

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On considère $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

1. Calculer $\frac{1}{\omega}$ en fonction de $\bar{\omega}$
2. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, 7 \rrbracket$ on a

$$\omega^k = \bar{\omega}^{7-k}.$$

3. En déduire que $\bar{A} = B$.
4. Montrer que la partie imaginaire de A est strictement positive. (On pourra montrer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.)
5. Rappelons la valeur de la somme d'une suite géométrique : $\forall q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N} :$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Montrer alors que $\sum_{k=0}^6 \omega^k = 0$. En déduire que $A + B = -1$.

6. Montrer que $AB = 2$.
7. En déduire la valeur exacte de A .