Contrôle intermédiaire - Corrigé

Table des matières

- 1. Animaux
  - 1.1. Cardinal de la relation
  - 1.2. Champ de la relation
  - 1.3. Cardinal du champ
  - 1.4. Interprétation sémantique
  - 1.5. Représentation graphique
- 2. Entre deux zoos
  - 2.1. Relation sans propriétés classiques
  - 2.2. Cardinal minimal général
  - 2.3. Cardinal minimal de l'image
- 3. Les entiers
  - 3.1. Cardinal de N
  - 3.2. Antisymétrie de N
  - 3.3. Transitivité de N
- 4. Éléments imagés
  - 4.1. Calcul de R_1 (Souris)
  - 4.2. Calcul de E
  - 4.3. Champ de E
  - 4.4. Calcul de F
  - 4.5. Calcul de $\mathscr{F}(F)$
  - 4.6. Réflexivité de F
  - 4.7. Irréflexivité de F_n

Les notes sont des indications supplémentaires pour la compréhension, mais elles ne sont pas requises dans les réponses.

1. Animaux

1.1. Cardinal de la relation

$\#R_1 = 16$

1.2. Champ de la relation

$\mathscr{F}(R_1) = \{\text{Souris}, \text{Chat}, \text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$

1.3. Cardinal du champ

$\#\mathscr{F}(R_1) = 5$

1.4. Interprétation sémantique

Toute interprétation cohérente avec la structure de la relation est acceptable, à condition qu'elle inclue bien les paires homogènes (de type (a, a)). Par exemple :

- xR_1y ssi x n'est pas significativement plus grand que y
- xR_1y ssi x a approximativement la même taille ou est plus petit que y
- xR_1y ssi x peut être chassé par y ou x égale y
- xR_1y ssi x est dominé par y ou au même niveau que y dans la chaine alimentaire

1.5. Représentation graphique

Utilisons un diagramme de Hasse car R_1 est un préordre (relation réflexive et transitive).

```
       Souris
         |
       Chat
      /     \
     /       \
  Loup  -- Coyote
     \       /
      \     /
       Ours
```

Note : le diagramme de Hasse est la représentation la plus appropriée car il simplifie la visualisation : les boucles réflexives et les liens déductibles de la transitivité (Souris → Loup, Souris → Coyote, Souris → Ours et Chat → Ours) sont implicites dans le diagramme de Hasse. Le double lien entre Loup et Coyote indique qu'ils sont considérés comme équivalents par R_1.

2. Entre deux zoos

2.1. Relation sans propriétés classiques

Par exemple, $R_2 = \{$(Chat, Chat), (Souris, Chat)$\}$.

- Pas symétrique : manquent (Souris, Souris) et (Chat, Souris) pour satisfaire la symétrie
- Pas asymétrique ni irréflexive à cause de (Chat, Chat)
- Pas réflexive : il manque (Souris, Souris)

Note : De nombreux autres exemples sont possibles, par exemple $R_2 = \{$(Chat, Chat), (Chat, Souris), (Souris, Chat)$\}$.

2.2. Cardinal minimal général

Le cardinal minimal est 2 (exemple ci-dessus).

- Avec 0 éléments : la relation $\emptyset$ est symétrique, asymétrique, réflexive et irréflexive
- Avec 1 élément : toute relation $\{(a, b)\}$ est réflexive si $a = b$ et irréflexive si $a \neq b$

2.3. Cardinal minimal de l'image

Le cardinal minimal de l'image est 1 (exemple ci-dessus). En effet, avec 0 éléments, donc $\mathscr{I}(R) = \emptyset$, on a $\mathscr{F}(R) = \emptyset$, donc $R = \emptyset$, or la relation $\emptyset$ est symétrique, asymétrique, réflexive et irréflexive.

