Cet exercice propose d'étudier une suite de fractions rationnelles, c'est-à-dire des fonctions définies comme quotients de deux fonctions polynomiales. Plus précisément, on considère les suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} P_0 & = & 0 \\ Q_0 & = & 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} P_{n+1} & = & P_n + XQ_n \\ Q_{n+1} & = & Q_n - XP_n \end{cases}$$

et on note $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ R_n : x \mapsto \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$.

1. Déterminer R_0, R_1, R_2 et R_3 ainsi que leurs domaines de défintion.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0)$.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le domaine de définition de R_n est de la forme $\mathbb{R} \setminus E_n$ où E_n est un ensemble fini de nombres réels.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n + iP_n = (1 + iX)^n$.
5. Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Ecrire le nombre complexe $(1 + i\tan(\theta))^n$ sous forme algébrique.
   (b) En déduire que $P_n(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$ et $Q_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$.
   (c) Justifier proprement que $E_n = \left\{\tan\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \mid m \text{ entier impair tel que } -n < m < n\right\}$.
   (d) Montrer que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $R_n(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$
6. Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose qu'il existe deux polynomes $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et une fraction rationnelle $R : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ telle que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $R(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$
   (a) Montrer que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $(PQ_n - QP_n)(\tan(\theta)) = 0$.
   (b) En déduire que $PQ_n - QP_n = 0$ puis que $R = R_n$.