Liste Exercices et Problèmes DS DM

Table des matières

I Algebre

I. 1 Système linéaire

Exercice 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x & +y & & = & \lambda x \\ & y & & = & \lambda y \\ -x & -y & +z & = & \lambda z \end{array} \right.$$

1. Mettre le système sous forme échelonné.
2. En donner le rang en fonction de λ.
3. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
4. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ
5. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$?

Correction 1.

1. En échangeant les lignes et les colonnes on peut voir que le système est déjà échelonné !

$$(S_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{cccrc} (2-\lambda)x & +y & & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \\ -x & -y & +(1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$L_3 \leftarrow L_1, L_2 \leftarrow_3, L_1 \leftarrow L_2$

$$(S_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{cccrc} -x & -y & +(1-\lambda)z & = & 0 \\ (2-\lambda)x & +y & & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \end{array}\right.$$

$C_3 \leftarrow C_1, C_2 \leftarrow C_3, C_1 \leftarrow C_2$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccrc} (1-\lambda)z & -x & -y & = & 0 \\ & (2-\lambda)x & +y & = & 0 \\ & & (1-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$$

2. Si $(2-\lambda) \neq 0$ et $(1-\lambda) \neq 0$ c'est-à-dire si $\lambda \notin \{1,2\}$

$$\boxed{\text{Le système est triangulaire de rang 3.}}$$

Si $(2-\lambda) = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = 2$ on a :

$$S_2 \iff \left\{\begin{array}{cccrc} -z & -x & -y & = & 0 \\ & & +y & = & 0 \\ & & -y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$S_2 \iff \left\{\begin{array}{cccrc} -z & -x & -y & = & 0 \\ & & +y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 2.}}$$

Si $(1-\lambda) = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = 1$ on a :

$$S_1 \iff \left\{\begin{array}{ccrc} -x & -y & = & 0 \\ x & +y & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$S_1 \iff \left\{\begin{array}{ccrc} -x & -y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 1.}}$$

3. Le système n'est pas de Cramer, si $\lambda \in \{1,2\}$.
Si $\lambda = 1$ les solutions sont données par

$$\boxed{S_1 = \{(-y, y, z) \,|(y,z) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Si $\lambda = 2$ les solutions sont données par

$$\boxed{S_2 = \{(-z, 0, z) \,|z \in \mathbb{R}^2\}}$$

4. Si $\lambda \notin \Sigma$, le système est de Cramer, il admet une unique solution. Or il est homogène donc, $(0,0,0)$ est solution, c'est donc la seule :

$$\boxed{S = \{(0,0,0)\}}$$

I. 2 Sujet Révisions Algébre linéaire - (Pb)

I. 2. a Equation dans $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à son vecteur nul. On s'intéresse aux endomorphismes f de E vérifiant la relation

$$f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E\,. \quad (*)$$

Un exemple On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y, -x) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $g \circ g$ et vérifier que g est solution de $(*)$
3. Déterminer $F = \ker(g - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et donner une base de F et une base de G.
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$
5. Soit $u = (1,-1)$ et $v = (-2,1)$ Montrer que $B = (u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer (x,y) comme combinaison linéaire de u et v.
7. Calculer $g^n(u)$ et $g^n(v)$.
8. Donner finalement l'expression de $g^n(x,y)$ en fonction de x et y.

I. 2. b Etude de f

On se place à nouveau dans le cas général et on s'intéresse à l'équation $(*)$.

1. Montrer que si f vérifie $(*)$ alors f est bijective et exprimer f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de Id_E.
2. Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. L'ensemble des endomorphisme vérifiant $(*)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, espace des endomorphismes de E ?

Etude des puissance de f On suppose dans la suite que f est une solution de $(*)$ et que f n'est pas de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que (f, Id_E) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$
2. (a) Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de Id_E et f.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, f^n peut s'écrire sous la forme $f^n = a_n f + b_n\,\mathrm{Id}_E$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$
   (c) Justifier que dans l'écriture précédente, le couple (a_n, b_n) est unique.
3. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0$
   (b) En déduire une expression de a_n ne faisant intervenir que n.
   (c) Calculer alors b_n.

I. 2. c Polynômes et application linéaires

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On considère l'application

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

$P(X+1)$ désigne la composée et non le produit des polynômes P et $X+1$.

Etude d'un endomorphisme

1. Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in N$.
3. (a) Montrer que si $P \in \ker(\Delta)$ alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$
   (b) En déduire que si $P \in \ker(\Delta)$ alors P est un polynôme constant.
   (c) Montrer alors que $\ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.
4. (a) Si P n'est pas un polynôme constant, préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P, ainsi que le coefficient dominant.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$
5. soit $n \geq 1$, on note Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur $\mathbb{R}_n[X]$. C'est-à-dire

$$\Delta_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \Delta(P) \end{array} \right.$$

   Déterminer $\ker \Delta_n$ et montrer que $\mathrm{Im}\Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$
6. Montrer que Δ est surjectif.
7. On considère $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(0) = 0\}$.
   (a) Vérifier que P est un sev de $\mathbb{R}[X]$ et que $F \cap \ker(\Delta) = \{0\}$
   (b) Conclure que pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $\Delta(P) = Q$. Préciser le degré de P en fonction de celui de Q.

Etude d'une suite de polynômes

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(0) = 0$ et $P_{n-1} = \Delta(P_n)$.
2. Expliciter P_1 et P_2.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $P_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction 2.

1. g est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, il suffit donc de vérifier que g est linéaire. Pour cela on considère $(x_1, y_1) \in R^2, (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
g((x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)) &= g(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) \\
&= (3(x_1 + \lambda x_2) + 2(y_1 + \lambda y_2), -(x_1 + \lambda x_2)) \\
&= (3x_1 + 2y_1 + \lambda(3x_2 + 2y_2), -x_1 - lambdax_2)) \\
&= (3x_1 + 2y_1, -x_1) + \lambda(3x_2 + 2y_2, -x_2)) \\
&= g(x_1, y_1) + \lambda g(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

Ainsi g est linéaire,

$$\boxed{g \text{ est donc un endomorphisme de } \mathbb{R}^2}$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
g \circ g(x, y) &= g(3x + 2y, -x) \\
&= (3(3x + 2y) + 2(-x), -(3x + 2y)) \\
&= (7x + 6y, -3x - 2y) \\
&= (9x + 6y, -3x) + (-2x, -2y) \\
&= 3(3x + 2y, -x) - 2(x, y) \\
&= 3g(x, y) - 2\,\mathrm{Id}(x, y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } g^2 = 3g - 2\,\mathrm{Id}}$$

3.

$$\begin{aligned}
F &= \ker(g - \mathrm{Id}) \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) - (x, y) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (2x + 2y, -x - y) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + 2y = 0 \text{ et } x + y = 0\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = -y\} \\
&= \{(-y, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(-1, 1) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= Vect((-1, 1))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } F \text{ est un sev de } \mathbb{R}^2 \text{ de dimension 1, et } (-1, 1) \text{ est une base de } F}$$

4.

$$\begin{aligned}
G &= \ker(g - 2\,\mathrm{Id}) \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x,y) - 2(x,y) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x+2y, -x-2y) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+2y = 0 \text{ et } -x-2y = 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+2y = 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = -2y\} \\
&= \{(-2y, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(-2,1) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= Vect((-2,1))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } G \text{ est un sev de } \mathbb{R}^2 \text{ de dimension 1, et } (-2,1) \text{ est une base de } G}$$

5. Comme F et G sont des espaces vectoriels, $0 \in F$ et $0 \in G$ donc, $\{(0,0)\} \subset F \cap G$.
Soit $u \in F \cap G$, comme $u \in F$ on a $g(u) - u = 0$ et donc $g(u) = u$. Comme $u \in G$ on a $g(u) - 2u = 0$ donc $g(u) = 2u$. Ainsi $u = 2u$ et donc $u = 0$. On a donc $F \cap G \subset \{(0,0)\}$

$$\boxed{\text{Par double inclusion } F \cap G = \{(0,0)\}}$$

6. u et v ne sont pas proportionnels et forment donc une famille libre. Comme $Card((u,v)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, (u,v) est aussi une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{(u,v) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$$

7. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\lambda u + \mu v = (x, v)$$
On obtient le système suivant :
$$\begin{cases} \lambda - 2\mu &= x \\ -\lambda + \mu &= y \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda - 2\mu &= x \\ -\mu &= y + x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda &= -x - 2y \\ \mu &= -y - x \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ on a } (-x-2y)u + (-y-z)v = (x,y)}$$

8. Prouvons par récurrence la proposition $P(n)$: "$g^n(u) = u$ et $g^n(v) = 2^n v$"

Initialisation $g(u) = u$ et $g(v) = 2v$ car $u \in F$ et $v \in G$. donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors par HR, $g^n(u) = u$ et $g^n(v) = 2^n v$ donc
$$g^{n+1}(u) = g(g^n(u)) = g(u) = u$$
et
$$g^{n+1}(u) = g(g^n(v)) = g(2^n v) = 2^n g(v) = 2^{n+1} v$$
Ainsi la propriété P est héréditaire,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in N^*, g^n(u) = u \text{ et } g^n(v) = 2^n v}$$

9. D'après la question 7 :

$$g^n(x,y) = g^n((-x-2y)u + (-y-z)v) = (-x-2y)g^(u) + (-y-z)g^n(v)$$

D'après la question 8, on a donc

$$g^n(x,y) = (-x-2y)u + (-x-y)2^n v$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g^n(x,y) &= (-x-2y)(1,-1) + (-2^n x - 2^n y)(-2,1) \\ &= (-x-2y+2^{n+1}x + 2^{n+1}y, x+2y-2^n x - 2^n y) \end{aligned}$$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\boxed{g^n(x,y) = ((-1+2^{n+1})x + (-2+2^{n+1})y, (1-2^n)x + (2-2^n)y)}$$

10. La matrice de g dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la question précédente, la matrice de g^n est

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & -2+2^{n+1} \\ 1-2^n & 2-2^n \end{pmatrix}}$$

B - Cas général.

1. Si f vérifie $(*)$ on a $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E$ donc $-f^2 + 3f = 2\,\mathrm{Id}_E$ soit encore

$$f \circ \frac{1}{2}(-f + 3\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}_E$$

$$\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1} = \tfrac{1}{2}(-f + 3\,\mathrm{Id})}$$

2. Soit $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$ une solution de $(*)$ on a alors $f^2 = \lambda^2\,\mathrm{Id}_E$ et donc

$$\lambda^2\,\mathrm{Id}_E = 3\lambda\,\mathrm{Id}_E - 2\,\mathrm{Id}_E$$

Donc

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)\,\mathrm{Id}_E = 0$$

Comme Id_E n'est pas l'application nulle, on a $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$ ainsi

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Finalement $\lambda \in \{1, 2\}$

$$\boxed{\text{Les seules solutions de } (*) \text{ de la forme } \lambda\,\mathrm{Id}_E \text{ sont } \mathrm{Id}_E \text{ et } 2\,\mathrm{Id}_E}$$

3. (a) Soit f solution de $(*)$ on a donc $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E$, en composant par f on obtient

$$f^3 = 3f^2 - 2f$$

Or $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E$ donc

$$\begin{aligned} f^3 &= 3(3f - 2\,\mathrm{Id}_E) - 2f \\ &= 7f - 6\,\mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

$$\boxed{f^3 = 7f - 6\,\mathrm{Id}_E}$$

(b) Montrons la propriété par récurrence.
Pour $n = 1$, $f^1 = f$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ satisfont la condition demandée.
Supposons donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Il existe donc (a_n, b_n) tel que $f^n = a_n f + b_n\,\mathrm{Id}_E$ En composant par f on obtient

$$f^{n+1} = a_n f^2 + b_n f$$

Or $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E$ donc

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= a_n(3f - 2\,\mathrm{Id}_E) + b_n f \\ &= (3a_n + b_n)f - 2a_n\,\mathrm{Id}_E \\ &= a_{n+1} f + b_{n+1}\,\mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

avec $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } (a_n, b_n) \text{ tel que } f^n = a_n f + b_n\,\mathrm{Id}_E}$$

4. (a) D'après la question précédente $b_{n+1} = -2a_n$ donc $b_n = -2a_{n+1}$. En remettant dans l'équation $a_{n+1} = 3a_n + b_n$, on obtient

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0}$$

(b) On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractérisitique est $X^2 - 3X + 2 = 0$ dont les racines sont 1 et 2.
Ainsi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \alpha + \beta 2^n$$

D'après l'initialisation de la récurrence on sait que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, donc $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha + 2\beta = 1$. Tout calcul fait, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = -1 + 2^n}$$

(c) On sait que $b_n = -2a_{n+1}$ donc

$$\boxed{b_n = -1 + 2^{n+1}}$$

I. 3 Fraction Rationnelle $Q_n(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$ *(Pb)*

Exercice 2. Cet exercice propose d'étudier une suite de fractions rationnelles, c'est-à-dire des fonctions définies comme quotients de deux fonctions polynomiales. Plus précisément, on considère les suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} P_0 &= 0 \\ Q_0 &= 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} P_{n+1} &= P_n + XQ_n \\ Q_{n+1} &= Q_n - XP_n \end{cases}$$

et on note $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ $R_n : x \mapsto \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$.

