Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 1+\frac{1}{u_n} \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1.
2. Etudiez la fonction $f : x \mapsto 1+\frac{1}{x}$. (Domaine de définition, limites et variations)
3. Résoudre $f(x) = x$. On note α l'unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $u_1 < \alpha < 2$.
5. On note $I = [1, \alpha]$ et $J = [\alpha, 2]$. Montrer que $f(I) \subset J$ et $f(J) \subset I$.
6. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

   $$a_n = u_{2n} \quad b_n = u_{2n+1}.$$

   Enfin on note A la fonction définie pour tout x par $A(x) = f \circ f(x)$. Montrer que $a_{n+1} = A(a_n)$. On peut montrer de manière similaire que $b_{n+1} = A(b_n)$, on ne demande pas de le prouver.
7. Soit F une fonction réelle. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ alors $F(\mathcal{E}) \subset F(\mathcal{F})$. En déduire que I est stable par A. De même, on pourrait montrer que J est stable par A, on ne demande pas de le prouver.
8. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $A(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{x+1}$
9. Résoudre $A(x) \geq x$ sur $]0, +\infty[$.
10. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, calculer leur limite.
12. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
13. (a) Ecrire une fonction Python `u` qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n

    (b) Ecrire une fonction Python `limiteu` qui prend en paramètre un reel $\epsilon > 0$ et qui renvoie la valeur de du premier rang $n_0 \geq 0$ tel que $|u_{n_0} - \ell| \leq \epsilon$