# GAGA o-minimal

Rapport de stage de deuxième année


École Normale Supérieure & Leibniz Universität Hannover

*Auteur*
Florian Aulard

*Encadrants*
Olivier de Gaay Fortman
Stefan Schreieder


18 août 2023

# Table des matières



Ce rapport présente le travail effectué durant le stage de deuxième année effectué à l'Institut für Algebraische Geometrie, Leibniz Universität Hannover et encadré par Olivier de Gaay Fortman et Stefan Schreieder. Celui-ci a essentiellement consisté en l'étude des liens entre la géométrie algébrique et la géométrie analytique notamment à travers l'étude de l'article "o-minimal GAGA and a conjecture of Griffiths" de Benjamin Bakker, Yohan Brunebarbe et Jacob Tsimerman ainsi qu'à la participation au groupe de lecture sur le livre *Algebraic Geometry 1* de Igor Shafarevich organisé par Stefan Schreieder. J'ai également eu l'occasion d'assister au séminaire général de géométrie algébrique ainsi qu'à un cours donné par Jean-Louis Colliot-Thélène sur le principe de Hasse.

## 1 Introduction

Là où la géométrie algébrique peut être vu comme l'étude des fonctions polynomiales et leur ensembles d'annulation, la géométrie analytique consiste à étudier les fonctions holomorphes sur les variétés complexes. Comme un polynôme est a fortiori une fonction holomorphe, chaque variété algébrique complexe admet une variété analytique complexe sous-jacente. On peut alors se demander d'une part quelles variétés analytiques admettent une structure algébrique, et d'autre part, pour une variété algébrique fixée, quels fibrés vectoriels analytiques proviennent d'un fibré vectoriel algébrique.

Dans le cas projectif, cette question de la comparaison entre la géométrie algébrique et la géométrie analytique est formellement énoncée et complètement résolue dans l'article fondamental de Serre [20] publié en 1956. Cependant, la décennie qui précède a vue la démonstration de nombreux résultats importants mettant en évidence ce lien étroit. Par exemple, dès 1949, Chow prouve que, dans le cas projectif, les sous-espaces analytiques de l'espace analytique associé à une variété algébrique sont issues de sous-variétés algébriques [4]. Suite à une conjecture de Cartan, Oka [17] démontre en 1950 que le faisceau structural d'un espace analytique est cohérent, la propriété analogue pour les variétés algébriques étant immédiate. En 1951, Karl Stein [21] introduit les variétés éponymes, pendants directs des variétés algébriques affines. Enfin, entre 1951 et 1953, Cartan [3] présente ses théorèmes A et B sur les variétés de Stein, dont les équivalents algébriques seront démontrés par Serre en 1955 dans [19].

Rappelons que la définition de *faisceau cohérent* sur une variété algébrique (ou analytique) est une généralisation naturelle de celui du fibré vectoriel ; pour une définition plus précise, voir par exemple [9, paragraphe 5.3]. La façon dont Serre résout la question susmentionnée de la comparaison entre la géométrie algébrique complexe et la géométrie analytique complexe est la suivante : pour une variété algébrique projective fixée, le foncteur d'analytification des faisceaux cohérents définit une équivalence de catégories, qui commute avec la cohomologie des faisceaux (voir la Section 2.2 et le Théorème 1.1 ci-dessous). Ce résultat est assez rapidement amélioré par Grothendieck, qui, aidé du formalisme des espaces annelés et des schémas, démontre dans l'exposé XII du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie de 1960 [13] que le résultat de Serre se généralise au cas compact :

**Théorème 1.1** (Grothendieck, Serre)**.** *Soit $X$ une variété algébrique. Soit $X^{an}$ l'espace analytique complexe associé et supposons que $X^{an}$ est compact. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $X$, et $\mathcal{F}^{an}$ le faisceau cohérent sur $X^{an}$ qui est l'analytifié de $\mathcal{F}$. Alors les deux assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Pour tout $n \geq 0$, le morphisme canonique*

$$H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X^{an}, \mathcal{F}^{an})$$

*est un isomorphisme.*

2. *Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an}$ induit une équivalence de catégorie entre la catégorie* $\mathrm{Coh}(X)$ *des faisceaux cohérents sur $X$ et la catégorie* $\mathrm{Coh}(X^{an})$ *des faisceaux cohérents sur $X^{an}$.*

Une conséquence directe remarquée par Serre est une autre démonstration du théorème de Chow :

**Théorème 1.2** (Chow)**.** *Soit $X$ une variété algébrique dont l'espace analytique associé $X^{an}$ est compact. Alors chaque sous-espace analytique fermé de $X^{an}$ est* algébrique*, c.a.d. provient d'une sous-variété algébrique de $X$.*

Il est important de noter que ce résultat reste cantonné au cas compact et se généralise difficilement. Cependant, il y a plusieurs situations où l'on souhaiterait avoir un analogue dans le cas non compact.

Le développement des théories o-minimales propulsées notamment par Van den Dries dans les 1990 ont permis de développer de tels généralisations durant les deux dernières décennies. L'idée de ces résultats récents est d'ajouter des conditions logiques sur les espaces considérés afin de les munir de topologies plus modérées. En bref, une *structure o-minimale* spécifie une classe de sous-ensembles "modérées" de $\mathbb{R}^n$ avec de fortes propriétés de finitude. On dit que ces sous-ensembles sont *définissables* par rapport à la structure o-minimale. La catégorie des variétés analytiques complexes qui sont assemblées par un nombre fini de cartes définissables (appelés *espace analytiques complexes définissables*, voir la Section 3.6) se comporte, en un sens, localement comme la catégorie analytique et globalement comme la catégorie algébrique. Cette flexibilité permet d'établir des résultats forts, dont le fameux Théorème 1.3 de Peterzil et Starchenko ci-dessous constitue un exemple des plus frappants. Si on se fixe une structure o-minimale, par définition des espaces analytiques complexe définissable, on dispose d'un foncteur d'oubli $(-)^{an} : Y \mapsto Y^{an}_{def}$ qui à un espace analytique définissable

$Y$ associe l'espace analytique sous-jacent $Y^{an}$ (voir la Section 3.6 pour plus de détail). Le foncteur d'analytification des variétés algébriques se factorise alors par un foncteur $(-)^{def} : X \mapsto X^{def}$ qui à une variété algébrique $X$ associe $X^{def}$, un espace analytique complexe définissable (voir la Section 3.7). Ainsi, en 2008, Peterszil-Starchenko [18] ont généralisé le Théorème 1.2 au cas où la variété considérée est définissable pour une structure o-minimale :

**Théorème 1.3** (Peterszil–Starchenko)**.** *Soit $X$ une variété algébrique. Un sous-espace analytique définissable fermé réduit de $X^{def}$ est algébrique.*

Notamment, on remarquera que le théorème précédent est valable pour toute structure o-minimale choisie sur $\mathbb{R}$ (qui contient les semi-algébrique, c.a.d. telle les polynômes sont définissables). On notera que l'on dispose d'une notion naturelle de *faisceau cohérent* sur un espace analytique complexe, de sorte que le foncteur d'analytification des faisceaux sur un espace algébrique $X$ $(-)^{an}_X : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{an})$ se factorise par un foncteur $(-)^{def}_X : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{def})$. En disposant de ce "théorème de Chow définissable", Bakker, Brunebarbe et Tsimerman [2] ont pu renforcé le résultat de Serre de la façon suivante :

**Théorème 1.4** (Bakker–Brunebarbe–Tsimerman)**.** *Soit $X$ une variété algébrique. Soit $(-)^{def}_X$ le foncteur $F \mapsto F^{def}$ entre la catégorie $\mathrm{Coh}(X)$ des faisceaux cohérents sur $X$ et la catégorie $\mathrm{Coh}(X^{def})$ des faisceaux cohérents sur la variété analytique définissable $X^{def}$ associé à $X$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *Le foncteur $(-)^{def}_X : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{def})$ est exact et pleinement fidèle.*
2. *L'image essentielle de $(-)^{def}_X : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{def})$ est stable par sous-objets, c'est-à-dire, si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $X$ et si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}^{def}$ est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{F}^{def}$, alors $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\mathcal{H}^{def}$ pour un faisceau cohérent $\mathcal{H}$ sur $X$.*
3. *L'image essentielle de $(-)^{def}_X : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{def})$ est stable par quotients, c'est-à-dire, si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $X$, alors tout quotient de $\mathcal{F}^{def}$ par un sous-faisceau cohérent est isomorphe à $\mathcal{H}^{def}$ pour un faisceau cohérent $\mathcal{H}$ sur $X$.*

Il est important de noter que le foncteur $(-)^{def}$ n'est pas essentiellement surjectif : il existe des faisceaux cohérents sur $X^{def}$ qui ne sont pas isomorphes au faisceau définissable associé à un faisceau cohérent sur $X$ (voir l'Exemple 4.1).

Le but de ce manuscrit est de traiter la preuve du Théorème 1.4 en détail. Pour cela, nous donnerons une courte introduction à la théorie d'o-minimalité dans le cadre de la géométrie analytique, et montrerons comment associer une variété analytique définissable à une variété algébrique. Ce faisant, nous espérons fournir un texte qui se suffit à lui-même. Nous nous concentrerons sur les principales idées intuitives qui sous-tendent les définitions et les preuves, et nous nous efforcerons de fournir plusieurs exemples, afin que le lecteur puisse se faire une idée des concepts en jeu sans se perdre dans les détails.

On montrera également que le Théorème 1.4 a le corollaire suivant, qui peut être vu comme une conséquence se rapprochant de la formulation du théorème de Serre (voir le Théorème 1.1 ci-dessus). Il est fort possible que ce résultat soit connu des experts, mais on n'a pu en trouver trace dans la littérature.

