

# La géométrie des variétés algébriques : cohomologie et cycles algébriques

Projet de recherche  
Concours du CNRS 2024

Olivier de Gaay Fortman

27 janvier 2024

**Goal of this text.** Le but de ce rapport est de décrire les recherches que je compte mener dans les années à venir. Ce rapport se compose de huit chapitres ; il est structuré comme suit :

- (1) Le Chapitre 1 est consacrée à :
  - une courte introduction à la théorie générale de la géométrie algébrique ;
  - une description du principal objectif global de ce projet de recherche ; et
  - une présentation des propositions de recherche de manière intuitive.
- (2) Dans le Chapitre 2, I present some background on the general theory which facilitates the explanation of my various research proposals. As such, Chapter 2 consists of four sections, in which I respectively talk about abelian varieties and Jacobians (Section 2.1), Hodge theory, algebraic cycles and cohomology of complex varieties (Section 2.2), and algebraic cycles and cohomology of real varieties (Section 2.3). J'y introduis donc les notions de cycles algébriques de variétés algébriques, ainsi que de la théorie de Hodge, concepts liés par l'application classe de cycle. Je formulerai les versions complexes et réelles de la conjecture de Hodge entière, thèmes importants dans ma recherche.
- (3) Les Chapitres 3 – 7 constituent des descriptions détaillées des cinq propositions de projet. Le Chapitre 8 consiste de la bibliographie.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Variétés algébriques . . . . .	3
1.2	Objectif général de ce projet de recherche. . . . .	10
1.3	Projets, problèmes et questions . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Théorie générale</b>	<b>17</b>
2.1	Variétés abéliennes et jacobienes . . . . .	17
2.2	Cohomologie et cycles algébriques complexes . . . . .	18
2.3	Cohomologie et cycles algébriques réels . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Projet I. Cohomologie de l'espace de modules des courbes réelles</b>	<b>25</b>
3.1	Moduli theory . . . . .	25
3.2	Moduli of curves . . . . .	26
3.3	Moduli of real curves . . . . .	26
3.4	Smith–Thom for algebraic stacks and maximality of $\mathcal{M}_g$ . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Projet II. Variétés abéliennes isogènes à des jacobienes sur <math>\overline{\mathbb{Q}}</math></b>	<b>29</b>
4.1	Principally polarized abelian varieties . . . . .	29
4.2	Isogenies between abelian varieties and Jacobians . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Projet III. La conjecture de Tate entière sur les corps finis</b>	<b>31</b>
5.1	La conjecture de Tate entière et la cohomologie non-ramifiée . . . . .	31
5.2	La conjecture de Tate entière pour les solides abéliens . . . . .	31
5.3	Stratégie du projet . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Projet IV. La conjecture de Hodge entière</b>	<b>34</b>
6.1	1-cycles on complex abelian varieties . . . . .	34
6.2	Stratégie du projet . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Projet V. La conjecture de Hodge entière réelle</b>	<b>37</b>
7.1	La propriété de Hodge entière réelle . . . . .	37
7.2	Résultats connus et questions ouvertes . . . . .	38
7.3	Strategie du projet . . . . .	39
<b>8</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Variétés algébriques

Algebraic geometry is the study of systems of algebraic equations in several variables, as well as of the structure that which one can give to the solutions of such equations. There are four ways in which this study can be carried out : analytically, topologically, algebro-geometrically, and arithmetically. These four ways are by no means independent of each other.

The main objects of study in the discipline of algebraic geometry are the so-called *algebraic varieties* ; these are spaces which are locally described by the vanishing of several polynomials in multiple variables. If one starts with equations whose coefficients are complex numbers, one can use analytic and topological methods to study algebraic varieties. One may then consider the set of zeros of the equations as a manifold – topological, or analytic – provided one makes suitable assumptions of non-singularity. But one can start with equations whose coefficients lie in any field, not necessarily of characteristic zero ; think of the finite field  $\mathbb{F}_p$  of  $p$  elements for some prime number  $p$ . In the latter case, the algebro-geometric methods are applied to deal with equations having coefficients in this field ; the solutions of the equations lie in its algebraic closure. The arguments used are geometric, often supplemented by commutative algebra, and also by number theory.

As for the history of algebraic geometry : one might argue that the discipline goes back to Descartes. Many mathematicians - such as Abel, Riemann, Poincaré, Noether, Severi's Italian school, Weil, Zariski and Chevalley - have produced

brilliant work in this area. The field was revolutionised in the 1950s and 60s by the work of Serre and Grothendieck, and has continued to develop since then.

**Affine algebraic varieties** The main objects of study in algebraic geometry are systems of algebraic equations and their sets of solutions. Let  $k$  be a field and  $k[T_1, \dots, T_n]$  be the algebra of polynomials in  $n$  variables with coefficients in  $k$ . One would like to study finite subsets

$$S = \{f_1, \dots, f_m\} \subset k[T_1, \dots, T_n], \quad f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n].$$

Let  $K$  be any field that contains  $k$ . A *solution* of  $S$  in  $K^n$  is an element

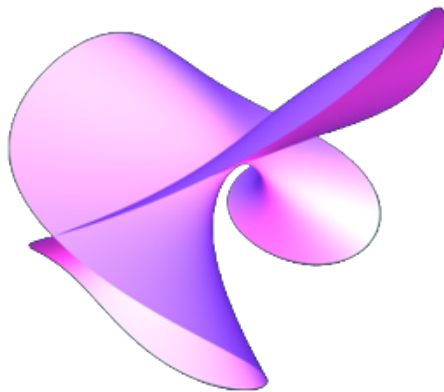
$$(x_1, \dots, x_n) \in K^n \quad \text{such that} \quad f(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{for all} \quad f \in S.$$

We let  $Z(S)(K) \subset K^n$  be the set of solutions of  $S$  in  $K^n$ .

**Example 1.1.1.** Let  $S = \{X^2 + Y^2 - 1\} \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ . Then  $Z(S)(\mathbb{R})$  yields the circle in  $\mathbb{R}^2$  :

$$Z(S)(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Let  $S = \{X^3 + X^2Z^2 - Y^2\}$ , and consider the set of real solutions of  $S$  :



$$Z(S)(\mathbb{R}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + x^2z^2 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Let  $S \subset k[T_1, \dots, T_n]$  be a finite subset. Letting the field extension  $K \supset k$  vary, we get different sets of solutions  $Z(S)(K)$ , each a subset of  $K^n$ .

**Example 1.1.2.** Let  $S = \{f(T_1, T_2)\} \subset \mathbb{Q}[T_1, T_2]$  be a system consisting of one equation in two variables.

- (1)  $Z(S)(\mathbb{Q})$  is a subset of  $\mathbb{Q}^2$  and its study belongs to number theory. One of the most beautiful results of the theory is the Mordell Theorem (until recently only a conjecture) which gives conditions for finiteness of the set  $Z(S)(\mathbb{Q})$ .
- (2)  $Z(S)(\mathbb{R})$  is a subset of  $\mathbb{R}^2$  studied in topology and analysis. It is a union of a finite set and an algebraic curve, or the whole  $\mathbb{R}^2$ , or empty.
- (3)  $Z(S)(\mathbb{C})$  is a Riemann surface or its degeneration, studied in complex analysis and topology.

All these sets are different incarnations of the same object, an *affine algebraic variety over  $k$* . This is a principle object of study in algebraic geometry. One could define it as an equivalence class  $X = Z(S)$  of finite sets  $S \subset k[T_1, \dots, T_n]$ , where  $S$  and  $S'$  are equivalent if  $Z(S)(K) = Z(S')(K)$  for any  $k$ -algebra  $K$ . For example,  $\mathbb{A}^n = Z(\emptyset)$  is called *affine  $n$ -space over  $k$* ; it satisfies  $\mathbb{A}^n(K) = K^n$  for any  $K \supset k$ .

If  $X = Z(S)$  denotes an affine algebraic  $k$ -variety containing a system of algebraic equations  $S \subset k[T_1, \dots, T_n]$ , then, for any field extension  $K \supset k$ , the subset

$$X(K) = Z(S)(K) \subset K^n$$

is well-defined. It is called the set of  *$K$ -rational points of  $X$* .

**Affine algebraic varieties over  $\mathbb{R}$**  L'étude des racines réelles d'un système de polynômes réels

$$f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \tag{1.1}$$

constitue une partie ancienne et fascinante des mathématiques. Procédant comme avant, définissant  $S = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  et

$$X(\mathbb{C}) := Z(S)(\mathbb{C}) = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \mid f_i(\alpha) = 0 \ \forall i\} \subset \mathbb{C}^n, \tag{1.2}$$

alors cette tâche consiste à étudier le sous-ensemble

$$X(\mathbb{R}) = X(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}^n \subset X(\mathbb{C}). \quad (1.3)$$

Il s'avère que l'on gagne beaucoup en perspicacité en étudiant l'ensemble plus large  $X(\mathbb{C})$  avec l'involution anti-holomorphe naturelle

$$\sigma: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C}).$$

Notez que, même lorsque le lieu réel  $X(\mathbb{C})^\sigma = X(\mathbb{R}) = X(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}^n$  est vide, une telle variété  $X$  peut encore être un objet très intéressant à étudier.

Outre les méthodes algébriques, il existe de nombreuses autres techniques permettant d'étudier une variété algébrique affine sur  $\mathbb{R}$ . Par exemple, si le rang de la matrice  $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))$  est maximal à chaque  $a \in Z(\mathbb{C})$ , alors  $Z$  est appelé *lisse* et  $Z(\mathbb{C})$  a une structure naturelle de variété complexe. Si, de plus,  $n$  est la dimension de la variété complexe  $Z(\mathbb{C})$  et  $Z(\mathbb{R}) \neq \emptyset$  alors

$$Z(\mathbb{R}) \subset Z(\mathbb{C})$$

est une sous-variété différentiable fermé de dimension  $n$ . Par conséquent, nous pouvons appliquer des techniques topologiques, différentielles et d'analyse pour étudier la géométrie des ensembles algébriques (1.2) et (1.3).

**Algebraic varieties** Comme dans la théorie des variétés topologiques, il est naturel de considérer des objets plus généraux, connus sous le nom de *variétés algébriques sur un corps  $k$* ; ce sont des espaces localement annelés  $X$  localement isomorphes à une variété algébrique affine. La définition précise de variété algébrique sur  $k$  nécessite un peu de travail (voir par exemple [EGAI]), mais l'idée est claire : tout idéal

$$I = (f_1, \dots, f_m) \subset k[x_1, \dots, x_n]$$

définit un espace localement annelé  $U_I = \text{Spec } (k[x_1, \dots, x_n]/I)$ ; une *variété algébrique sur  $k$*  est un espace localement annelé qui admet un recouvrement ouvert fini par des espaces de la forme  $U_I$  pour  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  un idéal premier (les

variétés affines). Une telle variété  $X$  est dite *lisse* si le rang de la matrice

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{ij}$$

est maximal pour chaque sous-ensemble affine ouvert  $U_I \subset X$  et chaque

$$a \in U_I(\bar{k}) = \{a \in \bar{k}^n \mid f_i(a) = 0 \ \forall i = 1, \dots, m\}.$$

Parmi les exemples les plus fondamentaux, se trouvent l'espace projectif  $\mathbb{P}_k^n$  sur le corps  $k$ . Plus généralement, une variété algébrique  $X$  sur  $k$  est appelé *projective* si  $X$  admet un plongement  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^N$  pour un entier positif  $N$ . Une variété algébrique sur  $k = \mathbb{R}$  est aussi appelé une *variété algébrique réelle*.

