## Exercice1

$\alpha$ est un rel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (\alpha + k)}$$

1. Etude de la convergence de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. Que peut-on déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$ ?
   On note $\ell(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$
   (b) On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que :
   $$u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ell(\alpha)}{n}$$
   (c) Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$
2. Dans cette question : $\alpha \in ]0,1]$
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n(\alpha) \geqslant \frac{1}{n+\alpha}$$
   (b) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$ ?
3. On pose pour tout entier naturel $n$ :
   $$I_n(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-t}\right)^n dt$$
   (a) Etudier la convergence de l'intégrale généralisée $I_n(\alpha)$ et calculer $I_0(\alpha)$
   (b) Soit un réel $x$ strictement positif. Intégrer par parties :
   $$\int\limits_0^{x} e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-t}\right)^n dt$$
   et en déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha+1)$, pour tout $n$ entier naturel non nul.
   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; I_n(\alpha) = u_n$
4. On suppose désormais que $\alpha > 1$
   (a) Montrer que, pour tout $N$ entier naturel :
   $$\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} - I_{N+1}(\alpha - 1)$$
   (b) En déduire que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est convergente, et donner en fonction de $\alpha$ la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha)$.

## Exercice 2

$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
$\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonnes à trois lignes dont les coefficients sont réels.
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où $x$, $y$ et $z$ sont des nombres réels.
On définit alors une suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N} \ \mathbb{X}_{n+1} = AX_n + B \end{cases}$$

1. Montrer que 0 , $\frac{1}{2}$ et 1 sont les valeurs propres de A, et préciser des vecteurs propres $u$, $v$ et $w$ qui leur sont respectivement associés.
2. Justifier les affirmations suivantes :

   — il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :

   $$B = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

   — Pour tout entier naturel $n$, il existe un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :

   $$X_n = \alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w$$

3. Etablir par récurrence que

   $$n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - 2\beta) + 2\beta \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$$

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles telles que :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \ X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

   On dit que la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Dans ce cas on écrit :

   $$\lim X_n = \begin{pmatrix} \lim a_n \\ \lim b_n \\ \lim c_n \end{pmatrix}$$

   (a) Prouver que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si le réel $\gamma$ (introduit en 2.) est nul.

(b) En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$3x - 4y + 12z = 0$$

5. On dit que le couple $(A, B)$ admet une position d'équilibre stable si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite quelle que soit la valeur de $X_0$.

Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur de $B$, le couple $(A, B)$ n'admet pas de position d'équilibre stable.

## Exercice 3

Dans tout le problème (qui comporte deux parties indépendantes), on suppose que la durée, exprimée en minutes, d'une communication téléphonique est une variable aléatoire réelle $D$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha$

### *I Comparaison de deux tarifications*

Pour ses communications, on propose à l'utilisateur d'une ligne téléphonique deux tarifications $T_1$ et $T_2$, exprimées en francs, définies de la façon suivante :

— $T_1 = aD$, où $a$ est un nombre réel strictement supérieur à 1 qui représente le prix d'une minute de communication

— $T_2$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout $n$ entier naturel non nul : $\{T_2 = n\} = \{n - 1 < D \leqslant n\}$

1. Calculer $E(T_1)$ en fonction de $a$ et de $\alpha$.
2. Déterminer la loi de $T_2$. De quelle loi s'agit-il ? Exprimer $E(T_2)$ en fonction de $\alpha$
3. On pose :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+^* : \varphi(t) = \dfrac{t}{1 - e^{-t}} \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Montrer que $\varphi$ est une fonction de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$

   (b) On définit de plus la fonction $\psi$ sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \psi(t) = 1 - (1 + t)e^{-t}$$

   Utiliser cette fonction pour en déduire que $\varphi$ réalise une bijection de$[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$

4. Comparaison des tarifications

   (a) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha_0$ strictement positif tel que $\varphi(\alpha_0) = a$

   (b) Préciser quelle est, en moyenne, la tarification la plus avantageuse suivant la valeur de la durée moyenne d'une communication.

5. Pour $a = 1,25$ donner, en utilisant votre calculatrice. une valeur approchée de $\dfrac{1}{\alpha_0}$ (on ne donnera que les deux premières décimales fournies par la calculatrice).

## *II Étude d'un standard téléphonique*

Dans toute cette partie, $\theta$ est un nombre réel strictement positif représentant un temps exprimé en minutes. Un standard téléphonique de capacité illimitée reçoit des communications téléphoniques entre l'instant 0 et l'instant $\theta$ inclus.