**Théorème 1.5.** *Soit $X$ une variété algébrique et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $X$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, le morphisme canonique*

$$H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X^{def}, \mathcal{F}^{def})$$

*est un isomorphisme.*

Le cas $n = 0$, qui peut s'interpréter comme le fait que, pour un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $X$, chaque section globale du faisceau définissable associé provient d'une unique section globale de $\mathcal{F}$, est une conséquence directe du Théorème 1.4. L'utilisation de la suite spectrale associée à la composition de foncteurs $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{def}$ et $\mathcal{F}^{def} \mapsto \Gamma(X^{def}, \mathcal{F}^{def})$, et l'exactitude du foncteur $(-)^{def}_X : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{def})$ (voir le Théorème 1.4) permettent alors de conclure.

# 2 Géométrie algébrique et géométrie analytique

Cette section a vocation à rappeler les définitions des objets classiques que sont les variétés algébriques et les espaces analytiques ainsi que leur principales propriétés. On y démontre également le Théorème 1.1.

## 2.1 Variétés algébriques et analytiques

Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on appelle *partie algébrique* de $\mathbb{C}^n$ un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ de la forme

$$Z(f_1, ..., f_k) := \{x \in \mathbb{C}^n, f_1(x) = ... = f_k(x)\} \subset \mathbb{C}^n$$

avec $f_1, ..., f_k \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. Par exemple, une conique $Z \subset \mathbb{C}^n$ est un exemple d'une partie algébrique de $\mathbb{C}^n$ : c'est un sous-ensemble de la forme $Z = Z(f)$ où $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ est un polynôme de degré deux. Pour des exemples explicites, on peut penser à la parabole $\{X_2^2 = X_1\} \subset \mathbb{C}^2$ , à l'hyperbole $\{X_1^2 - X_2^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$, ou au cercle $\{X_1^2 + X_2^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$. Comme l'anneau $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ est noethérien, on vérifie que ces ensembles sont les fermés d'une topologie sur $\mathbb{C}^n$, appelé *topologie de Zariski.* L'objet de la géométrie algébrique consiste alors en l'étude de ces parties algébriques.

Comme dans le cas des variétés différentielles, il est utile d'avoir une définition plus générale, d'un objet "global" qui est localement de la forme décrite ci-dessus. Ainsi, on cherche une bonne définition de "variété algébrique". Pour cela, on utilisera la notion d'*espace annelé*, i.e. la donnée d'un couple $(X, \mathcal{O}_X)$ où $X$ est un espace topologique et $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'anneaux sur $X$. Il est important de noter qu'à un sous-ensemble algébrique $X = Z(I) \subset \mathbb{C}^n$, où $I$ est un idéal de $\mathbb{C}[X_1, .., X_n]$, on peut naturellement associer un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/I$. L'espace annelé associé à $\mathbb{C}^n$ sera noté $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. On appelle un sous-espace annelé fermé $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ associé à un sous-ensemble algébrique $Z \subset \mathbb{C}^n$ une *variété algébrique affine.* Noter que inversement, on peut associer à toute variété affine $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ un sous-ensemble algébrique, en prenant pour $Z$ l'ensemble $X(\mathbb{C}) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ de ses points complexes. On appellera *variété algébrique* un espace annelé qui est "localement isomorphe" à une algébrique variété algébrique affine, i.e. qui est localement défini par un nombre fini de polynômes. Pour une définition plus précise, le lecteur pourra consulter [9, 1. et 2.] ou [22, Chapitre 3]. On notera (AlgVar) la catégorie des variétés algébriques. Les objets algébriques classiques, comme les ensembles algébriques ou l'espace projectif $\mathbb{C}P^n$ (voir [10, 4.1.1 et 4.2.4]), ont des analogues dans la catégorie des variétés algébriques. L'analogue de l'espace projectif est alors noté $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

La construction des espaces analytiques complexes suit alors un procédé similaire. Ici, et dans le reste du texte, quand $Y$ est une variété complexe, on notera $\mathcal{H}_Y$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $Y$. Soit $U$ un ouvert dans $\mathbb{C}^n$. Soit $I$ un idéal de type fini de $\mathcal{H}_U(U)$, on dit alors que

$$X = V(I) := \{x \in U, \forall f \in I, f(x) = 0\}$$

est une *partie analytique* de $U$. Ces parties sont canoniquement doté d'une structure d'espace annelé $(X, \mathcal{H}_U/\mathcal{I})$. On appellera *espace analytique complexe* un espace annelé en $\mathbb{C}$-algèbre $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que pour tout point $x \in X$, il existe un entier $n$ pour lequel $x$ admet un voisinage isomorphe à une partie analytique de $U$ pour un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$. On notera (AnSp) la catégorie des espace analytiques complexes. Dans ce qui suit, si ce n'est pas précisé, *analytique* sera toujours compris au sens de l'analyse complexe. Enfin, on rappelle que le lemme d'Oka assure que le faisceau structural d'un espace analytique est cohérent (voir [14, Chapter 2 §5]).

## 2.2 Analytification

Soit $X$ une variété algébrique sur $\mathbb{C}$. On peut y associer canoniquement un espace analytique $X^{an}$, avec la propriété propriété universelle suivante : on dispose d'un morphisme d'espaces annelés en $\mathbb{C}$-algèbres $X^{an} \to X$ tel que tout morphisme d'espaces annelés en $\mathbb{C}$-algèbres d'un espace analytique $Y$ vers $X$ se factorise uniquement de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[dr] & X \\ & X^{an}. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

En particulier, si $Z$ est une autre variété algébrique et $Z \to X$ un morphisme de variétés, alors le composé $Z^{an} \to Z \to X$ se factorise uniquement par un morphisme $Z^{an} \to X^{an}$. Ainsi, on dispose d'un foncteur $(-)^{an}$ : (AlgVar) $\to$ (AnSp) qui à une variété algébrique $X$ associe un espace analytique $X^{an}$. De manière informelle, ce foncteur vient du fait qu'un polynôme est une fonction holomorphe et donc que le lieu d'annulation d'un polynôme est le lieu d'annulation d'une fonction holomorphe. Pour une démonstration précise de l'existence, on renvoie à [13, XII 1.1].

La proposition suivante décrit plus précisément l'espace analytique $X^{an}$ associé à la variété algébrique $X$ :

**Proposition 2.1.** *Le morphisme $\phi : X^{an} \to X$ induit une bijection entre $X^{an}$ et les point complexes $X(\mathbb{C})$ de $X$ . De plus, le morphisme induit par $\phi$ sur les complétés $\hat{\mathcal{O}}_{X^{an},x}$ et $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ des anneaux locaux $\mathcal{O}_{X^{an},x}$ et $\mathcal{O}_{X,x}$ au point $x \in X^{an}$, définit un isomorphisme*

$$\hat{\phi}_x : \hat{\mathcal{O}}_{X^{an},x} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{X,x}.$$

*En particulier, le morphisme d'espaces annelés $\phi\colon X^{an} \to X$ est plat, c'est-à-dire, $\phi_x\colon \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X^{an},x}$ est plat pour tout $x \in X^{an}$.*

*Démonstration.* Les deux premières assertions sont locales et donc découlent immédiatement du fait que pour une variété algébrique affine $X$ définie par un idéal $I \subset \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, l'espace analytique associé est $X^{an} = (Z(I), \mathcal{H}_{\mathbb{C}^n}/I)$. La derniere affirmation vient d'une part du fait que si $A$ est un anneau local, alors son complété $\hat{A}$ relatif à son idéal maximal est $A$-plat , et d'autre part du fait que si $A$ est un anneau, $B$ un $A$-algèbre et $C$ est un $B$-algèbre qui est plat sur $B$ et sur $A$, alors $B$ est plat sur $A$.

□

On peut alors tirer en arrière les $\mathcal{O}_X$-module par l'application $\phi : X^{an} \to X$, ce qui nous donne un foncteur

$$(-)^{an}_X : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an} := \phi^*\mathcal{F} = \phi^{-1}\mathcal{F} \otimes_{\phi^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{an}}$$

de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules dans la catégorie des $\mathcal{O}_{X^{an}}$-modules.

**Proposition 2.2.** *Le foncteur $(-)^{an}_X : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an}$ est exact, fidèle et envoie les faisceaux cohérents sur $X$ sur les faisceaux cohérents sur $X^{an}$.*

*Démonstration.* On note qu'il suffit de montrer que $(-)^{an}_X$ est exact et fidèle. L'exactitude est une conséquence directe du fait que $\phi$ est plat, car

$$\phi^*\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{\phi(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\phi(x)}} \mathcal{O}_{X^{an},x}.$$

La fidélité découle alors du fait que pour tout $x$ fermé dans $X$, $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X^{an},x}$ est fidèlement plat et qu'un faisceau sur une variété algébrique est déterminé par ses valeurs en les points fermés (voir [12, corollaire 10.4.8]). □

Un des intérêts majeurs de ces foncteurs est qu'ils permettent de transformer des propriétés sur les variété algébriques aux espace analytiques et réciproquement. Outre le Théorème 1.1, Grothendieck a démontré que certaines propriétés étaient transportés par ce foncteur. Par exemple, $X$ est réduit (resp. régulier, de dimension $n$) si et seulement si $X^{an}$ l'est ; et un morphisme de variétés algébriques $f : X \to Y$ est propre (resp. dominant, étale, séparé, une immersion) si et seulement si $f^{an} : X^{an} \to Y^{an}$ l'est.

On dira qu'un espace analytique est *algébrique* s'il appartient à l'image essentielle du foncteur d'analytification $(-)^{an}$.

