Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la somme pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$Z(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

1. Montrer par récurrence que $Z(x) = \frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}$.
   On suppose que $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

2. Justifier que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Prouver que : $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
4. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$.