Idriss Olivier BADO
olivier.bado@ensea.edu.ci

May 1, 2019

ISFA 2018 OPTION PROBA

1 PARTIE 1

1.1 QUESTION1

On sait que

$$\forall t \in [0,+\infty[, \forall j \in [1,n], g_j(t) = \mathbb{E}(t^{X_j}) = \int t^{X_j} d\mathbb{P}_{X_j}$$

Comme

$$\mathbb{P}_{X_j} = \delta_{X_j=0} q_j + \delta_{X_j=1} p_j$$

donc

$$g_j(t) = q_j \int t^{X_j} d\delta_{X_j=0} + p_j \int t^{X_j} d\delta_{X_j=1}$$

$$g_j(t) = q_j \int d\delta_{X_j=0} + t p_j \int d\delta_{X_j=1}$$

comme

$$\mathbb{P}(X_j = 0) = \int_{X_j=0} d\mathbb{P}_{X_j} = q_j \int_{X_j=0} d\delta_{X_j=0} + p_j \int_{X_j=0} d\delta_{X_j=1} = q_j \int_{X_j=0} d\delta_{X_j=0}$$

de même on a

$$\mathbb{P}(X_j = 1) = \int_{X_j=1} d\mathbb{P}_{X_j} = q_j \int_{X_j=1} d\delta_{X_j=0} + p_j \int_{X_j=1} d\delta_{X_j=1} = p_j \int_{X_j=1} d\delta_{X_j=1}$$

donc

$$g_j(t) = \mathbb{P}(X_j = 0) + t\mathbb{P}(X_j = 1) = q_j + p_j t$$

1.2 QUESTION 2

$\forall t \in [0, +\infty[, \forall j \in [1, n-1]$ alors

$$G_j(t) = \mathbb{E}(t^{S_j}) = \int t^{S_j} \prod_{k=j+1}^{n} \mathbb{P}_{X_k} = \int \prod_{k=j+1}^{n} t^{X_K} \mathbb{P}_{X_k}$$

comme les X_j sont indépendants alors

$$G_j(t) = \int \prod_{k=j+1}^{n} t^{X_K} \mathbb{P}_{X_k} = \prod_{k=j+1}^{n} \int t^{X_k} \mathbb{P}_{X_k} = \prod_{k=j+1}^{n} g_k(t) = \prod_{k=j+1}^{n} (q_k + p_k t)$$

comme

$$(q_k + p_k t) = q_k(1 + \frac{p_k}{q_k} t) = q_k(1 + r_k t)$$

c'est gagné.

1.3 QUESTION 3

Considerons le lemme suivant :

LEMMA 1

Soit f une fonction dérivable alors $\forall n \geq j+1$ $m_n(t) = \prod_{k=j+1}^{n} b_k f(a_k t)$ est dérivable et

$$m_n'(t) = \sum_{k=j+1}^{n} b_k a_k f'(a_k t) \prod_{m \in I_{k,n}} b_m f(a_m t)$$

avec $I_{k,n} = \{j+1 \leq m \leq n : m \neq k\}$ on notera que $\prod_{\emptyset} = 1$

PREUVE DU LEMME 1

La dérivabilité de m_j est immédiate comme produit de fonctions dérivables . Montrons la relation par recurrence sur n au rang $n = j+1$ on a

$$m_n(t) = b_{j+1} f(a_{j+1} t)$$

donc

$$m_n'(t) = b_{j+1} a_{j+1} f'(a_{j+1} t) = \sum_{k=j+1}^{j+1} b_k a_k f'(a_k t) \prod_{m \in I_{j+1,j+1}} a_m b_m f(a_m t)$$

supposons que la relation est vraie au rang n alors on a

$$m_{n+1}(t) = \prod_{k=j+1}^{n+1} b_k f(a_k t) = [\prod_{k=j+1}^{n} b_k f(a_k t)] b_{n+1} f(a_{n+1} t)$$

$$m_{n+1}(t) = m_n(t) b_{n+1} f(a_{n+1} t)$$

donc

$$m'_{n+1}(t) = m'_n(t) b_{n+1} f(a_{n+1} t) + m_n(t) b_{n+1} a_{n+1} f'(a_{n+1} t)$$

