**Abstract**

Dans ce papier vous trouverez la correction du concours X 2019 option universitaire . L'objectif est d'aider les candidats à se preparer efficacement .N'hesitez pas à m'écrire à olivier.bado@ensea.edu.ci

# CORRECTION CONCOURS X OPTION UNIVERSITAIRE 2019

## 1 PARTIE 1

### 1.1 QUESTION 1

Il s'agit d'une équivalence à montrer donc commençons par supposer (i) donc la suite $P_N = \prod_{k=0}^{N}(1+U_k)$ admet une limite finie comme la fonction ln est continue alors $\ln P_N = \sum_{k=0}^{N}\ln(1+U_k)$ donc (ii). Supposons (ii) alors $\lim_{n\to+\infty}\ln(1+u_n) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$ alors $\exists n_0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \frac{1}{2}u_n \leq \ln(1+u_n) \leq \frac{3}{2}u_n$$

donc

$$\sum_{n\geq n_0} u_n < +\infty$$

et c'est gagné . On pouvait ne pas justifier l'existence de $n_0$ et conclure grace au théorème d'equivalence de serie à terme positif. ainsi (ii) et (iii) sont équivalents Supposons (iii) comme $1+a_n \leq e^{a_n}$ alors

$$P_N = \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) \leq e^{\sum_n^N a_n}$$

d'après (iii)

$$\lim_{N\to+\infty} P_N$$

donc (iii) entraine (i).

### 1.2 QUESTION 2

Par hypothèse la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = 0$ par continuité de la fonction racine carrée on déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + O(u_n^2)$$

donc

$$\ln(1+u_n)-u_n=-\frac{u_n^2}{2}+O(u_n^2)$$

comme $\sum_{n\geq 0}u_n^2<+\infty$ alors

$$\sum_{n\geq 0}[\ln(1+u_n)-u_n]<+\infty$$

donc de cauchy ainsi $\forall\epsilon,\exists N(\epsilon)$ tel que $\forall N_1,N_2\geq N(\epsilon)$ on a

$$\mid\sum_{n=N_1}^{N_2}[\ln(1+u_n)-u_n]\mid\leq\epsilon$$

ainsi

$$\mid\ln(\prod_{n=N_1}^{N_2}(1+u_n))-\sum_{n=N_1}^{N_2}u_n\mid\leq\epsilon$$

La déduction de b) est immédiate il suffit d'utiliser 1) La relation précedente stipule que $\sum_{n=0}^{N}u_n$ est de Cauchy si et seulement si $\sum_{n=0}^{N}\ln(1+u_n)$ est de cauchy .c'est ainsi gagné par 1)

### 1.3 La validité du résultat

Il suffit de prendre $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$

## 2 QUESTION 4

Il suffit de remarquer que

$$\mid\prod_{n=0}^{N}(1+u_n)\mid=\prod_{n=0}^{N}\mid 1+u_n\mid$$

Montrons que

$$\mid 1-\mid u_n\mid\mid\leq\mid 1+u_n\mid$$

comme

$$\mid 1-\mid u_n\mid\mid^2=(1-\mid u_n\mid)^2=1-2\mid u_n\mid+\mid u_n\mid^2=\mid 1+u_n\mid^2-4\mid u_n\mid$$

c'est gagné de plus de l'inégalité triangulaire on déduit que

$$\mid 1+u_n\mid\leq 1+\mid u_n\mid$$

par passage au produit le resultat s'ensuit. Pour repondre à la question b supposons que

$$\sum_{n\geq o} \mid u_n \mid < +\infty$$

d'après la question 1

$$\prod_{n\geq 0}(1+\mid u_n \mid) < +\infty$$

en utilisant l'inégalité $\prod_{n\geq 0}(1+u_n) < +\infty$

## 2.1 QUESTION 5

On souhaite montrer que $\prod_{n\geq 0}\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) < +\infty$ Posons

$$u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}) - 1 = -\frac{\pi^2}{4^{n+1}} + O(\frac{\pi^2}{4^{n+1}})$$