### *II. A) Cas d'une seule communication*

On désigne par n un entier naturel non nul. L'instant où débute la communication est une variable aléatoire réelle $I_n$ telle que :

$$\begin{cases} I_n(\Omega) = \left\{ \dfrac{\theta}{n}, \dfrac{2\theta}{n}, \ldots, \dfrac{(n-1)\theta}{n}, \dfrac{n\theta}{n} \right\} \\ \forall k \in [[1, n]] : p\left( I_n = \dfrac{k\theta}{n} \right) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

où $p$ désigne la probabilité. De plus $I_n$ et $D$ (la durée aléatoire de la communication) sont indépendantes.

1. Pour tout réel positif $t$, rappeler quelle est l'expression de $p(D > t)$ en fonction de $t$ et de $\alpha$.
2. En déduire, pour $k$ élément de $[[1, n]]$ la probabilité conditionnelle de $\{D + I_n > \theta\}$ sachant $\left\{ I_n = \dfrac{k\theta}{n} \right\}$.
3. Démontrer l'égalité suivante :

$$p(D + I_n > \theta) = \frac{1}{n} \left( \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{1 - e^{-\frac{\alpha\theta}{n}}} \right)$$

4. Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} p(D + I_n > \theta)$$

### *II. B) Étude de l'encombrement du standard à l'instant $\theta$*

Dans cette partie on définit les nombres réels $p$ et $q$ par :

$$p = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta} \text{ et } q = 1 - p$$

On suppose désormais que la probabilité qu'une communication reçue dans l'intervalle de temps $[0, \theta]$ se poursuive au-delà de l'instant $\theta$ est égale à $p$.
On note $N_\theta$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans l'intervalle de temps $[0, \theta]$ et l'on suppose que $N_\theta$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta$.
On note$C_\theta$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans l'intervalle de temps $[0, \theta]$ qui se poursuivent au-delà de l'instant $\theta$
Les instants aléatoires où les communications se terminent sont mutuellement indépendant.

1. Loi de probabilité de $C_\theta$
   (a) Soit $r$ un entier naturel. Quelle est la loi conditionnelle de $C_\theta$ sachant que $\{N_\theta = r\}$ ?

(b) Démontrer que l'on a :

$$\forall r \in \mathbb{N} \ \ \forall k \in [[0, r]], \quad p(\{C_\theta = k\} \cap \{N_\theta = r\}) = \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k (q\theta)^{r-k}}{k!\,(r-k)!}$$

(c) En déduire, pour tout entier naturel $k$, une expression simple de $p(C_\theta = k)$ en fonction de $k$, $p$, et $\theta$. Quelle est la loi de probabilité de $C_\theta$?

2. Étude de l'espérance de $C_\theta$

(a) Déterminer l'expression de $E(C_\theta)$ en fonction de $\theta$ et de $\alpha$.

(b) Quelle est la limite de $E(C_\theta)$ lorsque $\theta$ tend vers$+\infty$ ? Vérifier qu'elle majore $E(C_\theta)$.

# I correction

$\alpha$ est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\alpha + k)}$$

1. Etude de la convergence de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$

(a) Pour tout $n$, $u_n(\alpha) \geq 0$ et

$$\begin{aligned} u_{n+1}(\alpha) - u_n(\alpha) &= \frac{(n+1)!}{\prod\limits_{k=0}^{n+1}(\alpha+k)} - \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\alpha+k)} \\ &= \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n+1}(\alpha+k)}[n+1-(\alpha+n+1)] < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite est décroissante et moinorée par 0.

*Conclusion :* $\boxed{(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotonne et convergente}}$

La somme partielle $\sum_{n=0}^{N} u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) = u_0(\alpha) - u_{N+1}(\alpha)$ a donc un e limite finie quand $N$ tende vers $+\infty$.

*Conclusion :* $\boxed{\text{la série de terme général } (u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)) \text{ converge}}$

On note $\ell(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$

(b) On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle.

(par factorisation des prépondérants) On a vu que

$$\begin{aligned} u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) &= \frac{n!\alpha}{\prod\limits_{k=0}^{n+1}(\alpha+k)} \\ &= \frac{\alpha u_n(\alpha)}{\alpha+n+1} \\ &= \frac{\alpha\ell(\alpha)}{n}\frac{u_n(\alpha)/\ell(\alpha)}{\underbrace{1+(\alpha+1)/n}_{\to 1}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ell(\alpha)}{n} \end{aligned}$$

(c) Or la série (Riemann) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge. et par équivalence de temres positifs, la série $\sum_{n\geq 1}\left(u_n(\alpha)-u_{n+1}(\alpha)\right)$ diverge également. FAUX ! DOnc $\ell(\alpha)$ n'est pas non nul.

