Liste Exercices et Problèmes DS DM

Table des matières

I Analyse

I. 1 Résolution inéquation

Exercice 1. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+2}.$$

I. 2 Calcul ensemble de définition

Exercice 2. Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{(x^2-4)\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

I. 3 Résolution $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$

Exercice 3. On cherche à résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue réelle x :

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$$

1. Donner le domaine de définition de l'équation (E).
2. Ecrire un programme python qui demande à l'utilisateur un flottant x et qui renvoie True si le réel ets solution de l'équation (E) et False sinon.
3. Montrer que toute solution x de (E) est solution du système (S) suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{x} & < & \frac{x}{2}+1 \\ \frac{x}{2}-1 & < & \sqrt{x} \end{cases}$$

4. Résoudre le système (S).
5. Soit $\alpha = 2(2+\sqrt{3})$ Calculer la partie entière de α.
6. Pour tout $k \in [\![0,7]\!]$ déterminer si les réels de l'intervalle $[k, k+1[$ sont solutions de (E).
7. Conclure.

I. 4 Etude de $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$

Exercice 4. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout $x \in]1, e[$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a $(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} > 0$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer, toujours à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n \leq e$.
   (c) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

I. 5 Racine de $x^3 - 6x - 9$

Exercice 5. On cherche les racines réelles du polynôme $P(x) = x^3 - 6x - 9$.

1. Donner en fonction du paramètre x réel, le nombre de solutions réelles de l'équation $x = y + \frac{2}{y}$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| \geq 2\sqrt{2}$. Montrer en posant le changement de variable $x = y + \frac{2}{y}$ que :

$$P(x) = 0 \iff y^6 - 9y^3 + 8 = 0$$

3. Résoudre l'équation $z^2 - 9z + 8 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{R}$.
4. En déduire une racine du polynôme P.
5. Donner toutes les racines réelles du polynôme P.

I. 6 Résolution de $\sqrt{e^x - 2} \geq e^x - 4$

Exercice 6. Donner l'ensemble de définition de

$$f(x) = \sqrt{e^x - 2}$$

Résoudre

$$f(x) \geq e^x - 4$$

I. 7 Equation trigonométrique et changement de variable

Exercice 7.

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue y suivante :

$$\frac{y-3}{2y-3} \leq 2y \quad (E_1)$$

2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation d'inconnue X :

$$\frac{\sin^2(X) - 3}{2\sin^2(X) - 3} \leq 2\sin^2(X) \quad (E_2)$$

3. Finalement donner les solutions sur $[0, 2\pi[$ de l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) - 3}{2\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) - 3} \leq 2\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) \quad (E_3)$$

I. 8 Equation différentielle, changement de variable

Exercice 8. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall t > 0,\ f'(t) = f(1/t)$$

On fixe une fonction $f \in \mathcal{S}$ et on définit la fonction g par

$$g(x) = f(e^x)$$

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde en fonction de f.
2. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est solution de l'équation diffrentielle suivante :

$$y'' - y' + y = 0 \quad (E)$$

3. Résoudre (E).
4. En déduire que f est de la forme

$$f(t) = A\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + B\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

où (A, B) sont deux constantes réelles.

On appelle $f_1(t) = \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$ et $f_2(t) = \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$

5. Calculer les dérivées premières de f_1 et f_2
6. En considérant les cas $t = 1$ et $t = e^{\pi/\sqrt{3}}$, montrer que A et B sont solutions de

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} A - B\sqrt{3} & = & 0 \\ A\sqrt{3} - 3B & = & 0 \end{array} \right.$$

7. Résoudre (S).
8. Conclure.

I. 9 Suite arithmético-géométrique

Exercice 9. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

I. 10 Equation rationnelle à paramètre

Exercice 10. Résoudre l'équation pour $x \in \mathbb{R}$ de paramètre a :

$$\frac{1}{x-a} \geq x$$

I. 11 Résolution de $\left\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \right\rfloor = 0$

Exercice 11. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \right\rfloor = 0 \qquad (E)$$

1. Déterminer le domaine de définition de (E).
2. Dire si les réels suivants sont solutions ou non de (E)

$$x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = 12$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
4. Montrer que résoudre (E) est équivalent à résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \sqrt{5x-1} > & 2x - 1 & \quad (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x & \quad (E_2) \end{array} \right.$$

5. Résoudre les deux inéquations obtenues à la question précédente.
6. Résoudre (E).

I. 12 Equation complexe

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)+1=0$$

I. 13 Somme de nombres complexes(Pb)

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la somme pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$Z(x)=\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

1. Montrer par récurrence que $Z(x)=\frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}$.
   On suppose que $n \geq 2$, on pose :
   $$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
2. Justifier que $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Prouver que : $S_n=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
4. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$.

I. 14 Equations trigonométriques

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi[$:

$$\cos(3x-1)=\sin(2x) \tag{1}$$

$$\cos(3x)+\cos(2x)+\cos(-x)=0 \tag{2}$$

I. 15 Arctan(Pb)

Exercice 15 (Autour de arctan)**.**

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ que vaut $\tan(\arctan(x))$?
   (b) Soit $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?
   (c) Soit $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?
   (d) Soit $k \in \mathbb{Z}$, et $x \in]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?
2. On rappelle que la dérivée d'un quotient $\frac{f}{g}$ vaut $\frac{f'g-fg'}{g^2}$. Montrer que pour tout x où tan est définie on a :
   $$\tan'(x)=1+\tan^2(x).$$

3. On rappelle que la dérivée d'une composée $f \circ g$ vaut $g' \times f' \circ g$. Grâce à la formule obtenue en 1.(a) montrer que la dérivée de arctan sur $\mathbb{R}$ vaut

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$

5. Soit x, y deux réels positifs. Montrer que si $xy < 1$ alors

$$0 \leq \arctan(x) + \arctan(y) < \frac{\pi}{2}$$

6. Etant donnée $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, tel que $xy < 1$, montrer que

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$ [1]

7. Soit $x > 0$, comparer : $\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ et $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$.
8. Simplifier

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

9. En déduire $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

I. 16 Simplification Produit

Exercice 16. Simplifier

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

En déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

I. 17 Suite récurrente et césaro PB(long)

Exercice 17. Le but de cet exerice est l'étude de la suite (a_n) définie par $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{a_n(1+a_n)}{1+2a_n}$.

1. Etude de la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.

---

1. De manière plus générale, $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$, où :

- $k = 0$ si $xy < 1$.
- $k = 1$ si $xy > 1$, avec x et y positifs.
- $k = -1$ si $xy > 1$, avec x et y négatifs.

(a) Calculer a_2 et a_3.

(b) Etudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{x(x+1)}{1+2x}$

(c) Déterminer l'image directe de $]0,1[$ par f.

(d) Démontrer que, $\forall n \geqslant 2$, on a $0 < a_n < 1$.

(e) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

(f) Rédoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0,1]$.

(g) En déduire la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.

2. Un résultat intermédiaire.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante, admettant une limite ℓ en $+\infty$ et $(C_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n \leq u_n$.

(b) Montrer que pour $(C_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2C_{2n} - C_n \geq u_{n+1}$.

(d) En déduire que $(C_n)_{n\geq 1}$ converge et donner la valeur de sa la limite en fonction de celle de $(u_n)_{n\geq 1}$.

3. Etude d'un équivalent de $(a_n)_{n\geq 1}$.

(a) Montrer que $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1+a_n}$.

(b) On pose $u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

(c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(d) En posant $C_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, exprimer C_n en fonction de a_{n+1} et de a_1.

(e) Conclure à l'aide de la question 2.e que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

I. 18 $u_{n+1} = \sin(u_n)$ *(Pb)*

Exercice 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sin(u_n) \end{array}\right.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$.
2. On note $f(x) = \sin(x) - x$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < 0$.
3. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
5. Montrer que $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
6. Déterminer la valeur de ℓ.

Info

1. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne la valeur de u_n. (Pour ceux qui n'ont pas encore vu les fonctions, vous pouvez écrire un script qui demande à l'utilisateur la valeur de n souhaité et qui retourne la valeur de u_n sans les fonctions, mais bon c'est pas si différent...)
2. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $e \in \mathbb{R}^+$ et qui retourne la valeur du premier terme $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $|u_{n_0} - \ell| \leq e$ et la valeur de u_{n_0}. (même remarque)

I. 19 $I_{n+1} = (2n+1)I_n$

Exercice 19. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (2n+1)I_n$. Exprimer I_n en fonction de n à l'aide uniquement de factorielle et puissance.

I. 20 Suite définites implicitement $x^3 + nx - 1$ *(Pb)*

Exercice 20.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$. On la note x_n.
2. Montrer que $x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1 < 0$.
3. En déduite que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Justifier que la suite est minorée par 0 et majorée par 1.
5. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. A l'aide d'un raisonement par l'absurde justifier que cette limite vaut 0.

I. 21 $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$

Exercice 21. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout $x \in]1, e[$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a $(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} > 0$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 a l'aide d'une intégration par partie.
   (b) Démontrer, toujours à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n \leq e$.
   (c) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

I. 22 Etude de $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$

Exercice 22. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$$

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de f.
2. Calculer la dérivée de f en déduire que le signe de f' dépend de celui de $g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$
3. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de g et calculer sa dérivée.
4. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $f'(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]0, \alpha[\cap D_f$.
5. Donner le tableau de variations complet de f.
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en e.

I. 23 Wallis - Calcul $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ (Pb)

Le but de ce DM est de calculer la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

I. 23. a Convergence

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Montrer que pour tout $k \geq 2$
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 2]$.

I. 23. b Calcul de la limite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit I_n et J_n par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)dt \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)dt$$

1. Montrer que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$
2. (a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :
$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$
(on pourra utiliser que $\cos^{2n}(t) = \cos^{2n-1}(t)\cos(t)$)
   (b) En déduire que
$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

3. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^{2n-1}(t)\sin(t)dt = \frac{1}{2n}I_n$$

(b) Montrer que

$$J_{n-1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2\sin(t))\cos^{2n-2}(t)\sin(t)dt$$

(c) En utilisant une intégration par parties en déduire que :

$$J_{n-1} - J_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}I_n + J_n\right)$$

(d) On désigne par $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $K_n = \frac{J_n}{I_n}$. En utilisant la relation obtenue précédemment, montrer que :

$$\frac{J_{n-1}}{I_n} - K_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n} + K_n\right)$$

puis en déduire que :

$$K_{n-1} - K_n = \frac{1}{2n^2}$$

4. Le but de cette question est de montrer que $K_n \to 0$

(a) démontrer que pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a :

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$$

(b) En déduire que pour tout entier n on a :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$$

puis que :

$$0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)}$$

5. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$$

I. 24 Etude de $f(x) = x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 23. Soit f la fonction définie pour tout x par $f(x) = x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Donner le domaine de définiiton et de dérivabilité de f.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner l'équation de la tangente (T_n) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse n.
3. Calculer les coordonnées de l'intersection entre (T_n) et l'axe des abscisses. On note x_n la coordonnée non nulle.
4. Calculer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I. 25 Calculs de limites

Exercice 24. Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{e^x-1}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x+1)}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)e^{x^2}}{x^x}$

Exercice 25. Donner des équivalents simples de

1. Quand $x \to 1$ de $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$
2. Quand $x \to 0$ de $\frac{x\ln(x)}{e^x-1}$
3. Quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k^2 + k$

I. 26 Etude dérivabilité

Exercice 26. Etudier la continuité et la dérivabilité de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ces fonctions sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$?

I. 27 Fonctions k-contractante (Pb)

Exercice 27. Fonctions k-contractantes.
On suppose que f est une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ et qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Une telle fonction s'appelle une fonction k-contractante.

