

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (v_0 - u_0)$.