Ainsi $\mid u_n \mid \leq \frac{2\pi^2}{4^{n+1}}$ comme

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\pi^2}{4^{n+1}} < +\infty$$

alors $\sum_{n\geq 0} \mid u_n \mid < +\infty$ d'ou la resultat par la question 4-b Pour Montrer l'égalité il suffit de remarquer que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0 : \sin(\frac{x}{2^{n-1}}) = 2\sin(\frac{x}{2^n})\cos(\frac{x}{2^n})$$

ainsi

$$\prod_{k=1}^{n+1}\sin(\frac{x}{2^{k-1}}) = \prod_{k=1}^{n+1} 2\sin(\frac{x}{2^k})\cos(\frac{x}{2^k})$$

$$\prod_{k=0}^{n}\sin(\frac{x}{2^k}) = 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1} sin(\frac{x}{2^k})\cos(\frac{x}{2^k})$$

supposons que $x$ n'est multiple de $\pi$ alors

$$\frac{\prod_{k=0}^{n}\sin(\frac{x}{2^k})}{\prod_{k=1}^{n+1} sin(\frac{x}{2^k})} = 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\cos(\frac{x}{2^k})$$

le resultat s'ensuit . si x est multiple de $\pi$ la relation est vraie . c'est gagné!!!

## LA RELATION DE Viète

On deduit de la relation precedente que

$$\sin x = x \prod_{n\geq 0} \cos(\frac{x}{2^{n+1}})$$

En effet comme

$$2^{n+1}\sin(\frac{x}{2^{n+1}}) \sim_{+\infty} x$$

alors

$$x \prod_{n\geq 0} \cos(\frac{x}{2^{n+1}}) \sim_{+\infty} \sin x$$

comme

$$\prod_{n\geq 0} \cos(\frac{x}{2^{n+1}}) < +\infty$$

le resultat s'ensuit on prend $x = \frac{\pi}{2}$ donc

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n\geq 0} \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

Introduisons la suite $v_n = \sqrt{2 + v_{n-1}}$ avec $v_0 = \sqrt{2}$ alors $v_n = g(v_{n-1})$ comme $g$ est croissante et que $v_0 < v_1$ on deduit par reccurence que $v_n$ est croissante on montre par recuurence que $v_n$ est majoré par le point fixe de g . De plus $2\cos(\frac{\theta}{2^n})$ verifie la relation de recurrente .

$$2 + 2\cos(\frac{\theta}{2^{n-1}}) = 2 + 2\cos(\frac{2\theta}{2^n}) = 2(1 + \cos(\frac{2\theta}{2^n}))$$

$$2 + 2\cos(\frac{\theta}{2^{n-1}}) = 4cos(\frac{\theta}{2^n}))^2$$

donc

$$2\cos(\frac{\theta}{2^n}) = \sqrt{2 + 2\cos(\frac{\theta}{2^{n-1}})}$$

comme $v_0 = \sqrt{2} = 2\cos(\theta)$ alors $\theta = \frac{\pi}{4}$ donc

$$v_n = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

donc

$$\prod_{n\geq 0} \cos(\frac{x}{2^{n+1}}) = \prod_{n\geq 0} \frac{v_n}{2}$$

en utilisant la forme recurrente de $v_n$ et la valeur de $v_0$ on déduit la formule de Viète .

# 3 DEVELOPPEMENT EULERIEN

## 3.1 QUESTION PRELIMINAIRE

Supposons que la serie $\sum_{n\geq 0} \epsilon_n$ converge alors $\forall m \geq 0$ la serie $\sum_{n\geq 0} \mid u_{n,m} \mid$ converge donc $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n\geq 0} \mid u_{n,m} \mid = \sum_{n\geq 0} \lim_{m\to+\infty} \mid u_{n,m} \mid < +\infty$ comme $lim_{m\to+\infty} \mid u_{n,m} \mid = \mid v_n \mid$ alors $\sum_{n\geq 0} v_n < +\infty$ comme

$$\sum_{n\geq 0} u_{n,m} < +\infty$$

donc

$$\sum_{n\geq 0} v_n = \sum_{n\geq 0} \lim_{m\to+\infty} u_{n,m} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n\geq 0} u_{n,m}$$

