

Contrôle intermédiaire octobre 2025

Calculatrices et documents interdits. Je ne fournirai pas d'éclaircissements sur l'énoncé pendant l'examen.

Consignes de réponse.

- Répondez sur feuille blanche séparée, pas sur la feuille d'énoncé.
- Indiquez votre prénom et nom en haut de chaque feuille.
- Indiquez à quelle partie d'exercice vous répondez par son numéro complet (par exemple 1.2).

Rappels et notations.

- Le cardinal d'un ensemble A , noté $\#A$, est le nombre d'éléments de A .
- Étant donné $n \in \mathbb{N}$, les entiers entre 1 et n sont notés $\llbracket n \rrbracket = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$.
- Une relation R est asymétrique ssi $\forall a, b \in \mathcal{F}(R) : aRb \Rightarrow \neg(bRa)$.

1. Animaux (6 points)

Soit la relation $R_1 = \{(Souris, Chat), (Souris, Souris), (Chat, Loup), (Souris, Loup)$,
,
 $(Chat, Chat), (Coyote, Coyote), (Souris, Coyote), (Chat, Coyote), (Loup, Coyote)$,
,
 $(Coyote, Loup), (Coyote, Ours), (Loup, Loup), (Souris, Ours), (Loup, Ours)$,
 $(Ours, Ours), (Chat, Ours)\}$.

1. Donnez le cardinal de R_1 . Écrivez la réponse sous la forme $\#R_1 = \dots$, il n'est pas demandé de justification. (1,5 points)
2. Donnez le champ de R_1 . Écrivez la réponse sous la forme $\mathcal{F}(R_1) = \dots$, il n'est pas demandé de justification. (1,5 points)
3. Donnez le cardinal de $\mathcal{F}(R_1)$. Écrivez la réponse sous la forme $\#\mathcal{F}(R_1) = \dots$, il n'est pas demandé de justification. (1 point)
4. Indiquez en français ce que pourrait représenter cette relation. Écrivez la réponse sous la forme xR_1y ssi (1 point)
5. Représentez graphiquement cette relation avec la méthode la plus appropriée. Justifiez informellement et brièvement votre choix de méthode (une phrase suffit). (1 point)

2. Entre deux zoos (5 points)

1. Donnez une relation R_2 sur un ensemble d'animaux qui n'est ni symétrique, ni asymétrique, ni réflexive, ni irréflexive. Justifiez informellement et brièvement pourquoi votre relation ne satisfait aucune de ces propriétés (une ou deux phrases en tout suffisent). (2 points)
2. En général, quel est le cardinal minimal d'une relation qui n'est ni symétrique, ni asymétrique, ni réflexive, ni irréflexive ? Justifiez informellement et brièvement. (2 points)
3. Quel est le cardinal minimal de l'image $\mathcal{I}(R)$ d'une relation qui n'est ni symétrique, ni asymétrique, ni réflexive, ni irréflexive ? Justifiez informellement et brièvement. (1 point)

3. Les entiers (5 points)

Considérons la relation N sur $\llbracket 1000 \rrbracket$ définie par iNj ssi $i < j$.

1. Calculez $\#N$. Écrivez la réponse sous la forme $\#N = \dots$. Justifiez brièvement (informellement ou en détaillant vos calculs). (1 point)
2. La relation N satisfait-elle l'antisymétrie ? Justifiez informellement et brièvement (une phrase suffit). (2 points)
3. Même question pour la transitivité. (2 points)

4. Éléments imagés (4 points)

Étant donné une relation R et un élément $a \in \mathcal{F}(R)$, définissons l'ensemble $R(a) = \{b \in \mathcal{F}(R) | aRb\}$.

Les questions ci-dessous font référence aux relations R_1 et N définies dans les exercices précédents.

1. Calculez $R_1(\text{Souris})$. Écrivez la réponse sous la forme $R_1(\text{Souris}) = \dots$ (en indiquant explicitement le contenu de cet ensemble), il n'est pas demandé de justification. (1 point)
2. Calculez $E = \{(a, b) \in \mathcal{F}(R_1) \times \mathcal{F}(R_1) | \#(R_1(a) \cap R_1(b)) \leq 1\}$. Écrivez la réponse sous la forme $E = \dots$ (en indiquant explicitement le contenu de cet ensemble), justifiez informellement et brièvement. (0,8 point)
3. Donnez le champ de E . Écrivez la réponse sous la forme $\mathcal{F}(E) = \dots$, il n'est pas demandé de justification. (0,2 point)
4. Calculez $F = \{(i, j) \in \llbracket 1000 \rrbracket \times \llbracket 1000 \rrbracket | \#(N(i) \cap N(j)) \leq 1\}$. Écrivez la

réponse sous la forme $F = \{(i, j) | \dots\}$ (en indiquant une condition simple sur i et j), justifiez informellement et brièvement. (0,8 point)

5. Donnez le champ de F . Écrivez la réponse sous la forme $\mathcal{F}(F) = \dots$, il n'est pas demandé de justification. (0,2 point)

6. La relation F est-elle réflexive ? Justifiez informellement et brièvement, puis démontrez-le formellement. (1 point)

7. Étant donné $1 \leq n \in \mathbb{N}$, définissons la relation

$F_n = \{(i, j) \in [n] \times [n] | \#(N(i) \cap N(j)) \leq 1\}$. Pour quelles valeurs de n la relation F_n est-elle irréflexive ? Justifiez informellement et brièvement, puis démontrez-le formellement. (1 point bonus)