e) - f(x_i)}(e - x_i)$.

Pasul 3. Dacă $\left|\dfrac{M_1 - m_1}{m_1}\right| \times |x_{i+1} - x_i| \le \varepsilon$, atunci soluția calculată $x \Leftarrow x_i$. SFÎRȘIT.

În caz contrar, $i \Leftarrow i+1$ și se revine la *pasul 2*.

Exemplu 1

Fie dată funcția f(x) = ln(xsinx). Să se calculeze soluția aproximativă a ecuației f(x) = 0 pe segmentul [0,5; 1,5] pentru 15 aproximări succesive, utilizînd metoda coardelor. Pentru acest exemplu, preprocesarea matematică nu este necesară. Deoarece numărul de aproximări succesive este fixat, iar extremitățile segmentului cunoscute, atribuirile respective vor fi realizate direct în corpul programului.

Preprocesarea matematică – nu este necesară.

Programul. Deoarece numărul de aproximări succesive este fixat, iar extremitățile segmentului cunoscute, atribuirile respective vor fi realizate direct în corpul programului.

Programul 1

```
program cn005;
var
      a,b,e,c,x: real;
      n,i: integer;

function f(x:real):real;
      begin
          f:=ln(x*sin(x));
      end;

begin
      a:=0.5; b:=1.5; n:=15;
      {determinarea extremitatii fixe e si a aproximarii initiale x0}
      c:=a-(f(a))/(f(b)-f(a))*(b-a);
      if f(c)*f(a)>0 then begin e:=b; x:=a; end
      else begin e:=a; x:=b; end;

      {calculul iterativ al solutiei}
      for i:=1 to n do
          begin
              x:= x-(f(x))/(f(e)-f(x))*(e-x);
              writeln(t,x:10:8,' ',f(x):12:8);
          end;
end.
```

Rezultate:

i= 1 x=1.27995775 f(x)= 0.20392348

i= 2 x=1.18251377 f(x)= 0.09028687

i= 3 x=1.14193561 f(x)= 0.03779857

i= 4 x=1.12538555 f(x)= 0.01546570

i= 5 x=1.11868644 f(x)= 0.00626938

i= 6 x=1.11598267 f(x)= 0.00253191

i= 7 x=1.11489268 f(x)= 0.00102097

i= 8 x=1.11445346 f(x)= 0.00041145

i= 9 x=1.11427651 f(x)= 0.00016577

i= 10 x=1.11420523 f(x)= 0.00006678

i= 11 x=1.11417651 f(x)= 0.00002690

i= 12 x=1.11416494 f(x)= 0.00001084

i= 13 x=1.11416028 f(x)= 0.00000437

i= 14 x=1.11415841 f(x)= 0.00000176

i= 15 x=1.11415765 f(x)= 0.00000071

Exemplu 2

Fie dată funcția $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7{,}5x - 1$. Să se calculeze soluția aproximativă a ecuației f(x) = 0 pe segmentul [–0,5; 0,5] cu exactitatea ε = 0,0001, utilizînd metoda coardelor. Pentru funcția dată pe [–0,5; 0,5] M_1 şi m_1 sînt, respectiv, egale cu 10 şi 5.

Preprocesarea matematică nu este necesară, deoarece mărimile necesare pentru calculul soluției cu exactitatea cerută sînt indicate în enunț.

Program

Pentru simplitate atribuirile necesare vor fi realizate direct în corpul programului.

Programul 2

```
program cn08;
var
   Msup,minf,a,b,e,x,xnou,xvechi,eps: real;
function f(x:real):real;
begin
   f:=sqr(sqr(x))-3*sqr(x)+7.5*x-1;
end;
begin
   a:=-0.5; b:=0.5; eps:=0.0001;
   Msup:=10; minf:=5;
   {determinarea extremitatii fixe si a aproximarii initiale}
   x:=a-(f(a))/(f(b)-f(a))*(b-a);
   if f(x)*f(a)>0 then begin e:=b; xnou:=a; end
   else begin e:=a; xnou:=b; end;
   {calculul iterativ al solutiei}
   repeat
   xvechi:=xnou;
   xnou:= xvechi-(f(xvechi))/(f(e)-f(xvechi))*(e-xvechi);
   writeln(' x=',xnou:10:8,' f(x)=',f(xnou):12:8);
   until abs((Msup-minf)/minf*(xnou-xvechi))<eps;
end.
```

Rezultate:

x=0.22500000 f(x)= 0.53818789

x=0.15970438 f(x)= 0.12191694

x=0.14523719 f(x)= 0.02644238

x=0.14211461 f(x)= 0.00567781

x=0.14144482 f(x)= 0.00121650

x=0.14130134 f(x)= 0.00026052

x=0.14127062 f(x)= 0.00005579

Concluzie

În concluzie metoda coardelor se foloseste la rezolvarea ecuatiilor algebrice si transcendente, solutiile carora nu pot fi gasite analitic. De asemenea este utilizata pentru gasirea radacinii aproximative x a ecuatiei $f(x)=0$ izolate intr-un interval $[a, b]$ in cazul in care $f(a)*f(b)<0$ cu aproximarea prestabilita.

Bibliografie

- http://www.math.md/stireal/informatica/candidat/calcul_numeric_3.pdf
- https://ro.wikipedia.org/wiki/Metoda_coardei
- Manual de informatică clasa a XII-a
  http://www.ctice.md/ctice2013/?page_id=1690

Mulțumesc pentru atenție