*Conclusion :* $\boxed{\ell(\alpha)=0}$

2. Dans cette question : $\alpha\in]0,1]$

(a) On a alors

$$\begin{aligned} u_n(\alpha) &= \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\alpha+k)} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdots n}{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} \\ &= \frac{1}{\alpha}\frac{2}{\alpha+1}\cdots\frac{n}{\alpha+n-1}\frac{1}{n+\alpha} \\ &\geq \frac{1}{n+\alpha} \end{aligned}$$

car $\alpha+i\leq 1+i$ et donc $\dfrac{i+1}{\alpha+i}\geq 1$

*N.B.* il est plus naturel de le faire par récurrence avec

$$\begin{aligned} u_{n+1}(\alpha) &= \frac{n+1}{\alpha+n+1}u_n(\alpha) \\ &\geq \frac{1}{n+\alpha}\frac{n+1}{\alpha+n+1} \\ &\geq \frac{1}{\alpha+n+1} \end{aligned}$$

car $n+\alpha\leq n+1$

*Conclusion :* $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n(\alpha)\geq\dfrac{1}{n+\alpha}}$

(b) On a finalement $u_n(\alpha)\geq\dfrac{1}{n+\alpha}\geq\dfrac{1}{n+1}$ dont la série (de Riemann après réindexation) diverge.

et par minoration de teremes positifs,

*Conclusion :* $\boxed{\text{la série de terme général } u_n(\alpha) \text{ diverge}}$

3. On pose pour tout entier naturel $n$ :

$$I_n(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\left(1-e^{-t}\right)^n dt$$

(a) $\left(1-e^{-t}\right)^n\to 1$ quand $t\to+\infty$ donc $e^{-\alpha t}\left(1-e^{-t}\right)^n\sim e^{-\alpha t}$ dont la série converge ($\alpha>1$ ) et par équivalence de termes positifs,

*Conclusion :* $\boxed{\text{ l'intégrale généralisée } I_n(\alpha) \text{ converge}}$

$$\begin{aligned} I_0(\alpha) &= \int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}dt \\ \int_0^M e^{-\alpha t}dt &= \left[\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right]_0^M=\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha M}+\frac{1}{\alpha} \\ &\to \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

*Conclusion :* $\boxed{I_0(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}}$

(b) Soit un réel $x$ strictement positif et $n \in \mathbb{N}^*$ (pour la dérivée et pour [] en 0 )
$u(t) = \left(1 - e^{-t}\right)^n : u'(t) = n\left(1 - e^{-t}\right)^{n-1} e^{-t}$
$v'(t) = e^{-\alpha t} : v(t) = \dfrac{-1}{\alpha} e^{-\alpha t}$ avec $u$ et $v$ $C^1$

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-t}\right)^n dt &= \left[\frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-t}\right)^n\right]_0^x - \int_0^x \frac{-n}{\alpha} e^{-t} e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-t}\right)^{n-1} dt \\
&= \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha x}\left(1 - e^{-x}\right)^n + \frac{n}{\alpha}\int_0^x e^{-(\alpha+1)t}\left(1 - e^{-t}\right)^{n-1} dt \\
&\to \frac{n}{\alpha} I_{n-1}(\alpha + 1)
\end{aligned}$$

*Conclusion :* $\boxed{I_n(\alpha) = \dfrac{n}{\alpha} I_{n-1}(\alpha + 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

(c) On a alors $I_{n+1}(\alpha) = \dfrac{n+1}{\alpha} I_n(\alpha + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par récurrence
*Conclusion :* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ \ I_n(\alpha) = u_n}$ car $u_{n+1}(\alpha) = \dfrac{n+1}{\alpha} u_n(\alpha + 1)$ et $u_0 = I_0$