donc

$$m'_{n+1}(t) = \sum_{k=j+1}^{n} b_k a_k f'(a_k t) \prod_{m \in I_{k,n}} b_m f(a_m t) b_{n+1} f(a_{n+1} t) + \prod_{k=j+1}^{n} b_k f(a_k t) a_{n+1} b_{n+1} f'(a_{n+1} t)$$

comme

$$\prod_{m \in I_{k,n}} b_m f(a_m t) b_{n+1} f(a_{n+1} t) = \prod_{m \in I_{k,n+1}} b_m f(a_m t)$$

$$\prod_{k=j+1}^{n} b_k f(a_k t) a_{n+1} b_{n+1} f'(a_{n+1} t) = a_{n+1} b_{n+1} f'(a_{n+1} t) \prod_{m \in I_{n+1,n+1}} b_m f(a_m t)$$

donc

$$m'_{n+1}(t) = \sum_{k=j+1}^{n} b_k a_k f'(a_k t) \prod_{m \in I_{k,n+1}} a_m f(a_m t) + a_{n+1} b_{n+1} f'(a_{n+1} t) \prod_{m \in I_{n+1,n+1}} a_m f(a_m t)$$

$$m'_{n+1}(t) = \sum_{k=j+1}^{n+1} b_k a_k f'(a_k t) \prod_{m \in I_{k,n+1}} b_m f(a_m t)$$

ceci justifie la preuve du lemme . En remarquant que

$$G_j(t) = \prod_{k=j+1}^{n} q_k \prod_{k=j+1}^{n} (1 + r_k t)$$

En utilisant le lemme à $f(t) = 1 + t$ et $a_k = r_k, b_k = 1$ donc

$$G'_j(0) = \prod_{k=j+1}^{n} q_k \sum_{k=j+1}^{n} r_k$$

et c'est gagné.

1.4 QUESTION 4

$$\mathbb{E}(t^{S_j}) = \int t^{S_j} d\mathbb{P}_{S_j} = \int \mathbf{1}_{S_j=1} t^{S_j} d\mathbb{P}_{S_j} + \int \mathbf{1}_{S_j \neq 1} t^{S_j} d\mathbb{P}_{S_j}$$

en derivant on a

$$G_j'(t) = \int \mathbf{1}_{S_j=1} S_j t^{S_j-1} d\mathbb{P}_{S_j} + \int \mathbf{1}_{S_j \neq 1} S_j t^{S_j-1} d\mathbb{P}_{S_j}$$

donc

$$G_j'(0) = \mathbb{P}(S_j = 1)$$

1.5 QUESTION 5 et 6

$\forall t > 0$

$$G_j(e^t) = \mathbb{E}(e^{tS_j}) = \int e^{tS_j} d\mathbb{P}_{S_j}$$

alors

$$e^t G_j'(e^t) = \int S_j e^{tS_j} d\mathbb{P}_{S_j}$$

$$G_j'(0) = \int S_j d\mathbb{P}_{S_j} = \mathbb{E}(S_j)$$

de plus

$$(e^t G_j'(e^t))' = \int S_j^2 e^{tS_j} d\mathbb{P}_{S_j}$$

donc

$$e^{2t} G_j^{(2)}(e^t) + e^t G_j'(e^t) = \int S_j^2 e^{tS_j} d\mathbb{P}_{S_j}$$

donc

$$G^{(2)}(0) + G_j'(0) = \mathbb{E}(S_j^2)$$

d'où

$$var(S_j) = \mathbb{E}(S_j^2) - (\mathbb{E}(S_j))^2$$

$$var(S_j) = G^{(2)}(0) + G_j'(0)(1 - G_j'(0))$$

2 Partie II – Probabilité de s'arrêter au dernier succès

2.1 QUESTION 7

Soit $s \in [0, n-1]$ alors

$$T_s = \min(j \in [[s+1, n]] : X_j = 1)$$

donc pour n=5 on a :

