Dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère le sous-ensemble E des matrices $M(a,b)$ définies par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$E = \{M(a,b) \quad a,b \in \mathbb{R}\}.$$

On note $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $M(a,b)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Structure de E
   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Donner une base de E, ainsi que sa dimension.
2. Étude d'un cas particulier.
   On pose $A = M(1,0)$.
   (a) Calculer A^2. En déduire que A est une matrice inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A.
   (c) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f_{1,0}$ est :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
3. Diagonalisation des éléments de E et application.
   On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :
   $$\vec{u} = (1,1,1), \quad \vec{v} = (1,-1,0), \quad \vec{w} = (1,1,-2).$$
   (a) Justifier que les matrices de l'ensemble E sont diagonalisables.
   (b) Montrer que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Écrire P.
   (d) Déterminer P^{-1}.
   (e) Exprimer les vecteurs $f_{a,b}(\vec{u})$, $f_{a,b}(\vec{v})$, $f_{a,b}(\vec{w})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
   (f) En déduire l'expression de la matrice $D_{a,b}$ de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{C}$.
   (g) Justifier l'égalité :
   $$P^{-1} M_{a,b} P = D_{a,b}.$$
   (h) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $D_{a,b}$ soit inversible.
   (i) Cette condition étant réalisée, déterminer la matrice inverse de $D_{a,b}$.
   (j) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M_{a,b}$ soit inversible.