La géométrie des variétés algébriques : cohomologie et cycles algébriques

Projet de recherche

Concours du CNRS 2024

Olivier de Gaay Fortman

8 février 2024

Objectif de ce texte. Le but de ce rapport est de décrire les recherches que je compte mener dans les années à venir. Ce rapport se compose de huit chapitres ; il est structuré comme suit :

(1) Le Chapitre 1 est consacrée à :

- une introduction à la théorie générale de la géométrie algébrique ;
- une description du principal objectif global de ce projet de recherche ; et
- une présentation des propositions de recherche de manière intuitive.

(2) Dans le Chapitre 2, je présente le contexte de la théorie générale qui facilite l'explication de mes diverses propositions de recherche. Ainsi, le Chapitre 2 se compose de trois sections, dans lesquelles je parle respectivement des variétés abéliennes et des jacobiennes (Section 2.4), de la théorie de Hodge, des cycles algébriques et de la cohomologie des variétés complexes (Section 2.2), et des cycles algébriques et de la cohomologie des variétés réelles (Section 2.3).

(3) Les Chapitres 3 – 7 constituent des descriptions détaillées des cinque propositions de projet. Le Chapitre 8 consiste de la bibliographie.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre a trois objectifs. Dans la Section 1.1, je donne une brève introduction à la géométrie algébrique. J'y introduis la notion de variété algébrique sur un corps, ainsi que celle de cycle algébrique d'une variété algébrique donnée. Je donne également quelques intuitions pour comprendre les concepts de base qui sous-tendent la théorie de la cohomologie des variétés algébriques sur les corps $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{F}_p$ pour un nombre premier p. Dans la Section 1.2, j'expliquerai, de manière informelle, l'objectif général de ce projet de recherche. Le but de la Section 1.3 est de donner un aperçu rapide des cinq projets de recherche que j'ai en tête. Je présenterai les principales questions auxquelles je compte répondre au cours de mes recherches, également de manière intuitive et informelle.

1.1 Brève introduction à la géométrie algébrique

La géométrie algébrique est l'étude des systèmes d'équations algébriques en plusieurs variables, ainsi que de la structure que l'on peut donner aux solutions de ces équations. Cette étude peut se faire de quatre manières : analytiquement, topologiquement, algébro-géométriquement et arithmétiquement. Ces quatre voies sont loin d'être indépendantes les unes des autres.

Les principaux objets d'étude dans la discipline de la géométrie algébrique sont ce que l'on appelle les *variétés algébriques* ; il s'agit d'espaces qui sont localement décrits par l'annulation de plusieurs polynômes en plusieurs variables. Si l'on part d'équations dont les coefficients sont des nombres complexes, on peut utiliser des méthodes analytiques et topologiques pour étudier les variétés algébriques. On peut alors considérer l'ensemble des zéros des équations comme une variété - topologique ou analytique - à condition de faire des hypothèses appropriées de non-singularité.

Mais on peut commencer par des équations dont les coefficients se trouvent dans n'importe quel corps, pas nécessairement de caractéristique zéro ; pensons au corps fini $\mathbb{F}_p$ de p éléments pour un certain nombre premier p. Dans ce cas, les techniques de la géométrie algébrique sont appliquées pour étudier les équations ayant leurs coefficients dans ce corps ; les solutions de ces équations se trouvent dans sa clôture algébrique. Ainsi, les arguments utilisés sont géométriques, souvent complétés par l'algèbre commutative, et aussi par la théorie des nombres.

Quant à l'histoire de la géométrie algébrique, on pourrait dire que la discipline remonte à Descartes. Entre autres, Abel, Riemann, Poincaré, Noether, Severi, Weil, Zariski et Chevalley ont réalisé de brillants travaux dans ce domaine, qui a été révolutionné dans les années 1950 et 1960 par les travaux de Serre et de Grothendieck. La géométrie algébrique a continué à se développer fortement depuis lors.

Variétés algébriques affines Les principaux objets d'étude de la géométrie algébrique sont les systèmes d'équations algébriques et leurs ensembles de solutions. Soit k un corps et soit $k[T_1, \ldots, T_n]$ l'algèbre des polynômes en n variables à coefficients dans k. On souhaite étudier des sous-ensembles finis

$$S = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset k[T_1, \ldots, T_n], \qquad f_1, \ldots, f_m \in k[T_1, \ldots, T_n].$$

Soit K un corps contenant k. Une *solution* de S dans K^n est un élément

$$(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \qquad \text{pour lequel} \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad \text{for all} \quad f \in S.$$

Définissons

$$Z(S)(K) \subset K^n \tag{1.1}$$

comme l'ensemble des solutions de S dans K^n.

Example 1.1.1. Soit $S = \{T_1^2 + T_2^2 - 1\} \subset \mathbb{Q}[T_1, T_2]$. Alors le sous-ensemble

$Z(S)(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ est le cercle dans $\mathbb{R}^2$:

$$Z(T_1^2 + T_1^2 - 1)(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Example 1.1.2. Soit $S = \{T_1^3 + T_1^2 T_3^2 - T_2^2\}$, et considérons l'ensemble des solutions réelles de S :

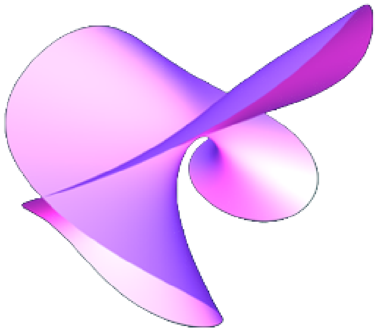

FIGURE 1.1 – La partie $Z(S)(\mathbb{R}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + x^2 z^2 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, qui est l'ensemble des solutions réelles de $S = \{T_1^3 + T_1^2 T_3^2 - T_2^2\}$.

Soit $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ un sous-ensemble fini. En laissant varier l'extension de corps $K \supset k$, nous obtenons différents ensembles de solutions $Z(S)(K)$, chacun étant un sous-ensemble de K^n.

Example 1.1.3. Soit $S = \{f(T_1, T_2)\} \subset \mathbb{Q}[T_1, T_2]$ un système composé d'une équation à deux variables.

(1) Le système $Z(S)(\mathbb{Q})$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}^2$ et son étude fait partie de la théorie des nombres. L'un des plus beaux résultats de cette théorie est le théorème de Faltings, qui n'était jusqu'à récemment qu'une conjecture. Ce théorème donne les conditions de finitude de l'ensemble $Z(S)(\mathbb{Q})$.

(2) $Z(S)(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ étudié en topologie et en analyse. C'est soit l'union d'un ensemble fini et d'une courbe algébrique, soit $\mathbb{R}^2$, soit vide.

(3) $Z(S)(\mathbb{C})$ est une surface de Riemann ou sa dégénérescence, étudiée en analyse complexe et en topologie.

Tous ces ensembles sont des incarnations différentes du même objet, une variété algébrique affine sur le corps k. Il s'agit d'un des principaux objets d'étude de la géométrie algébrique. Pour définir cet objet, on peut procéder comme suit. Définissons une *sous-variété affine* $X \subset \mathbb{A}^n$ sur k comme une classe d'équivalence

$$X = Z(S) \tag{1.2}$$

d'ensembles finis $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$, où S et S' sont équivalents si $Z(S)(K) = Z(S')(K)$ pour toute k-algèbre K. Ici, $\mathbb{A}^n = Z(\emptyset)$ est appelé *l'espace affine* de dimension n sur k ; il satisfait $\mathbb{A}^n(K) = K^n$ pour tout $K \supset k$.

Si $X = Z(S)$ désigne une variété algébrique affine k défini par un système d'équations algébriques $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$, alors, pour toute extension de corps $K \supset k$, le sous-ensemble

$$X(K) = Z(S)(K) \subset K^n$$

est bien défini. On l'appelle l'ensemble des K*-points* de X.

Variétés algébriques affines réelles L'étude des racines réelles d'un système de polynômes réels

$$f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n] \tag{1.3}$$

constitue une partie ancienne et fascinante des mathématiques. Procédant comme avant, définissant $S = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset \mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n]$ et

$$X(\mathbb{C}) \coloneqq Z(S)(\mathbb{C}) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid f_i(x) = 0 \ \ \forall i\} \subset \mathbb{C}^n, \tag{1.4}$$

alors cette tâche consiste à étudier le sous-ensemble

$$X(\mathbb{R}) = X(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}^n \subset X(\mathbb{C}). \tag{1.5}$$

Il s'avère que l'on gagne beaucoup en perspicacité en étudiant l'ensemble plus large $X(\mathbb{C})$ avec l'involution anti-holomorphe naturelle

$$\sigma\colon X(\mathbb{C}) \longrightarrow X(\mathbb{C}).$$

Notez que, même lorsque le lieu réel $X(\mathbb{C})^\sigma = X(\mathbb{R}) = X(\mathbb{C}) \cap \mathbb{R}^n$ est vide, une telle variété réelle X peut encore être un objet de structure très riche.

Outre les méthodes algébriques, il existe de nombreuses techniques permettant d'étudier une variété affine $X = Z(f_1, \ldots, f_m)$ sur $\mathbb{R}$. Par exemple, si le rang de la matrice $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))$ est maximal à chaque $a \in X(\mathbb{C})$, alors $X(\mathbb{C})$ admet la structure d'une variété complexe. Si, de plus, n est la dimension de la variété complexe $X(\mathbb{C})$, et si $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, alors $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$ est une sous-variété différentiable fermé de dimension n. Par conséquent, on peut appliquer des techniques topologiques et différentielles pour étudier la géométrie des ensembles (1.4) et (1.5).

Variétés algébriques Comme dans la théorie des variétés topologiques, il est naturel de considérer des objets plus généraux, connus sous le nom de *variétés algébriques* sur le corps k ; ce sont des espaces localement isomorphes à une variété algébrique affine. Une définition plus précise sera donnée dans la Section 2.1.

Cycles algébriques Soit X une variété algébrique affine définie par un ensemble fini de polynômes $S_1 \subset k[T_1, \ldots, T_n]$. Alors tout ensemble fini $S_2 \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ qui contient S_1 définit une *sous-variété algébrique* $Y = Z(S_2) \subset Z(S_1) = X$ de X. Notons que pour toute k-algèbre K, on a

$$Y(K) = Z(S_2)(K) \subset Z(S_1)(K) = X(K).$$

Example 1.1.4. Soit X une variété algébrique affine définie par un sous-ensemble fini $S \subset k[T_1, \ldots, T_n]$. Alors $X \subset \mathbb{A}^n$ est une sous-variété de l'espace affine $\mathbb{A}^n$.

Example 1.1.5. Soit $X = Z(T_1^2 T_3 = T_2^3)$, et soit $Y \subset X$ la sous-variété algébrique $Y = Z(T_1^2 T_3 = T_2^3, T_3 = 1) \subset X$. En prenant des $\mathbb{R}$-points, on obtient :

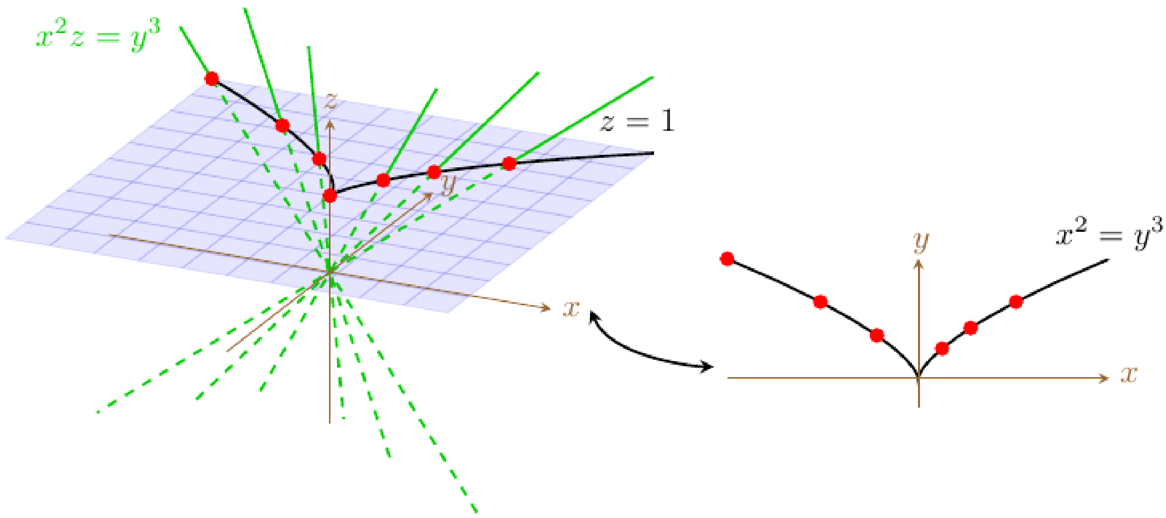

FIGURE 1.2 – Le sous-ensemble $Y(\mathbb{R}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1, x^2 = y^3\}$ de l'ensemble $X(\mathbb{R}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2z = y^3\} \subset \mathbb{R}^3$ peut être obtenu en prenant les points réels de la sous-variété algébrique $Y \subset X$ définie ci-dessus.

Soit X une variété algébrique, non nécessairement affine, sur un corps k. La définition de *sous-variété algébrique* $Y \subset X$ se généralise naturellement dans ce cadre (voir la Définition 2.1.1 dans le Chapitre 2 ci-dessous). Le *groupe des r-cycles algébriques* sur X est le groupe abélien libre

$$\mathcal{Z}_r(X) = \bigoplus_{Y \subset X} \mathbb{Z} \cdot [Y]$$

sur l'ensemble des sous-variétés intègres $Y \subset X$ de dimension r de X. Un *r-cycle algébrique* sur X est une somme formelle finie

$$\sum n_i[Y_i]$$

où $Y_i \subset X$ est une sous-variété intègre de dimension r et $n_i \in \mathbb{Z}$, pour tout i.

Pour étudier la géométrie d'une variété algébrique X, on aimerait comprendre ses sous-variétés algébriques. L'étude de la géométrie des variétés algébriques à travers leurs cycles algébriques d'une part, et leur cohomologie d'autre part, est l'objectif principal de ce projet de recherche. Après avoir considéré les cycles algébriques ci-dessus, il est maintenant temps de discuter de la cohomologie.