$$T_0 = \min(j \in [[1, 5]] : X_j = 1) = 2$$

$$T_1 == \min(j \in [[2, 5]] : X_j = 1) = 2$$

$$T_2 = \min(j \in [[3, 5]] : X_j = 1) = 3$$

$$T_3 = \min(j \in [[4, 5]] : X_j = 1) = +\infty$$

$$T_4 = +\infty$$

$$A_s = \{X_{T_s} = 1, X_j = 0 : \forall j \in [[T_s + 1, n]]\}$$

donc

$$A_0 = \{X_2 = 1, X_j = 0 : \forall j \in [[3, 5]]\} = \emptyset$$

$$A_1 = \{X_2 = 1, X_j = 0 : \forall j \in [[3, 5]]\} = \emptyset$$

$$A_2 = \{X_3 = 1, X_j = 0 : \forall j \in [[4, 5]]\} \neq \emptyset$$

$$A_3 = \emptyset$$

$$A_4 = \emptyset$$

seul A_2 est realisé .

2.2 QUESTION 8

$$\forall s \in [[0, n-1]] : \mathbb{P}(A_s) = \mathbb{P}(\{X_{T_s} = 1, X_j = 0 : \forall j \in [[T_s + 1, n]]\})$$

Montrons que :

$$\{X_{T_s} = 1, X_j = 0 : \forall j \in [[T_s + 1, n]]\} = \{\sum_{j=s+1}^{n} X_j = 1\}$$

En effet :

$$\omega \in \{\sum_{j=s+1}^{n} X_j = 1\}$$

si et seulement si

$$\exists ! j_o \in [[s+1,n]] : X_{j_0} = 1$$

donc

$$T_s = j_0$$

l'unicité entraine que

$$\forall j \in [[T_s+1,n]] : X_j = 0$$

ainsi

$$\mathbb{P}(A_s) = \mathbb{P}(\sum_{j=s+1}^{n} X_j = 1) = \mathbb{P}(S_s = 1)$$

2.3 QUESTION 9

Supposons que

$$\mathbb{P}(A_s) \leq \mathbb{P}(A_{s+1})$$

alors

$$\mathbb{P}(S_s = 1) \leq \mathbb{P}(S_{s+1} = 1)$$

ainsi

$$G'_s(0) \leq G'_{s+1}(0)$$

comme

$$G'_s(0) = [\prod_{k=s+1}^{n} q_k] \sum_{k=s+1}^{n} r_k = q_{s+1} \prod_{k=s+2}^{n} q_k [\sum_{k=s+2}^{n} r_k + r_{s+1}]$$

$$G'_s(0) = q_{s+1}[G'_{s+1}(0) + r_{s+1} \prod_{k=s+2}^{n} q_k]$$

donc

$$r_{s+1} \prod_{k=s+1}^{n} q_k \leq (1-q_{s+1}) G'_{s+1}(0)$$

donc

$$\frac{r_{s+1}}{1-q_{s+1}} \prod_{k=s+1}^{n} q_k \leq G'_{s+1}(0)$$

par la suite

$$\frac{r_{s+1}}{1-q_{s+1}} q_{s+1} \leq \frac{G'_{s+1}(0)}{\prod_{k=s+2}^{n} q_k}$$

comme

$$\frac{G'_{s+1}(0)}{\prod_{k=s+2}^{n} q_k} = \sum_{k=s+2}^{n} r_k$$

et

$$\frac{r_{s+1}}{1-q_{s+1}} q_{s+1} = \frac{p_{s+1}}{1-q_{s+1}} = 1$$

c'est gagné!!. La réciproque est immédiate il suffit de faire un raisonnement en remontant c'est à dire on suppose que

$$\sum_{k=s+2}^{n} r_k \geq 1 = \frac{r_{s+1}}{1-q_{s+1}} q_{s+1}$$

donc

$$\frac{G'_{s+1}(0)}{\prod_{k=s+2}^{n} q_k} \geq \frac{r_{s+1}}{1-q_{s+1}} q_{s+1}$$

$$G'_{s+1}(0) \geq \prod_{k=s+2}^{n} q_k \frac{r_{s+1}}{1-q_{s+1}} q_{s+1}$$

$$(1-q_{s+1}) G'_{s+1}(0) \geq r_{s+1} \prod_{k=s+1}^{n} q_k$$

$$G'_{s+1}(0) \geq q_{s+1}[G'_{s+1}(0) + r_{s+1} \prod_{k=s+2}^{n} q_k] = G'_s(0)$$

céci justifie la reciproque .