1. Montrer que f est continue.
2. En déduire que f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.
3. Montrer par l'absurde que ce point fixe est unique. On le note c.
4. On considère alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $c_0 \in [0,1]$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = f(c_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leq k^n |c_0 - c|$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I. 28 Etude de $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. (Pb)

Exercice 28. Le but de ce problème est d'étudier la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. Etude globale :
   (a) Justifier que g est bien définie sur $\mathcal{D}_g =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   (b) Montrer que g est positive sur $\mathcal{D}_g$.
   (c) Justifier que g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et exprimer sa dérivée en tout point de $\mathcal{D}_g$.
   (d) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_g$.
   (e) Etudier les variations de g sur $\mathcal{D}_g$. (les limites aux bornes ne sont pas demandées pour cette question)
2. Etude au voisinage de 0
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in]0,1[\quad \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$$
   On fera très attention aux signes dans les inégalités.
   (b) En déduire que g se prolonge par continuité en 0 et préciser la valeur de ce prolongement. Par la suite, on note encore g la fonction continue, prolongée en 0
   (c) Montrer que g est dérivable à droite en 0 et préciser $g'(0)$.
3. Etude au voisinage de 1.
   (a) A l'aide du théorème des accroissements finis appliquer à $h(t) = \ln(t) - t$ montrer que pour tout $t \in]0,1[$:
   $$0 \leq \frac{\ln(t) - t + 1}{t-1} \leq \frac{1-t}{t}$$
   (b) En déduire que pour tout $t \in]0,1[$:
   $$\left|\frac{\ln(t) - t + 1}{t-1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$
   (c) Montrer de manière analogue que pour tout $t > 1$ on a
   $$\left|\frac{\ln(t) - t + 1}{t-1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$
   (d) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$
   $$\left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right| \leq 2$$
   (e) Conclure que g est prolongeable par continuité en 1.
4. Etude au voisinage de $+\infty$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in]1,+\infty[\quad \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x)$$
   (b) En déduire la limite de g en $+\infty$.

I. 29 Non interversion limite intégrale

Exercice 29. Soit $x \in [0,1]$

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2}$.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
4. Que doit-on retenir de cet exercice ?

I. 30 Etude $x\exp(\sin^2(x))$. [d'après Godillon 16-17]

Exercice 30. On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto x\exp(\sin^2(x)).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
2. Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers un ensemble I à déterminer.
3. Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de $f_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
4. Justifier l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_{x\to0}(x^5)$.
5. En composant les développements limités de f^{-1} et f, déterminer les valeurs des constantes a, b et c.
6. Que peut-on en déduire pour la tangente à la courbe représentatitve de f^{-1} au voisinage de 0 ?

I. 31 Inégalités / récurrence

Exercice 31.

1. Comparer (avec une inégalité large) pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres n et 3^n. (Prouver cette inégalité)
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

   (a) Enoncer l'inégalité triangulaire.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 4^n$.

I. 32 Fibonacci

Exercice 32. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
2. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$.

3. (a) On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.
   (b) Montrer que l'expression explicite de F_n st donnée par $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

I. 33 Equation à paramètre

Exercice 33. On note $\Delta(m) = m^2 - 8m + 12$.

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue m :
$$\Delta(m) > 0 \tag{I_1}$$
2. On note $r_+(m) = \frac{m+\sqrt{\Delta(m)}}{4}$ et $r_-(m) = \frac{m-\sqrt{\Delta(m)}}{4}$.
3. Résoudre
$$r_+(m) \geq 1 \quad \text{et} \quad r_-(m) \geq 1.$$
4. Résoudre l'inéquation d'inconnue y et de paramétre $m \in \mathbb{R}$
$$\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} \geq m \tag{I_2}$$

I. 34 Partie Entière

Exercice 34. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$\left\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \right\rfloor = 0 \tag{E}$$

1. Déterminer le domaine de définition de E.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
3. Montrer que résoudre (E) revient à résoudre deux inéquations qu'on déterminera.
4. Résoudre les deux équations obtenues à la question précédente.
5. Résoudre (E).

I. 35 Equation trigonométrique / changement de variable

Exercice 35. Résoudre l'inéquation d'inconnue x :
$$\frac{\frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} \leq x + \frac{1}{2}$$

Résoudre sur $[0, 2\pi[$:
$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin(x) - \frac{1}{2}} \leq \sin(x) + \frac{1}{2}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

I. 36 Calcul de la dérivée de arcsin *[Agro 2015]*

Exercice 36. 1. Que vaut $\arcsin(1/2)$ et $\arcsin(-\sqrt{2}/2)$?

2. Tracer le graphe de la fonction arcsin dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Soit $x \in [-1, 1]$, calculer $\sin(\arcsin(x))$?
4. Soit $x \in [-1, 1]$, montrer que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \cos(2n \arcsin(x))$
5. Calculer f_0, f_1 et f_2.
6. (a) Soient a et b deux réels, exprimer $\cos(a + b) + \cos(a - b)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
   (b) En déduire que pour tout entier n on a :
$$\forall x \in [-1, 1], \quad f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1 - 2x^2)f_{n+1}(x).$$

I. 37 Somme double max *+ info*

Exercice 37. 1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $i \leq n$. Caculer en fonction de i et n :
$$\sum_{j=i+1}^{n} j$$
3. On rappelle que l'on note $\max(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } i \geq j \\ j & \text{sinon.} \end{cases}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \max(i, j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2 + i^2 + n - i}{2}$$
4. En déduire que
$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \max(i, j) \left(\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \right)$$
5. On note
$$S_k = \sum_{i,j \in [\![1,1000]\!]} \max(i^k, j^k).$$
   (a) Rappeler ce que renvoie l'instruction Python `range(a,b)` avec deux entiers $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $a \leq b$.
   (b) Ecrire un script Python qui demande à l'utilsateur la valeur de k, calcul S_k et affiche le résultat.

I. 38 Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k^4$

Exercice 38. 1. Rappeler la valeur de $R_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, développer $(k+1)^5 - k^5$.
3. A l'aide de la somme téléscopique $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 - k^5$ donner la valeur de $R_4 = \sum_{k=0}^{n} k^4$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. (On pourra garder une formule développée, malgré ce que j'ai pu dire en classe...)
4. Soit $x \in \mathbb{N}$, on note $R_x(n) = \sum_{k=0}^{n} k^x$ Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$ et rend la valeur de $R_x(n)$
5. Soit $x \in \mathbb{N}$, on note $R_x(n) = \sum_{k=0}^{n} k^x$. Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$, qui affiche un message d'erreur si x n'est pas un entier positif et rend la valeur de $R_x(n)$ sinon.
6. Montrer que les suites $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.
7. Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre $e > 0$ et qui rend le premier rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_{n_0} - b_{n_0}| \leq e$ et la valeur de a_{n_0}

I. 39 Formule D'inversion de somme (Pb)

Exercice 39. Dans cet exercice, on considère une suite quelconque de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Partie I : Quelques exemples

1. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1.
2. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \exp(n)$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $(n \geq 1, n \geq k \geq 1)$,
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.
   (c) Calculer la valeur de b_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Partie II : Formule d'inversion

Le but de cette partie est de montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'exprime en fonction de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que pour tout $(k,n,p) \in \mathbb{N}^3$, tel que $k \leq p \leq n$ on a :

$$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}.$$

2. Montrer que, pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, tel que $k \leq n$ on a :

$$\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n+1-k}{i} = (-1)^{n-k}.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k}b_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n+1}{k}b_k$$

4. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_{n+1} en fonction de b_{n+1} et de $a_0, ..., a_n$.
5. Prouver, par récurrence forte sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k.$$

6. En utilisant le résultat précédent montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k2^k(-1)^{n-k} = 2n.$$

I. 40 Etude de $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\sin(x)}\right)$

Exercice 40. 1. Résoudre $\sin(x) \geq \frac{-1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$

2. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de f définie par

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\sin(x)}\right)$$

3. Rappeler la formule de dérivée d'une composée $(f \circ g)'$.
4. Calculer la dérivée de f sur son ensemble de dérivabililité.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $\frac{\pi}{6}$.
6. On rappelle que la fonction $a\%b$ en Python renvoie le reste de la division de a par b, c'ets à dire l'unique réel r entre $[0, b[$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a = kb + r$. Cette fonction peut prendre des paramètres a, b réels, pas nécessairement entier.
   (a) Ecrire une fonction Python `reste` qui prend en paramètre un réel x et qui retourne son reste modulo 2π.
   (b) Ecrire une fonction python `definition` qui prend en paramètre un réel x et renvoi 1 si $x \in D_f$ et 0 sinon.
   (c) Ecrire une fonction python `f` qui prend en parmètre un réel x, qui renvoie un message d'erreur si $x \notin D_f$ et retourne la valeur de $f(x)$ sinon.

I. 41 EDL - concentration de glucose

Exercice 41. En l'abscence d'apport énergétique la concentration en glucose dissout dans le sang dans le temps mesurée en heure $t \mapsto c(t)$ (en $g \cdot L^{-1}$) vérifie l'équation différentielle

$$y' + 0.01y = -0.02$$

La concentration en glucose après un repas est égale à $c_0 = 1,2gL^{-1}$.

Donner les solutions de l'équation différentielle $y' + 0.01y = -0.02$.

Donner l'expression de la concentration en glucose $c(t)$ en utilisant la condition initiale $c(0) = 1.2$

Au bout de combien de temps après un repas la concentration en glucose dans le sang sera inférieure à $0,8gL^{-1}$?

Exprimer le résulat avec un calcul litéral, puis en donner une valeur approchée (on pourra utiliser que $\ln(7/8) \approx -0.13$)

I. 42 Etude de $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ (Pb)

Exercice 42. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. Etudiez la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$. (Domaine de définition, limites et variations)
3. Résoudre $f(x) = x$. On note α l'unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $u_1 < \alpha < 2$.
5. On note $I = [1, \alpha]$ et $J = [\alpha, 2]$. Montrer que $f(I) \subset J$ et $f(J) \subset I$.
6. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

   $$a_n = u_{2n} \quad b_n = u_{2n+1}.$$

   Enfin on note A la fonction définie pour tout x par $A(x) = f \circ f(x)$. Montrer que $a_{n+1} = A(a_n)$. On peut montrer de manière similaire que $b_{n+1} = A(b_n)$, on ne demande pas de le prouver.
7. Soit F une fonction réelle. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ alors $F(\mathcal{E}) \subset F(\mathcal{F})$. En déduire que I est stable par A. De même, on pourrait montrer que J est stable par A, on ne demande pas de le prouver.
8. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $A(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{x+1}$
9. Résoudre $A(x) \geq x$ sur $]0, +\infty[$.
10. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, calculer leur limite.
12. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
13. (a) Ecrire une fonction Python `u` qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n

    (b) Ecrire une fonction Python `limiteu` qui prend en paramètre un reel $\epsilon > 0$ et qui renvoie la valeur de du premier rang $n_0 \geq 0$ tel que $|u_{n_0} - \ell| \leq \epsilon$

I. 43 Calcul de limites

Exercice 43. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \ln(x)$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^x-1}{\sin(x)\ln(x^2)}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2-1}$

I. 44 Equation intégrale $f(x)=\int_0^{ax} f(t)dt$ (Pb)

Exercice 44. Soit $a \in]-1,1[$. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

1. Calcul des dérivées successives de f.
   (a) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.
   (b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.
   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

   (d) En déduire, pour tout nombre entier naturel n la valeur de $f^{(n)}(0)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a :

   $$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

   On pourra faire une récurrence et utiliser une intégration par parties
3. Soit A un nombre réel strictement positif.
   (a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que :

   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f(x)| \leq M$$

   et en déduire que pour tout nombre entier naturel n, on a :

   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$

   .

   (b) Soit x un nombre réel apartenant à $[-A, A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$|f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (c) En déduire que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-A, A]$
   (d) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

I. 45 Fonction de plusieurs variables

Exercice 45. 1. Soit $u(x,y)$ la fonction définie par

$$u(x,y) = x^2 + xy + x - 2y^2 + 2y$$

et les deux sous-ensembles de de $\mathbb{R}^2$, E et F définies par :

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2 \,|\, -\frac{x}{2} \leq y \leq x+1\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2 \,|\, x+1 \leq y \leq -\frac{x}{2}\}$$

(a) Sur un graphique soigné, représenter E et F.

(b) En considérant à y fixé, la fonction polynômiale $P(x) = u(x,y)$, résoudre $u(x,y) \geq 0$

2. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \int_0^{u(x,y)} e^{\sqrt{t}}\, dt.$$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

(b) Caculer le gradient de f.

(c) En déduire que $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est l'unique point critique de f.

3. (a) Calculer $f\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(b) Montrer que $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est un minimum sur l'ensemble de définition de f.

(c) Question bonus : D'autres points réalisent ce minimum, lesquels ? Pourquoi le gradient ne s'annule pas en ces autres points ?

I. 46 Intégrale de Gauss (D'après G2E 2019]

Exercice 46 (G2E 2019)**.** Dans cet exercice σ désigne un réel strictement positif.