Cohomologie des variétés algébriques Souvent, on souhaite étudier des variétés algébriques complexes qui sont définies par des polynômes $f_1, \dots, f_k$ ayant leurs coefficients dans le sous-corps $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$. Cela conduit à toute une série de nouvelles techniques pour étudier la variété algébrique. Par exemple, si

$$X_{\mathbb{C}} = Z(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$$

est une variété algébrique affine sur $\mathbb{C}$, définie par des polynômes $f_i \in \mathbb{Q}[T_1, \dots, T_n] \subset \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$, alors $X_{\mathbb{C}}$ provient, par extension de scalaires, de la variété algébrique

$$X_{\mathbb{Q}} \coloneqq Z(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$$

définie sur le corps des nombres rationnels. En multipliant les coefficients de f_i, on peut supposer que ces coefficients se trouvent effectivement dans $\mathbb{Z}$; par conséquent, pour chaque nombre premier $p \in \mathbb{Z}$, on peut regarder la réduction

$$\bar{f}_i \in \mathbb{F}_p[T_1, \dots, T_n]$$

de f_i modulo p. On obtient ainsi, pour chaque premier p, une variété algébrique

$$X_{\mathbb{F}_p} = Z(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_p}$$

défini sur le corps fini $\mathbb{F}_p$ de p éléments.

Supposons que $X_{\mathbb{C}}$ soit lisse. Il s'avère qu'il existe une relation mystérieuse entre le nombre d'éléments des ensembles finis

$$X(\mathbb{F}_{p^m}) = \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{F}_{p^m})^n \mid \bar{f}_i(x) = 0 \quad \forall i\right\} \subset (\mathbb{F}_{p^m})^n, \quad m \geq 1,$$

et la topologie de la variété complexe $X(\mathbb{C})$. Cette idée provient de Weil (voir [Wei49]), qui prévoyait que pour les équations polynomiales à coefficients entiers, la topologie euclidienne sur l'ensemble des solutions complexes devrait influencer profondément le nombre de solutions des équations modulo un nombre premier. Ce point de vue a eu un impact considérable sur la géométrie algébrique moderne.

Lorsqu'une variété X est définie sur le corps des nombres complexes, la topologie euclidienne sur $X(\mathbb{C})$ peut être utilisée pour définir les groupes de cohomologie singulière $\mathrm{H}^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ qui reflètent la structure de la variété beaucoup plus fortement que ceux définis, par exemple, par la topologie de Zariski. Pour une variété sur un corps arbitraire (comme $\mathbb{F}_p$), la topologie euclidienne n'est pas disponible. La *topologie étale*, dont la définition est purement algébrique, peut être considérée comme une solution de remplacement. Elle donne une théorie des faisceaux abéliens F sur une variété X, ainsi qu'une théorie de cohomologie

$$\mathrm{H}^\bullet(X_{\text{ét}}, F), \tag{1.6}$$

dont les propriétés sont très proches de celles qui découlent de la topologie euclidienne pour une variété algébrique complexe.

D'une part, lorsque on considère une variété sur les nombres complexes, les groupes de cohomologie étale et complexe sont étroitement liés. D'autre part, lorsque la variété est le spectre d'un corps k et n'a donc qu'un seul point comme espace sous-jacent, la topologie étale est en général loin d'être triviale. En fait, la cohomologie étale de cette variété affine $\mathrm{Spec}(k)$ est équivalente à la cohomologie galoisienne du corps k ; les revêtements étales finies connexes de $\mathrm{Spec}(k)$ correspondent à des extensions séparables finies du corps k ; le *étale groupe fondamental* de la variété $\mathrm{Spec}(k)$ n'est rien d'autre que le groupe galoisien absolu $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

La cohomologie étale a acquis, pour l'étude des variétés sur des corps arbitraires, une importance comparable à celle de la cohomologie singulière pour l'étude de la géométrie des variétés complexes, ou de la cohomologie galoisienne pour l'étude de l'arithmétique des corps. Une de ses applications essentielles concerne l'étude des cycles algébriques d'une variété algébrique X sur un corps k. Ceci nous amène à l'objectif de ce projet de recherche, qui est l'utilisation de la cohomologie et des cycles algébriques pour étudier la géométrie des variétés algébriques.

1.2 Objectif général de ce projet de recherche

Dans les grandes lignes, mon projet de recherche concerne une étude de la géométrie des variétés algébriques, à travers une investigation de leurs groupes de cohomologie d'une part, et les sous-variétés qu'elles contiennent d'autre part.

L'idée centrale est que la géométrie d'une variété algébrique X est dans une large mesure régie par les sous-variétés contenues dans X. Considérons le groupe

$$\mathcal{Z}_r(X) = \bigoplus_{Y\subset X} \mathbb{Z}\cdot[Y]$$

des r-cycles algébriques sur X (voir la Définition 2.1 ci-dessous). Pour l'étudier, considérons un groupe de cohomologie entière approprié

$$\mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Z}(i)),$$

où $i = \dim(X) - r$. Par exemple, définissons-le comme la cohomologie singulière (en degré r) si le corps de base est $\mathbb{C}$, comme la cohomologie $\mathbb{Z}/2$-équivariante si le corps de base est $\mathbb{R}$, et comme la cohomologie étale si le corps de base est fini.

Il existe alors un homomorphisme de groupes, *l'application classe de cycle* :

$$\mathcal{Z}_r(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Z}(i)) \qquad (r+i=\dim(X)), \tag{1.7}$$

compatible avec les morphismes entre variétés. Cet application est déterminée par la propriété que si X est lisse et projectif et si $Y\subset X$ est une sous-variété lisse, alors (1.7) envoie $[Y]$ à l'image de la classe fondamentale $[Y]\in \mathrm{H}^0(Y,\mathbb{Z}(0))$ par le morphisme poussée en avant $\mathrm{H}^0(Y,\mathbb{Z}(0))\to \mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Z}(i))$ le long de l'inclusion $Y\hookrightarrow X$. Voir les Sections 2.2 et 2.3 ci-dessous pour plus de détails.

Au cœur de ce projet de recherche se trouve l'étude des cycles algébriques et de la cohomologie des variétés projectives lisses sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$, et sur $\mathbb{F}_p$, ainsi que l'interaction entre eux, donnée par l'application class de cycle (1.7). La question centrale de ce projet de recherche est la suivante :

Peut-on décrire l'image de l'application classe de cycle (1.7) ?

1.3 Projets, problèmes et questions

Dans cette section, nous donnons une première esquisse intuitive de nos cinque propositions de projets. Sans être précis, nous motivons ces projets, expliquons les idées principales, et formulons les questions sur lesquelles nous nous concentrerons.

Nous renvoyons le lecteur aux Chapitres 3 – 7 ci-dessous pour une description plus détaillée des mathématiques derrière ces projets de recherche, ainsi qu'une formulation plus précise des questions auxquelles nous espérons répondre.

Projet I. Cohomologie de l'espace de modules des courbes réelles Ce projet concerne un projet commun avec Emiliano Ambrosi (Maître de Conférences à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de l'Université de Strasbourg). L'idée centrale est d'étudier la topologie de l'espace de modules $\mathcal{M}_g(\mathbb{R})$ des courbes algébriques réelles de genre g. Les principales idées qui sous-tendent ce projet sont comme suit.

Parmi les objets les plus beaux et les plus fondamentaux de la géométrie algébrique moderne figure $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$, l'espace de module des courbes projectives lisses de genre g. Il s'agit d'un orbifold complexe de dimension $3g-3$. Son espace topologique sous-jacent, dénoté par $|\mathcal{M}_g(\mathbb{C})|$, est l'ensemble des classes d'isomorphisme des surfaces de Riemann compactes connexes de genre g. De nombreux travaux ont été réalisés pour comprendre la structure de l'homologie et de la cohomologie de $|\mathcal{M}_g(\mathbb{C})|$ – voir, par exemple, [Pow78 ; Mum67 ; Har83 ; Har86 ; CGP21].

En revanche, on ne sait presque rien de la cohomologie de l'espace de module des courbes algébriques réelles de genre g. Ce dernier est l'orbifold réel-analytique $\mathcal{M}_g(\mathbb{R})$, de l'ensemble sous-jacent

$$|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})| = \{\text{courbes algébriques réelles projectives lisses } C \text{ de genre } g\} \,/ \cong$$

consistant de classes d'isomorphisme de courbes algébriques sur $\mathbb{R}$ qui sont projectives, lisses et connexes. Dotons $|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|$ de sa topologie euclidienne naturelle (voir [GF22a ; SS89]). Le but de ce projet est de répondre aux questions suivantes.

Questions 1.3.1 (cf. la Question 3.3.1)**.** *Soit $g \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Considérons l'espace $|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|$ des courbes algébriques réelles de genre g. Alors, on se demande :*

(1) Pour un entier positif i, quelle est la dimension de $\mathrm{H}^i(|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|, \mathbb{Z}/2)$?

(2) Comment cette valeur se compare-t-elle à la dimension de $\mathrm{H}^i(|\mathcal{M}_g(\mathbb{C})|, \mathbb{Z}/2)$?

Pour aborder cette question, il est naturel de tout d'abord essayer de comprendre la différence entre les nombres de Betti totaux des espaces $|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|$ et $|\mathcal{M}_g(\mathbb{C})|$. Pour ce faire, nous avons en tête la stratégie suivante.

Rappelons que, si X est une variété algébrique de dimension sur $\mathbb{R}$, *l'inégalité de Smith–Thom* est l'inégalité suivante :

$$\sum \dim \mathrm{H}^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \sum \dim \mathrm{H}^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2). \tag{1.8}$$

Le fait que cette égalité soit toujours valable est prouvé dans [Flo52 ; Tho65] ; voir aussi le premier chapitre du livre [DIK00], ou bien [Man17, Théorème 3.3.6]. Une variété réelle X pour laquelle (1.8) est une égalité s'appelle une *variété maximale*.

Cependant, on ne peut pas directement appliquer (1.8) à $\mathcal{M}_g$ pour comparer les topologies de $|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|$ et de $|\mathcal{M}_g(\mathbb{C})|$. Car, en effet, $\mathcal{M}_g$ est en fait un *champ algébrique* sur les réels, et non pas une vraie variété. (Rappelons que la notion de champ algébrique généralise la notion de variété algébrique de la même manière que la notion d'orbifold différentiable (resp. complexe) généralise la notion de variété différentiable (resp. complexe). À priori, on n'a donc même pas une inégalité du type (1.8) qui pourrait nous permettre de comparer la topologie de $|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|$ avec celle de $|\mathcal{M}_g(\mathbb{C})|$.

Dans une collaboration actuelle avec Emiliano Ambrosi (maître de conférences à Strasbourg), nous résolvons cette difficulté de la manière suivante. Nous sommes sur le point de terminer la preuve du fait qu'il existe en fait un analogue naturel de (1.8) pour les champs algébriques. Plus précisément, pour tout champ de Deligne–Mumford séparé X sur $\mathbb{R}$, il devrait exister un faisceau constructible canonique F_X sur l'espace topologique $|X(\mathbb{C})|$, compatible avec tirer en arrière, tel que on ait

$$\sum \dim \mathrm{H}^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \sum \dim \mathrm{H}^i(X(\mathbb{C}), F_X). \tag{1.9}$$

Voir le Théorème 3.4.1. Ce résultat nous permets de se demander si l'inégalité (1.9) est une égalité. En d'autres termes (cf. la Question 3.3.1) :

Est-ce que l'espace de modules $\mathcal{M}_g$ est maximal ?

Pour plus de détails, voir le Chapitre 3 ci-dessous.

Projet II. La conjecture de Tate entière sur les corps finis L'objectif global de ce projet est d'étudier l'analogue de la conjecture de Hodge entière en caractéristique positive. Il s'agit donc d'une étude des sous-variétés des variétés algébriques $Y \subset X$ d'une variété algébrique défini sur un corps fini, et le lien entre ces sous-variétés et l'action galoisienne sur la cohomologie.

Soit p un nombre premier. Le but de ce projet est d'étudier les courbes $C \subset X$ contenu dans X, lorsque X est une variété abelienne sur le corps fini $\mathbb{F}_p$. (Une *variété abelienne* sur le corps $\mathbb{F}_p$ est une variété projective lisse sur $\mathbb{F}_p$ équipée d'une loi de groupe algébrique $m \colon X \times X \to X$; voir la Section 2.4.)

Pour étudier ces courbes $C \subset X$, on essaie d'étudier la structure du groupe des 1-cycles $\mathcal{Z}_1(X)$ et ses liens avec une théorie de cohomologie convenablement définie. Alors que l'on a esquissé les idées principales derrière la cohomologie étale dans la Section 1.1 (voir en particulier (1.6)), les définitions précises qui amènent à une théorie de cohomologie avec tous les axiomes habituels (dualité de Poincaré, décomposition de Künneth, etc.) demande un certain effort. Ce projet a été entrepris avec succès par Artin, Grothendieck et Verdier, voir [SGA4] ou [Mil80].

Soit $n = \dim(X)$. En conséquence de ce qui précède, pour chaque nombre premier $\ell \neq p$, il existe un $\mathbb{Z}_\ell$-module bien défini

$$\mathrm{H}^{2n-2}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(n-1)),$$

fonctoriel de manière contravariante en X, doté d'une action du groupe de Galois

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \cong \varprojlim_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \mathbb{Z}/m = \widehat{\mathbb{Z}}.$$

De plus, chaque courbe $C \subset X$ définit une classe

$$[C] \in \mathrm{H}^{2n-2}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(n-1))$$

qui est invariante sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$. On peut se demander : Est-ce que toutes les classes de cohomologie $\alpha \in \mathrm{H}^{2n-2}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(n-1))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$ s'écrivent comme combinaison $\mathbb{Z}_\ell$-linéaire finie $\alpha = \sum n_i[C_i]$ des courbes C_i dans X ?

Pour reformuler cette question, notons que la construction ci-dessus donne en fait un homomorphisme de groupes, *l'application classe de cycle*, qui envoie une courbe $C \subset X$ à sa classe de cohomologie :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{Z}_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell &\longrightarrow \mathrm{H}^{2n-2}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(n-1))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)} \\
(C \subset X) &\mapsto [C].
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

La *conjecture de Tate pour les courbes sur X* fait référence à la propriété selon laquelle (1.10) devient surjective après la tensorisation avec $\mathbb{Q}_\ell$ sur $\mathbb{Z}_\ell$. La *conjecture de Tate entière pour les courbes sur X* réfère à la propriété que l'application (1.10) elle-même est déjà surjective. On ne connaît pas des exemples de variétés projectives lisses X sur $\mathbb{F}_p$ pour lesquelles la surjectivité de (1.10) échoue.