3 ”

On suppose que $\sum_{k=2}^{n} r_k \geq 1$

3.1 QUESTION 10 -a

On pose

$$s_n^* = \max\{s \in [[1, n-1]] : \sum_{k=s+1}^{n} r_k \geq 1\}$$

Posons

$$B_n = \{s \in [[1, n-1]] : \sum_{k=s+1}^{n} r_k \geq 1\}$$

comme $\sum_{k=2}^{n} r_k \geq 1$ alors $2 \in B_n$ de plus

$$\forall s \in B_n : s \leq n-1$$

donc $max(B_n)$ existe comme

$$s_n^* = max(B_n)$$

alors s_n^* est bien définie.

3.2 QUESTION 10-b

$$\forall 1 \leq m \leq n : u_m = \sum_{k=m}^{n} r_k = r_m + \sum_{k=m+1}^{n} = r_m + u_{m+1} \geq u_{m+1}$$

la suite est donc décroissante .

3.3 QUESTION 10-c

Montrons que

$$\forall s \in [[1, s_n^*]] : \sum_{k=s+1}^{n} r_k \geq 1$$

Comme la suite u_m est decroissante alors

$$\forall s \in [[1, s_n^*]] : u_{s+1} \geq u_{s_n^*+1}$$

par définition de s_n^* on a $u_{s_n^*+1} = \sum_{k=s_n^*+1}^{n} r_k \geq 1$ comme $\forall s \in [[1, s_n^*]]$: $u_{s+1} = \sum_{k=s+1}^{n} r_k$ c'est gagné.!!

3.4 QUESTION 10-d

$\forall s \in [[0, s_n^* - 1]]$ on a $s+1 \in [[1, s_n^*]]$ d'après $10-d$ on a

$$\sum_{j=s+2}^{n} r_k \geq 1$$

donc

$$\mathbb{P}(A_s) \leq \mathbb{P}(A_{s+1})$$

3.5 QUESTION 10-e

Reconsiderons l'ensemble $B_n = \{s \in [[1, n-1]] : \sum_{k=s+1}^{n} r_k \geq 1\}$

$$\forall s \in [[s_n^* + 1, n-1]] : s \notin B_n$$

donc $\sum_{k=s+1}^{n} r_k < 1$

QUESTION 10-f

$$\forall s \in [[s_n^* \in, n-2]], s+1 \in [[s_n^*+1 \in, n-1]]$$

donc $\sum_{k=s+2}^{n} r_k < 1$ d'où la contraposée de la question 9

$$c$$

3.6 QUESTION 10-g

D'après 10-d et 10-f on a $\forall s \in [[0, n-1]] : \mathbb{P}(A_s) \leq \mathbb{P}(A_{s_n^*})$ ceci justifie la maximalité.

3.7 QUESTION 11

On suppose

$$\sum_{k=2}^{n} r_k < 1$$

donc

$$\forall s \in [[0, n-2]] : 1 > \sum_{k=1}^{n} r_k \geq \sum_{k=s+1}^{n} r_k$$

par contraposée on a

$$\mathbb{P}(A_{s+1}) \leq \mathbb{P}(A_s)$$

donc

$$\mathbb{P}(A_{s+1}) \leq \mathbb{P}(A_0)$$

et c'est terminé

3.8 QUESTION 12

On suppose que $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$ $s_n^* = \max\{s \in [[1, n-1]] : (n-s)\frac{p}{1-p} \geq 1\}$

$$s_n^* = \max\{s \in [[1, n-1]] : s \leq n - \frac{1-p}{p}\}$$

si $p \geq \frac{1}{2}$ on a : $n - \frac{1-p}{p} \geq n-1$ donc $s_n^* = n-1$ sinon $s_n^* = [n - \frac{1-p}{p}]$

