Liste Exercices et Problèmes DS DM

Table des matières

I Analyse

I. 1 Résolution inéquation

Exercice 1. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+2}.$$

I. 2 Calcul ensemble de définition

Exercice 2. Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{(x^2-4)\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

I. 3 Résolution $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$

Exercice 3. On cherche à résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue réelle x :

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$$

1. Donner le domaine de définition de l'équation (E).
2. Ecrire un programme python qui demande à l'utilisateur un flottant x et qui renvoie True si le réel ets solution de l'équation (E) et False sinon.
3. Montrer que toute solution x de (E) est solution du système (S) suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{x} & < & \frac{x}{2}+1 \\ \frac{x}{2}-1 & < & \sqrt{x} \end{cases}$$

4. Résoudre le système (S).
5. Soit $\alpha = 2(2+\sqrt{3})$ Calculer la partie entière de α.
6. Pour tout $k \in [\![0,7]\!]$ déterminer si les réels de l'intervalle $[k, k+1[$ sont solutions de (E).
7. Conclure.

I. 4 Etude de $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$

Exercice 4. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout $x \in]1, e[$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a $(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} > 0$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer, toujours à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n \leq e$.
   (c) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

I. 5 Racine de $x^3 - 6x - 9$

Exercice 5. On cherche les racines réelles du polynôme $P(x) = x^3 - 6x - 9$.

1. Donner en fonction du paramètre x réel, le nombre de solutions réelles de l'équation $x = y + \frac{2}{y}$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| \geq 2\sqrt{2}$. Montrer en posant le changement de variable $x = y + \frac{2}{y}$ que :

$$P(x) = 0 \Longleftrightarrow y^6 - 9y^3 + 8 = 0$$

3. Résoudre l'équation $z^2 - 9z + 8 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{R}$.
4. En déduire une racine du polynôme P.
5. Donner toutes les racines réelles du polynôme P.

I. 6 Résolution de $\sqrt{e^x - 2} \geq e^x - 4$

Exercice 6. Donner l'ensemble de définition de

$$f(x) = \sqrt{e^x - 2}$$

Résoudre

$$f(x) \geq e^x - 4$$

I. 7 Equation trigonométrique et changement de variable

Exercice 7. 1. Résoudre l'inéquation d'inconnue y suivante :

$$\frac{y-3}{2y-3} \leq 2y \quad (E_1)$$

2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation d'inconnue X :

$$\frac{\sin^2(X)-3}{2\sin^2(X)-3} \leq 2\sin^2(X) \quad (E_2)$$

3. Finalement donner les solutions sur $[0, 2\pi[$ de l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{\sin^2(2x+\frac{\pi}{6})-3}{2\sin^2(2x+\frac{\pi}{6})-3} \leq 2\sin^2(2x+\frac{\pi}{6}) \quad (E_3)$$

I. 8 Equation différentielle, changement de variable

Exercice 8. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall t > 0,\ f'(t) = f(1/t)$$

On fixe une fonction $f \in \mathcal{S}$ et on définit la fonction g par

$$g(x) = f(e^x)$$

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde en fonction de f.
2. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est solution de l'équation diffrentielle suivante :
$$y'' - y' + y = 0 \quad (E)$$
3. Résoudre (E).
4. En déduire que f est de la forme
$$f(t) = A\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + B\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$
où (A, B) sont deux constantes réelles.
On appelle $f_1(t) = \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$ et $f_2(t) = \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$
5. Calculer les dérivées premières de f_1 et f_2
6. En considérant les cas $t = 1$ et $t = e^{\pi/\sqrt{3}}$, montrer que A et B sont solutions de
$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} A - B\sqrt{3} & = & 0 \\ A\sqrt{3} - 3B & = & 0 \end{array}\right.$$
7. Résoudre (S).
8. Conclure.

