On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n^2 - u_n + 3 \end{cases}$

1. Étudier la fonction f associée.
2. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
3. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$ ou $u_0 = 0$?
5. On suppose que $u_0 \in]0, 3[$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]0, 3[$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. On suppose que $u_0 > 3$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 3$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. On suppose que $u_0 < 0$.
   (a) Montrer que $u_1 > 3$.
   (b) En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.