## 3.2 QUESTION 1

$$\forall z \in \mathbb{C} : (1 + \frac{z}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}$$

comme

$$\binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{z^k}{n^k} = \frac{\prod_{j=1}^{k}(n-j+1)}{n^k} \frac{z^k}{k!}$$

donc

$$\binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{n} \frac{z^k}{k!} = \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{j-1}{n}) \frac{z^k}{k!}$$

donc

$$\forall z \in \mathbb{C} : (1 + \frac{z}{n})^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{j-1}{n}) \frac{z^k}{k!}$$

Passons à la limite

$$\forall z \in \mathbb{C} : \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = 1 + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{j-1}{n}) \frac{z^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

## 3.3 LES RACINES DE $P_n$

Commençons par chercher les racines de $Z^{2n+1} = 1$ dans $\mathbb{C}$ les racines sont

$$Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}, \forall 0 \leq k \leq 2n$$

$$P_n(z) = 0 \Longleftrightarrow (\frac{1+\frac{iz}{2n+1}}{1-\frac{iz}{2n+1}})^{2n+1} = 1$$

donc

$$\frac{1+\frac{iz}{2n+1}}{1-\frac{iz}{2n+1}} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \Longleftrightarrow 1 + \frac{iz}{2n+1} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}(1 - \frac{iz}{2n+1})$$

$$\frac{iz}{2n+1} + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\frac{iz}{2n+1} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1$$

$$iz(1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}) = (2n+1)(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1)$$

$$z = i(2n+1)\frac{1 - e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}{1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}} = i(2n+1)\frac{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}(e^{-\frac{ik\pi}{2n+1}} - e^{\frac{ik\pi}{2n+1}})}{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}(e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} + e^{-\frac{ik\pi}{2n+1}})} = (2n+1)\tan(\frac{k\pi}{2n+1})$$

les solutions de $P_n$ sont les réels

$$z_k = (2n+1)\tan(\frac{k\pi}{2n+1}) : 0 \leq k \leq 2n$$

## 3.4 FACTORISATION DE $P_n$

Commençons par montrer que $P_n$ est un polynome de dégre $2n+1$ On sait d'après la question 1) que

$$\forall z \in \mathbb{C} : (1 + \frac{iz}{2n+1})^{2n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1}\prod_{j=1}^{k}(1 - \frac{j-1}{2n+1})\frac{i^k z^k}{k!}$$

$$(1 - \frac{iz}{2n+1})^{2n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1}\prod_{j=1}^{k}(1 - \frac{j-1}{2n+1})\frac{(-i)^k z^k}{k!}$$

donc

$$P_n = \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2n+1}\prod_{j=1}^{k}(1 - \frac{j-1}{2n+1})\frac{i^k z^k - (-i)^k z^k}{k!}$$

Posons $a_k = \prod_{j=1}^{k}(1 - \frac{j-1}{2n+1})\frac{i^k z^k - (-i)^k z^k}{k!}$ comme $a_{2k} = 0$ alors

$$P_n = \frac{1}{2i}\sum_{1 \leq 2k+1 \leq 2n+1} a_{2k+1} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}$$

comme

$$a_{2k+1}=\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{i^{2k+1}z^{2k+1}-(-i)^{2k+1}z^{2k+1}}{(2k+1)!}=2i(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

donc

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

donc $deg(P_n)=2n+1$ comme $P_n$ admet 0 et $2n$ racine distincts alors $\exists C$ tel que

$$P_n(z)=Cz\prod_{k=1}^{2n}(z-z_k)$$

de plus $\forall 1\leq k\leq 2n$ on a $1\leq 2n+1-k\leq 2n$ et

$$z_{2n+1-k}=(2n+1)\tan(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1})=(2n+1)\tan(\pi-\frac{k\pi}{2n+1})=-z_k$$

