Le but de cet exerice est l'étude de la suite (a_n) définie par $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{a_n(1+a_n)}{1+2a_n}$.

1. Etude de la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Calculer a_2 et a_3.
   (b) Etudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{x(x+1)}{1+2x}$
   (c) Déterminer l'image directe de $]0,1[$ par f.
   (d) Démontrer que, $\forall n \geqslant 2$, on a $0 < a_n < 1$.
   (e) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   (f) Rédoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0,1]$.
   (g) En déduire la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.
2. Un résultat intermédiaire.
   Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante, admettant une limite ℓ en $+\infty$ et $(C_n)_{n\geq 1}$ définie par
   $$C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n \leq u_n$.
   (b) Montrer que pour $(C_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2C_{2n} - C_n \geq u_{n+1}$.
   (d) En déduire que $(C_n)_{n\geq 1}$ converge et donner la valeur de sa la limite en fonction de celle de $(u_n)_{n\geq 1}$.
3. Etude d'un équivalent de $(a_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Montrer que $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1+a_n}$.
   (b) On pose $u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (d) En posant $C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$, exprimer C_n en fonction de a_{n+1} et de a_1.
   (e) Conclure à l'aide de la question 2.e que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.