On sait que les variétés abéliennes sur $\mathbb{F}_p$ satisfont à la conjecture de Tate pour les diviseurs (voir [Tat66]). Cela signifie que pour les variétés abéliennes, le conoyau de (1.10), qui est un groupe abélien de type fini pour toute variété projective lisse, est en fait *fini* dans le cas des variétés abéliennes. Il est donc naturel de se demander si l'application (1.10) est surjective pour toute variété abélienne sur $\mathbb{F}_p$. Les premiers cas à considérer sont certainement les variétés abéliennes de dimension trois, ce qui nous amène à la question suivante.

Question 1.3.2 (Wittenberg, cf. la Question 4.2.1 et la Conjecture 4.2.2)**.** *Soit X une variété abélienne de dimension trois sur $\mathbb{F}_p$. Soit $\alpha \in \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ une classe telle que $\sigma(\alpha) = \alpha$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$.*

Est-ce que α s'écrit comme une combinaison linéaire

$$
\alpha = \sum n_i [C_i] \in \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)} \qquad (n_i \in \mathbb{Z}_\ell)
$$

de classes des courbes $C_i \subset X$ dans X sur $\mathbb{F}_p$?

Le but de ce projet est de répondre à la Question 1.3.2 par l'affirmative ; voir le Chapitre 4 pour plus de détails.

Projet III. Variétés abéliennes isogènes à des jacobiennes sur $\overline{\mathbb{Q}}$ D'une part, dans [GFS24], avec Stefan Schreieder, nous prouvons qu'il existe des variétés abéliennes A sur $\mathbb{C}$ dont aucune puissance A^k $(k \geq 1)$ n'est isogène à la jacobienne d'une courbe. D'autre part, il est connu qu'ils existent des variétés abéliennes A sur le corps des nombres algébriques $\overline{\mathbb{Q}}$ qui ne sont pas isogènes à une jacobienne (cf.

[Tsi12 ; CO12 ; MZ20]). À la lumière de ces deux résultats, on peut se demander s'il existe des variétés abéliennes A sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont aucune puissance A^k n'est isogène à une jacobienne – voir la Question 5.2.2. Le but de ce projet est de répondre à cette question par l'affirmative. Voir le Chapitre 5 pour plus de détails.

Projet IV. La conjecture de Hodge entière Soit X une variété algébrique complexe projective lisse de dimension n. Soit $C \subset X$ une courbe lisse contenue dans X. L'inclusion $i\colon C \hookrightarrow X$ induit un homomorphisme de Gysin

$$i_*\colon \quad \mathbb{Z} = \mathrm{H}^0(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathrm{H}_2(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^{2n-2}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}). \quad (1.11)$$

Ainsi, on obtient une classe de cohomologie $[C] := i_*(1) \in \mathrm{H}^{2n-2}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Cette construction s'étend aux courbes arbitraires $C \subset X$, et on peut se demander :

Question 1.3.3. *Quelles classes de cohomologie $\alpha \in \mathrm{H}^{2n-2}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ s'écrivent comme combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} n_i [C_i]$$

des courbes $C_i \subset X$ dans X ?

Pour le dire autrement : la construction ci-dessus définit un homomorphisme de groupes, appelé *l'application classe de cycle*

$$\mathcal{Z}_1(X) \to \mathrm{H}^{2n-2}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad (1.12)$$

et la Question 1.3.3 devient :

Quelle est l'image de l'application classe de cycle (1.12) ?

Comme nous l'expliquerons dans le Chapitre 6 ci-dessous, il existe une propriété naturelle, appelée la *conjecture de Hodge entière pour les* 1*-cycles*, qui permet de décrire précisément l'image de (1.12). Cette propriété échoue en général, mais ils existent des classes intéressantes de variétés projectives lisses pour lesquelles elle tient. La question de savoir si les variétés abéliennes (c'est-à-dire les tores complexes projectifs) satisfont la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles, reste une question ouverte importante.

Dans [BGF23], avec Beckmann nous avons prouvé que pour une grande classe de variétés abéliennes, les *variétés jacobiennes*, la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles est satisfaite. Ceci établit la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles pour une grande classe de variétés abéliennes ; en fait, nous prouvons que l'ensemble des variétés abéliennes qui satisfont la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles est *dense* dans l'espace $\mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ de toutes les variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g (voir [BGF23, Théorème 1.3]). La question de savoir si toutes les variétés abéliennes satisfont la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles reste ouverte. En d'autres termes :

Question 1.3.4 (cf. la Question 6.1.4)**.** *Est-ce que la conjecture de Hodge entière pour les* 1*-cycles vaut pour les variétés abéliennes complexes ?*

La poursuite de mes recherches sur la conjecture de Hodge entière pour les variétés abéliennes est l'objectif principal de ce projet. En particulier, le but sera de répondre à la Question 1.3.4. Voir le Chapitre 6 ci-dessous pour plus de détails.

Projet V. La conjecture de Hodge entière réelle Pour expliquer le dernier objectif de ce rapport de recherche, nous transposons la discussion dans le cadre réel. Soit X une variété algébrique projective lisse sur $\mathbb{R}$. Considérons l'action

$$G = \mathbb{Z}/2 \circlearrowright X(\mathbb{C})$$

de G sur $X(\mathbb{C})$ donnée par l'involution anti-holomorphic naturelle $\sigma\colon X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$. Par rapport à cette action, on peut considérer le groupe de cohomologie équivariant

$$\mathrm{H}^{2k}_G(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$$

au sens de Borel (cf. [Gro57 ; AB84]). Ceci est un groupe de cohomologie compatible avec tirer en arrière par des morphismes $X \to Y$ des variétés algébriques. De plus, par [Kra94 ; Ham97], il existe une *application classe de cycle réelle*

$$\mathcal{Z}_r(X) \to \mathrm{H}^{2k}_G(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)). \tag{1.13}$$

L'analogue naturel de la Question 1.3.3 en géométrie algébrique réelle est alors :

Question 1.3.5. *Peut-on décrire l'image de l'application (2.9) ?*

Dans la Section 7 ci-dessous, nous préciserons cette question. Comme dans le cas complexe, il existe une propriété naturelle, appelée la *conjecture de Hodge entière réelle pour les r-cycles*, qui - lorsqu'elle est satisfaite - donne une description assez précise de l'image de (2.9) en termes de la *structure de Hodge équivariante* sur $\mathrm{H}^{2k}_G(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$ et les opérations de Steenrod sur $\mathrm{H}^{\bullet}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. Cette propriété a été introduite par Benoist et Wittenberg dans [BW20a ; BW20b], et prouvée pour diverses classes de variétés réelles. Comme dans le cas complexe, ils existent des variétés réelles pour lesquelles cette propriété vaut, et des variétés réelles pour lesquelles elle n'est pas vraie.

Les solides de Calabi–Yau et les solides uniréglés complexes satisfont la conjecture de Hodge entière par [Voi06 ; Tot21] (voir le Théorème 7.1.1 dans le Chapitre 7). L'analogue réel de ce théorème reste ouvert [BW20a ; BW20b] :

Question 1.3.6 (Benoist–Wittenberg, cf. la Question 7.1.2)**.** *Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{R}$. Supposons que X est soit un solide uniréglé, soit un solide de Calabi–Yau, soit une variété rationnellement connexes. Est-ce que la variété X satisfait à la conjecture de Hodge entière réelle pour les 1-cycles ?*

Dans [GF24], j'ai fait un premier pas dans cette direction ; voir le Théorème 7.1.3 dans le Chapitre 7 pour un énoncé plus général.

Theorem 1.3.7 (de Gaay Fortman, cf. [GF24])**.** *Soit X une variété abélienne de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathrm{H}^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$ une classe de Hodge, fixée par le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$. Alors α est une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire $\alpha = \sum_i n_i [C_i]$ de classes des courbes algébriques réelles $C_i \subset X$.*

Voir la Section 2.2 pour la notion de *classe de Hodge*. En plus du résultat ci-dessus, j'ai prouvé la conjecture de Hodge entière réelle pour une grande classe de variétés abéliennes réelles de dimension trois (voir le Théorème 1.10 dans [GF24]).

Le but de ce projet est de poursuivre mon travail sur la Question 7.1.2. Voir le Chapitre 7 ci-dessous pour plus de détails.

Chapitre 2

Théorie générale

2.1 Variétés algébriques et cycles algébriques

Variétés algébriques Soit k un corps. Comme dans la théorie des variétés topologiques, il est naturel de considérer des objets plus généraux, connus sous le nom de *variétés algébriques sur* k ; ce sont des espaces localement annelés X localement isomorphes à une variété algébrique affine. L'explication plus détaillée de ces termes nécessite un certain travail (voir par exemple [EGAI], [Mum88] ou [Har77]), mais l'idée est claire : tout sous-ensemble fini $S = \{f_1, \ldots, f_m\}$ de $k[T_1, \ldots, T_n]$ définit un espace localement annelé $U_S = \mathrm{Spec}\,(k[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_m))$. Cet espace U_S a la propriété que l'ensemble $U_S(\bar{k})$ de ses $\bar{k}$-points peut être vu comme sous-ensemble de l'espace vectoriel $\bar{k}^n$. En tant que tel, l'ensemble $U_S(\bar{k})$ admet, de façon compatible avec la définition (1.1), la description suivante :

$$U_S(\bar{k}) = \left\{a \in (\bar{k})^n \mid f_1(a) = \cdots = f_m(a) = 0\right\} \subset \bar{k}^n.$$

D'habitude, on définit une *variété affine* sur k comme un espace localement annelé isomorphe à U_S pour un certain S. Une variété affine dans ce sens donne lieu à une sous-variété affine $X \subset \mathbb{A}^n$ comme dans (1.2) pour un certain n, et inversement.

Une *variété algébrique sur* k est un espace localement annelé X admettant un recouvrement ouvert fini par des variétés affines. Une telle X est *lisse* si le rang de la matrice $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))_{ij}$ est maximal pour chaque ouvert $U \subset X$ isomorphe à une variété affine U_S défini par $S = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ et chaque $a \in U_S(\bar{k})$.

Un exemple fondamental de variété algébrique est l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ de dimension n sur k. Une variété algébrique X est *projective* si X admet un plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_k$ pour un entier $N \geq 0$. Une variété sur $\mathbb{R}$ s'appelle une *variété réelle*.

Cycles algébriques La définition de cycle algébrique sur une variété algébrique est comme suit.

Définition 2.1.1. Soit X une variété algébrique sur un corps k.

(1) Une *sous-variété algébrique* de X est l'image $Y \subset X$ d'une immersion fermée de variétés algébriques, doté de sa structure naturelle de variété algébrique.

(2) Une sous-variété algébrique $Y \subset X$ est *intègre* si Y est irréductible et s'il n'y a pas de nilpotents non nuls dans le faisceau structural $\mathcal{O}_Y$ de Y. Définissons $\mathcal{Z}_r(X)$, le groupe des *r-cycles algébriques* de X, comme le groupe abélien libre sur l'ensemble des sous-variétés intègres $Y \subset X$ avec $\dim(Y) = r$.

(3) Un *cycle algébrique sur* X est un élément du groupe abélien libre

$$\mathcal{Z}_\bullet(X) \coloneqq \bigoplus \mathcal{Z}_r(X). \tag{2.1}$$

Le groupe $\mathcal{Z}_r(X)$ est très large ; pour le comprendre mieux, on voudrait utiliser des méthodes cohomologiques, et de la théorie de Hodge. Expliquons maintenant comment cela fonctionne.

2.2 Cohomologie et cycles algébriques complexes

Soit X une variété algébrique projective lisse (voir la Section 2.1). L'étude des groupes $\mathcal{Z}_r(X)$ des r-cycles algébriques sur X est une partie fondamentale de la géométrie algébrique moderne. En général, cependant, ces groupes sont très grandes et compliqués, et l'on aimerait disposer d'outils permettant de les mieux comprendre. La *théorie de Hodge* fournit un tel outil - et en fait un outil très puissant - comme nous allons maintenant l'expliquer.

Théorie de Hodge Soit X une variété complexe. La structure complexe de X permet de décomposer le fibré vectoriel des 1-formes différentielles complexes sur

X comme

$$\Omega_{X,\mathbb{C}} = \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1}, \tag{2.2}$$

où $\Omega_X^{1,0}$ est le fibré vectoriel des 1-formes qui sont $\mathbb{C}$-linéaires pour la structure complexe sur T_X, et

$$\Omega_X^{0,1} = \overline{\Omega_X^{1,0}}$$

est le conjugué complexe de $\Omega_X^{1,0}$. Alors $\Omega_X^{1,0}$ est localement engendré par les dz_i, où z_i sont des coordonnées holomorphes locales sur X, et $\Omega_X^{0,1}$ est localement engendré par les $d\bar{z}_i$.

Soit $\mathscr{A}_{X,\mathbb{C}}^k$ le faisceau de k-formes différentielles complexes sur X, et pour $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ avec $p + q = k$, soit

$$\mathscr{A}_X^{p,q} \subset \mathscr{A}_{X,\mathbb{C}}^k$$

le sous-faisceau de k-formes différentielles complexes de type (p, q) : ce sont les k-formes α qui, en coordonnées holomorphes locales z_i, peuvent s'écrire comme

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_p \\ j_1<\cdots<j_q}} a_{I,J} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_p \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots d\bar{z}_q.$$

De (2.2), on obtient une décomposition en sous-faisceaux

$$\mathscr{A}_{X,\mathbb{C}}^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathscr{A}_X^{p,q}. \tag{2.3}$$

On a une application canonique

$$\operatorname{Ker}\big(d\colon \mathscr{A}_X^{p,q}(X) \to \mathscr{A}_{X,\mathbb{C}}^{k+1}(X)\big) \to \mathrm{H}^k(X, \mathbb{C}), \tag{2.4}$$

où $d\colon \mathscr{A}_{X,\mathbb{C}}^k \to \mathscr{A}_{X,\mathbb{C}}^{k+1}$ est la différentielle ; notons $\mathrm{H}^{p,q}(X) \subset \mathrm{H}^k(X, \mathbb{C})$ l'image de (2.4). Puisque

$$d\mathscr{A}_X^{p,q} \subset \mathscr{A}_X^{p+1,q} \oplus \mathscr{A}_X^{p,q+1},$$

il n'y a aucune raison a priori pour que (2.3) induise une décomposition du groupe de cohomologie de de Rham

$$\mathrm{H}^k(X,\mathbb{C}) = \frac{\operatorname{Ker}\left(d\colon \mathscr{A}^k_{X,\mathbb{C}}(X) \to \mathscr{A}^{k+1}_{X,\mathbb{C}}(X)\right)}{\operatorname{Im}\left(\mathscr{A}^{k-1}_{X,\mathbb{C}}(X) \to \mathscr{A}^k_{X,\mathbb{C}}(X)\right)}$$

en une somme directe des sous-espaces vectoriels complexes $\mathrm{H}^{p,q}(X) \subset \mathrm{H}^k(X,\mathbb{C})$. Néanmoins, on a :

Theorem 2.2.1 (Hodge [Hod61])**.** *Soit X une variété projective complexe lisse. Alors (2.3) induit une décomposition*

$$\mathrm{H}^k(X(\mathbb{C}),\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathrm{H}^{p,q}(X).$$

Conjecture de Hodge entière Toute sous-variété algébrique d'une variété projective lisse sur un corps k induit une classe dans un groupe de cohomologie convenablement défini. Des conjectures importantes prédisent que l'on peut comprendre le sous-groupe des classes algébriques dans la cohomologie de cette variété via des structures qui a priori ne sont pas directement liées aux cycles algébriques eux-mêmes (e.g. théorie de Hodge, représentations de Galois, etc.). Dans cette section, nous expliquons cela lorsque le corps de base est le corps des complexes $\mathbb{C}$.

Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$. Il existe une obstruction pour qu'un élément $\alpha \in \mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ soit dans l'image de l'application class de cycle (1.12). En effet, par le Théorème 2.2.1, il existe une *décomposition de Hodge* fonctorielle canonique

$$\mathrm{H}^k(X(\mathbb{C}),\mathbb{C}) = \mathrm{H}^k(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \mathrm{H}^{p,q}(X) \quad \text{telle que} \quad \overline{\mathrm{H}^{p,q}(X)} = \mathrm{H}^{q,p}(X),$$

et donc si l'on définit le groupe des *classes de Hodge entières* de degré $2k$ comme

$$\mathrm{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) = \left\{\alpha \in \mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \mid \alpha_{\mathbb{C}} \in \mathrm{H}^{k,k}(X) \subset \mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})\right\}, \tag{2.5}$$

alors

$$[Z] \in \mathrm{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$$

pour toute sous-variété $Z \subset X$ de dimension r (où $r + k = \dim(X)$). Pour voir ceci, supposons pour simplifier que Z soit lisse. Alors le morphisme de Gysin i_* défini dans (1.11) s'étend en l'application naturelle $\mathbb{C}$-linéaire

$$i_{*,\mathbb{C}} \colon \mathrm{H}^0(Z(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \mathrm{H}^{0,0}(Z) \to \mathrm{H}^{k,k}(X) \subset \mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}),$$

ce qui rend clair que

$$[Z]_{\mathbb{C}} = i_{*,\mathbb{C}}(1) \in \mathrm{H}^{k,k}(X).$$

On conclut que si $\mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} \subset \mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est l'image de (1.12), alors

$$\mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} \subset \mathrm{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}). \tag{2.6}$$

De même, pour $r, k \in \mathbb{N}$ avec $r + k = \dim(X)$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_{\mathrm{alg}} &= \mathrm{Im}\left(\mathcal{Z}_r(X) \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})\right) \\ &\subset \mathrm{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = \mathrm{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Conjecture 2.2.2 (Conjecture de Hodge)**.** *Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$, et tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Alors l'inclusion dans (2.7) est une égalité.*

Autrement dit, la conjecture predit que toute classe de Hodge rationnelle sur X est une combinaison $\mathbb{Q}$-lineaire finie de classes de sous-variétés algébriques $Z \subset X$. Voir par exemple [Lew99] pour une étude.

Cette conjecture reste largement ouverte. Pour comprendre cette conjecture, on voudrait comprendre une propriété plus forte, qui échoue pour certains variétés X et se trouve être vraie pour d'autres. On arrive à la conjecture de Hodge entière.

Définition 2.2.3. Une variété complexe projective satisfait à la *conjecture de Hodge entière pour les r-cycles* ($\mathrm{IHC}_r(X)$) si l'inclusion (2.6) est une égalité.

Notez que $\mathrm{IHC}_r(X)$ implique que (2.7) est une égalité. Cependant, malgré son nom, la conjecture de Hodge entière pour les cycles r est une propriété plutôt qu'une conjecture : on sait depuis Atiyah et Hirzebruch [AH62] qu'ils existent des variétés X et des entiers $r \in \mathbb{N}$ tel que la propriété $\mathrm{IHC}_r(X)$ ne tient pas.

D'une part, en cherchant à comprendre la conjecture de Hodge, il est important de se demander comment la conjecture de Hodge entière peut échouer. D'autre part, pour certaines variétés avec une géométrie particulièrement riche, la conjecture de Hodge entière s'avère être satisfaite. Au cours des dernières années, le problème de classifier les variétés projectives lisses X et les entiers r tels que $\mathrm{IHC}_r(X)$ est vérifiée (et ceux pour lesquels elle ne l'est pas) est devenu un domaine de recherche très important et intéressant. Voir par exemple [AH62 ; Tre ; Tot97 ; Voi06 ; CTV12 ; Sch19 ; BO20 ; Tot21 ; BGF23].

2.3 Cohomologie et cycles algébriques réels

Si X est une variété projective lisse sur $\mathbb{R}$, alors l'involution anti-holomorphe $\sigma : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$ induit une involution linéaire

$$F_\infty = \sigma^* \colon \mathrm{H}^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \to \mathrm{H}^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$$

tel que $F_\infty(\mathrm{H}^{p,q}(X)) = \mathrm{H}^{q,p}(X)$ et $F_\infty\left(\mathrm{H}^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})\right) = \mathrm{H}^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Le rôle de la théorie de Hodge en géométrie algébrique réelle consiste à exploiter cette involution.

Pour une sous-variété algébrique lisse

$$j \colon Z \hookrightarrow X$$

de dimension r, et $k = \dim(X) - r$, de manière analogue à ce qui précède la composition

$$j_* \colon\ \mathrm{H}^0(Z(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \mathrm{H}_r(Z(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \to \mathrm{H}_r(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \mathrm{H}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

peut être utilisée pour définir une classe de cohomologie

$$[Z] = j_*(1) \in \mathrm{H}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

Comme précédemment, cette construction s'étend aux combinaisons linéaires de sous-variétés, et étant compatible avec l'équivalence rationnelle, elle induise un homomorphisme [BH61]

$$\mathscr{Z}_r(X) \to \mathrm{H}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2). \tag{2.8}$$

Pour relier (2.8) à l'application de classe de cycle complexe définie dans (1.12), c

Pour relier (2.8) à l'application de classe de cycle complexe définie dans (1.12), considérons l'action

$$G = \mathbb{Z}/2 \circlearrowright X(\mathbb{C})$$

de G sur $X(\mathbb{C})$ donnée par l'involution anti-holomorphic naturelle $\sigma\colon X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$. En ce qui concerne cette action, on peut considérer le groupe de cohomologie équivariant $\mathrm{H}^{2k}_G(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$ au sens de Borel (cf. [Gro57 ; AB84]).

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^{2k}_G(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)) &= \mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}) \times_G EG, \underline{\mathbb{Z}(k)}), \quad \text{où} \\ X(\mathbb{C}) \times_G EG &= (X(\mathbb{C}) \times EG)\,/G. \end{aligned}$$

Ici, $EG = \varinjlim_n \mathbb{S}^n$ est un espace contractile, $\mathbb{Z}(k)$ est le groupe abélien $\mathbb{Z}$ transformé en un G-module en déclarant que $\sigma(1) = (-1)^k$ pour le générateur $\sigma \in G$, et $\underline{\mathbb{Z}(k)}$ est un faisceau bien choisi sur $X(\mathbb{C}) \times_G EG$.

Par [Kra94 ; Ham97], il existe une *application classe de cycle réelle*

$$\mathscr{Z}_r(X) \to \mathrm{H}^{2k}_G(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)) \tag{2.9}$$

de sorte que les morphismes (1.12), (2.8) et (2.9) s'insèrent dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{Z}_r(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, bend right] & \mathscr{Z}_r(X_{\mathbb{C}}) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) & \mathrm{H}^{2k}_G(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)) \arrow[l] \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)). \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

Récemment, l'analogue de la conjecture de Hodge entière pour les variétés algébriques réelles a été formulée [BW20a ; BW20b]. Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{R}$, et soit $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Considérons l'homomorphisme naturel $\varphi\colon \mathrm{H}^{2k}_G(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k)) \to \mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$, voir diagramme (2.10), ainsi que le sous-groupe de classes de Hodge $\mathrm{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k)) \subset \mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k))$, voir (2.5). S'appuyant sur les travaux de Krasnov [Kra91 ; Kra94] et de Van Hamel [Ham97], Benoist et Wittenberg définissent un sous-groupe

$$\mathrm{Hdg}_G^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k))_0 \subset \varphi^{-1}\left(\mathrm{Hdg}^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k))\right) \mathrm{H}_G^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k))$$

avec certaines propriétés appropriées. L'idée est la suivante. Il y a une obstruction évidente pour qu'une classe dans $\mathrm{H}_G^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k))$ soit algébrique : son image dans $\mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k))$ peut ne pas être une classe de Hodge. Mais à part cela, il s'avère que les classes algébriques satisfont à une certaine condition topologique propre à la géométrie algébrique réelle, découverte par Kahn [Kah87] et Krasnov [Kra94] (voir aussi [BW20a, Theorem 1.18] pour une formulation précise de cette condition). Pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on note

$$\mathrm{Hdg}_G^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k))_0 \subset \mathrm{H}_G^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k)) \tag{2.11}$$

le sous-groupe des classes $\alpha \in \mathrm{H}_G^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k))$ telles que :

(1) l'image de α dans $\mathrm{H}^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k))$ est Hodge, et que

(2) α vérifie la condition topologique ci-dessus [BW20a, Définition 1.19].

Ce group contient la classe de cohomologie de tout cycle de codimension k sur X ; on a donc une application classe de cycle réelle induite

$$\mathcal{Z}_r(X) \to \mathrm{Hdg}_G^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k))_0 \qquad (r+k=\dim(X))\,. \tag{2.12}$$

L'analogue naturel de la Définition 2.2.3 en géométrie algébrique réelle est alors :

Définition 2.3.1. La *conjecture de Hodge entière réelle pour les r-cycles sur X* se réfère à la propriété, dénotée par $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_r(X)$, que l'application classe de cycle réelle (2.12) est surjective.

En d'autres termes, une variété projective lisse X sur $\mathbb{R}$ satisfait la conjecture de Hodge entière réelle pour les r-cycles si chaque $\alpha \in \mathrm{Hdg}_G^{2k}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(k))_0$ peut être écrit comme une somme de classes de cohomologie attachées à des sous-variétés algébriques réelles de dimension r de X.

Comme dans le cas complexe, il s'agit d'une propriété plutôt que d'une conjecture : elle est valable pour certaines variétés mais échoue pour d'autres. De plus, (aussi comme son analogue complexe), $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_r$ est une propriété extrêmement puissante : prédisant précisément quelles classes de cohomologie sont algébriques, elle nous en dit long sur la géométrie de X et de ses sous-variétés. Par exemple, il peut être très difficile de produire des sous-variétés explicites ; si le groupe $\mathrm{Hdg}^{2k}_G(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))_0$ est grand alors $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_r$ prédit que malgré cette difficulté, il y en a beaucoup. Enfin, comme dans la situation complexe, $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_r$ est valable pour toutes les variétés réelles X et les entiers r tant que $r \in \{\dim(X), \dim(X) - 1, 0\}$ d'après les résultats de [Kra91 ; MH98 ; Ham97 ; BW20a], et elle peut échouer pour d'autres valeurs de $r \in \{0, 1, \ldots, \dim(X)\}$.

2.4 Variétés abéliennes et jacobiennes

La classe des variétés abéliennes est l'une des classes de variétés les plus simples pour lesquelles la conjecture de Hodge (cf. conjecture 2.2.2) n'est pas avérée. Naturellement, un certain nombre d'efforts sont consacrés à ces variétés. Comme nous l'avons souligné dans la section 2.2, si une variété satisfait la conjecture de Hodge intégrale, alors elle satisfait la conjecture de Hodge, et il existe plusieurs classes de variétés pour lesquelles la conjecture de Hodge intégrale échoue. La question de savoir si les variétés abéliennes satisfont ou non la conjecture de Hodge intégrale reste ouverte (voir la Question 6.1.1).

Nous allons maintenant expliquer brièvement ce que sont les variétés abéliennes. Nous expliquerons également comment obtenir une variété abélienne à partir d'une courbe algébrique. Cette construction permet d'obtenir une sous-classe importante de la classe de toutes les variétés abéliennes, les variétés dites jacobiennes.

Variétés abéliennes complexes Commençons par définir les variétés abéliennes dans le cadre complexe.

Définition 2.4.1. Un *réseau* dans un espace vectoriel complexe V est un sous-groupe discret Λ de V tel que $\mathbb{R} \cdot \Lambda = V$. Un *tore complexe* est le quotient $T = V/\Lambda$ d'un espace complexe V par un réseau $\Lambda \subset V$. Une *variété abélienne complexe* est une variété algébrique lisse A avec une loi de groupe algébrique $m \colon A \times A \to A$ telle que le groupe de Lie complexe sous-jacent $A(\mathbb{C})$ est un tore complexe $T = V/\Lambda$.

Example 2.4.2. Les tores complexes $T = V/\Lambda$ avec $\dim(V) = 1$ sont les surfaces de Riemann complexes et compactes de genre 1. En tant que telles, elles sont automatiquement algébriques. Les variétés abéliennes associées E sont de dimension 1, et appelées *courbes elliptiques*. Elles admettent un plongement $E \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ comme une courbe plane de degré trois.

Variétés jacobiennes Soit C une courbe projective complexe lisse de genre g ; en d'autres termes, une surface de Riemann de genre g. Soit $H^0(C, \Omega_C)$ l'espace des 1-formes différentielles holomorphes sur $C(\mathbb{C})$, et soit $H^0(C, \Omega_C)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^0(C, \Omega_C), \mathbb{C})$ l'espace vectoriel dual. Il existe un morphisme naturel

$$H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(C, \Omega_C)^\vee,$$
$$\gamma \mapsto \left(\omega \mapsto \int_\gamma \omega\right).$$

Cette application est injective, et le quotient $H^0(C, \Omega_C)^\vee / H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est un tore complexe. En fait, le tore complexe $H^0(C, \Omega_C)^\vee / H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ s'avère être algébrique, et donne donc lieu à une variété abélienne au sens de la Définition 2.4.1.

