On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} 0 < a_0 < b_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}. \end{cases}$$

a_{n+1} est la moyenne géométrique de a_n et b_n ; b_{n+1} est la moyenne arithmétique de a_n et de b_n.

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq b_n$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.est décroissante.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}.$$
4. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

La limite des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend que de a_0 et b_0. On ne peut pas l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles. On l'appelle moyenne arithmético-géométrique de a_0 et b_0.