1. Déterminer R_0, R_1, R_2 et R_3 ainsi que leurs domaines de défintion.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0)$.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le domaine de définition de R_n est de la forme $\mathbb{R} \setminus E_n$ où E_n est un ensemble fini de nombres réels.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n + iP_n = (1 + iX)^n$.
5. Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Ecrire le nombre complexe $(1 + i\tan(\theta))^n$ sous forme algébrique.
   (b) En déduire que $P_n(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$ et $Q_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$.
   (c) Justifier proprement que $E_n = \left\{\tan\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \mid m \text{ entier impair tel que } -n < m < n \right\}$.
   (d) Montrer que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $R_n(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$
6. Pour cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose qu'il existe deux polynomes $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et une fraction rationnelle $R : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ telle que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $R(\tan(\theta)) = \tan(n\theta)$
   (a) Montrer que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $(PQ_n - QP_n)(\tan(\theta)) = 0$.
   (b) En déduire que $PQ_n - QP_n = 0$ puis que $R = R_n$.

Correction 3.

1. Calculons tout d'abord P_i et Q_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
$$\begin{cases} P_1 &= P_0 + XQ_0 = X \\ Q_1 &= Q_0 - XP_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P_2 &= P_1 + XQ_1 = 2X \\ Q_2 &= Q_1 - XP_1 = 1 - X^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} P_3 &= P_2 + XQ_2 = 3X - X^3 \\ Q_3 &= Q_2 - XP_2 = 1 - X^2 - 2X^2 = 1 - 3X^2 \end{cases}$$
On obtient
$$R_0 = \frac{P_0}{Q_0} = 0 \quad \text{et} \quad R_1 = X \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{2X}{1 - X^2} \quad \text{et} \quad R_3 = \frac{3X - X^3}{1 - 3X^2}.$$
Les ensembles de définitions respectifs sont :
$$D_0 = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D_1 = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D_2 = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \quad \text{et} \quad D_3 = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$$
2. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0) = 1$. Pour $n = 0$ c'est vrai par définition de Q_0. L'hérédité se montre grâce à la relation de récurrence $Q_{n+1} = Q_n - XP_n$, en évaluant en 0 on obtient $Q_{n+1}(0) = Q_n(0) - 0P_n(0) = Q_n(0) = 1$.

3. L'ensemble de définition de R_n est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \,|\, Q_n(x) \neq 0\}$, le complémentaire des racines réelles de Q_n. Or un polynôme non-nul n'a qu'un nombre fini de racines. D'après la question précédente Q_n n'est pas le polynôme nul donc $E_n = \{Q_n(x) = 0\}$ est un ensemble fini.
4. On montre la proposition par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{K}(n)$: "$Q_n + iP_n = (1+iX)^n$".
   Pour $n = 0$ on a $Q_0 + iP_0 = 1$ par définition de Q_0 et P_0 et on a $(1 + iX)^0 = 1$. $\mathcal{K}(0)$ est donc vrai.
   On suppose que la propriété $\mathcal{K}(n)$ est vraie pour un certain entier n. On a alors $Q_{n+1} + iP_{n+1} = (Q_n - XP_n) + i(P_n + XQ_n)$ par définition des suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ On a donc
   $$\begin{aligned} Q_{n+1} + iP_{n+1} &= (Q_n + iP_n) + X(iQ_n - P_n) \\ &= (Q_n + iP_n) + iX(Q_n + iP_n) \end{aligned}$$
   car $-1 = i^2$. En utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient :
   $$\begin{aligned} Q_{n+1} + iP_{n+1} &= (1 + iX)^n + iX(1 + iX)^n \\ &= (1 + iX)(1 + iX)^n \\ &= (1 + iX)^{n+1} \end{aligned}$$
   La propriété $\mathcal{K}$ est donc héréditaire.
   Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. (a)
   $$\begin{aligned} (1 + i\tan(\theta))^n &= \left(\frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^n \\ &= \left(\frac{\exp(i\theta)}{\cos(\theta)}\right)^n \\ &= \frac{\exp(in\theta)}{\cos^n(\theta)} \\ &= \frac{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)} \\ &= \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} + i\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)} \end{aligned}$$
   (b) En évaluant la relation obtenue à la question 5) en $\tan(\theta)$ on obtient :
   $$Q_n(\tan(\theta)) + iP_n(\tan(\theta)) = (1 + i\tan(\theta))^n.$$
   Or d'après la question 6a) $(1 + i\tan(\theta))^n = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} + i\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}$. On identifie ensuite partie réelle et partie imaginaire et on trouve
   $$P_n(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)} \quad \text{et} \quad Q_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}.$$
   (c) On a vu à la question 3 que $E_n = \{x \in \mathbb{R} \,|\, Q_n(x) = 0\}$. Comme tan est une bijection $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in E_n$ il existe $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \tan(\theta)$. D'après la question 6)b) on a alors $x \in E_n$ si et seulement si $\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} = 0$ ce qui équivaut à $\cos(n\theta) = 0$, soit $n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.

Ainsi $\theta \equiv \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\pi}{n}\right]$ et comme $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\theta \in \left\{\frac{\pi + 2k\pi}{2n} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
\theta &\in \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2n} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cap]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\
\theta &\in \left\{\frac{m\pi}{2n} \,|\, m \text{ impair}\right\} \cap]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\
\theta &\in \left\{\frac{m\pi}{2n} \,|\, -n < m < n,\ m \text{ impair}\right\}
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en résolvant les inégalités : $-\frac{\pi}{2} < \frac{m\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$
En revenant à la variable x, on a :

$$x \in \{\tan\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \,|\, -n < m < n,\ m \text{ impair}\}$$

(d) Remarquons que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, $\mathbb{R}_n\left(\tan\left(\theta\right)\right)$ est bien définie d'après la question précédente. On a ainsi, $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$,

$$\begin{aligned}
R_n(\tan(\theta)) &= \frac{P_n(\tan(\theta)}{Q_n(\tan(\theta))} \\
&= \frac{\frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}}{\frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)}} \\
&= \tan(n\theta)
\end{aligned}$$

6. (a) $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, on a

$$R(\tan(\theta)) = R_n(\tan(\theta)$$

Donc,

$$\frac{P_n}{Q_n}(\tan(\theta)) = \frac{P}{Q}(\tan(\theta))$$

En multipliant de par et d'autres par $QQ_n(\tan(\theta))$ on obtient :

$$P_nQ(\tan(\theta)) = PQ_n(\tan(\theta))$$

et donc

$$(P_nQ - PQ_n)(\tan(\theta)) = 0$$

(b) Le polynome $P_nQ - PQ_n$ s'annule en une infinité de valeur d'après la question précédente, c'est donc le polynôme nul. Donc $P_nQ - PQ_n = 0$ (je n'ai pas 'simplifier' par $\tan(\theta)) \neq 0$, ici j'utilise quelque chose de complétement différent. On a évalué en $\tan(\theta)$ ce n'est pas un produit mais une composition)
On obtient donc $P_nQ = PQ_n$ (égalité entre polynomes) et donc $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P}{Q}$ (égalité entre fraction rationnelle).

I. 4 Diagonalisation (Pb)

Exercice 3. Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système $MX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.
2. Calculer $(M - \mathrm{Id})^2$. Donner son rang.
3. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer Me_1, Me_2 en fonction de e_1, e_2.
4. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Me_3 = \alpha e_2 + \beta e_3$.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
6. Soit $T = P^{-1}MP$. Calculer T.
7. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T^n = P^{-1}M^nP$$

8. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice N telles que

$$T = D + N \quad \text{et} \quad ND = DN$$

9. Montrer que $N^2 = 0$
10. Montrer que $T^n = D^n + nND^{n-1}$.
11. En déduire la valeur de M^n.

Correction 4.

1.

$$MX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} 2x + y \\ y \\ -x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x & +y & & = & \lambda x \\ & y & & = & \lambda y \\ -x & & +z & = & \lambda z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} (2-\lambda)x & +y & & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \\ -x & & +(1-\lambda)z & = & 0 \end{array} \right.$$

En échangeant les lignes et les colonnes on peut voir que le système est déjà échelonné. $L_3 \leftarrow L_1, L_2 \leftarrow_3, L_1 \leftarrow L_2$

$$MX = \lambda X \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} -x & & +(1-\lambda)z & = & 0 \\ (2-\lambda)x & +y & & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \end{array} \right.$$

$C_3 \leftarrow C_1, C_2 \leftarrow C_3, C_1 \leftarrow C_2$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} (1-\lambda)z & -x & & = & 0 \\ & (2-\lambda)x & +y & = & 0 \\ & & (1-\lambda)y & = & 0 \end{array} \right.$$

Si $\lambda \notin \{1,2\}$ alors le système est de rang 3, il est donc de Cramer et l'unique solution est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}}$$

Si $\lambda = 1$, le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -x & & = & 0 \\ (2-1)x & +y & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x & = 0 \\ y & = 0 \end{array} \right.$$

Le système est de rang 2. L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}}$$

Si $\lambda = 2$, le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (1-2)z & -x & & = & 0 \\ & 0 & +y & = & 0 \\ & & (1-2)y & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} -z & -x & & = 0 \\ & & y & = 0 \\ & & y & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x & = -z \\ y & = 0 \end{array} \right.$$

Le système est de rang 2. L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(-z,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}}$$

2. $M - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Donc

$$\boxed{(M - \mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

   Le système associé est
   $\left\{ \begin{array}{ccc} x & +y & = 0 \\ & & 0 = 0 \\ -x & -y & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x + y & = 0 \end{array} \right.$ Il est de rang 1. Donc

$$\boxed{(M - \mathrm{Id})^2 \text{ est de rang } 1}$$

3. Le calcul montre que $Me_1 = 2e_1$ et $Me_2 = e_2$
4. Le calcul montre que $Me_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e_3 - e_2$

   Ainsi on peut prendre

$$\boxed{\alpha = -1 \text{ et } \beta = 1}$$

5. On considère la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

   $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donnent
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
   $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
   $L_2 \leftarrow -L_2$ donne
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
   Enfin $L_2 \leftrightarrow L_3$ donne
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\boxed{P \text{ est inversible d'inverse } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

6. Le calcul donne
$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$
   (sur une copie, le produit intermédiaire MP serait apprécié)

7. (CF ex 6-3 du DM de Noël)

   On pose $P(n)$: "$T^n = P^{-1}M^nP$"

Initialisation $T^1 = T$ et $P^{-1}M^1P = P^{-1}MP = T$ d'après la définition de T. Donc $P(1)$ est vrai.

Hérédité On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors
$$(T)^{n+1} = T^nT$$
et donc par Hypothése de récurrence :
$$\begin{aligned} T^{n+1} &= (P^{-1}M^nP)(P^{-1}MP) \\ &= (P^{-1}M^nPP^{-1}MP) \\ &= (P^{-1}M^n \operatorname{Id} MP) \\ &= (P^{-1}M^nMP) \\ &= (P^{-1}M^{n+1}P) \end{aligned}$$

Conclusion $P(n)$ est vraie pour tout n.

8. On a $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ On a bien $T = D + N$ et le calcul donne $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = DN$

9. C'est un calcul. La question « normale » devrait être « Calculer N^2 » , mais ne permet pas de faire la question suivante si on n'a pas trouvé la forme de N.

10. Solution 1 : On peut appliquer le binome de Newton à $T = D + N$ car D et N commutent. On a alors

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

   Comme pour tout $k \geq 2$, $N^2 = 0$ il reste dans cette somme seulement les termes $k = 0$ et $k = 1$. On obtient donc

$$\begin{aligned} T^n &= \binom{n}{0} N^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} \\ &= D^n + nND^{n-1} \end{aligned}$$

   Solution 2 :
   On pose $P(n)$: ´ $T^n = D^n + nD^{n-1}N$ ˇ

   — Initialisation $T^1 = T$ et $D^1 + 1D^0N = D^1 + \mathrm{Id}\, N = D + N = T$ d'après la définition de D, N. Donc $P(1)$ est vrai.

   — Hérédité On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors

$$(T)^{n+1} = T^n T$$

   et donc par Hypothése de récurrence :

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= (D^n + nD^{n-1}N)(D + N) \\ &= D^n D + nD^{n-1}ND + D^n N + nD^{n-1}N^2 \end{aligned}$$

   Comme $ND = DN$ on a $D^{n-1}ND = D^{n-1}DN = D^nN$. on a par ailleurs $N^2 = 0$ donc

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= D^{n+1} + D^nN + nD^nN \\ &= D^{n+1} + (n+1)D^{(n+1)-1}N \end{aligned}$$

   Ainsi la propriété est héréditaire.

— <u>Conclusion</u> $P(n)$ est vraie pour tout n.

11. On a d'après la question 7
$$M^n = PT^nP^{-1}$$
et d'après la question précédente :
$$T^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Le calcul donne
$T^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n & 0 \\ 1 & 1+n & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et
$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^n + 1 & -2^n + 1 + n & 1 \end{pmatrix}}$$

I. 5 Racines de $z^n + z + 1$ (Pb)

Exercice 4. On considère l'équation suivante , d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$z^3 + z + 1 = 0 \tag{E}$$

1. On note $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la fonciton définie par $f(t) = t^3 + t + 1$. A l'aide de l'étude de f, justifier que l'équation (E) possède une unique solution réelle, que l'on notera r. Montrer que $r \in]-1, \frac{-1}{2}[$.
2. On note z_1 et z_2 les deux autres solutions complexes de (E) qu'on ne cherche pas à calculer. On sait alors que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ se factorise de la manière suivante :
$$P(X) = (X - r)(X - z_1)(X - z_2).$$
En déduire que $z_1 + z_2 = -r$ et $z_1z_2 = \frac{-1}{r}$.
3. Justifier l'encadrement : $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$.
De même montrer que $1 < |z_1z_2| < 2$.
4. Rappeler l'inégalité triangulaire et donner une minoration de $|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{C}$.
5. En déduire que
$$|z_1 + z_2| > |z_1| - \frac{2}{|z_1|}$$
6. Grâce à un raisonnement par l'absurde montrer que $|z_1| < 2$.
7. Conclure que toutes les solutions de (E) sont de modules strictement inférieures à 2.