3. Les entiers

3.1. Cardinal de N

$\#N = 499\,500$. En effet, la relation N contient tous les couples (i, j) avec $1 \leq i < j \leq 1000$. C'est le nombre de façons de choisir 2 éléments distincts parmi 1000 dans un ordre croissant, soit $\#N = C(1000, 2) = \frac{1000 \times 999}{2} = \frac{999\,000}{2}$.

Note : une autre réponse possible est d'observer que $N = \{(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, 1000)\} \cup \{(2, 3), (2, 4), \ldots, (2, 1000)\} \cup \ldots \cup \{(999, 1000)$ *et le nombre d'éléments dans chaque sous-ensemble est respectivement 999, 998, ..., 1, donc* $\#N = 999 + 998 + \ldots + 1 = 999 \times \frac{999+1}{2}$ *(intuitivement, (999 + 1)/2 est la moyenne des éléments sommés).*

3.2. Antisymétrie de N

La relation N est antisymétrique : si iNj alors $i < j$, donc $j \not< i$, donc $\neg(jNi)$.

3.3. Transitivité de N

La relation N est transitive : si iNj et jNk, alors $i < j < k$, donc $i < k$, donc iNk.

4. Éléments imagés

4.1. Calcul de R_1 (Souris)

$R_1(\text{Souris}) = \{\text{Souris}, \text{Chat}, \text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$

4.2. Calcul de E

$E = \{$(Souris, Ours), (Ours, Souris), (Chat, Ours), (Ours, Chat), (Loup, Ours), (Ours, Loup), (Coyote, Ours), (Ours, Coyote), (Ours, Ours)$\}$.

En effet, pour chaque animal a, $R_1(a)$ est l'ensemble des animaux au même niveau ou plus bas que a dans le diagramme de Hasse ci-dessus. Cet ensemble contient uniquement Ours si a est Ours, et sinon, donc si a est au niveau de Loup et Coyote ou plus haut (Chat ou Souris), alors l'ensemble $R_1(a)$ contient au moins Loup, Coyote et Ours.

Donc, si un des animaux d'une paire (a, b) est Ours, alors $R_1(a) \cap R_1(b)$ contient au plus Ours, donc son cardinal est au plus 1, donc ces paires sont dans E ; si aucun des animaux d'une paire (a, b) n'est Ours, alors $R_1(a) \cap R_1(b)$ contient au moins Loup, Coyote et Ours, ces paires sont donc exclues de E.

Il s'ensuit qu'une paire est dans E ssi au moins l'un des deux animaux est Ours.

Note : on peut aussi trouver la réponse par calcul exhaustif, indiqué ci-dessous. L'inconvénient de cette approche (outre son inélégance et le risque d'erreur d'inattention) est qu'elle ne met pas sur la voie pour les questions suivantes.

- $R_1(\text{Souris}) = \{\text{Souris}, \text{Chat}, \text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$
- $R_1(\text{Chat}) = \{\text{Chat}, \text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$
- $R_1(\text{Loup}) = \{\text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$
- $R_1(\text{Coyote}) = \{\text{Coyote}, \text{Loup}, \text{Ours}\}$
- $R_1(\text{Ours}) = \{\text{Ours}\}$
- $R_1(\text{Souris}) \cap R_1(\text{Souris}) = \{\text{Souris}, \text{Chat}, \text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$ → cardinal 5
- $R_1(\text{Souris}) \cap R_1(\text{Chat}) = \{\text{Chat}, \text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$ → cardinal 4
- $R_1(\text{Souris}) \cap R_1(\text{Loup}) = \{\text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$ → cardinal 3
- $R_1(\text{Souris}) \cap R_1(\text{Coyote}) = \{\text{Coyote}, \text{Loup}, \text{Ours}\}$ → cardinal 3
- $R_1(\text{Souris}) \cap R_1(\text{Ours}) = \{\text{Ours}\}$ → cardinal 1
- $R_1(\text{Chat}) \cap R_1(\text{Chat}) = \{\text{Chat}, \text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$ → cardinal 3
- $R_1(\text{Chat}) \cap R_1(\text{Loup}) = \{\text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$ → cardinal 3
- $R_1(\text{Chat}) \cap R_1(\text{Coyote}) = \{\text{Coyote}, \text{Loup}, \text{Ours}\}$ → cardinal 3
- $R_1(\text{Chat}) \cap R_1(\text{Ours}) = \{\text{Ours}\}$ → cardinal 1
- $R_1(\text{Loup}) \cap R_1(\text{Loup}) = \{\text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$ → cardinal 3
- $R_1(\text{Loup}) \cap R_1(\text{Coyote}) = \{\text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$ → cardinal 3
- $R_1(\text{Loup}) \cap R_1(\text{Ours}) = \{\text{Ours}\}$ → cardinal 1
- $R_1(\text{Coyote}) \cap R_1(\text{Coyote}) = \{\text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$ → cardinal 3