On considère les trois fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = xe^{-x}, \quad h(x) = \frac{2}{ex}$$

$\mathcal{C}_\sigma$ désigne la courbe représentative de f_σ et $\mathcal{H}$ la courbe représentative de h

1. Soit $I_\sigma(t) = \displaystyle\int_0^t f_\sigma(x)dx$. Calculer $I_\sigma(t)$ pour tout $t \geq 0$ et en déduire la limite $\lim\limits_{t\to\infty} I_\sigma(t)$

L'année prochaine, on dira que f_σ est une fonction de densité.

2. f_σ est-elle continue ?

3. (a) Démontrer que g admet un maximum que l'on déterminera.

(b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_\sigma(x) \leq h(x).$$

(c) Etudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente puis montrer que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, les courbes $\mathcal{C}_\sigma$ et $\mathcal{H}$ ont une tangente commune dont on donnera une équation cartésienne.

I. 47 Etude famille de fonction, intégrale, et somme (ECRICOME 2002)

Exercice 47. On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

A- Étude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Étude du cas particulier $n = 1$.
   (a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1,+\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
   (a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   (b) En déduire les variations de f_n sur $]-1,+\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

B- Étude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

1. Calcul de U_1.
   (a) Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que :
   $$\forall x \in [0,1], \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale :
   $$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx.$$
   (c) Montrer que $U_1 = \dfrac{1}{4}$.
2. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
   (b) Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (On ne demande pas sa limite.)

(c) Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

(d) En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :
$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

(a) Montrer que :
$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

(b) En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx.$$

(c) En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :
$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

I. 48 inéquation à paramétre - Une bien l'autre pas finie

Exercice 48. On considère l'inéquation (E_a) de paramètre $a \in \mathbb{R}$ suivante :
$$\frac{2x+a}{x-4a} \leq \frac{x}{x-2a} \quad (E_a)$$

1. Donner l'ensemble des solutions pour $a = 0$

   Pour la suite on supppose que $a \neq 0$.
2. Donner le domaine de définition de (E_a) en fonction de a.
3. Résoudre pour $a > 0$ l'inéquation : $(x-4a)(x-2a) \geq 0$.
4. Résoudre pour $a > 0$ l'inéquation : $x^2 + ax - 2a^2 \geq 0$.
5. En déduire pour $a > 0$ les solutions de (E_a).
6. Faire de même avec $a < 0$.

Exercice 49. On considère l'équation (E_a) de paramètre $a \in \mathbb{R}$ suivante :
$$\sqrt{x+a^2} = \frac{a^2}{x-a} \quad (E_a)$$

On note $\mathcal{S}_a$ l'ensemble des solutions de (E_a)

1. (a) Determiner $\mathcal{C}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation d'inconnue $a \in \mathbb{R}$, $-a^2 \leq a$.

   (b) Déterminer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition $\mathcal{D}_a$ de l'équation (E_a).

(c) Résoudre l'équation (E_0).

(d) A quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$, le nombre 0 est il solution de (E_a) ? (En d'autres termes, déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in \mathcal{S}_a$)

2. Résoudre pour $x \in \mathcal{D}_a$ et en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{a^2}{x-a} < 0$$

(On distinguera les cas $a \in \mathcal{C}$ et $a \notin \mathcal{C}$)

3. En déduire que $\mathcal{S}_a \subset]a, +\infty[$.
4. Montrer que pour tout $x > a$,

$$(E_a) \Longleftrightarrow x^2 + (a^2 - 2a)x + (a^2 - 2a^3) = 0$$

5. Soit Δ_a le discriminant du polynôme $x^2 + (a^2 - 2a)x + (a^2 - 2a^3)$. Montrer que

$$\Delta_a = a^3(a+4)$$

6. En déduire une expression simple de l'ensemble $P = \{a > 0 \,|\, \Delta_a \geq 0\}$
7. Résoudre finalement (E_a) en fonction de a (On suppose toujours $a > 0$)

II Algébre

II. 1 Système linéaire

Exercice 50. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 2x & +y & & = & \lambda x \\ & y & & = & \lambda y \\ -x & -y & +z & = & \lambda z \end{array} \right.$$

1. Mettre le système sous forme échelonné.
2. En donner le rang en fonction de λ.
3. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
4. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ
5. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$?

II. 2 Système linéaire (produit - changement de variables)

Exercice 51. Résoudre le système suivant où x, y, z sont des réels positifs :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x^2y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{13} & = & 2 \\ x^2yz^7 & = & 3 \end{array} \right.$$

II. 3 Système linéaire $AX = \lambda X$

Exercice 52. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & \lambda x \\ x + 3y & = & \lambda y \end{array} \right.$$

1. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
2. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ
3. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$.

II. 4 Puissance matrice $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$

Exercice 53. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(M - \mathrm{Id}_3)(M + 3\,\mathrm{Id}_3) = 0_3$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe des réels α_n et β_n tel que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$
3. Détermine pour tout $n \in \mathbb{N}$ les réels α_n et β_n et en déduire l'expressionde M^n en fonction de n. (On pourra montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants)

II. 5 Calcul du rang de M_a

Exercice 54. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $M_a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, définie par

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de M_a en fonction de a.
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles M_a est inversible et calculer l'inverse dans ces cas.

II. 6 Etude des racines de $X^5 + tX - 1$

Exercice 55. Pour tout réel $t > 0$, on note P_t le polynôme $X^5 + tX - 1 \in \mathbb{R}_5[X]$. Le but de ce problème est d'étudier les racines de P_t en fonction de $t > 0$.

1. On fixe $t > 0$ pour cette question. Prouver que P_t admet une unique racine notée $f(t)$.
2. Montrer que $f(t) \in]0, 1[$ pour tout $t > 0$.
3. Montrer que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.
5. Déterminer $\lim_{t\to 0^+} f(t)$.
6. Déterminer $\lim_{t\to +\infty} f(t)$.
7. En déduire $\lim_{t\to+\infty} tf(t) = 1$. (Comment noter ce résultat avec le signe équivalent : $\sim$)

8. Justifier que f est la bijection réciproque de $g :]0,1[\to]0,+\infty[\; x \mapsto \frac{1-x^5}{x}$
9. (a) Justifier que f est dérivale sur $]0,+\infty[$ et exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ pour tout $t > 0$.
   (b) En déduire la limite de $f'(t)$ en 0. Calculer la limite de $t^2 f'(t)$ en $+\infty$ (Comment noter ce résultat avec le signe équivalent : $\sim$)

II. 7 Tchebychev (Pb)

Exercice 56. On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1 \quad \text{et} \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. (a) Calculer T_2, T_3 et T_4.
   (b) Calculer le degré et le coefficient de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Calculer le coefficient constant de T_n.
2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   (b) En déduire que $\forall x \in [-1,1]$, on a $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.
3. (a) En utilisant la question 2a), déterminer les racines de T_n sur $[-1,1]$.
   (b) Combien de racines distinctes a-t-on ainsi obtenues ? Que peut on en déduire ?
   (c) Donner la factorisaiton de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II. 8 Diagonalisation

Exercice 57. Soit A la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ n'est pas inversible. On appelle ces réels les *valeurs propres* de A.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Montrer que l'espace $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$ est un sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Pour chaque valeur propre de A (les réels obtenus à la question 1), déterminez une base de E_λ. Vérifier qu'on obtien au total 3 vecteurs que vous noterez u_1, u_2, u_3.
4. La famille (u_1, u_2, u_3) est elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
5. (a) Soit P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première colonne est constitutée des coordonnées de u_1, la seconde des coordonnées de u_2 et la dernière des coordonnées de u_3. Déterminez explicitement P.
   (b) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (c) Déterminez mla matrice $D = P^{-1}AP$.
   (d) Déterminez une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n.

II. 9 Etude application linéaire [Godillon 17-18]

Exercice 58. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par

$$(x, y, z) \mapsto (x - 3y + 3z, 2y - z, 2y - z).$$

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Déterminer une représentation paramétrique de $\ker(\varphi)$.
   (b) Déterminer la dimension de $\ker(\varphi)$. Que peut-on en déduire pour l'application φ ?
3. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Que peut-on en déduire pour l'application φ ?
4. Soit Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$
   (a) Que vaut l'applicaiton $\varphi \circ \varphi$?
   (b) En déduire que $\varphi \circ (\varphi - \mathrm{Id})$ et $(\varphi - \mathrm{Id}) \circ \varphi$ sont égales à l'application constante égale à 0.
   (c) A l'aide des résultats précédents, montrer que $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}) \subset \ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \ker(\varphi - \mathrm{Id})$.
   (d) Que peut-on en déduire pour l'application $\varphi - \mathrm{Id}$?
5. Montrer que $\ker(\varphi - \mathrm{Id}) = \mathfrak{Im}(\varphi)$.
6. (a) Déterminer une base (e_1) de $\ker(\varphi)$ et une base (e_2, e_3) de $\ker(\varphi - \mathrm{Id})$
   (b) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Ecrire la matrice de φ dans la base (e_1, e_2, e_3).

II. 10 Sujet Révisions Algébre linéaire - (Pb)

II. 10. a Equation dans $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à son vecteur nul. On s'intéresse aux endomorphismes f de E vérifiant la relation

$$f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E\,. \quad (*)$$

Un exemple On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y, -x) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $g \circ g$ et vérifier que g est solution de $(*)$
3. Déterminer $F = \ker(g - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et donner une base de F et une base de G.
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$
5. Soit $u = (1, -1)$ et $v = (-2, 1)$ Montrer que $B = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer (x, y) comme combinaison linéaire de u et v.
7. Calculer $g^n(u)$ et $g^n(v)$.
8. Donner finalement l'expression de $g^n(x, y)$ en fonction de x et y.

II. 10. b Etude de f

On se place à nouveau dans le cas général et on s'intéresse à l'équation $(*)$.

1. Montrer que si f vérifie $(*)$ alors f est bijective et exprimer f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de Id_E.
2. Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. L'ensemble des endomorphisme vérifiant $(*)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, espace des endomorphismes de E ?

Etude des puissance de f On suppose dans la suite que f est une solution de $(*)$ et que f n'est pas de la forme $\lambda \operatorname{Id}_E$.

1. Montrer que (f, Id_E) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$
2. (a) Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de Id_E et f.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, f^n peut s'écrire sous la forme $f^n = a_n f + b_n \operatorname{Id}_E$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$
   (c) Justifier que dans l'écriture précédente, le couple (a_n, b_n) est unique.
3. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0$
   (b) En déduire une expression de a_n ne faisant intervenir que n.
   (c) Calculer alors b_n.

II. 10. c Polynômes et application linéaires

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On considère l'application

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

$P(X+1)$ désigne la composée et non le produit des polynômes P et $X+1$.

Etude d'un endomorphisme

1. Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in N$.
3. (a) Montrer que si $P \in \ker(\Delta)$ alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$
   (b) En déduire que si $P \in \ker(\Delta)$ alors P est un polynôme constant.
   (c) Montrer alors que $\ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.
4. (a) Si P n'est pas un polynôme constant, préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P, ainsi que le coefficient dominant.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$
5. soit $n \geq 1$, on note Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur $\mathbb{R}_n[X]$. C'est-à-dire

   $$\Delta_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \Delta(P) \end{array} \right.$$

   Déterminer $\ker \Delta_n$ et montrer que $\operatorname{Im}\Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$
6. Montrer que Δ est surjectif.
7. On considère $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$.
   (a) Vérifier que P est un sev de $\mathbb{R}[X]$ et que $F \cap \ker(\Delta) = \{0\}$
   (b) Conclure que pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $\Delta(P) = Q$. Préciser le degré de P en fonction de celui de Q.

Etude d'une suite de polynômes

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(0) = 0$ et $P_{n-1} = \Delta(P_n)$.
2. Expliciter P_1 et P_2.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $P_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

II. 11 Fraction Rationnelle $Q_n(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$ (Pb)

Exercice 59. Cet exercice propose d'étudier une suite de fractions rationnelles, c'est-à-dire des fonctions définies comme quotients de deux fonctions polynomiales. Plus précisément, on considère les suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_0 & = & 0 \\ Q_0 & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{lcl} P_{n+1} & = & P_n + XQ_n \\ Q_{n+1} & = & Q_n - XP_n \end{array}\right.$$

et on note $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ R_n : x \mapsto \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$.

