Idriss Olivier BADO
olivier.bado@ensea.edu.ci

May 3, 2019

CORRECTION CONCOURS X OPTION UNIVERSITAIRE 2019

1 PARTIE 1

1.1 QUESTION 1

Il s'agit d'une équivalence à montrer donc commençons par supposer (i) donc la suite $P_N = \prod_{k=0}^{N}(1+U_k)$ admet une limite finie comme la fonction ln est continue alors $\ln P_N = \sum_{k=0}^{N} \ln(1+U_k)$ donc (ii). Supposons (ii) alors $\lim_{n\to+\infty} \ln(1+u_n) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$ alors $\exists n_0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \frac{1}{2}u_n \leq \ln(1+u_n) \leq \frac{3}{2}u_n$$

donc

$$\sum_{n\geq n_0} u_n < +\infty$$

et c'est gagné . On pouvait ne pas justifier l'existence de n_0 et conclure grace au théorème d'equivalence de serie à terme positif. ainsi (ii) et (iii) sont équivalents Supposons (iii) comme $1 + a_n \leq e^{a_n}$ alors

$$P_N = \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) \leq e^{\sum_n^N a_n}$$

d'après (iii)

$$\lim_{N\to+\infty} P_N$$

donc (iii) entraine (i).

1.2 QUESTION 2

Par hypothèse la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = 0$ par continuité de la fonction racine carrée on déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + O(u_n^2)$$

donc

$$\ln(1+u_n) - u_n = -\frac{u_n^2}{2} + O(u_n^2)$$

1.3 La validité du résultat

Il suffit de prendre $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

2 QUESTION 4

Il suffit de remarquer que

$$|\prod_{n=0}^{N}(1+u_n)| = \prod_{n=0}^{N} | 1+u_n |$$

Montrons que

$$| 1- | u_n || \leq | 1+u_n |$$

comme

$$| 1- | u_n ||^2 = (1- | u_n |)^2 = 1-2 | u_n | + | u_n |^2 = | 1+u_n |^2 -4 | u_n |$$

c'est gagné de plus de l'inégalité triangulaire on déduit que

$$| 1+u_n | \leq 1+ | u_n |$$

par passage au produit le resultat s'ensuit. Pour repondre à la question b supposons que

$$\sum_{n\geq o} | u_n | < +\infty$$

d'après la question 1

$$\prod_{n\geq 0}(1+ | u_n |) < +\infty$$

en utilisant l'inégalité $\prod_{n\geq 0}(1+u_n) < +\infty$

2.1 QUESTION 5

On souhaite montrer que $\prod_{n\geq 0}\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) < +\infty$ Posons

$$u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) - 1 = -\frac{\pi^2}{4^{n+1}} + O(\frac{\pi^2}{4^{n+1}})$$

Ainsi $| u_n | \leq \frac{2\pi^2}{4^{n+1}}$ comme

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\pi^2}{4^{n+1}} < +\infty$$

alors $\sum_{n\geq 0} \mid u_n \mid < +\infty$ d'ou la resultat par la question 4-b Pour Montrer l'égalité il suffit de remarquer que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0 : \sin(\frac{x}{2^{n-1}}) = 2\sin(\frac{x}{2^n})\cos(\frac{x}{2^n})$$

ainsi

$$\prod_{k=1}^{n+1} \sin(\frac{x}{2^{k-1}}) = \prod_{k=1}^{n+1} 2\sin(\frac{x}{2^k})\cos(\frac{x}{2^k})$$

$$\prod_{k=0}^{n} \sin(\frac{x}{2^k}) = 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1} sin(\frac{x}{2^k})\cos(\frac{x}{2^k})$$

supposons que x n'est multiple de π alors

$$\frac{\prod_{k=0}^{n}\sin(\frac{x}{2^k})}{\prod_{k=1}^{n+1} sin(\frac{x}{2^k})} = 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\cos(\frac{x}{2^k})$$

le resultat s'ensuit . si x est multiple de π la relation est vraie . c'est gagné!!!