## 2.3 Résultats préliminaires

Les trois parties qui suivent visent à démontrer le Théorème 1.1. Le raisonnement est issu de [13, XII 4] et de [20]. Les généralisations au cas propre, qui reposent notamment sur l'utilisation de suites spectrales, pourront être sautées en première lecture. Dans un premiers temps, nous allons présenter quelques résultats préliminaires nécessaires pour la démonstration.

Le lemme suivant peut s'interpréter comme le fait que pour une variété algébrique projective, les faisceaux cohérents peuvent s'écrire comme quotient des faisceaux $\mathcal{O}(n)^p$.

**Lemme 2.3.** *Soit $X$ une variété algébrique projective et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $X$. Alors il existe $p$ et $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $\mathcal{F}$ soit isomorphe à un quotient de $\mathcal{O}_X(n)^p$.*

*Idée de preuve.* On ne donne ici qu'une ébauche de la preuve, la preuve détaillée pourra être trouvée dans [19, Corollaire du §55].

Le lemme découle de la propriété plus générale suivante : Il existe un entier $m$ tel que pour tout $n \geq m$, pour tout $x \in X$, le $\mathcal{O}_x$-module $\mathcal{F}(n)_x$ soit engendré par les éléments de $\Gamma(X, \mathcal{F}(n))$. C'est une propriété locale, on peut donc se restreindre à des ouverts affines $U_i$ et calculer explicitement des sections satisfaisant la propriété précédente. $\square$

La généralisation du théorème de Serre au cas propre repose essentiellement sur l'observation suivante :

**Proposition 2.4** (Lemme de Chow)**.** *Soit $X$ une variété algébrique. Alors $X$ est propre si et seulement si il existe une variété algébrique projective $X'$ et un morphisme surjectif $\psi : X' \to X$. De plus, ils peuvent être choisis de tels sortes que l'on ait $U \subset X$ ouvert dense tel que $\psi$ soit un isomorphisme de $\psi^{-1}(U) \to U$ et $\psi^{-1}(U)$ dense dans $X'$.*

*Idée de preuve.* On donne ici une esquisse de la preuve. On trouvera une preuve détaillée du théorème précédent dans un contexte plus générale dans [10, Corollaire 5.6.2].

Comme $X$ est de type fini, elle possède un nombre fini de composantes irréductibles $(X_i)_{i \in I}$. Si on suppose la propriété vérifiée pour les $X_i$, on dispose de $Y_i$ projectif et $Y_i \to X_i$ surjectif. Alors $\coprod Y_i$ et $\coprod Y_i \to \coprod X_i \to X$ vérifie l'énoncé. On peut donc supposer $X$ irréductible. Comme $X$ est quasi-compact, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts affines $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$. Or on dispose alors d'immersions ouvertes $U_i \to P_i$ où les $P_i$ sont des variétés algébriques projectives. On peut alors considérer le morphisme $\psi : \bigcap_i U_i \to X \times P_1 \times ... \times P_n$ définit par les projections précédentes. On vérifie qu'il s'agit d'une immersion. On note $X'$ son image schématique. On dispose alors du morphisme de projection $\psi : X' \to X \times P_1 \times ... \times P_n \to X$. On vérifie alors que $X'$ et $\psi$ satisfont les conditions de l'énoncé $\square$

Le théorème suivant, connu sous le nom de "lemme de dévissage", fournit un critère appréciable pour montrer que tous les $\mathcal{O}_X$-module vérifient bien une propriété fixée.

**Proposition 2.5.** *Soit $X$ un schéma noethérien. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$ telle que les propriétés suivantes soient satisfaites :*

1. *$0 \in Ob(\mathcal{C})$.*
2. *Pour toute suite exacte $0 \to A \to B \to C \to 0$ de $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$, si deux éléments sont objets de $\mathcal{C}$, alors le troisième l'est également.*
3. *Tout facteur direct cohérent d'un élément cohérent de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$.*
4. *Pour tout point $y$ de $X$, il existe un élément $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{F}_y \neq 0$.*

*Alors $\mathcal{C}$ coïncide avec $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$.*

*Idée de preuve.* On donnera l'idée générale de la preuve ; pour une preuve complète, le lecteur pourra consulter [10, Corollaire 3.1.3].

On raisonne par récurrence noethérienne : considérons $Y$, une sous-variété fermée de $X$ telle qu'il existe un faisceau $\mathcal{G}$ à support contenue dans $Y$, $\mathcal{F} \notin Ob(\mathcal{C})$ et minimal pour l'inclusion. On note $\mathcal{I}$ l'idéal associé à $Y$. On dispose alors de $n$ tel que $\mathcal{I}^n\mathcal{F} = 0$. On a donc des suites exactes

$$0 \to \mathcal{I}^{k-1}\mathcal{F}/\mathcal{I}^k\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{I}^k\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{I}^k\mathcal{F} \to 0.$$

Le deuxième point assure qu'on peut, par récurrence, se restreindre au cas où $\mathcal{I}\mathcal{F} = 0$.

Supposons $Y$ réductible, on peut alors écrire $Y = Y' \cup Y''$ avec $Y'$ et $Y''$ des sous-variétés fermées de $Y$ ; soient $\mathcal{I}'$ et $\mathcal{I}''$ les faisceaux d'idéaux définissant $Y'$ et $Y''$ respectivement. Considérons $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}'$ et $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I}''$, Alors le morphisme canonique $u\colon \mathcal{F} \to F' \oplus \mathcal{F}''$ induit, pour tout $x \notin Y' \cap Y''$, un isomorphisme sur les fibres $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'_x \oplus \mathcal{F}''_x$. Ainsi, le noyau, le conoyau de $u$, ainsi que $\mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$ sont des objets de $\mathcal{C}$ par minimalité de $Y$. Comme on a les suites exactes

$$0 \to \mathrm{im}\ u \to \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}'' \to \mathrm{coker}\ u \to 0, \qquad \text{et}$$

$$0 \to \ker u \to \mathcal{F} \to \mathrm{im}\ u \to 0,$$

le deuxième point permet de conclure.

Supposons $Y$ irréductible et notons $y$ le point générique de $Y$. On dispose d'un faisceau $\mathcal{G}$ de $\mathcal{C}$ et de $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $\mathcal{G}_y^m \simeq \mathcal{F}_y^q$. On a alors un isomorphisme de faisceau sur un voisinage ouvert $W$ de $y$. Son graphe $\mathcal{H}$ est alors un sous-faisceau de $\mathcal{G}^m \oplus \mathcal{F}^q_{|W}$. On peut alors considérer un faisceau sur $X$ qui coïncident avec $\mathcal{H}$ sur $W$ et qui s'annule sur $X\backslash Y$. Les projections $v : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{G}^m$ et $w : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{F}^q$ sont alors des isomorphismes au-dessus de $W$. Le deuxième point assure alors successivement que $\mathcal{G}^m$, $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{F}^q$ sont objets de $\mathcal{C}$. Le quatrième point assure que $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{C}$.

Pour une preuve détaillée, on pourra consulter [11, Corollaire 3.1.3]. □

Le résultat suivant, utilisé simultanément avec le Lemme 2.1, nous permettra de permuter les bifoncteurs $\mathcal{E}xt$ et l'analytification.

**Lemme 2.6.** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat d'espaces annelés et soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathcal{O}_Y$-modules. Soit $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Alors on dispose d'un morphisme canonique*

$$f^*\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F}, f^*\mathcal{G}).$$

*De plus, si $\mathcal{O}_Y$ est cohérent et $\mathcal{F}$ est cohérent sur $\mathcal{O}_Y$, ce morphisme est un isomorphisme.*

*Idée de preuve.* On donne ici une esquisse de la preuve. Pour davantage de détail, le lecteur est invité à consulter [11, Proposition 12.3.4].

On remarque que par définition, le fait que $f$ soit plat assure que $f^*$ est exact. Ainsi, les foncteurs $\mathcal{G} \mapsto f^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F}, f^*\mathcal{G})$ sont exacts à gauche et l'existence d'un morphisme canonique $f^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F}, f^*\mathcal{G})$ entraîne des morphismes entre les foncteurs dérivés.

La propriété "être un isomorphisme" étant local, on s'autorisera à restreindre $X$ à un ouvert. Comme $\mathcal{F}$ est cohérent, par définition, on dispose d'une suite exacte

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{O}_X^n \to \mathcal{F} \to 0$$

pour un certain $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et un $\mathcal{O}_X$-module libre $\mathcal{R}$. Cette suite exact entraîne des suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc}
f^*\mathcal{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^n, \mathcal{G}) & \longrightarrow & f^*\mathcal{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{R}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & f^*\mathcal{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & f^*\mathcal{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^n, \mathcal{G}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, f^*\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{R}, f^*\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F}, f^*\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, f^*\mathcal{G}).
\end{array}$$

On conclut alors par récurrence sur $p$ car $\mathcal{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, f^*\mathcal{G}) = \mathcal{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^n, \mathcal{G}) = 0$. □

### 2.4 Comparaison cohomologique

Dans cette section, nous allons démontrer la première partie du Théorème 1.1 que l'on peut résumer informellement comme suit : si, pour une variété algébrique, l'espace analytique sous-jacent est compact, alors l'analytification pour les faisceaux stabilise la cohomologie.