1. Déterminer R_0, R_1, R_2 et R_3 ainsi que leurs domaines de défintion.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0)$.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le domaine de définition de R_n est de la forme $\mathbb{R} \setminus E_n$ où E_n est un ensemble fini de nombres réels.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n + iP_n = (1 + iX)^n$.
5. Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Ecrire le nombre complexe $(1 + i\tan(\theta))^n$ sous forme algébrique.
   (b) En déduire que $P_n(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$ et $Q_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$.
   (c) Justifier proprement que $E_n = \left\{\tan\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \mid m \text{ entier impair tel que } -n < m < n \right\}$.
   (d) Montrer que $\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $R_n(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$
6. Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose qu'il existe deux polynomes $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et une fraction rationnelle $R : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ telle que $\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $R(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$
   (a) Montrer que $\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $(PQ_n - QP_n)(\tan(\theta)) = 0$.
   (b) En déduire que $PQ_n - QP_n = 0$ puis que $R = R_n$.

II. 12 Diagonalisation (Pb)

Exercice 60. Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système $MX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.
2. Calculer $(M - \mathrm{Id})^2$. Donner son rang.

3. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer Me_1, Me_2 en fonction de e_1, e_2.
4. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Me_3 = \alpha e_2 + \beta e_3$.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
6. Soit $T = P^{-1}MP$. Calculer T.
7. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T^n = P^{-1}M^nP$$

8. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice N telles que

$$T = D + N \quad \text{et} \quad ND = DN$$

9. Montrer que $N^2 = 0$
10. Montrer que $T^n = D^n + nND^{n-1}$.
11. En déduire la valeur de M^n.

II. 13 Racines de $z^n + z + 1$ (Pb)

Exercice 61. On considère l'équation suivante , d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + z + 1 = 0 \tag{E}$$

1. On note $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la fonciton définie par $f(t) = t^3 + t + 1$. A l'aide de l'étude de f, justifier que l'équation (E) possède une unique solution réelle, que l'on notera r. Montrer que $r \in]-1, \frac{-1}{2}[$.
2. On note z_1 et z_2 les deux autres solutions complexes de (E) qu'on ne cherche pas à calculer. On sait alors que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ se factorise de la manière suivante :

$$P(X) = (X - r)(X - z_1)(X - z_2).$$

   En déduire que $z_1 + z_2 = -r$ et $z_1z_2 = \frac{-1}{r}$.
3. Justifier l'encadrement : $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$.
   De même montrer que $1 < |z_1z_2| < 2$.
4. Rappeler l'inégalité triangulaire et donner une minoration de $|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{C}$.
5. En déduire que

$$|z_1 + z_2| > |z_1| - \frac{2}{|z_1|}$$

6. Grâce à un raisonnement par l'absurde montrer que $|z_1| < 2$.
7. Conclure que toutes les solutions de (E) sont de modules strictement inférieures à 2.

II. 14 EV - exemple et c-ex

Exercice 62. On admet que l'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$: (Si oui, le prouver, si non expliquer pourquoi)

— L'ensemble des fonctions qui valent 0 en 0 : $E_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,|\, f(0) = 0\}$

— L'ensemble des fonctions qui valent 1 en 0 : $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,|\, f(0) = 1\}$

— L'ensemble des fonctions qui vallent 0 en 1 : $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,|\, f(1) = 0\}$

— L'ensemble des fonctions $E_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,|\, (f(0))^2 + 2f(0) = 0\}$

II. 15 Famille libre /générarive / base Exemples

Exercice 63. Les familles suivantes sont-elles libres, génératrices dans $\mathbb{R}^3$?

— $F_u = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 2)$.

— $F_v = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2)$, $v_3 = (1, 2, 2)$.

— $F_w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ avec $w_1 = (1, 1, 1)$, $w_2 = (2, 1, 2)$, $w_3 = (1, 2, 2)$, $w_4 = (1, 0, 0)$.

II. 16 Etude de $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$ [Agro 2016]

Problème 1. On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

1. Etude de la nature de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4, on a :
   $$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x} dx.$$
   (c) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives, A, B et C telles que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, on ait :
   $$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C$$
   (d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.
2. Recherche d'un éguivalent de S_n
   (a) Montrer que $\ln^2(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln^2(n)$.
   (b) En déduire que $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.

3. Etude asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$$

   (a) Enoncer le théorème donnant la formule des accroissements finis (en particulier, on précisera avec soin les hypothèses de ce théorème).

   (b) A l'aide de la fonction $x \mapsto \ln^2(x)$ montrer que pour tout $x \geq 3$

$$\ln^2(x+1) - \ln^2(x) \geq 2\frac{\ln(x+1)}{x+1}.$$

   (c) En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

   (d) En déduire que la suite u converge.

4. Ecrire un script Python qui permet d'afficher les 20 premiers termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un même graphique.

5. Ecrire un script Python qui permet d'afficher la fonction $x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{x}$ sur l'intervalle $[1, 20[$
On pourra utiliser les bibliothéques pyplot et numpy importées de la manière suivante : `import maplotlib.pyplot as plt` et `import numpy as np`. On rappelle l'utilisation des fonctions suivantes :
   — Si X et Y sont deux listes (ou array numpy), lpya fonction `plt.plot(X,Y)` place les points dont les abscisses sont contenues dans X et les ordonnées dans Y et les relie entre eux par des segments. Si cette fonction n'est pas suivie de plt.show(), le graphique n'est pas affichés.
   — `plt.plot(X,Y,o)` Meme effet que plt.plot(X,Y) à la différence près que les points sont représentés par un symbole en forme de cercle et ne sont pas reliés.
   — `np.arange(d,n,p)` permet de créer un tableau numpy allant de d à n (non inclus) par pas de p
   — `np.linspace(d,n,N)` permet de créer un tableau numpy de longueur N, espaçant linéairement les points de d à n (n non inclus).

II. 17 Tirages conditionnels

Exercice 64. Une urne contient $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches et $n \in \mathbb{N}^*$ boules noires. On effectue des tirages successifs. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne en y rajoutant $a \in \mathbb{N}^*$ boules de la même couleur.
On répète l'expèrience à chaque tirage.
On note B_i l'événement « Obtenir une boule blanche au tirage i » et N_i « Obtenir une boule noire au tirage i ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(B_2)$.
2. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité d'obtenir d'abord p boules blanches puis q boules noires.
3. Préciser cette valeur pour $b = n = a$.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement p boules blanches en $p + q$ tirages.
5. Préciser cette valeur pour $p = n = a$.
6. (a) Ecrire une fonction Python qui modélise le tirage d'une boule dans une urne avec b boules blanches et n boules noires.

(b) Ecrire une fonction Python qui modélise N tirages successifs (comme décris dans l'énoncé) et retourne le nombre de boules blanches tirées.

(c) Ecrire une fonction Python qui effectue l'expérience décrite et retourne le numéro du premier tirage où l'on tire une boule blanche.

II. 18 Calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ (Pb)

Problème 2. On se propose dans ce problème de calculer la limite de la suite :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$

1. Etude de la convergence de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Déterminer le sens de variation de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq 0$.
   (c) En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. Minoration de la limite
   (a) A l'aide d'un changement de variable montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

   (b) Montrer à l'aide d'une somme téléscopique que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

   (c) En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
   (d) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$\ln(1+x) \leq x.$$

   (e) Montrer à l'aide des questions précédentes que

$$\ell \geq \ln(2).$$

   On pourra aussi utiliser le résultat en bas de page [2]

2. On rappelle le résultat suivant :
Théorème : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
— Et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites.
Alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$

3. Majoration de la limite.
   (a) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:
   $$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$
   (b) On pose $e_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2}$. On va montrer que $(e_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.
      i. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \geq 0$.
      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$.
      iii. Conclure.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$
   (d) En déduire la valeur de ℓ.

II. 19 Matrice, endomorphisme, vp, (Ecricome 2002)

Exercice 65. Dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère le sous-ensemble E des matrices $M(a,b)$ définies par :
$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$
Ainsi :
$$E = \{M(a,b) \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$
On note $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $M(a,b)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Structure de E
   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Donner une base de E, ainsi que sa dimension.
2. Étude d'un cas particulier.
   On pose $A = M(1,0)$.
   (a) Calculer A^2. En déduire que A est une matrice inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A.
   (c) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f_{1,0}$ est :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Diagonalisation des éléments de E et application.
   On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$$\vec{u} = (1,1,1), \quad \vec{v} = (1,-1,0), \quad \vec{w} = (1,1,-2).$$
   (a) Justifier que les matrices de l'ensemble E sont diagonalisables.
   (b) Montrer que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Écrire P.
   (d) Déterminer P^{-1}.
   (e) Exprimer les vecteurs $f_{a,b}(\vec{u})$, $f_{a,b}(\vec{v})$, $f_{a,b}(\vec{w})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
   (f) En déduire l'expression de la matrice $D_{a,b}$ de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{C}$.
   (g) Justifier l'égalité :
$$P^{-1}M_{a,b}P = D_{a,b}.$$
   (h) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $D_{a,b}$ soit inversible.
   (i) Cette condition étant réalisée, déterminer la matrice inverse de $D_{a,b}$.
   (j) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M_{a,b}$ soit inversible.

III Probabilité/Dénombrement

III. 1 Urne Indépendance d'évenements (facile)

Exercice 66. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements

A="tirage d'un nombre pair"
B="tirage d'un multiple de 3"

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

III. 2 Chaine de markov - puce sur un triangle (événement, pas de diag)

Exercice 67. On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

— le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
— pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n pour $n = 0, 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

   En déduire une expression de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer les limites respectives des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n). Interpréter le résultat.

III. 3 Nombre de surjections (Pb)

Exercice 68. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = [\![1, n]\!]$. On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de E_n sur E_p.

1. Calculer $S_{n,p}$ si $p > n$.
2. Justifier grâce au cardinal qu'une surjection de E_n dans E_n est une bijection. En déduire $S_{n,n}$.
3. Déterminer $S_{n,1}$.
4. Combien y-a-t-il d'applications de E_n dans E_2 ? Parmi ces applications lesquelles ne sont pas surjectives ? En déduire $S_{n,2}$.
5. Soit f une surjection de E_{p+1} dans E_p, justifier que tous les éléments de E_p ont exactement un antécédent sauf un qui en a exactement deux. En déduire que $S_{p+1,p} = \frac{p}{2}(p+1)!$

   On suppose désormais que $0 < p \leq n$.
6. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k = 0$
7. Montrer que pour tout (k, q) tel que $0 \leq k \leq q \leq p$

$$\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}.$$

8. (a) En déduire que, si $0 \leq k < p$, alors $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} \binom{p}{q}\binom{q}{k}(-1)^q = 0$.

   (b) Que vaut la somme précédente quand $k = p$?
9. Montrer que pour tout entier q de E_p le nombre d'applications de E_n dans E_p ayant un enemble d'image à q éléments est égal à $\binom{p}{q}S_{n,q}$.
10. En déduire que $p^n = \displaystyle\sum_{q=1}^{p} \binom{p}{q} S_{n,q}$.
11. A l'aide d'une inversion de sommes montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = \sum_{q=1}^{p}\left(\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}\right)S_{n,q}$.

12. A l'aide des questions précédentes (8, 10, 11 notamment), en déduire que $S_{n,p} = (-1)^p \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$.

Dans les questions suivantes on va essayer de déterminer une relation de récurrence entre $S_{n,p}$ et les valeurs de $S_{n-1,p}$ et $S_{n-1,p-1}$

13. Soit $\varphi : E_n \to E_p$ une surjection. (Combien y-a-t-il de possibilités pour φ ?) On note φ_1 la restriction de φ à E_{n-1}.
    (a) Supposons que φ_1 est surjective. Combien y-a-t-il de possibilité pour φ_1 ?
    (b) Supposons que φ_1 n'est pas surjective, en déduire que $Im(\varphi) = Im(\varphi_1) \cup \{\varphi(n)\}$ cette union étant disjointe. $Im(\varphi)$ désigne l'image de la fonction, c'est-à-dire $\{\varphi(e) \,|\, e \in E_n\}$. Montrer ainsi que φ_1 est surjective de E_{n-1} sur $E_p \setminus \{\varphi(n)\}$. Combien y-a-t-il de possibilités pour φ_1 ?
    (c) En déduire que $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
    (d) A l'image du triangle de Pascal, construire une table des $S_{n,p}$ pour $0 \leq p \leq n \leq 5$
    (e) Ecrire un programme Python qui prend en argument (n, p) et retourne la valeur de $S_{n,p}$.