En regroupant par couple $(z_k,-z_k)$ alors

$$\prod_{k=1}^{2n}(z-z_k)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)(z+z_k)=\prod_{k=1}^{n}(z^2-z_k^2)=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}z_k^2(1-\frac{z^2}{z_k^2})$$

comme

$$\prod_{k=1}^{2n}z_k=\prod_{k=1}^{n}z_k\prod_{k=n+1}^{2n}z_k=\prod_{k=1}^{n}z_k\prod_{k=1}^{n}z_{2n-k}=\prod_{k=1}^{n}z_kz_{2n-k}$$

$$\prod_{k=1}^{2n}z_k=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}z_k^2$$

donc

$$P_n(z)=C\prod_{k=1}^{2n}z_k\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{z^2}{z_k^2})$$

en posant $C'=C\prod_{k=1}^{2n}z_k$ on deduit que

$$P_n(z)=C'z\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{z^2}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})})$$

De plus nous avons montré que :

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

donc

$$P_n(z) = z\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

donc

$$C'z\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{z^2}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}) = z\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

pour $z \neq 0$ on a

$$C'\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{z^2}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

donc

$$C'\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{z^2}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}) = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

en faisant tendre $z$ vers 0 on a : $C' = 1$

### 3.5 Une identité

Il s'agit de Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} = \frac{1}{6}\frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2}$$

D'après la partie précedente on a

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{z^2}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}) = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{(2n+1)^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}) = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{1}{(2k+1)!}$$

comme

$$\prod_{k=1}^{n}(1-a_k) = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{1\leq i_1<i_2<.....<i_k\leq n}\prod_{j=1}^{k}a_{i_j}(**)$$

La vérification de (**) est immédiate . en prenant

$$a_k = \frac{1}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}$$

alors

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}) = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leq i_1<i_2<.....<i_k\leq n} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{i_j\pi}{2n+1})}$$

ainsi

$$1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leq i_1<i_2<.....<i_k\leq n} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{i_j\pi}{2n+1})} = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{1}{(2k+1)!}$$

par identification on a :

$$\forall k \geq 1 : \sum_{1\leq i_1<i_2<.....<i_k\leq n} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{i_j\pi}{2n+1})} = \prod_{j=1}^{2k+1}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{1}{(2k+1)!}$$

pour $k = 1$ on a

$$\sum_{1\leq i_1\leq n} \frac{1}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{i_1\pi}{2n+1})} = \prod_{j=1}^{3}(1-\frac{j-1}{2n+1})\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}\frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2}$$

## DEDUCTION

Il s'agit de deduire la relation

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Posons

$$U_{n,m} = \frac{1}{(2m+1)^2 \tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}$$

on sait que $\forall t \geq 0 : \tan t \geq t$ pour le voir il suffit de considérer $f(t) = tant - t$ comme $f'(t) = tan^2(t) \geq 0$ et $f(0) = 0$ le resultat s'ensuit . Ainsi

$$\frac{1}{(2m+1)^2 \tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})} \leq \frac{1}{n^2\pi^2}$$

comme la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} < +\infty$ alors d'après la question préliminaire on a

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{m\to+\infty}U_{n,m}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=\lim_{m\to+\infty}lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}U_{n,m}=lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=lim_{m\to+\infty}lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}$$

donc

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=lim_{m\to+\infty}lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}+\sum_{n=m}^{N}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}+I$$

avec

$$I=lim_{m\to+\infty}lim_{N\to+\infty}\sum_{n=m}^{N}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}=0$$

donc

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2m+1)^2\tan^2(\frac{n\pi}{2m+1})}$$

donc

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}U_{n,m}=\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{6}\frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2}=\frac{1}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{m\to+\infty}U_{n,m}=\frac{1}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}=\frac{1}{6}$$

c'est gagné!!!!

## 3.6 QUESTION 4

Posons $S_N(n) = \sum_{K=2}^{N} \Delta_{K,n}(z)$

$$S_N(n) = \sum_{K=2}^{N} [Q_{K,n}(z) - Q_{K-1,n}(z)] = \sum_{K=2}^{N} P_{\min(K,n)}(z) - \sum_{K=2}^{N} P_{\min(K-1,n)}(z)$$

$$S_N(n) = \sum_{K=2}^{N} P_{\min(K,n)}(z) - \sum_{K=1}^{N-1} P_{\min(K,n)}(z) = P_{\min(N,n)}(z) - P_{\min(1,n)}(z)$$