Soit $X$ une variété algébrique, et soit $\phi : X^{an} \to X$ le morphisme canonique. Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X^{an} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\gamma^{an}"] & X \arrow[d, "\gamma"] \\ (\text{Spec } \mathbb{C})^{an} \arrow[r] & \text{Spec } \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module. On peut alors considérer le foncteur $(\gamma \circ \phi)_* = \gamma_* \circ \phi_* = \gamma_*^{an}$. Or on vérifie facilement que $\gamma_* = \Gamma(X, .)$ et $\gamma_*^{an} = \Gamma(X^{an}, .)$ Le Théorème 2.4.1 de [8] assure alors l'existence d'une suite spectrale cohomologique

$$H^p(X, R^q\phi_*\mathcal{F}^{an}) \implies H^{p+q}(X^{an}, \mathcal{F}^{an}).$$

On dispose alors d'un morphisme de bord

$$H^p(X, \phi_*\mathcal{F}^{an}) \to H^p(X^{an}, \mathcal{F}^{an}).$$

Comme on a un morphisme $\mathcal{F} \to \phi_*\mathcal{F}^{an} = \phi_*\phi^*\mathcal{F}^{an}$, on dispose d'un morphisme :

$$H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X, \phi_*\mathcal{F}^{an}) \to H^p(X^{an}, \mathcal{F}^{an}).$$

*Preuve du point 1 du Théorème 1.1.*

Supposons $X$ projectif. Quitte à étendre les faisceaux sur $X$ par 0 dans un espace projectif, on peut supposer que $X = \mathbb{P}^d_{\mathbb{C}}$ et $X^{an} = \mathbb{C}P^d$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $X$.

**Étape 1 : $X = \mathbb{P}^d$ et $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$.**
On peut calculer explicitement les cohomologies de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{an}$ et on obtient

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathbb{C} = H^0(X^{an}, \mathcal{F}^{an}) \text{ et } H^n(X, \mathcal{F}) = 0 = H^n(X^{an}, \mathcal{F}^{an}) \text{ pour } n > 0$$

**Étape 2 : $X = \mathbb{P}^d$ et $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n)$.**
Notons $A = \mathbb{C}[X_0, ..., X_d]$, alors soit $t$ un polynôme homogène de degré 1, on peut considérer l'hyperplan engendré par $t = 0$ de $X$ que l'on note $E$. On note $j : E \to X$. On a alors une suite exacte de $O_X$-modules

$$0 \to \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{O}_E \to 0.$$

On en déduit donc une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X(n-1) \to \mathcal{O}_X(n) \to j_*\mathcal{O}_E(n) \to 0.$$

On peut alors calculer les cohomologies associées par les suites exactes longues de cohomologie et on conclut par récurrence.

**Étape 3 : $X = \mathbb{P}^d$ et $\mathcal{F}$ quelconque.**
D'après le lemme 2.3, on dispose d'une suite exacte

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{O}(n)^p \to \mathcal{F} \to 0.$$

On peut alors calculer les cohomologies de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{an}$ par les suites exactes longues associées. On conclut alors par récurrence.

**Étape 4 : $X$ propre.**
Pour démontrer le résultat si $X$ n'est pas projectif, on considère la catégorie $\mathcal{C}$ des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents qui vérifient le théorème et on applique le lemme de dévissage 2.5 : Le premier point est immédiat et les deux suivants résultent de la suite exacte longue de cohomologie et du lemme des cinq.

Par le lemme de Chow 2.4, on dispose d'une variété algébrique projective $Y$ et d'un morphisme surjectif $\phi : Y \to X$. Un théorème de Grothendieck [11, Théorème 2.2.1] assure que l'on dispose d'un entier $n$ tel que $R^p\phi_*\mathcal{O}_Y(n) = 0$ et $\phi^*\phi_*\mathcal{O}_Y(n) \to \mathcal{O}_Y(n)$ soit surjectif. Alors si $\mathcal{F} = \phi_*\mathcal{O}_Y(n)$, on vérifie que $\mathcal{F}_x \neq 0$ pour tout $x$. De plus, on a la suite spectrale dégénérée

$$H^p(X, R^q g_*\mathcal{O}_Y(n)) \implies H^{p+q}(Y, \mathcal{O}_Y(n)).$$

On a donc un isomorphisme

$$H^p(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(Y, \mathcal{O}_Y(n)).$$

En procédant de même sur les espaces analytiques, on dispose d'un isomorphisme

$$H^p(X^{an}, \mathcal{F}^{an}) \xrightarrow{\sim} H^p(Y^{an}, \mathcal{O}_Y(n)^{an}).$$

Comme le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
H^p(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H^p(Y,\mathcal{O}_Y(n)) \arrow[d, "\wr"] \\
H^p(X^{an},\mathcal{F}^{an}) \arrow[r, "\sim"] & H^p(Y^{an},\mathcal{O}_Y(n)^{an}),
\end{tikzcd}$$

cela finit la démonstration du 1. du Théorème 1.1. □

## 2.5 Équivalence de catégories

Ici, nous démontrons que si l'on se fixe une variété algébrique, l'analytification des faisceaux induit bien une équivalence de catégories (voir le point 2 du Théorème1.1).

*Preuve du point 2 du Théorème 1.1.* Commençons par justifier rapidement que $(-)^{an}_X$ est pleinement fidèle : Soit $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents, alors on a $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = H^0(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}))$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ est cohérent. D'où grâce au point 1 du Théorème 1.1 et au lemme 2.6, $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{O}_{X^{an}}}(\mathcal{F}^{an},\mathcal{G}^{an})$.

Justifions maintenant que ce foncteur est essentiellement surjectif : pour le cas projectif, on se ramène également au cas où $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent, Serre démontre dans [20, §16 Lemme 8] qu'il existe un entier $n(\mathcal{F})$ tel que pour tout $n \geq n(\mathcal{F})$ et pour tout $x \in X$, $\mathcal{F}(n)_x$ est engendré par les éléments de $H^0(X, \mathcal{F}(n))$. En appliquant deux fois le résultat précédent et en utilisant que $X$ est quasi-compact, on trouve des entiers $m, n, p, q$ tel que l'on dispose d'une suite exacte

$$[\mathcal{O}_{X^{an}}(-m)]^q \to [\mathcal{O}_{X^{an}}(-n)]^p \to \mathcal{M} \to 0.$$

Mais alors on a

$$[\mathcal{O}_X(-m)]^{q,an} \xrightarrow{g} [\mathcal{O}_X(-n)]^{p,an} \to \mathcal{M} \to 0$$

Comme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{an}$ est pleinement fidèle par le point précédent, $g$ est issue d'un morphisme $f$ : $[\mathcal{O}_X(-m)]^q \to [\mathcal{O}_X(-n)]^p$. Posons $\mathcal{N} = \operatorname{coker} f$. On a alors une suite exacte

$$[\mathcal{O}_X(-m)]^{q,an} \xrightarrow{g} [\mathcal{O}_X(-n)]^{p,an} \to \mathcal{N}^{an} \to 0$$

et donc

$$M \simeq \mathcal{N}^{an}$$

Le cas général se ramène au cas précédent en utilisant le lemme de Chow 2.4 : soit $X'$ une variété algébrique projective, un morphisme surjectif $\phi : X' \to X$ et $U \in X$ un ouvert dense tel que $\phi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim}$

$U$. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X^{an}$-module cohérent. On peut alors considérer $\psi : \mathcal{F} \to f_*^{an}(f^{an})^*\mathcal{F}$. Comme $X'$ est projective, on dispose d'un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{P}^{an} = f^{an*}\mathcal{F}$ et comme $\psi$ est un isomorphisme au-dessus de $U^{an}$, les noyaux et conoyaux sont nulles sur $U^{an}$. Par récurrence noethérienne, on peut les supposer algébriques et donc $\mathcal{F}$ est extension de deux faisceaux algébriques.

Il suffit alors de montrer que toute extension de faisceaux algébriques sur $X^{an}$ provient d'une extension de faisceaux sur $X$, i.e.

$$Ext^1_{\mathcal{O}_X}(I,K)^{an} \xrightarrow{\sim} Ext^1_{\mathcal{O}_{X^{an}}}(I^{an},K^{an}).$$

Or on a des suite spectrale

$$H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(I,K)) \implies Ext^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(I,K)$$

et

$$H^p(X^{an}, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X^{an}}}(I^{an},K^{an})) \implies Ext^{p+q}_{\mathcal{O}_{X^{an}}}(I^{an},K^{an}).$$

Le Lemme 2.6 assure alors que les page $r = 2$ sont isomorphes.

□

Ces résultats se confinent malheureusement au cas propre. Ils sont faux dans le cas général : ils existent des variétés algébriques non isomorphes ayant des analytifications isomorphes. On pourra consulter les travaux de Zbigniew Jelonek [15] ou d'Anna Abasheva et Rodion Déev [6].Un corollaire immédiat des théorèmes précédents est le Théorème 1.2

*Preuve du Théorème 1.2.* Le faisceau d'idéaux $\mathcal{G}$ qui engendre $Y$ provient d'un faisceau d'idéaux $\mathcal{F}$ sur $X$ par le Théorème 1.1. Alors $Z(\mathcal{F})^{an} = Y$. □

On notera également que le graphe de la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un espace analytique qui n'est pas dans l'image essentielle de $(-)^{an}$ et donc que le foncteur $(-)^{an}$ n'est pas essentiellement surjectif.

# 3 Topologie modérée et structures o-minimales sur des espaces analytiques

« [...] la "topologie générale" a été développée (dans les années trente et quarante) par des analystes et pour les besoins de l'analyse, non pour les besoins de la topologie proprement dite, c'est-à-dire l'étude des propriétés topologiques de formes géométriques diverses. » [1]

Informellement, pour déterminer l'image du foncteur $(-)^{an}$ d'analytification entre la catégorie des variétés algébriques et la catégorie des espaces analytiques, il faudrait trouver une classe d'espaces analytiques qui satisfait des propriétés supplémentaires adéquates. L'idée intuitive vient de la constatation que la topologie sur les espaces analytiques consiste en la topologie usuelle de $\mathbb{C}^n$. Ainsi, tout l'aspect restrictif des espaces analytiques repose sur leur faisceau structurel. Au contraire, la topologie de Zariski sur les variétés algébriques est bien plus grossière, et impose des restrictions topologiques. Cette asymétrie suggère de chercher une "topologie" intermédiaire ; les structures o-minimales développées par Van den Dries dans les années 1990 se sont révélées être des outils utiles dans ce cadre.