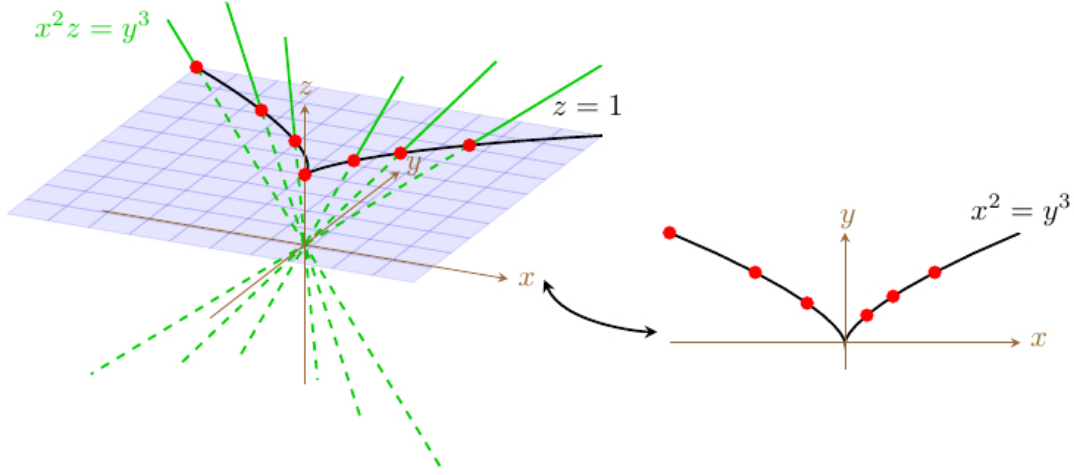
**Algebraic cycles** Let  $X$  be an affine algebraic variety defined by a finite set of polynomials  $S_1 \subset k[T_1, \dots, T_n]$ . Then any finite set  $S_2 \subset k[T_1, \dots, T_n]$  that contains  $S_1$  defines an *algebraic subvariety*  $Y = Z(S_2) \subset Z(S_1) = X$  of  $X$ . Note that for any  $k$ -algebra  $K$ , one has

$$Y(K) = Z(S_2)(K) \subset Z(S_1)(K) = X(K).$$

**Example 1.1.3.** Let  $X$  be an affine algebraic variety defined by a finite set  $S \subset k[T_1, \dots, T_n]$ . Then  $X \subset \mathbb{A}_k^n$  is a subvariety of affine  $n$ -space  $\mathbb{A}_k^n$ .

**Example 1.1.4.** Let  $X = Z(\{X^2Z = Y^3\})$ , and let  $Y \subset X$  be the algebraic subvariety  $Y = Z(\{X^2Z = Y^3, Z = 1\}) \subset X$ . Then taking  $\mathbb{R}$ -rational points gives :





$$Y(\mathbb{R}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1, x^2 = y^3\} \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2z = y^3\} \subset \mathbb{R}^3.$$

**Definition 1.1.5.** Let  $X$  be an algebraic variety over a field  $k$ . We define  $\mathcal{Z}_r(X)$  as the free abelian group on the set of  $r$ -dimensional integral subvarieties  $Z \subset X$ . An *algebraic cycle on  $X$*  is an element of the free abelian group  $\mathcal{Z}_\bullet(X) = \bigoplus \mathcal{Z}_r(X)$ .

Donc, le groupe  $\mathcal{Z}_r(X)$  des  $r$ -cycles sur  $X$  est défini comme le groupe abélien libre sur les sous-variétés fermées de dimension  $r$  de  $X$ . On denote habituellement par  $[Z] \in \mathcal{Z}_r(X)$  l'élément qui correspond à une sous-variété  $Z \subset X$ . Ainsi, un  $r$ -cycle sur  $X$  est une somme formelle finie

$$\sum_i n_i [Z_i]$$

où les  $Z_i \subset X$  sont des sous-variétés fermées de dimension  $r$  et  $n_i \in \mathbb{Z}$ . Thus, an algebraic cycle on an algebraic variety  $X$  can be written as a finite linear combination  $\sum_i n_i [Z_i]$ , where  $Z_i \subset X$  is an algebraic subvariety for each  $i$ .

Pour étudier la géométrie d'une variété projective lisse  $X$  sur  $k$ , on aimerait comprendre les sous-variétés algébriques de  $X$ . Studying the geometry of algebraic varieties via their algebraic cycles and their cohomology is the principal aim of this research project.

**Cohomology** Often, one wants to study varieties for which the defining polynomials  $f_1, \dots, f_k$  in (1.1) in fact have their coefficients in the subfield  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . That

is, they satisfy

$$f_1, \dots, f_k \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n].$$

This leads to a whole scala of new techniques to study the algebraic variety (1.2). Namely, it arises by extension of scalars from the algebraic variety

$$X_{\mathbb{Q}} = Z(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^n$$

defined over the field of rational numbers. By multiplying the coefficients of the  $f_i$ , one may assume that these coefficients actually lie in  $\mathbb{Z}$ ; as a consequence, for each prime number  $p \in \mathbb{Z}$ , one can look at the reduction

$$\bar{f}_i \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$$

of  $f_i$  modulo  $p$ . This yields, for each prime number  $p$ , an algebraic variety

$$X_{\mathbb{F}_p} = Z(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^n$$

defined over the finite field  $\mathbb{F}_p$  of  $p$  elements. There turns out to be a mysterious relation between the number of elements in the finite sets  $X(\mathbb{F}_{p^m})$  for  $m \geq 1$ , denoting the solutions

$$X(\mathbb{F}_{p^m}) = \{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{F}_{p^m})^n \mid \bar{f}_i(\alpha) = 0 \ \forall i \} \subset (\mathbb{F}_{p^m})^n,$$

and the topology of the complex manifold  $X(\mathbb{C})$ . This insight was already known to Weil, see [Wei49], who foresaw that for polynomial equations with integer coefficients, the complex topology on the set of complex solutions of the equations should profoundly influence the number of solutions of the equations modulo a prime number. This idea has had a huge impact on modern algebraic geometry.

When a variety  $X$  is defined over the complex numbers, the complex topology on  $X(\mathbb{C})$  may be used to define cohomology groups that reflect the structure of the variety much more strongly than do those defined, for example, by the Zariski topology. For a variety over an arbitrary field (such as  $\mathbb{F}_p$ ), the complex topology is not available. The étale topology, whose definition is purely algebraic, may be regarded as a replacement. It gives a sheaf theory and cohomology theory with

properties very close to those arising from the complex topology.

On the one hand, when both are defined for a variety over the complex numbers, the étale and complex cohomology groups are closely related. On the other hand, when the variety is the spectrum of a field  $k$  and hence has only one point as underlying space, the étale topology need not be trivial. In fact, the étale cohomology of this variety (denoted  $\mathrm{Spec} k$ ) is precisely equivalent to the Galois cohomology of the field  $k$ ; connected finite étale covers of  $\mathrm{Spec} k$  correspond to finite separable field extensions of  $k$ , and the *étale fundamental group* of the variety  $\mathrm{Spec} k$  is nothing but the absolute Galois group  $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$  of the field  $k$ .

Étale cohomology has achieved an importance for the study of varieties over arbitrary fields comparable to that of complex cohomology for the study of the geometry of complex manifold, or Galois cohomology for the study of the arithmetic of fields. One essential way in which it is used, is to study the algebraic cycles of a given variety  $X$  over a field  $k$ . To use cohomology and algebraic cycles to study the geometry of algebraic varieties is the goal of this research project.

## 1.2 Objectif général de ce projet de recherche.

Dans les grandes lignes, mon projet de recherche concerne une étude des variétés projectives lisses sur des corps différents, via une investigation de leurs groupes de cohomologie d'une part, et les sous-variétés qu'elles contiennent d'autre part.

L'idée centrale est que la géométrie d'une variété algébrique  $X$  est dans une large mesure régie par les sous-variétés contenues dans  $X$ . Consider the group

$$\mathcal{Z}_r(X) = \bigoplus_{Z \subset X} \mathbb{Z} \cdot [Z]$$

of algebraic  $r$ -cycles on  $X$ , see Definition 1.1.5 above. To study it, we consider a suitable integral cohomology group

$$H^{2r}(X, \mathbb{Z}(r)).$$

We let this group be singular cohomology if the base field is  $\mathbb{C}$ , and  $\mathbb{Z}/2$ -equivariant cohomology if the base field is  $\mathbb{R}$ ; we let it be étale cohomology if the base field is

finite. There is a group homomorphism, called the *cycle class map* :

$$\mathcal{Z}_r(X) \longrightarrow H^{2r}(X, \mathbb{Z}(r)). \quad (1.4)$$

If  $X$  is smooth and projective, and if  $Z \subset X$  is a smooth subvariety, then (1.4) sends  $[Z]$  to the image of the fundamental class  $[Z] \in H^0(Z, \mathbb{Z}(0))$  along the Gysin pushforward  $H^0(Z, \mathbb{Z}(0)) \rightarrow H^{2r}(X, \mathbb{Z}(r))$ . Voir les Sections 2.2 et 2.3 ci-dessous pour plus de détails. Au cœur de ce projet de recherche se trouve l'étude des cycles algébriques et de la cohomologie des variétés projectives lisses sur  $\mathbb{C}$ , sur  $\mathbb{R}$ , et sur  $\mathbb{F}_p$ , ainsi que l'interaction entre eux, donnée par l'application class de cycle (1.4). The guiding question of this project is the following : can we describe the image of (1.4) ?

### 1.3 Projets, problèmes et questions

Dans cette section, nous donnons une première esquisse intuitive de nos quatre propositions de projets. Sans être précis, nous motivons ces projets, expliquons les idées principales, et formulons les questions sur lesquelles nous nous concentrons. Nous renvoyons le lecteur aux Sections 6 – 5 ci-dessous pour une description plus détaillée des mathématiques derrière ces projets de recherche, ainsi qu'une formulation plus précise des questions auxquelles nous espérons répondre.

**Projet I. Cohomologie de l'espace de modules des courbes réelles** Ce projet concerne un projet commun avec Emiliano Ambrosi (Maître de Conférences à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de l'Université de Strasbourg). L'idée centrale est d'étudier la topologie de l'espace de modules  $\mathcal{M}_g(\mathbb{R})$  des courbes algébriques réelles de genre  $g$ . Les principales idées qui sous-tendent ce projet sont comme suit.