III. 4 Urnes, boules et tirages !

Exercice 69. Une urne A contient 1 boule rouge et 2 noires. Une urne B contient 3 rouges et 1 noire. Au départ, on choisit une urne, la probabilité de choisir l'urne A est $p \in]0, 1[$. Puis on choisit une boule dans cette urne. Si, à un tirage quelconque, on a tiré une boule rouge, le tirage suivant se fait dans A, sinon, on choisit une boule de B. Les tirages se font avec remise. On note p_n la probabilité de choisir une boule rouge au tirage de numéro n. Calculer p_1, puis exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire p_n en fonction de n puis la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

III. 5 Dénombrement des matrices à coefficients $\{0, 1\}$ (Pb)

Exercice 70. Soit $A_n[X]$ le sous ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ dont tous les coefficients sont dans $\{0, 1\}$.

1. Combien y-a-t-il d'éléments dans $A_n[X]$?
2. Combien y-a-t-il d'éléments dans $A_n[X]$ de degré n ? On muni $A_n[X]$ de la probabilité uniforme.
3. On choisit un polynôme P aléatoirement dans $A_n[X]$, quelle est la probabilité que P soit de degré n ?
4. On choisit un polynôme P aléatoirement dans $A_n[X]$, quelle est la probabilité que P admette 0 comme racine ?
5. Quelle est la probabilité que P admette 0 comme racine simple (mais pas double) ?
6. Quelle est la probabilité que P admette 0 comme racine double sachant que 0 est racine ?
7. On modélise un polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de degré n par une liste Python de longueur $n + 1$, dont les éléments sont donnés par $a_0, \cdots, a_n$ dans cette ordre.
    (a) Donner la liste correspondant au polynôme $P = X^3 + X + 1$
    (b) Ecrire une fonction `polynôme` qui prend en argument le degré n et qui retourne une liste correspondant à un polynôme de $A_n[X]$ dont les coefficients sont pris aléatoirement dans $\{0, 1\}$.

(c) Créer une fonction `degre` qui prend en argument une liste (représentant un polynôme) et qui retourne son degré.

(d) Créer une fonction `racine` qui prend en argument une liste (représentant un polynôme) et qui vérifie si 0 est racine ou ne l'est pas.

III. 6 Urnes boules et tirages 2

Exercice 71. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On pose $N = b + r$. On tire au hasard et successivement une boule de l'urne : si la boule est rouge, on la remplace par une boule blanche dans l'urne, sinon on ne la remplace pas.
Soit R_i l'événement : « on tire une boule rouge au i-ème tirage » et A_i l'événement : « on tire, pour la première fois, une boule blanche au i-ème tirage ».

1. Exprimer A_n à l'aide des R_k. Calculer $P(A_n)$.
2. Soit C_m l'événement : « quand on tire pour la première fois une boule blanche, il reste m boules rouges dans l'urne ».
   (a) Calculer $P(C_0)$ puis montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^\star,\ P(C_m) = \dfrac{r!}{N^r}\left(\dfrac{N^m}{m!} - \dfrac{N^{m-1}}{(m-1)!}\right)$.
   (b) Vérifier que : $\displaystyle\sum_{m=0}^{r} P(C_m) = 1$. Qu'en conclure pour $\displaystyle\bigcup_{m=0}^{r} C_m$?

III. 7 Moteur d'avion d'après G2E (Pb)

Exercice 72 (D'après G2E 2014)**.** Une compagnie aérienne dispose d'une flotte constituée de deux types d'avions : des trimoteurs (un moteur situé en queue d'avion et un moteur sous chaque aile) et des quadrimoteurs (deux moteurs sous chaque aile).

Tous les moteurs de ces avions sont susceptibles, durant chaque vol, de tomber en panne avec la même probabilité $x \in]0, 1[$ et indépendamment les uns des autres. Toutefois, les trimoteurs peuvent achever leur vol si le moteur situé en queue ou les deux moteurs d'ailes sont en état de marche et les quadrimoteurs le peuvent si au moins deux moteurs situés sous deux ailes distinctes sont en état de marche.

1. On note X_3 (respectivement X_4) la variable alétoire correponsdant au nombre de moteurs en panne sur un trimoteur (respectivement un quadirmoteur) durant un vol.
   (a) Quelles sont les lois suivies par X_3 et X_4 ?
   (b) Calculer la probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs du trimoteur tombent en panne. Même question pour le quadrimoteur.
2. (a) On note T l'événement « le trimoteur achève son vol ». Démontrer que :
   $$P(T) = (1 - x)(-x^2 + x + 1)$$
   (b) On note Q l'événement « le quadrimoteur achève son vol ». Démontrer que :
   $$P(Q) = (1 - x)^2(1 + x)^2$$
3. Déterminer , des quadrimoteurs ou des trimoteurs, quels sont les avions les plus sûrs.

III. 8 Grenouille sur escalier (marche aléatoire)

Exercice 73. Une grenouille monte les marches d'un esacalier (supposé infini) en partant du sol (marche 0) et en sautant

— Ou bien une seule marche, avec probabilité p ;

— Ou bien deux marches, avec la probabilité $1-p$.

On suppose que les sauts sont indépenadnts les uns des autres.

1. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies au total. Quelle est la loi de X_n ? Exprimer Y_n en fonciton de X_n. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
2. Pour $k \geq 1$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k. Que vaut p_1 ? Que vaut p_2 ? Etarblir une formule de réurrence liant p_k à p_{k-1}. En déduire la valeur de p_k pour $k \geq 1$.
3. On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche. Ecrire un algorithme Python qui simule la variable aléatoire Z_n.

III. 9 Archers proba de réussite

Exercice 74. On considère deux archers A_1 et A_2 qui tirent chacun sur une cible de manière indépendante. L'archer A_1 (respectivement A_2) touche sa cible avec une probabilité p_1 (respectivement p_2) strictement comprise entre 0 et 1. On suppose de plus que les tirs des joueurs sont indépendants les uns des autres. On appelle X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs nécessaires à l'archer A_1 (respectivement A_2) pour qu'il touche sa cible pour la première fois. On note $q_1 = 1-p_1$ et $q_2 = 1-p_2$

1. Déterminer les valeurs possibles prises par X_1
2. On introduit, pour tout entier naturel non nul i, l'événement E_i : « Le joeur A_1 touche la cible à son i-ème tir » . Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'événement $(X_1 = k)$ à l'aide des événements E_i, $i \in \mathbb{N}^*$
3. En déduire la loi de X_1
   (a) Pour tout entier naturel non nul k, calculer $P(X_1 > k)$ (on pourra s'intéresser à l'événement contraire)
   (b) En déduire que
   $$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad P_{(X_1>m)}(X_1 > n+m) = P(X_1 > n)$$
4. Calculer $P(X_1 = X_2)$ (un peu difficile, il faut considérer des limites..., soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite on pourra noter $\lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$ de la manière suivante $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, il faudra évidemment s'assurer que la limite existe avant de faire ce genre de chose))

III. 10 Sujet Révision - Shuffle Ipod

Problème 3. Dans tout le problème, n sera un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un I-Pod contient n pistes (numérotées de 1 à n) et fonctionne en mode aléatoire selon le protocole suivant :

— La première psite lie est choisie de façon aléatoire et uniforme parmi les n pistes.

— A la fin de la lecture d'une piste, la suivante est choisie de façon aléatoire et uniforme parmi les n pistes. (Il est donc possible que la même piste soit lue plusieurs fois de suite...)

Ce problème étudie différents aspects de vette lecture aléatoire. Les différentes partites sont dans une grande mesure indépendantes les unes des autres.

Partie A

Dans cette partie on fixe un entier naturel k supéreiur ou égal à 1 et on s'intéresse aux k premières lectures effectuées. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le nombre de fois où la piste numéro i est lue au cours des k premières lectures.

1. Déterminer la loi de X_i et donner son espérance est sa variance.
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. (a) Que vaut $X_1 + X_2 + \dots + X_n$?
   (b) En déduire que la covariance de X_i et X_j pour tout $i \neq j$ vaut $\frac{-k}{n^2}$.
4. (a) Déterminer la loi conjointe de X_i et X_j pour tout $i \neq j$.
   (b) Retrouver alors le résultat du 3b.
5. Commenter le signe de la covariance de X_i et X_j pour $i \neq j$.
6. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$, n entiers naturels.
   (a) On suppose que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq k$. Que vaut la probabilité $\mathbb{P}(X_1 = a_1 \cap X_2 = a_2 \cap \dots X_n = a_n)$?
   (b) On suppose maintenant que $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$. Montrer que probabilité

$$\mathbb{P}(X_1 = a_1 \cap X_2 = a_2 \cap \dots X_n = a_n) = \frac{k!}{a_1! a_2! \dots a_n!} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

Partie B

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k le nombre de pistes différentes qui ont été lues au moins une fois au cours des k premières lectures.

1. Décrire avec soin l'ensemble des valeurs que prend Z_k en fonction de n et k.
2. Quelle est la loi de Z_1 ? Donner son espérance et sa variance.
3. (a) Soient i et j entre 1 et n. Détermminer $P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = j)$ en distinguant les cas $j = i$, $j = i + 1$ et $j \notin \{i, i + 1\}$
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$P(Z_{k+1} = i) = \frac{i}{n} P(Z_k = i) + \frac{n - i + 1}{n} P(Z_k = i - 1)$$

   (c) Calculer $P(Z_k = 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (d) On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = n^{k-1} P(Z_k = 2)$. Exprimer α_{k+1} en fonction de α_k et n, puis en déduire l'expression de α_k en fonction de k et n.
   (e) Déduire de ce qui précède la valeur de $P(Z_k = 2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. (a) A l'aide de la question $3b$ montrer que :

$$E(Z_{k+1}) = \frac{n - 1}{n} E(Z_k) + 1$$

(b) En déduire l'expression de $E(Z_k)$ en fonction de n et k.

(c) Calculer la limite quand $k \to +\infty$ de $E(Z_k)$. Ce résultat était-il prévisible ?

(d) Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de $E(Z_k)$. Ce résultat était-il prévisible ?

5. On va dans cette question montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(Z_k = i) = \frac{\binom{n}{i}}{n^k} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i}{j} (i-j)^k$$

(a) Montrer que la propriété est vraie pour $k = 1$ (traiter séparément les cas $i = 1$ et $i > 1$.)
On suppose la propriété vraie pour un certain rang $k \in \mathbb{N}^*$ et on va montrer qu'elle est vraie pour le rang $k + 1$.

(b) Montrer que la relation au rang $k + 1$ est vraie pour $i = 1$.

(c) A l'aide du résultat de la question 3b, montrer que la relation au rang $k + 1$ est vraie pour tout $i \geq 2$.

(d) Conclure.

(e) Soient k et i deux entiers tels que $1 \leq k < i$. Que vaut $\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i}{j} (i-j)^k$?

III. 11 Fonction génératrice (Pb -dur)

Exercice 75. Pour toute variable aléatoire X telle que l'ensemble de ses valeurs images $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, on définit sa fonction génératrice par :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right)$$

où E désigne l'espérance.
Soit X une telle variable aléatoire. On note $m \in \mathbb{N}$ sa valeur image maximale, ainsi $X(\Omega) \subset \{0, 1, 2, \ldots, m\}$.

1. Justifier que g_X est une fonction polynomiale.
2. (a) Calculer $g_X(1)$.
   (b) Montrer que $g'_X(1) = \mathrm{E}(X)$.
   (c) Montrer que $g''_X(1) = \mathrm{E}(X(X-1))$.
   (d) Exprimer $\mathrm{V}(X)$ (où V désigne la variance) en fonction de $g'_X(1)$ et $g''_X(1)$.
3. (a) Exprimer g_{X+1} à l'aide de g_X.
   (b) Exprimer g_{2X} à l'aide de g_X.
4. Dans cette question, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ où $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$.
   (a) Calculer g_X.
   (b) Retrouver les valeurs de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de la fonction génératrice.

III. 12 Tirages boules urnes simultanés/successifs.

Exercice 76. On dispose d'une urne avec 3 boules rouges, 5 boules vertes et 8 boules jaunes. On tire simultanément 3 boules.

1. (a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de couleurs différentes.

   On tire maintenant les boules de façon successive et avec remise.
2. (a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de couleurs différentes.
   (d) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de couleurs différentes sachant que la première est rouge.