3.9 QUESTION 13

$$\mathbb{E}(T_s \mid A_r) = \frac{\mathbb{E}(T_s \mathbf{1}_{A_r})}{\mathbb{P}(A_r)}$$

$$\mathbb{E}(T_s \mathbf{1}_{A_r}) = \int T_s \mathbf{1}_{A_r} d\mathbb{P}_{T_s} = \int T_s d\mathbb{P}_{T_s \cap A_r}$$

. En remarquant que

$$T_s = \sum_{k=s+1}^{n} \{T_s = k\} \mathbf{1}_{T_s = k}$$

alors

$$\int T_s d\mathbb{P}_{T_s \cap A_r} = \int \sum_{k=s+1}^{n} \{T_s = k\} \mathbf{1}_{T_s=k} \mathbf{1}_{A_r} d\mathbb{P}_{T_s} = \sum_{k=s+1}^{n} \int \{T_s = k\} \mathbf{1}_{T_s=k} \mathbf{1}_{A_r} d\mathbb{P}_{T_s}$$

comme

$$\int \{T_s = k\} \mathbf{1}_{T_s=k} \mathbf{1}_{A_r} d\mathbb{P}_{T_s} = k \int d\mathbb{P}_{A_r \cap \{T_s = k\}} = k\mathbb{P}(A_r \cap \{T_s = k\})$$

donc

$$\mathbb{E}(T_s \mathbf{1}_{A_r}) = \sum_{j=s+1}^{n} k\mathbb{P}(A_r \cap \{T_s = k\})$$

En remarquant que

$$A_r \cap \{T_s = k\} = \bigcap_{j=s+1}^{k-1} \{X_j = 0\} \cap \{X_k = 1\} \cap \{X_{T_r} = 1\} \bigcap_{j=T_r+1}^{n} \{X_j = 1\}$$

si $k \geq T_s$ alors

$$\bigcap_{j=s+1}^{k-1} \{X_j = 0\} \cap \{X_k = 1\} \cap \{X_{T_r} = 1\} \bigcap_{j=T_r+1}^{n} \{X_j = 0\} = \{\sum_{j=T_r}^{n} X_j \geq 2\}$$

si $k \leq T_r$ alors

$$\bigcap_{j=s+1}^{k-1} \{X_j = 0\} \cap \{X_k = 1\} \cap \{X_{T_r} = 1\} \bigcap_{j=T_r+1}^{n} \{X_j = 0\} = \{\sum_{j=k}^{n} X_j \geq 2\}$$

donc

$$\mathbb{P}(A_r \cap \{T_r = k\}) = \mathbb{P}(S_{T_r - 1} \geq 2)\mathbf{1}_{k \geq T_r} + \mathbb{P}(S_{k-1} \geq 2)\mathbf{1}_{k \leq T_r}$$

donc

$$\mathbb{E}(T_s \mathbf{1}_{A_r}) = \sum_{j=s+1}^{n} k\mathbb{P}(S_{T_r-1} \geq 2)\mathbf{1}_{k\geq T_r} + \sum_{j=s+1}^{n} k\mathbb{P}(S_{k-1} \geq 2)\mathbf{1}_{k\leq T_r}$$

donc

$$\mathbb{E}(T_s \mathbf{1}_{A_r}) = \mathbb{P}(S_{T_r-1} \geq 2) \sum_{k=s+1}^{n} k\mathbf{1}_{k\geq T_r} + \sum_{k=s+1}^{n} k\mathbb{P}(S_{k-1} \geq 2)\mathbf{1}_{k\leq T_r}$$

comme

$$\sum_{k=s+1}^{n} k\mathbf{1}_{k\geq T_r} = \sum_{k=T_r}^{n} k = \frac{n(n-T_r+1)}{2}$$

et

$$\sum_{k=s+1}^{n} k\mathbb{P}(S_{k-1} \geq 2)\mathbf{1}_{k\leq T_r} = \sum_{k=s+1}^{T_r} k\mathbb{P}(S_{k-1} \geq 2)$$

donc

$$\sum_{k=s+1}^{n} k\mathbb{P}(S_{k-1} \geq 2)\mathbf{1}_{k\leq T_r} = \sum_{k=s}^{T_r-1}(k+1)\mathbb{P}(S_k \geq 2) = \sum_{k=s}^{T_r-1}(k+1)[1-\mathbb{P}(S_k=0)-\mathbb{P}(S_k=1)]$$