## 3.1 Structures o-minimales

Nous définissons ici la notion de structure o-minimale.

**Définition 3.1.** *On appelle* structure *sur* $\mathbb{R}$*, la donnée la donnée d'une suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *de sous-ensembles* $S_n \subset P(\mathbb{R}^n)$ *pour* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$*, où* $P(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des parties de* $\mathbb{R}^n$*, qui vérifie les propriété suivantes :*

1. Alexandre Grothendieck, *Esquisse d'un programme*

*1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, la partie $S_n \subset P(\mathbb{R}^n)$ est une sous-algèbre de Boole de $P(\mathbb{R}^n)$.*

*2. Pour tous $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ et tous $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \{-1, 0, 1\}^k$, l'ensemble*

$$\{x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \{1, ..., k\}, \mathrm{sgn}\ f_i(x) = \epsilon_i\}$$

*appartient à $S_n$.*

*3. Si $A \in S_n$, alors $A \times \mathbb{R} \in S_n$ et $\mathbb{R} \times A \in S_n$.*

*4. Si $A \in S_{n+1}$ et $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ est la projection sur les $n$ premières coordonnées, alors $\pi(A) \in S_n$.*

*Si, de plus, la structure vérifie la condition*

*$(OM)$ les éléments de $S_1$ sont exactement les unions finies de points et d'intervalles.*

*on dit que la structure $(S_n)$ est* o-minimale.

Les éléments de $S_n$ sont appelés *parties définissables* de $\mathbb{R}^n$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite *définissable* si son graphe l'est.

Dans son livre [23], Van den Dries impose des conditions moins restrictives, considérant que les parties semi-linéaires forment une structure o-minimal. Cependant, dans notre situation, on souhaite que les variétés algébriques affines soient définissables.

Une manière commode d'exhiber une structure consiste à se fixer une famille de parties $X$ de $A = \coprod_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{R}^n$ telle que chaque élément de $X$ soit contenu dans une composante de $A$. On peut alors considérer la plus petite structure telle que les éléments de $X$ soient définissables. Soit $I$ un ensemble d'indice, on se fixe $(n_i)_{i \in I}$ et $(m_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$. Pour tout $i \in I$, on se fixe $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{m_i}$ et on note $\mathcal{F} = \{f_i, i \in I\}$. On peut alors considérer la plus petite structure rendant les $f_i$ définissables (celle-ci correspond à la plus petite structure rendant leur graphe définissable). On la note $(\mathbb{R}, <, +, ., \mathcal{F})$.

**Exemple 3.2.** *Les structures suivantes sont o-minimales :*

*1. $\mathbb{R}_{alg} = (\mathbb{R}, <, +, .)$.*

*2. $\mathbb{R}_{an} = (\mathbb{R}, <, +, ., \mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des fonctions analytiques réelles restreintes à $[0, 1]$ [7].*

*3. $\mathbb{R}_{exp} = (\mathbb{R}, <, +, ., \exp)$ où $\exp$ est l'exponentielle réelle [25].*

*4. $\mathbb{R}_{an,exp} = (\mathbb{R}, <, +, ., \exp, \mathcal{A})$ où $\exp$ et $\mathcal{A}$ sont comme précédemment [24].*

## 3.2 Espaces topologiques définissables

Dans ce paragraphe, on se fixe une structure définissable sur $\mathbb{R}$. Afin de pouvoir appliquer les structures o-minimales aux variétés algébriques, il peut être nécessaire d'introduire un objet "global" muni d'une structure définissable. Nous introduisons donc la notion d'espace topologique définissable, défini par Van den Dries dans [23].

**Définition 3.3.** *On appelle* espace topologique définissable *la donnée*

— *d'un espace topologique $U$*

— *d'un recouvrement fini $(U_i)_{i \in I}$ de $U$ muni d'applications $f_i : U_i \to \mathbb{R}^{n_i}$,*

*tel que les $f_i$ soient des homéomorphismes sur leur image $V_i$, que les $V_i$ et les $f_j(U_i \cap U_j)$ soient définissables et que les changements de cartes $f_i \circ f_j^{-1} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$ soient définissables.*

On dit qu'une partie d'un espace topologique définissable est *définissable* si elle l'est dans les cartes. Si $X$ et$Y$ sont des espaces topologiques définissables, $X \times Y$ est canoniquement doté d'une structure définissable. Ainsi une application $X \to Y$ est dite *définissable* si son graphe est définissable. Un *morphisme d'espace topologique définissable* est une application continue définissable. Les ouverts définissables forment alors une base de la topologie de $U$. En effet, on vérifie facilement que c'est le cas dans $\mathbb{R}^n$.

On souhaiterait définir une notion d'espace analytique définissable qui se comporte comme un espace annelé. Pour ce faire, l'idée naïve consiste à considérer un espace analytique muni d'une structure définissable et le munir du préfaisceau des fonctions holomorphes définissables. Cependant, en général les fonctions holomorphes définissables forment uniquement un préfaisceau et le faisceau associé est le faisceau des fonctions holomorphes au complet (si la structure définissable considérée sur $\mathbb{R}$ est plus fine que $\mathbb{R}_{an}$). Pour pallier à cette difficulté, on va construire une notion de faisceau définissable sur un espace topologique définissable.

On s'appuiera pour cela sur un cas particulier d'une construction dû à Grothendieck et al. [1] et mis en évidence par Edmundo, Jones et Peatfield [5]. On suivra la présentation de Bakker, Brunebarbe et Tsimerman dans l'article [2].

### 3.3 Sites et topologies de Grothendieck

Pour développer une notion de faisceau définissable, il est nécessaire de se restreindre à des recouvrements finies. Une solution serait alors de reconstruire la théorie des faisceaux en se restreignant systématiquement à des recouvrements finies. Le choix différent a été fait de présenter une construction plus générale de Grothendieck permettant de modéliser ce type de situation. Cette construction permet notamment de considérer une généralisation des variétés algébriques, les *espaces algébriques*, autorisant la manipulation de quotients de variétés (pour plus d'information sur le sujet, on pourra lire [16]). Bien que l'article [2] se place dans le cadre de cette théorie, on se restreindra à l'étude sur les variétés algébriques. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

**Définition 3.4.** *On appelle* topologie de Grothendieck $\tau$ *sur* $\mathcal{C}$ *un ensemble* $Cov(\tau)$ *de familles* $\{\phi_i : U_i \to U\}$ *de morphismes de* $\mathcal{C}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1. *Si* $\phi$ *est un isomorphisme,* $\{\phi\} \in Cov(\tau)$.
2. *Si* $\{U_i \to U\} \in Cov(\tau)$ *et, pour tout* $i$, $\{V_{i,j} \to U_i\} \in Cov(\tau)$, *alors* $\{V_{i,j} \to U\} \in Cov(\tau)$.
3. *Si* $\{U_i \to U\} \in Cov(\tau)$ *et* $V \to U$ *est quelconque, les* $U_i \times_U V$ *existent et* $\{U_i \times_U V \to V\} \in Cov(\tau)$.

On appelle les familles de $Cov(\tau)$ des *familles couvrantes*. Un couple $(\mathcal{C}, \tau)$ où $\tau$ est une topologie de Grothendieck sur $\mathcal{C}$ est appelé *site*.

**Exemple 3.5.** *Soit* $\mathcal{T}op$ *la catégorie des espaces topologiques. On dispose d'une topologie de Grothendieck dont les familles couvrantes sont les familles de morphismes* $\{\phi_i : U_i \to U\}$ *où* $U$ *et les* $U_i$ *sont des espaces topologiques et les* $\phi_i$ *sont des immersions ouvertes, tel* $U = \bigcup \phi_i(U_i)$. *Le site qui en découle est appelé* site topologique global.
*Si on se fixe un espace topologique* $X$, *on peut considérer la catégorie* $\mathcal{T}op_X$ *dont les objets sont les immersions ouvertes* $U \to X$ *et les morphismes de* $\phi_1 : U_1 \to X$ *dans* $\phi_2 : U_2 \to X$ *les application continues* $\sigma : U_1 \to U_2$ *qui font commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & & U_2 \arrow[dl, "\phi_2"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

*On dispose alors d'une topologie de Grothendieck canonique dont les familles couvrantes sont les familles* $\{\phi_i : U_i \to U\}$ *tels que* $U = \bigcup_i \phi_i(U_i)$. *Le site associé est appelé* site topologique locale.

**Exemple 3.6.** *On donne succinctement quelques exemples de sites* $(Sch, \tau)$ *qui ont la catégorie des schémas* $Sch$ *comme catégorie sous-jacente :*

1. *Le site de Zariski dont la topologie de Grothendieck est donnée par les recouvrement par des immersions ouvertes.*
2. *Le site de Zariski fini dont la topologie de Grothendieck est donnée par les recouvrement finis par des immersions ouvertes.*
3. *Le site étale dont la topologie de Grothendieck est donnée par les recouvrement par des morphismes étales.*

Soit $X$ une variété algébrique. A chacun de ces sites globales est associé un site locale sur $X$.