comme $n$ est fixé et que la fonction min est continue . donc

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(n) = P_n(z) - P_{\min(1,n)}(z) = (P_n(z) - P_1(z))\delta_{\min(1,n)=1} < +\infty$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_{K,n}(z) = \lim_{n\to+\infty} [Q_{K,n}(z) - Q_{K-1,n}(z)]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_{K,n}(z) = \lim_{n\to+\infty} [P_{\min(K,n)}(z) - P_{\min(K-1,n)}(z)] = \lim_{n\to+\infty} P_{\min(K,n)}(z) - \lim_{n\to+\infty} P_{\min(K-1,n)}(z)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_{K,n}(z) = Q_K(z) - Q_{K-1}(z) = \Delta_K(z)$$

D'après la question preliminaire $\sum_{K\geq 0} \Delta_K(z) < +\infty$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{K\geq 0} \Delta_{K,n}(z) = \sum_{K=0}^{+\infty} \Delta_K(z)$$

## 3.7 FORMULE D'EULER

D'après ce qui précede on

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta_{K,n}(z) = \Delta_{1,n}(z) + \sum_{K=2}^{N} \Delta_{K,n}(z) = P_{\min(1,n)} - z + P_{\min(N,n)}(z) - P_{\min(1,n)}(z)$$

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta_{K,n}(z) = P_{\min(N,n)}(z) - z$$

De même

$$\sum_{K=1}^{N} \Delta_K(z) = Q_N(z) - -Q_0(z) = Q_N(z) - z$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} \sum_{K=1}^{N} \Delta_{K,n}(z) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} (P_{\min(N,n)}(z) - z)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{N\to+\infty}\sum_{K=1}^{N}\Delta_{K,n}(z)=\lim_{n\to+\infty}P_n(z)-z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})-z=\sin z-z$$

comme

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{K=1}^{N}\Delta_K(z)=z\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2})-z$$

donc

$$\sin z=z\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2})$$

# 4 FONCTION $\zeta$ ET ARITHMETIQUE

## 4.1 QUESTION 1

On sait que

$$\forall n\geq 1:\frac{1}{(n+1)^s}\leq\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^s}\leq\frac{1}{n^s}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)^s}\leq\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^s}\leq\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$$

$$1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)^s}\leq 1+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^s}\leq 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$$

$$1+\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^s}\leq 1+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^s}\leq 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$$

$$\zeta(s)\leq 1+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^s}\leq 1+\zeta(s)$$

donc

$$\frac{1}{s-1}\leq\zeta(s)\leq 1+\frac{1}{s-1}$$

$$\lim_{s\to1^+}\frac{1}{s-1}\leq\text{‘}\lim_{s\to1^+}\zeta(s)\leq\lim_{s\to1^+}(1+\frac{1}{s-1})$$

donc

$$\lim_{s\to1^+}\zeta(s)=+\infty$$

## 4.2 QUESTION 2

Il s'agit de montrer une identité simple commençons !!!

$$\forall s>1, \prod_{k=1}^{l}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}=\prod_{k=1}^{l}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}=\prod_{k=1}^{l}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{p_k^{sm}}=\prod_{k=1}^{l}(1+\frac{1}{p_k^s}+\frac{1}{p_k^{2s}}+........)$$

$$\prod_{k=1}^{l}(1+\frac{1}{p_k^s}+\frac{1}{p_k^{2s}}+........)=\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_1p_2.....p_l}}\frac{1}{n^s}$$

## AUTRE APPROCHE PAR RECURRENCE

Il s'agit de montrer par recurrence sur $l$ au rang $l=1$ on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_1}}\frac{1}{n^s}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{p_1^{ms}}=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1^s}}=[1-\frac{1}{p_1^s}]^{-1}$$