Définition 2.4.3. La *jacobienne* de C, noté JC, est la variété abélienne complexe JC dont le tore complexe sous-jacent est

$$JC(\mathbb{C}) = H^0(C, \Omega_C)^\vee / H_1(C(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Variétés abéliennes et jacobiennes sur des corps arbitraires Ci-dessus, nous avons introduit la notion de *variété abélienne complexe*, voir la définition 2.4. On peut aussi la définir comme une variété complexe projective lisse A dotée d'une loi de groupe algébrique $A \times A \to A$. Cette dernière définition se généralise facilement à des champs arbitraires. Ainsi, pour un corps k, nous définissons une *variété abelienne sur* k comme une variété lisse, projective et géométriquement irréductible A sur k dotée d'une loi de groupe algébrique $m\colon A \times A \to A$. La raison pour laquelle ces variétés de groupes sont appelées "abéliennes" est qu'il s'avère que, nécessairement, la loi de groupe m est commutative (voir par exemple [Mum08, p. 44, Corollaire 2]). Si k est algébriquement clos, une *polarisation* sur

A est une classe d'équivalence algébrique $[\mathcal{L}]$ d'un faisceau de droites ample sur A, où deux tels faisceaux de droites sont *algébriquement équivalents* si l'on peut déformer l'un en l'autre d'une manière algébrique (voir par exemple [And04, §1.1.1] pour une définition précise). Pour un corps arbitraire k, une *polarisation* sur A est une polarisation $[\mathcal{L}]$ sur la variété abélienne $A \times_k \bar{k}$ qui est invariante sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur l'ensemble des polarisations (voir par exemple [Ser20, Définition 3.5.1] ou [Mil86, §13] pour des définitions équivalentes).

On dénote par $\mathcal{A}_g$ le champ de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g. Pour un corps k, nous laissons $|\mathcal{A}_g(k)|$ désigner l'ensemble des classes d'isomorphismes dans le groupoïde $\mathcal{A}_g(k)$. En d'autres termes :

$$|\mathcal{A}_g(k)| = \{\text{classes d'isomorphisme de variétés abéliennes} \\ \text{principalement polarisées de dimension } g \text{ sur } k\}\,.$$

Une *courbe projective lisse de genre g sur k* est une variété géométriquement irréductible C de dimension 1 sur k, telle que $g(C) := \dim H^0(C, \Omega^1_C) = 1$. Un *diviseur* sur C est une combinaison linéaire entière $\sum_i n_i[p_i]$ de points fermés $p_i \in C$. Il existe une notion naturelle de *degré* d'un tel diviseur, et les classes d'équivalence rationnelle des diviseurs de degré zéro sur C forment un groupe abélien, noté $\mathrm{Pic}^0(C)$. En généralisant la Définition 2.4.3, il existe une variété abélienne naturelle principalement polarisée sur k associée à la courbe C, notée JC et appelée la *jacobienne* de C, dont les k-points rationnels sont en bijection naturelle avec $\mathrm{Pic}^0(C)$. Cette construction donne un morphisme de champs

$$\mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{A}_g, \qquad C \mapsto JC. \tag{2.13}$$

En particulier, si l'on désigne par $|\mathcal{M}_g(k)|$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des courbes projectives lisses de genre g, on obtient une fonction

$$|\mathcal{M}_g(k)| \longrightarrow |\mathcal{A}_g(k)|$$

qui envoie une courbe C à sa jacobienne JC.

Chapitre 3

Projet I. Cohomologie de l'espace de modules des courbes réelles

Ce projet concerne un projet commun avec Emiliano Ambrosi (maître de conférences à l'IRMA, Strasbourg). L'idée centrale est d'étudier la topologie de l'espace de modules $\mathcal{M}_g(\mathbb{R})$ des courbes algébriques réelles de genre g, la comparent à la topologie de l'espace de modules $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ des courbes algébriques complexes de genre g. Plus précisément : on voudrait savoir si l'espace de modules réel $\mathcal{M}_g$ est *maximal*, dans un sens approprié.

Commençons par expliquer les principales idées qui sous-tendent ce projet.

3.1 Théorie de modules

L'un des problèmes centraux de la géométrie algébrique est le problème de la classification. Pouvons-nous classer toutes les variétés algébriques à isomorphisme près ? Cette tâche pourrait sembler énorme et difficile, mais a quand même connu beaucoup de progrès ces dernières décennies. Elle se compose de deux parties :

1. Dans la *partie discrète* on étudie les invariants numériques des variétés X, tels que la dimension, le degré (si $X \subset \mathbb{P}^n$ est une hypersurface), le genre (si X est une courbe), etc.

2. Dans la *partie continue*, on étudie les familles de variétés ayant les mêmes invariants numériques. Souvent, lorsqu'il existe une famille continue d'objets non isomorphes, l'espace des paramètres porte une structure de variété algébrique com-

plexe, appelée *espace de modules*. Ceci est un outil très puissant : toutes les techniques de géométrie algébrique peuvent être appliquées à l'étude de l'espace des paramètres ainsi qu'aux variétés qui définissent un point dans cet espace.

3.2 Modules des courbes

Parmi les objets les plus beaux et les plus fondamentaux de la géométrie algébrique moderne figure $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$, l'espace de module des courbes projectives lisses de genre g. Il s'agit d'un orbifold complexe, dont l'espace topologique sous-jacent est en bijection naturelle avec l'ensemble des classes d'isomorphisme des surfaces de Riemann compactes connexes de genre g. De nombreux travaux ont été réalisés pour comprendre la structure de l'homologie et de la cohomologie de $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$:

(1) $\mathrm{H}_1(\mathcal{M}_g(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = 0$ pour $g \geq 3$, (voir [Pow78 ; Mum67 ; Har83]),

(2) $\mathrm{H}_2(\mathcal{M}_g(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^2$ pour $g \geq 5$, (voir [Har83]),

(3) $\mathrm{H}^i(\mathcal{M}_g(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = 0$ for $i > 4g - 5$, (voir [Har86]),

(4) $\mathrm{H}^{4g-6}(\mathcal{M}_g(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ est non nul pour $g = 3, g = 5$ et $g \geq 7$, (voir [CGP21]).

3.3 Modules des courbes réelles

En revanche, on ne sait presque rien de la cohomologie de l'espace de modules des courbes algébriques réelles de genre g. Ce dernier est l'orbifold réel-analytique $\mathcal{M}_g(\mathbb{R})$ avec l'ensemble sous-jacent (voir aussi la Section 2.4 ci-dessus) :

$$|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})| = \{\text{courbes algébriques réelles projectives lisses } C \text{ de genre } g\} / \text{isomorphisme}.$$

On dote l'ensemble $|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|$ avec sa topologie euclidienne naturelle, voir [GF22a ; GF22b] et comparer [SS89]. De façon similaire, soit $|\mathcal{M}_g(\mathbb{C})|$ l'espace de modules des surfaces de Riemann compacts de genre g. Il y a une flêche naturelle

$$|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})| \longrightarrow |\mathcal{M}_g(\mathbb{C})|$$

qui envoie une courbe réelle C vers la courbe complexe $C_{\mathbb{C}}$ qu'elle induit.

Questions 3.3.1 (Ambrosi–de Gaay Fortman). *Soit $g \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Considérons l'espace de modules $|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|$ des courbes algébriques réelles de genre g.*

(1) Pour un entier positif i, quelle est la dimension de $\mathrm{H}^i(|\mathcal{M}_g(\mathbb{R})|, \mathbb{Z}/2)$?

(2) Comment cette valeur se compare-t-elle à la dimension de $\mathrm{H}^i(|\mathcal{M}_g(\mathbb{C})|, \mathbb{Z}/2)$?

Pour mieux comprendre ces questions, la première chose à faire est de comparer l'anneau de cohomologie de $\mathcal{M}_g(\mathbb{R})$ avec l'anneau de cohomologie de $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$. Pour expliquer cela, rappelons que, si X est une variété algébrique de dimension n sur $\mathbb{R}$, l'inégalité *Smith-Thom* (cf. [Flo52 ; Tho65]) dit que

$$\sum \dim \mathrm{H}^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \sum \dim \mathrm{H}^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2). \tag{3.1}$$

Voir aussi [Man17, Théorème 3.3.6] ou le livre [DIK00]. Une variété réelle X pour laquelle (3.1) est une égalité est appelée une *variété maximale*. Pour les courbes et les surfaces, le problème de la construction de variétés maximales a été largement étudié, et pour certaines classes de variétés (par exemple les surfaces K3), une classification jusqu'à la déformation réelle est même partiellement réalisée ; nous renvoyons le lecteur à [Man17] pour un compte-rendu. Les surfaces quartiques maximales $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ sont classifiées dans [Sil89, Chapitre VIII], voir aussi [Kha72] ; Kharlamov a construit une surface maximale de degré 5 dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ telle que le lieu réel $X(\mathbb{R})$ a 21 composantes connexes ; voir [Kha81] et comparer [KI96].

Pour n et d fixés, parmi toutes les hypersurfaces réelles $X \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{R}}$ de degré d, celles qui sont maximales sont exponentiellement rares, voir [Anc24]. De plus, les méthodes disponibles pour construire des variétés réelles maximales de dimension supérieure sont limitées ; le patchwork combinatoire de Viro pour les hypersurfaces [IV07] est actuellement la méthode la plus puissante.

Récemment, l'étude de la maximalité des espaces de modules sur $\mathbb{R}$ est devenue un problème important, voir par exemple [BS22 ; KR23 ; Fu23]. Ce projet continue dans cette direction, en étudiant la maximalité de $\mathcal{M}_g$. Cependant, comme $\mathcal{M}_g$ est un *champ* algébrique, et non une variété algébrique, nous devrons avoir une notion appropriée de *maximalité pour les champs algébriques* – une notion qui n'existe pas encore – afin de poser la question de la maximalité de $\mathcal{M}_g$. Expliquons cela.

3.4 Smith–Thom pour les champs et maximalité de $\mathcal{M}_g$

De nombreux espaces de modules ne sont pas des vraies variétés algébriques, mais plutôt des *champs algébriques*. La catégorie des champs algébriques contient la catégorie des variétés algébriques, mais elle est plus large ; un champ de modules qui paramétrise certains objets algébriques (comme les courbes de genre fixé, ou les fibrés en droites sur une variété fixé), paramétrise en fait non seulement ces objets, mais aussi leurs automorphismes. Depuis leur première apparition dans l'article monumental [DM69], les champs algébriques ont été un outil indispensable dans la théorie des modules [LMB00 ; FC90 ; Ols08 ; Ale02].

Dans un prochain article, nous généraliserons l'inégalité classique de Smith–Thom (3.1) au cadre des champs algébriques. Le résultat est comme suit.

Theorem 3.4.1 (Ambrosi–de Gaay Fortman)**.** *Pour un champ séparé de Deligne–Mumford X sur $\mathbb{R}$, il existe un faisceau canonique constructible F_X sur $|X(\mathbb{C})|$, compatible avec tirer en arrière, de telle sorte que l'inégalité suivante soit vraie :*

$$\sum \dim \mathrm{H}^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \sum \dim \mathrm{H}^i(X(\mathbb{C}), F_X). \tag{3.2}$$

Le faisceau F_X du Théorème 3.4.1 est très explicite. Par conséquent, cela fait sens d'introduire :

Définition 3.4.2. Soit X un champ de Deligne–Mumford séparée sur $\mathbb{R}$. On dit que X est *maximal* si l'inégalité (3.2) est une égalité.

Cela nous amène à la question suivante, qui était à l'origine la principale motivation de ce projet :

Question 3.4.3. *Soit $g \geq 2$ un entier et considérons le champ de modules $\mathcal{M}_g$ des courbes lisses de genre g sur $\mathbb{R}$. Le champ de modules $\mathcal{M}_g$, est-il maximal ?*

Après avoir rédigé l'article dans lequel nous prouvons le Théorème 3.4.1, notre objectif est de continuer à collaborer, et de travailler sur la Question 3.4.3.

Chapitre 4

Projet II. La conjecture de Tate entière sur les corps finis

Dans ce chapitre, nous abordons deux questions :

(1) La conjecture de Tate entière, tient-elle pour les solides abéliens sur les corps finis ? (Voir la question 4.2.1 ci-dessous).

(2) Pour une variété projective lisse X de dimension trois sur un corps fini, avons-nous $\mathrm{H}^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$? (Voir Question 4.4.1 ci-dessous.)

La première question est due à Wittenberg (communication privée). La deuxième question est due à Colliot-Thélène et Kahn, cf. [CTK13, Question 5.3]. Le but de ce projet est de (i) donner une réponse positive à la Question (1) ci-dessus, et (ii) fournir un candidat pour une réponse éventuellement négative à la Question (2).

4.1 La conjecture de Tate sur les corps finis

Dans la Section 2.2, nous avons discuté de la célèbre conjecture de Hodge. Cette conjecture a un analogue en caractéristique positive. Elle se présente comme suit. Soit p un nombre premier.

Conjecture 4.1.1 (La conjecture de Tate sur les corps finis)**.** *Pour toute variété projective lisse X sur $\mathbb{F}_p$, chaque entier r avec $0 \leq r \leq \dim(X)$, et tout élément*

$$\alpha \in \mathrm{H}^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(i))$$

invariant sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$*, ils existent des sous-variétés* $Y_i \subset X$ *de dimension* r *et des éléments* $n_i \in \mathbb{Q}_\ell$*, tels que*

$$\alpha = \sum n_i[Y_i] \in \mathrm{H}^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(i)) \qquad (r + i = \dim(X))$$

En d'autres termes, la conjecture prédit que l'application classe de cycle

$$\mathcal{Z}_r(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)} \qquad (r + i = \dim(X))$$

est surjective.

De nombreux travaux ont été effectués pour établir la Conjecture 4.1.1 pour de nombreux tuples (X, r) constitués d'une variété projective lisse X sur $\mathbb{F}_p$ et d'un entier r avec $0 \leq r \leq \dim(X)$. Voir par exemple l'étude [Tot17]. Il reste un problème ouvert à savoir si la version entière de la Conjecture 4.1.1, qui est plus forte, peut échouer (voir [CTS10, Remark 2.2.3]). Nous examinons ce problème, en nous concentrant sur le cas des variétés abéliennes de dimension trois.