Parmi les objets les plus beaux et les plus fondamentaux de la géométrie algébrique moderne figure  $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ , l'espace de module des courbes projectives lisses de genre  $g$ . Il s'agit d'un orbifold complexe de dimension  $3g - 3$ . On notera par  $|\mathcal{M}_g(\mathbb{C})|$  son espace topologique sous-jacent, naturellement en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme des surfaces de Riemann compactes connexes

de genre  $g$ . De nombreux travaux ont été réalisés pour comprendre la structure de l'homologie et de la cohomologie de  $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$  [Pow78; Mum67; Har83; Har86; CGP21]. En revanche, on ne sait presque rien de la cohomologie de l'espace de module des courbes algébriques réelles de genre  $g$ . Ce dernier est l'orbifold réel-analytique  $\mathcal{M}_g(\mathbb{R})$  avec l'ensemble sous-jacent

$$|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})| = \{\text{courbes algébriques réelles projectives lisses } C \text{ de genre } g\} / \cong,$$

consistant de classes d'isomorphisme de courbes algébriques sur  $\mathbb{R}$  qui sont projectives et lisses. Dotons  $|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|$  avec sa topologie euclidienne naturelle (voir [GF22a; SS89]). Le but de ce projet est de répondre aux questions suivantes.

**Questions 1.3.1** (c.f. Question 3.3.1). *Soit  $g$  et  $i$  des entiers positifs. Soit  $\mathcal{M}_g(\mathbb{R})$  l'espace de modules des courbes algébriques réelles de genre  $g$  défini ci-dessus.*

- (1) *Quelle est la dimension de  $H^i(\mathcal{M}_g(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$  ?*
- (2) *Comment cette valeur se compare-t-elle à la dimension de  $H^i(\mathcal{M}_g(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$  ?*

Pour raffiner cette question, rappelons que, si  $X$  est une variété algébrique de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$ , l'inégalité *Smith-Thom* (cf. [Flo52; Tho65]) dit que

$$\sum_{i=0}^n \dim H^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \sum_{i=0}^{2n} \dim H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2). \quad (1.5)$$

Voir aussi [Man17, Théorème 3.3.6]. Une variété réelle  $X$  pour laquelle (1.5) est une égalité est appelée une *variété maximale*. Considérons l'espace de modules des courbes  $\mathcal{M}_g$ , dont les points complexes correspondent aux courbes projectifs connexes et lisses de genre  $g$ , c.a.d. aux surfaces de Riemann compactes de genre  $g$ . D'un côté, cet espace de modules est lisse et connexe, voir [DM69]. De l'autre côté,  $\mathcal{M}_g$  est un *champ*, est pas un schéma. Donc à priori, on n'a même pas une inégalité du type (1.5). Cependant, dans une collaboration actuelle avec Emiliano Ambrosi, we prove that there does in fact exist a natural analogue of (1.5) for algebraic stacks. Namely, for any separated Deligne–Mumford stack  $X$  over  $\mathbb{R}$ , there exists a canonical constructible sheaf  $F_X$  on  $|X(\mathbb{C})|$ , compatible with pull-back, such that  $\sum \dim H^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \sum \dim H^i(X(\mathbb{C}), F_X)$  (voir la Conjecture

3.4.1). Ce resultat nous permettra de se demander (c.f. la Question 3.3.1) :

Est-ce que l'espace de modules  $\mathcal{M}_g$  est maximal ?

Pour plus de détails, voir la Section 3 ci-dessous.

## Projet II. Variétés abéliennes isogènes à des jacobiniennes sur $\overline{\mathbb{Q}}$

**Projet III. La conjecture de Tate entière sur les corps finis** L'objectif global de ce projet est d'étudier l'analogue de la conjecture de Hodge entière en caractéristique positive. Il s'agit donc d'une étude des sous-variétés des variétés algébriques  $Z \subset X$  d'une variété algébrique défini sur un corps fini  $\mathbb{F}_p$ .

Soit  $p$  un nombre premier. Le but de ce projet est d'étudier les courbes  $C \subset X$  contenu dans  $X$ , lorsque  $X$  est une *variété abélienne* sur le corps fini  $\mathbb{F}_p$  : une variété projective lisse sur  $\mathbb{F}_p$  équipée d'une loi de groupe algébrique  $m : X \times X \rightarrow X$ .

Pour étudier ces courbes  $C \subset X$ , on essaie d'étudier la structure du groupe de Chow  $\mathrm{CH}_1(X)$  et ses liens avec une théorie de cohomologie convenablement définie. Alors que la définition de  $\mathrm{CH}_1(X)$  se généralise sans problème à la situation actuelle (c.f. Section ??), la définition d'une théorie de cohomologie avec tous les axiomes habituels (dualité de Poincaré, décomposition de Künneth, etc.) demande un certain effort. Ce projet a été entrepris avec succès par Artin, Grothendieck et Verdier [AGV71].

Soit  $m = \dim(X) - 1$ . En conséquence de ce qui précède, pour chaque nombre premier  $\ell \neq p$  il existe un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module bien défini  $H_{\text{ét}}^{2m}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(m))$ , fonctoriel de manière contravariante en  $X$ , doté d'une action du groupe de Galois

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n = \widehat{\mathbb{Z}},$$

tel que chaque courbe  $C \subset X$  définit une classe  $[C] \in H_{\text{ét}}^{2m}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(m))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$ .

Par analogie avec le Théorème 1.3.6, on peut se demander :

**Question 1.3.2** (Wittenberg, c.f. la Conjecture 5.2.1). *Soit  $X$  une variété abélienne de dimension 3 sur  $\mathbb{F}_p$ . Soit  $\alpha \in H_{\text{ét}}^4(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))$  une classe telle que  $\sigma(\alpha) =$*

$\alpha$  pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ . Est-ce que  $\alpha$  s'écrit comme une combinaison linéaire

$$\alpha = \sum n_i [C_i] \in H_{\text{ét}}^4(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)} \quad (n_i \in \mathbb{Z}_\ell)$$

de classes des courbes  $C_i \subset X$  dans  $X$  sur  $\mathbb{F}_p$  ?

**Projet IV. La conjecture de Hodge entière** Soit  $X$  une variété algébrique complexe projective lisse. Soit  $Z \subset X$  une sous-variété fermée lisse de  $X$  de dimension  $r$ . L'inclusion  $i: Z \hookrightarrow X$  induit un homomorphisme de Gysin

$$i_*: \mathbb{Z} = H^0(Z(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H_{2r}(Z(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2r}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad (1.6)$$

où  $r + k = \dim(X)$ . Ainsi, on obtient une classe de cohomologie

$$[Z] = i_*(1) \in H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Cette construction s'étend aux sous-variétés arbitraires  $Z \subset X$ , et il est naturel de se demander :

**Question 1.3.3.** *Quelles classes de cohomologie  $\alpha \in H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  s'écrivent comme combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire*

$$\alpha = \sum_{i=1}^m n_i [Z_i]$$

des sous-variétés  $Z_i \subset X$  de dimension  $r$  ?

Pour le dire autrement : la construction ci-dessus définit un homomorphisme de groupe  $\mathcal{Z}_r(X) \rightarrow H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  et deux  $r$ -cycles algébriques rationnellement équivalents donnent la même classe de cohomologie. On obtient donc un homomorphisme de groupe appelé *l'application classe de cycle*

$$\text{CH}_r(X) \rightarrow H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad r + k = \dim(X), \quad (1.7)$$

et la Question 1.3.3 devient :

Quelle est l'image de l'application classe de cycle (1.7) ?

Cette question est vague et bien sûr beaucoup trop générale ; comme nous l'expliquerons dans la Section 6 ci-dessous, il existe une propriété naturelle appelée la *conjecture de Hodge entière* qui permet de décrire précisément l'image de (1.7). Cette propriété échoue en général, mais ils existent des classes intéressantes de variétés projectives lisses pour lesquelles elle tient. La question de savoir si les variétés abéliennes (c'est-à-dire les tores complexes projectifs) satisfont la conjecture de Hodge entière reste une question ouverte importante.

Dans [BGF23], avec Beckmann nous avons prouvé que pour une grande classe de variétés abéliennes, les *variétés jacobiniennes*, la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles est satisfaite. La poursuite de mes recherches sur la conjecture de Hodge entière pour les variétés abéliennes est le premier objectif principal de ce projet de recherche. Ainsi, la question principale de ce projet est la suivante :

**Question 1.3.4** (c.f. Question 6.1.4). *Est-ce que la conjecture de Hodge entière vaut pour les variétés abéliennes complexes ?*

Voir la Section 6 ci-dessous pour plus de détails.

**Projet V. La conjecture de Hodge entière réelle** Pour expliquer le deuxième objectif de ce projet de recherche, nous transposons la discussion dans le cadre réel. Soit  $X$  une variété algébrique projective lisse sur  $\mathbb{R}$ . Considérons l'action

$$G = \mathbb{Z}/2 \curvearrowright X(\mathbb{C})$$

de  $G$  sur  $X(\mathbb{C})$  donnée par l'involution anti-holomorphe naturelle  $\sigma: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ . With regard to this action, we can consider le groupe de cohomologie équivariant

$$H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$$

au sens de Borel (cf. [Gro57 ; AB84]). Ceci est un groupe de cohomologie compatible avec tirer en arrière par des morphismes  $X \rightarrow Y$  des variétés algébriques. De plus, par [Kra94 ; Ham97], il existe une *application classe de cycle réelle*

$$\mathrm{CH}_r(X) \rightarrow H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)). \quad (1.8)$$

L'analogie naturel de la Question 1.3.3 en géométrie algébrique réelle est alors :



**Question 1.3.5.** *Peut-on décrire l'image de l'application (2.8) ?*

Dans la Section 7 ci-dessous, nous précisons cette question. Comme dans le cas complexe, il existe une propriété naturelle, appelée la *conjecture de Hodge entière réelle pour les  $r$ -cycles*, qui - lorsqu'elle est satisfaite - donne une description assez précise de l'image de (2.8) en termes de la *structure de Hodge équivariante* sur  $H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$  et les opérations de Steenrod sur  $H^\bullet(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ . Cette propriété a été introduite par Benoist et Wittenberg dans [BW20a ; BW20b], et prouvée pour diverses classes de variétés réelles. Comme dans le cas complexe, ils existent des variétés réelles pour lesquelles cette propriété vaut, et des variétés réelles pour lesquelles elle n'est pas vraie.

Le deuxième objectif de ce projet de recherche est l'étude de la conjecture de Hodge entière réelle pour les variétés de Calabi–Yau de dimension 3. Les solides de Calabi–Yau complexes satisfont la conjecture de Hodge entière [Voi06 ; Tot21], mais le cas réel reste ouvert [BW20a ; BW20b]. Dans [GF24], j'ai fait un premier pas dans cette direction ; voir le Théorème ... dans la Section .... pour un énoncé plus général.