Supposons que la relation au rang $l$ et montrons sa validité au rang $l+1$ On a

$$\prod_{k=1}^{l+1}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}=\prod_{k=1}^{l}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}((1-\frac{1}{p_{l+1}^s})^{-1})$$

$$\prod_{k=1}^{l+1}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}=[\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_1p_2.....p_l}}\frac{1}{n^s}](1-\frac{1}{p_{l+1}^s})^{-1}$$

$$\prod_{k=1}^{l+1}(1-\frac{1}{p_{l+1}^s})^{-1}=[\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_1p_2.....p_l}}\frac{1}{n^s}]\sum_{m\geq 0}\frac{1}{p_{l+1}^m}=[\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_1p_2.....p_l}}\frac{1}{n^s}]\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_{l+1}}}\frac{1}{n^s}=\sum_{n\in\mathbb{N}_{p_1p_2.....p_{l+1}}}\frac{1}{n^s}$$

En faisant tendre $l$ vers l'infini on a

$$\forall s>1, \zeta(s)=\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}$$

## 4.3 QUESTION 3

Raisonnons par l'absurde supposons que

$$\prod_{k\geq 1}(1-\frac{1}{p_k})^{-1}<+\infty$$

donc

$$\prod_{k\geq 1}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{p_k^m} < +\infty$$

comme

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = \prod_{k\geq 1}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{p_k^m}$$

ceci contredit notre hypothése donc la serie diverge . par la suite

$$\ln(\prod_{k\geq 1}(1-\frac{1}{p_k})^{-1}) = -\sum_{k\geq 1}\ln(1-\frac{1}{p_k})$$

diverge Conme il existe une infinité de nombre premier alors $\lim_{k\to+\infty} p_k = +\infty$ par la suite

$$-\ln(1-\frac{1}{p_k}) \sim_{+\infty} \frac{1}{p_k}$$

d'ou

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k} = +\infty$$

## 4.4 QUESTION 4

Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des entiers sans facteur carré On souhaite montrer que

$$\forall n \in \mathbb{F}, \exists a, b \in \mathbb{N} : n = ab^2$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ Par le theoreme de decomposition en facteur premier

$$\exists \beta_1, \beta_2, ..., \beta_r \in \mathbb{N} : n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i}$$

Comme $n \in \mathbb{F}$ alors $J = \{i \in \{1, 2, ..r\} : 2 \nmid \beta_i\} \neq \emptyset$ ainsi $n = \prod_{i\in J} p_i^{\beta_i} \prod_{i\in J^c} p_i^{\beta_i}$ $\forall i \in J^c : \beta_i \equiv 0[2]$ donc

$$n = \prod_{i\in J} p_i^{\beta_i}[\prod_{i\in J^c} p_i^{\frac{\beta_i}{2}}]^2$$

ceci justifie la preuve .

## DEDUCTION

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\sum_{i\in\mathbb{F},i\leq n}\frac{1}{i}+\sum_{i\in\mathbb{F}^c,i\leq n}\frac{1}{i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\sum_{pb^2\leq n,pgcd(p,b)=1}\frac{1}{pb^2}+\sum_{b^2\leq n}\frac{1}{b^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\sum_{p\leq\frac{n}{b^2},pgcd(p,b)=1}\sum_{b\leq\sqrt{n}}\frac{1}{pb^2}+\sum_{b\leq\sqrt{n}}\frac{1}{b^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\leq\sum_{p\leq\frac{n}{b^2}}\frac{1}{p}\sum_{b\leq\sqrt{n}}\frac{1}{b^2}+\sum_{b\leq\sqrt{(n)}}\frac{1}{b^2}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\leq(\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}+1)\sum_{b\leq n}\frac{1}{b^2}$$

comme

$$1+\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}\leq\prod_{p\leq n}(1+\frac{1}{p})$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\leq\prod_{p\leq n}(1+\frac{1}{p})\sum_{b\leq n}\frac{1}{b^2}$$

## QUESTION 5

On sait que $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\geq\ln(n+1)$ Pour le voir il suffit de voir

$$\frac{1}{n}\geq\int_{n}^{n+1}\frac{dt}{t}$$

ensuite en sommant on justifie la relation ainsi

$$\ln(n+1)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\leq\prod_{p\leq n}(1+\frac{1}{p})\sum_{b\leq n}\frac{1}{b^2}$$

$$\ln(\ln(n+1))\leq\sum_{p\leq n}\ln(1+\frac{1}{p})+\ln(\sum_{b\leq n}\frac{1}{b^2})$$

