Dans cet exercice, on considère une suite quelconque de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Partie I : Quelques exemples

1. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1.
2. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \exp(n)$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $(n \geq 1, n \geq k \geq 1)$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.

   (c) Calculer la valeur de b_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Partie II : Formule d'inversion

Le but de cette partie est de montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'exprime en fonction de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que pour tout $(k, n, p) \in \mathbb{N}^3$, tel que $k \leq p \leq n$ on a :

$$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}.$$

2. Montrer que, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, tel que $k \leq n$ on a :

$$\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n+1-k}{i} = (-1)^{n-k}.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} b_k$$

4. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_{n+1} en fonction de b_{n+1} et de $a_0, ..., a_n$.
5. Prouver, par récurrence forte sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

6. En utilisant le résultat précédent montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k2^k (-1)^{n-k} = 2n.$$