**Theorem 1.3.6** (de Gaay Fortman, cf. [GF24]). *Soit  $X$  une variété abélienne de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$ . Soit*

$$\alpha \in H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$$

*une classe de Hodge, fixée par le groupe de Galois  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ . Alors  $\alpha = \sum_i n_i [C_i]$  est une combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire de classes des courbes algébriques réelles  $C_i \subset X$ .*

Voir la Section 2.2 pour la notion de *classe de Hodge*. Le but de ce projet de recherche est de poursuivre mon étude de la conjecture de Hodge entière réelle. Le point de départ est la question suivante.

**Question 1.3.7** (Benoist–Wittenberg, c.f. la Question 7.2.1). *Soit  $X$  une variété projective lisse sur  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $X$  est soit un solide uniréglé, soit un solide de Calabi–Yau, soit une variété rationnellement connexes. Est-ce que la variété  $X$  satisfait à la conjecture de Hodge entière réelle pour les 1-cycles ?*

Voir la Section 7 ci-dessous pour plus de détails.

# Chapitre 2

## Théorie générale

### 2.1 Variétés abéliennes et jacobiniennes

**Variétés abéliennes** The class of abelian varieties is the simplest class of varieties where the Hodge conjecture is not known to be true. Naturally, a certain amount of effort is directed toward them. As we outlined in Section ..., if a variety satisfies the integral Hodge conjecture, then it satisfies the Hodge conjecture, and there are several classes of varieties for which the integral Hodge conjecture fails. It remains an important open question whether or not abelian varieties satisfy the integral Hodge conjecture (see Question ...). In this section, we explain briefly what abelian varieties are. In the next section, we explain how to obtain an abelian variety starting from an algebraic curve, yielding a subclass of the class of all abelian varieties formed by the so-called Jacobian varieties.

**Definition 2.1.1.** A *lattice* in a complex vector space  $V$  is a discrete subgroup of  $V$  which spans  $V$  as a real vector space. A *complex torus* is the quotient  $T = V/\Lambda$  of a complex space  $V$  by a lattice  $\Lambda \subset V$ . A *complex abelian variety* is a smooth algebraic variety  $A$  with an algebraic group law  $m: A \times A \rightarrow A$  such that the underlying complex Lie group  $A(\mathbb{C})$  is isomorphic to a complex torus  $T = V/\Lambda$ .

**Example 2.1.2.** Complex tori  $T = V/\Lambda$  of dimension one are compact complex Riemann surfaces of genus one. As such, they are automatically algebraic. The associated abelian varieties are one-dimensional, and called *elliptic curves*.

**Variétés jacobienes** Let  $C$  be a smooth projective complex curve of genus  $g$ ; in other words, a Riemann surface of genus  $g$ . Let  $H^0(C, \Omega_C)$  be the space of holomorphic differentiable 1-forms on  $C(\mathbb{C})$ , and let  $H^0(C, \Omega_C)^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(H^0(C, \Omega_C), \mathbb{C})$  be the dual vector space. There is a natural homomorphism

$$\begin{aligned} H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(C, \Omega_C)^\vee, \\ \gamma &\mapsto \left( \omega \mapsto \int_\gamma \omega \right). \end{aligned}$$

This map is injective, and the quotient  $H^0(C, \Omega_C)^\vee / H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  is a complex torus. In fact, the complex torus  $H^0(C, \Omega_C)^\vee / H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  turns out to be algebraic, hence gives rise to an abelian variety in the sense of Definition 2.1.1.

**Definition 2.1.3.** The *Jacobian* of  $C$ , denoted by  $JC$ , is the complex abelian variety  $JC$  with underlying complex torus  $JC(\mathbb{C}) = H^0(C, \Omega_C)^\vee / H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ .

## 2.2 Cohomologie et cycles algébriques complexes

Soit  $X$  une variété algébrique projective lisse (voir la Section [ref]). L'étude des groupes  $\mathcal{Z}_r(X)$  des  $r$ -cycles algébriques sur  $X$  est une partie fondamentale de la géométrie algébrique moderne. En général, cependant, ces groupes sont très compliqués, et l'on aimerait disposer d'outils permettant de les mieux comprendre. La *théorie de Hodge* fournit un tel outil - et en fait un outil très puissant - comme nous allons maintenant l'expliquer.

**Théorie de Hodge** Soit  $X$  une variété complexe. La structure complexe de  $X$  permet de décomposer le fibré vectoriel des 1-formes différentielles complexes sur  $X$  comme

$$\Omega_{X, \mathbb{C}} = \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1}, \quad (2.1)$$

où  $\Omega_X^{1,0}$  est le fibré vectoriel des 1-formes qui sont  $\mathbb{C}$ -linéaires pour la structure complexe sur  $T_X$ , et

$$\Omega_X^{0,1} = \overline{\Omega_X^{1,0}}$$

est le conjugué complexe de  $\Omega_X^{1,0}$ . Alors  $\Omega_X^{1,0}$  est localement engendré par les  $dz_i$ , où  $z_i$  sont des coordonnées holomorphes locales sur  $X$ , et  $\Omega_X^{0,1}$  est localement engendré par les  $d\bar{z}_i$ .

Soit  $\mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^k$  le faisceau de  $k$ -formes différentielles complexes sur  $X$ , et pour  $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $p + q = k$ , soit

$$\mathcal{A}_X^{p,q} \subset \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^k$$

le sous-faisceau de  $k$ -formes différentielles complexes de type  $(p, q)$  : ce sont les  $k$ -formes  $\alpha$  qui, en coordonnées holomorphes locales  $z_i$ , peuvent s'écrire comme

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ j_1 < \dots < j_q}} a_{I,J} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

De (2.1), on obtient une décomposition en sous-faisceaux

$$\mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}_X^{p,q}. \quad (2.2)$$

On a une application canonique

$$\text{Ker} (d: \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{k+1}(X)) \rightarrow H^k(X, \mathbb{C}), \quad (2.3)$$

où  $d: \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^k \rightarrow \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{k+1}$  est la différentielle ; notons  $H^{p,q}(X) \subset H^k(X, \mathbb{C})$  l'image de (2.3). Puisque

$$d\mathcal{A}_X^{p,q} \subset \mathcal{A}_X^{p+1,q} \oplus \mathcal{A}_X^{p,q+1},$$

il n'y a aucune raison a priori pour que (2.2) induise une décomposition du groupe de cohomologie de de Rham

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \frac{\text{Ker} (d: \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^k(X) \rightarrow \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{k+1}(X))}{\text{Im} (\mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^{k-1}(X) \rightarrow \mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}^k(X))}$$

en une somme directe des sous-espaces vectoriels complexes  $H^{p,q}(X) \subset H^k(X, \mathbb{C})$ . Néanmoins, on a :

**Theorem 2.2.1** (Hodge [Hod61]). *Soit  $X$  une variété projective complexe lisse.*

Alors (2.2) induit une décomposition

$$H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X).$$

**Conjecture de Hodge entière** Toute sous-variété algébrique d'une variété projective lisse sur un corps  $k$  induit une classe dans un groupe de cohomologie convenablement défini. Des conjectures importantes prédisent que l'on peut comprendre le sous-groupe des classes algébriques dans la cohomologie de cette variété via des structures qui a priori ne sont pas directement liées aux cycles algébriques eux-mêmes (e.g. théorie de Hodge, représentations de Galois, etc.). Dans cette section, nous expliquons cela lorsque le corps de base est le corps des complexes  $\mathbb{C}$ .

Soit  $X$  une variété projective lisse sur  $\mathbb{C}$ . Il existe une obstruction pour qu'un élément  $\alpha \in H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  soit dans l'image de l'application class de cycle (1.7). En effet, par le Théorème 2.2.1, il existe une *décomposition de Hodge* fonctorielle canonique

$$H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \quad \text{telle que} \quad \overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X),$$

et donc si l'on définit le groupe des *classes de Hodge entières* de degré  $2k$  comme

$$\text{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \{ \alpha \in H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \mid \alpha_{\mathbb{C}} \in H^{k,k}(X) \subset H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \}, \quad (2.4)$$

alors

$$[Z] \in \text{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

pour toute sous-variété  $Z \subset X$  de dimension  $r$  (où  $r + k = \dim(X)$ ). Pour voir ceci, supposons pour simplifier que  $Z$  soit lisse. Alors le morphisme de Gysin  $i_*$  défini dans (1.6) s'étend en l'application naturelle  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$i_{*,\mathbb{C}}: H^0(Z(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = H^{0,0}(Z) \rightarrow H^{k,k}(X) \subset H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}),$$

ce qui rend clair que

$$[Z]_{\mathbb{C}} = i_{*,\mathbb{C}}(1) \in H^{k,k}(X).$$

On conclut que si  $H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{\text{alg}} \subset H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  est l'image de (1.7), alors

$$H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{\text{alg}} \subset \text{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}). \quad (2.5)$$

De même, pour  $r, k \in \mathbb{N}$  avec  $r + k = \dim(X)$ , on a

$$\begin{aligned} H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_{\text{alg}} &= \text{Im} \left( \text{CH}_r(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \right) \\ &\subset \text{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = \text{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

**Conjecture 2.2.2** (Conjecture de Hodge). *Soit  $X$  une variété projective lisse sur  $\mathbb{C}$ , et tout  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Alors l'inclusion dans (2.6) est une égalité.*

Autrement dit, la conjecture prédit que toute classe de Hodge rationnelle sur  $X$  est une combinaison  $\mathbb{Q}$ -linéaire finie de classes de sous-variétés algébriques  $Z \subset X$ .

Cette conjecture reste largement ouverte. Pour comprendre cette conjecture, on voudrait comprendre une propriété plus forte, qui échoue pour certains variétés  $X$  et se trouve être vraie pour d'autres. On arrive à la conjecture de Hodge entière.

**Definition 2.2.3.** Une variété complexe projective satisfait à la *conjecture de Hodge entière pour les  $r$ -cycles* ( $\text{IHC}_r(X)$ ) si l'inclusion (2.5) est une égalité.

Notez que  $\text{IHC}_r(X)$  implique que (2.6) est une égalité. Cependant, malgré son nom, la conjecture de Hodge entière pour les cycles  $r$  est une propriété plutôt qu'une conjecture : on sait depuis Atiyah et Hirzebruch [AH62] qu'ils existent des variétés  $X$  et des entiers  $r \in \mathbb{N}$  tel que la propriété  $\text{IHC}_r(X)$  ne tient pas.

D'une part, en cherchant à comprendre la conjecture de Hodge, il est important de se demander comment la conjecture de Hodge entière peut échouer. D'autre part, pour certaines variétés avec une géométrie particulièrement riche, la conjecture de Hodge entière s'avère être satisfaite. Au cours des dernières années, le problème de classer les variétés projectives lisses  $X$  et les entiers  $r$  tels que  $\text{IHC}_r(X)$  est vérifiée (et ceux pour lesquels elle ne l'est pas) est devenu un domaine de recherche très important et intéressant. Voir par exemple [AH62 ; Tre ; Tot97 ; Voi06 ; CTV12 ; Sch19 ; BO20 ; Tot21 ; BGF23].