I. 9 Suite arithmético-géométrique

Exercice 9. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

I. 10 Equation rationnelle à paramètre

Exercice 10. Résoudre l'équation pour $x \in \mathbb{R}$ de paramètre a :

$$\frac{1}{x-a} \geq x$$

I. 11 Résolution de $\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0$

Exercice 11. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0 \qquad (E)$$

1. Déterminer le domaine de définition de (E).
2. Dire si les réels suivants sont solutions ou non de (E)

$$x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = 12$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
4. Montrer que résoudre (E) est équivalent à résoudre le système :

$$\begin{cases} \sqrt{5x-1} > & 2x-1 \qquad (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x \qquad (E_2) \end{cases}$$

5. Résoudre les deux inéquations obtenues à la question précédente.
6. Résoudre (E).

I. 12 Equation complexe

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) + 1 = 0$$

I. 13 Somme de nombres complexes(Pb)

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la somme pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$Z(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

1. Montrer par récurrence que $Z(x) = \frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}$.
   On suppose que $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

2. Justifier que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

3. Prouver que : $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
4. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

I. 14 Equations trigonométriques

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi[$:

$$\cos(3x-1) = \sin(2x) \tag{1}$$

$$\cos(3x) + \cos(2x) + \cos(-x) = 0 \tag{2}$$

I. 15 Arctan(Pb)

Exercice 15 (Autour de arctan)**.** 1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ que vaut $\tan(\arctan(x))$?
   (b) Soit $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?
   (c) Soit $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?
   (d) Soit $k \in \mathbb{Z}$, et $x \in]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?
2. On rappelle que la dérivée d'un quotient $\frac{f}{g}$ vaut $\frac{f'g - fg'}{g^2}$. Montrer que pour tout x où tan est définie on a :
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$
3. On rappelle que la dérivée d'une composée $f \circ g$ vaut $g' \times f' \circ g$. Grâce à la formule obtenue en 1.(a) montrer que la dérivée de arctan sur $\mathbb{R}$ vaut
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
4. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$
5. Soit x, y deux réels positifs. Montrer que si $xy < 1$ alors
$$0 \leq \arctan(x) + \arctan(y) < \frac{\pi}{2}$$
6. Etant donnée $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, tel que $xy < 1$, montrer que
$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), [1]$$

1. De manière plus générale, $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$, où :

- $k = 0$ si $xy < 1$.
- $k = 1$ si $xy > 1$, avec x et y positifs.
- $k = -1$ si $xy > 1$, avec x et y négatifs.

7. Soit $x > 0$, comparer : $\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ et $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$.
8. Simplifier
$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$
9. En déduire $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

I. 16 Simplification Produit

Exercice 16. Simplifier
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$
En déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

I. 17 Suite récurrente et césaro PB(long)

Exercice 17. Le but de cet exerice est l'étude de la suite (a_n) définie par $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{a_n(1+a_n)}{1+2a_n}$.

1. Etude de la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Calculer a_2 et a_3.
   (b) Etudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{x(x+1)}{1+2x}$
   (c) Déterminer l'image directe de $]0,1[$ par f.
   (d) Démontrer que, $\forall n \geqslant 2$, on a $0 < a_n < 1$.
   (e) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   (f) Rédoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0,1]$.
   (g) En déduire la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.
2. Un résultat intermédiaire.
   Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante, admettant une limite ℓ en $+\infty$ et $(C_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n \leq u_n$.
   (b) Montrer que pour $(C_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2C_{2n} - C_n \geq u_{n+1}$.
   (d) En déduire que $(C_n)_{n\geq 1}$ converge et donner la valeur de sa la limite en fonction de celle de $(u_n)_{n\geq 1}$.
3. Etude d'un équivalent de $(a_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Montrer que $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1+a_n}$.

(b) On pose $u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

(c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(d) En posant $C_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, exprimer C_n en fonction de a_{n+1} et de a_1.

(e) Conclure à l'aide de la question 2.e que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

I. 18 $u_{n+1} = \sin(u_n)$ *(Pb)*

Exercice 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$.
2. On note $f(x) = \sin(x) - x$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < 0$.
3. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
5. Montrer que $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
6. Déterminer la valeur de ℓ.

Info

1. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne la valeur de u_n. (Pour ceux qui n'ont pas encore vu les fonctions, vous pouvez écrire un script qui demande à l'utilisateur la valeur de n souhaité et qui retourne la valeur de u_n sans les fonctions, mais bon c'est pas si différent...)
2. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $e \in \mathbb{R}^+$ et qui retourne la valeur du premier terme $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $|u_{n_0} - \ell| \leq e$ et la valeur de u_{n_0}. (même remarque)

I. 19 $I_{n+1} = (2n+1)I_n$

Exercice 19. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (2n+1)I_n$. Exprimer I_n en fonction de n à l'aide uniquement de factorielle et puissance.

