

On dispose d'une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges. On fait des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

- Si la boule tirée est de couleur blanche, on la remet et on ajoute une boule blanche
- Si la boule tirée est de couleur rouge, on la remet et on ajoute une boule rouge.

On appelle B_i l'événement "tirer une boule blanche au i -ième tirage" et on note $p_i = P(B_i)$.

1. Calculer p_1 en fonction de b et r .
2. Montrer que $p_2 = \frac{b}{b+r}$.
3. On a tiré une boule blanche au deuxième tirage. Donner alors la probabilité que l'on ait tiré une boule blanche au premier tirage en fonction de b et r .
4. On appelle E_n l'événement

E_n : " On tire que des boules blanches sur les n premiers tirages "

et F_n l'événement

F_n : " On tire pour la première fois une boule rouge au n -ième tirage"

- (a) Exprimer E_n à l'aide des événements $(B_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$
 - (b) Exprimer F_n à l'aide de E_{n-1} et B_n
5. Pour tout $k \geq 2$ calculer $P_{E_{k-1}}(B_k)$.
 6. Calculer $P(F_n)$ en fonction de b, r et n puis $P(F_n)$.
 7. On souhaite modéliser informatiquement cette expérience. On va utiliser la lettre 'B' pour désigner les boules blanches et 'R' pour les rouges.
 - (a) Créer une fonction **urne** qui prend en paramètres le nombre de boules blanches et rouges, et retourne une liste correspondant à l'urne initiale. (Cette liste n'a pas à être "mélangée")
 - (b) Créer une fonction **tirage** qui prend en argument une liste correspondant à une urne, modélise le tirage d'une boule aléatoirement dans cette urne, affiche la couleur de la boule tirée et retourne une liste correspondant à l'urne après l'ajout de la boule de la couleur tirée.
 - (c) Créer une fonction **compte** qui prend une liste correspondant à une urne et retourne le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
 - (d) Créer une fonction **expérience** qui prend en argument le nombre de boules blanches et rouges et N le nombre de tirages effectués et retourne le nombre de boules blanches dans l'urne après N tirages.