4. On suppose désormais que $\alpha > 1$

(a) Par récurrence (avec $I_n(\alpha) = \dfrac{n}{\alpha} I_{n-1}(\alpha + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ )
Pour $N = 0$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{0} I_n(\alpha) &= I_0(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \\
I_1(\alpha - 1) &= \frac{1}{\alpha - 1} I_0(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{\alpha} \text{ donc} \\
\frac{1}{\alpha - 1} - I_1(\alpha - 1) &= \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{\alpha} \\
&= \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{0} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} - I_1(\alpha - 1)$
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} - I_{N+1}(\alpha - 1)$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N+1} I_n(\alpha) &= \sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) + I_{N+1}(\alpha) \\
&= \frac{1}{\alpha - 1} - I_{N+1}(\alpha - 1) + I_{N+1}(\alpha)
\end{aligned}$$

la relation de récurrence ci-dessus ne mène à rien... mais sous forme d'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{N+1}(\alpha) - I_{N+1}(\alpha-1) &= \int_0^1 e^{-\alpha t}\left(1-e^{-t}\right)^{N+1} dt - \int_0^1 e^{-(\alpha-1)t}\left(1-e^{-t}\right)^{N+1} dt \\ &= \int_0^1 e^{-(\alpha-1)t}\left(e^{-t}-1\right)\left(1-e^{-t}\right)^{n} dt \\ &= -I_{N+2}(\alpha-1) \end{aligned}$$

*Conclusion :* $\boxed{\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} - I_{N+1}(\alpha-1) \text{ pouer tout eniter } n}$

(b) Comme $u_n(\alpha) = I_n(\alpha)$ et que $u_n(\alpha) \to \ell(\alpha) = 0$ alors $\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) \to \frac{1}{\alpha-1}$

*Conclusion :* $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha) \text{ converge et vaut } \frac{1}{\alpha-1}.}$

# EXERCICE 2

1. Pour montrer que 0 , $\frac{1}{2}$ et 1 sont **des** valeurs propres de $A$, il suffit de trouver (ou de donner) des vecteurs porpres associés.
   $A\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = 0\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ prouve par exemple que 0 est valeur propre de $A$ car $u = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
   On peut aussi rédiger la recherche de vecteurs propres :
   $$\left(A - \frac{1}{2}I\right)U = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2}x + 2z = 0 \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y + 6z = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + 2z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -4z \\ y = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -4z \\ y = 0 \end{array}\right.$$
   donc 1/2 est valeur propre car $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.
   $$(A - 1I)U = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2z = 0 \\ \frac{3}{2}x - 3y + 6z = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2}z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z = 0 \\ x = 2y \\ 0 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z = 0 \\ x = 2y \end{array}\right.$$
   Donc 1 est une valeur propre car $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.
   Donc 0, $\frac{1}{2}$ et 1 sont **des** valeurs propres de $A$.
   Pour prouver que ce sont **les** valeurs propres de $A$, il reste à prouver que $A$ n'en a pas d'autres.
   Or $A$ est d'ordre 3 donc il a au plus 3 valeurs propres distinctes.
   Finalement 0, $\frac{1}{2}$ et 1 sont **les** valeurs propres de $A$.
2. Justifier les affirmations suivantes :
   — Comme on a trois valeurs propres distinctes pour une matrice d'ordre 3, alors la famille des colonnes propres associées $(u, v, w)$ est une base.

Donc pour toute colonne (et en particulier pour $B$ ) il existe un unique triplet $(\alpha,\beta,\gamma)$ de coordonnées de $\mathbb{R}^3$ tel que $B=\alpha u+\beta v+\gamma w$

— et de même, pour toute colonne $X_n$ il existe un unique triplet $(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $X_n=\alpha_n u+\beta_n v+\gamma_n w$

3. Remarquer que la formule est donnée pour $n\in\mathbb{N}^*$ donc

   — On commence pour $n=1$ :On a $\alpha_1,\ \beta_1$ et $\gamma_1$ qui sont définis par : $X_1=\alpha_1 u+\beta_1 v+\gamma_1 w$
   Or $X_1=AX_0+B=A\left(\alpha_0 u+\beta_0 v+\gamma_0 w\right)+\alpha u+\beta v+\gamma w.$
   Et comme $u$, $v$ et $w$ sont des colonnes propres :
   $X_1=\alpha_0 0u+\beta_0\dfrac{1}{2}v+\gamma_0 w+\alpha u+\beta v+\gamma w=\alpha u+\dfrac{1}{2}\left(\beta_0+2\beta\right)v+\left(\gamma_0+\gamma\right)w$
   Donc par unicité des coordonnée :$\begin{cases}\alpha_1=\alpha\\ \beta_1=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\beta_0-2\beta\right)+2\beta\\ \gamma_n=\gamma_0+1\gamma\end{cases}$

   — Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\begin{cases}\alpha_n=\alpha\\ \beta_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\beta_0-2\beta\right)+2\beta\\ \gamma_n=\gamma_0+n\gamma\end{cases}$ alors
   $X_{n+1}=AX_n+B=\beta_n\frac{1}{2}v+\gamma_n 1w+\alpha u+\beta v+\gamma w=\alpha u+\frac{1}{2}\left(\beta_n+2\beta\right)v+\left(\gamma_n+\gamma\right)w$
   Donc $\begin{cases}\alpha_{n+1}=\alpha\\ \beta_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\beta_n+2\beta\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(\beta_0-2\beta\right)+2\beta\\ \gamma_n=\gamma_n+\gamma=\gamma_0+n\gamma\end{cases}$

   — Donc pour tout entier $n\geq 1$, les formules de récurrence sont bien vérifiée.

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles telles que :

   (a) On a $X_n=\alpha_n u+\beta_n v+\gamma_n w=\alpha_n\begin{pmatrix}-2\\ \frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix}+\beta_n\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\gamma_n\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\alpha_n-4\beta_n+2\gamma_n\\ \frac{3}{2}\alpha_n+\gamma_n\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$
   Donc $a_n=-2\alpha_n-4\beta_n+2\gamma_n$ : $b_n=\frac{3}{2}\alpha_n+\gamma_n$ et $c_n=\alpha_n+\beta_n$
   Et comme $\alpha_n\to\alpha$ que $\beta_n\to 2\beta$ et $\gamma_n=\gamma_0+n\gamma\Rightarrow\pm\infty$ si $\gamma\neq 0$ et $\gamma_0$ si $\gamma=0$
   alors $a_n$ et $b_n$ donc $X_n$ convergent si et seulement si $\gamma=0$

   (b) On résout donc $B=\alpha u+\beta v+\gamma w\Leftrightarrow\alpha\begin{pmatrix}-2\\ \frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$
   $\Leftrightarrow\begin{cases}-2\alpha-4\beta+2\gamma=x & L_1+2L_3\\ \frac{3}{2}\alpha+\gamma=y & L_2-\frac{3}{2}L_3\\ \alpha+\beta=z & L_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\beta+2\gamma=x+2z & L_1-\frac{4}{3}L_2\\ -\frac{3}{2}\beta+\gamma=y-\frac{3}{2}z\\ \alpha+\beta=z\end{cases}$
   $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}\gamma=x+2z-\frac{4}{3}\left(y-\frac{3}{2}z\right)\ =x-\frac{4}{3}y+4z\\ -\frac{3}{2}\beta+\gamma=y-\frac{3}{2}z\\ \alpha+\beta=z\end{cases}$
   Donc $\gamma=3x-4y+12z$ et donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $3x-4y+12z=0$

5. Si le couple $(A,B)$ admet une position d'équilibre stable alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc $\gamma=0$
   La limite de la suite $(a_n)$ est donc $-2\alpha+4\beta+2\gamma_0$, celle de la suite $(b_n)$ est $\frac{3}{2}\alpha+\gamma_0$ et celle de la suite $(c_n)$ est $\alpha+\beta$

Comme $x$, $y$ et $z$ sont fixées par $B$, alors $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ le sont aussi. Les limites de $a$ et $b$ dépendent donc de $\gamma_0$.

Donc, quelle que soit la valeur de $B$, le couple $(A, B)$ n'admet pas de position d'équilibre stable.

# Exercice 3

Dans tout le problème (qui comporte deux parties indépendantes), on suppose que la durée, exprimée en minutes, d'une communication téléphonique est une variable aléatoire réelle $D$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha$

**I Comparaison de deux tarifications**

1. Pour ses communications, on propose à l'utilisateur d'une ligne téléphonique deux tarifications $T_1$ et $T_2$, exprimées en francs, définies de la façon suivante :

— $T_1 = aD$, où $a$ est un nombre réel strictement supérieur à 1 qui représente le prix d'une minute de communication

— $T_2$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout $n$ entier naturel non nul : $\{T_2 = n\} = \{n-1 < D \leq n\}$

1. Comme $D$ suit une loi exponentielle, On a $E(D) = 1/\alpha$ donc $E(T_1) = aE(D) = a/\alpha$
2. On a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} p(T_2 = n) &= p(n-1 < D \leq n) \\ &= \int_{n-1}^{n} \alpha e^{-\alpha t} dt = \left[-e^{-\alpha t}\right]_{n-1}^{n} \\ &= e^{-\alpha(n-1)} - e^{-\alpha n} \\ &= \left(e^{-\alpha}\right)^{n-1}\left(1 - e^{-\alpha}\right) \end{aligned}$$

