

Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol (marche 0) et en sautant

- Ou bien une seule marche, avec probabilité  $p$  ;
- Ou bien deux marches, avec la probabilité  $1 - p$ .

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on observe  $n$  sauts de la grenouille, et on note  $X_n$  le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et  $Y_n$  le nombre de marches franchies au total. Quelle est la loi de  $X_n$  ? Exprimer  $Y_n$  en fonction de  $X_n$ . En déduire l'espérance et la variance de  $Y_n$ .
2. Pour  $k \geq 1$ , on note  $p_k$  la probabilité que la grenouille passe par la marche  $k$ . Que vaut  $p_1$  ? Que vaut  $p_2$  ? Etablir une formule de récurrence liant  $p_k$  à  $p_{k-1}$ . En déduire la valeur de  $p_k$  pour  $k \geq 1$ .
3. On note désormais  $Z_n$  le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la  $n$ -ième marche. Ecrire un algorithme Python qui simule la variable aléatoire  $Z_n$ .