$$\ln(\ln(n+1))\leq\sum_{p\leq n}\ln(1+\frac{1}{p})+\ln(\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{b^2})$$

$$\ln(\ln(n+1)) \leq \sum_{p\leq n} \frac{1}{p} + \ln(\frac{\pi^2}{6})$$

donc

$$\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\frac{\pi^2}{6})$$

# 5 Loi de $\zeta$

## 5.1 INDEPENDANCE

Supposons que $A$ et $B$ sont indépandants alors

$$c = \mathbb{P}(A\cup B)^c = 1-\mathbb{P}(A\cup B) = 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap B)$$

$$\mathbb{P}(A^c\cap B^c) = 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A^c\cap B^c) = 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)(1-\mathbb{P}(A))$$

$$\mathbb{P}(A\cup B)^c = 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A^c\cap B^c) = (1-\mathbb{P}(A))(1-\mathbb{P}(B))$$

$$\mathbb{P}(A^c\cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$$

donc $A^c$ et $B^c$ sont indépendants .
Posons $A = \{b \mid X\}$ et $B = \{b \mid X\}$ .On souhaite Montrer si $pgcd(a,b) = 1$ alors $A$ et $B$ sont indépendants . Supposons $pgcd(a,b) = 1$

$$A\cap B = \{b \mid X\}\cap\{a \mid X\} = bX\cap aX = abX$$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(abX) = \frac{1}{ab} = \frac{1}{a}\frac{1}{b} = \mathbb{P}(aX)\mathbb{P}(bX) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

## 5.2 Une inégalité

Posons

$$B = \{\forall l \geq k_m : p_l \nmid [[1,m]]\}$$

Soit $j \in [[1,m]]$ Par définition de $k_m$ on a $\forall l \geq k_m, p_l > j$ donc $p_l \nmid j$ céci montre que

$$[[1,m]] \subset B$$

donc

$$\mathbb{P}([[1,m]]) \leq \mathbb{P}(B)$$

comme

$$B = \{\forall l \geq k_m : p_l \nmid [[1,m]]\} = \bigcap_{l \geq k_m} p_l[1,m]^c$$

donc

$$\mathbb{P}([[1,m]]) \leq \mathbb{P}(\bigcap_{l \geq k_m} p_l[1,m]^c) = \prod_{l \geq k_m} \mathbb{P}(p_l[1,m]^c) = \prod_{l \geq k_m} (1-\mathbb{P}(p_l[1,m]) = \prod_{l \geq k_m} (1-\frac{1}{p_l})$$

Pour finir nous allons tirer une conclusion il s'agit d'un enseignement il n'existe aucune probabilité uniforme sur $\mathbb{N}^*$ On a

$$\mathbb{P}([[1,m]]) \leq \prod_{l \geq k_m} (1 - \frac{1}{p_l}) = \frac{1}{(\prod_{l \geq k_m} (1 - \frac{1}{p_l}))^{-1}}$$

en faisant tend $l$ vers $+\infty$ on a $\mathbb{P}([[1,m]]) = 0$

## 5.3 QUESTION 2

Pour $s$ réel fixé $s > 1$ .On définit la probabilité $\mathbb{P}_s$ sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\mathbb{P}_s(A) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in A} \frac{1}{n^s}$$

alors

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_s(a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in a\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(an)^s} = \frac{1}{a^s} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{a^s}$$

## 5.4 PROBABILITE DES SANS FACTEURS CARRES

Soit $X$ une variable aléatoire et $p$ un nombre premier alors $X$ est sans facteur carré si $\forall p \geq 2, p^2 \nmid X$ Soit $A$ l'évenement " $X$ est sans facteur carré" alors

$$A = \bigcap_{p \geq 2} \{p^2 \nmid X\}$$

comme les $\{p^2 \mid X\}$ sont indépendants alors les $\{p^2 \nmid X\}$ le sont Ainsi

$$\mathbb{P}_s(A) = \mathbb{P}_s(\bigcap_{p \geq 2} \{p^2 \nmid X\}) = \prod_{p \geq 2} \mathbb{P}_s(\{p^2 \nmid X\}) = \prod_{p \geq 2} [1-\mathbb{P}_s(\{p^2 \mid X\})] = \prod_{p \geq 2} [1-\mathbb{P}_s(p^2\mathbb{N}^*)]$$