   Donc $T_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-\alpha})$ et $E(T_2) = \dfrac{1}{1 - e^{-\alpha}}$
3. On pose :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+^* : \varphi(t) = \dfrac{t}{1 - e^{-t}} \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) $\varphi$ est de calsse $C^1$ sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonction $C^1$

   En 0 : on peut passer par le théorème de prolongement qui demande la continuité de $\varphi$ d'abord puis la limite de la dérivée.

   ou revenir au taux d'accroissement puis prouver la continuité de la dérivée.

   par le prolongement :

   comme $e^x - 1 \sim x$ quand $x \to 0$ alors $e^{-t} - 1 \sim -t$ donc $\dfrac{-t}{e^{-t} - 1} \to 1$ et $\varphi(t) \to 1$ donc $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

   $\varphi$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour avoir la limite de $\varphi'$ en 0 on efffectue un développement limité :

   (onsubsitue $-t$ à x dans le DL $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$. On prend le DL d'ordre 2 car celui d'ordre 1 au numérateur laissaitune forme indéterminée $\varepsilon(t)/t\ldots$)

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{1-e^{-t}-t\left(-e^{-t}(-1)\right)}{\left(1-e^{-t}\right)^2} \\
&= \frac{1-(1+t)e^{-t}}{\left(-1+e^{-t}\right)^2} \\
&= \frac{1-(1+t)\left(1-t+\dfrac{t^2}{2}+t^2\varepsilon(t)\right)}{\left(1-1-t-t\varepsilon_1(t)\right)^2} \\
&= \frac{1-\left(1-t^2/2+t^2\varepsilon_2(t)\right)}{\left(-t-t\varepsilon_1(t)\right)^2} \\
&= \frac{t^2/2-t^2\varepsilon_2(t)}{t^2\left(1+\varepsilon_1(t)\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{2}-\varepsilon_2(t)}{\left(1+\varepsilon_1(t)\right)^2} \\
&\to \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ qui tendent vars 0 en 0.

Comme $\varphi$ est continue en 0 et que $\varphi' \to 1/2$ alors $\varphi$ est dérivable en 0, $\varphi'(0) = 1/2$ et $\varphi'$ est continue en 0.

Donc $\varphi$ est de classe $C^1$ en 0 donc sur $[0,+\infty[$

(b) On a pour $t>0$ : $\varphi'(t) = \dfrac{1-(1+t)e^{-t}}{\left(-1+e^{-t}\right)^2} = \dfrac{\psi(t)}{\left(-1+e^{-t}\right)^2}$ qui est donc du signe de $\psi(t)$

$\psi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\psi'(t) = -e^{-t}-(1+t)e^{-t}(-1) = te^{-t}$ du signe de $t$

Donc $\psi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $\psi(0)=0$ on a $\psi>0$ sur $]0,+\infty[$

**Remarque :** $f$ est strictement croissante si $f$ est continue sur un intervalle $I$ et $f'>0$ sauf en un nombre fini de points de $I$ . Il n'est pas nécessaire qu'elle soit dérivable ou que la dérivée soit strictement positive sur tout l'intervalle)

Finalement $\varphi$ est strictement croissante et continue donc bijective de $[0,+\infty[$ dans $[\varphi(0), \lim_{+\infty}\varphi[ = [1,+\infty[$

($\varphi$ ne donne pas de forme indéterminée en $+\infty$)

4. Comparaison des tarifications

(a) Comme $a>1$ on a $a\in[1,+\infty[$ donc il existe un unique $\alpha_0\in[0,+\infty[$ tel que $\varphi(\alpha_0)=a$

(b) Il faut ici comparer les couts moyens des deux facturations :

$$\frac{E(T_2)}{E(T_1)} = \frac{\frac{1}{1-e^{-\alpha}}}{\frac{a}{\alpha}} = \frac{1}{a}\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} = \frac{\varphi(\alpha)}{a}$$

Comme la durée moyenne de communication est $1/\alpha$,

— si cette durée moyenne $(1/\alpha)$ est supérieure à $1/\alpha_0$ alors $\alpha<\alpha_0$ et comme $\varphi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a $\varphi(\alpha) > \varphi(\alpha_0) = a$ donc $E(T_2) > E(T_1)$ et la première tarifivcation est la plus avantageuse (la moins chère)

— Inversement, si elle est supérieure à $1/\alpha_0$ la seconde tarification est la plus avantageuse.