- $R_1(\text{Coyote}) \cap R_1(\text{Loup}) = \{\text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$ → cardinal 3
- $R_1(\text{Coyote}) \cap R_1(\text{Ours}) = \{\text{Ours}\}$ → cardinal 1
- $R_1(\text{Ours}) \cap R_1(\text{Ours}) = \{\text{Ours}\}$ → cardinal 1
- Omettons les paires restantes, qui sont déductibles en observant que $R_1(a) \cap R_1(b) = R_1(b) \cap R_1(a)$, donc par exemple $R_1(\text{Loup}) \cap R_1(\text{Chat}) = R_1(\text{Chat}) \cap R_1(\text{Loup})$.

Toutes les intersections impliquant deux animaux différents de Ours ont un cardinal ≥ 3.

Les seules intersections avec cardinal ≤ 1 sont celles impliquant Ours :

- $R_1(a) \cap R_1(\text{Ours}) = \{\text{Ours}\}$ pour tout $a \in \mathscr{F}(R_1)$
- $R_1(\text{Ours}) \cap R_1(b) = \{\text{Ours}\}$ pour tout $b \in \mathscr{F}(R_1)$

4.3. Champ de E

$\mathscr{F}(E) = \{\text{Souris}, \text{Chat}, \text{Loup}, \text{Coyote}, \text{Ours}\}$

Note : la simple réponse $\mathscr{F}(E) = \mathscr{F}(R_1)$ est également acceptable (à supposer que vous ayez répondu correctement à la Section 1.2, « Champ de la relation »).

4.4. Calcul de F

$F = \{(i,j) | i,j \in [\![1000]\!] \wedge \max(i,j) \geq 999\}$

En effet, pour tout $i \in [\![1000]\!]$, on a $N(i) = \{k | i < k \leq 1000\}$. Donc, pour deux entiers i et j, on a $N(i) \cap N(j) = \{k | \max(i,j) < k \leq 1000\}$. Cette intersection contient au plus un élément ssi $\max(i,j) \geq 999$.

Note : de multiples formulations existent, par exemple la réponse $F = \{(i,j) \in [\![1000]\!] | i \geq 999 \vee j \geq 999\}$ est également acceptable.

4.5. Calcul de $\mathscr{F}(F)$

$\mathscr{F}(F) = [\![1000]\!]$.

Note : une preuve (non demandée) est que pour tout $i \in [\![1000]\!]$, on a $(i, 999) \in F$.

4.6. Réflexivité de F

La relation n'est pas réflexive : par exemple, $1 \in \mathscr{F}(F)$ mais $(1,1) \notin F$ car $\max(1,1) = 1 < 999$.

4.7. Irréflexivité de F_n

F_n n'est pas irréflexive, quel que soit n. En effet, $(n, n) \in F_n$ car $\#N(n) = 0 \leq 1$.

Note : cette réponse considère N définie sur $[\![n]\!]$, ce qui n'était pas explicite. Une réponse qui considère que N reste borné à 1000 quand n change est également acceptée.