En remarquant que

$$\mathbb{P}(S_k=0) = \mathbb{P}(\bigcap_{j=k+1}^{n} X_j = 0) = \prod_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_j=0) = \prod_{j=k+1}^{n} q_j$$

donc

$$\sum_{k=s+1}^{n} k\mathbb{P}(S_{k-1} \geq 2)\mathbf{1}_{k\leq T_r} = \frac{T_r(T_r-s)}{2} - \sum_{k=s+1}^{T_r} (1+\sum_{m=k}^{n} r_m) \prod_{m=k}^{n} q_m$$

Finalement

$$\mathbb{E}(T_s \mathbf{1}_{A_r}) = \frac{n(n-T_r+1)}{2}\mathbb{P}(S_{T_r-1} \geq 2) + \frac{T_r(T_r-s)}{2} - \sum_{k=s+1}^{T_r} (1+\sum_{m=k}^{n} r_m) \prod_{m=k}^{n} q_m$$

Comme

$$\mathbb{P}(S_{T_r-1} \geq 2) = 1-\mathbb{P}(S_{T_r-1}=0)-\mathbb{P}(S_{T_r-1}=1) = 1-\prod_{j=T_r}^{n} q_j - \prod_{k=T_r}^{n} q_k \sum_{k=T_r}^{n} r_k$$

donc

$$\mathbb{E}(T_s\mathbf{1}_{A_r}) = \frac{n(n-T_r+1)}{2}(1-(1+\sum_{j=T_r}^{n} r_j)\prod_{j=T_r}^{n} q_j) - \sum_{k=s+1}^{T_r}(1+\sum_{m=k}^{n} r_m)\prod_{m=k}^{n} q_m$$

$$\mathbb{E}(T_s\mathbf{1}_{A_r}) = \frac{n(n-T_r+1)}{2}(1-(1+\sum_{j=T_r}^{n} r_j)\prod_{j=T_r}^{n} q_j) - \frac{T_r(T_r-s)}{2}(1+\sum_{m=s+1}^{n} r_m)\prod_{m=s+1}^{n} q_m$$

et c'est gagné... Le calcul de l'autre espérance conditionnelle est laissé au lecteur il suffit de suivre la démarche .

Partie III – Records d'une permutation aléatoire

3.10 QUESTION 14

Il s'agit de l'hypothèse Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $0 < \mathbb{P}(X_k = 1) < 1$ car $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$

3.11 QUESTION 15

$$A_r = \{X_{T_r} = 1, X_j = 0 : \forall j \in [[T_r+1, n]]\}$$
$$A_r = \{Y_{T_r} = 1, Y_j = 0 : \forall j \in [[T_r+1, n]]\}$$
$$A_r = \{Y_{T_r} = 1\} \bigcap_{T_r+1 \leq j \leq n} \{Y_j = 0\}$$

donc

$$A_r = R_{T_r} \cap \bigcap_{T_r+1 \leq j \leq n} R_j^c$$
$$A_r = \bigcap_{T_r+1 \leq j \leq n} R_{T_r} \cap R_j^c$$
$$R_{T_r} \cap R_j^c = \bigcap_{1 \leq i \leq T_r-1} \{\Theta(i) < \Theta(T_r)\} \cap \bigcup_{1 \leq i \leq j-1} \{\Theta(i) \geq \Theta(j)\}$$
$$A_r = \bigcap_{T_r+1 \leq j \leq n} \bigcap_{1 \leq i \leq T_r-1} \{\Theta(i) < \Theta(T_r)\} \cap \bigcup_{1 \leq i \leq j-1} \{\Theta(i) \geq \Theta(j)\}$$
$$A_r = \bigcap_{1 \leq i \leq T_r-1} \{\Theta(i) < \Theta(T_r)\} \cap \bigcap_{T_r+1 \leq j \leq n} \bigcup_{1 \leq i \leq j-1} \{\Theta(i) \geq \Theta(j)\}$$