Correction 5.

1. Comme $f(-1) = -1 < 0$ et $f(\frac{-1}{2}) = \frac{3}{8} > 0$, le théoréme des valeurs intermédiaires assure qu'il existe une solution a $f(t) = 0$ dans l'intervalle $]-1, \frac{-1}{2}[$. De plus $f'(t) = 2t^2 + 1$ donc $f' > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc f est strictement croissante et cette racine est unique.

2. En développant on obtient

$$P(X) = X^3 + (-r - z_1 - z_2)X^2 + \alpha X - z_1 z_2 r$$

On n'est pas obligé de calculer α. Par identification on obtient :

$$-r - z_1 - z_2 = 0 \quad \text{et} \quad z_1 z_2 r = -1$$

$$z_1 + z_2 = -r \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{-1}{r}$$

$(r \neq 0)$

3. On a $\frac{1}{2} < -r < 1$ et $|z_1 + z_2| = |-r| = -r$. D'où

$$\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1.$$

On a $1 < \frac{-1}{r} < 2$ et $|z_1 z_2| = \left|\frac{-1}{r}\right| = \frac{-1}{r}$. D'où

$$1 < |z_1 z_2| < 2.$$

4. L'inégalité triangulaire 'inversée' donne

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

5. On a donc

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

Or $|z_1 z_2| < 2$, donc $|z_2| < \frac{2}{|z_1|}$ D'où $-|z_2| > -\frac{2}{|z_1|}$. On obtient donc l'inégalité voulue.

6. Supposons par l'absurde que $|z_1| \geq 2$. On a alors d'après la questions précédente

$$|z_1 - z_2| > 2 - 1 = 1$$

Ceci est en contradiction avec le résultat de la question 3. Donc

$$|z_1| \leq 2.$$

7. Le raisonement de la question 5 et 6 s'applique de façon similaire à z_2. Comme $|r| \leq 1$, toutes les racines de P sont bien de module strictement inférieur à 2.

I. 6 EV - exemple et c-ex

Exercice 5. On admet que l'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$: (Si oui, le prouver, si non expliquer pourquoi)

— L'ensemble des fonctions qui valent 0 en 0 : $E_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,|\, f(0) = 0\}$

— L'ensemble des fonctions qui valent 1 en 0 : $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,|\, f(0) = 1\}$

— L'ensemble des fonctions qui vallent 0 en 1 : $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,|\, f(1) = 0\}$

— L'ensemble des fonctions $E_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,|\, (f(0))^2 + 2f(0) = 0\}$

Correction 6.

- E_1 et E_3 sont des sev. La preuve est la même. Soit $f, g \in E_1$ (ou E_3) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$(f + \lambda g)(0) = f(0) + \lambda g(0) = 0$$
Donc $f + \lambda g \in E_1$.
- E_2 et E_4 ne sont pas des sev. E_2 ne contient pas la fonction nulle. La fonction constante égale à -2, $(f(x) = -2)$ appartient à E_3 mais $2f(x) = -4$ n'appartient pas à E_3. E_3 n'est donc pas stable par multiplication par un sclaire. Ce n'est pas un sev.

I. 7 *Famille libre /générarive / base Exemples*

Exercice 6. Les familles suivantes sont-elles libres, génératrices dans $\mathbb{R}^3$?

- $F_u = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 2)$.
- $F_v = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2)$, $v_3 = (1, 2, 2)$.
- $F_w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ avec $w_1 = (1, 1, 1)$, $w_2 = (2, 1, 2)$, $w_3 = (1, 2, 2)$, $w_4 = (1, 0, 0)$.

Correction 7.

1. F_u n'est pas génératrice car $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et que F_u ne possède que 2 vecteurs. En revanche F_u est libre, car les deux vecteurs ne sont pas proportionels (ceci ne marche que pour deux vecteurs)
2. Cherchons à savoir si F_v est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. On obtient les trois équations suivantes :
$$\begin{cases} 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 & = 0 \\ 1\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ & -\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ & & \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$
Le système est échelonné et il est de Cramer, il possède donc une unique solution $(0, 0, 0)$. La famille F_v est donc libre. Elle est de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est donc une base, en particulier elle est génératrice
3. La famille F_w possède 4 éléments dans un espace vectoriel de dimension 3 elle n'est donc pas libre. En revanche, comme elle contient la sous-famille F_v elle est génératrice.

I. 8 *Etude de $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$ [Agro 2016]*

Problème 1. On considère la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

1. Etude de la nature de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.
   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

(b) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}dx.$$

(c) En déduire l'existence de trois constantes réelles positives, A, B et C telles que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, on ait :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C$$

(d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

2. Recherche d'un éguivalent de S_n

(a) Montrer que $\ln^2(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln^2(n)$.

(b) En déduire que $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.

3. Etude asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$$

(a) Enoncer le théorème donnant la formule des accroissements finis (en particulier, on précisera avec soin les hypothèses de ce théorème).

(b) A l'aide de la fonction $x \mapsto \ln^2(x)$ montrer que pour tout $x \geq 3$

$$\ln^2(x+1) - \ln^2(x) \geq 2\frac{\ln(x+1)}{x+1}.$$

(c) En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(d) En déduire que la suite u converge.

4. Ecrire un script Python qui permet d'afficher les 20 premiers termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un même graphique.

5. Ecrire un script Python qui permet d'afficher la fonction $x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{x}$ sur l'intervalle $[1, 20[$
On pourra utiliser les bibliothéques pyplot et numpy importées de la manière suivante : `import maplotlib.pyplot as plt` et `import numpy as np`. On rappelle l'utilisation des fonctions suivantes :

— Si X et Y sont deux listes (ou array numpy), lpya fonction `plt.plot(X,Y)` place les points dont les abscisses sont contenues dans X et les ordonnées dans Y et les relie entre eux par des segments. Si cette fonction n'est pas suivie de plt.show(), le graphique n'est pas affichés.

— `plt.plot(X,Y,o)` Meme effet que plt.plot(X,Y) à la différence près que les points sont représentés par un symbole en forme de cercle et ne sont pas reliés.

— `np.arange(d,n,p)` permet de créer un tableau numpy allant de d à n (non inclus) par pas de p

— `np.linspace(d,n,N)` permet de créer un tableau numpy de longueur N, espaçant linéairement les points de d à n (n non inclus).

Correction 8.

1. (a) Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

On a par ailleurs $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée) et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ par croissance comparée.
On a donc le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

(b) Pour tout $k \geq 3 > e$ on a pour tout $x \in [k, k+1]$

$$\frac{ln(x)}{x} \leq \frac{ln(k)}{k}$$

Donc en intégrant sur $[k, k+1]$ on obtient par positivité de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k} dx$$
$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

De même pour tout $k \geq 4 > e+1$ on a pour tout $x \in [k-1, k]$

$$\frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(x)}{x}$$

Donc en intégrant sur $[k, k+1]$ on obtient par positivité de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx$$
$$\frac{\ln(k)}{k} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx$$

On obtient bien les deux inégalités demandées.

(c) On somme maintenant la double inégalité pour k variant de 4 à n. On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=4}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{\ln(x)}{x}dx \leq & \sum_{k=4}^{n}\frac{\ln(k)}{k} & \leq \sum_{k=4}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\ln(x)}{x}dx \\
\int_{4}^{n+1}\frac{\ln(x)}{x}dx & \leq S_n - \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln(2)}{2} \leq & \int_{3}^{n}\frac{\ln(x)}{x}dx \\
\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_4^{n+1} \leq & S_n - \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln(2)}{2} \leq & \left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_3^{n} \\
\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} \leq & S_n - \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln(2)}{2} \leq & \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}
\end{array}$$

On obtient l'inégalité voulue avec $A = \frac{\ln^2(4)}{2} = 2\ln^2(2)$, $B = \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(2)}{2}$ et $C = \frac{\ln^2(3)}{2}$.

(d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{2} - A + B = +\infty$ donc par théorème de comparaison

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

2. (a) On considère le quotient des deux suites :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln^2 n+1}{\ln^2(n)} &= \frac{\ln^2(n(1+1/n))}{\ln^2(n)} \\
&= 1 + \frac{\ln^2(1+1/n)}{\ln^2(n)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2 n+1}{\ln^2(n)} = 1$$

on a bien

$$\ln^2(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$$

(b) On divise l'inégalité obentue en 2c) par $\ln^2(n)$

$$\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} - \frac{2A}{\ln^2(n)} \leq \frac{2S_n}{\ln^2(n)} - \frac{2B}{\ln^2(n)} \leq \frac{\ln^2(n)}{\ln^2(n)} - \frac{2C}{\ln^2(n)}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)} - \frac{2A}{\ln^2(n)} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{2B}{\ln^2(n)} = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2(n)}{\ln^2(n)} - \frac{2C}{\ln^2(n)} = 1$$

Le théorème des gendarmes assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2S_n}{\ln^2(n)} = 1$$

c'est-à-dire

$$S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$$

3. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ deux réels et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe alors $c\in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
4. On applique le TAF sur $[x,x+1]$ avec $x\geq 3$. $x\mapsto \ln^2(x)$ est bien continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$, ainsi il existe $c\in]x,x+1[$ tel que
$$\frac{\ln^2(x+1)-\ln^2(x)}{x+1-x}=2\frac{\ln(c)}{c}$$
Comme la fonction $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e,+\infty[\subset[3,+\infty[$ on a pour $c\in]x,x+1[$:
$$2\frac{\ln(c)}{c}\geq 2\frac{\ln(x+1)}{x}$$
Finalement
$$\ln^2(x+1)-\ln^2(x)\geq 2\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$
5.
$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=S_{n+1}-S_n-\frac{\ln^2(n+1)-\ln^2(n)}{2}\\&=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{\ln^2(n+1)-\ln^2(n)}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{2\ln(n+1)}{n+1}-\ln^2(n+1)-\ln^2(n)\right)\\&\leq 0\quad\text{d'après la question précédente}\end{aligned}$$
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n\geq 3$.
6. D'après 1c) on a
$$S_n-\frac{\ln^2(n)}{2}\geq\frac{\ln^2(n+1)}{2}-A+B-\frac{\ln^2(n)}{2}$$
Or
$$\ln^2(n+1)-\ln^2(n)=\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
Donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^2(n+1)}{2}-A+B-\frac{\ln^2(n)}{2}=A-B$. Comme une suite convergente est minorée, la suite $\frac{\ln^2(n+1)}{2}-A+B-\frac{\ln^2(n)}{2}$ est minorée et a fortiori la suite $S_n-\frac{\ln^2(n)}{2}$ est minorée. Elle est décroissante et minorée, elle converge.

I. 9 Tirages conditionnels

Exercice 7. Une urne contient $b\in\mathbb{N}^*$ boules blanches et $n\in\mathbb{N}^*$ boules noires. On effectue des tirages successifs. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne en y rajoutant $a\in\mathbb{N}^*$ boules de la même couleur.
On répète l'expèrience à chaque tirage.
On note B_i l'événement « Obtenir une boule blanche au tirage i » et N_i « Obtenir une boule noire au tirage i ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(B_2)$.
2. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité d'obtenir d'abord p boules blanches puis q boules noires.
3. Préciser cette valeur pour $b = n = a$.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement p boules blanches en $p+q$ tirages.
5. Préciser cette valeur pour $p = n = a$.
6. (a) Ecrire une fonction Python qui modélise le tirage d'une boule dans une urne avec b boules blanches et n boules noires.
   (b) Ecrire une fonction Python qui modélise N tirages successifs (comme décris dans l'énoncé) et retourne le nombre de boules blanches tirées.
   (c) Ecrire une fonction Python qui effectue l'expérience décrite et retourne le numéro du premier tirage où l'on tire une boule blanche.

Correction 9.