III. 13 Chaine de Markov - Hamster

Exercice 77. Roudoudou le hamster vit une vie paisible de hamster. Il a deux activités : manger et dormir... On va voir Roudoudou à 00h00 ($n = 0$). Il est en train de dormir.

— Quand Roudoudou dort à l'heure n, il y a 7 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 3 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

— Quand Roudoudou mange à l'heure n, il y a 2 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 8 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

On note D_n l'événement 'Roudoudou dort à l'heure n' et M_n 'Roudoudou mange à l'heure n'. On note $d_n = P(D_n)$ et $m_n = P(M_n)$ les probabilités respectives.

1. Justifier que $d_n + m_n = 1$.
2. Montrer rigoureusement que
$$d_{n+1} = 0,7d_n + 0,2m_n$$
3. Exprimer de manière similaire m_{n+1} en fonction de d_n et m_n.
4. Soit A la matrice
$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$
   Résoudre en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
6. Montrer que $P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. Calculer D^n où $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 3\,(1/2)^n + 2 & -2\,(1/2)^n + 2 \\ -3\,(1/2)^n + 3 & 2\,(1/2)^n + 3 \end{pmatrix}$.
9. En déduire la valeur de d_n en fonction de n.

III. 14 Probabilité, VAR, tirage boules et urnes. (ECRICOME 2002)

Exercice 78. Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

A - Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ième} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que :
$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1.$$
4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$
5. En déduire $E(Y)$.

B - Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.

6. Soit $p \leqslant n-1$.
   (a) Déterminer $P_{Z_p=k}(X_{p+1}=1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
   $$P(X_{p+1}=1)=\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$
   (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

III. 15 Dérangements

Exercice 79. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement et sans remise et après chaque tirage, on observe le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a rencontre au i-ième tirage si la boule tirée porte le numéro i. Déterminer la probabilité de l'événement E : « Il n'y a aucune rencontre ».

Remarques. Le problème des rencontres peut prendre des formes diverses :

- Un facteur possède n lettres adressées à n personnes différentes. Il les distribue au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'aucune n'arrive à destination ?
- À l'opéra, n spectateurs dépose au vestiaire leur chapeau numéroté selon leur ordre d'arrivé et un ticket leur est alors donné. Mais le responsable a mélangé tous les tickets et tous les chapeaux sont rendus au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'aucun spectateur ne retrouve son chapeau.
- n couples se présentent à un concours de danse. Chaque danseur choisit sa partenaire au hasard. Quelle est la probabilité pour que personne ne danse avec son conjoint ?

III. 16 Urnes de Polya sans VAR + info (Pb)

Exercice 80. On dispose d'une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges. On fait des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

— Si la boule tirée est de couleur blanche, on la remet et on ajoute une boule blanche

— Si la boule tirée est de couleur rouge, on la remet et on ajoute une boule rouge.

On appelle B_i l'événement "tirer une boule blanche au i-iéme tirage" et on note $p_i = P(B_i)$.

1. Calculer p_1 en fonction de b et r.
2. Montrer que $p_2 = \frac{b}{b+r}$.
3. On a tiré une boule blanche au deuxième tirage. Donner alors la probabilité que l'on ait tiré une boule blanche au premier tirage en fonction de b et r.
4. On appelle E_n l'événement
   $$E_n : \text{" On tire que des boules blanches sur les } n \text{ premiers tirages "}$$
   et F_n l'événement

$$F_n : \text{" On tire pour la première fois une boule rouge au } n\text{-ième tirage"}$$

(a) Exprimer E_n à l'aide des événements $(B_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$

(b) Exprimer F_n à l'aide de E_{n-1} et B_n

5. Pour tout $k \geq 2$ calculer $P_{E_{k-1}}(B_k)$.
6. Calculer $P(E_n)$ en fonction de b, r et n puis $P(F_n)$.
7. On souhaite modéliser informatiquement cette expérience. On va utiliser la lettre 'B' pour désigner les boules blanches et 'R' pour les rouges.
   (a) Créer une fonction `urne` qui prend en paramètres le nombre de boules blanches et rouges, et retourne une liste correspondant à l'urne initiale. (Cette liste n'a pas à être "mélangée")
   (b) Créer une fonction `tirage` qui prend en argument une liste correspondant à une urne, modélise le tirage d'une boule alétoirement dans cette urne, affiche la couleur de la boule tirée et retourne une liste correspondant à l'urne aprés l'ajout de la boule de la couleur tirée.
   (c) Créer une fonction `compte` qui prend une liste correspondant à une urne et retourne le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
   (d) Créer une fonction `expérience` qui prend en argument le nombre de boules blanches et rouges et N le nombre de tirages effectués et retourne le nombre de boules blanches dans l'urne aprés N tirages.

IV Autres

IV. 1 Inclusion ensemble complexe

Exercice 81. Montrer que

$$\{z \in \mathbb{C}\,,\, |z+1| \leq 1\} \subset \{z \in \mathbb{C}\,,\, -2 \leq \mathfrak{Re}(z) \leq 0\}$$

On n'est pas obligé d'utiliser la forme algébrique...

IV. 2 Simplification de $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$

Exercice 82. On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. On rappelle que pour tout réel y on note $\sqrt[3]{y}$ l'unique solution de l'équation $x^3 = y$ d'inconnue x.

Le but de l'exercice est de donner des expressions simplifiées de α et β.

1. Ecrire un script Python qui permet d'afficher une valeur approchée de α.
2. (a) Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
   (b) Vérifier que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
   (c) En déduire que $(\alpha+\beta)^3 = 4 - 3(\alpha+\beta)$
3. On pose $u = \alpha + \beta$ et on considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + 3x - 4$.
   (a) A l'aide de la question précédente montrer que u est une racine de P c'est-à-dire que $P(u) = 0$.
   (b) Trouver une autre racine « évidente » de P.
   (c) Trouver trois nombres réels a, b, et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

(d) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(e) En déduire la valeur de u.

4. On considère la fonction polynomiale $Q : x \mapsto Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$

    (a) A l'aide des questions précédentes, développer et simplifier $Q(x)$ pour tout nombre réel x.

    (b) En déduire des expressions plus simples de α et β.

IV. 3 Equation du second degré à coeff complexes

Exercice 83. On considère l'équation du second degré suivante :

$$z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0 \quad (E)$$

1. A la manière d'une équation réelle, calculer le discriminant Δ du polynôme complexe, et montrer que $\Delta = 3 + 4i$
2. On se propose de résoudre (E_2) : $u^2 = \Delta$ d'inconnue complexe u.
    (a) On écrit $u = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que (E_2) est équivalent à

    $$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{x}.$$

    (b) En déduire que les solutions de (E_2) sont

    $$u_1 = 3 - i \quad \text{et} \quad u_2 = 1 - 2i$$

3. Soit u_1 une solution de l'équation précédente. On considère $r_1 = \frac{-3i+4+u_1}{2}$. Montrer que r_1 est solutions de l'équation (E).
4. Quelle est à l'autre solution de (E) ?

IV. 4 Inégalitée somme/factorielle

Exercice 84. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n + 1)! \geq \sum_{k=0}^{n} k!$$

Les récurrences c'est bien mais long...

IV. 5 Double somme des min

Exercice 85. Calculer

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \min(i, j)$$

IV. 6 Géométrie représentation paramétrique de droite.

Exercice 86. On considère les vecteurs de l'espace $\vec{u} = (-2, 1, 2)$ et $\vec{v} = (1, 4, -1)$.

1. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|(-2)\vec{v}\|$.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
3. Donner la représentation paramétrique de la droite D passant par $A = (2, -3, 1)$ et dirigée par $\vec{v}$.
4. Déterminer si le point $B = (3, 1, 0)$ appartient à D.

IV. 7 Géométrie et complexe

Exercice 87. On considère $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$.

1. Rappeler la nature géométrique de S. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$. Déterminer D_f le domaine de définition de f. Est elle bien définie pour tous les points de S ?
2. (a) Mettre $f(z) - \frac{7}{3}$ sous la forme d'une fraction.
   (b) Montrer que pour tout z dans l'ensemble de définition de f,
   $$\left| f(z) - \frac{7}{3} \right|^2 = \frac{|z|^2 + 8\mathfrak{Re}(z) + 16}{9(|z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z) + 1)}$$
   (c) On note S_2 le cercle de centre $7/3$ et de rayon r_0. Montrer que $f(S) \subset S_2$
3. (a) Soit $y = f(z)$, exprimer z en fonction de y quand cela a un sens.
   (b) Déterminer l'ensemble F tel que $f : D_f \to F$ soit bijective. Déterminer l'expression de f^{-1}
   (c) (Difficile) Montrer que pour tout $y \in S_2$, $f^{-1}(y) \in S$.
   (d) En déduire $f(S)$.

IV. 8 Logique et trigo

Exercice 88. 1. A quelle condition sur $X, Y \in \mathbb{R}$ a-t-on

$$X = Y \iff X^2 = Y^2$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi[$ l'équation :

$$|\cos(x)| = |\sin(x)|. \tag{3}$$

IV. 9 Suite récurrence complexes $z_{n+1} = z_n^2 - 2iz_n - 1 + i$

Exercice 89. Soit $1 > \epsilon > 0$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| \leq 1 - \epsilon$. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = i + u$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = z_n^2 - 2iz_n - 1 + i$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n - i| \leq (1 - \epsilon)^{2^n}$. En déduire la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

IV. 10 Calcul de $e^{i\pi/7}$

Exercice 90. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On considère $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

1. Calculer $\frac{1}{\omega}$ en fonction de $\overline{\omega}$
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ on a
$$\omega^k = \overline{\omega}^{7-k}.$$
3. En déduire que $\overline{A} = B$.
4. Montrer que la partie imaginaire de A est strictement positive. (On pourra montrer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.)
5. Rappelons la valeur de la somme d'une suite géométrique : $\forall q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
Montrer alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$. En déduire que $A + B = -1$.
6. Montrer que $AB = 2$.
7. En déduire la valeur exacte de A.

IV. 11 Complexe, ensemble, minimum

Exercice 91. Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Calculer
$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z} + z\right|, z \in \mathbb{U}\right\}$$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on note $\alpha(z) = \frac{1}{\overline{z}} + z$.
   (a) Calculer le module de $\alpha(z)$ en fonction de celui de z.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x} + x \geq 2$.
   (c) En déduire
$$\inf\{|\alpha(z)|, z \in \mathbb{C}^*\}$$

IV. 12 Complexe minimum/maximum

Exercice 92. 1. Résoudre pour $\theta \in \mathbb{R}$, l'équation $e^{i\theta} = 1$.
On note $f(\theta) = e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + e^{3i\theta} + e^{4i\theta}$

2. Montrer que $|f(\theta)| = \left|1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{4i\theta} + e^{5i\theta}\right|$
3. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ on a
$$|f(\theta)| = \left|\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right|.$$
4. En déduire la valeur de $\inf\{|f(\theta)|, \theta \in \mathbb{R}\}$.
5. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|f(\theta)| \leq 6$.
6. En déduire la valeur de $\sup\{|f(\theta)|, \theta \in \mathbb{R}\}$.

IV. 13 Etude de sinh *sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *(A vérifier)*

Exercice 93. On définit la fonction *sinus hyperbolique* de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

1. Etude de la fonction sinh sur $\mathbb{C}$.
   (a) Que vaut $\sinh(z)$ quand z est imaginaire pur ?
   (b) La fonction sinh est elle injective ?
2. On note sh la restriction de la fonction sinh à $\mathbb{R}$:

$$\text{sh} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

   Etude de la fonction sh sur $\mathbb{R}$.
   (a) Etudier la fonction sh.
   (b) Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera.
   (c) ⚠ A retravailler ⚠ En déduire que la fonction sinh est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
   (d) On note $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$
3. Etude de la réciproque. On note argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de sh.
   (a) Comment obtenir la courbe représentative de argsh à partir de celle de sh.
   (b) Démontrer que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

   (c) En résolvant $y = \text{sh}(x)$ déterminer l'expression de $\text{argsh}(y)$ en fonction de y et retrouver ensuite le résultat de la question précédente.
4. Etudier la limite de $\text{argsh}(x) - \ln(x)$ quand $x \to +\infty$.