comme

$$\bigcup_{1 \leq i \leq j-1} \{\Theta(i) \geq \Theta(j)\} = \bigcup_{1 \leq i \leq T_r-1} \{\Theta(i) \geq \Theta(j)\} \cup \bigcup_{T_r \leq i \leq j-1} \{\Theta(i) \geq \Theta(j)\}$$

$$A_r = \bigcap_{1 \le i \le n} \{\Theta(i) < \Theta(T_r)\}$$

comme Θ est une permutation aléatoire . alors $A_r = \{\Theta(T_r) = n\}$

3.12 QUESTION 16

$$\sum_{k=2}^{n} r_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{\mathbb{P}(Y_k = 1)}{1 - \mathbb{P}(Y_k = 1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-1} \ge 1$$

3.13 Question 17

soit a et b deux entiers tels que $2 \le a \le b$ On sait que

$$\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \le \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=a}^{b} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \le \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k}$$

donc

$$\ln(\frac{b+1}{a}) \le \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k}$$

de plus

$$\sum_{k=a-1}^{b-1} \frac{1}{k+1} \le \sum_{k=a-1}^{b-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$

$$\sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k} \le \ln(\frac{b}{a-1})$$

d'où

$$\ln(\frac{b+1}{a}) \le \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k} \le \ln(\frac{b}{a-1})$$

3.14 QUESTION 18

comme

$$r_k = \frac{1}{k-1}$$

alors

$$\ln(\frac{n+2}{s_n^*+2}) \le \sum_{k=s_n^*+2}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=s_n^*+1}^{n} r_k \le \ln(\frac{n+1}{s_n^*+1})$$

Par definition de s_n^* on a $\sum_{k=s_n^*+1}^{n} r_k \geq 1$ donc $\ln(\frac{n+1}{s_n^*+1}) \geq 1$ de plus

$$\ln(\frac{n+1}{s_n^*+3}) \leq \sum_{k=s_n^*+3}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=s_n^*+2}^{n} r_k$$

d'après la question 10-e on a

$$\sum_{k=s_n^*+2}^{n} r_k < 1$$

donc

$$\ln(\frac{n+1}{s_n^*+3}) < 1 \leq \ln(\frac{n+1}{s_n^*+1})$$
$$\frac{n+1}{s_n^*+3} < e \leq \frac{n+1}{s_n^*+1}$$
$$\frac{s_n^*+1}{n+1} \leq \frac{1}{e} < \frac{s_n^*+3}{n+3}$$

Par passage on déduit le resultat .

3.15 EXEMPLE d'application 19

Nous allons modeliser le problème .Soit X_i la variable aléatoire qui prend 1 si la ième candidature est recruté et 0 sinon . On considere un echantillon de taille n Dans le texte il est dit que s candidature ne sont pas recruté donc il reste $n - s$ candidature . On forme l'évenement

$$T_s = \inf\{\ i \in [|s+1, n|] : X_i = 1\}$$

cet évenement décrit la première candidature retenue dans les $n - s$ candidature . la candidature cherché est caractérisé par

$$\{X_{T_s} = 1\} \bigcap_{T_s+1 \leq i \leq n} \{X_i = 0\}$$

il s'agit de $A_s = \{\Theta(T_s) = n\}$

3.16 Quels peuvent être les inconvénients liés à un choix de s

il s'agit d'étudier $\mathbb{P}(A_s)$ suivant les valeurs de s comme

$$\mathbb{P}(A_s) = \mathbb{P}(S_s = 1) = \prod_{k=s+1}^{n} q_k \sum_{k=s+1}^{n} r_k$$

quand s grand alors $s = n-1$ donc $\mathbb{P}(A_s) = p_n$ donc c'est le dernier individu qui est recrute . Le cas ou s est faible implique que tout les candidatures ont la méme chance .