1. Pour B_1 il s'agit d'une probabilité uniforme, sur un ensemble de $b+n$ éléments. $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{b+n}$.
   Pour B_2 on utilise le système complet d'événements B_1, N_1, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2|N_1)\mathbb{P}(N_1)\\ &= \frac{b+a}{b+n+a}\frac{b}{b+n} + \frac{b}{b+n+a}\frac{n}{b+n}\\ &= \frac{b^2+ab+bn}{(b+n+a)(b+n)}\end{aligned}$$

2. Soit $E_{p,q}$ l'événements "obtenir p boules blanches puis q boules noires". On a

$$E_{p,q} = \cap_{i=1}^{p} B_i \cap_{i=p+1}^{p+q} N_i$$

   Ce qui donne en utilisant la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_{p,q}) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\dots\mathbb{P}_{\cap_{i=1}^{p-1}B_i}(B_p)\mathbb{P}_{\cap_{i=1}^{p}B_i}(N_p)\mathbb{P}_{\cap_{i=1}^{p}B_i\cap N_p}(N_{p+1})\dots\mathbb{P}_{\cap_{i=1}^{p}B_i\cap_{i=p+1}^{p+q-1}N_i}(N_{p+q})\\ &= \frac{b}{b+n}\frac{b+a}{b+n+a}\cdots\frac{b+(p-1)a}{b+n+(p-1)a}\frac{n}{b+n+pa}\frac{n+a}{b+n+(p+1)a}\cdots\frac{n+(q-1)a}{b+n+(p+q-1)a}\end{aligned}$$

3. Si $a = b = n$

$$\begin{aligned}\frac{b}{b+n}\frac{b+a}{b+n+a}\cdots\frac{b+(p-1)a}{b+n+(p-1)a} &= \frac{n}{n+n}\frac{n+n}{n+n+n}\cdots\frac{n+(p-1)n}{n+n+(p-1)n}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{np}{(p+1)n}\\ &= \frac{1}{(p+1)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{n}{b+n+pa}\frac{n+a}{b+n+(p+1)a}\cdots\frac{n+(q-1)a}{b+n+(p+q-1)a} &= \frac{n}{(p+2)n}\frac{n+n}{(p+3)n}\cdots\frac{n+(q-1)n}{n+n+(p+q-1)n}\\
&= \frac{1}{(p+2)}\frac{2}{(p+3)}\cdots\frac{q}{(p+q+1)}\\
&= \frac{q!(p+1)!}{(p+q+1)!}\\
&= \frac{1}{\binom{p+q+1}{p+1}}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\mathbb{P}(E_{p,q}) = \frac{1}{\binom{p+q+1}{p+1}(p+1)}$$

4. Soit $F_{p,q}$ l'événement 'obtenir exactement p boules blanches en $p+q$ tirages'. On peut ainsi choisir indépendamment le numéro des p tirages parmi les $p+q$ où l'on tire les blanches. On obtient donc $\binom{p+q}{p}\,\mathrm{Card}(E_{p,q}) = \mathrm{Card}(F_{p,q})$

$$\mathbb{P}(F_{p,q}) = \binom{p+q}{p}\mathbb{P}(E_{p,q})$$

5. On a donc pour $b=n=a$ d'après les deux questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_{p,q}) &= \frac{\binom{p+q}{p}}{\binom{p+q+1}{p+1}(p+1)}\\
&= \frac{1}{p+q+1}
\end{aligned}$$

6. (a)

I. 10 Calcul de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$ (Pb)

Problème 2. On se propose dans ce problème de calculer la limite de la suite :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+n}$$

1. Etude de la convergence de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Déterminer le sens de variation de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq 0$.
   (c) En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. Minoration de la limite
   (a) A l'aide d'un changement de variable montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$$

(b) Montrer à l'aide d'une somme téléscopique que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

(c) En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

(d) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$\ln(1+x) \leq x.$$

(e) Montrer à l'aide des questions précédentes que

$$\ell \geq \ln(2).$$

On pourra aussi utiliser le résultat en bas de page [1]

3. Majoration de la limite.

(a) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

(b) On pose $e_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2}$. On va montrer que $(e_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

i. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \geq 0$.

ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$.

iii. Conclure.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

(d) En déduire la valeur de ℓ.

Correction 10.

1. On rapelle le résultat suivant :
Théorème : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

— Et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites.

Alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$

1. (a) On calcule $S_{n+1}-S_n$ on obtient

$$S_{n+1}-S_n=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k+n+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+n}$$

On fait un changemetn de variable sur la première somme en posant $i=k+1$ on a alors

$$S_{n+1}-S_n=\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{i+n}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+n}$$

Ce qui se simplifie en

$$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}$$

On obtient en mettant au même dénominateur

$$S_{n+1}-S_n=\frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}<0$$

$$\boxed{(S_n)_{n\geq 1}\text{ est décroissante.}}$$

(b) Il y avait une erreur dans le sujet... La somme aurait du partir de 1 au lieu de 0. On se rend compte que l'inégalité demandée pour $n=1$ est d'ailleurs fausse.
Pour la somme $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$ voilà ce qu'on aurait pu faire. $\forall k\in[\![,n]\!]$, $\frac{1}{k+n}\leq\frac{1}{1+n}$ En sommant ces inégalités on obtient $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+n}$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+n}=\frac{1}{1+n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n}{n+1}$ Ainsi

$$\boxed{S_n\leq\frac{n}{n+1}}$$

Sinon on peut montrer que $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+n}$ est majorée par $\frac{n+1}{n}$ avec la même méthode. Mais ce n'est pas très utile, on voudrait plutot montrer qu'elle est minorée. Et, comme S_n est une somme de terme positif, $S_n\geq 0$.

(c) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 est décroissante donc

$$\boxed{(S_n)_{n\geq 1}\text{ converge.}}$$

Avec la suite $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$ on aurait pu dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était croissante. De plus $u_n\leq\frac{n}{n+1}\leq 1$ donc majorée par 1. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. (a) On fait une étude de fonction : soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x-\ln(1+x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}.$$

. Ainsi pour tout $x>0$, $f'(x)>0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0)=0-\ln(1)=0$, on a donc pour tout $x\geq 0$ $f(x)\geq 0$, c'est-à-dire $x-\ln(1+x)\geq 0$. Finalement

$$\boxed{\forall x\geq 0,\ x\geq\ln(1+x)}$$

(b) On pose le changement de variable $i=k+n$. On a Comme $k\in[\![0,n]\!]$, on a $i=k+n\in[\![n,2n]\!]$ et donc

$$S_n=\sum_{i=n}^{2n}\frac{1}{i}$$

Comme l'indice est muet on a bien

$$\boxed{S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\
&= \sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) - \ln(k)\\
&= \sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k)
\end{aligned}$$

On fait le changmeent de variable $i = k+1$ dans la première somme : on obtient

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) = \sum_{i=n+1}^{2n+1} \ln(i)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{i=n+1}^{2n+1} \ln(i) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k)\\
&= \sum_{i=n+1}^{2n} \ln(i) + \ln(2n+1) - \left(\ln(n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k)\right)\\
&= \ln(2n+1) - \ln(n) + \sum_{i=n+1}^{2n} \ln(i) - \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k)\\
&= \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

(d) En tant que quotient de polynômes on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ Par composition, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \ln(2)$ Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(2)}$$

(e) D'après la question 1), on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

Donc en sommant pour $k \in [\![n, 2n]\!]$ on obtient :

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq S_n$$

On applique maintenant le résultat de bas de page, avec $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $v_n = S_n$ qui sont deux suites qui admettent bien des limites donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \lim_{n\to+\infty} S_n$$

On obtient bien :

$$\boxed{\ln(2) \leq \ell}$$

3. (a) On fait une autre étude de fonction. On pose $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

Donc $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, on obtient pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$. Ainsi pour tout $x \geq 0$, on a $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$, d'où

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}}$$

(b) i. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de termes positifs, donc positive.

ii. On va majorer tout les termes par le plus grand terme apparaissant dans la somme. On a $\forall k \in [\![n, 2n]\!]$, $\frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2n^2}$
Donc

$$e_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n^2}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=n}^{2n} 1$. Il y a $(n+1)$ entier entre n et $2n$ donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 1 = n+1$.
On a finalement $e_n \leq \frac{1}{2n^2}(n+1)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}}$$

iii. D'après les questions précédentes , pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$$

On a par ailleurs $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$.
Donc le théorème des gendarmes assure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} e_n = 0}$$

(c) On applique l'inégalité obtenue en 2a) à $\frac{1}{k} > 0$. On obtient donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

En sommant ces inégalités entre n et $2n$ on obtient donc

$$\sum_{k=n}^{2n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}\right) \leq \sum_{k=n}^{2n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Ce qui donne en utilisant la linéarité :

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2k^2} \leq \sum_{k=n}^{2n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

D'où

$$S_n - e_n \leq \sum_{k=n}^{2n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

En faisant passer e_n dans le membre de droite on obtient

$$\boxed{S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

(d) On applique le théorème de bas de page aux suites $u_n = S_n$ et $v_n = e_n + \sum_{k=n}^{2n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et on obtient $\lim_{n\to+\infty} S_n \leq \lim_{n\to+\infty} e_n + \sum_{k=n}^{2n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ Par somme de limites on obtient bien

$$\ell \leq \ln(2)$$

Avec l'inégalité $\ln(2) \leq \ell$ obtenue en 2e) on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)}$$

I. 11 Matrice, endomorphisme, vp, (Ecricome 2002)

Exercice 8. Dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère le sous-ensemble E des matrices $M(a,b)$ définies par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$E = \{M(a,b) \quad a,b \in \mathbb{R}\}.$$

On note $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $M(a,b)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Structure de E

   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Donner une base de E, ainsi que sa dimension.

2. Étude d'un cas particulier.
   On pose $A = M(1,0)$.
   (a) Calculer A^2. En déduire que A est une matrice inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A.
   (c) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f_{1,0}$ est :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
3. Diagonalisation des éléments de E et application.
   On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :
   $$\vec{u} = (1,1,1), \quad \vec{v} = (1,-1,0), \quad \vec{w} = (1,1,-2).$$
   (a) Justifier que les matrices de l'ensemble E sont diagonalisables.
   (b) Montrer que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Écrire P.
   (d) Déterminer P^{-1}.
   (e) Exprimer les vecteurs $f_{a,b}(\vec{u})$, $f_{a,b}(\vec{v})$, $f_{a,b}(\vec{w})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
   (f) En déduire l'expression de la matrice $D_{a,b}$ de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{C}$.
   (g) Justifier l'égalité :
   $$P^{-1} M_{a,b} P = D_{a,b}.$$
   (h) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $D_{a,b}$ soit inversible.
   (i) Cette condition étant réalisée, déterminer la matrice inverse de $D_{a,b}$.
   (j) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M_{a,b}$ soit inversible.

Correction 11.

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère le sous-ensemble E des matrices $M(a,b)$ définies par :
$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$
Ainsi :
$$E = \{M(a,b) \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$
On note $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice $M(a,b)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Structure de E.

(a) On a $E=\left\{\begin{pmatrix} b & a & b\\ a & b & b\\ b & b & a\end{pmatrix} /a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} /a,b\in\mathbb{R}\right\}$

on reconnaît $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=M\left(1,0\right)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=M\left(0,1\right)$

Donc $E=Vect\left(M\left(1,0\right),M\left(0,1\right)\right)$ sous espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) On a du même coup pour famille génératrice : $\left(M\left(1,0\right),M\left(0,1\right)\right)$

Pour montrer qu'elle est libre on montre que **si** une combinaison linéaire est nulle **alors** les coefficients sont nuls :

Soient a et b deux réels. Si $aM\left(1,0\right)+bM\left(0,1\right)=0$ alors $\begin{pmatrix} b & a & b\\ a & b & b\\ b & b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

donc $a=0$ et $b=0$.

Cette famille est donc libre et génératrice. C'est donc une base de E qui est donc de dimension 2.

2. Étude d'un cas particulier.

On pose $A=M(1,0)$.

(a) $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$

Donc $A\cdot A=I$ (et $A\cdot A=I$) A est inversible et son inverse est $A^{-1}=A$

(b) On peut utiliser la relation précédente pour en déduire les seules valeurs propres **possibles** de A :

— **Si** α est une valeur propre de A et X une colonne propre (non nulle) alors $A^2X=A\left(AX\right)=\alpha AX=\alpha^2X$ et comme $A^2=I$, on a aussi $A^2X=X$ donc $\alpha^2X=X$ et comme $X\neq 0$ on a $\alpha^2=1$. **Alors** $\alpha=1$ ou $\alpha=-1$

— **Est-ce que** 1 est valeur propre de A? (on aura besoi du sous espace propre ensuite).

Avec $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

$\left(A-I\right)\cdot X=0\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c} -x+y=0\\ x-y=0\\ 0=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y$ donc 1 est bien valeur propre et a pour sous espace propre associé :

$\mathcal{S}_1=\left\{\left(y,y,z\right)\ /\ y,z\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left(\left(1,1,0\right),\left(0,0,1\right)\right)$

Ces **deux** vecteurs sont non colinéaires. Ils forment donc une famille libre.

C'est donc une famille libre et génératrice i.e. une base du sous espace propre.

— De la même façon **est-ce que** -1 est valeur propre de A?

$A\cdot X=-1\cdot X\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} y=-x\\ x=-y\\ z=-z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} y=-x\\ z=0\end{array}\right.$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_{-1}=\left\{\left(x,-x,0\right)\ /\ x\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left(\left(1,-1,0\right)\right)$

Donc -1 est bien valeur propre et le sous espace propre associé à -1 est engendré par $((1,-1,0))$ qui en est donc une base .

— Ce sont donc les deux seules valeurs propres de A

(c) Soient $\vec{i}=(1,1,0)$, $\vec{j}=(0,0,1)$ et $\vec{k}=(1,-1,0)$.
Ils ont pour coordonnées dans la base canonique $(1,1,0)$, $(0,0,1)$ et $(1,-1,0)$
Comme A est la matrice de $f_{1,0}$ dans la base $\mathcal{B}$ les vecteurs $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ forment une base du sous espace propre de $f_{1,0}$ associés à la valeur propre 1 et le vecteur $\left(\vec{k}\right)$ est une base du sous espace propre associé à la valeur propre -1.
Comme la somme des dimensions des sous espaces propres est égal à 3 (dimension de $\mathbb{R}^3$) la concaténation $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de ces bases forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Et la matrice de $f_{1,0}$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Diagonalisation des éléments de E et application.
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\vec{u}=(1,1,1),\quad \vec{v}=(1,-1,0),\quad \vec{w}=(1,1,-2).$$

(a) Les matrices de E sont symétriques donc diagonalisables.

(b) Comme $\mathcal{C}=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ a 3 éléments, il suffit de montrer que la famille est libre pour montrer qu'elle est une base :
Si $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0}$ **alors** $\ldots x=y=z=0$
Mais comme on demande ensuite la matrice inverse de la matrice de passage, il est plus économe de tout faire en même temps.
$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base si et seulement si la matrice de leurs coordonnées (en colonne) est inversible.
Soit $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ cette matrice. On applique la méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1+L_2/2 \\ -L_2/2 \\ L_3-L_2/2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1+L_3/3 \\ L_2 \\ -L_3/3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1+L_3/3 \\ L_2 \\ -L_3/3 \end{array}$$

Donc P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$

Un raccourci de la rédaction (le calcul d'inverse est à faire au brouillon) est de constater (sans expliquer d'où vient cette matrice) que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$

(c) La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est formée par les coordonnées (en colonne) des vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$. C'est donc la matrice P écrite ci-dessus.