IV. 14 Géométrie, droite et inclusion

Exercice 94. Soit $D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y = -2 \text{ et } 3y - 2z = 0\}$ $D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - z = -1 \text{ et } 3x - z = -3\}$

1. Soit $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in D_1$. Exprimer x_1 et y_1 en fonction de z_1.
2. Etablir que $D_1 \subset D_2$
3. Soit $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in D_2$. Exprimer x_2 et y_2 en fonction de z_2.
4. Etablir que $D_2 \subset D_1$.

IV. 15 Matrice, famille libre, commutant

Exercice 95. Soit A la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda \,\mathrm{Id}$ n'est pas inversible. On appelle ces réels les *valeurs propres* de A.
2. (a) Calculer A^2 et A^3.
   (b) Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   (c) Montrer que (Id_3, A, A^2) est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (d) Est-ce une base ?
3. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Soit α, β, γ trois réels et $M = \alpha \,\mathrm{Id}_3 + \beta A + \gamma A^2$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}$
   (c) Réciproquement, on considère a, b, c, d, e, f, g, h, et i des réels tel que $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Déterminer, en fonction des coefficients de M, trois réels α, β, γ tels que $M = \alpha \,\mathrm{Id}_3 + \beta A + \gamma A^2$
   (d) En déduire, une base de $\mathcal{S}$.
4. On considère S' l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.
   (a) Est ce que $\mathcal{S}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.
   Dans la suite, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^3$, le produit matriciel MX soit correctement défini.
   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$..
      i. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.
      ii. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.
      iii. Montrer que la famlille $B = (X, MX, M^2X)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

IV. 16 Complexe, raisonnement par l'absurde, recurrence

Exercice 96. Soit z, z' deux nombres complexes.

1. Rappeler les valeurs de $A = z\overline{z}$, $B = |z\overline{z}|$, $C = |\overline{z}z'|^2$ en fonction de $|z|$ et $|z'|$.
2. On suppose dans cette question et la suivante que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$. Montrer que

$$\overline{z}z' \neq 1$$

3. Montrer que
$$1-\left|\frac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right|^2=\frac{(1-|z'|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}z'|^2}$$
4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes vérifiant : $|z_0|<1, |z_1|<1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$z_{n+2}=\frac{z_n-z_{n+1}}{1-\overline{z_n}z_{n+1}}$$
Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|z_n|<1$ et que $\overline{z_n}z_{n+1}\neq 1$, et donc que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
On pourra utiliser les deux questions précédentes dans une récurrence double

V Info

V. 1 ADN - liste

Exercice 97 (Informatique)**.** Les questions sont plus ou moins indépendantes. Toutes les fonctions écrites (ou mentionnées) dans les questions précédentes peuvent être utilisées a posteriori.

Il est devenu habituel de dire que l'ADN se présente comme un texte composé à l'aide de quatre lettres A,C,G,T, qui s'enchaînent sans interruption et qui est orienté avec un début et une fin.

On souhaite faire une étude statistique des lettres présentes dans une séquence d'ADN.

1. (a) Ecrire une fonction `frequence_A` qui prend en argument une chaine de caractères `ADN` et qui retourne la fréquence de la lettre A dans cette chaîne.
   (b) On souhaite comparer la fréquence d'apparition de la lettre 'A' entre deux séquences d'ADN. Ecrire une fonction Python `compare` qui prend en argument deux chaines de caractères `ADN1`, `ADN2` et retourne 'elles sont proches' si la fréquence de la lettre A dans `ADN1` et dans `ADN2` diffère de moins de 0.01. La fonction retournera 'elles ne sont pas proches' dans le cas contraire.

On s'intéresse maintenant aux acides aminés, il faut alors regarder les codons qui se lisent par trois (cf le tableau de la dernière page), on doit donc diviser la chaîne de caractères par codon.

2. (a) Completer (sur votre copie) la fonction `liste_codon` python qui prend en argument une chaine de caractère `ADN` et qui retourne une liste dont les éléments sont les codons de la chaîne. (On supposera que la longueur de la chaine de caractères est bien divisible par 3 sans le vérifier dans la fonction)

```
def liste_codon(ADN):
    L=[]
    for i in range(0,   ,   ):
        L=L+[ADN[   :   ]]
    return(L)
```

   Exemple : si `ADN='GCAGAGTTTTGGTGC'`, la liste retournée sera : `['GCA','GAG', 'TTT','TGG','TGC']`.

   (b) On suppose que l'on a créé une liste `code_genetique` qui contient tous les codons possibles.
   `code_genetique=['GCA','GCC', 'GCG', ...., 'TAG', 'TGA']`

Quelle est la longueur de la liste `code_genetique` ? Comment obtenir cette longueur avec une commande Python ?

(c) On suppose que l'on a une chaine de caractères `ADN` à notre disposition. Ecrire une fonction python `test` qui vérifie si chaque codons de la liste `L=liste_codon(ADN)` est bien un codon du code génétique.

(d) Compléter (sur votre copie) la fonction `start` qui prend en argument une liste de codons et qui retourne l'indice de la première fois où l'on trouve le codon START ('ATG'). Si jamais il n'y en a pas, elle devra retourner un message d'erreur.

```
def start(L):
    i=0
    while L[i]            :
        if i<len(L)-1:

        else:
            return('pas de codon START')
    return(  )
```

(Vous pouvez aussi proposer une fonction différente si vous ne comprenez pas la logique de celle-ci, mais attention aux problèmes d'indices.)

(e) Ecrire une fonction `stop` qui prend en argument une liste de codons et qui retourne l'indice de la première fois où l'on trouve un codon STOP. Si jamais il n'y en a pas, elle devra retourner un message d'erreur.

(f) Ecrire une fonction `proteine` qui prend en argument une liste de codons et retourne la sous-liste des codons entre le premier codon START et le premier codon STOP après ce codon START. (Cette sous-liste contiendra les deux codons START et STOP. On ne se penchera pas sur le problème d'erreurs, et on supposera que notre liste contient bien un codon START et un codon STOP dans le bon ordre)

A une séquence d'ADN correspond une unique séquence d'ARN grâce aux règles de complémentarité : G et C sont inversé, A devient U et T devient A. Par exemple, la séquence d'ADN 'AATCGA' est transcrite en 'UUAGCU.'

3. (a) Compléter (sur votre copie) la fonction python `transcription_lettre` qui prend en argument une lettre correspondant à de l'ADN et qui retourne la lettre d'ARN correspondante.

```
def transcription_lettre(lettre):
        if lettre==    :
                lettre='G'
        elif           :
                lettre='C'
        elif lettre=='A':

        elif           :
                lettre=
```

```
        return(          )
```

(b) Ecrire une fonction python `transcription` qui prend en argument une chaine de caractères correspondant à de l'ADN et qui retourne la chaine de caractères d'ARN correspondante.

Parfois il y a des erreurs dans la transcription et une lettre est mal transmise.

(c) Ecrire une fonction python `mutation` qui prend en argument une chaine de caractères (correspondant à de l'ADN) et qui retourne une chaine de caractères où les lettres 'C' et 'G' sont inversées avec probabilité 99% et non inversée avec probabilité 1%, la lettre 'A' est bien changée en 'U' avec probabilité 99% et changée en 'C' avec probabilité 1% et la lettre 'T' devient la lettre 'A' avec proba 99% et changée en 'U' avec proba 1% . Après l'avoir importée, on pourra utiliser la fonction random() qui retourne un réel aléatoire entre 0 et 1.

Acides aminés				Codons
Alanine	Ala	A		GCA GCC GCG GCT
Glycine	Gly	G		GGA GGC GGG GGT
Proline	Pro	P		CCA CCC CCG CCT
Thréonine	Thr	T		ACA ACC ACG ACT
Valine	Val	V		GTA GTC GTG GTT
Isoleucine	Iso	I		ATA ATC - ATT
Methionine	Met	M	START	ATG
Arginine	Arg	A		CGA CGC CGG CGT AGA AGG
Leucine	Leu	L		CTA CTC CTG CTT TTA TTG
Sérine	Ser	S		TCA TCC TCG TCT AGT AGC
Asparagine	Asn	N		AAC AAT
Ac. Aspartique	Asp	D		GAC GAT
Cystéine	Cys	C		TGC TGT
Glutamine	Gln	Q		CAA CAG
Ac. Glutamique	Glu	E		GAA GAG
Histidine	His	H		CAC CAT
Lysine	Lys	K		AAA AAG
Phénylalanine	Phe	F		TTC TTT
Tyrosine	Tyr	Y		TAC TAT
Tryptophane	Trp	W		TGG
STOP				TAA TAG TGA

Tableau du code génétique.

V. 2 Lancers de dés.

Exercice 98. Pour toutes les questions d'informatique on pourra utiliser les fonctions créées (ou citées) dans les questions précédentes.

On considère l'expérience suivante : on effectue une suite de lancers d'un dé équilibré. On suppose les lancers indépendants.

Pour tout entier n on note F_n l'événement : ' on obtient 6 au lancer n.'
et T_n l'événement : ' on obtient 6 pour la première fois au lancer n'.

1. Exprimer T_n en fonction des $(F_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$

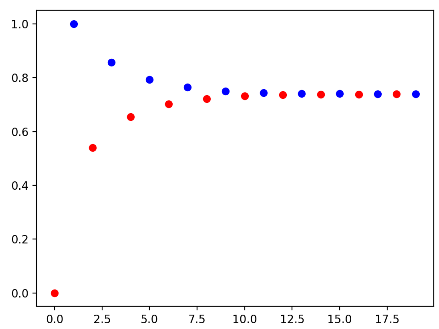
2. En déduire que $P(T_n) = \frac{5^{n-1}}{6^n}$.
3. Créer une fonction Python `premier_six` qui simule le lancer d'un dé et retourne la première fois où l'on obtient le nombre 6.
4. Créer une fonction Python `moyenne_empirique` qui prend en argument un nombre N représentant le nombre d'itérations de l'expérience et qui retourne la valeur moyenne du nombre de lancers nécessaire pour obtenir le premier 6.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note B_n l'événement 'On obtient au moins un 6 dans les n premiers lancers'. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction des $(F_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$
6. En déduire $P(B_n)$.
7. Créer une fonction Python `combien_de_six` qui prend en argument un nombre n qui correspond au nombre de lancers et retourne le nombre de 6 obtenu pendant les n lancers.
8. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note C_k l'événement 'on obtient k six au cours des 100 premiers lancers'.
   Calculer $P(C_k)$ en fonction de k.
9. Créer une fonction Python `evenement_C` qui prend en argument un nombre k et retourne `True` si on a obtenu exactement k six au cours des 100 premiers lancers et `False` sinon.
10. Créer une fonction `frequence_C` qui prend en argument un nombre k et un nombre N qui correspond au nombres d'itération de l'expérience et retourne la fréquence des expériences pour lequel on a obtenue exactement k six pour 100 lancers.

V. 3 $u_{n+1} = \cos(u_n)$

Problème 4 (Informatique)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \cos(u_n) \end{cases}$

1. Ecrire une fonction `suite_u` qui prend comme paramètre d'entrée un entier n et calcule la valeur de u_n correspondante.
2. On souhaite étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou tout du moins de ces premiers termes. Ecrire pour cela un programme qui trace un graphique sur lequel se trouvent les points (n, u_n) pour $n \in [\![0, 20]\!]$.

   On obtient le graphe suivant

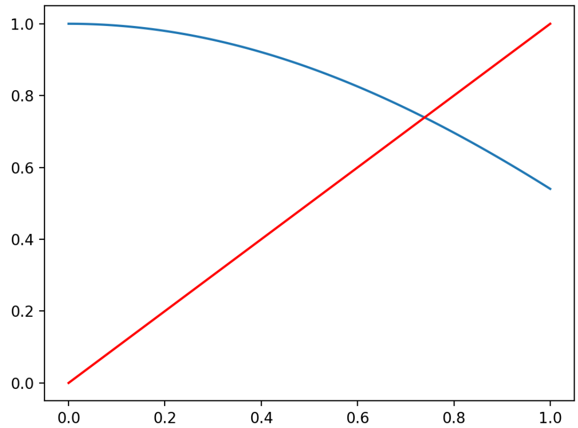
   Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) semblent adjacentes, et converger vers une même limite ℓ, de sorte que :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

   En particulier, ℓ semble toujours appartenir à l'intervalle d'extrémités u_n et u_{n+1} pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, ce qui s'écrit :

   $$\forall n \in N, |\ell - u_n| \leq |u_{n+1} - u_n|$$

   Nous admettrons tous ces résultats sans démonstration pour la suite.
3. Justifier que le réel ℓ satisfait $\ell = \cos(\ell)$
4. Proposer un programme permettant de tracer les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto x$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
   Après exécution, ce programme génère le graphe suivant :



Déterminer par lecture graphique une valeur approchée de ℓ.