LA RELATION DE Viète

On deduit de la relation precedente que

$$\sin x = x \prod_{n\geq 0} \cos(\frac{x}{2^{n+1}})$$

En effet comme

$$2^{n+1}\sin(\frac{x}{2^{n+1}}) \sim_{+\infty} x$$

alors

$$x\prod_{n\geq 0}\cos(\frac{x}{2^{n+1}}) \sim_{+\infty} \sin x$$

comme

$$\prod_{n\geq 0}\cos(\frac{x}{2^{n+1}}) < +\infty$$

le resultat s'ensuit on prend $x = \frac{\pi}{2}$ donc

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n\geq 0}\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

Introduisons la suite $v_n = \sqrt{2 + v_{n-1}}$ avec $v_0 = \sqrt{2}$ alors $v_n = g(v_{n-1})$ comme g est croissante et que $v_0 < v_1$ on deduit par reccurence que v_n est croissante on montre par recuurence que v_n est majoré par le point fixe de g . De plus $2\cos(\frac{\theta}{2^n})$ verifie la relation de recurrente .

$$2 + 2\cos(\frac{\theta}{2^{n-1}}) = 2 + 2\cos(\frac{2\theta}{2^n}) = 2(1 + \cos(\frac{2\theta}{2^n}))$$

$$2 + 2\cos(\frac{\theta}{2^{n-1}}) = 4cos(\frac{\theta}{2^n}))^2$$

donc

$$2\cos(\frac{\theta}{2^n}) = \sqrt{2 + 2\cos(\frac{\theta}{2^{n-1}})}$$

comme $v_0 = \sqrt{2} = 2\cos(\theta)$ alors $\theta = \frac{\pi}{4}$ donc

$$v_n = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

donc

$$\prod_{n\geq 0} \cos(\frac{x}{2^{n+1}}) = \prod_{n\geq 0} \frac{v_n}{2}$$

en utilisant la forme recurrente de v_n et la valeur de v_0 on déduit la formule de Viète .

3 DEVELOPPEMENT EULERIEN

3.1 QUESTION PRELIMINAIRE

Supposons que la serie $\sum_{n\geq 0} \epsilon_n$ converge alors $\forall m \geq 0$ la serie $\sum_{n\geq 0} \mid u_{n,m} \mid$ converge donc $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n\geq 0} \mid u_{n,m} \mid = \sum_{n\geq 0} \lim_{m\to+\infty} \mid u_{n,m} \mid < +\infty$ comme $lim_{m\to+\infty} \mid u_{n,m} \mid = \mid v_n \mid$ alors $\sum_{n\geq 0} v_n < +\infty$ comme

$$\sum_{n\geq 0} u_{n,m} < +\infty$$

donc

$$\sum_{n\geq 0} v_n = \sum_{n\geq 0} \lim_{m\to+\infty} u_{n,m} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n\geq 0} u_{n,m}$$

3.2 QUESTION 1

$$\forall z \in \mathbb{C} : (1 + \frac{z}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}$$

comme
$$\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{z^k}{n^k} = \frac{\prod_{j=1}^{k}(n-j+1)}{n^k}\frac{z^k}{k!}$$
donc
$$\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} = \prod_{j=1}^{k}\frac{n-j+1}{n}\frac{z^k}{k!} = \prod_{j=1}^{k}(1-\frac{j-1}{n})\frac{z^k}{k!}$$
donc
$$\forall z \in \mathbb{C} : (1+\frac{z}{n})^n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(1-\frac{j-1}{n})\frac{z^k}{k!}$$
Passons à la limite
$$\forall z \in \mathbb{C} : \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{z}{n})^n = 1 + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(1-\frac{j-1}{n})\frac{z^k}{k!}$$
$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{z}{n})^n = 1 + \sum_{k\geq 1}\frac{z^k}{k!} = \sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!} = e^z$$

3.3 LES RACINES DE P_n

Commençons par chercher les racines de $Z^{2n+1} = 1$ dans $\mathbb{C}$ les racines sont
$$Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}, \forall 0 \leq k \leq 2n$$
$$P_n(z) = 0 \iff (\frac{1+\frac{iz}{2n+1}}{1-\frac{iz}{2n+1}})^{2n+1} = 1$$
donc
$$\frac{1+\frac{iz}{2n+1}}{1-\frac{iz}{2n+1}} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \iff 1+\frac{iz}{2n+1} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}(1-\frac{iz}{2n+1})$$
$$\frac{iz}{2n+1} + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\frac{iz}{2n+1} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1$$
$$iz(1+e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}) = (2n+1)(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1)$$
$$z = i(2n+1)\frac{1-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}{1+e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}} = i(2n+1)\frac{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}(e^{-\frac{ik\pi}{2n+1}} - e^{\frac{ik\pi}{2n+1}})}{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}(e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} + e^{-\frac{ik\pi}{2n+1}})} = (2n+1)\tan(\frac{k\pi}{2n+1})$$
les solutions de P_n sont les réels
$$z_k = (2n+1)\tan(\frac{k\pi}{2n+1}) : 0 \leq k \leq 2n$$