(d) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$

(e) On pourrait utiliser la formule de changement de base pour obtenir les coordonnées des images de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{C}$.

Mais comme ces vecteurs ne nous ont pas étés donnés au hasard, on peut tenter directement à partir de leurs coordonnées dans la base canonique et de la matrice de $f_{a,b}$ dans cette même base.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ donc $f_{a,b}(\vec{u})$ a pour coordonnées dans $\mathcal{B}$:

$\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b+a \\ 2b+a \\ 2b+a \end{pmatrix} = (2b+a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $f_{a,b}(\vec{u}) = (2b+a)\,\vec{u}$ et de même

$f_{a,b}(\vec{v})$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \\ 0 \end{pmatrix} = (b-a) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $f_{a,b}(\vec{v}) = (b-a)\,\vec{v}$

Et enfin $\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a-b \\ 2b-2a \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $f_{a,b}(\vec{w}) = (a-b)\,\vec{w}$

(f) La matrice de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{C}$. est donc : $D_{a,b} = \begin{pmatrix} 2b+a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$

(g) P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$. Son inverse P^{-1} est donc la matrice de passage de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$. Donc la matrice de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{C}$ s'obtient à partir de sa matrice $M_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$ par :

$$P^{-1} M_{a,b} P = D_{a,b}.$$

(h) $D_{a,b}$ étant une matrice diagonale, elle est inversible si et seulement si les coefficients de la diagonale sont tous non nuls.

Donc si et seulement si $a \neq -2b$ et $a \neq b$

(i) On a alors comme $D_{a,b}$ est diagonale, son inverse en inversant les coefficients de la diagonale :

$$D_{a,b}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(2b+a) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(b-a) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(a-b) \end{pmatrix}$$

(j) Les deux matrices $M_{a,b}$ et $D_{a,b} \acute{e}\tan t$ semblables, elles sont simultanément inversible. Donc $M_{a,b}$ est inversible si et seulement si $a \neq -2b$ et $a \neq b$.

I. 12 Système linéaire (produit - changement de variables)

Exercice 9. Résoudre le système suivant où x, y, z sont des réels positifs :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{13} & = & 2 \\ x^2yz^7 & = & 3 \end{array}\right.$$

Correction 12. Comme tous les éléments sont positifs on peut prendre le logartihme. On note $X = \ln(x), Y = \ln(y)$ et $Z = \ln(z)$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2X + 2Y + 6Z & = & 0 \\ 4X + 5Y + 13Z & = & \ln(2) \\ 2X + Y + 7Z & = & \ln(3) \end{array}\right.$$

On résout ensuite le système en (X, Y, Z). Tout d'abord on échelonne le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2X + 2Y + 6Z & = & 0 \\ 4X + 5Y + 13Z & = & \ln(2) \\ 2X + Y + 7Z & = & \ln(3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2X + 2Y + 6Z & = & 0 \\ 0 + Y + Z & = & \ln(2) \\ -Y + Z & = & \ln(3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2X + 2Y + 6Z & = & 0 \\ Y + Z & = & \ln(2) \\ 2Z & = & \ln(3) + \ln(2) \end{array}\right.$$

Une fois que le système est échelonné, on résout en remontant les lignes. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2X + 2Y + 6Z & = & 0 \\ Y + Z & = & \ln(2) \\ Z & = & \ln(\sqrt{6}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2X + 2Y + 6Z & = & 0 \\ Y & = & \ln(\frac{2}{\sqrt{6}}) \\ Z & = & \ln(\sqrt{6}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2X & = & -\ln(\frac{4}{6}) - \ln(6^3) \\ Y & = & \ln(\frac{2}{\sqrt{6}}) \\ Z & = & \ln(\sqrt{6}) \end{array}\right.$$

Soit encore $X = \ln(\sqrt{\frac{1}{6^2 4}})$, $Y = \ln(\frac{2}{\sqrt{6}})$ et $Z = \ln(\sqrt{6})$. D'où

$$\boxed{x = \frac{1}{12}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad z = \sqrt{6}}$$

I. 13 Système linéaire $AX = \lambda X$

Exercice 10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & \lambda x \\ x + 3y & = & \lambda y \end{array}\right.$$

1. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
2. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ
3. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$.

Correction 13.

1. On met le système sous forme échelonné

$$(S_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{rcl} (2-\lambda)x + 2y & = & 0 \\ x + (3-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + (3-\lambda)y & = & 0 \\ (2-\lambda)x + 2y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + (3-\lambda)y & = & 0 \\ +2y - (3-\lambda)(2-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où

$$(S_\lambda) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + (3-\lambda)y & = & 0 \\ (-\lambda^2 + 5\lambda - 4)y & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système n'est pas de Cramer si $(\lambda^2 + 5\lambda - 4) = 0$, soit

$$\Sigma = \{1, 4\}$$

2. — $\underline{\lambda = 1}$ On obtient $S_1 \iff x + 2y = 0$

$$\mathcal{S}_1 = \{(-2y, y) | y \in \mathbb{R}\}$$

— $\underline{\lambda = 4}$ On obtient $S_4 \iff x - y = 0$

$$\mathcal{S}_4 = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$$

3. Si λ n'est pas dans Σ, le système est de Cramer, il admet donc une unique solution. Comme $(0,0)$ est solution, c'est la seule.

$$\mathcal{S}_\lambda = \{(0,0)\}$$

I. 14 Puissance matrice $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$

Exercice 11. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(M - \mathrm{Id}_3)(M + 3\,\mathrm{Id}_3) = 0_3$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe des réels α_n et β_n tel que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$
3. Détermine pour tout $n \in \mathbb{N}$ les réels α_n et β_n et en déduire l'expressionde M^n en fonction de n. (On pourra montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants)

Correction 14.

1.
$$(M - Id) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (M + 3Id) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On calcule coefficient par coefficient le produit :

$$(M - Id)(M + 3Id) = \begin{pmatrix} 5-4-1 & -2+0+2 & 1-4+3 \\ 10-8-2 & -4+0+4 & 2-8+6 \\ -5+4+1 & 2+0-2 & -1+4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit P la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $P(n)$:" il existe des réels α_n et β_n tel que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$"
La question précédente montre que $M^2 = -2M + 3Id$, la proposition est donc vraie au rang $n = 2$ (elle est évidente au rand $n = 0$ et $n = 1$)

Supposons la propriété vraie à un rang n fixé et montrons son hérédité.

$$M^{n+1} = M \times M^n$$

Par hypothèse de récurrence, il existe des réels α_n et β_n tel que

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times (\alpha_n M + \beta_n \operatorname{Id}_3) \\ &= \alpha_n M^2 + \beta_n M \end{aligned}$$

On remplace M^2 par son expression obtenue précédemment :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= \alpha_n(-2M + 3\operatorname{Id}_3) + \beta_n M \\ &= (-2\alpha_n + \beta_n)M + 3\alpha_n \operatorname{Id}_3 \\ &= \alpha_{n+1}M + \beta_{n+1}\operatorname{Id}_3 \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On a vu que α_n et β_n vérifiaient les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} & = & -2\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} & = & 3\alpha_n \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= -2\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \\ &= -2\alpha_{n+1} + 3\alpha_n \end{aligned}$$

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son polynome caractéristique est $P(X) = X^2 + 2X - 3 = (X-1)(X+3)$ Les deux racines sont donc 1 et -3. Il existe donc $u, v \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n = u(1)^n + v(-3)^n$$

Comme $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$, les calculs donnent : $u = \frac{1}{4}$, $v = -\frac{1}{4}$.

$$\begin{cases} \alpha_n & = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-3)^n \\ \beta_n & = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}(-3)^n \end{cases}$$

I. 15 Calcul du rang de M_a

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $M_a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, définie par

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de M_a en fonction de a.
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles M_a est inversible et calculer l'inverse dans ces cas.

Correction 15. Appliquant l'algorithme du pivot de gauss à la matrice M_a. On est amené à aussi chercher l'inverse de M_a donc on se contentera de faire que des opérations sur les lignes et on gardera trace des opérations sur la matrice Id afin d'obtenir l'inverse.

$$
\begin{aligned}
M_a \quad &: \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - aL_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & -a & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{L_2 \longleftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -a & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + aL_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^3 & -a^2 & 1 & +a \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

On voit dès à présent que la matrice est de rang 3 si et seulementsi $1 - a^3 \neq 0$ c'est-à-dire si $a \neq 1$. Si $a = 1$ elle est de rang 2.

On finit avec le calcul de l'inverse dans le cas où $1 - a^3 \neq 1$:

$$
\begin{aligned}
M_a \quad &\sim \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^3 & -a^2 & 1 & a \end{array}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{1-a^3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a^2}{1-a^3} & \frac{1}{1-a^3} & \frac{a}{1-a^3} \end{array}\right) \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + a^2 L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - aL_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-a^3} & \frac{-a}{1-a^3} & \frac{-a^2}{1-a^3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a}{1-a^3} & \frac{a^2}{1-a^3} & \frac{1}{1-a^3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-a^2}{1-a^3} & \frac{1}{1-a^3} & \frac{a}{1-a^3} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Pour tout a différent de 1, l'invese de M_a est donc donné par

$$
M_a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a^3} & \frac{-a}{1-a^3} & \frac{-a^2}{1-a^3} \\ \frac{-a}{1-a^3} & \frac{a^2}{1-a^3} & \frac{1}{1-a^3} \\ \frac{-a^2}{1-a^3} & \frac{1}{1-a^3} & \frac{a}{1-a^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-a^3} \begin{pmatrix} 1 & -a & -a^2 \\ -a & a^2 & 1 \\ -a^2 & 1 & a \end{pmatrix}
$$

I. 16 Etude des racines de $X^5 + tX - 1$

Exercice 13. Pour tout réel $t > 0$, on note P_t le polynôme $X^5 + tX - 1 \in \mathbb{R}_5[X]$. Le but de ce problème est d'étudier les racines de P_t en fonction de $t > 0$.

1. On fixe $t > 0$ pour cette question. Prouver que P_t admet une unique racine notée $f(t)$.
2. Montrer que $f(t) \in]0, 1[$ pour tout $t > 0$.

3. Montrer que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
4. En déduire que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.
5. Déterminer $\lim_{t\to 0^+} f(t)$.
6. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.
7. En déduire $\lim_{t\to+\infty} tf(t) = 1$. (Comment noter ce résultat avec le signe équivalent : $\sim$)
8. Justifier que f est la bijection réciproque de $g :]0,1[\to]0,+\infty[\ x \mapsto \frac{1-x^5}{x}$
9. (a) Justifier que f est dérivale sur $]0,+\infty[$ et exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ pour tout $t>0$.
   (b) En déduire la limite de $f'(t)$ en 0. Calculer la limite de $t^2f'(t)$ en $+\infty$ (Comment noter ce résultat avec le signe équivalent : $\sim$)

Correction 16.

1. On considère la dérivée de la fonction polynomiale. On a $P_t'(X) = 5X^4 + t$. Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $t>0$ $P_t'(x)\geq 0$. La fonction polynomiale $x\mapsto P_t(x)$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par ailleurs elle est continue. On peut appliquer le théorème de la bijection à P_t pour la valeur $0\in]\lim_{x\to+\infty} P_t(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} P_t(x) = -\infty[$. Il existe donc une unique valeur, notée $f(t)$ par l'énoncé, telle que $P_t'(f(t)) = 0$.
2. Par définition de P_t on a $P_t(0) = -1 < 0$ et $P_t(1) = t > 0$. Comme $x\mapsto P_t(x)$ est strictement croissante et $P_t(f(f)) = 0$ on obtient $f(t)\in]0,1[$.
3. Soit $t_1 > t_2$, on a $P_{t_1}(X) - P_{t_2}(X) = X^5 + t_1X - 1 - (X^5 + t_2X - 1) = (t_1 - t_2)X$ Donc pour $x > 0$ on a
$$P_{t_1}(x) - P_{t_2}(x) > 0$$
On applique ce résultat à $f(t_2)$ on obtient
$$P_{t_1}(f(t_2)) - P_{t_2}(f(t_2)) > 0$$
$$P_{t_1}(f(t_2)) > 0$$
Comme $x\mapsto P_{t_1}(x)$ est une fonction croissant et que $P_{t_1}(f(t_1)) = 0$ on obtient $f(t_2) > f(t_1)$ Finalement $t\mapsto f(t)$ est décroissante.
4. f est montone et bornée. Le théorème des limites monotones assure que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.
5. Notons ℓ la limite $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \ell$. Par définition de f on a $f(t)^5+tf(t)-1 = 0$. Cette expression admet une limite quand $t\to 0$, on a $\lim_{t\to 0^+} f(t)^5 + tf(t) - 1 = \ell^5 - 1$. Par unicité de la limite on a donc $\ell^5 - 1 = 0$. Et donc $\ell = 1$ (car ℓ est réel).
6. Notons ℓ' la limite $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell'$. Supposons par l'absurde que cette limite soit non nulle. On a alors $\lim_{t\to+\infty} tf(t) = +\infty$. En passant à la limite dans l'égalité $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$ on obtient $+\infty = 0$ ce qui est absurde. Donc
$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$$
7. En repartant de l'égalité $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$ on obtient
$$tf(t) = 1 - f(t)^5$$
Comme $lim_{t\to+\infty}f(t) = 0$ on a
$$\lim_{t\to+\infty} tf(t) = 1$$
En d'autres termes $f(t) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t}$

