Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 0$ et

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

où $c \in \mathbb{C}$ est un complexe.
Selon la valeur de c, il y a deux possibilités : soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée, soit son module tends vers l'infini. Le but de ce problème est d'écrire un algorithme qui permet de tracer l'ensemble des c pour lesquels la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée. Cette ensemble s'appelle l'ensemble de Mandelbrot.

1. Que vaut la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $c = 0$. Est ce que $c = 0$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot ?
2. Que valent les premières valeurs $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $c = i$. A votre avis est-ce-que $c = i$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot ?
3. Même question pour $c = 1 + i$ (pour $n = 0, 1, 2, 3$).
4. Ecrire une fonction Python `suite_z` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et un complexe $c \in \mathbb{C}$ et qui retourne la valeur de z_n.
5. On peut montrer que c appartient à l'ensemble de Mandelbrot si et seulement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < 2$. On suppose pour simplifier qu'un nombre c appartient à l'ensemble des Mandelbrot si et seulement si pour tout $n \in [\![0, 100]\!]$, $|z_n| < 2$. Ecrire une fonction verif qui prend un nombre complexe c et retourne `True` si c appartient à l'ensemble de Mandelbrot et `False` sinon.
6. Ecrire une fonction `tracer` qui prend en argument deux réels (x, y) et qui trace le point (x, y) sur un graphique si le point d'affixe $x + iy$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot.
7. Ecrire un script python qui teste si les points de coordonnées $\left(\frac{i}{100}, \frac{j}{100}\right)$ pour $i, j \in [\![-100, 100]\!]$ appartiennent à l'ensemble de Mandelbrot et les trace le cas échéant.

`mandelbrot.png`