3.4 FACTORISATION DE P_n

Commençons par montrer que P_n est un polynome de dégre $2n+1$ On sait d'après la question 1) que

$$\forall z \in \mathbb{C} : (1+\frac{iz}{2n+1})^{2n+1} = 1+\sum_{k=1}^{2n+1}\prod_{j=1}^{k}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{i^k z^k}{k!}$$

$$(1-\frac{iz}{2n+1})^{2n+1} = 1+\sum_{k=1}^{2n+1}\prod_{j=1}^{k}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{(-i)^k z^k}{k!}$$

donc

$$P_n = \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2n+1}\prod_{j=1}^{k}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{i^k z^k-(-i)^k z^k}{k!}$$

Posons $a_k = \prod_{j=1}^{k}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{i^k z^k-(-i)^k z^k}{k!}$ comme $a_{2k}=0$ alors

$$P_n = \frac{1}{2i}\sum_{1\leq 2k+1\leq 2n+1} a_{2k+1} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}$$

comme

$$a_{2k+1} = \prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{i^{2k+1}z^{2k+1}-(-i)^{2k+1}z^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2i(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

donc

$$P_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

donc $deg(P_n)=2n+1$ comme P_n admet 0 et $2n$ racine distincts alors $\exists C$ tel que

$$P_n(z) = Cz\prod_{k=1}^{2n}(z-z_k)$$

de plus $\forall 1\leq k\leq 2n$ on a $1\leq 2n+1-k\leq 2n$ et

$$z_{2n+1-k} = (2n+1)\tan(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}) = (2n+1)\tan(\pi-\frac{k\pi}{2n+1}) = -z_k$$

En regroupant par couple $(z_k,-z_k)$ alors

$$\prod_{k=1}^{2n}(z-z_k) = \prod_{k=1}^{n}(z-z_k)(z+z_k) = \prod_{k=1}^{n}(z^2-z_k^2) = (-1)^n\prod_{k=1}^{n}z_k^2(1-\frac{z^2}{z_k^2})$$

comme

$$\prod_{k=1}^{2n} z_k = \prod_{k=1}^{n} z_k \prod_{k=n+1}^{2n} z_k = \prod_{k=1}^{n} z_k \prod_{k=1}^{n} z_{2n-k} = \prod_{k=1}^{n} z_k z_{2n-k}$$

$$\prod_{k=1}^{2n} z_k = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} z_k^2$$

donc

$$P_n(z) = C \prod_{k=1}^{2n} z_k \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{z^2}{z_k^2})$$

en posant $C' = C \prod_{k=1}^{2n} z_k$ on deduit que

$$P_n(z) = C' z \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})})$$

De plus nous avons montré que :

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \prod_{j=1}^{2k+1} (1 - \frac{j-1}{2n+1}) \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

donc

$$P_n(z) = z \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \prod_{j=1}^{2k+1} (1 - \frac{j-1}{2n+1}) \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

donc

$$C' z \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}) = z \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \prod_{j=1}^{2k+1} (1 - \frac{j-1}{2n+1}) \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

pour $z \neq 0$ on a

$$C' \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \prod_{j=1}^{2k+1} (1 - \frac{j-1}{2n+1}) \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

donc

$$C' \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \prod_{j=1}^{2k+1} (1 - \frac{j-1}{2n+1}) \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

en faisant tendre z vers 0 on a : $C' = 1$

3.5 Une identité

Il s'agit de Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}=\frac{1}{6}\frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2}$$

D'après la partie précedente on a

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{z^2}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})})=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})})=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{1}{(2k+1)!}$$

comme

$$\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{1\leq i_1<i_2<.....<i_k\leq n}\prod_{j=1}^{k}a_{i_j}(**)$$