## 2.3 Cohomologie et cycles algébriques réels

Si  $X$  est une variété projective lisse sur  $\mathbb{R}$ , alors l'involution anti-holomorphe  $\sigma : X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$  induit une involution linéaire

$$F_\infty = \sigma^* : H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \rightarrow H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$$

tel que  $F_\infty(H^{p,q}(X)) = H^{q,p}(X)$  et  $F_\infty(H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ . Le rôle de la théorie de Hodge en géométrie algébrique réelle consiste à exploiter cette involution.

Pour une sous-variété algébrique lisse

$$j : Z \hookrightarrow X$$

de dimension  $r$ , et  $k = \dim(X) - r$ , de manière analogue à ce qui précède la composition

$$j_* : H^0(Z(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H_r(Z(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_r(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

peut être utilisée pour définir une classe de cohomologie

$$[Z] = j_*(1) \in H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

Comme précédemment, cette construction s'étend aux combinaisons linéaires de sous-variétés, et étant compatible avec l'équivalence rationnelle, elle induit un homomorphisme [BH61]

$$\mathrm{CH}_r(X) \rightarrow H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2). \quad (2.7)$$

Pour relier (2.7) à l'application de classe de cycle complexe définie dans (1.7), c

Pour relier (2.7) à l'application de classe de cycle complexe définie dans (1.7), considérons l'action

$$G = \mathbb{Z}/2 \curvearrowright X(\mathbb{C})$$

de  $G$  sur  $X(\mathbb{C})$  donnée par l'involution anti-holomorphe naturelle  $\sigma : X(\mathbb{C}) \rightarrow$

$X(\mathbb{C})$ . With regard to this action, we can consider le groupe de cohomologie équivariant  $H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$  au sens de Borel (cf. [Gro57; AB84]).

$$H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)) = H^{2k}(X(\mathbb{C}) \times_G EG, \underline{\mathbb{Z}(k)}), \quad \text{où} \\ X(\mathbb{C}) \times_G EG = (X(\mathbb{C}) \times EG) / G.$$

Ici,  $EG = \varinjlim_n \mathbb{S}^n$  est un espace contractile,  $\mathbb{Z}(k)$  est le groupe abélien  $\mathbb{Z}$  transformé en un  $G$ -module en déclarant que  $\sigma(1) = (-1)^k$  pour le générateur  $\sigma \in G$ , et  $\underline{\mathbb{Z}(k)}$  est un faisceau bien choisi sur  $X(\mathbb{C}) \times_G EG$ .

Par [Kra94; Ham97], il existe une *application classe de cycle réelle*

$$\mathrm{CH}_r(X) \rightarrow H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)) \quad (2.8)$$

de sorte que les morphismes (1.7), (2.7) et (2.8) s'insèrent dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{CH}_r(X) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_r(X_{\mathbb{C}}) \\ & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) & \longleftarrow & H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)) & \xrightarrow{\varphi} & H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)). \end{array} \quad (2.9)$$

Recently, the analogue of the integral Hodge conjecture for real algebraic varieties has been formulated [BW20a; BW20b]. Let  $X$  be a smooth projective variety over  $\mathbb{R}$ , and let  $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ . Consider the natural homomorphism  $\varphi: H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)) \rightarrow H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$ , see diagram (2.9), as well as the subgroup of Hodge classes  $\mathrm{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)) \subset H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$ , see (2.4). Building on work of Krasnov [Kra91; Kra94] and Van Hamel [Ham97], Benoist and Wittenberg define a subgroup

$$\mathrm{Hdg}_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))_0 \subset \varphi^{-1}(\mathrm{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))) \subset H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$$

with certain suitable properties, that contains the cohomology class of any codimension  $k$ -cycle on  $X$ , and study the resulting real cycle class map

$$\mathrm{CH}_r(X) \rightarrow \mathrm{Hdg}_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))_0 \quad (r + k = \dim(X)). \quad (2.10)$$



L'analogie naturel de la Définition 2.2.3 en géométrie algébrique réelle est alors :

**Definition 2.3.1.** The *real integral Hodge conjecture for  $r$ -cycles on  $X$*  refers to the property that the real cycle class map (2.10) is surjective.

In other words, a smooth projective variety  $X$  over  $R$  satisfies the real integral Hodge conjecture for  $r$ -cycles if each  $\alpha \in \mathrm{Hdg}_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))_0$  can be written as a sum of cohomology classes attached to real algebraic subvarieties of  $X$ . As in the complex situation, this property holds for all real varieties  $X$  and integers  $r$  as long as  $r \in \{\dim(X), \dim(X) - 1, 0\}$  [Kra91 ; MH98 ; Ham97 ; BW20a], and can fail for other values of  $r \in \{0, 1, \dots, \dim(X)\}$ .

# Chapitre 3

## Projet I. Cohomologie de l'espace de modules des courbes réelles

Ce projet concerne un projet commun avec Emiliano Ambrosi (Maître de Conférences à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de l'Université de Strasbourg). L'idée centrale est d'étudier la topologie de l'espace de modules  $\mathcal{M}_g(\mathbb{R})$  des courbes algébriques réelles de genre  $g$ , la comparent à la topologie de  $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ .

### 3.1 Moduli theory

L'un des problèmes centraux de la géométrie algébrique est le problème de la classification. Pouvons-nous classer toutes les variétés algébriques à isomorphisme près ? Cette tâche pourrait sembler énorme et difficile, mais a quand même connu beaucoup de progrès ces dernières décennies. Elle se compose de deux parties :

1. Dans la *partie discrète* on étudie les invariants numériques des variétés  $X$ , tels que la dimension, le degré (si  $X \subset \mathbb{P}^n$  est une hypersurface), le genre (si  $X$  est une courbe), etc.

2. Dans la *partie continue*, on étudie les familles de variétés ayant les mêmes invariants numériques. Souvent, lorsqu'il existe une famille continue d'objets non isomorphes, l'espace des paramètres porte une structure de variété algébrique complexe, appelée *espace des modules*. Ceci est un outil très puissant : toutes les techniques de géométrie algébrique peuvent être appliquées à l'étude de l'espace des paramètres ainsi qu'aux variétés qui définissent un point dans cet espace.

## 3.2 Moduli of curves

Parmi les objets les plus beaux et les plus fondamentaux de la géométrie algébrique moderne figure  $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ , l'espace de module des courbes projectives lisses de genre  $g$ . Il s'agit d'un orbifold complexe, dont l'espace topologique sous-jacent est en bijection naturelle avec l'ensemble des classes d'isomorphisme des surfaces de Riemann compactes connexes de genre  $g$ . De nombreux travaux ont été réalisés pour comprendre la structure de l'homologie et de la cohomologie de  $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$  :

- (1)  $H_1(\mathcal{M}_g(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = 0$  pour  $g \geq 3$  (voir [Pow78 ; Mum67 ; Har83]),
- (2)  $H_2(\mathcal{M}_g(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^2$  pour  $g \geq 5$  (voir [Har83]),
- (3)  $H^i(\mathcal{M}_g(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = 0$  for  $i > 4g - 5$  (voir [Har86]),
- (4)  $H^{4g-6}(\mathcal{M}_g(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$  est non nul pour  $g = 3, g = 5$  et  $g \geq 7$  (voir [CGP21]).

## 3.3 Moduli of real curves

En revanche, on ne sait presque rien de la cohomologie de l'espace de module des courbes algébriques réelles de genre  $g$ . Ce dernier est l'orbifold réel-analytique  $\mathcal{M}_g(\mathbb{R})$  avec l'ensemble sous-jacent

$$|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})| = \{\text{courbes algébriques réelles projectives lisses } C \text{ de genre } g\} / \text{isomorphisme}.$$

On dote l'ensemble  $|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|$  avec sa topologie euclidienne naturelle, voir [GF22a ; GF22b] et comparer [SS89].

**Questions 3.3.1** (joint avec Emiliano Ambrosi). *Soit  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ . Considérons l'espace topologique  $|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|$  sous-jacent à l'espace de modules des courbes algébriques réelles de genre  $g$  défini ci-dessus.*

- (1) *Pour un entier positif  $i$ , quelle est la dimension de  $H^i(\mathcal{M}_g(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$  ?*
- (2) *Comment cette valeur se compare-t-elle à la dimension de  $H^i(\mathcal{M}_g(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$  ?*

To understand these questions better, the first thing to do is to compare the cohomology ring of  $\mathcal{M}_g(\mathbb{R})$  with the cohomology ring of  $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ . To explain this,

rappelons que, si  $X$  est une variété algébrique de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$ , l'inégalité *Smith–Thom* (cf. [Flo52; Tho65]) dit que

$$\sum_{i=0}^n \dim H^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \sum_{i=0}^{2n} \dim H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2). \quad (3.1)$$

Voir aussi [Man17, Théorème 3.3.6] ou le livre [Kharlamov]. Une variété réelle  $X$  pour laquelle (3.1) est une égalité est appelée une *variété maximale*.

### 3.4 Smith–Thom for algebraic stacks and maximality of $\mathcal{M}_g$

Many moduli spaces are not actual varieties, but *algebraic stacks*. The category of algebraic stacks contains the category of algebraic varieties, but is larger; the moduli stack that parametrizes certain algebraic objects (like curves of fixed genus, line bundles on a fixed variety, or lines in affine space) does not only parametrize the objects, but also their automorphisms. Ever since their first appearance in [DM69], algebraic stacks are an indispensable tool in moduli theory [ref, ref].

In an ongoing project, we generalize the classical Smith–Thom inequality (see (3.1) above) to the setting of algebraic stacks. The result is as follows; we are sure that the following holds, and are nearby a complete proof.

**Conjecture 3.4.1** (Ambrosi–de Gaay Fortman). *For a separated Deligne–Mumford stack  $X$  over  $\mathbb{R}$ , there exists a canonical constructible sheaf  $F_X$  on  $|X(\mathbb{C})|$ , compatible with pull-back, such that the following inequality holds :*

$$\sum \dim H^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \sum \dim H^i(X(\mathbb{C}), F_X). \quad (3.2)$$

The sheaf  $F_X$  in Theorem 3.4.1 is very explicit. As indicated above, we are close to completing the last steps in the proof. As a result, it makes sense to introduce :

**Definition 3.4.2.** Let  $X$  be a separated Deligne–Mumford stack over  $\mathbb{R}$ . We say that  $X$  is *maximal* if the inequality (3.2) is an equality.

This leads to the following question, which was our original main motivation :

**Question 3.4.3.** *Let  $g \geq 2$  be an integer and consider the moduli stack  $\mathcal{M}_g$  of smooth curves of genus  $g$  over  $\mathbb{R}$ . Is the moduli space  $\mathcal{M}_g$  maximal?*

After finishing writing down the paper in which we prove Conjecture 3.4.1, our goal is to continue to collaborate, and work on Question 3.4.3.