I. 20 Suite définites implicitement $x^3 + nx - 1$ *(Pb)*

Exercice 20.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$. On la note x_n.
2. Montrer que $x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1 < 0$.
3. En déduite que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Justifier que la suite est minorée par 0 et majorée par 1.
5. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. A l'aide d'un raisonement par l'absurde justifier que cette limite vaut 0.

I. 21 $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$

Exercice 21. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout $x \in]1, e[$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a $(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} > 0$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 a l'aide d'une intégration par partie.
   (b) Démontrer, toujours à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n \leq e$.
   (c) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

I. 22 *Etude de* $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$

Exercice 22. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$$

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de f.
2. Calculer la dérivée de f en déduire que le signe de f' dépend de celui de $g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$
3. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de g et calculer sa dérivée.
4. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $f'(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]0, \alpha[\cap D_f$.
5. Donner le tableau de variations complet de f.
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en e.

I. 23 *Wallis - Calcul* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ *(Pb)*

Le but de ce DM est de calculer la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

I. 23. a *Convergence*

On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Montrer que pour tout $k \geq 2$
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 2]$.

I. 23. b Calcul de la limite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit I_n et J_n par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)dt \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)dt$$

1. Montrer que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$
2. (a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$

(on pourra utiliser que $\cos^{2n}(t) = \cos^{2n-1}(t)\cos(t)$)

(b) En déduire que

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

3. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^{2n-1}(t)\sin(t)dt = \frac{1}{2n} I_n$$

(b) Montrer que

$$J_{n-1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2\sin(t))\cos^{2n-2}(t)\sin(t)dt$$

(c) En utilisant une intégration par parties en déduire que :

$$J_{n-1} - J_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n} I_n + J_n\right)$$

(d) On désigne par $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $K_n = \frac{J_n}{I_n}$. En utilisant la relation obtenue précédemment, montrer que :

$$\frac{J_{n-1}}{I_n} - K_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n} + K_n\right)$$

puis en déduire que :

$$K_{n-1} - K_n = \frac{1}{2n^2}$$

4. Le but de cette question est de montrer que $K_n \to 0$

(a) démontrer que pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a :

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$$

(b) En déduire que pour tout entier n on a :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$$

puis que :

$$0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)}$$

5. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$$

I. 24 Etude de $f(x) = x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 23. Soit f la fonction définie pour tout x par $f(x) = x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Donner le domaine de définiiton et de dérivabilité de f.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner l'équation de la tangente (T_n) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse n.
3. Calculer les coordonnées de l'intersection entre (T_n) et l'axe des abscisses. On note x_n la coordonnée non nulle.
4. Calculer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I. 25 Calculs de limites

Exercice 24. Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{e^x-1}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x+1)}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)e^{x^2}}{x^x}$

Exercice 25. Donner des équivalents simples de

1. Quand $x \to 1$ de $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$
2. Quand $x \to 0$ de $\frac{x\ln(x)}{e^x-1}$
3. Quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k^2 + k$

I. 26 Etude dérivabilité

Exercice 26. Etudier la continuité et la dérivabilité de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ces fonctions sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$?

I. 27 Fonctions k-contractante (Pb)

Exercice 27. Fonctions k-contractantes.
On suppose que f est une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ et qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Une telle fonction s'appelle une fonction k-contractante.

1. Montrer que f est continue.
2. En déduire que f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.

3. Montrer par l'absurde que ce point fixe est unique. On le note c.
4. On considère alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $c_0 \in [0,1]$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = f(c_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leq k^n |c_0 - c|$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I. 28 Etude de $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. (Pb)