8. f est strictement montone sur $]0,+\infty[$ donc f est une bijection $]0,+\infty[$ sur son image. $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Donc $f(]0,+\infty[) =]0,1[$ et f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$.
   Par définition de f on a $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$ Donc $tf(t) = -f(t)^5 + 1$. Comme $f(t) > 0$, on a :
$$t = \frac{1-f(t)^5}{f(t)}$$
   Soit $g(x) = \frac{1-x^5}{x}$ on a bien $g(f(t)) = t$ Donc $g\circ f = \mathrm{Id}$. Ainsi la réciproque de f est bien la fonction $g :]0,1[\to]0,\infty[$.
9. (a) g est dérivable et pour tout $x \in]0,1[$
$$g'(x) = \frac{-1-4x^5}{x^2}.$$
   $g'(x)$ est différent de 0 car $-1-4x^5$ est différent de 0 sur $]0,1[$, donc f est dérivable et
$$f'(t) = \frac{1}{g'(f(t)} = \frac{f(t)^2}{-1-4f(t)^5}.$$
   (b) $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$ donc
$$\lim_{t\to 0} f'(t) = \frac{1^2}{-1-4\times 1} = \frac{-1}{5}$$
   On a aussi $t^2 f'(t) = \frac{(tf(t)^2}{-1-4f(t)^5}$ Comme $\lim_{t\to\infty} tf(t) = 1$ et $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ en passant à la limite dans l'égalité précédente on obtient :
$$\lim_{t\to\infty} t^2 f'(t) = \frac{1}{-1} = -1$$
   En d'autres termes :
$$f'(t) \sim_{+\infty} \frac{-1}{t^2}$$

I. 17 Tchebychev (Pb)

Exercice 14. On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$T_0 = 1 \quad \text{et} \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. (a) Calculer T_2, T_3 et T_4.
   (b) Calculer le degré et le coefficient de T_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   (c) Calculer le coefficient constant de T_n.
2. (a) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   (b) En déduire que $\forall x\in[-1,1]$, on a $T_n(x) = \cos(n\arccos(x))$.
3. (a) En utilisant la question 2a), déterminer les racines de T_n sur $[-1,1]$.
   (b) Combien de racines distinctes a-t-on ainsi obtenues ? Que peut on en déduire ?
   (c) Donner la factorisaiton de T_n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Correction 17.

1. (a) $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$, $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

   (b) Montrons par récurrence que $\deg(T_n) = n$. Comme la suite est une suite récurrente d'ordre 2, on va poser comme proposition de récurrence

$$P(n) :' \deg(T_n) = n \text{ ET } \deg(T_{n+1}) = n + 1'$$

C'est vrai pour $n = 0, 1, 2$ et 3. On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ soit vrai et montrons $P(n_0+1)$. On cherche donc à vérifier $\deg(T_{n_0+1}) = n_0+1$ ET $\deg(T_{n_0+2}) = n_0 + 2'$. La première égalité est vraie par hypothèse de récurrence. La seconde vient de la relation $T_{n_0+2} = 2XT_{n_0+1} - T_{n_0}$ En effet, par hypothèse de récurrence T_{n_0+1} est de degré $n_0 + 1$ donc $2XT_{n_0+1}$ est de degrés $n_0 + 2$. Comme $\deg(T_{n_0}) = n_0 < n_0 + 2$, on a

$$\deg(T_{n_0+2}) = \max(\deg(2XT_{n_0+1}), \deg(T_{n_0})) = n_0 + 2$$

Ainsi par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.

   (c) La récurrence précédente montre que le coefficient dominant, notons le c_n vérifie $c_{n+2} = 2c_{n+1}$. Ainsi $c_n = 2^n c_0 = 2^n$.

2. (a) Montrons le résultat par récurrence. On pose

$$Q(n) : "\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \text{ ET } T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n + 1)\theta)"$$

$Q(0)$ est vraie par définition de T_0 et T_1

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ soit vrai et montrons $Q(n+1)$. Il suffit de montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n + 2)\theta)$$

On a par définition de T_{n+2}

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))$$

Par hypothèse de récurrence on a $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$ et $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ donc

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n + 1)\theta) - \cos(n\theta)$$

Les formules trigonométriques donnent :

$$\begin{aligned} 2\cos(\theta)\cos((n + 1)\theta) &= \cos(\theta + (n + 1)\theta) + \cos(\theta - (n + 1)\theta) \\ &= \cos((n + 2)\theta) + \cos(-n\theta) \\ &= \cos((n + 2)\theta) + \cos(n\theta) \end{aligned}$$

Donc

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n + 2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n + 2)\theta)$$

Par récurrence, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

On peut répondre maintenant facilement à la question 2c) (avec la faute de frappe coefficient constant au lieu de coefficient dominant). Le coefficient constant vaut $T_n(0) = T_n(\cos(\pi/2)) = \cos(n\pi/2)$

Donc $T_n(0) = 0$ pour $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, on a alors $T_{2k+1}(0) = \cos((2k + 1)\pi/2) = \frac{(-1)^k}{2}$

(b) Soit $x \in [-1,1]$ on note $x = \cos(\theta)$, avec $\theta \in [0,\pi]$ on a alors $\theta = \arccos(x)$. D'après la question précédente on a donc pour tout $x \in [-1,1]$:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

3. (a) Pour tout θ tel que $n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a $\cos(n\theta) = 0$
   Ainsi pour tout θ tel que $\theta \equiv \frac{\pi}{2n}[\frac{\pi}{n}]$,

$$T_n(\cos(\theta)) = 0$$

   On obtient ainsi n racines entre $[-1,1]$ données par

$$\{\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right) \mid k \in [0, n-1]\}$$

   (b) On a obtenu n racines. Comme T_n est de degrés n, on a obtenu toutes les racines, ainsi T_n se factorise de la manière suivante [2] :

   (c)
$$T_n(X) = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right)\right)$$

I. 18 Diagonalisation

Exercice 15. Soit A la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas inversible. On appelle ces réels les *valeurs propres* de A.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Montrer que l'espace $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$ est un sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Pour chaque valeur propre de A (les réels obtenus à la question 1), déterminez une base de E_λ. Vérifier qu'on obtien au total 3 vecteurs que vous noterez u_1, u_2, u_3.
4. La famille (u_1, u_2, u_3) est elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
5. (a) Soit P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première colonne est constitutée des coordonnées de u_1, la seconde des coordonnées de u_2 et la dernière des coordonnées de u_3. Déterminez explicitement P.
   (b) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (c) Déterminez mla matrice $D = P^{-1}AP$.
   (d) Déterminez une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n.

Correction 18.

2. sans oublier le coéfficient dominant, merci Marie.

1. $A - \lambda\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$. On va appliquer l'algorithme du pivot de Gauss : $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3- \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\sim_{L_2 \longleftarrow L_2+2L_1 L_3 \longleftarrow L_3+(3-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & 4-\lambda & 8-2\lambda \\ 0 & 0 & 8-6\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & 4-\lambda & 8-2\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-4) \end{pmatrix}$
Ainsi $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda \in \{2, 4\}$

2. Remarquons tout d'abord que le vecteur nul appartient à E_λ qui est donc non vide. Soit $X, Y \in E_\lambda$ et $\mu \in \mathbb{R}$, montrons que $X + \mu Y$ appartient à E_λ :

$$A(X + \mu Y) = AX + \mu AY$$

Comme $X \in E_\lambda$ $AX = \lambda X$ et de même $AY = \lambda Y$. On a donc

$$A(X + \mu Y) = \lambda X + \mu\lambda Y = \lambda(X + \mu Y)$$

Ainsi, $X + \mu Y \in E_\lambda$. L'ensemble E_λ est donc stable par combinaisons linéraires, c'est bien un sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3. — $\underline{\lambda = 2}$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$. On a donc

$$AX = \begin{pmatrix} 3x - z \\ 2x + 4y + 2z \\ -x + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x - z & = & 2x \\ 2x + 4y + 2z & = & 2y \\ -x + 3z & = & 2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} x & & -z & = & 0 \\ 2x & +2y & +2z & = & 0 \\ -x & & +z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & & -z & = & 0 \\ 0 & +2y & +4z & = & 0 \\ 0 & & +0 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{cc} x = & z \\ y = & -2z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc $E_2 = \{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -2, 1))$ $u_1 = (1, -2, 1)$ est une base de E_2

— $\underline{\lambda = 4}$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4$. On a donc

$$AX = \begin{pmatrix} 3x - z \\ 2x + 4y + 2z \\ -x + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 'z \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x-z & = & 4x \\ 2x+4y+2z & = & 4y \\ -x+3z & = & 4z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccc} -x & -z & = & 0 \\ 2x & +2z & = & 0 \\ -x & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} x & +z & = & 0 \\ 2x & +2z & = & 0 \\ -x & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} x & +z & = & 0 \\ 0 & 0 & = & 0 \\ 0 & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{ x = \; -z \right.$$

L'ensemble des solutions est donc $E_2 = \{(-z,y,z) \,|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((-1,0,1),(0,1,0))$
On note $u_2 = (-1,0,1)$ et $u_3 = (0,1,0)$. (u_2,u_3) est une base de E_4. (Elle est génératrice par définition et elle est libre car les deux vecteurs ne sont pas proportionels)

4. Vérifions que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre. Soit $(\mu_1,\mu_2,\mu_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mu_1u_1+\mu_2u_2+\mu_3u_3 = 0$.
En identifiant chaque coordonnées on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \mu_1 & -\mu_2 & +0\mu_3 & = & 0 \\ -2\mu_1 & +0\mu_2 & +\mu_3 & = & 0 \\ \mu_1 & +\mu_2 & +0\mu_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \mu_1 & -\mu_2 & & = & 0 \\ -2\mu_1 & & +\mu_3 & = & 0 \\ \mu_1 & +\mu_2 & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} \mu_1 & -\mu_2 & & = & 0 \\ 0 & -2\mu_2 & +\mu_3 & = & 0 \\ 0 & 2\mu_2 & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} \mu_1 & -\mu_2 & & = & 0 \\ 0 & -2\mu_2 & +\mu_3 & = & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0 \right.$$

Ainsi la famille est libre. Comme elle est de cardinal 3 dans un ev de dimension 3, c'est une base.

5. (a) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Le rang de P est égal au rang de la famille (u_1,u_2,u_3), qui d'après la question précédente vaut 3. Donc $rg(P) = 3$, elle est donc inversible.
   L'algorithme du pivot permet de trouver son inverse, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Après calcul on obtient

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d) Par récurrence on montre $D^n = P^{-1}A^nP$ donc $A^n = PD^nP^{-1}$ et on a par ailleurs $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$, car D est une matrice diagonale. Après calcul on obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + \frac{1}{2}4^n & 0 & 2^{n-1} - \frac{1}{2}4^n \\ -2^n + 4^n & 4^n & -2^n + 4^n \\ 2^{n-1} - \frac{1}{2}4^n & 0 & 2^{n-1} + \frac{1}{2}4^n \end{pmatrix}.$$

I. 19 Etude application linéaire [Godillon 17-18]

Exercice 16. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par

$$(x, y, z) \mapsto (x - 3y + 3z, 2y - z, 2y - z).$$

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Déterminer une représentation paramétrique de $\ker(\varphi)$.
   (b) Déterminer la dimension de $\ker(\varphi)$. Que peut-on en déduire pour l'application φ ?
3. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Que peut-on en déduire pour l'application φ ?
4. Soit Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$
   (a) Que vaut l'applicaiton $\varphi \circ \varphi$?
   (b) En déduire que $\varphi \circ (\varphi - \mathrm{Id})$ et $(\varphi - \mathrm{Id}) \circ \varphi$ sont égales à l'application constante égale à 0.
   (c) A l'aide des résultats précédents, montrer que $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}) \subset \ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \ker(\varphi - \mathrm{Id})$.
   (d) Que peut-on en déduire pour l'application $\varphi - \mathrm{Id}$?
5. Montrer que $\ker(\varphi - \mathrm{Id}) = \mathfrak{Im}(\varphi)$.
6. (a) Déterminer une base (e_1) de $\ker(\varphi)$ et une base (e_2, e_3) de $\ker(\varphi - \mathrm{Id})$
   (b) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Ecrire la matrice de φ dans la base (e_1, e_2, e_3).

Correction 19.

1. Vérifions tout d'abord que φ est linéaire. Soit $u = (x, y, z), u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(u + \lambda v) &= \varphi((x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')) \\ &= (x + \lambda x' - 3(y + \lambda y') + 3(z + \lambda z'), 2(y + \lambda y') - (z + \lambda z'), 2(y + \lambda y') - (z + \lambda z')) \\ &= (x - 3y + 3z, 2y - z, 2y - z) + \lambda(x' - 3y' + 3z', 2y' - z', 2y' - z') \\ &= \varphi(u) + \lambda\varphi(v) \end{aligned}$$

   Comme l'espace de départ et d'arrive de φ est $\mathbb{R}^3$, φ est bien un endomorphisme.
2. (a) Soit $(x, y, z) \in \ker(\varphi)$, on a alors $\varphi(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$ c'est-à-dire :

$$(x - 3y + 3z, 2y - z, 2y - z) = (0, 0, 0)$$

   On obtient ainsi le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y + 3z &=& 0 \\ 2y - z &=& 0 \\ 2y - z &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -\frac{3z}{2} \\ y &=& \frac{z}{2} \end{array} \right.$$

On obtient le noyau de φ sous forme paramétrique, en prenant z comme paramétre :

$$\ker(\varphi) = \left\{ \left(\frac{-3z}{2}, \frac{z}{2}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Ainsi on a

$$\ker(\varphi) = \text{Vect}(\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right))$$

C'est une famille génératice de $\ker(\varphi)$ par définition. C'est aussi une famille libre car elle ne contient qu'un seul vecteur qui est non nul. On a alors une base de $\ker(\varphi)$ qui est donc de dimension 1.