3.17 c

Il suffit de revenir à la modélisation et appliquer le resultat 18 prendre $s = [\frac{n}{e}]$
Les critiques suivant l'approche de recrutement et l'approche probabiliste sont laissées au lecteur .

4 EXERCICE

4.1 QUESTION A

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^{-e^{-x}}$$

comme $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = e^{-e^{-x}} > 0$

$$g(x) = \ln(F(x)) = -e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

donc

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

par continuite de la fonction exponentielle on deduit la question 1. La fonction F est derivable donc continue de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = e^{-x}F(x) > 0$$

donc F est croissante et continue.

4.2 QUESTION B

D'après la question F est une fonction de repartition .et la densite est donnée par $g(x) = e^{-x}F(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}} = e^{-x-e^{-x}}$

4.3 Un équivalent simple

comme $1 - F(x) = 1 - h(e^{-})$ avec $h(t) = e^{-t}$ on a

$$h(t) = 1 - t + \circ(t)$$

donc

$$1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-x}) + \circ(e^{-x}) = e^{-x} + \circ(e^{-x})$$

donc $1 - F(x) \sim_{+\infty} e^{-x}$

4.4 QUESTION D

Soit U une variable de loi uniforme sur $]0,1[$, la variable aléatoire définie par $G = -\ln(-\ln(U))$. G est une variable à valeur réelle . soit x un réel alors

$$\mathbb{P}(G \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x))$$

D'après les proprietes de F on déduit que

$$\mathbb{P}(G \leq x) = F(x)$$

c'est fini....

4.5 QUESTION E

Etant donné un entier $N \geq 1$, on considère N variables aléatoires i.i.d. $X_1, ...X_N$ suivant chacune la loi de Gumbel. la variable aléatoire Z définie par $Z = \max(X_1, ..., X_N) - \ln N$ est réelle et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(\max(X_1, ..., X_N) - \ln N \leq x) = \mathbb{P}(\max(X_1, ..., X_N) \leq x + \ln N)$$

donc

$$\mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{N}\{X_j \leq x+\ln N\}) = \prod_{j=1}^{N}\mathbb{P}(X_j \leq x+\ln N) = [F_{X_1}(x+\ln N)]^N = e^{-Ne^{-x-lnN}}$$

$$\mathbb{P}(Z \leq x) = e^{-e^{\ln N}e^{-x-lnN}} = F(x)$$

c'est gagné..

4.6 QUESTION F

LEMME

Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 alors $-\ln Y$ suit une loi de Gumbel.

Preuve

$$\mathbb{P}(-\ln Y \leq z) = \mathbb{P}(Y \geq e^{-z}) = e^{-e^{-z}}$$

Comme

$$\mathbb{P}(\max(Y_1, ..., Y_N) - \ln N \leq x) = \mathbb{P}(\bigcap_{j=1}^{N}\{Y_j \leq x+\ln N\}) = \prod_{j=1}^{N}\mathbb{P}(\ln(Y_j) \leq \ln(x+\ln N))$$

$$\mathbb{P}(\max(Y_1, ..., Y_N) - \ln N \leq x) = [1 - F_{-\ln Y_1}(-\ln(x + \ln N))]^N$$

D"après le lemme on a :

$$\mathbb{P}(\max(Y_1, ..., Y_N) - \ln N \leq x) = [1 - F(-\ln(x + \ln N))]^N$$

comme

$$1 - F(-\ln(x + \ln N)) = 1 - e^{-e^{\ln(x+\ln N)}} = [1 - e^{-(x+\ln N)}]$$

donc

$$\mathbb{P}(\max(Y_1, ..., Y_N) - \ln N \leq x) = [1 - \frac{e^{-x}}{N}]^N = e^{N \ln(1 - \frac{e^{-x}}{N})}$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\max(Y_1, ..., Y_N) - \ln N \leq x) = F(x) = e^{-e^{-x}}$$