On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \geq 3$, $u_n > 1$.
2. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur $\mathbb{N}$.
3. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4. En déduire l'expression explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.