4.2 Tate entière pour les solides abéliens

Soit X une variété projective lisse sur un corps fini $\mathbb{F}_p$. Considérons des entiers positifs $i, r \leq \dim(X)$ tels que $r + i = \dim(X)$. L'application classe de cycle $\mathcal{Z}_r(X) \to \mathrm{H}^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(i))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$ se factorise de la manière suivante :

$$\mathcal{Z}_r(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^{2i}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(i)) \longrightarrow \mathrm{H}^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(i))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}. \tag{4.1}$$

Nous nous intéresserons au cas où $X = A$ est une variété abélienne sur $\mathbb{F}_p$. Plus précisément, nous considérons la question suivante :

Question 4.2.1 (Wittenberg, communication privée)**.** *Soit* A *une variété abélienne de dimension trois sur* $\mathbb{F}_p$*. Soit* $\alpha \in \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ *une classe telle que* $\sigma(\alpha) = \alpha$ *pour tout* $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$*. Est-ce que* α *s'écrit comme une combinaison linéaire*

$$\alpha = \sum n_i[C_i] \in \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)} \qquad (n_i \in \mathbb{Z}_\ell)$$

de classes des courbes $C_i \subset A$ *dans* A *sur* $\mathbb{F}_p$ *?*

En d'autres termes, il s'agit de savoir si l'application class de cycle

$$\mathscr{Z}_1(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)} \tag{4.2}$$

est surjective ou non.

Le but de ce projet est de prouver la

Conjecture 4.2.2 (de Gaay Fortman)**.** *Soient $p \neq \ell$ des nombres premiers. Soit (A, θ) un solide abélien principalement polarisé sur $\mathbb{F}_p$. Alors l'application classe de cycle*

$$cl_A \colon \mathscr{Z}_1(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))^G \qquad (G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)) \tag{4.3}$$

est surjective.

4.3 Stratégie du projet

Pour attaquer la Conjecture 4.2.2, le point de départ est comme suit.

Theorem 4.3.1 (Beckmann–de Gaay Fortman)**.** *Soit (A, θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g sur $\mathbb{F}_p$ telle que la classe minimale*

$$\gamma_{\min} := \theta^{g-1}/(g-1)! \in \mathrm{H}^{2g-2}_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(g-1))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$$

est dans l'image de l'application classe de cycle

$$cl_A \colon \mathscr{Z}_1(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \mathrm{H}^{2g-2}_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(g-1))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}.$$

Alors l'application cl_A est surjective.

Démonstration. Cela découle de [BGF23, Proposition 3.11] et de la surjectivité de l'application $\mathscr{Z}^1(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(1))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$ (voir [Tat66 ; Tat94]). □

D'après le Théorème 4.3.1, la Conjecture 4.2.2 se réduit à la question de savoir si, pour $p > 2$ et $\ell = 2$, $\gamma_{\min} = \theta^2/2 \in \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est dans l'image de cl_A pour tout solide abélien principalement polarisé (A, θ) sur $\mathbb{F}_p$.

On considère ensuite le résultat suivant par Oort et Ueno. Pour une courbe projective lisse géométriquement connexe C sur un corps k, on note $JC = \mathrm{Pic}^0(C)$, la variété jacobienne de C, et on note θ_{JC} la polarisation principale canonique de JC (voir la Section 2.4). Une variété abélienne polarisée sur un corps est dite *géométriquement indécomposable* si son changement de base sur la clôture algébrique n'est pas isomorphe (comme variété abélienne polarisée) à un produit de sous-variétés abéliennes polarisées non triviales.

Theorem 4.3.2 (Oort–Ueno)**.** *Soit* (A, θ_A) *un solide abélien géométriquement indécomposable principalement polarisé solide sur* $\mathbb{F}_p$*. Il existe une courbe* $C/\mathbb{F}_p$ *telle que* $(A_{\mathbb{F}_{p^2}}, \theta_A) \cong (JC_{\mathbb{F}_{p^2}}, \theta_{JC})$ *sur* $\mathbb{F}_{p^2}$*. De plus, il existe un homomorphisme* $\varepsilon\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \to \{\pm 1\}$ *tel que* (A, θ) *soit isomorphe au* ε*-twist de* (JC, θ_{JC})*.*

Démonstration. Voir [OU73] ou [Ser20, Theorem 4.2.1] (et comparer [Ser20, Corollary 2.5.11]). $\square$

Nous en concluons que la façon la plus naturelle d'aborder la Conjecture 4.2.2 est de passer par le cas particulier suivant.

Conjecture 4.3.3. *Soit* $p > 2$ *un nombre premier. Soit* C *une courbe projective lisse non-hyperelliptique de genre* 3 *sur* $\mathbb{F}_p$ *telle que* JC *est géométriquement indécomposable. Soit* (A, θ) *l'unique twist quadratique non-trivial de* JC*. Alors la classe* $\gamma_{\min} \in \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_2(2))$ *est algébrique, c.a.d., dans l'image de* (4.3)*.*

Car en effet : il se trouve que les deux conjectures sont équivalentes :

Proposition 4.3.4. *La Conjecture 4.3.3 implique la Conjecture 4.2.2.*

Esquisse de démonstration. Soit A un solide abélien principalement polarisé arbitraire sur $\mathbb{F}_p$. En supposant la Conjecture 4.3.3, montrons que cl_A est surjective. Par le Théorème 4.3.1, il suffit pour cela de montrer que

$$\gamma_{\min} = \theta^2/2 \in \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A_{\mathbb{F}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est algébrique, c.a.d., donnée par un cycle algébrique sur $\mathbb{F}_p$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. Comme θ^2 est algébrique et que la multiplication par 2 sur $\mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A_{\mathbb{F}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est un isomorphisme pour $\ell > 2$, $\gamma_{\min}$ est algébrique pour $\ell > 2$. On peut donc supposer que $\ell = 2$ et donc $p > 2$.

Si A est la jacobienne JC d'une courbe lisse de genre trois, alors $\gamma_{\min}$ est algébrique. En effet, pour le plongement $C \hookrightarrow \mathrm{Pic}^0(C) = JC, x \mapsto [x] - [p]$, défini par un point rationnel p de C, on a :

$$[C] = \gamma_{\min} = \theta^2/2 \in \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Si $A = JC \times E$ pour une courbe C de genre 2 et une courbe elliptique E sur $\mathbb{F}_p$, ou si $A = E_1 \times E_2 \times E_3$ pour des courbes elliptiques E_i sur $\mathbb{F}_p$ $(i = 1, 2, 3)$, alors $\gamma_{\min}$ est algébrique pour des raisons similaires. On peut donc supposer que (A, θ) est indécomposable en tant que variété abélienne principalement polarisée. Si (A, θ) est géométriquement indécomposable, alors soit $A = JC$ est une jacobienne et $\gamma_{\min}$ est algébrique (par ce que nous avons déjà montré), soit, au vu du Théorème 4.3.2, A est un twist quadratique de la jacobienne d'une courbe sur $\mathbb{F}_p$. Dans ce dernier cas, $\gamma_{\min}$ est algébrique par hypothèse.

On peut donc supposer que (A, θ) se décompose sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ comme un produit $\overline{A} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$ de variétés abéliennes principalement polarisées non triviales $\overline{A}_i$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il existe donc une extension finie $\mathbb{F}_{p^n} \supset \mathbb{F}_p$ de degré $n > 0$ telle que A se décompose en un produit $A' = A'_1 \times A'_2$ de variétés abéliennes non triviales sur $\mathbb{F}_{p^n}$. Comme l'algébricité de $\gamma_{\min}$ peut être vérifiée après le passage à une extension de corps de degré impair, on peut supposer que $n = 2^a$ est une puissance de 2. On peut aussi supposer que les A'_i sont indécomposables en tant que variétés abéliennes principalement polarisées sur $\mathbb{F}_{p^n}$, et donc que $A'_1 = B'$ est une surface abélienne principalement polarisée et $A'_2 = E'$ une courbe elliptique sur $\mathbb{F}_{p^n}$. Comme $n = 2^a$, cette décomposition est préservée par l'action $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, d'où $A = B \times E$ sur $\mathbb{F}_p$ par descente, pour une surface abélienne polarisée principale B et une courbe elliptique E sur $\mathbb{F}_p$; comme ce cas a déjà été traité, ceci achève la preuve de la proposition. □

Pour prouver la Conjecture 4.3.3, nous avons en tête la stratégie suivante, qui nous a été suggérée par Olivier Wittenberg. Comme nous l'avons vu plus haut, pour prouver l'algébricité de $\gamma_{\min} = \theta^2/2$ pour un solide abélien principalement polarisé A sur $\mathbb{F}_p$, il suffit de prouver l'algébricité de $\gamma_{\min}$ après passage à une extension de corps de degré impair. On peut maintenant se poser la question suivante.

Question 4.3.5 (Wittenberg)**.** *Soit (A, θ) un solide abélien principalement polarisé sur $\mathbb{F}_p$. Existe-t-il un entier $N > 0$ tel que pour chaque $n \geq N$, la variété abélienne $A_{\mathbb{F}_{p^n}}$ est isogène à une jacobienne JC, par une isogénie de degré impair ?*

Notons qu'il n'est pas vrai que tous les solides abéliens principalement polarisés sur $\mathbb{F}_p$ sont isogènes à une jacobienne. En d'autres termes, si un tel entier N existe, alors $N \neq 1$ en général.

Enfin, remarquons qu'une réponse positive à la Question 4.3.5 pour toute twist quadratique (A, θ) d'une jacobienne indécomposable de dimension 3 suffirait à prouver la Conjecture 4.3.3 – et donc la Conjecture 4.2.2 (voir Proposition 4.3.4). En effet, s'il existe une isogénie $A \to JC$ de degré impair, alors par le Théorème 4.3.1, un multiple impair de la classe $\theta^2/2$ sur A est algébrique. Comme deux fois cette classe est algébrique, il s'ensuit que $\theta^2/2$ est algébrique, ce qui prouve la Conjecture 4.3.3 (et donc la Conjecture 4.2.2).

4.4 Question liée : cohomologie nonramifiée

La deuxième question étudiée dans le cadre de ce projet est la suivante :

Question 4.4.1 (Colliot-Thélène–Kahn [CTK13])**.** *Pour A une variété projective et lisse de dimension 3 sur $\mathbb{F}_p$, a-t-on $\mathrm{H}^3_{\mathrm{nr}}(A_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$?*

Supposons que $X = A$ est un solide abélien sur $\mathbb{F}_p$. Le groupe $\mathrm{H}^3_{\mathrm{nr}}(A_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ peut alors être interprété comme suit. Considérons l'application classe de cycle

$$\mathcal{Z}_1(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}_\ell(2)). \tag{4.4}$$

Par [Sou84], on sait que l'application induite

$$\mathcal{Z}_1(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A, \mathbb{Q}_\ell(2))$$

est surjective (voir [Sou84, Théorème 4]). Le conoyau de (4.4) est donc fini. Par conséquent, par [CTK13, Théorème 2.2], on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Coker}\left(\mathcal{Z}_1(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}_\ell(2))\right) = \mathrm{H}^3_{\mathrm{nr}}(A_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)),$$

où on utilise la finitude du conoyau de (4.4) (comme expliqué ci-dessus), ainsi que la finitude de $\mathrm{H}^3_{\mathrm{nr}}(A_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$. À son tour, la finitude de $\mathrm{H}^3_{\mathrm{nr}}(A_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ découle de [CTK13, Propriété 3.14.(vi)] et de [Kah03, Corollaire 3.10] (comparer aussi [CTK13, Théorème 3.18]).

En conclusion, dans le cas des solides abéliens sur $\mathbb{F}_p$, la Question 4.4.1 devient :

Question 4.4.2 (Question 4.4.1 pour les solides abéliens)**.** *Pour A un solide abélien de dimension 3 sur $\mathbb{F}_p$, l'application classe de cycle* (4.4)*, est-elle surjective ?*

Enfin, rappelons la

Conjecture 4.4.3 (Colliot-Thélène–Scavia)**.** *Soit X une variété projective lisse de dimension d sur $\mathbb{F}_p$. Alors l'application $\mathcal{Z}_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \to \mathrm{H}^{2d-2}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(d-1))$ (voir* (4.1)*) est surjective.*

Nous remarquons que la Conjecture 4.4.3 implique une réponse positive à la Question 4.4.2. Plus précisément, comme le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^4_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}_\ell(2)) \longrightarrow \mathrm{H}^4_{tnt}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Z}_\ell(2))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}$$

est surjective, la surjectivité de (4.4) implique la surjectivité de (4.2). Il se pourrait que la Question 4.4.2 ait une réponse négative - à savoir, on se demande :

Question 4.4.4 (de Gaay Fortman)**.** *Soit p un nombre premier, n un entier > 0 et $\ell \neq p$ un nombre premier ; les trois choisis de manière appropriée. Soit E la courbe elliptique de CM par $\mathbb{Z}[i]$ sur $\mathbb{F}_{p^n}$; soit $A = E^3$. Construisons un élément*

$$\omega \in \mathrm{H}^1(G, \mathrm{H}^3_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$$

de façon similaire à la stratégie employée dans [GF24, Proposition 9.4] ; en particulier, $\omega \neq 0$. Est-ce que ω est dans l'image de l'application d'Abel–Jacobi

$$\mathrm{AJ}\colon \mathcal{Z}_1(A)_{\mathrm{hom}} \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^1(G, \mathrm{H}^3_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Z}_\ell(2))), \quad G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \quad ? \tag{4.5}$$

Notons que pour le solide principalement polarisé $A = E^3$ sur $\mathbb{F}_{p^n}$ dans la Question 4.4.4, l'application (4.3) est surjective. Notons aussi que si (4.5) n'est pas surjective, les réponses aux Questions 4.4.1 et 4.4.2 seraient *non.*

Chapitre 5

Projet III. Variétés abéliennes isogènes à des jacobiennes sur $\overline{\mathbb{Q}}$

In this section, I describe my second research proposal, whose goal is to generalize Tsimerman's theorem [Tsi12] – saying there exists abelian varieties A over the field of algebraic numbers $\overline{\mathbb{Q}}$ which are not isogenous to a Jacobian – to prove that there are abelian varieties A over $\overline{\mathbb{Q}}$ none of whose powers A^n with $n \geq 1$, is isogenous to a Jacobian. We refer the reader to Section 2.4 above for the notions of *abelian variety* and *Jacobian variety* over an arbitrary field.