# Chapitre 4

## Projet II. Variétés abéliennes isogènes à des jacobiniennes sur $\overline{\mathbb{Q}}$

### 4.1 Principally polarized abelian varieties

In Section 2.1.1, we introduced the notion of *complex abelian variety*, see Definition 2.1. One can alternatively define it as a smooth projective complex variety  $A$  that is equipped with an algebraic group law  $A \times A \rightarrow A$ . This latter definition readily generalizes to arbitrary fields. Thus, for a field  $k$ , we define a *abelian variety over  $k$*  to be a smooth, projective, and geometrically irreducible variety  $A$  over  $k$  equipped with an algebraic group law  $m: A \times A \rightarrow A$ . The reason that these group varieties are called ‘abelian’ is because it turns out that, necessarily, the group law  $m$  is commutative (see e.g. [Mum08, p. 44, Corollary 2]). If  $k$  is algebraically closed, a *polarization* on  $A$  is an algebraic equivalence class  $[\mathcal{L}]$  of an ample line bundle on  $A$ , where two such line bundles are *algebraically equivalent* if one can deform one into the other in an algebraic way (see .... for a precise definition). For an arbitrary field  $k$ , a *polarization* on  $A$  is a polarization  $[\mathcal{L}]$  on the abelian variety  $A \times_k \bar{k}$  which is invariant under the action of  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  on the set of polarizations.

We let  $\mathcal{A}_g$  be the moduli stack of principally polarized abelian varieties of dimension  $g$ . For a field  $k$ , we let  $|\mathcal{A}_g(k)|$  denote the set of isomorphism classes in

the groupoid  $\mathcal{A}_g(k)$ . In other words :

$$|\mathcal{A}_g(k)| = \{\text{isomorphism classes of principally polarized} \\ \text{abelian varieties of dimension } g \text{ over } k\}.$$

## 4.2 Isogenies between abelian varieties and Jacobians

For dimension reasons, every principally polarized abelian variety of dimension  $\leq 3$  over an algebraically closed field is isomorphic to a product of Jacobians. For  $g \geq 4$  this is no longer true, as  $\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3 < g(g+1)/2 = \dim \mathcal{A}_g$  in that range. Over the complex numbers, this implies that for each  $g \geq 4$ , there are principally polarized abelian varieties not isogenous to a Jacobian; in fact the very general complex abelian variety satisfies this property. Over countable fields, however, this line of argument fails, and it remained an open question whether there exist abelian varieties over  $\overline{\mathbb{Q}}$  not isogenous to any Jacobian, until Tsimerman's result [Tsi12] (compare [CO12] and [MZ20]).

In [GFS24], together with Stefan Schreieder, we prove that there are abelian varieties  $A$  over  $\mathbb{C}$  of which no power  $A^k$  ( $k \geq 1$ ) is isogenous to a Jacobian. In light of this result, it is natural to ask whether the same thing is true over  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Are there abelian varieties  $A$  over  $\overline{\mathbb{Q}}$  such that  $A^k$  is not isogenous to a Jacobian, for any  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ? The goal of this project is to answer this question.

# Chapitre 5

## Projet III. La conjecture de Tate entière sur les corps finis

### 5.1 La conjecture de Tate entière et la cohomologie non-ramifiée

[Introduire la conjecture de Tate entière, et faire le lien avec la cohomologie non-ramifiée.]

**Question 5.1.1** (Colliot-Thélène–Kahn). *Pour  $X$  une variété projective et lisse de dimension 3 sur  $\mathbb{F}_p$ , a-t-on  $H_{\text{nr}}^3(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$  ?*

Voir [CTK13].

### 5.2 La conjecture de Tate entière pour les solides abéliens

Le but de ce projet est d'étudier les 1-cycles sur les solides abéliens. Nous les étudions en caractéristique positive, en étudiant la version forte de la conjecture de Tate entière pour les 1-cycles sur les solides abéliens. Cette propriété prédit l'existence de courbes  $C$  sur un tel solide  $A$  sur  $\mathbb{F}_q$  qui engendrent le  $\mathbb{Z}_\ell$ -module  $H_{\text{ét}}^4(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_q)}$ .

Fixons un entier positif  $n \in \mathbb{N}$ . Le but de ce projet est de prouver :

**Conjecture 5.2.1.** *Soient  $p \neq \ell$  des nombres premiers, soit  $q = p^n$  et soit  $(X, \theta)$  un solide abélien principalement polarisé sur  $\mathbb{F}_q$ .*



(1) *L'application classe de cycle*

$$cl_X: CH_1(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H_{\text{ét}}^4(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Z}_\ell(2))^G \quad (G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q))$$

*est surjective.*

(2) *Il existe un tel  $(X, \theta)$  sur  $\mathbb{F}_q$ , et un nombre premier  $\ell \neq p$ , tel que l'application*

$$AJ: CH_1(X)_{\text{hom}} \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow H^1(G, H_{\text{ét}}^3(X \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Z}_\ell(2)))$$

*n'est pas surjective. En particulier, la réponse à la Question 5.1.1 est "non".*

### 5.3 Stratégie du projet

Pour attaquer la Conjecture 5.2.1, le point de départ est comme suit.

**Theorem 5.3.1** (Beckmann–de Gaay Fortman). *Soit  $(X, \theta)$  une variété abélienne principalement polarisée de dimension  $g$  sur  $\mathbb{F}_q$  telle que la classe minimale  $\theta^{g-1}/(g-1)!$  est dans l'image de l'application classe de cycle*

$$cl_X: CH_1(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H_{\text{ét}}^{2g-2}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Z}_\ell(g-1))^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}.$$

*Alors  $cl_X$  est surjective.*

*Démonstration.* Cela découle de [BGF23, Proposition 3.11] et de la surjectivité de l'application  $CH^1(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H_{\text{ét}}^2(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Z}_\ell(1))^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)}$  (voir [Tat66; Tat94]).  $\square$

D'après le Théorème 5.3.1, la Conjecture 5.2.1 se réduit à la question de savoir si, pour  $p > 2$  et  $\ell = 2$ ,

$$\gamma_{\min} = \theta^2/2 \in H_{\text{ét}}^4(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est à l'image de  $cl_X$  pour tout solide abélien principalement polarisé  $(X, \theta)$  sur  $\mathbb{F}_q$ .

On considère alors le résultat suivant par Oort et Ueno. Pour une courbe projective lisse géométriquement connexe  $C$  sur un corps  $k$ , on note  $JC = \text{Pic}^0(C)$ , la variété jacobienne de  $C$ , et on note  $\theta_{JC}$  la polarisation principale canonique de

$JC$ . Une variété abélienne polarisée sur un corps est dite *géométriquement indécomposable* si son changement de base sur la clôture algébrique n'est pas isomorphe comme variétés abéliennes polarisées à un produit de sous-variétés abéliennes polarisées non triviales.

**Theorem 5.3.2** (Oort–Ueno). *Soit  $(X, \theta_X)$  un solide abélien géométriquement indécomposable principalement polarisé solide sur  $\mathbb{F}_q$ . Il existe une courbe  $C/\mathbb{F}_q$  telle que*

$$(X_{\mathbb{F}_{q^2}}, \theta_X) \cong (JC_{\mathbb{F}_{q^2}}, \theta_{JC})$$

*sur  $\mathbb{F}_{q^2}$ . De plus, il existe un homomorphisme  $\varepsilon: \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q) \rightarrow \{\pm 1\}$  tel que  $(X, \theta)$  soit isomorphe au  $\varepsilon$ -twist de  $(JC, \theta_{JC})$  sur  $\mathbb{F}_q$ .*

*Démonstration.* Voir [OU73] ou [Ser20, Theorem 4.2.1]. □

Pour un plongement  $C \hookrightarrow JC = \text{Pic}^0(C)$  défini par un point rationnel de  $C$ , on a

$$[C] = \theta_{JC}^2/2 \in H_{\text{ét}}^4(JC_{\overline{\mathbb{F}_q}}, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Ainsi  $\gamma_{\min} \in H_{\text{ét}}^4(X_{\overline{\mathbb{F}_q}}, \mathbb{Z}_\ell(2))$  devient algébrique sur l'extension de degré deux  $\mathbb{F}_{q^2}$  de  $\mathbb{F}_q$ , et est même donné par la classe d'une courbe irréductible  $C_{\mathbb{F}_{q^2}} \subset X_{\mathbb{F}_{q^2}}$ .

Ainsi, la façon la plus naturelle d'aborder la Conjecture 5.2.1 est via la question suivante. Soit  $k \supset \mathbb{F}_p$  un corps fini et soit  $C$  une courbe projective lisse non-hyperelliptique de genre 3 sur  $k$ , telle que  $JC$  est géométriquement indécomposable. Soit  $(A, \theta)$  l'unique twist quadratique de  $JC$  sur  $A$ .

**Question 5.3.3.** *Est-ce que la classe  $\gamma_{\min} \in H_{\text{ét}}^4(A_{\overline{\mathbb{F}_p}}, \mathbb{Z}_2(2))$  est algébrique ?*

# Chapitre 6

## Projet IV. La conjecture de Hodge entière

The goal of this research project is to study :

### 6.1 1-cycles on complex abelian varieties

En général, on ne connaît pas la réponse à la question suivante.

**Question 6.1.1.** *Existent-ils des variétés abéliennes complexes qui échouent à la conjecture de Hodge entière ?*

Pour étudier cette question, il est naturel d'étudier la *classe minimale* d'une variété abélienne principalement polarisée  $(A, \theta)$  : c'est la classe

$$\gamma_{\min} = \theta^{g-1} / (g-1)! \in \text{Hdg}^{2g-2}(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

La conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles sur  $A$  prédit que  $\gamma_{\min}$  est algébrique, c'est-à-dire la classe de cohomologie attachée à une combinaison  $\mathbb{Z}$ -linéaire de courbes  $C_i \subset A$ .

Lorsque  $A = JC = \text{Pic}^0(C)$  est la jacobienne d'une courbe projective lisse  $C$  de genre  $g$  sur  $\mathbb{C}$ , alors tout point  $p \in C(\mathbb{C})$  définit un plongement

$$C \hookrightarrow JC, \quad x \mapsto [x] - [p],$$

et on a

$$[C] = \theta^{g-1}/(g-1)! \in H^{2g-2}(JC(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

par la formule de Poincaré [Arb+85, §I.5]. Pour  $g \leq 3$ , toute variété abélienne principalement polarisée  $(A, \theta)$  est isomorphe à un produit de variétés jacobienes, d'où l'on peut déduire que la classe minimale  $\gamma_{\min} = \theta^{g-1}/(g-1)!$  est algébrique pour de telles variétés abéliennes. Pour  $g \geq 4$ , cependant, l'algébricité de  $\gamma_{\min}$  reste un problème ouvert important.