$$\mathbb{P}_s(A) = \prod_{p \geq 2} [1 - p^{-2s}] = \frac{1}{\zeta(2s)}$$

# 6 PARTIE 4

Posons $a_n = card(A \cap [[1,n])$

$$a_{n+1} = card(A \cap [[1,n+1]) = card(A \cap [[1,n] \cup [A \cap \{n+1\})$$

$$a_{n+1} = card(A \cap [[1,n]) + card([A \cap \{n+1\}) = a_n + \delta_{n+1}(A)$$

où

$$\delta_{n+1}(A) = 1 \Longleftrightarrow n+1 \in A$$

et 0 sinon .

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\delta_n(A)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n - a_{n-1}}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} - \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n^s}$$

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} - \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(n+1)^s}$$

comme $a_0 = 0$ alors

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} - \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{(n+1)^s} = \sum_{n\geq 1} a_n [\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}]$$

Soit $\epsilon > 0$ arbitraire .On souhaite montrer l'existence de $\delta > 0$ tel que si $1 \leq s \leq 1+\delta$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} \leq (\frac{n+1}{n})^s - 1) \leq \frac{1+\epsilon}{n}$$

Posons $f_n(s) = n(\frac{n+1}{n})^s - 1)$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n(s) = n(\frac{n+1}{n})^s - 1) = n[(1+\frac{1}{n})^s - 1] \geq [s] \geq 1$$

La justification vient de deux idées d'abord comme $s \geq [s]$ on a

$$(1+\frac{1}{n})^s \geq (1+\frac{1}{n})^{[s]}$$

ensuite on applique l'inégalité de Bernouilli $\forall n \geq 0, \forall x > 0 : (1+x)^n \geq 1+nx$ de plus $\lim_{s\to 1} f_n(s) = 1$ donc $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall 1 \leq s \leq 1+\delta : 1 \leq f_n(s) \leq 1+\epsilon$$

en divisant par $n$ c'est gagné... Maintenant supposons que $A$ admet une densité naturelle $d$ de plus on a : $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} \leq (\frac{n+1}{n})^s - 1) \leq \frac{1+\epsilon}{n}$$

donc

$$\frac{1}{n(n+1)^s} \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1+\epsilon}{n(n+1)^s}$$

$$\frac{a_n}{n(n+1)^s} \leq a_n[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}] \leq \frac{(1+\epsilon)a_n}{n(n+1)^s}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n(n+1)^s} \leq \sum_{n\geq 1} a_n[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}] \leq \sum \frac{(1+\epsilon)a_n}{n(n+1)^s}$$

comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = d$$

alors

$$\exists N_\epsilon, \forall n \geq N_\epsilon : (1-\epsilon)d \leq \frac{a_n}{n} \leq (1+\epsilon)d$$

donc

$$(1-\epsilon)d \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} \leq \sum_{n\geq N_\epsilon} a_n[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}] \leq (1+\epsilon)^2 d \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s}$$

$$(1-\epsilon)d\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} a_n[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}] \leq (1+\epsilon)^2 d\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s}$$

donc

$$(1-\epsilon)d\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} + I \leq \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} a_n[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}] + I \leq (1+\epsilon)^2 d\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} + I$$

avec

$$I = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\leq N_\epsilon} a_n[\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}]$$

$$(1-\epsilon)d\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} + I \leq \mathbb{P}_s(A) \leq (1+\epsilon)^2 d\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} + I$$

comme

$$\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = 1$$

$$\lim_{s\to 1^+} I = 0$$

et

$$\lim_{s\to 1^+} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\geq N_\epsilon} \frac{1}{(n+1)^s} = 1$$

donc

$$\lim_{s\to 1^+} \mathbb{P}_s(A) = d$$

Soit A l'ensemble des sans carré et $d$ sa densité d'après la partie précedente

$$\mathbb{P}_s(A) = \frac{1}{\zeta(2s)}$$

comme

$$d = \lim_{s\to 1^+} \mathbb{P}_s(A) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$$