Exercice 28. Le but de ce problème est d'étudier la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. Etude globale :
   (a) Justifier que g est bien définie sur $\mathcal{D}_g =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   (b) Montrer que g est positive sur $\mathcal{D}_g$.
   (c) Justifier que g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et exprimer sa dérivée en tout point de $\mathcal{D}_g$.
   (d) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_g$.
   (e) Etudier les variations de g sur $\mathcal{D}_g$. (les limites aux bornes ne sont pas demandées pour cette question)
2. Etude au voisinage de 0
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in]0,1[\quad \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$$
   On fera très attention aux signes dans les inégalités.
   (b) En déduire que g se prolonge par continuité en 0 et préciser la valeur de ce prolongement. Par la suite, on note encore g la fonction continue, prolongée en 0
   (c) Montrer que g est dérivable à droite en 0 et préciser $g'(0)$.
3. Etude au voisinage de 1.
   (a) A l'aide du théorème des accroissements finis appliquer à $h(t) = \ln(t) - t$ montrer que pour tout $t \in]0,1[$:
   $$0 \leq \frac{\ln(t) - t + 1}{t-1} \leq \frac{1-t}{t}$$
   (b) En déduire que pour tout $t \in]0,1[$:
   $$\left|\frac{\ln(t) - t + 1}{t-1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$
   (c) Montrer de manière analogue que pour tout $t > 1$ on a
   $$\left|\frac{\ln(t) - t + 1}{t-1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$

(d) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$

$$\left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right| \leq 2$$

(e) Conclure que g est prolongeable par continuité en 1.

4. Etude au voisinage de $+\infty$.

(a) Montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x)$$

(b) En déduire la limite de g en $+\infty$.

I. 29 Non interversion limite intégrale

Exercice 29. Soit $x \in [0, 1]$

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2}$.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
4. Que doit-on retenir de cet exercice ?

I. 30 Etude $x\exp(\sin^2(x))$. [d'après Godillon 16-17]

Exercice 30. On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto x\exp(\sin^2(x)).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
2. Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers un ensemble I à déterminer.
3. Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de $f_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
4. Justifier l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_{x\to0}(x^5)$.
5. En composant les développements limités de f^{-1} et f, déterminer les valeurs des constantes a, b et c.
6. Que peut-on en déduire pour la tangente à la courbe représentatitve de f^{-1} au voisinage de 0 ?

I. 31 Inégalités / récurrence

Exercice 31. 1. Comparer (avec une inégalité large) pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres n et 3^n. (Prouver cette inégalité)

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

(a) Enoncer l'inégalité triangulaire.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 4^n$.

I. 32 Fibonacci

Exercice 32. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
2. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
3. (a) On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.
   (b) Montrer que l'expression explicite de F_n st donnée par $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

I. 33 Equation à paramètre

Exercice 33. On note $\Delta(m) = m^2 - 8m + 12$.

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue m :
$$\Delta(m) > 0 \tag{I_1}$$
2. On note $r_+(m) = \frac{m+\sqrt{\Delta(m)}}{4}$ et $r_-(m) = \frac{m-\sqrt{\Delta(m)}}{4}$.
3. Résoudre
$$r_+(m) \geq 1 \quad \text{et} \quad r_-(m) \geq 1.$$
4. Résoudre l'inéquation d'inconnue y et de paramétre $m \in \mathbb{R}$
$$\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} \geq m \tag{I_2}$$

I. 34 Partie Entière

Exercice 34. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \right\rfloor = 0 \tag{E}$$

1. Déterminer le domaine de définition de E.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
3. Montrer que résoudre (E) revient à résoudre deux inéquations qu'on déterminera.
4. Résoudre les deux équations obtenues à la question précédente.
5. Résoudre (E).

I. 35 Equation trigonométrique / changement de variable

Exercice 35. Résoudre l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} \leq x + \frac{1}{2}$$

Résoudre sur $[0, 2\pi[$:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin(x)-\frac{1}{2}} \leq \sin(x) + \frac{1}{2}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

I. 36 Calcul de la dérivée de arcsin *[Agro 2015]*

Exercice 36.

