On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout $x \in ]1, e[$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a $(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} > 0$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) Calculer $I_1$ à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer, toujours à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n \leq e$.
   (c) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de $nI_n$.