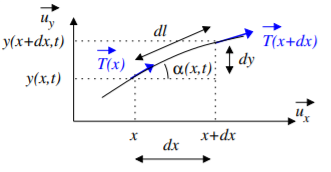
Résolution de l’équation des ondes sur une corde vibrante :



Le principe fondamental de la dynamique en translation pour l’élément s’écrit :

On peut simplifier cette équation en tenant compte de nos hypothèses et du fait que le membre de droite représente la variation de selon l’axe x :

Projetons sur l’axe  :

On sait que la tension ne dépend pas de , de plus, comme on ne change pas au cours du temps, on peut réécrire .

Projetons sur l’axe  :

Sachant que la tension est tangente à la corde en tout point, on peut écrire :

L’équation selon l’axe devient donc :

où

Cette dernière équation est l’équation de d’Alambert à une dimension, elle décrit comment notre onde se propage à une vitesse qui ne dépend que des caractéristiques du milieu de propagation ().

Pour trouver la solution générale à cette équation, d’Alambert à découvert une méthode « factorisant » l’opérateur différentiel :

On factorise d’abord l’opérateur :

Ensuite en effectuant un changement de variables et en appliquant la forme multivariable de la règle de chaine, on obtient :

Pour dériver une deuxième fois, il suffit d’injecter dans notre dernière équation pour obtenir :

De la même manière, on peut obtenir  :

L’équation de d’Alambert peut donc être réécrite sous la forme :

Après simplification, on obtient :

En intégrant et en rechangeant les variables, on obtient finalement la solution générale :

Cette dernière équation représente la superposition de deux ondes se déplaçant à la vitesse , dans des directions opposées.

Maintenant, nous pouvons retravailler cette équation en utilisant nos conditions aux limites, à savoir que les deux extrémités de la corde sont fixées. On obtient donc que lorsque ou , on retrouve que la corde ne bouge pas verticalement , indépendamment de . Cela nous donne pour :

Comme cette équation est indépendant du temps, on peut la réécrire sous la forme :

Cela nous permet donc de réécrire notre solution générale sous la forme :

Cette dernière équation nous montre que le principe de réflexion est appliqué à notre onde.

En utilisant notre autre condition aux limites, dans cette équation, on obtient :

Encore une fois, cette équation est indépendante du temps, on peut donc la réécrire sous la forme :

Cette dernière équation nous montre la périodicité (de période ) de notre fonction et nous permet donc de la transformer en séries de Fourrier.

Si l’on veut généraliser notre cas à la énième harmonique, la fonction prendra la forme , en l’injectant dans notre solution générale, on obtient :

On peut réécrire cette équation sous la forme :

Cette solution est celle de Bernouilli pour l’équation d’une onde à une dimension. De celle-ci on peut en déduire la fréquence de la énième harmonique grâce à et en remplaçant par