1. Que vaut $\arcsin(1/2)$ et $\arcsin(-\sqrt{2}/2)$?
2. Tracer le graphe de la fonction arcsin dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Soit $x \in [-1, 1]$, calculer $\sin(\arcsin(x))$?
4. Soit $x \in [-1, 1]$, montrer que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \cos(2n \arcsin(x))$
5. Calculer f_0, f_1 et f_2.
6. (a) Soient a et b deux réels, exprimer $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
   (b) En déduire que pour tout entier n on a :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1-2x^2) f_{n+1}(x).$$

I. 37 Somme double max *+ info*

Exercice 37.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $i \leq n$. Caculer en fonction de i et n :

$$\sum_{j=i+1}^{n} j$$

3. On rappelle que l'on note $\max(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } i \geq j \\ j & \text{sinon.} \end{cases}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \max(i, j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2 + i^2 + n - i}{2}$$

4. En déduire que
$$\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) \left(\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}\right)$$
5. On note
$$S_k = \sum_{i,j\in[\![1,1000]\!]} \max(i^k,j^k).$$
   (a) Rappeler ce que renvoie l'instruction Python `range(a,b)` avec deux entiers $a,b\in\mathbb{N}$ tel que $a\leq b$.
   (b) Ecrire un script Python qui demande à l'utilsateur la valeur de k, calcul S_k et affiche le résultat.

I. 38 Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k^4$

Exercice 38. 1. Rappeler la valeur de $R_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3$ en fonction de $n\in\mathbb{N}$

2. Soit $k\in\mathbb{N}$, développer $(k+1)^5-k^5$.
3. A l'aide de la somme téléscopique $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5-k^5$ donner la valeur de $R_4=\sum_{k=0}^{n} k^4$ en fonction de $n\in\mathbb{N}$. (On pourra garder une formule développée, malgré ce que j'ai pu dire en classe...)
4. Soit $x\in\mathbb{N}$, on note $R_x(n)=\sum_{k=0}^{n} k^x$ Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{N}$ et rend la valeur de $R_x(n)$
5. Soit $x\in\mathbb{N}$, on note $R_x(n)=\sum_{k=0}^{n} k^x$. Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{N}$, qui affiche un message d'erreur si x n'est pas un entier positif et rend la valeur de $R_x(n)$ sinon.
6. Montrer que les suites $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $b_n=a_n+\frac{1}{n}$ sont adjacentes.
7. Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre $e>0$ et qui rend le premier rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $|a_{n_0}-b_{n_0}|\leq e$ et la valeur de a_{n_0}

I. 39 Formule D'inversion de somme (Pb)

Exercice 39. Dans cet exercice, on considère une suite quelconque de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k.$$

Partie I : Quelques exemples

1. Calculer b_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1.
2. Calculer b_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n=\exp(n)$.

3. (a) Démontrer que, pour tout $(n \geq 1, n \geq k \geq 1)$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.

(c) Calculer la valeur de b_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Partie II : Formule d'inversion

Le but de cette partie est de montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'exprime en fonction de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que pour tout $(k, n, p) \in \mathbb{N}^3$, tel que $k \leq p \leq n$ on a :

$$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}.$$

2. Montrer que, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, tel que $k \leq n$ on a :

$$\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n+1-k}{i} = (-1)^{n-k}.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n+1}{k} b_k$$

4. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_{n+1} en fonction de b_{n+1} et de $a_0, ..., a_n$.
5. Prouver, par récurrence forte sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} b_k.$$

6. En utilisant le résultat précédent montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k2^k (-1)^{n-k} = 2n.$$

I. 40 Etude de $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \sin(x)}\right)$

Exercice 40. 1. Résoudre $\sin(x) \geq \frac{-1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$

2. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de f définie par

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \sin(x)}\right)$$

3. Rappeler la formule de dérivée d'une composée $(f \circ g)'$.
4. Calculer la dérivée de f sur son ensemble de dérivabililité.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $\frac{\pi}{6}$.
6. On rappelle que la fonction $a\%b$ en Python renvoie le reste de la division de a par b, c'ets à dire l'unique réel r entre $[0, b[$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a = kb + r$. Cette fonction peut prendre des paramètres a, b réels, pas nécessairement entier.
   (a) Ecrire une fonction Python `reste` qui prend en paramètre un réel x et qui retourne son reste modulo 2π.
   (b) Ecrire une fonction python `definition` qui prend en paramètre un réel x et renvoi 1 si $x \in D_f$ et 0 sinon.
   (c) Ecrire une fonction python `f` qui prend en parmètre un réel x, qui renvoie un message d'erreur si $x \notin D_f$ et retourne la valeur de $f(x)$ sinon.