5.1 Abelian varieties isogenous to a Jacobian

Let k be a field. One would like to understand the abelian varieties A that are, in some sense, 'close' to being the Jacobian JC of a smooth projective curve C over k (see Section 2.4 for definitions). To make this more precise, we define, for abelian varieties A and B over k, an *isogeny*

$$\phi\colon A \to B$$

as a surjective homomorphism of algebraic groups with finite kernel. For instance, if $\Lambda_i \subset \mathbb{C}^n$ is a lattice for $i = 1, 2$ such that the tori $\mathbb{C}^n/\Lambda_i$ are algebraic, and if

$\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ as a subgroup of finite index, then the canonical map

$$\mathbb{C}^n/\Lambda_1 \longrightarrow \mathbb{C}^n/\Lambda_2$$

is an isogeny of complex abelian varieties. As Jacobian varieties constitute such fundamental examples of abelian varieties, one would like to understand how large the class is that one obtains by considering abelian varieties A for which there exists a curve C together with an isogeny $\phi \colon A \to JC$. In other words :

Which abelian varieties A are isogenous to a Jacobian ?

Consider the map of moduli spaces (2.13) :

$$\mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{A}_g, \qquad C \mapsto JC,$$

that sends a curve to its Jacobian. As $\dim \mathcal{M}_g = \dim \mathcal{A}_g$ for $g \leq 3$, every principally polarized abelian variety of dimension ≤ 3 over an algebraically closed field is isomorphic to a product of Jacobians. For $g \geq 4$ this is no longer true, as

$$\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3 < g(g+1)/2 = \dim \mathcal{A}_g$$

in that range.

Over the complex numbers, the analytic topology can be used to show that not every abelian variety is isogenous to a Jacobian, in the following way. Consider the moduli space $\mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ of principally polarized abelian varieties of dimension g over $\mathbb{C}$ (see Section 2.4). It is readily shown that the locus of abelian varieties isogenous to a Jacobian is a countable union of properly contained closed analytic subvarieties $Z \subsetneq \mathcal{A}_g(\mathbb{C})$. Hence by Baire's category heorem, this locus can never equal the entire moduli space. This implies that, over the complex numbers, for each $g \geq 4$, there are principally polarized abelian varieties not isogenous to a Jacobian ; in fact the very general complex abelian variety satisfies this property.

Over countable fields, however, this line of argument fails. It remained an open question, due to Katz and Oort (see [CO12, Question 1.1]) whether there exist abelian varieties over $\overline{\mathbb{Q}}$ not isogenous to any Jacobian – until Tsimerman proved this, see [Tsi12] (and compare [MZ20]).

Theorem 5.1.1 (Tsimerman)**.** *Let g be an integer > 3. There exists an abelian variety A of dimension g over $\overline{\mathbb{Q}}$ that is not isogenous to any Jacobian.*

5.2 Powers of abelian varieties isogenous to a Jacobian

One of the corollaries of the main result our joint paper [GFS24] with Stefan Schreieder, is as follows.

Theorem 5.2.1 (de Gaay Fortman–Schreieder)**.** *For each integer $g \geq 4$, there exist principally polarized abelian varieties A of dimension g over $\mathbb{C}$, such that A^k is* not *isogenous to any product of Jacobians, for each integer $k \geq 1$.*

In fact, the locus of abelian varieties A having the property that A^k is isogenous to a product of Jacobians constitutes a meagre subset of the space $\mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ of principally polarized abelian varieties of dimension g over $\mathbb{C}$.

In light of these results, see Theorems 5.1.1 and 5.2.1 above, it is natural to ask whether this theorem has an analogue over $\overline{\mathbb{Q}}$.

Question 5.2.2. *Are there abelian varieties A over $\overline{\mathbb{Q}}$ such that A^k is not isogenous to a Jacobian, for any integer $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$?*

The goal of this project is to answer this question in the affirmative.

Chapitre 6

Projet IV. La conjecture de Hodge entière

The goal of this research project is to study :

6.1 1-cycles on complex abelian varieties

En général, on ne connait pas la réponse à la question suivante.

Question 6.1.1. *Existent-ils des variétés abéliennes complexes qui échouent à la conjecture de Hodge entière ?*

Pour étudier cette question, il est naturel d'étudier la *classe minimale* d'une variété abélienne principalement polarisée (A, θ) : c'est la classe

$$\gamma_{\min} = \theta^{g-1}/(g-1)\,! \in \mathrm{Hdg}^{2g-2}(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

La conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles sur A prédit que $\gamma_{\min}$ est algébrique, c'est-à-dire la classe de cohomologie attachée à une combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de courbes $C_i \subset A$.

Lorsque $A = JC = \mathrm{Pic}^0(C)$ est la jacobienne d'une courbe projective lisse C de genre g sur $\mathbb{C}$, alors tout point $p \in C(\mathbb{C})$ définit un plongement

$$C \hookrightarrow JC, \quad x \mapsto [x] - [p],$$

et on a

$$[C] = \theta^{g-1}/(g-1)\,! \in \mathrm{H}^{2g-2}(JC(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

par la formule de Poincaré [Arb+85, §I.5]. Pour $g \leq 3$, toute variété abélienne principalement polarisée (A, θ) est isomorphe à un produit de variétés jacobiennes, d'où l'on peut déduire que la classe minimale $\gamma_{\min} = \theta^{g-1}/(g-1)!$ est algébrique pour de telles variétés abéliennes. Pour $g \geq 4$, cependant, l'algébricité de $\gamma_{\min}$ reste un problème ouvert important.

Grabowski a prouvé dans sa thèse [Gra04] que la conjecture de Hodge entière vaut pour les solides abéliens complexes (c'est-à-dire les variétés abéliennes complexes de dimension 3). Depuis lors, il n'y a pas eu beaucoup de progrès sur la conjecture de Hodge entière pour les variétés abéliennes, jusqu'à ce que nous prouvions dans [BGF23] le résultat suivant :

Theorem 6.1.2 (Beckmann–de Gaay Fortman)**.** *Soit (A, θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g. Si la classe minimale $\gamma_{\min} \in \mathrm{H}^{2g-2}(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est algébrique, alors A satisfait la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles.*

Corollary 6.1.3 (Beckmann–de Gaay Fortman)**.** *La conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles vaut pour tout produit*

$$A = J(C_1) \times \cdots \times J(C_n)$$

de jacobiennes des courbes projectives lisses C_i sur $\mathbb{C}$.

D'après le Théorème 6.1.2, la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles sur les variétés abéliennes complexes principalement polarisées est équivalente à l'algébricité de la classe minimale $\gamma_{\min}$ de toute variété abélienne complexe (A, θ). On est naturellement amené à se demander :

Question 6.1.4. *Soit (A, θ) une variété abélienne complexe principalement polarisée très générale de dimension $g \geq 4$. Considérons la classe minimale*

$$\gamma_{\min} \in \mathrm{Hdg}^{2g-2}(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Est-elle algébrique ?

6.2 Stratégie du projet

Consider Theorem 6.1.2 above ; it says that the integral Hodge conjecture for one-cycles holds on products of Jacobians of curves. Let A be any abelian variety. Then by Theorem 6.1.2 above, if there exists an abelian variety B such that $A \times B$ is isomorphic (as unpolarized abelian varieties) to a product $\prod_i JC_i$ of Jacobians JC_i of smooth projective curves C_i (one says that *"A is a direct summand in a product of Jacobians"*), then A satisfies the integral Hodge conjecture for one-cycles. After our result, Voisin has proved a converse to this latter statement [Voi23].

Combining both statements yields the following result.

Theorem 6.2.1 (Beckmann–De Gaay Fortman, Voisin)**.** *Let A be a principally polarized complex abelian variety. Then A satisfies the integral Hodge conjecture for 1-cycles if and only A is a direct summand in a product of Jacobians.*

Démonstration. See [BGF23] and [Voi23]. □

In a recent project with Stefan Schreieder, we prove that no non-trivial power of a very general hyperelliptic Jacobian of dimension $g \geq 4$ is isogenous to the Jacobian of any curve (see [GFS24, Theorem 1.1]). As a corollary, we show in the same paper that if A is a very general principally polarized abelian variety of dimension $g \geq 4$, then there are no simple abelian varieties $B_1, \dots, B_n$ such that $A \times B$ for $B \coloneqq \prod_i B_i$ is isomorphic to a product of Jacobians of curves (cf. [GFS24, Corollary 1.6]). This is particularly interesting because, in view of Theorem 6.2.1, it gives some evidence towards the failure of the integral Hodge conjecture for one-cycles on abelian varieties A. Namely, the geometry of any abelian variety B such that $A \times B$ is isomorphic to a product of Jacobians, is restricted.

The goal of this research project is to proceed in this same direction, aiming to consider a very general principally polarized abelian variety A of dimension $g \geq 4$, and put further restrictions on the geometry of any abelian varieties B that satisfies the property that $A \times B$ is isomorphic to a product of Jacobians.

Chapitre 7

Projet V. La conjecture de Hodge entière réelle

Le deuxième objectif de ce projet de recherche est l'étude de la conjecture de Hodge entière réelle une classe riche de variétés réelles. Pour expliquer cela, commençons à considérer une variété projective lisse X sur $\mathbb{R}$ et un entier $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Quel devrait être le bon ensemble de conditions sur les classes dans $\mathrm{H}^{2k}_G(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(k))$ à considérer, pour que toutes les classes algébriques satisfassent ces conditions, et que dans situations favorables, ces conditions sont-elles suffisantes pour distinguer les classes algébriques des classes non algébriques ? Benoist et Wittenberg ont répondu à cette question dans [BW20a], où ils formulent la *conjecture de Hodge entière réelle* ; voir la Définition 2.3.1 ci-dessus. Rappelons que il s'agit d'une propriété plutôt qu'une conjecture. Le but de ce projet sera de prouver cette propriété pour les solides de Calabi–Yau et les solides uniréglés sur les nombres réels.

7.1 Résultats connus et questions ouvertes

Quelles classes de variétés n-dimensionnelles X et quels entiers $r \leq n$ sont tels que $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_r$ vaut pour X ? Pour toutes les variétés de toute dimension n, pour $r = 0$ et $r = n$, la propriété est satisfaite. Krasnov a prouvé un analogue équivariant du $(1,1)$-théorème de Lefschetz, notant que la suite exacte courte exponentielle sur $X(\mathbb{C})$ est G-équivariante [Kra91 ; MH98 ; Ham97]. Ainsi, $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_{n-1}$ vaut pour tout X. Pour $r \in \{1, \ldots, n-2\}$, la propriété $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_r$ peut échouer. Cependant, on a :

Theorem 7.1.1 (Voisin–Totaro)**.** *Soit X une variété complexe, projective et lisse. Supposons que* $\dim(X) = 3$ *et X est une variété uniréglée ou de Calabi–Yau. Alors X satisfait à la conjecture de Hodge entière.*

Démonstration. Voir [Voi06] et [Tot21]. □

Conditionnellement à la conjecture de Tate pour les surfaces sur les corps finis, Voisin a également démontré la conjecture de Hodge entière pour les 1-cycles sur les variétés rationnellement connexes de toute dimension, voir [Voi13]. L'analogue réel de ces résultat reste un problème ouvert. Plus précisément, on voudrait connaître la réponse à la question suivante (voir [BW20a, Question 2.16]) :

Question 7.1.2 (Benoist–Wittenberg)**.** *Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{R}$. Supposons que X est soit un solide uniréglés, soit un solide de Calabi–Yau, soit une variété rationnellement connexes. Alors est-ce que X satisfait $\mathbb{R}IHC_1$?*

Benoist et Wittenberg n'ont que des résultats partiels dans le cas rationnellement connexe, voir [BW20b]. En particulier, il est important de se demander qu'est-ce qui se passe pour les variétés de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ qui sont *Calabi–Yau.* Le but de ce projet sera to make progress on Question 7.1.2. Dans [GF24], j'ai fait un premier pas, en démontrant :

Theorem 7.1.3 (de Gaay Fortman, cf. [GF24])**.** *Soit A une variété abélienne de dimension* 3 *sur $\mathbb{R}$. Alors les classes de Hodge G-invariants* $\mathrm{Hdg}^{2\bullet}(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(2))^G$ *sur A sont algébriques, c.a.d. donnés par des cycles algébriques réels. De plus, A satisfait à la conjecture de Hodge entière réelle dans chacun des cas suivants :*

(1) Le lieu réel $A(\mathbb{R})$ est connexe.

(2) Il existe un isomorphisme $A \cong B \times E$ avec le produit d'une surface abélienne B et d'une courbe elliptique E de lieu réel $E(\mathbb{R})$ connexe.

Démonstration. Voir [GF24]. □

7.2 Strategie du projet

La première étape de ce projet sera d'étendre le résultat du Théorème 7.1.3 aux solides de Calabi–Yau sur $\mathbb{R}$ arbitraires. Il est naturel d'essayer d'adapter la stratégie de Voisin sur les nombres réels. Ce qu'elle prouve est le suivant. Supposons que $\mathrm{H}^2(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}}) = 0$. Soit $S \subset X_{\mathbb{C}}$ une surface lisse obtenue comme section d'un diviseur suffisamment ample sur $X_{\mathbb{C}}$. Le schéma de Hilbert $\mathcal{H}$ des déformations de S dans $X_{\mathbb{C}}$ est lisse autour de $[S] \in \mathcal{H}$; on obtient une famille de déformations $\mathscr{S} \to U \subset \mathcal{H}$ avec U lisse. Soit $0 \in U(\mathbb{C})$ correspondant à S, et considérons l'application de Kodaira-Spencer $\rho : T_0U \to \mathrm{H}^1(S, T_S)$. Supposons qu'il existe un élément $\lambda \in \mathrm{H}^1(S, \Omega^1_S)$ tel que la composition

$$T_0U \to \mathrm{H}^1(S, T_S) \xrightarrow{\cup\lambda} \mathrm{H}^2(S, \Omega^1_S \otimes T_S) \to \mathrm{H}^2(S, \mathcal{O}_S) \tag{7.1}$$

est surjectif. Alors toute classe $\alpha \in \mathrm{H}^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est algébrique.

