1. Soit $u(x,y)$ la fonction définie par

$$u(x,y) = x^2 + xy + x - 2y^2 + 2y$$

et les deux sous-ensembles de de $\mathbb{R}^2$, E et F définies par :

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2 \,|\, -\frac{x}{2} \leq y \leq x+1\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2 \,|\, x+1 \leq y \leq -\frac{x}{2}\}$$

   (a) Sur un graphique soigné, représenter E et F.

   (b) En considérant à y fixé, la fonction polynômiale $P(x) = u(x,y)$, résoudre $u(x,y) \geq 0$

2. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \int_0^{u(x,y)} e^{\sqrt{t}}\, dt.$$

   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

   (b) Caculer le gradient de f.

   (c) En déduire que $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est l'unique point critique de f.

3. (a) Calculer $f\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

   (b) Montrer que $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est un minimum sur l'ensemble de définition de f.

   (c) Question bonus : D'autres points réalisent ce minimum, lesquels ? Pourquoi le gradient ne s'annule pas en ces autres points ?