La tarificatin à la seconde estdonc interressante pour les communications longues

**II Étude d'un standard téléphonique**

Dans toute cette partie, $\theta$ est un nombre réel strictement positif représentant un temps exprimé en minutes. Un standard téléphonique de capacité illimitée reçoit des communications téléphoniques entre l'instant 0 et l'instant $\theta$ inclus.

**II A Cas d'une seule communication**

On désigne par $n$ un entier naturel non nul. L'instant où débute la communication est une variable aléatoire réelle $I_n$ telle que :

$$\begin{cases} I_n(\Omega) = \left\{ \dfrac{\theta}{n}, \dfrac{2\theta}{n}, \dots, \dfrac{(n-1)\theta}{n}, \dfrac{n\theta}{n} \right\} \\ \forall k \in [[1, n]] : p\left(I_n = \dfrac{k\theta}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

où $p$ désigne la probabilité. De plus $I_n$ et $D$ (la durée aléatoire de la communication) sont indépendantes.

1. Soit $f$ la densité de la loi exponentielle de paramètre $\alpha$.
   On a $p(D > t) = \int_t^{+\infty} f(x)\, dx$ intégrale impropre en $+\infty$; Et comme $t \geq 0$

$$\int_t^A \alpha e^{-\alpha x} dx = \left[-e^{-\alpha x}\right]_{x=t}^A = e^{-\alpha t} - e^{-\alpha A} \to e^{-\alpha t}$$

   donc $p(D > t) = e^{-\alpha t}$

2. On a donc

$$\begin{aligned} p\left(D + I_n > \theta \,/\, I_n = \frac{k\theta}{n}\right) &= p\left(D > \theta - \frac{k\theta}{n} \,/\, I_n = \frac{k\theta}{n}\right) \\ &= p\left(D > \theta - \frac{k\theta}{n}\right) \\ &= p\left(D > \theta\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right) \\ &= e^{-\alpha\theta\left(1 - \frac{k}{n}\right)} \end{aligned}$$

   on peut supprimer le conditinnment car $D$ et $I_n$ sont indépendantes.

3. On utilise alors la formule des probabilité totales avec pour système complet d'événements : $\left(I_n = \dfrac{k\theta}{n}\right)_{k \in [[1,n]]}$

on a alors

$$p\left(D+I_n>\theta\right)=\sum_{k=1}^{n}p\left(D+I_n>\theta\ /\ I_n=\frac{k\theta}{n}\right)\cdot p\left(I_n=\frac{k\theta}{n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}e^{-\alpha\theta+\alpha\theta\frac{k}{n}}\frac{1}{n}=\frac{e^{-\alpha\theta}}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\alpha\theta/n}\right)^k$$

$$=\frac{e^{-\alpha\theta}}{n}\left(\frac{e^{(n+1)\alpha\theta/n}-1}{e^{\alpha\theta/n}-1}-1\right)$$

$$=\frac{e^{-\alpha\theta}}{n}\left(\frac{e^{(n+1)\alpha\theta/n}-e^{\alpha\theta/n}}{e^{\alpha\theta/n}-1}\right)=\frac{e^{-\alpha\theta}e^{\alpha\theta}}{n}\left(\frac{e^{n\alpha\theta/n}-1}{e^{\alpha\theta/n}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{1-e^{-\frac{\alpha\theta}{n}}}\right)$$

4. Comme $e^x-1\sim x$ quand $x\to 0$ et que $-\frac{\alpha\theta}{n}\to 0$ quand $n\to+\infty$ alors $e^{-\alpha\theta/n}-1\sim-\dfrac{\alpha\theta}{n}$ et

$$\frac{e^{-\alpha\theta/n}-1}{-\alpha\theta/n}=\frac{1-e^{-\alpha\theta/n}}{\alpha\theta/n}\to 1$$

donc

$$p\left(D+I_n>\theta\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{1-e^{-\frac{\alpha\theta}{n}}}\right)$$

$$=\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}\frac{\alpha\theta/n}{1-e^{-\alpha\theta/n}}$$

$$\to\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}$$

quand $n\to+\infty$

c'est la limite de la probabilité que l'appel se finisse après $\theta$ pour des débuts d'appels équirépartis sur $[0,\theta]$ (quand $n$ tend vers $+\infty$ chacun des segments $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ était équiprobable)

**II B Étude de l'encombrement du standard à l'instant $\theta$**

Dans cette partie on définit les nombres réels $p$ et $q$ par :

$$p=\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}\quad\text{et}\quad q=1-p$$

On suppose désormais que la probabilité qu'une communication reçue dans l'intervalle de temps $[0,\theta]$ se poursuive au-delà de l'instant $\theta$ est égale à $p$.

