1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $i \leq n$. Caculer en fonction de i et n :

$$\sum_{j=i+1}^{n} j$$

3. On rappelle que l'on note $\max(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } i \geq j \\ j & \text{sinon.} \end{cases}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \max(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2 + i^2 + n - i}{2}$$

4. En déduire que

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \max(i,j) \left(\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \right)$$

5. On note

$$S_k = \sum_{i,j \in [\![1,1000]\!]} \max(i^k, j^k).$$

   (a) Rappeler ce que renvoie l'instruction Python `range(a,b)` avec deux entiers $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $a \leq b$.

   (b) Ecrire un script Python qui demande à l'utilsateur la valeur de k, calcul S_k et affiche le résultat.