Le critère ci-dessus porte le nom de *critère de Green*. Prouvé à l'origine par Green dans l'appendice de [CHM88], il peut être appliqué dans de nombreuses situations pour prouver la densité des lieux de Noether-Lefschetz. Bien que facile à énoncer, il est souvent difficile à vérifier, comme c'est le cas pour [Voi06] : la partie difficile de la preuve de Voisin consiste en effet à vérifier le critère, ce qu'elle fait en dégénérant la surface S en une surface de nombreux nœuds. Sur les nombres réels, un critère analogue existe, voir [Ben18, §1]. Il porte le nom *Critère de Green sur* $\mathbb{R}$. En répétant l'argument ci-dessus, on obtient une famille $\mathscr{S} \to U$ de surfaces lisses dans X définie sur $\mathbb{R}$, telle que $S = \mathscr{S}_0 \subset X$ est une section d'un suffisamment ample diviseur de X. Comme dans le cas de [Voi06 ; Tot21], il n'est pas difficile de montrer que le critère de Green sur $\mathbb{R}$ implique $\mathbb{R}\mathrm{IHC}_1$ pour X. On peut alors essayer d'adapter sur $\mathbb{R}$ la preuve de Voisin de la satisfaction du critère complexe.

J'ai prouvé dans le [GF22b, Théorème 1.2] qu'il existe un analogue naturel du critère de Green pour une famille de variétés abéliennes $\psi : \mathcal{A} \to B$, et que ce critère est *le même critère* sur $\mathbb{R}$ que sur $\mathbb{C}$. Le critère prédit la densité du sous-ensemble $R_k \subset B(\mathbb{R})$ ainsi que du sous-ensemble $S_k \subset B(\mathbb{C})$ constitué des $t \in B(\mathbb{R})$ (resp. $t \in B(\mathbb{C})$) tels que $\mathcal{A}_t = \psi^{-1}(t)$ contient une sous-variété abélienne réelle (resp. complexe) de dimension k. Cette relation étonnamment simple entre le critère de Green complexe et son analogue réel pour les familles de variétés abéliennes soulève l'espoir que le critère de Green pour les courbes sur les surfaces sur des solides réels de Calabi–Yau puisse être vérifié d'une manière ou d'une autre.

Chapitre 8

Bibliographie

[AB84] Michal Atiyah et Raoul Bott. “The moment map and equivariant cohomology”. In : *Topology* 23.1 (1984), p. 1-28.

[AH62] Michael Atiyah et Friedrich Hirzebruch. “Analytic cycles on complex manifolds”. In : *Topology* 1 (1962), p. 25-45.

[Ale02] Valery Alexeev. “Complete moduli in the presence of semiabelian group action”. In : *Annals of Mathematics. Second Series* 155.3 (2002), p. 611-708.

[Anc24] Michele Ancona. “Exponential rarefaction of maximal real algebraic hypersurfaces”. In : *Journal of the European Mathematical Society* (2024).

[And04] Yves André. *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*. T. 17. Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]. Société Mathématique de France, Paris, 2004, p. xii+261. isbn : 2-85629-164-3.

[Arb+85] Enrico Arbarello et al. *Geometry of Algebraic Curves. Volume I*. Springer-Verlag, 1985.

[Ben18] Olivier Benoist. “Sums of three squares and Noether-Lefschetz loci”. In : *Compositio Mathematica* 154 (2018).

[BGF23] Thorsten Beckmann et Olivier de Gaay Fortman. “Integral Fourier transforms and the integral Hodge conjecture for one-cycles on abelian varieties”. In : *Compositio Mathematica* 159.6 (2023), p. 1188-1213.

[BH61] Armand BOREL et André HAEFLIGER. “La classe d’homologie fondamentale d’un espace analytique”. In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 89 (1961).

[BO20] Olivier BENOIST et John Christian OTTEM. “Failure of the integral Hodge conjecture for threefolds of Kodaira dimension zero”. In : *Commentarii Mathematici Helvetici* 95.1 (2020), p. 27-35.

[BS22] Erwan BRUGALLÉ et Florent SCHAFFHAUSER. “Maximality of moduli spaces of vector bundles on curves”. In : *Épijournal Géom. Algébrique* 6 (2022), Art. 24, 15.

[BW20a] Olivier BENOIST et Olivier WITTENBERG. “On the integral Hodge conjecture for real varieties, I”. In : *Inventiones Mathematicae* 222.1 (2020), p. 1-77.

[BW20b] Olivier BENOIST et Olivier WITTENBERG. “On the integral Hodge conjecture for real varieties, II”. In : *Journal de l’École polytechnique* 7 (2020), p. 373-429.

[CGP21] Melody CHAN, Søren GALATIUS et Sam PAYNE. “Tropical curves, graph complexes, and top weight cohomology of $\mathcal{M}_g$”. In : *J. Amer. Math. Soc.* 34.2 (2021), p. 565-594.

[CHM88] Ciro CILIBERTO, Joe HARRIS et Rick MIRANDA. “General Components of the Noether-Lefschetz Locus and their Density in the Space of all Surfaces”. In : *Mathematische Annalen* 282 (1988).

[CO12] Ching-Li CHAI et Frans OORT. “Abelian varieties isogenous to a Jacobian”. In : *Ann. of Math. (2)* 176.1 (2012), p. 589-635.

[CTK13] Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE et Bruno KAHN. “Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié pour les variétés sur les corps finis”. In : *J. K-Theory* 11.1 (2013), p. 1-53.

[CTS10] Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE et Tamás SZAMUELY. “Autour de la conjecture de Tate à coefficients $\mathbf{Z}_\ell$ pour les variétés sur les corps finis”. In : *The geometry of algebraic cycles*. T. 9. Clay Math. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, p. 83-98.

[CTV12] Jean-Louis Colliot-Thélène et Claire Voisin. “Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière”. In : *Duke Mathematical Journal* 161.5 (2012), p. 735-801.

[DIK00] Alex Degtyarev, Ilia Itenberg et Viatcheslav Kharlamov. *Real Enriques surfaces*. T. 1746. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000, p. xvi+259.

[DM69] Pierre Deligne et David Mumford. “The irreducibility of the space of curves of given genus”. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 36 (1969).

[EGAI] Jean Dieudonné et Alexander Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*. Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques, 1960.

[FC90] Gerd Faltings et Ching-Li Chai. *Degeneration of Abelian Varieties*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Flo52] Edwin Earl Floyd. “On periodic maps and the Euler characteristics of associated spaces”. In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 72 (1952), p. 138-147.

[Fu23] Lie Fu. *Maximal real varieties from moduli constructions*. 2023. arXiv : 2303.03368 [math.AG].

[GF22a] Olivier de Gaay Fortman. “Moduli spaces and algebraic cycles in real algebraic geometry”. Thèse de doct. École normale supérieure de Paris, 2022.

[GF22b] Olivier de Gaay Fortman. “Real moduli spaces and density of non-simple real abelian varieties”. In : *The Quarterly Journal of Mathematics* 73.3 (2022), p. 969-989.

[GF24] Olivier de Gaay Fortman. “On the integral Hodge conjecture for real abelian threefolds”. In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* (2024).

[GFS24] Olivier de Gaay Fortman et Stefan Schreieder. *Curves on powers of hyperelliptic Jacobians*. 2024. arXiv : 2401.06577 [math.AG].

[Gra04] Craig GRABOWSKI. “On the integral Hodge conjecture for 3-folds”. Thèse de doct. Duke University, 2004.

[Gro57] Alexander GROTHENDIECK. “Sur quelques points d’algèbre homologique”. In : *Tohoku Mathematical Journal* 9 (1957), p. 119-221.

[Ham97] Joost van HAMEL. “Algebraic cycles and topology of real algebraic varieties.” Thèse de doct. Vrije Universiteit Amsterdam, 1997.

[Har77] Robin HARTSHORNE. *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977, p. xvi+496.

[Har83] John HARER. “The second homology group of the mapping class group of an orientable surface”. In : *Invent. Math.* 72.2 (1983), p. 221-239.

[Har86] John HARER. “The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface”. In : *Invent. Math.* 84.1 (1986), p. 157-176.

[Hod61] William HODGE. “Differential forms in algebraic geometry”. In : *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni* 20 (1961), p. 172-234.

[IV07] Ilia ITENBERG et Oleg VIRO. “Asymptotically maximal real algebraic hypersurfaces of projective space”. In : *Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2006.* Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2007, p. 91-105.

[Kah03] Bruno KAHN. “Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini”. In : *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Quatrième Série* 36.6 (2003), 977-1002 (2004).

[Kah87] Bruno KAHN. “Construction de classes de Chern équivariantes pour un fibré vectoriel réel”. In : *Communications in Algebra* 15.4 (1987), p. 695-711.

[Kha72] Viatcheslav KHARLAMOV. “The maximal number of components of a 4th degree surface in RP^3”. In : *Funkcional. Anal. i Priložen.* 6.4 (1972), p. 101.

[Kha81] Viatcheslav KHARLAMOV. “On a number of components of an M-surface of degree 5 in RP^3”. In : *Proc. of the XVI Soviet Algebraic Conference, Leningrad* (1981), p. 353-354.

[KI96] Viatcheslav KHARLAMOV et Ilia ITENBERG. “Towards the maximal number of components of a nonsingular surface of degree 5 in $\mathbf{R}\mathrm{P}^3$”. In : *Topology of real algebraic varieties and related topics*. T. 173. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, p. 111-118.

[KR23] Viatcheslav KHARLAMOV et Rareş RĂSDEACONU. *Unexpected loss of maximality : the case of Hilbert square of real surfaces*. 2023. arXiv : 2303.02796 [math.AG].

[Kra91] Vyacheslav KRASNOV. “Characteristic classes of vector bundles on a real algebraic variety”. In : *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk, Seriya Matematicheskaya* 55.4 (1991), p. 716-746.

[Kra94] Vyacheslav KRASNOV. “On the equivariant Grothendieck cohomology of a real algebraic variety and its applications”. In : *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk, Seriya Matematicheskaya* 58.3 (1994), p. 36-52.

[Lew99] James LEWIS. *A survey of the Hodge conjecture*. Second. T. 10. CRM Monograph Series. Appendix B by B. Brent Gordon. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, p. xvi+368.

[LMB00] Gérard LAUMON et Laurent MORET-BAILLY. *Champs Algébriques*. Springer-Verlag, 2000.

[Man17] Frédéric MANGOLTE. *Variétés Algébriques Réelles*. T. 24. Cours Spécialisés. Société Mathématique de France, 2017, p. vii+484.

[MH98] Frédéric MANGOLTE et Joost van HAMEL. “Algebraic cycles and topology of real Enriques surfaces”. In : *Compositio Mathematica* 110.2 (1998).

[Mil80] James MILNE. *Étale Cohomology*. Princeton Mathematical Series, No. 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980, p. xiii+323.

[Mil86] James MILNE. “Abelian Varieties”. In : *Arithmetic Geometry.* Sous la dir. de Gary CORNELL et Joseph H. SILVERMAN. New York, NY : Springer New York, 1986, p. 103-150.

[Mum08] David MUMFORD. *Abelian Varieties.* T. 5. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics. Tata Institute of Fundamental Research, 2008, p. xii+263.

[Mum67] David MUMFORD. “Abelian quotients of the Teichmüller modular group”. In : *J. Analyse Math.* 18 (1967), p. 227-244.

[Mum88] David MUMFORD. *The red book of varieties and schemes.* T. 1358. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1988, p. vi+309.

[MZ20] David MASSER et Umberto ZANNIER. “Abelian varieties isogenous to no Jacobian”. In : *Ann. of Math. (2)* 191.2 (2020), p. 635-674.

[Ols08] Martin OLSSON. *Compactifying moduli spaces for abelian varieties.* T. 1958. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008, p. viii+278.

[OU73] Frans OORT et Kenji UENO. “Principally polarized abelian varieties of dimension two or three are Jacobian varieties”. In : *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 20 (1973), p. 377-381.

[Pow78] Jerome POWELL. “Two theorems on the mapping class group of a surface”. In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 68.3 (1978), p. 347-350.

[Sch19] Stefan SCHREIEDER. “Stably irrational hypersurfaces of small slopes”. In : *Journal of the American Mathematical Society* 32.4 (2019), p. 1171-1199.

[Ser20] Jean-Pierre SERRE. *Rational points on curves over finite fields.* T. 18. Documents Mathématiques (Paris). Société Mathématique de France, Paris, 2020, p. x+187.

[SGA4] Michael ARTIN, Alexander GROTHENDIECK et Jean-Louis VERDIER. *Théorie de Topos et Cohomologie Etale des Schémas I, II, III.* Springer, 1971.

[Sil89] Robert SILHOL. *Real Algebraic Surfaces*. T. 1392. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1989, p. x+215.

[Sou84] C. SOULÉ. "Groupes de Chow et K-théorie de variétés sur un corps fini". In : *Mathematische Annalen* 268.3 (1984), p. 317-345.

[SS89] Mika SEPPÄLÄ et Robert SILHOL. "Moduli spaces for real algebraic curves and real abelian varieties". In : *Mathematische Zeitschrift* 201.2 (1989).

[Tat66] John TATE. "Endomorphisms of abelian varieties over finite fields". In : *Inventiones Mathematicae* 2 (1966), p. 134-144.

[Tat94] John TATE. "Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology". In : *Motives (Seattle, WA, 1991)*. T. 55. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 71-83.

[Tho65] René THOM. "Sur l'homologie des variétés algébriques réelles". In : *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965, p. 255-265.

[Tot17] Burt TOTARO. "Recent progress on the Tate conjecture". In : *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 54.4 (2017), p. 575-590.

[Tot21] Burt TOTARO. "The integral Hodge conjecture for 3-folds of Kodaira dimension zero". In : *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 20.5 (2021), p. 1697-1717.

[Tot97] Burt TOTARO. "Torsion algebraic cycles and complex cobordism". In : *Journal of the American Mathematical Society* 10.2 (1997), p. 467-493.

[Tre] "Trento examples". In : *Classification of Irregular Varieties (Trento, 1990)*. T. 1515. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1992, p. 134-139.

[Tsi12] Jacob TSIMERMAN. "The existence of an abelian variety over $\overline{\mathbb{Q}}$ isogenous to no Jacobian". In : *Ann. of Math. (2)* 176.1 (2012), p. 637-650.

[Voi06] Claire Voisin. “On integral Hodge classes on uniruled or Calabi-Yau threefolds”. In : *Moduli spaces and arithmetic geometry*. T. 45. Advanced Studies in Pure Mathematics. Mathematical Society of Japan, 2006, p. 43-73.

[Voi13] Claire Voisin. “Remarks on curve classes on rationally connected varieties”. In : *A celebration of algebraic geometry*. T. 18. Clay Math. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, p. 591-599.

[Voi23] Claire Voisin. *Cycle classes on abelian varieties and the geometry of the Abel-Jacobi map*. 2023. arXiv : `2212.03046 [math.AG]`.

[Wei49] André Weil. “Numbers of solutions of equations in finite fields”. In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 55 (1949), p. 497-508.