### 3.4 Préfaisceaux et faisceaux sur un site

On vérifie facilement qu'un préfaisceau à valeur dans une catégorie $\mathcal{D}$ sur un espace topologique $X$ est simplement un foncteur contravariant de la catégorie $\mathcal{T}op_X$ dans une catégorie $\mathcal{C}$. Ainsi, on définit un *préfaisceau* sur une catégorie quelconque $\mathcal{C}$ à valeur dans une catégorie $\mathcal{D}$ comme un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. Dorénavant la catégorie $\mathcal{D}$ sera prise parmi Ens, Ab, CRing, $A-$Mod si $A$ est un anneau commutatif. En réalité, pour éviter des problèmes de théorie des ensembles, on considérera plutôt des sous-catégories petites pleines des catégories précédentes.

De plus, un faisceau sur un espace topologique à valeur dans une catégorie $\mathcal{D}$ est défini comme un préfaisceau $\mathcal{F}$ qui vérifie que pour tout ouvert $U$ et tout recouvrement ouvert $(U_i)$, la suite suivante est exacte :

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

On constate aisément que cette définition ne nécessite que de définir correctement ce que sont les recouvrements, i.e. à se fixer une topologie de Grothendieck. On en déduit la définition suivante :

**Définition 3.7.** *Un* faisceau sur un site $(\mathcal{C}, \tau)$ *à valeur dans une catégorie $\mathcal{D}$ est défini comme un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}$ à valeur dans $\mathcal{D}$ qui vérifie que pour tout ouvert $U$ et toute famille couvrante de $Cov(\tau)$, la suite suivante est exact :*

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

Enfin, on a le résultat suivant, dû à Verdier, dont la démonstration pourra être trouvée dans [1, II 6.7] :

**Théorème 3.8.** *Soit $X$ un site et $A$ un faisceau d'anneaux sur $X$, la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur $X$ $\mathrm{Ab}_X$ est (AB 5) et (AB 3*). De plus, elle possède une famille de générateurs.*

En particulier, soit $F$ un foncteur exact à gauche de la catégorie des faisceaux sur un site $\mathrm{Ab}_X$. D'après le Théorème 1.10.1 de Tôhoku [8], pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $F$ admet un $n$-ième foncteur dérivé $R^nF$.

### 3.5 Le site définissable

Soit $X$ un espace topologique définissable. Le *site définissable* de $X$, noté $\underline{X}$, est donné par la donnée d'un couple $(\mathcal{C}, \tau)$ où :

1. $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}op_X$ dont les objets sont les immersions ouvertes $\phi_i : U_i \to X$ où les $\phi_i(U_i)$ sont définissables,
2. $\tau$ est la topologie sur $\mathcal{C}$ dont les familles couvrantes sont les recouvrements finis par des morphismes quelconques.

Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur le site définissable. On appelle *fibre* de $\mathcal{F}$ au dessus de $x \in X$ l'objet

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U \text{ ouvert déf}} \mathcal{F}(U)$$

Soit $X$ un espace topologique définissable, comme les parties définissables de $X$ forment une base de sa topologie, à un faisceau sur le site définissable est canoniquement associé un préfaisceau sur l'espace topologique sous-jacent. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme d'espace topologique définissable. On dispose alors de deux foncteurs $\phi_* : \mathrm{Ab}(\underline{X}) \to \mathrm{Ab}(\underline{Y})$ et $\phi^{-1} : \mathrm{Ab}(\underline{Y}) \to \mathrm{Ab}(\underline{X})$ avec $\phi_*$ adjoint à droite de $\phi^{-1}$. (voir [1, III 1.2]) On a de plus une description explicite de $\phi_*\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur le site définissable $\underline{X}$. Alors si $U$ est un ouvert définissable de $Y$, on a

$$\phi_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\phi^{-1}(U))$$

**Définition 3.9.** *Un* espace définissable localement annelé en $\mathbb{C}$-algèbre $(X, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ *est un espace topologique définissable $X$ muni d'un faisceau en $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{O}_X$ sur le site définissable $\underline{X}$ dont les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$*

*sont locales. Un* morphisme d'espaces définissables localement annelés en $\mathcal{C}$-algèbres $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *est la donnée d'un morphisme d'espaces topologiques définissables* $f : X \to Y$ *et d'un morphisme de faisceaux* $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$.

Soit $X$ un espace définissable localement annelé en $\mathcal{C}$-algèbres, on note $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules sur le site définissable. Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces définissables localement annelés en $\mathcal{C}$-algèbres. Le foncteur $f_* : \mathrm{Ab}(\underline{X}) \to \mathrm{Ab}(\underline{Y})$ définit précédemment induit un foncteur $f_* : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_Y)$. Cependant le foncteur $f^{-1}$ n'envoie pas nécessairement les $\mathcal{O}_Y$-modules sur des $\mathcal{O}_X$-modules, mais seulement sur des $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-modules. C'est pourquoi on considère le foncteur $f^* : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_Y) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ défini par

$$f^*\mathcal{F} = f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X.$$

En adaptant les définitions classiques au cas définissable, on définit les $\mathcal{O}_X$-modules de *type fini*, de *présentation fini* et les $\mathcal{O}_X$-modules *cohérents*.

On vérifie de manière similaire au cas algébrique ou analytique que la catégorie pleine des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents forme une sous-catégorie abélienne stable par extension. Donc, si $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'anneaux cohérent, les notions de $\mathcal{O}_X$-module cohérent et de $\mathcal{O}_X$-modules de présentation finie coïncident.

### 3.6 Espaces analytiques définissables

On développe ici la définition des espaces analytiques définissables, qui est l'analogue définissable de la définition des espaces analytiques de la Section 2.1. On remarque que $\mathbb{C}^n$ est canoniquement doté d'une structure d'espace définissable localement annelé en $\mathbb{C}$-algèbres avec $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ le faisceau des fonctions holomorphes définissables.

On notera que le site définissable n'a *pas assez de points*, c.a.d. il ne suffit pas qu'une suite de faisceaux abéliens soit exacte sur toute les fibres pour qu'elle soit exacte. En effet, si on suppose que la structure définissable sur $\mathbb{R}$ est plus fine que $\mathbb{R}_{an}$, on peut regarder sur le site définissable de $\mathbb{C}^n$ le faisceau des fonctions holomorphes $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ et le faisceau des fonctions holomorphes définissables $\underline{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}$. On a un morphisme de faisceaux $\underline{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ et par définition de $\mathbb{R}_{an}$ les fibres de ces faisceaux coïncident en tout point. Pourtant, on vérifie aisément que les sections globales de ces deux faisceaux ne coïncident pas.

De plus, on rappelle que si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents, le faisceau $Hom(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent.

**Définition 3.10.** *Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert définissable et $I$ un idéal de type fini de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$, le lieu d'annulation $X = V(I)$ peut être muni d'une structure d'espace localement annelé définissable, donné par le faisceau $\mathcal{O}_U/I\mathcal{O}_U$ sur $\underline{X}$. Les espaces de cette forme sont appelés* espace analytique définissable de base *ou* sous-espace analytique définissable *de $\mathbb{C}^n$. Si $U = \mathbb{C}^n$, on dit que $X$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{C}^n$.*

On dit qu'un espace localement annelé en $\mathbb{C}$-algèbres $X$ est un *espace analytique définissable* s'il existe un recouvrement définissable fini $(U_i)$ de $X$ tel que les espaces induits sur les $U_i$ soient isomorphes à des espaces analytiques définissables de base. On notera (DefAnSp) la sous-catégorie pleine des espaces annelés en $\mathbb{C}$-algèbres définissables dont les objets sont les espaces analytiques définissables.

La construction de la Définition 3.10 se généralise à un espace analytique définissable et donne naissance à la notion de sous-espace analytique définissable (fermé). On note alors $V(I)$ le sous-espace analytique définissable associé au faisceau d'idéaux $I$. Le théorème suivant est alors l'analogue o-minimal du lemme d'Oka.

**Théorème 3.11** (Bakker-Brunebarbe-Tsimerman)**.** *Soit $X$ un espace analytique définissable. $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'anneau cohérent.*

*Idée de preuve .* La preuve suit de manière étroite la preuve du théorème d'Oka classique que l'on peut trouver dans [14] tout en vérifiant à chaque étape que les objets considérés sont bien définissables. Une preuve détaillée peut-être trouvée dans [2, Theorem 2.38 ]. $\square$

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace analytique définissable et $\mathcal{F}$ un faisceau sur $\underline{X}$. Comme les ouverts définissables de $X$ forment une base de la topologie, on peut associer canoniquement à $\mathcal{F}$ un faisceau $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $X$. On notera $Supp(\mathcal{F}) = Supp(\tilde{\mathcal{F}})$. Attention, a priori, c'est un espace analytique qui n'a pas de raison d'être définissable.

Par définition, on dispose d'un foncteur d'oubli :

$$(-)^{an} : (\text{DefAnSp}) \to (\text{AnSp}).$$

Il donne naissance à un morphisme de site localement annelé en $\mathbb{C}$-algèbre $g : (X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) \to (\underline{X}, \mathcal{O}_X)$, voir [1, III 13.3] caractérisé par le foncteur continue $id : \underline{X} \to X^{an}$ définis par $id(U) = U$ si $U$ est un ouvert définissable et l'injection canonique

$$id^*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X^{an}}.$$

On en déduit un foncteur sur les faisceaux cohérents

$$(-)^{an}_X : \text{Coh}(X) \to \text{Coh}(X^{an}),$$

défini par

$$\mathcal{F}^{an} = \mathcal{O}_{X^{an}} \otimes_{g^{-1}\mathcal{O}_X} g^{-1}\mathcal{F}.$$

On notera que $\mathcal{O}_{X^{an}} = \mathcal{O}_X^{an}$. De plus, si la structure définissable choisie est plus fine que $\mathbb{R}_{an}$, le foncteur $(-)^{an}$ coïncide avec le foncteur qui à un faisceau $\mathcal{F}$ sur $\underline{X}$ associe le faisceau associé au préfaisceau défini par $\mathcal{F}$ sur $X$. Il ne faut pas confondre le foncteur $(-)^{an}$ : (AlgVar) $\to$ (AnSp) introduit dans la section 2.2 et le foncteur $(-)^{an}$ : (DefAnSp) $\to$ (AnSp) précédent.