On note $N_\theta$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans l'intervalle de temps $[0,\theta]$ et l'on suppose que $N_\theta$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta$.

On note$C_\theta$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans l'intervalle de temps $[0,\theta]$ qui se poursuivent au-delà de l'instant $\theta$

Les instants aléatoires où les communications se terminent sont mutuellement indépendant.

1. Loi de probabilité de $C_\theta$

(a) Quand $N_\theta = r$ : $C_\theta$ est le *nombre de* comunication qui se poursuivent au delà de $\theta$ *parmi* $r$ communications reçues, de fin *indépendantes* et ayants toutes la mêmes probabilité $p$ de se poursuivre au delà de $\theta$.

Donc la loi conditionnelle de $C_\theta$ sachant que $\{N_\theta = r\}$ est une loi binômiale de paramètres $(r, p)$

(b) On a pour $r \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in [[0, r]]$ :

$$\begin{aligned} p\left(\{C_\theta = k\} \cap \{N_\theta = r\}\right) &= p\left(C_\theta = k \ / \ N_\theta = r\right) \cdot p\left(N_\theta = r\right) \\ &= C_r^k p^k q^{r-k} \frac{\theta^r e^{-\theta}}{r!} \\ &= \frac{r!}{k!\,(r-k)!} p^k q^{r-k} \theta^{r-k+k} e^{-\theta} \frac{1}{r!} \\ &= \frac{e^{-\theta}\,(p\theta)^k\,(q\theta)^{r-k}}{k!\,(r-k)!} \end{aligned}$$

la loi binômiale étant donnée par cette formule car $0 \leq k \leq r$

$$p\left(\{C_\theta = k\} \cap \{N_\theta = r\}\right) = \frac{e^{-\theta}\,(p\theta)^k\,(q\theta)^{r-k}}{k!\,(r-k)!}$$

(c) On a alors par la formule des probabiltiés totales, avec comme système complet d'événements $(N_\theta = r)_{r \in \mathbb{N}}$

$$p\left(C_\theta = k\right) = \sum_{r=0}^{+\infty} p\left(\{C_\theta = k\} \cap \{N_\theta = r\}\right)$$

On calcule la somme partielle de cette série en séparant les valeurs $r \geq k$ et $r < k$

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{M} p\left(\{C_\theta = k\} \cap \{N_\theta = r\}\right) &= \sum_{r=0}^{k-1} p\left(\{C_\theta = k\} \cap \{N_\theta = r\}\right) \\ &\quad + \sum_{r=k}^{M} p\left(\{C_\theta = k\} \cap \{N_\theta = r\}\right) \\ &= 0 + \sum_{r=k}^{M} \frac{e^{-\theta}\,(p\theta)^k\,(q\theta)^{r-k}}{k!\,(r-k)!} \\ &= \frac{e^{-\theta}\,(p\theta)^k}{k!} \sum_{r=k}^{M} \frac{(q\theta)^{r-k}}{(r-k)!} \\ &= \frac{e^{-\theta}\,(p\theta)^k}{k!} \sum_{i=0}^{M-k} \frac{(q\theta)^i}{i!} \\ \rightarrow \frac{e^{-\theta}\,(p\theta)^k}{k!} e^{q\theta} &= \frac{e^{(q-1)\theta}\,(p\theta)^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-p\theta}\,(p\theta)^k}{k!} \end{aligned}$$

quand $M \to +\infty$

Donc $p\left(C_\theta = k\right) = \dfrac{e^{-p\theta}\left(p\theta\right)^k}{k!}$ pour tout $k \geq 0$ et on reconnait là une loi de Poisson de paramêtre $p\theta$

2. Étude de l'espérance de $C_\theta$

   (a) On a donc $E\left(C_\theta\right) = p\theta = \dfrac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}\theta = \dfrac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha}$

   (b) Quand $\theta$ tend vers $+\infty$ on a $e^{-\alpha\theta} \to 0$ car $\alpha > 0$ et donc $E\left(C_\theta\right) \to 1/\alpha$ lorsque $\theta$ tend vers$+\infty$

   On a bien toujours $E\left(C_\theta\right) < 1/\alpha$.