Le but de ce problème est d'étudier la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. Etude globale :
   (a) Justifier que g est bien définie sur $\mathcal{D}_g =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   (b) Montrer que g est positive sur $\mathcal{D}_g$.
   (c) Justifier que g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et exprimer sa dérivée en tout point de $\mathcal{D}_g$.
   (d) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_g$.
   (e) Etudier les variations de g sur $\mathcal{D}_g$. (les limites aux bornes ne sont pas demandées pour cette question)
2. Etude au voisinage de 0
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in]0,1[\quad \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$$
   On fera très attention aux signes dans les inégalités.
   (b) En déduire que g se prolonge par continuité en 0 et préciser la valeur de ce prolongement. Par la suite, on note encore g la fonction continue, prolongée en 0
   (c) Montrer que g est dérivable à droite en 0 et préciser $g'(0)$.
3. Etude au voisinage de 1.
   (a) A l'aide du théorème des accroissements finis appliquer à $h(t) = \ln(t) - t$ montrer que pour tout $t \in]0,1[$:
   $$0 \leq \frac{\ln(t) - t + 1}{t-1} \leq \frac{1-t}{t}$$
   (b) En déduire que pour tout $t \in]0,1[$:
   $$\left|\frac{\ln(t) - t + 1}{t-1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$
   (c) Montrer de manière analogue que pour tout $t > 1$ on a
   $$\left|\frac{\ln(t) - t + 1}{t-1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$
   (d) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$
   $$\left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right| \leq 2$$
   (e) Conclure que g est prolongeable par continuité en 1.
4. Etude au voisinage de $+\infty$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in]1,+\infty[\quad \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x)$$
   (b) En déduire la limite de g en $+\infty$.