**Théorème 3.12** (Baker–Brunebarbe–Tsimerman)**.** *Soit $X$ un espace analytique définissable. Alors le foncteur $(-)^{an}_X : \text{Coh}(X) \to \text{Coh}(X^{an})$ est exact et fidèle.*

*Idée de preuve.* Ce théorème repose principalement sur l'observation que si $X$ est un ensemble analytique définissable de base, les complétions de $\mathcal{O}_{X,x}$ et de $\mathcal{O}_{X^{an},x}$ sont isomorphes et comme les complétions sont fidèlement plat, le foncteur $(-)^{an}$ est exact. Montrer que $(-)^{an}$ est fidèle revient à montrer que pour un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $X$ : $\mathcal{F}^{an} = 0$ implique $\mathcal{F} = 0$. Comme $\mathcal{F}$ est cohérent, cela revient à montrer que si $\phi^{an} : \mathcal{O}^m_{X^{an}} \to \mathcal{O}^n_{X^{an}}$ est surjectif, il en est de même pour $\phi$. Mais cela découle du fait qu'être surjectif revient à imposer des conditions définissables sur les coefficients de la matrice associée. □

On en déduit que pour un faisceau cohérent définissable $\mathcal{F}$, le support $\mathcal{F}$ est un espace analytique définissable, égal à l'espace engendré par le noyau de $\mathcal{O}_x \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$. De manière similaire aux variétés algébriques, on a une propriété de noethérianité :

**Théorème 3.13** (Baker–Brunebarbe–Tsimerman)**.** *Soit $X$ un espace analytique définissable et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ cohérent. Toute chaîne croissante de sous-faisceau cohérent de $\mathcal{F}$ est majoré.*

Un espace analytique définissable $X$ est dit réduit si le faisceau d'anneau $\mathcal{O}_X$ est réduit. On dispose alors d'un foncteur $(-)^{red}$ : (DefAnSp) $\to$ (DefAnSp) qui à un espace analytique définissable $X$ associe un unique espace analytique définissable réduit $X^{red}$ qui vérifie la propriété $(X^{red})^{an} = (X^{an})^{red}$.

### 3.7 Le foncteur de définissabilité

Soit $X = \text{Spec } \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/I$ une variété algébrique affine. De manière similaire à l'analytification de $X$, dans la Section 2.2, on peut associer à $X$ le sous-espace analytique définissable fermé $X^{def}$ de $\mathbb{C}^n$ défini par l'idéal $I\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$.

Soit $X$ une variété algébrique. Comme une variété algébrique est quasi-compacte, tout recouvrement ouvert peut-être raffiné en un recouvrement ouvert fini et donc les sites $X_{zar}$ et $X_{fzar}$ (voir l'Exemple 3.6) sont canoniquement équivalents. On peut donc supposer que $X$ est recouvert par une réunion finie de sous-variété affine d'intersections affines et y associer un espace analytique définissable obtenue par recollement. Cette construction donne alors un foncteur $(-)^{def}$ : (AlgVar) $\to$ (DefAnSp) qui factorise le foncteur $(-)^{an}$ : (AlgVar) $\to$ (AnSp) par :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{AlgVar}) \arrow[rr, "(-)^{an}"] \arrow[dr, "(-)^{def}"'] & & (\mathrm{AnSp}) \\
& (\mathrm{DefAnSp}). \arrow[ur, "(-)^{an}"'] &
\end{tikzcd}$$

De plus, si $X$ est une variété algébrique, ce foncteur induit un morphisme de sites localement annelés $\phi : (\underline{X^{def}}, \mathcal{O}_{X^{def}}) \to (X, \mathcal{O}_X)$. Le diagramme précédent implique notamment que le foncteur $(-)^{def}$ est exact et fidèle. Un espace analytique définissable sera dit *algébrique* s'il est l'image d'une variété algébrique par le foncteur $(-)^{def}$.

On dispose alors de foncteurs $(-)^{def}_X : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{def})$ définis par

$$\mathcal{F}^{def} = \phi^{-1}\mathcal{F} \otimes_{\phi^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{def}}.$$

En outre, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Coh}(X) \arrow[rr, "(-)^{an}_X"] \arrow[dr, "(-)^{def}_X"'] & & \mathrm{Coh}(\mathrm{X^{an}}) \\
& \mathrm{Coh(X)^{an}}. \arrow[ur, "(-)^{an}_{X^{an}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme les foncteur $(-)^{an}_X$ et $(-)^{an}_{X^{def}}$ sont exacts et fidèles, le foncteur de définissabilité des faisceaux $(-)^{def}_X : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{def})$ est exact et fidèle.

### 3.8 Le théorème de Chow o-minimal réduit

Le Théorème 1.3 dû à Peterzil et à Starchenko est une généralisation du Théorème 1.2 qui fournit un critère pratique pour déterminer si une sous-variété analytique est algébrique.

*Idée de la preuve du Théorème 1.3.* Si $Y$ est un sous-espace analytique de $\mathbb{C}^n$, alors $Y \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$. Ainsi si l'adhérence de $Y$ dans $\mathbb{C}P^n$ est analytique, le Théorème de Chow 2.4 classique s'applique. Peterzil et Starchenko démontrent en fait que si $Y$ est définissable, la propriété précédente est vérifiée. On pourra consulter [18] pour plus de détails. $\square$

## 4 GAGA o-minimal

Cette partie va consister à présenter le Théorème 1.4, qui est une généralisation du point 2 du théorème 1.1 et a été démontré récemment, en 2018, par Bakker, Brunebarbe et Tsimerman dans [2].

Remarquons que le foncteur $(-)^{def}_X$ n'est pas nécessairement essentiellement surjectif. L'exemple suivant tiré de [2] fournit un exemple de faisceau analytique définissable qui ne provient pas d'un faisceau algébrique.

**Exemple 4.1.** *Soit $\boldsymbol{G}_m = \mathbb{C}[X, X^{-1}] = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$, on remarque que l'on dispose d'une immersion ouverte $\boldsymbol{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$. Comme on a une surjection $Pic(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) \to Pic(\boldsymbol{G}_m)$, $Pic(\boldsymbol{G}_m) = 0$. Ainsi, $\mathcal{O}_{\boldsymbol{G}_m}$ est, à isomorphisme près, l'unique fibré en droites sur $\boldsymbol{G}_m$. Au contraire, si on considère un système local $V$ sur $\boldsymbol{G}^{an}_m$ de monodromie $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$. Or on vérifie que si $\alpha \notin \mathbb{R}$, le fibré en droites $V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\boldsymbol{G}^{def}_m}$ n'est pas trivial (voir [2, Exemple 3.2]).*

*Démonstration du Théorème 1.4.* Soit $X$ une variété algébrique.

**Étape 1 :** Il suffit de montrer que l'image essentielle de $(-)^{def}_X$ est stable par sous-objet, c.a.d. le deuxième point entraîne les premier et troisième points 1 et 3.

On a déjà justifier que le foncteur $(-)^{def}_X$ était exact et fidèle. Comme un morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ peut être vue comme un sous-objet de $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, le deuxième point entraîne le premier point.
De plus comme $(-)^{def}_X$ est exact, le deuxième point entraîne le troisième.

**Étape 2 :** On peut se restreindre au cas où $X$ est réduit.

On va en fait montrer que si $\mathcal{I}$ un idéal nilpotent le théorème est vérifié pour $X$ si et seulement si il est vérifié pour $V(\mathcal{I})$.

Soit $I$ un idéal nilpotent de $\mathcal{O}_X$, quitte à raisonner par induction, on peut supposer que $\mathcal{I}^2 = 0$. Le sens direct de la proposition est clair car un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $Y = V(\mathcal{I})$ correspond à un faisceau cohérent $i_*\mathcal{F}$ sur $X$ avec $i : Y \to X$ et le foncteur $i_*$ est exact.

Montrons le sens réciproque. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $X$ et $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}^{def}$ un sous-faisceau. Dans ce qui suit, si on note $\phi : Z^{def} \to Z$, on confondra $\phi^*\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G}$ est un faisceau sur $Z$. Alors on dispose de morphismes canoniques $\mathcal{I}^{def} \to \mathcal{I}$ et $\mathcal{E} \to \mathcal{F}^{def} \to \mathcal{F}$. On en déduit un morphisme $\mathcal{I}^{def}\mathcal{E} \to \mathcal{I}\mathcal{F}$ qui se factorise par $\mathcal{I}^{def}\mathcal{E} \to (\mathcal{I}\mathcal{F})^{def}$. On en déduit, comme $(-)_X^{def}$ est exact que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathcal{I}\mathcal{F})^{def} \arrow[r] & \mathcal{F}^{def} \arrow[r] & \mathcal{F}^{def}/(\mathcal{I}\mathcal{F})^{def} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}^{def}\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{E}/\mathcal{I}^{def}\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[u] & 0.
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{I}^2 = 0$, on peut voir $\mathcal{I}^{def}\mathcal{E}$ et $(\mathcal{I}\mathcal{F})^{def}$ comme des $\mathcal{O}_{Y^{def}}$-modules cohérents. Par hypothèse, on dispose de $M \subset \mathcal{I}\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{I}^{def}\mathcal{E} = M^{def}$. Alors $\mathcal{E}$ est la préimage de $\mathcal{E}/M^{def}$ par le morphisme $\mathcal{F}^{def} \to (\mathcal{F}/M)^{def}$. Ainsi, quitte à remplacer $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}/M$, on peut supposer $\mathcal{I}^{def}\mathcal{E} = 0$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{I}\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F}/\mathcal{I}\mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\mathcal{I}\mathcal{F})^{def} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}^{def} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F}^{def}/(\mathcal{I}\mathcal{F})^{def} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{E}. \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi on a un morphisme $\mathcal{E} \to (\mathcal{F}/\mathcal{I}\mathcal{F})^{def}$ qui a pour image un espace analytique définissable algébrique $N^{def}$. Quitte à remplace $\mathcal{F}$ par l'image réciproque de $N$ par $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{I}\mathcal{F}$, on peut supposer $\mathcal{E} \simeq (\mathcal{F}/\mathcal{I}\mathcal{F})^{def}$. Il reste à vérifier que $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est algébrique mais il s'agit d'une section de $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{I}\mathcal{F}$ donc l'image est inclus dans le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ annulé par $\mathcal{I}$. En utilisant le point 2 du Théorème 1.4 sur $Y$ on conclut.