5. (a) Ecrire une fonction `premier_entier(p)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier p et renvoie le plus petit entier tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-p}$

   (b) En déduire une fonction `approx(p)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier p et renvoie une valeur approchée de ℓ à $\pm 10^{-p}$ prés.

6. On souhaite déterminer une valeur approchée de ℓ par une autre méthode en utilisant un algorithme de dichotomie. On considère pour cela la fonction $h : x \in [0,1] \mapsto x - \cos(x)$.

   (a) Monter que h s'annule en un unique point de $\alpha \in [0,1]$ et que $\alpha = \ell$.

   (b) On suppose avoir défini la fonction h sur Python. Compléter la fonction suivante, qui prend comme paramètre d'entrée un réel $\epsilon > 0$ et qui renvoie une valeur approchée de ℓ à ϵ prés à l'aide de la méthode de la dichotomie.

```
def dichotomie(epsilon):
    a=0
    b=1

    while        >       :
        milieu = (a+b)/2
        if h(milieu)*h(a)<0:

        else:

    return(a)
```

V. 4 Mandelbrot

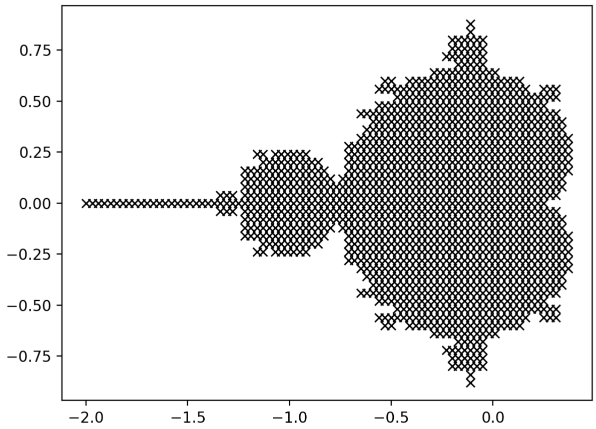
Exercice 99 (Ensemble de Mandelbrot)**.** Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 0$ et

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

où $c \in \mathbb{C}$ est un complexe.

Selon la valeur de c, il y a deux possibilités : soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée, soit son module tends vers l'infini. Le but de ce problème est d'écrire un algorithme qui permet de tracer l'ensemble des c pour lesquels la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée. Cette ensemble s'appelle l'ensemble de Mandelbrot.

1. Que vaut la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $c = 0$. Est ce que $c = 0$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot ?
2. Que valent les premières valeurs ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $c = i$. A votre avis est-ce-que $c = i$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot ?
3. Même question pour $c = 1 + i$ (pour $n = 0, 1, 2, 3$).
4. Ecrire une fonction Python `suite_z` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et un complexe $c \in \mathbb{C}$ et qui retourne la valeur de z_n.
5. On peut montrer que c appartient à l'ensemble de Mandelbrot si et seulement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < 2$. On suppose pour simplifier qu'un nombre c appartient à l'ensemble des Mandelbrot si et seulement si pour tout $n \in [\![0, 100]\!]$, $|z_n| < 2$. Ecrire une fonction verif qui prend un nombre complexe c et retourne `True` si c appartient à l'ensemble de Mandelbrot et `False` sinon.
6. Ecrire une fonction `tracer` qui prend en argument deux réels (x, y) et qui trace le point (x, y) sur un graphique si le point d'affixe $x + iy$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot.
7. Ecrire un script python qui teste si les points de coordonnées $\left(\frac{i}{100}, \frac{j}{100}\right)$ pour $i, j \in [\![-100, 100]\!]$ appartiennent à l'ensemble de Mandelbrot et les trace le cas échéant.



V. 5 Pendu

Exercice 100. 1. On suppose que l'on dipose d'une liste `dictionnaire` contenant tous les mots du dictionnaire. (Pour vos testes, créer une liste `dictionnaire` contenant trois mots : 'coucou', 'olivier', 'matrice')

Ecrire une fonction `mots_de7lettres` qui retourne une liste ne contenant que les mots de 7 lettres du `dictionnaire`.

2. Ecrire une fonction `choix_mot`, qui choisit un mot de 7 lettres aléatoirement. (On pourra utiliser la fonction `len` qui prend en argument une chaine de caractères et qui retourne sa taille, (comme pour les listes))
3. Ecrire une fonction `transform` qui prend en argument une chaine de caractères `S` et retourne une liste dont chaque entrée est une lettre de la chaine `S`.
4. Créer une fonction `test_lettre` qui prend en argument un mot `M` et une lettre `a` et retourne la (ou les) position de la lettre `a` dans le mot `M`. Si `a` n'est pas dans le mot, la fonction retournera la liste vide.

   Exemples : `test_lettre`('olivier', 'i') –> [2, 4] et `test_lettre`('olivier', 'w') –> []

5. Ecrire une fonction `reponse` qui prend en argument deux chaines de caractères. L'une `M` correspondant au mot que l'on doit trouver et l'autre `P` correspondant à la proposition du joueur. Si le joueur propose une seule lettre alors la fonction `reponse` retourne la (ou les places) de la lettre dans le mot `M`, si le joueur propose un mot (donc plusieurs lettres) alors la fonction `reponse` retourne `True` si le mot est bon et une liste vide si le mot est mauvais. (La liste vide permet d'être dans le même cas que si on avait donné juste une lettre qui n'est pas dans le mot)
6. Ecrire une fonction `lettre_connue` qui prend en argument un mot `M` (correspondant au mot à trouver) et une liste `L` (qui correspond au position des lettres déjà trouvées) et qui retourne une chaine de caractères où les lettres dont la position sont dans `L` s'affiche en claire et sinon sont remplacées par des '*'

   Exemple : `lettre_connue` ('olivier', [1,2,5]) retourne '*li**i**' `lettre_connue` ('matrice', [0,1,2]) affiche 'ma*****'
7. Compléter le code suivant qui permet de jouer au jeu du pendu sans limite d'essais.

```
def pendu():
    mot_a_trouver=.....
    mot_propose=''
    list_lettres_connues=[]
    while mot_propose != ......:
        l=lettres_connues(.... , ....)
        # On affiche les lettres deja trouvees par le joueur)
        print(l)

        mot_propose = input('Donner une lettre ou une proposition')
        #on demande au joueur une nouvelle lettre ou une nouvelle propostion

        rep=reponse(...., .... )
        #on analyse la reponse.

        if ...==.... : #si le joueur a trouve le bon mot
            print( .... )# on le felicite
            return #on arrete le programme

        else: #sinon
            if len(rep)......: #soit le mot n'est pas le bon ou la lettre n'es
                print('essaye encore') #et on lui dit de reesayer

            else:
                print('il y a ' +...... +' lettre ' + .... )
                #on affiche le nombre de fois ou la lettre proposee
                #apparait dans le mot cherche

                list_lettres_connues=....+....
                #et on ajoute a la liste des lettres
                #connues les nouvelles lettres.
```

8. Améliorer la fonction `pendu` pour que le programme s'arrête après 10 essais infructueux et affiche à chaque essais le nombre de tentatives restantes.

V. 6 Pivot de Gauss

Exercice 101 (Extrait du Concours Agro-Veto 2019)**.** Des éléments de syntaxe Python, et en particulier l'usage du module numpy, sont donnés en annexe . Dans tout ce qui suit, les variables n, p, A, M, i, j et c vérifient les conditions suivantes qui ne seront pas rappelées à chaque question :

— n et p sont des entiers naturels tels que $p \geq n \geq 2$;

— A est une matrice carrée à n lignes inversible ;

— M est une matrice à n lignes et p colonnes telle que la sous-matrice carrée constituée des n premières colonnes de M est inversible ;

— i et j sont des entiers tels que $0 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq j \leq n-1$;

— c est un réel non nul.

On note $L_i \leftarrow L_i + cL_j$ l'opération qui ajoute à la ligne i d'une matrice la ligne j multipliée par c.

1. Soit la fonction initialisation :

```
def initialisation(A):
    n = np.shape(A)[0]
    mat = np.zeros((n,2*n))
    for i in range(0, n):
        for j in range(0, n):
            mat[i,j] = A[i,j]
    return(mat)
```

   Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant. L'appel initialisation (A) renvoie :

   (a) une matrice rectangulaire à n lignes et $2n$ colonnes remplie de zéros ;

   (b) une matrice de même taille que A ;

   (c) une erreur au niveau d'un range ;

   (d) une matrice rectangulaire telle que les n premières colonnes correspondent aux n colonnes de A, et les autres colonnes sont nulles.

2. Les trois fonctions multip, ajout et permut suivantes ne renvoient rien : elles modifient les matrices auxquelles elles s'appliquent.

   (a) Que réalise la fonction multip ?

```
def multip(M, i, c):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(0, p):
        M[i,k] = c*M[i,k]
```

   (b) Compléter la fonction ajout, afin qu'elle effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i + cL_j$.

```
def ajout(M, i, j, c):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(0, p):
        _____ ligne(s) a completer _____
```

   (c) Écrire une fonction permut prenant pour argument M, i et j, et qui modifie M en échangeant les valeurs des lignes i et j.

   Dans la suite du sujet, l'expression "opération élémentaire sur les lignes" fera référence à l'utilisation de permut, multip ou ajout.

3. Soit la colonne numéro j dans la matrice M. On cherche le numéro r d'une ligne où est situé le plus grand coefficient (en valeur absolue) de cette colonne parmi les lignes j à $n-1$. Autrement dit, r vérifie :

$$|A[r,j]| = \max\{|A[i,j]| \text{ pour } i \text{ tel que } j \leq i \leq n-1\}.$$

   Écrire une fonction `rang_pivot` prenant pour argument M et j, et qui renvoie cette valeur de r. Lorsqu'il y a plusieurs réponses possibles pour r, dire (avec justification) si l'algorithme renvoie le plus petit r, le plus grand r ou un autre choix.

   (L'utilisation d'une commande max déjà programmée dans Python est bien sûr proscrite.)

4. Soit la fonction mystere :

```
def mystere(M):
    n = np.shape(M)[0]
    for j in range(0, n):
        r = rang_pivot(M, j)
        permut(M, r, j)
        for k in range(j+1, n):
            ajout(M, k, j, -M[k,j]/M[j,j])
        print(M)
```

(a) On considère dans cette question l'algorithme mystere appliqué à la matrice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Indiquer combien de fois la ligne print (M) est exécutée ainsi que les différentes valeurs qu'elle affiche

(b) De façon générale, que réalise cet algorithme ?

5. On considère la fonction reduire :

```
def reduire(M):
    n = np.shape(M)[0]
    mystere(M)
    for i in range(0, n):
        multip(M, i, 1/M[i,i])
    #Les lignes suivantes sont \'a compl\'eter :
        ______________________________
```

Compléter la fonction afin que la portion de code manquante effectue les opérations élémentaires suivantes sur les lignes :

pour j prenant les valeurs $n-1, n-2, \ldots, 1$, faire :

pour k prenant les valeurs $j-1, j-2, \ldots, 0$, faire :

$$\mathrm{L_k} \leftarrow \mathrm{L_k} - \mathrm{M[k,j]L_j}$$

Indiquer ce que réalise cette fonction.

Annexe

On considère que le module numpy, permettant de manipuler des tableaux à deux dimensions, est importé via import numpy as np. Pour une matrice M à n lignes et p colonnes, les indices vont de 0 à $n-1$ pour les lignes et de 0 à $p-1$ pour les colonnes.

Python	Interprétation
abs(x)	Valeur absolue du nombre x
M[i, j]	Coefficient d'indice (i, j) de la matrice M
np· zeros ((n, p))	Matrice à n lignes et p colonnes remplie de zéros
T = np.shape(M) T[0] ou np.shape (M)[0] T[1] ou np.shape (M)[1]	Dimensions de la matrice M Nombre de lignes Nombre de colonnes
M[a : b, c : d]	Matrice extraite de M constituée des lignes a à $b-1$ et des colonnes c à $d-1$: si a (resp. c) n'est pas précisé, l'extraction commence à la première ligne (resp. colonne) si b (resp. d) n'est pas précisé, l'extraction finit à la dernière ligne (resp. colonne) incluse