La vérification de (**) est immédiate . en prenant

$$a_k=\frac{1}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}$$

alors

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})})=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{1\leq i_1<i_2<.....<i_k\leq n}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{i_j\pi}{2n+1})}$$

ainsi

$$1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{1\leq i_1<i_2<.....<i_k\leq n}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{i_j\pi}{2n+1})}=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{1}{(2k+1)!}$$

par identification on a :

$$\forall k\geq 1:\sum_{1\leq i_1<i_2<.....<i_k\leq n}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{i_j\pi}{2n+1})}=\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{1}{(2k+1)!}$$

pour $k=1$ on a

$$\sum_{1\leq i_1\leq n}\frac{1}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{i_1\pi}{2n+1})}=\prod_{j=1}^{3}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}\frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2}$$

DEDUCTION

Il s'agit de deduire la relation

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Posons

$$U_{n,m}=\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}$$

on sait que $\forall t\geq 0:\tan t\geq t$ pour le voir il suffit de considérer $f(t)=tant-t$ comme $f'(t)=tan^2(t)\geq 0$ et $f(0)=0$ le resultat s'ensuit . Ainsi

$$\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}\leq\frac{1}{n^2\pi^2}$$

comme la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}<+\infty$ alors d'après la question préliminaire on a

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{m\to+\infty}U_{n,m}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=\lim_{m\to+\infty}lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}U_{n,m}=lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=lim_{m\to+\infty}lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}$$

donc

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=lim_{m\to+\infty}lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}+\sum_{n=m}^{N}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}+I$$

avec

$$I=lim_{m\to+\infty}lim_{N\to+\infty}\sum_{n=m}^{N}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}=0$$

donc

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}$$

donc

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{6}\frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2}=\frac{1}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{m\to+\infty}U_{n,m}=\frac{1}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}=\frac{1}{6}$$

c'est gagné!!!!

3.6 QUESTION 4

Posons $S_N(n)=\sum_{K=2}^{N}\Delta_{K,n}(z)$

$$S_N(n)=\sum_{K=2}^{N}[Q_{K,n}(z)-Q_{K-1,n}(z)]=\sum_{K=2}^{N}P_{\min(K,n)}(z)-\sum_{K=2}^{N}P_{\min(K-1,n)}(z)$$

$$S_N(n)=\sum_{K=2}^{N}P_{\min(K,n)}(z)-\sum_{K=1}^{N-1}P_{\min(K,n)}(z)=P_{\min(N,n)}(z)-P_{\min(1,n)}(z)$$

comme n est fixé et que la fonction min est continue . donc

$$\lim_{N\to+\infty}S_N(n)=P_n(z)-P_{\min(1,n)}(z)=(P_n(z)-P_1(z))\delta_{\min(1,n)=1}<+\infty$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty}\Delta_{K,n}(z)=\lim_{n\to+\infty}[Q_{K,n}(z)-Q_{K-1,n}(z)]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Delta_{K,n}(z)=\lim_{n\to+\infty}[P_{\min(K,n)}(z)-P_{\min(K-1,n)}(z)]=\lim_{n\to+\infty}P_{\min(K,n)}(z)-\lim_{n\to+\infty}P_{\min(K-1,n)}(z)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Delta_{K,n}(z)=Q_K(z)-Q_{K-1}(z)=\Delta_K(z)$$

D'après la question preliminaire $\sum_{K\geq 0}\Delta_K(z)<+\infty$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{K\geq 0}\Delta_{K,n}(z)=\sum_{K=0}^{+\infty}\Delta_K(z)$$

3.7 FORMULE D'EULER

D'après ce qui précede on

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta_{K,n}(z) = \Delta_{1,n}(z) + \sum_{K=2}^{N} \Delta_{K,n}(z) = P_{\min(1,n)} - z + P_{\min(N,n)}(z) - P_{\min(1,n)}(z)$$

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta_{K,n}(z) = P_{\min(N,n)}(z) - z$$

De même

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta_{K}(z) = Q_N(z) - -Q_0(z) = Q_N(z) - z$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{N \to +\infty} \sum_{K=1}^{N} \Delta_{K,n}(z) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{N \to +\infty} (P_{\min(N,n)}(z) - z)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{N \to +\infty} \sum_{K=1}^{N} \Delta_{K,n}(z) = \lim_{n \to +\infty} P_n(z) - z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) - z = \sin z - z$$

comme

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{K=1}^{N} \Delta_{K}(z) = z \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}) - z$$

donc

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2})$$

4 FONCTION ζ ET ARITHMETIQUE

4.1 QUESTION 1

On sait que

$$\forall n \geq 1 : \frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

$$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)^s} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

$$1+\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^s}\leq 1+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^s}\leq 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$$

$$\zeta(s)\leq 1+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^s}\leq 1+\zeta(s)$$

donc

$$\frac{1}{s-1}\leq\zeta(s)\leq 1+\frac{1}{s-1}$$

$$\lim_{s\to 1^+}\frac{1}{s-1}\leq`\lim_{s\to 1^+}\zeta(s)\leq\lim_{s\to 1^+}(1+\frac{1}{s-1})$$

donc

$$\lim_{s\to 1^+}\zeta(s)=+\infty$$

4.2 QUESTION 2

Il s'agit de montrer une identité simple commençons !!!

