On considère l'équation suivante , d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + z + 1 = 0 \tag{E}$$

1. On note $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la fonciton définie par $f(t) = t^3 + t + 1$. A l'aide de l'étude de f, justifier que l'équation (E) possède une unique solution réelle, que l'on notera r. Montrer que $r \in]-1, \frac{-1}{2}[$.
2. On note z_1 et z_2 les deux autres solutions complexes de (E) qu'on ne cherche pas à calculer. On sait alors que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ se factorise de la manière suivante :
$$P(X) = (X - r)(X - z_1)(X - z_2).$$
En déduire que $z_1 + z_2 = -r$ et $z_1 z_2 = \frac{-1}{r}$.
3. Justifier l'encadrement : $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$.
De même montrer que $1 < |z_1 z_2| < 2$.
4. Rappeler l'inégalité triangulaire et donner une minoration de $|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{C}$.
5. En déduire que
$$|z_1 + z_2| > |z_1| - \frac{2}{|z_1|}$$
6. Grâce à un raisonnement par l'absurde montrer que $|z_1| < 2$.
7. Conclure que toutes les solutions de (E) sont de modules strictement inférieures à 2.