I. 41 EDL - concentration de glucose

Exercice 41. En l'abscence d'apport énergétique la concentration en glucose dissout dans le sang dans le temps mesurée en heure $t \mapsto c(t)$ (en $g \cdot L^{-1}$) vérifie l'équation différentielle

$$y' + 0.01y = -0.02$$

La concentration en glucose après un repas est égale à $c_0 = 1,2gL^{-1}$.

Donner les solutions de l'équation différentielle $y' + 0.01y = -0.02$.

Donner l'expression de la concentration en glucose $c(t)$ en utilisant la condition initiale $c(0) = 1.2$

Au bout de combien de temps après un repas la concentration en glucose dans le sang sera inférieure à $0,8gL^{-1}$?

Exprimer le résulat avec un calcul litéral, puis en donner une valeur approchée (on pourra utiliser que $\ln(7/8) \approx -0.13$)

I. 42 Etude de $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ (Pb)

Exercice 42. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. Etudiez la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$. (Domaine de définition, limites et variations)
3. Résoudre $f(x) = x$. On note α l'unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $u_1 < \alpha < 2$.
5. On note $I = [1, \alpha]$ et $J = [\alpha, 2]$. Montrer que $f(I) \subset J$ et $f(J) \subset I$.
6. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_n = u_{2n} \quad b_n = u_{2n+1}.$$

   Enfin on note A la fonction définie pour tout x par $A(x) = f \circ f(x)$. Montrer que $a_{n+1} = A(a_n)$. On peut montrer de manière similaire que $b_{n+1} = A(b_n)$, on ne demande pas de le prouver.

7. Soit F une fonction réelle. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ alors $F(\mathcal{E}) \subset F(\mathcal{F})$. En déduire que I est stable par A. De même, on pourrait montrer que J est stable par A, on ne demande pas de le prouver.
8. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $A(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{x+1}$
9. Résoudre $A(x) \geq x$ sur $]0, +\infty[$.
10. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, calculer leur limite.
12. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
13. (a) Ecrire une fonction Python `u` qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n
    (b) Ecrire une fonction Python `limiteu` qui prend en paramètre un reel $\epsilon > 0$ et qui renvoie la valeur de du premier rang $n_0 \geq 0$ tel que $|u_{n_0} - \ell| \leq \epsilon$

I. 43 Calcul de limites

Exercice 43. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \ln(x)$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{\sin(x)\ln(x^2)}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2-1}$

I. 44 Equation intégrale $f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt$ (Pb)

Exercice 44. Soit $a \in]-1, 1[$. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

1. Calcul des dérivées successives de f.
    (a) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.
    (b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.
    (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre entier naturel n, on a
    $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$
    (d) En déduire, pour tout nombre entier naturel n la valeur de $f^{(n)}(0)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a :
$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$
On pourra faire une récurrence et utiliser une intégration par parties

3. Soit A un nombre réel strictement positif.
   (a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que :
   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f(x)| \leq M$$
   et en déduire que pour tout nombre entier naturel n, on a :
   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$
   .
   (b) Soit x un nombre réel apartenant à $[-A, A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a
   $$|f(x)| \leq M\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}.$$
   (c) En déduire que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-A, A]$
   (d) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

I. 45 Fonction de plusieurs variables

Exercice 45. 1. Soit $u(x, y)$ la fonction définie par
$$u(x, y) = x^2 + xy + x - 2y^2 + 2y$$
et les deux sous-ensembles de de $\mathbb{R}^2$, E et F définies par :
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2 \,|\, -\frac{x}{2} \leq y \leq x + 1\} \qquad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2 \,|\, x + 1 \leq y \leq -\frac{x}{2}\}$$
   (a) Sur un graphique soigné, représenter E et F.
   (b) En considérant à y fixé, la fonction polynômiale $P(x) = u(x, y)$, résoudre $u(x, y) \geq 0$

2. Soit f la fonction définie par
   $$f(x, y) = \int_0^{u(x,y)} e^{\sqrt{t}}\, dt.$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Caculer le gradient de f.
   (c) En déduire que $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est l'unique point critique de f.
3. (a) Calculer $f\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
   (b) Montrer que $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est un minimum sur l'ensemble de définition de f.
   (c) Question bonus : D'autres points réalisent ce minimum, lesquels ? Pourquoi le gradient ne s'annule pas en ces autres points ?