$\ker(\varphi)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, l'application φ n'est pas injective.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathfrak{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(\varphi)) = 2$. Ainsi φ n'est pas surjective.

4. (a) Traitons le problème matriticiellement. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ La matrice de φ dans la base canonique. Le calcul montre que $M^2 = M$, ainsi

$$\varphi \circ \varphi = \varphi.$$

(b)

$$\begin{aligned} \varphi \circ (\varphi - \text{Id}) &= \varphi \circ \varphi - \varphi \circ \text{Id} \\ &= \varphi - \varphi \\ &= 0. \end{aligned}$$

(Et φ et $\varphi - \text{Id}$ commutent.)

(c) Soit $y \in \mathfrak{Im}(\varphi - \text{Id})$, c'est-à-dire, qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = (\varphi - Id)(x)$. Par ailleurs $\varphi(y) = (\varphi \circ (\varphi - Id))(x) = 0$ d'après l a question précédente. Donc $y \in \ker(\varphi)$. Ce résultat étant vrai pour tout $y \in \mathfrak{Im}(\varphi - \text{Id})$ on a bien

$$\mathfrak{Im}(\varphi - \text{Id}) \subset \ker(\varphi)$$

Un argument mot-pour-mot similaire en échangeant les roles de φ et $\varphi-\text{Id}$ montre l'inclusion

$$\mathfrak{Im}(\varphi) \subset \ker(\varphi - \text{Id})$$

(d) La dimension du noyau de $\varphi - \text{Id}$ est au moins 2 car contient $\mathfrak{Im}(\varphi)$. Mais la dimension du noyau de $\varphi - \text{Id}$ est strictement inférieur à 3, sinon on aurait $\varphi - \text{Id} = 0$ (ie $\varphi = \text{Id}$) ce qui n'est pas le cas. Donc $\dim(\ker(\varphi - \text{Id})) = 2$ et $\varphi - \text{Id}$ n'est pas injective.

5. L'argument précédent montre que $\dim(\ker(\varphi - \text{Id})) = 2$. On a donc

$$\left. \begin{array}{ccc} \mathfrak{Im}(\varphi) & \subset & \ker(\varphi - \text{Id}) \\ \dim(\mathfrak{Im}(\varphi)) & = & \dim(\ker(\varphi - \text{Id})) \end{array} \right\} \Longrightarrow \ker(\varphi - \text{Id}) = \mathfrak{Im}(\varphi)$$

6. (a) $e_1 = (-3,1,2)$ est une base de $\ker(\varphi)$.
$e_2 = (1,3,0), e_3 = (0,2,1)$ est une base de $\ker(\varphi - \mathrm{Id})$ (à vérifier)
Calculons le rang de la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, il est égal au rang de la matrice associée :

$$rg(\mathcal{B}) = rg(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Cette famille est bien une base.

(b) Par définition du noyau $\varphi(e_1) = 0$. De même $\varphi - \mathrm{Id}(e_2) = \varphi - \mathrm{Id}(e_3) = 0$ Donc $\varphi(e_2) = e_2$ et $\varphi(e_3) = e_3$. On obtient alors la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$:

$$Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II Analyse

II. 1 Résolution inéquation

Exercice 17. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+2}.$$

Correction 20. Le fomaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$. Sur ce domaine l'équation est équivalente à

$$\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x+2} \leq 0$$
$$\frac{x+2-x(x+1)}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$
$$\frac{-x^2+2}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$
$$\frac{x^2-2}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \geq$$
$$\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

Tableau de signe. Les solutions sont

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup[-\sqrt{2}, -1[\cup[\sqrt{2}, +\infty[.}$$

II. 2 Equation rationnelle à paramètre

Exercice 18. Résoudre l'équation pour $x \in \mathbb{R}$ de paramètre a :

$$\frac{1}{x-a} \geq x$$

Correction 21. L'ensemble de définition est $D_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. On a pour tout $x \in D_a$:

$$\begin{aligned} (I(a)) &\iff \frac{1}{x-a} - x \geq 0 \\ &\iff \frac{1-x(x-a)}{x-a} \geq 0 \\ &\iff \frac{-x^2+ax+1}{x-a} \geq 0 \\ &\iff \frac{x^2-ax-1}{x-a} \leq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - ax - 1$ est $\Delta(a) = a^2 + 4 > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Les racines sont

$$r_+(a) = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2} \quad \text{et} \quad r_-(a) = \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$$

On va résoudre

$$r_+(a) \geq a \qquad (I_+)$$

et

$$r_-(a) \geq a \qquad (I_-)$$

Résolvons (I_+)

$$r_+(a) \geq a \iff \sqrt{a^2+4} \geq a \qquad (1)$$

Si $a \geq 0$, $r_+(a) \geq a \iff a^2 + 4 \geq a^2$ toujours vrai. Donc $a \geq 0$ solution.
Si $a \leq 0$, a est solution car $\sqrt{a^2+4} \geq 0 \geq a$ Les solutions de (I_+) sont $S_+ = \mathbb{R}$

Les solutions de (I_-) sont $S_- = \emptyset$.

Les solutions de $I(a)$ sont donc données par (tableau de signes)

$$\boxed{]-\infty, r_-(a)] \cup]a, r_+(a)])}$$

II. 3 Résolution de $\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0$

Exercice 19. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0 \qquad (E)$$

1. Déterminer le domaine de définition de (E).
2. Dire si les réels suivants sont solutions ou non de (E)

$$x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = 12$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
4. Montrer que résoudre (E) est équivalent à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{lll}\sqrt{5x-1} > & 2x-1 & (E_1)\\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x & (E_2)\end{array}\right.$$

5. Résoudre les deux inéquations obtenues à la question précédente.
6. Résoudre (E).

Correction 22.

1. Seule la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}_+$ ainsi (E) est bien définie pour tout x tel que $5x-1 \geq 0$ c'est-à-dire

$$\boxed{D_E =]\frac{1}{5}, +\infty[}$$

2. Cours

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad a-1 < \lfloor a \rfloor \leq a}$$

3. Notons $f(x) = \lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor$ On a $f(\frac{1}{5}) = \left\lfloor 2\frac{1}{5} - \sqrt{5\frac{1}{5}-1} \right\rfloor = \lfloor 2\frac{1}{5} \rfloor = 0$ Donc

$$\boxed{\frac{1}{5} \text{ est solution de } E}$$

On a $f(\frac{1}{2}) = \left\lfloor 2\frac{1}{2} - \sqrt{5\frac{1}{2}-1} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \right\rfloor$ Or $\frac{3}{2} > 1$ donc $\sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{1} = 1$ et donc $1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$ ainsi

$$\boxed{\frac{1}{2} \text{ n'est pas solution de } E}$$

On a $f(1) = \lfloor 2 \times 1 - \sqrt{5-1} \rfloor = \lfloor 2-2 \rfloor = \lfloor 0 \rfloor$

$$\boxed{1 \text{ est solution de } E}$$

On a $f(12) = \lfloor 2 \times 12 - \sqrt{60-1} \rfloor = \lfloor 24 - \sqrt{59} \rfloor$ Or$59 < 64 = 8^2$ donc $\sqrt{59} < 8$ et $24 - \sqrt{59} > 24 - 8 = 16$ ainsi $f(2) > 16$ et

$$\boxed{12 \text{ n'est pas solution de } E}$$

4. D'après ce qu'on vient de voir, pour tout $x \in D_E$ on a :

$$2x - \sqrt{5x-1} - 1 < \lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor \leq 2x - \sqrt{5x-1}$$

Si x est solution de (E) on a $\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0$ et donc l'équation (E) équivaut à $2x - \sqrt{5x-1} - 1 < 0 \leq 2x - \sqrt{5x-1}$, soit

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lll}\sqrt{5x-1} > & 2x-1 & (E_1)\\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x & (E_2)\end{array}\right.}$$

5. Résolvons ces deux inéquations. Tout d'abord la première :

$$\sqrt{5x-1} > 2x-1 \quad (E_1)$$

On distingue deux cas :

- ▶ <u>Cas 1 :</u> $2x-1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq \frac{1}{2}$
Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 5x-1 > (2x-1)^2 \\ &\iff 5x-1 > 4x^2-4x+1 \\ &\iff 4x^2-9x+2 < 0\end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 9^2 - 4*4*2 = 81-32 = 49 = 7^2$. $4x^2-9x+2$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{9+7}{8} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de (E_1) sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &=]\frac{1}{4}, 2[\cap[\frac{1}{2}, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{2}, 2[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } [\tfrac{1}{2}, +\infty[\text{ sont } \mathcal{S}_1 = [\tfrac{1}{2}, 2[}$$

- ▶ <u>Cas 2 :</u> $2x-1 < 0$ c'est-à-dire $x < \frac{1}{2}$
Dans ce cas, tous les réels $x \in D_E$ sont solutions car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur }]-\infty, \tfrac{1}{2}[\text{ sont } \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{2}]}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, 2[}$$

On fait la même chose pour (E_2)

$$\sqrt{5x-1} \leq 2x \quad (E_2)$$

On distingue deux cas :

- ▶ <u>Cas 1 :</u> $2x \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 0$
Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 5x-1 \leq (2x)^2 \\ &\iff 5x-1 \leq 4x^2 \\ &\iff 4x^2-5x+1 \geq 0\end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 5^2 - 4*4*1 = 25 - 16 = 9 = 3^2$. $4x^2 - 5x + 1$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{5+3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de (E_2) sur $[0, +\infty[$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= (]-\infty, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[) \cap [0, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } [0, +\infty[\text{ sont } \mathcal{E}_2 = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, +\infty[}$$

- ▶ Cas 2 : $2x < 0$ c'est-à-dire $x < 0$
  Dans ce cas, aucun réel n'est solution car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ sont } \mathcal{E}_2' = \emptyset}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_2' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, +\infty[}$$

6. x est solution de (E) si et seulement si il est solution de (E_1) et (E_2), l'ensemble des solutions correspond donc à l'intersection : $\mathcal{E} \cap \mathcal{S} = ([\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[) \cap [\frac{1}{5}, 2[= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, 2[$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont } [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, 2[}$$

II. 4 Equation complexe

Exercice 20. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) + 1 = 0$$

Correction 23. On pose, $Z = \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)$, l'équation devient alors :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0.$$

On remarque que -1 est une racine du polynôme, Z^3+Z^2+Z+1, qui se factorise alors en $(Z+1)(Z^2+1)$. $Z^2 + 1 = (Z-i)(Z+i)$ et on a donc

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = (Z+1)(Z-i)(Z+i).$$

1. Pour $Z = -1 \iff \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) = -1$, on obtient $z - 2i = -z - 2i$ soit

$$z = 0.$$

2. Pour $Z = i \iff \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) = i$, on obtient $z - 2i = iz - 2$. Soit $z(1-i) = -2 + 2i$, donc
$$z = -2$$
3. Pour $Z = -i \iff \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) = -i$, on obtient $z - 2i = -iz + 2$ soit $z(1+i) = 2 + 2i$ donc
$$z = 2$$

Les solutions de l'équation sont donc
$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2, 0, 2\}}$$

II. 5 Somme de nombres complexes(Pb)

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la somme pour tout $x \in]0, 2\pi[$:
$$Z(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

1. Montrer par récurrence que $Z(x) = \frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}$.
   On suppose que $n \geq 2$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
2. Justifier que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Prouver que : $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
4. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$.

Correction 24.

1. C'est l'exercice 2 du TD 1 - Récurrence, où $q = e^{ix}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)$ Or $\sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) = \sin(\pi) = 0$.
   Donc
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

3. On a $Z(\frac{\pi}{n}) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\frac{\pi}{n}}$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ik\frac{\pi}{n}} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{1 - e^{i\pi + i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{2n}} \left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} + e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{2n}} \left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)} \\
&= \frac{\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} + e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)}{\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)} \\
&= \frac{2\cos(\frac{\pi}{2n})}{2i\sin(\frac{\pi}{2n})} \\
&= \frac{1}{i\tan(\frac{\pi}{2n})}
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}(Z(x)) &= \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{Im}(e^{ikx}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sin(kx))
\end{aligned}$$

Donc $S_n = \mathfrak{Im}(Z(\frac{\pi}{n})) = \mathfrak{Im}(\frac{1}{i\tan(\frac{\pi}{2n})}) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$

4. On a d'après la question précédente $\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{8}} = S_4$ Donc $\tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{S_4}$.