$$\forall s>1,\prod_{k=1}^{l}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}=\prod_{k=1}^{l}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}=\prod_{k=1}^{l}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{p_k^{sm}}=\prod_{k=1}^{l}(1+\frac{1}{p_k^s}+\frac{1}{p_k^{2s}}+........)$$

$$\prod_{k=1}^{l}(1+\frac{1}{p_k^s}+\frac{1}{p_k^{2s}}+........)=\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_1p_2.....p_l}}\frac{1}{n^s}$$

AUTRE APPROCHE PAR RECURRENCE

Il s'agit de montrer par recurrence sur l au rang $l=1$ on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_1}}\frac{1}{n^s}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{p_1^{ms}}=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1^s}}=[1-\frac{1}{p_1^s}]^{-1}$$

Supposons que la relation à tout rang pour tout famille de longeur $\leq l$ et montrons sa validité pour une famille de longueur $l+1$ On a

$$\prod_{k=1}^{l+1}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}=\prod_{k=1}^{l}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}((1-\frac{1}{p_{l+1}^s})^{-1})$$

$$\prod_{k=1}^{l+1}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}=[\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_1p_2.....p_l}}\frac{1}{n^s}](1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}$$

$$\prod_{k=1}^{l+1}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}=[\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_1p_2.....p_l}}\frac{1}{n^s}][\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_{l+1}}}\frac{1}{n^s}]=\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_1p_2.....p_{l+1}}}\frac{1}{n^s}$$

En faisant tendre l vers l'infini on a

$$\forall s>1,\zeta(s)=\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}$$

4.3 QUESTION 3

Raisonnons par l'absurde supposons que

$$\prod_{k\geq 1}(1-\frac{1}{p_k})^{-1}<+\infty$$

donc

$$\prod_{k\geq 1}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{p_k^m}<+\infty$$

comme

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=\prod_{k\geq 1}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{p_k^m}$$

ceci contredit notre hypothése donc la serie diverge . par la suite

$$\ln(\prod_{k\geq 1}(1-\frac{1}{p_k})^{-1})=-\sum_{k\geq 1}\ln(1-\frac{1}{p_k})$$

diverge Conme il existe une infinité de nombre premier alors $\lim_{k\to+\infty}p_k=+\infty$ par la suite

$$-\ln(1-\frac{1}{p_k})\sim_{+\infty}\frac{1}{p_k}$$

d'ou

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k}=+\infty$$

4.4 QUESTION 4

Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des entiers sans facteur carré On souhaite montrer que

$$\forall n\in\mathbb{F},\exists a,b\in\mathbb{N}:n=ab^2$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ Par le theoreme de decomposition en facteur premier

$$\exists \beta_1, \beta_2, ..., \beta_r \in \mathbb{N} : n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i}$$

Comme $n \in \mathbb{F}$ alors $J = \{i \in \{1, 2, ..r\} : 2 \nmid \beta_i\} \neq \emptyset$ ainsi $n = \prod_{i \in J} p_i^{\beta_i} \prod_{i \in J^c} p_i^{\beta_i}$ $\forall i \in J^c : \beta_i \equiv 0[2]$ donc

$$n = \prod_{i \in J} p_i^{\beta_i} [\prod_{i \in J^c} p_i^{\frac{\beta_i}{2}}]^2$$

ceci justifie la preuve .