**Étape 3 :** Les suites exactes courtes de faisceaux localement libres sur $X^{an}$ proviennent de suites exactes courtes de faisceaux localement libres sur $X$. Plus précisément, si on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}^{def} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0,$$

avec $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ localement libre, alors celle-ci provient d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow G \longrightarrow 0,$$

avec $E, G$ localement libre.

Il suffit de construire $G$ et de définir $E = \ker \mathcal{F} \to G$. La construction de $G$ peut-être effectué composantes connexes par composantes connexes, on peut donc supposer $\mathcal{G}$ localement libre de rang constant. On note $Gr(r, \mathcal{F})$ la grassmanienne des modules quotient de $\mathcal{F}$ de rang $r$ (c'est une variété algébrique voir [9]). Alors $\mathcal{G}$ correspond à une section définissable de $Gr(r, \mathcal{F})$. Le Théorème 1.3 assure que $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est algébrique.

D'après le théorème de liberté générique de Grothendieck [12, 6.9.2], on dispose d'un ouvert dense de $X$ tel que $\mathcal{F}$ soit localement libre sur cet ouvert. Le lieux des points où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}^{def}/\mathcal{E}$ ne sont pas de rang maximal est définissable, analytique et fermé. Le Théorème 1.3 assure que le complémentaire est un ouvert dense $U$ sur lequel $\mathcal{E}_{|U}$ est algébrique.

**Étape 4 :** On construit le faisceau recherché sur un ouvert dense.

On raisonne par récurrence noethérienne : on suppose la propriété vérifiée pour tout sous-espace propre de $X$.
Soit $\mathcal{F}$ un faisceau algébrique cohérent sur $X$ et $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}^{def}$. Notons $E$ le $\mathcal{O}_U$-module pour lequel $\mathcal{E}_U = E^{def}$. Notons $i : U \to X$ l'injection canonique. Notons $\tilde{E}$ le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & i_* i^* \mathcal{F} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{E} & \longrightarrow & i_* E \end{array}$$

**Etape 5 :** On se ramène à un sous-espace fermé de $X$.

Soit $I$ le faisceau d'idéal qui munit $X \backslash U$ d'une structure de variété algébrique réduite. On pose $\mathcal{I} = I^{def}$. On note $\mathcal{G}$ l'intersection de $\mathcal{E}$ et de $\tilde{E}^{def}$. On a alors $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$, en appliquant le théorème 3.13, on voit facilement que $\mathcal{I}^n_{|X\backslash U} = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et comme $\mathcal{E}_{|U} = \tilde{E}^{def}_{|U} = \mathcal{G}_{|U}$, on dispose d'un entier $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $\mathcal{I}^n$coker $(\mathcal{G} \to \tilde{E}^{def}) = 0$. Ainsi $\mathcal{I}^n\mathcal{G} \simeq \mathcal{I}^n\tilde{E}^{def}$ et donc $\mathcal{I}^n\tilde{E}^{def} \subset \mathcal{G}$. Ainsi $\mathcal{I}^n\tilde{E}^{def} \subset \mathcal{E}$. En considérant le quotient, on a $\mathcal{E}/\mathcal{I}^n\tilde{E}^{def} \subset (F/I^n\tilde{E})^{def}$ qui est à support dans $X\backslash U$. Par induction $\mathcal{E}/\mathcal{I}^n\tilde{E}^{def}$ est algébrique et donc $\mathcal{E}$ est algébrique. □

## 4.1 Corollaires

Un premier corollaire remarqué par Bakker–Brunebarbe–Tsimerman est une extension du Théorème 1.3 au cas où $X$ n'est pas forcément réduit :

**Corollaire 4.2** (Théorème de Chow o-minimal)**.** *Soit $X$ une variété algébrique. Un sous-espace analytique définissable fermé de $X^{def}$ est algébrique.*

La démonstration est similaire à celle donnée par Serre du théorème de Chow classique 2.4. En particulier, ce lemme donne une description des sous-espaces analytiques fermés d'un espace algébrique $X^{an}$ : il s'agit exactement des sous-espaces analytiques définissables de $X^{an}$. □
Un second corollaire est le Théorème 1.5 qui justifie que le foncteur de définissabilité $(-)^{def}_X : \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{def})$ "stabilise" la cohomologie de manière similaire au Théorème 1.1.

*Démonstration du Théorème 1.5 .* Comme $\mathcal{F} \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$, on a

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

et donc

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = \Gamma(X^{def}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X^{def}}}(\mathcal{O}_{X^{def}}, \mathcal{F}^{def})) = \Gamma(X^{def}, \mathcal{F}^{def})$$

où la deuxième égalité utilise le Théorème 1.4.
Ainsi, si on note par $\Gamma$ le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ et $\Gamma_{def}$ le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X^{def}, \mathcal{F})$, les deux étant définis sur la catégorie des faisceaux cohérents sur X, et à valeur dans la catégorie des groupes abéliens, alors on a $\Gamma = \Gamma_{def} \circ (-)^{def}_X$. Ainsi, d'après [8, Théorème 2.4.1], on dispose d'une suite spectrale cohomologique :

$$E_2^{p,q} = R^p\Gamma_{def} \circ R^q(-)^{def}_X \implies R^{p+q}\Gamma.$$

Comme le foncteur d'analytification des faisceaux $(-)^{def}_X$ est exact, d' le Théorème 1.4, $E_r^{p,q} = 0$ pour tout $q \geq 0$, la suite spectrale dégénère à partir de la deuxième page : donc, si $p \geq 0$,

$$R^p\Gamma_{def} \circ (-)^{def}_X \simeq R^p\Gamma.$$

Par définition de la cohomologie des faisceaux, on a bien montré le Théorème 1.5. □

# Références


[1] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie IV : Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.* Springer-Verlag, 1972.

[2] Benjamin Bakker, Yohan Brunebarbe, and Jacob Tsimerman. o-minimal GAGA and a conjecture of Griffiths. *Invent. math.*, 232, 2023.

[3] Henri Cartan. Variétés analytiques complexes et cohomologie. *Colloque tenu à Bruxelles*, 1953.

[4] Wei-Liang Chow. On compact complex analytic varieties. *American Journal of Mathematics*, 71, 1949.

[5] Mário Edmundo, Gareth Jones, and Nicholas Peatfield. Sheaf cohomology in o-minimal structures. *J. Math. Log.*, 6, 2006.

[6] Anna Abasheva et Rodion Déev. Complex surfaces with many algebraic structures, 2023. arXiv :2303.10764.

[7] Andrei Gabrielov. Projections of semi-analytic sets. *Funct. Anal. Appl.*, 2 :282–291, 1968.

[8] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Mathematical Journal*, 9, 1957.

[9] Alexander Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas*, volume 4. Publications mathématiques de l'I.H.É.S, 1960.

[10] Alexander Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique : II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, volume 8. Publications mathématiques de l'I.H.É.S, 1961.

[11] Alexander Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Seconde partie*, volume 17. Publications mathématiques de l'I.H.É.S, 1963.

[12] Alexander Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie*, volume 32. Publications mathématiques de l'I.H.É.S, 1967.

[13] Alexander Grothendieck and Michèle Raynaud. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie I : Revêtements étales et groupe fondamental.* Springer-Verlag, 1960-1961.

[14] Reinhold Remmert Hans Grauert. *Coherent Analytic Sheaves.* Springer Berlin, Heidelberg, 1984'.

[15] Zbigniew Jelonek. Affine varieties with exotic models. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 143, 2014.

[16] Donald Knutson. *Algebraic Spaces.* Springer, 1971.

[17] Kiyoshi Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. vii. sur quelques notions arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 78, 1950.

[18] Ya'acov Peterzil and Sergei Starchenko. Complex analytic geometry and analytic-geometric categories. 2009(626) :39–74, 2009.

[19] Jean-Pierre Serre. Faisceau algébrique cohérents. *Annals of Mathematics*, 61(2), mar 1955.

[20] Jean-Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Annales de l'institut Fourier*, 6, 1956.

[21] Karl Stein. Analytische funktionen mehrerer komplexer veränderlichen zu vorgegebenen periodizitätsmoduln und das zweite cousinsche problem. *Mathematische Annalen*, 123, 1951.

[22] Torsten Wedhorn Ulrich Görtz. *Algebraic Geometry I : Schemes.* Vieweg+Teubner Verlag, 2010.

[23] Lou van den Dries. *Tame Topology and O-minimal Structures.* Cambridge University Press, 1998.

[24] Lou van den Dries and Chris Miller. On the real exponential field with restricted analytic functions. *Israel Journal of Mathematics*, 85, 02 1994.

[25] Alex Wilkie. Model completeness results of restricted pfaffian functions and the exponential function. *Journal of the American Mathematical Society*, 9, 11 1996.