Grabowski a prouvé dans sa thèse [Gra04] que la conjecture de Hodge entière vaut pour les solides abéliens complexes (c'est-à-dire les variétés abéliennes complexes de dimension 3). Depuis lors, il n'y a pas eu beaucoup de progrès sur la conjecture de Hodge entière pour les variétés abéliennes, jusqu'à ce que nous prouvions dans [BGF23] le résultat suivant :

**Theorem 6.1.2** (Beckmann–de Gaay Fortman). *Soit  $(A, \theta)$  une variété abélienne principalement polarisée de dimension  $g$ . Si la classe minimale  $\gamma_{\min} \in H^{2g-2}(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  est algébrique, alors  $A$  satisfait la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles.*

**Corollary 6.1.3** (Beckmann–de Gaay Fortman). *La conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles vaut pour tout produit*

$$A = J(C_1) \times \cdots \times J(C_n)$$

*de jacobienes des courbes projectives lisses  $C_i$  sur  $\mathbb{C}$ .*

D'après le Théorème 6.1.2, la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles sur les variétés abéliennes complexes principalement polarisées est équivalente à l'algébricité de la classe minimale  $\gamma_{\min}$  de toute variété abélienne complexe  $(A, \theta)$ . On est naturellement amené à se demander :

**Question 6.1.4.** *Soit  $(A, \theta)$  une variété abélienne complexe principalement polarisée très générale de dimension  $g \geq 4$ . Considérons la classe minimale*

$$\gamma_{\min} \in \text{Hdg}^{2g-2}(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

*Est-elle algébrique ?*

## 6.2 Stratégie du projet

Consider Theorem 6.1.2 above; it says that the integral Hodge conjecture for one-cycles holds on products of Jacobians of curves. Let  $A$  be any abelian variety. Then by Theorem 6.1.2 above, if there exists an abelian variety  $B$  such that  $A \times B$  is isomorphic to a product of Jacobians (one says that “ $A$  is a direct summand in a product of Jacobians”), then  $A$  satisfies the integral Hodge conjecture for one-cycles. After our result, Voisin has proved a converse to this latter statement [Voi23]. Combining both statements yields the following result.

**Theorem 6.2.1** (Beckmann–De Gaay Fortman, Voisin). *Let  $A$  be a principally polarized abelian variety. Then  $A$  satisfies the integral Hodge conjecture for 1-cycles if and only if there exists a principally polarized abelian variety  $B$  such that  $A \times B$  is isomorphic to a product of Jacobians of curves.*

*Démonstration.* See [BGF23] and [Voi23]. □

In a recent project with Stefan Schreieder, we prove that no non-trivial power of a very general hyperelliptic Jacobian of dimension  $g \geq 4$  is isogenous to the Jacobian of any curve (see [GFS24, Theorem 1.1]). As a corollary, we show in the same paper that if  $A$  is a very general principally polarized abelian variety of dimension  $g \geq 4$ , then there are no simple abelian varieties  $B_1, \dots, B_n$  such that  $A \times \prod_i B_i$  is isomorphic to a product of Jacobians of curves (cf. [GFS24, Corollary 1.6]). This is particularly interesting, because, in view of Theorem 6.2.1, it gives some evidence towards the failure of the integral Hodge conjecture for one-cycles on abelian varieties  $A$ . Namely, the geometry of the abelian variety  $B$  is restricted.

The goal of this research project is to proceed in this same direction, aiming to put further restrictions on the abelian variety  $B$  as in Theorem 6.2.1.

# Chapitre 7

## Projet V. La conjecture de Hodge entière réelle

Soit  $X$  une variété projective lisse sur  $\mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Quel devrait être le bon ensemble de conditions sur les classes dans  $H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$  à considérer, pour que toutes les classes algébriques satisfassent ces conditions, et que dans situations favorables, ces conditions sont-elles en fait suffisantes pour distinguer les classes algébriques des classes non algébriques ?

### 7.1 La propriété de Hodge entière réelle

Benoist et Wittenberg ont répondu à cette question dans [BW20a], où ils formulent la *conjecture de Hodge entière réelle* (malgré son nom, c'est une propriété plutôt qu'une conjecture, comme l'on verra plus bas). L'idée est la suivante. Il y a une obstruction évidente pour qu'une classe dans  $H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$  soit algébrique : son image dans  $H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$  peut ne pas être une classe de Hodge. Mais à part cela, il s'avère que les classes algébriques satisfont à une certaine condition topologique propre à la géométrie algébrique réelle, découverte par Kahn [Kah87] et Krasnov [Kra94] (voir aussi [BW20a, Theorem 1.18] pour une formulation précise de cette condition). Pour tout  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , on note

$$\mathrm{Hdg}_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))_0 \subset H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)) \quad (7.1)$$

le sous-groupe des classes  $\alpha \in H_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$  telles que :

- (1) l'image de  $\alpha$  dans  $H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$  est Hodge, et que
- (2)  $\alpha$  vérifie la condition topologique ci-dessus [BW20a, Définition 1.19].

On dit alors qu'une variété projective lisse  $X$  sur  $\mathbb{R}$  *satisfait la conjecture de Hodge entière réelle pour les  $r$ -cycles* ( $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_r$ ) si l'homomorphisme résultant

$$\mathrm{CH}_r(X) \rightarrow \mathrm{Hdg}_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))_0 \quad (r + k = \dim(X)) \quad (7.2)$$

est surjectif. Comme dans le cas complexe, il s'agit d'une propriété plutôt que d'une conjecture, car elle est valable pour certaines variétés mais échoue pour d'autres.

Comme son analogue complexe,  $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_r$  est une propriété extrêmement intéressante : prédisant précisément quelles classes de cohomologie sont algébriques, elle nous en dit long sur la géométrie de  $X$  et de ses sous-variétés. Par exemple, il peut être très difficile de produire des sous-variétés explicites ; si le groupe  $\mathrm{Hdg}_G^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))_0$  est grand alors  $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_r$  prédit que malgré cette difficulté, il y en a beaucoup.

## 7.2 Résultats connus et questions ouvertes

Naturellement, on peut se demander quelles classes de variétés  $n$ -dimensionnelles  $X$  et quels entiers  $r \leq n$  sont tels que  $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_r$  vaut pour  $X$ . Pour toutes les variétés de toute dimension  $n$ , pour  $r = 0$  et  $r = n$ , la propriété est satisfaite. De plus, Krasnov a prouvé un analogue équivariant du  $(1, 1)$ -théorème de Lefschetz, notant que la suite exacte courte exponentielle sur  $X(\mathbb{C})$  est  $G$ -équivariante [Kra91, Proposition 1.3.1], [MH98, Proposition 3.2], [Ham97, Ch.IV, Théorème 4]. Ainsi  $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_{n-1}$  vaut pour tout  $X$ . Cependant, pour  $r \in \{1, \dots, n-2\}$ , la conjecture de Hodge entière réelle pour les  $r$ -cycles peut échouer. C'est un invariant birationnel pour  $r \in \{1, n-2\}$ , et elle vaut pour les espaces projectifs [BW20a].

Comme mentionné ci-dessus, sur  $\mathbb{C}$ , Voisin a prouvé la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles sur les solides unirégles et de Calabi–Yau et, conditionnellement à la conjecture de Tate pour les surfaces sur les corps finis, sur des variétés rationnellement connexes de toute dimension [Voi06], [Voi13]. Sur les réels, il reste un problème ouvert de connaître la réponse sur la question suivante (voir [BW20a,

Question 2.16]) :

**Question 7.2.1** (Benoist–Wittenberg). *Soit  $X$  une variété projective lisse sur  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $X$  est soit un solide uniréglés, soit un solide de Calabi–Yau, soit une variété rationnellement connexes. Alors est-ce que  $X$  satisfait  $\mathbb{R}IHC_1$  ?*

Benoist et Wittenberg n’ont que des résultats partiels dans le cas rationnellement connexe, voir [BW20b]. En particulier, il est intéressant de se demander qu’est-ce qui se passe pour les variétés de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$  qui sont *Calabi–Yau* (c.a.d., satisfont  $K_X \cong \mathcal{O}_X$ ).

Le but de ce projet sera to make progress on Question 7.2.1. Dans [GF24], j’ai fait un premier pas, en démontrant :

**Theorem 7.2.2** (de Gaay Fortman, cf. [GF24]). *Soit  $A$  une variété abélienne de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$ . Alors les classes de Hodge  $G$ -invariants  $\mathrm{Hdg}^{2\bullet}(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))^G$  sur  $A$  sont algébriques, c.a.d. donnés par des cycles algébriques réels. De plus,  $A$  satisfait à la conjecture de Hodge entière réelle dans chacun des cas suivants :*

- (1) *Le lieu réel  $A(\mathbb{R})$  est connexe.*
- (2) *Il existe un isomorphisme  $A \cong B \times E$  avec le produit d’une surface abélienne  $B$  et d’une courbe elliptique  $E$  de lieu réel  $E(\mathbb{R})$  connexe.*

## 7.3 Stratégie du projet

Pour étendre le résultat du Théorème 7.2.2 aux solides de Calabi–Yau sur  $\mathbb{R}$  arbitraires, il serait naturel d’essayer d’adapter la stratégie de Voisin sur les nombres réels. Ce qu’elle prouve est le suivant. Supposons que  $H^2(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}}) = 0$ . Soit  $S \subset X_{\mathbb{C}}$  une surface lisse obtenue comme section d’un diviseur suffisamment ample sur  $X_{\mathbb{C}}$ . Le schéma de Hilbert  $\mathcal{H}$  des déformations de  $S$  dans  $X_{\mathbb{C}}$  est lisse autour de  $[S] \in \mathcal{H}$  ; on obtient une famille de déformations  $\mathcal{S} \rightarrow U \subset \mathcal{H}$  avec  $U$  lisse. Soit  $0 \in U(\mathbb{C})$  correspondant à  $S$ , et considérons l’application de Kodaira–Spencer  $\rho : T_0U \rightarrow H^1(S, T_S)$ . Il est relativement facile de prouver que s’il existe un élément  $\lambda \in H^1(S, \Omega_S^1)$  tel que la composition

$$T_0U \rightarrow H^1(S, T_S) \xrightarrow{\cup \lambda} H^2(S, \Omega_S^1 \otimes T_S) \rightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) \quad (7.3)$$



est surjectif, alors toute classe  $\alpha \in H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  est algébrique.

Le critère ci-dessus sur l'existence d'un  $\lambda \in H^1(S, \Omega_S^1)$  porte le nom de *critère de Green*. Prouvé à l'origine par Green dans l'appendice de [CHM88], il peut être appliqué dans de nombreuses situations pour prouver la densité des lieux de Noether-Lefschetz. Bien que facile à énoncer, il est souvent difficile à vérifier, comme c'est le cas pour [Voi06] : la partie difficile de la preuve de Voisin consiste en effet à vérifier le critère, ce qu'elle fait en dégénérant la surface  $S$  en une surface de nombreux nœuds.