DEDUCTION

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{i \in \mathbb{F}, i \leq n} \frac{1}{i} + \sum_{i \in \mathbb{F}^c, i \leq n} \frac{1}{i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{pb^2 \leq n, pgcd(p,b)=1} \frac{1}{pb^2} + \sum_{b^2 \leq n} \frac{1}{b^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{p \leq \frac{n}{b^2}, pgcd(p,b)=1} \sum_{b \leq \sqrt{n}} \frac{1}{pb^2} + \sum_{b \leq \sqrt{n}} \frac{1}{b^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \sum_{p \leq \frac{n}{b^2}} \frac{1}{p} \sum_{b \leq \sqrt{n}} \frac{1}{b^2} + \sum_{b \leq \sqrt{(n)}} \frac{1}{b^2}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq (\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} + 1) \sum_{b \leq n} \frac{1}{b^2}$$

comme

$$1 + \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \leq \prod_{p \leq n} (1 + \frac{1}{p})$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{p \leq n} (1 + \frac{1}{p}) \sum_{b \leq n} \frac{1}{b^2}$$

QUESTION 5

On sait que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \ln(n+1)$ Pour le voir il suffit de voir

$$\frac{1}{n} \geq \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t}$$

ensuite en sommant on justifie la relation ainsi

$$\ln(n+1) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{p \leq n} (1+\frac{1}{p}) \sum_{b \leq n} \frac{1}{b^2}$$

$$\ln(\ln(n+1)) \leq \sum_{p \leq n} \ln(1+\frac{1}{p}) + \ln(\sum_{b \leq n} \frac{1}{b^2})$$

$$\ln(\ln(n+1)) \leq \sum_{p \leq n} \ln(1+\frac{1}{p}) + \ln(\sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{b^2})$$

$$\ln(\ln(n+1)) \leq \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} + \ln(\frac{\pi^2}{6})$$

donc

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\frac{\pi^2}{6})$$

5 Loi de ζ

5.1 INDEPENDANCE

Supposons que A et B sont indépandants alors

$$c = \mathbb{P}(A \cup B)^c = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))$$

$$\mathbb{P}(A \cup B)^c = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B))$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$$

donc A^c et B^c sont indépendants .
Posons $A = \{b \mid X\}$ et $B = \{b \mid X\}$ .On souhaite Montrer si $pgcd(a,b) = 1$ alors A et B sont indépendants . Supposons $pgcd(a,b) = 1$

$$A \cap B = \{b \mid X\} \cap \{a \mid X\} = bX \cap aX = abX$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(abX) = \frac{1}{ab} = \frac{1}{a}\frac{1}{b} = \mathbb{P}(aX)\mathbb{P}(bX) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

5.2 Une inégalité

Posons

$$B = \{\forall l \geq k_m : p_l \nmid [[1,m]]\}$$

Soit $j \in [[1,m]]$ Par définition de k_m on a $\forall l \geq k_m, p_l > j$ donc $p_l \nmid j$ céci montre que

$$[[1,m]] \subset B$$

donc

$$\mathbb{P}([[1,m]]) \leq \mathbb{P}(B)$$

comme

$$B = \{\forall l \geq k_m : p_l \nmid [[1,m]]\} = \bigcap_{l \geq k_m} p_l[1,m]^c$$

donc

$$\mathbb{P}([[1,m]]) \leq \mathbb{P}(\bigcap_{l \geq k_m} p_l[1,m]^c) = \prod_{l \geq k_m} \mathbb{P}(p_l[1,m]^c) = \prod_{l \geq k_m} (1 - \mathbb{P}(p_l[1,m]) = \prod_{l \geq k_m} (1 - \frac{1}{p_l})$$

Pour finir nous allons tirer une conclusion il s'agit d'un enseignement il n'existe aucune probabilité uniforme sur $\mathbb{N}^*$ On a

$$\mathbb{P}([[1,m]]) \leq \prod_{l \geq k_m} (1 - \frac{1}{p_l}) = \frac{1}{(\prod_{l \geq k_m} (1 - \frac{1}{p_l}))^{-1}}$$

en faisant tend l vers $+\infty$ on a $\mathbb{P}([[1,m]]) = 0$

5.3 QUESTION 2

Pour s réel fixé $s > 1$ .On définit la probabilité $\mathbb{P}_s$ sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\mathbb{P}_s(A) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^s}$$

alors

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_s(a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in a\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(an)^s} = \frac{1}{a^s} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{a^s}$$