I. 46 Intégrale de Gauss (D'après G2E 2019]

Exercice 46 (G2E 2019)**.** Dans cet exercice σ désigne un réel strictement positif.

On considère les trois fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = xe^{-x}, \quad h(x) = \frac{2}{ex}$$

$\mathcal{C}_\sigma$ désigne la courbe représentative de f_σ et $\mathcal{H}$ la courbe représentative de h

1. Soit $I_\sigma(t) = \displaystyle\int_0^t f_\sigma(x)dx$. Calculer $I_\sigma(t)$ pour tout $t \geq 0$ et en déduire la limite $\lim\limits_{t\to\infty} I_\sigma(t)$
   L'année prochaine, on dira que f_σ est une fonction de densité.
2. f_σ est-elle continue ?
3. (a) Démontrer que g admet un maximum que l'on déterminera.
   (b) En déduire que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_\sigma(x) \leq h(x).$$
   (c) Etudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente puis montrer que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, les courbes $\mathcal{C}_\sigma$ et $\mathcal{H}$ ont une tangente commune dont on donnera une équation cartésienne.

I. 47 Etude famille de fonction, intégrale, et somme (ECRICOME 2002)

Exercice 47. On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

A- Étude des fonctions f_n.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Étude du cas particulier $n = 1$.
   (a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1,+\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
   (a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   (b) En déduire les variations de f_n sur $]-1,+\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

B- Étude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

1. Calcul de U_1.

   (a) Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que :

   $$\forall x \in [0,1], \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale :

   $$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx.$$

   (c) Montrer que $U_1 = \dfrac{1}{4}$.

2. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

   (a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

   (b) Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (On ne demande pas sa limite.)

   (c) Démontrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

   (d) En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$

   Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :

   $$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

   (a) Montrer que :

   $$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

   (b) En déduire que :

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx.$$

   (c) En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :

   $$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

I. 48 inéquation à paramétre - Une bien l'autre pas finie

Exercice 48. On considère l'inéquation (E_a) de paramètre $a \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\frac{2x+a}{x-4a} \leq \frac{x}{x-2a} \quad (E_a)$$

1. Donner l'ensemble des solutions pour $a = 0$

   Pour la suite on supppose que $a \neq 0$.
2. Donner le domaine de définition de (E_a) en fonction de a.
3. Résoudre pour $a > 0$ l'inéquation : $(x-4a)(x-2a) \geq 0$.
4. Résoudre pour $a > 0$ l'inéquation : $x^2 + ax - 2a^2 \geq 0$.
5. En déduire pour $a > 0$ les solutions de (E_a).
6. Faire de même avec $a < 0$.

Exercice 49. On considère l'équation (E_a) de paramètre $a \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\sqrt{x+a^2} = \frac{a^2}{x-a} \quad (E_a)$$

On note $\mathcal{S}_a$ l'ensemble des solutions de (E_a)

1. (a) Determiner $\mathcal{C}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation d'inconnue $a \in \mathbb{R}$, $-a^2 \leq a$.
   (b) Déterminer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition $\mathcal{D}_a$ de l'équation (E_a).
   (c) Résoudre l'équation (E_0).
   (d) A quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$, le nombre 0 est il solution de (E_a) ? (En d'autres termes, déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in \mathcal{S}_a$)
2. Résoudre pour $x \in \mathcal{D}_a$ et en fonction de $a \in \mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{a^2}{x-a} < 0$$

   (On distinguera les cas $a \in \mathcal{C}$ et $a \notin \mathcal{C}$)
3. En déduire que $\mathcal{S}_a \subset]a, +\infty[$.
4. Montrer que pour tout $x > a$,

$$(E_a) \Longleftrightarrow x^2 + (a^2 - 2a)x + (a^2 - 2a^3) = 0$$

5. Soit Δ_a le discriminant du polynôme $x^2 + (a^2 - 2a)x + (a^2 - 2a^3)$. Montrer que

$$\Delta_a = a^3(a+4)$$

6. En déduire une expression simple de l'ensemble $P = \{a > 0 \,|\, \Delta_a \geq 0\}$
7. Résoudre finalement (E_a) en fonction de a (On suppose toujours $a > 0$)