Sur les nombres réels, un critère analogue existe, voir [Ben18, §1]. Il porte le nom *Critère de Green sur  $\mathbb{R}$* . En répétant l'argument ci-dessus, on obtient une famille  $\mathcal{S} \rightarrow U$  de surfaces lisses dans  $X$  définie sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $S = \mathcal{S}_0 \subset X$  est une section d'un suffisamment ample diviseur de  $X$ . Comme dans le cas de [Voi06 ; Tot21], il n'est pas difficile de montrer que le critère de Green sur  $\mathbb{R}$  implique  $\text{RIHC}_1$  pour  $X$ . On peut alors essayer d'adapter sur  $\mathbb{R}$  la preuve de Voisin de la satisfaction du critère complexe.

J'ai prouvé dans le [GF22b, Théorème 1.2] qu'il existe un analogue naturel du critère de Green pour une famille de variétés abéliennes  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow B$ , et que ce critère est *le même critère* sur  $\mathbb{R}$  que sur  $\mathbb{C}$ . Le critère prédit la densité du sous-ensemble  $R_k \subset B(\mathbb{R})$  ainsi que du sous-ensemble  $S_k \subset B(\mathbb{C})$  constitué des  $t \in B(\mathbb{R})$  (resp.  $t \in B(\mathbb{C})$ ) tels que  $\mathcal{A}_t = \psi^{-1}(t)$  contient une sous-variété abélienne réelle (resp. complexe) de dimension  $k$ . Cette relation étonnamment simple entre le critère de Green complexe et réel pour les familles de variétés abéliennes soulève l'espoir que le critère de Green pour les courbes sur les surfaces sur des solides réels de Calabi–Yau puisse être vérifié d'une manière ou d'une autre.

# Chapitre 8

## Bibliographie

- [AB84] Michal ATIYAH et Raoul BOTT. “The moment map and equivariant cohomology”. In : *Topology* 23 (1984).
- [AGV71] Michael ARTIN, Alexander GROTHENDIECK et Jean-Louis VERDIER. *Théorie de Topos et Cohomologie Etale des Schémas I, II, III*. Springer, 1971.
- [AH62] Michael ATIYAH et Friedrich HIRZEBRUCH. “Analytic cycles on complex manifolds”. In : *Topology* 1 (1962), p. 25-45.
- [Arb+85] Enrico ARBARELLO et al. *Geometry of Algebraic Curves. Volume I*. Springer-Verlag, 1985.
- [Ben18] Olivier BENOIST. “Sums of three squares and Noether-Lefschetz loci”. In : *Compositio Mathematica* 154 (2018).
- [BGF23] Thorsten BECKMANN et Olivier de GAAY FORTMAN. “Integral Fourier transforms and the integral Hodge conjecture for one-cycles on abelian varieties”. In : *Compositio Mathematica* 159.6 (2023), p. 1188-1213.
- [BH61] Armand BOREL et André HAEFLIGER. “La classe d’homologie fondamentale d’un espace analytique”. In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 89 (1961).
- [BO20] Olivier BENOIST et John Christian OTTEM. “Failure of the integral Hodge conjecture for threefolds of Kodaira dimension zero”. In : *Commentarii Mathematici Helvetici* 95.1 (2020), p. 27-35.

- [BW20a] Olivier BENOIST et Olivier WITTENBERG. “On the integral Hodge conjecture for real varieties, I”. In : *Inventiones Mathematicae* 222.1 (2020), p. 1-77.
- [BW20b] Olivier BENOIST et Olivier WITTENBERG. “On the integral Hodge conjecture for real varieties, II”. In : *Journal de l’École polytechnique* 7 (2020), p. 373-429.
- [CGP21] Melody CHAN, Søren GALATIUS et Sam PAYNE. “Tropical curves, graph complexes, and top weight cohomology of  $\mathcal{M}_g$ ”. In : *J. Amer. Math. Soc.* 34.2 (2021), p. 565-594.
- [CHM88] Ciro CILIBERTO, Joe HARRIS et Rick MIRANDA. “General Components of the Noether-Lefschetz Locus and their Density in the Space of all Surfaces”. In : *Mathematische Annalen* 282 (1988).
- [CO12] Ching-Li CHAI et Frans OORT. “Abelian varieties isogenous to a Jacobian”. In : *Ann. of Math. (2)* 176.1 (2012), p. 589-635.
- [CTK13] Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE et Bruno KAHN. “Cycles de codimension 2 et  $H^3$  non ramifié pour les variétés sur les corps finis”. In : *J. K-Theory* 11.1 (2013), p. 1-53.
- [CTV12] Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE et Claire VOISIN. “Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière”. In : *Duke Mathematical Journal* 161.5 (2012), p. 735-801.
- [DM69] Pierre DELIGNE et David MUMFORD. “The irreducibility of the space of curves of given genus”. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 36 (1969).
- [EGAI] Jean DIEUDONNÉ et Alexander GROTHENDIECK. *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*. Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques, 1960.
- [Flo52] Edwin Earl FLOYD. “On periodic maps and the Euler characteristics of associated spaces”. In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 72 (1952), p. 138-147.

- [GF22a] Olivier de GAAY FORTMAN. “Moduli spaces and algebraic cycles in real algebraic geometry”. Thèse de doct. École normale supérieure de Paris, 2022.
- [GF22b] Olivier de GAAY FORTMAN. “Real moduli spaces and density of non-simple real abelian varieties”. In : *The Quarterly Journal of Mathematics* 73.3 (2022), p. 969-989.
- [GF24] Olivier de GAAY FORTMAN. “On the integral Hodge conjecture for real abelian threefolds”. In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* (2024).
- [GFS24] Olivier de GAAY FORTMAN et Stefan SCHREIEDER. *Curves on powers of hyperelliptic Jacobians*. 2024. arXiv : [2401.06577](https://arxiv.org/abs/2401.06577) [[math.AG](https://arxiv.org/archive/math)].
- [Gra04] Craig GRABOWSKI. “On the integral Hodge conjecture for 3-folds”. Thèse de doct. Duke University, 2004.
- [Gro57] Alexander GROTHENDIECK. “Sur quelques points d’algèbre homologique”. In : *Tohoku Mathematical Journal* 9 (1957), p. 119-221.
- [Ham97] Joost van HAMEL. “Algebraic cycles and topology of real algebraic varieties.” Thèse de doct. Vrije Universiteit Amsterdam, 1997.
- [Har83] John HARER. “The second homology group of the mapping class group of an orientable surface”. In : *Invent. Math.* 72.2 (1983), p. 221-239.
- [Har86] John HARER. “The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface”. In : *Invent. Math.* 84.1 (1986), p. 157-176.
- [Hod61] William HODGE. “Differential forms in algebraic geometry”. In : *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni* 20 (1961), p. 172-234.
- [Kah87] Bruno KAHN. “Construction de classes de Chern équivariantes pour un fibré vectoriel réel”. In : *Communications in Algebra* 15.4 (1987), p. 695-711.
- [Kra91] Vyacheslav KRASNOV. “Characteristic classes of vector bundles on a real algebraic variety”. In : *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk, Seriya Matematicheskaya* 55.4 (1991), p. 716-746.

- [Kra94] Vyacheslav KRASNOV. “On the equivariant Grothendieck cohomology of a real algebraic variety and its applications”. In : *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk, Seriya Matematicheskaya* 58.3 (1994), p. 36-52.
- [Man17] Frédéric MANGOLTE. *Variétés Algébriques Réelles*. T. 24. Cours Spécialisés. Société Mathématique de France, 2017, p. vii+484.
- [MH98] Frédéric MANGOLTE et Joost van HAMEL. “Algebraic cycles and topology of real Enriques surfaces”. In : *Compositio Mathematica* 110.2 (1998).
- [Mum08] David MUMFORD. *Abelian Varieties*. T. 5. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics. Tata Institute of Fundamental Research, 2008, p. xii+263.
- [Mum67] David MUMFORD. “Abelian quotients of the Teichmüller modular group”. In : *J. Analyse Math.* 18 (1967), p. 227-244.
- [MZ20] David MASSER et Umberto ZANNIER. “Abelian varieties isogenous to no Jacobian”. In : *Ann. of Math. (2)* 191.2 (2020), p. 635-674.
- [OU73] Frans OORT et Kenji UENO. “Principally polarized abelian varieties of dimension two or three are Jacobian varieties”. In : *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 20 (1973), p. 377-381.
- [Pow78] Jerome POWELL. “Two theorems on the mapping class group of a surface”. In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 68.3 (1978), p. 347-350.
- [Sch19] Stefan SCHREIEDER. “Stably irrational hypersurfaces of small slopes”. In : *Journal of the American Mathematical Society* 32.4 (2019), p. 1171-1199.
- [Ser20] Jean-Pierre SERRE. *Rational points on curves over finite fields*. T. 18. Documents Mathématiques (Paris). Société Mathématique de France, Paris, 2020, p. x+187.
- [SS89] Mika SEPPÄLÄ et Robert SILHOL. “Moduli spaces for real algebraic curves and real abelian varieties”. In : *Mathematische Zeitschrift* 201.2 (1989).

- [Tat66] John TATE. “Endomorphisms of abelian varieties over finite fields”. In : *Inventiones mathematicae* 2 (1966).
- [Tat94] John TATE. “Conjectures on algebraic cycles in  $l$ -adic cohomology”. In : *Motives (Seattle, WA, 1991)*. T. 55. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 71-83.
- [Tho65] René THOM. “Sur l’homologie des variétés algébriques réelles”. In : *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965, p. 255-265.
- [Tot21] Burt TOTARO. “The integral Hodge conjecture for 3-folds of Kodaira dimension zero”. In : *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 20.5 (2021), p. 1697-1717.
- [Tot97] Burt TOTARO. “Torsion algebraic cycles and complex cobordism”. In : *Journal of the American Mathematical Society* 10.2 (1997), p. 467-493.
- [Tre] “Trento examples”. In : *Classification of Irregular Varieties (Trento, 1990)*. T. 1515. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1992, p. 134-139.
- [Tsi12] Jacob TSIMERMAN. “The existence of an abelian variety over  $\overline{\mathbb{Q}}$  isogenous to no Jacobian”. In : *Ann. of Math. (2)* 176.1 (2012), p. 637-650.
- [Voi06] Claire VOISIN. “On integral Hodge classes on uniruled or Calabi-Yau threefolds”. In : *Moduli spaces and arithmetic geometry*. T. 45. Advanced Studies in Pure Mathematics. Mathematical Society of Japan, 2006, p. 43-73.
- [Voi13] Claire VOISIN. “Remarks on curve classes on rationally connected varieties”. In : *A celebration of algebraic geometry*. T. 18. Clay Math. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, p. 591-599.
- [Voi23] Claire VOISIN. *Cycle classes on abelian varieties and the geometry of the Abel-Jacobi map*. 2023. arXiv : [2212.03046](https://arxiv.org/abs/2212.03046) [[math.AG](https://arxiv.org/archive/math)].
- [Wei49] André WEIL. “Numbers of solutions of equations in finite fields”. In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 55 (1949), p. 497-508.