5.4 PROBABILITE DES SANS FACTEURS CARRES

Soit X une variable aléatoire et p un nombre premier alors X est sans facteur carré si $\forall p \geq 2, p^2 \nmid X$ Soit A l'évenement " X est sans facteur carré" alors

$$A = \bigcap_{p \geq 2} \{p^2 \nmid X\}$$

comme les $\{p^2 \mid X\}$ sont indépendants alors les $\{p^2 \nmid X\}$ le sont Ainsi

$$\mathbb{P}_s(A) = \mathbb{P}_s(\bigcap_{p\geq 2}\{p^2 \nmid X\}) = \prod_{p\geq 2} \mathbb{P}_s(\{p^2 \nmid X\}) = \prod_{p\geq 2}[1 - \mathbb{P}_s(\{p^2 \mid X\})] = \prod_{p\geq 2}[1 - \mathbb{P}_s(p^2\mathbb{N}^*)]$$

$$\mathbb{P}_s(A) = \prod_{p\geq 2}[1 - p^{-2s}] = \frac{1}{\zeta(2s)}$$

6 PARTIE 4

Posons $a_n = card(A \cap [[1, n]])$

$$a_{n+1} = card(A \cap [[1, n+1]]) = card(A \cap [[1, n] \cup [A \cap \{n+1\})$$

$$a_{n+1} = card(A \cap [[1, n]]) + card([A \cap \{n+1\}) = a_n + \delta_{n+1}(A)$$

où

$$\delta_{n+1}(A) = 1 \Longleftrightarrow n + 1 \in A$$

et 0 sinon .

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\delta_n(A)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n - a_{n-1}}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} - \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n^s}$$

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} - \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(n+1)^s}$$

comme $a_0 = 0$ alors

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} - \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{(n+1)^s} = \sum_{n\geq 1} a_n [\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}]$$

Soit $\epsilon > 0$ arbitraire .On souhaite montrer l'existence de $\delta > 0$ tel que si $1 \leq s \leq 1 + \delta$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} \leq (\frac{n+1}{n})^s - 1) \leq \frac{1+\epsilon}{n}$$

Posons $f_n(s) = n(\frac{n+1}{n})^s - 1)$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n(s) = n(\frac{n+1}{n})^s - 1) = n[(1+\frac{1}{n})^s - 1] \geq [s] \geq 1$$

La justification vient de deux idées d'abord comme $s \geq [s]$ on a

$$(1+\frac{1}{n})^s \geq (1+\frac{1}{n})^{[s]}$$

ensuite on applique l'inégalité de Bernouilli $\forall n \geq 0, \forall x > 0 : (1+x)^n \geq 1+nx$ de plus $\lim_{s\to 1} f_n(s) = 1$ donc $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall 1 \leq s \leq 1+\delta : 1 \leq f_n(s) \leq 1+\epsilon$$

en divisant par n c'est gagné... Maintenant supposons que A admet une densidé naturelle d de plus on a : $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} \leq (\frac{n+1}{n})^s - 1) \leq \frac{1+\epsilon}{n}$$

donc

$$\frac{1}{n(n+1)^s} \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1+\epsilon}{n(n+1)^s}$$

$$\frac{a_n}{n(n+1)^s} \leq a_n[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}] \leq \frac{(1+\epsilon)a_n}{n(n+1)^s}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n(n+1)^s} \leq \sum_{n\geq 1} a_n[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}] \leq \sum \frac{(1+\epsilon)a_n}{n(n+1)^s}$$

comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = d$$

alors

$$\exists N_\epsilon, \forall n \geq N_\epsilon : (1-\epsilon)d \leq \frac{a_n}{n} \leq (1+\epsilon)d$$

donc

$$(1-\epsilon)d \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} \leq \sum_{n\geq N_\epsilon} a_n[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}] \leq (1+\epsilon)^2 d \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$(1-\epsilon)d\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} a_n[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}] \leq (1+\epsilon)^2 d\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s}$$

donc

$$(1-\epsilon)d\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} + I \leq \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} a_n[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}] + I \leq (1+\epsilon)^2 d\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} + I$$

avec
$$I = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \leq N_\epsilon} a_n [\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}]$$
$$(1-\epsilon) d \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} + I \leq \mathbb{P}_s(A) \leq (1+\epsilon)^2 d \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} + I$$
comme
$$\lim_{s \to 1^+} \zeta(s) = 1$$
$$\lim_{s \to 1^+} I = 0$$
et
$$\lim_{s \to 1^+} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} = 1$$
donc
$$\lim_{s \to 1^+} \mathbb{P}_s(A) = d$$
Soit A l'ensemble des sans carré d'après et d sa densité la partie précedente
$$\mathbb{P}_s(A) = \frac{1}{\zeta(2s)}$$
comme
$$d = \lim_{s \to 1^+} \mathbb{P}_s(A) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$$