DS4

Exercice 1. Le but de cet exercice est de calculer la valeur de

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Convergence On note $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $R_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n(n!)}$

1. Donner la monotonie de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(R_n)_{n\geq 1}$
2. En déduire que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(R_n)_{n\geq 1}$ convergent et ont même limite.

Informatique

1. Ecrire une fonction `factorielle` qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de $n!$
2. Ecrire deux fonctions `S` et `R` qui prennent en argument un entier n et retourne respectivement la valeur de S_n et R_n.
3. Ecrire une fonction `limite` qui prend en argument un réel positif ϵ et retourne la valeur de S_n pour laquelle $|S_n - R_n| \leq \epsilon$ (la premiere valeur pour laquelle cette condition est satisfaite).

Calcul de la limite Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction f_n par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad g_n(x) = f_n(x)e^{-x}$$

On rappelle que par convention $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$, et $0! = 1$

1. Exprimer $g_1(x)$ sans le signe somme.
2. Calculer $g_n(0)$ et exprimer $g_n(1)$ à l'aide de S_n.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$$

4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ $g_n'(x) = \frac{-x^n e^{-x}}{n!}$
5. (a) Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $\int_0^1 \frac{-e^{-x}}{n!}dx$
   (b) A l'aide d'un encadrement de $g_n'(x)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{e^{-1}-1}{n!} \leq \int_0^1 g_n'(x)dx \leq 0$$

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{e^{-1}-1}{n!} \leq S_n e^{-1} - 1 \leq 0$$

7. En déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. 1. Résoudre l'inéquation :

$$(E_1) \quad : \quad 2x - 1 \leq \frac{1}{2x+1}$$

2. En déduire les solutions de (E_2) sur $[0, 2\pi[$

$$(E_2) \quad : \quad 2\cos(X) - 1 \leq \frac{1}{2\cos(X)+1}$$

Exercice 3. Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules vertes et 5 boules rouges. Les boules sont toutes distingables, numérotées par exemple. On tire successivement et avec remise 4 boules.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages amènent aucune boule rouge ?
3. Combien de tirages amènent que des boules vertes ?
4. Combien de tirages amènent exactement 2 boules jaunes ?
5. Combien de tirages amènent des boules d'une seule couleur ?

1. On fait $4(= p)$ tirages successifs (ordre) avec remise dans un ensemble à 10 éléments $(n = 10)$

$$\boxed{\text{Il y a } 10^4 \text{ tirages possibles}}$$

2. Pour obtenir aucune boule rouge il faut tirer des boules vertes ou jaunes, il y en a 5. On a donc

$$\boxed{\text{Il y a } 5^4 \text{ tirages possibles sans boule rouge}}$$

3. Il y a 2 boules vertes donc

$$\boxed{\text{Il y a } 2^4 \text{ tirages possibles avec que des boules vertes}}$$

4. Il faut tirer 2 boules jaunes (3 possibilités) et 2 boules parmi les vertes ou rouges (7 possiblités). Ensuite il faut positionner les boules jaunes parmi les 4 tirages, cela fait $\binom{4}{2}$ positions possibles.

$$\boxed{\text{Il y a } \binom{4}{2}3^2 7^2 \text{ tirages possibles exactement 2 boules jaunes}}$$

5. Pour obtenir qu'une seule couleur on a 3 façons de faire : que des vertes V , que des jaunes J ou que des rouges R. On a déjà calcule le cardinal de V à la question 3. On fait de même avec J on obtient $\text{Card}(J) = 3^4$ et $\text{Card}(R) = 5^4$. Finalement

$$\boxed{\text{Il y a } 2^4 + 3^4 + 5^4 \text{ tirages qui amènent qu'une seule couleur}}$$

Exercice 4. On considère les mains de 5 cartes (tirages simultanés de 5 cartes) que l'on peut obtenir d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y-a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y-a-t-il de mains comprenant exactement deux as ?
3. Combien y-a-t-il de mains comprenant au moins un coeur ?
4. Combien y-a-t-il de mains comprenant exactement un roi et un coeur ?

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$.
2. On note $f(x) = \sin(x) - x$. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < 0$.
3. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
5. Montrer que $f(x) = 0 \iff x = 0$.
6. Déterminer la valeur de ℓ.

Info

1. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne la valeur de u_n.
2. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $e \in \mathbb{R}^+$ et qui retourne la valeur du premier terme $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $|u_{n_0} - \ell| \leq e$ et la valeur de u_{n_0}.