Par ailleurs $S_4 = \sum_{k=1}^{3} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{1\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

Donc

$$\boxed{\tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

5. Montrons que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$. On a en effet pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

En particulier $\tan'(0) = 1$ et par définition de la dérivée en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(0) = 1$$

On a $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n\tan(\frac{\pi}{2n})}$, et

$$\begin{aligned}
n\tan(\frac{\pi}{2n}) &= \frac{\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\frac{\pi}{2}\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{\pi}{2n}}
\end{aligned}$$

On vient de voir que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$, comme $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$ on a par composé de limites :

$$\lim_{n\to\infty} n\tan(\frac{\pi}{2n}) = \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{2}{\pi}.}$$

II. 6 *Equations trigonométriques*

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi[$:

$$\cos(3x - 1) = \sin(2x) \tag{2}$$

$$\cos(3x) + \cos(2x) + \cos(-x) = 0 \tag{3}$$

Correction 25.

$$\cos(3x - 1) = \sin(2x)$$

Equivaut à

$$\cos(3x - 1) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

Donc

$$\begin{cases} 3x - 1 & \equiv \frac{\pi}{2} - 2x \quad [2\pi] \\ \quad ou & \\ 3x - 1 & \equiv -\frac{\pi}{2} + 2x \quad [2\pi] \end{cases}$$

C'est à dire :

$$\begin{cases} 5x & \equiv \frac{\pi}{2}+1 \quad [2\pi] \\ ou & \\ x & \equiv 1-\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & \equiv \frac{\pi}{10}+\frac{1}{5} \quad [\frac{2\pi}{5}] \\ ou & \\ x & \equiv 1-\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

Sur $\mathbb{R}$: les solutions sont

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{10}+\frac{1}{5}+\frac{2k\pi}{5}, 1-\frac{\pi}{2}+2k\pi\}$$

Sur $[-\pi,\pi[$:

$$\mathcal{S}\cap[-\pi,\pi[= \{\frac{\pi}{10}+\frac{1}{5}, \frac{\pi}{2}+\frac{1}{5}, \frac{-3\pi}{10}+\frac{1}{5}, \frac{-7\pi}{10}+\frac{1}{5}, \frac{9\pi}{10}+\frac{1}{5}, 1-\frac{\pi}{2}\}$$

(On a $\frac{1}{5} < \frac{\pi}{10} \iff 1 < \frac{\pi}{2}$, qui est vrai, donc $\frac{9\pi}{10}+\frac{1}{5} < \pi$)

$$\cos(3x)+\cos(2x)+\cos(-x) = 0 \tag{(2)}$$

$\cos(3x) = \mathfrak{Re}((e^{ix})^3) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$
L'équation est équivalente à

$$4\cos^3(x) + 2\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1 = 0$$

Notons $X = \cos(x)$, on obtient l'équation

$$4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = 0.$$

Or $4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = 4(X+\frac{1}{2})(X-\frac{\sqrt{2}}{2})(X+\frac{\sqrt{2}}{2})$ On a donc

$$\begin{cases} \cos(x) & = \frac{-1}{2} \\ ou & \\ \cos(x) & = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ ou & \\ \cos(x) & = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{2\pi}{3}+2k\pi, -\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi, -\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi, -\frac{3\pi}{4}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}}$$

et

$$\boxed{\mathcal{S}\cap[-\pi,\pi[= \{\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\}}$$

II. 7 Arctan(Pb)

Exercice 23 (Autour de arctan). 1. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$ que vaut $\tan(\arctan(x))$?

(b) Soit $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?

(c) Soit $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?

(d) Soit $k \in \mathbb{Z}$, et $x \in]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?

2. On rappelle que la dérivée d'un quotient $\frac{f}{g}$ vaut $\frac{f'g-fg'}{g^2}$. Montrer que pour tout x où tan est définie on a :
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

3. On rappelle que la dérivée d'une composée $f \circ g$ vaut $g' \times f' \circ g$. Grâce à la formule obtenue en 1.(a) montrer que la dérivée de arctan sur $\mathbb{R}$ vaut
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$

5. Soit x, y deux réels positifs. Montrer que si $xy < 1$ alors
$$0 \leq \arctan(x) + \arctan(y) < \frac{\pi}{2}$$

6. Etant donnée $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, tel que $xy < 1$, montrer que
$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$ [3]

7. Soit $x > 0$, comparer : $\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ et $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

8. Simplifier
$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

9. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

Correction 26.

1. (a) Par définition pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan(\theta) = x$ d'inconnue x a une unique solution dans $]-\pi/2, \pi/2[$ notée $\arctan(x)$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\tan(\arctan(x)) = x$$

(b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan(x) = y$ admet une unique solution dans $]-\pi/2, \pi/2[$. Si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan(x) = y$ alors par définition $x = \arctan(y)$. Ainsi pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan(x) = y$ implique
$$\arctan(\tan(x)) = \arctan(y) = x$$

3. De manière plus générale, $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$, où :

- $k = 0$ si $xy < 1$.
- $k = 1$ si $xy > 1$, avec x et y positifs.
- $k = -1$ si $xy > 1$, avec x et y négatifs.

(c) Ici $x \notin]-\pi/2, \pi/2[$, donc $tan(x) = y$ n'implique pas $x = \arctan(y)$! ! Par contre, $x - \pi$ vérifie

   i. $x - \pi \in]-\pi/2, \pi/2[$

   ii. $tan(x - \pi) = y$

   Donc $x - \pi = \arctan(y)$ et finalement

$$\boxed{\forall x \in]\pi/2, 3\pi/2[,\ \arctan(\tan(x)) = \arctan(y) = x - \pi}$$

(d) Soit y tel que $\tan(x) = y$ et $x \in]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

   i. $x - k\pi \in]-\pi/2, \pi/2[$

   ii. $tan(x - k\pi) = \tan(x) = y$

   Donc $x - k\pi = \arctan(y)$ et finalement

$$\boxed{\forall x \in]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[,\ \arctan(\tan(x)) = \arctan(y) = x - k\pi}$$

2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\end{aligned}$$

3. D'après la formule $1, a$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\tan(\arctan(x))' = 1$$

   Et par ailleurs

$$\begin{aligned}\tan(\arctan(x))' &= \arctan'(x) \times (1 + \tan^2(\arctan(x)) \\ &= \arctan'(x) \times (1 + x^2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \arctan'(x) = \tfrac{1}{1+x^2}}$$

4. Soit $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 0$ donc f est constante sur $]0, \infty[$ et $]-\infty, 0[$.
   $f(1) = \pi/2$ donc pour tout $x \in]0, \infty[$, $f(x) = \pi/2$.[4]

5. Soit $x \geq 0, y \geq 0$ alors $\arctan(x) \geq 0$ et $\arctan(y) \geq 0$ donc l'inégalité de gauche est triviale.
   Remarquons par ailleurs que arctan est croissante (cf 3). Ainsi, pour $xy < 1$, c'est-à-dire $y < \frac{1}{x}$ on a

$$\arctan(y) < \arctan(\frac{1}{x})$$

   donc

$$\arctan(x) + \arctan(y) < \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \pi/2$$

4. On remarquera que $f(-1) = -\pi/2$ et pour tout $x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = -\pi/2$

6. On a d'après 1-a
$$\tan(\arctan(x)+\arctan(y)) = \frac{\tan(\arctan(x))+\tan(\arctan(y))}{1-\tan(\arctan(x))\tan(\arctan(y)} = \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$
De plus $\tan(\theta) = x$ équivaut à $\theta = \arctan(x)$ pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. D'aprés la question 5, $\arctan(x)+\arctan(y) \in [0, \pi/2[$ donc on a bien
$$\boxed{\arctan(x)+\arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)}$$
7. Soit $X = \frac{x}{x+1}$ et $Y = -\frac{x-1}{x}$ avec $x > 0$.
Pour tout $x > 0$, $XY = \frac{1-x}{1+x} < 1$, on peut donc appliquer le résultat de la question 6. On obtient :
$$\arctan(X)+\arctan(Y) = \arctan\left(\frac{X+Y}{1-XY}\right)$$
$$\boxed{\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{x}{x+1}+\frac{1-x}{x}}{1-\frac{1-x}{1+x}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)}$$
8.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\\ &= \arctan(\frac{n}{n+1}) - \arctan(\frac{0}{1})\\ &= \arctan(\frac{n}{n+1}).\end{aligned}$$
9. $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\arctan(\frac{n}{n+1}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}}$$

II. 8 Simplification Produit

Exercice 24. Simplifier
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$
En déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Correction 27.
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \left(1-\frac{1}{1^2}\right)\times\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = 0\times\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = 0$$
et
$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

On reconnait deux produits téléscopiques, donc

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{2-1}{n}\times\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$, donc

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}$$

II. 9 *Suite récurrente et césaro PB(long)*

Exercice 25. Le but de cet exerice est l'étude de la suite (a_n) définie par $a_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_{n+1}=\frac{a_n(1+a_n)}{1+2a_n}$.

1. Etude de la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Calculer a_2 et a_3.
   (b) Etudier la fonction f définie par $f(x)=\frac{x(x+1)}{1+2x}$
   (c) Déterminer l'image directe de $]0,1[$ par f.
   (d) Démontrer que, $\forall n\geqslant 2$, on a $0<a_n<1$.
   (e) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   (f) Rédoudre l'équation $f(x)=x$ sur $[0,1]$.
   (g) En déduire la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.
2. Un résultat intermédiaire.
   Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante, admettant une limite ℓ en $+\infty$ et $(C_n)_{n\geq 1}$ définie par
   $$C_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_n$$
   (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $C_n\leq u_n$.
   (b) Montrer que pour $(C_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   (c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2C_{2n}-C_n\geq u_{n+1}$.
   (d) En déduire que $(C_n)_{n\geq 1}$ converge et donner la valeur de sa la limite en fonction de celle de $(u_n)_{n\geq 1}$.
3. Etude d'un équivalent de $(a_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Montrer que $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1+a_n}$.
   (b) On pose $u_n=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (d) En posant $C_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$, exprimer C_n en fonction de a_{n+1} et de a_1.
   (e) Conclure à l'aide de la question 2.e que $a_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$.

Correction 28.

1. (a) $a_2 = \frac{1(1+1)}{1+2\times 1} = \frac{2}{3}$
$a_3 = \frac{\frac{2}{3}(1+\frac{2}{3})}{1+2\times\frac{2}{3}} = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{7}{3}} = \frac{10}{21}$

$$\boxed{a_2 = \frac{2}{3} \text{ et } a_3 = \frac{10}{21}}$$

(b) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}\}$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(1+2x) - x(x+1)2}{(1+2x)^2} = \frac{2x^2+2x+1}{(1+2x)^2}$$

Le discriminant du numérateur vaut $\Delta = 4-8 = -4 < 0$ donc f' est strictement positif sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}\}$ Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty, \frac{-1}{2}[$ et sur $]\frac{-1}{2}, +\infty[$.

(c) $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{2}{3}$, comme f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$, le thoérème de la bijection assure que

$$\boxed{f(]0,1[) =]0, \tfrac{2}{3}[}$$

(d) On montre le résultat par récurrence. Soit $P(n)$ la propriété

$$P(n) : \text{"}0 < a_n < 1\text{"}$$

Initialisation : $P(2)$ est vraie d'après la question 1a)

Hérédité : On suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que $P(n)$ soit vraie, on a alors $0 < a_n < 1$. D'après l'étude de f on a alors que $f(a_n) \in 0, \frac{2}{3} \subset]0,1[$, donc

$$a_{n+1} = f(a_n) \in]0,1[$$

Conclusion : La propriété $P(n)$ est héréditaire donc pour tout $n \geq 2$, on a

$$\boxed{0 < a_n < 1}$$

(e) Pour tout $n \in N^*$ on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= f(a_n) - a_n \\ &= \tfrac{a_n(1+a_n)}{1+2a_n)} - a_n \\ &= \tfrac{a_n(1+a_n)-a_n-2a_n^2}{1+2a_n)} \\ &= \tfrac{-a_n^2}{1+2a_n)} \end{aligned}$$

Or on a a prouvé que $a_n \in]0,1[$ donc $1+2a_n > 0$ et $-a_n^2 < 0$ donc $a_{n+1} - a_n < 0$. Ainsi :

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

(f)

$$\begin{aligned} f(x) &= x && (4) \\ \iff \frac{x(x+1)}{1+2x} &= x && (5) \\ \iff \frac{-2x^2)}{1+2x} &= 0 && (6) \\ \iff x = 0 & && (7) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{La seule solution de } f(x) = x \text{ est } x = 0}$$

(g) La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée donc elle converge, notons ℓ sa limite. Par unicité de la limite a_{n+1} converge vers ℓ et par continuité de f la suite $f(a_n)$ converge vers $f(\ell)$ Ainsi $f(\ell) = \ell$ et finalement d'après la question précédente :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

2. (a) Par croissance de $(u_n)_{n\geq 1}$ on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$u_k \leq u_n$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} u_n,$$

c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq nu_n$ En divisant par $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient :

$$\boxed{C_n \leq u_n}$$

(b) $C_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{n+1}u_{n+1}$ Or $C_n \leq u_n \leq u_{n+1}$ où la deuxième inégalité vient de la croissance de $(u_n)_{n\geq 1}$. Donc

$$\begin{aligned} C_{n+1} &\geq \tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{k=1}^{n} u_k + \tfrac{1}{n+1}C_n \\ &\geq \tfrac{1}{n+1}nC_n + \tfrac{1}{n+1}C_n \\ &\geq \tfrac{n+1}{n+1}C_n \\ &\geq C_n \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{(C_n)_{n\geq 1} \text{ est croissante.}}$$

(c)

$$\begin{aligned} 2C_{2n} - C_n &= 2\tfrac{1}{2n}\textstyle\sum_{k=1}^{2n} u_k - \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k && (8) \\ &= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{2n} u_k - \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k && (9) \\ &= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k && (10) \end{aligned}$$

Or par croissance de $(u_n)_{n\geq 1}$, pour tout $k \geq n+1$, $u_k \geq u_{n+1}$ Donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} = nu_{n+1}$$

Finalement

$$\begin{aligned} 2C_{2n} - C_n &\geq \tfrac{1}{n}nu_{n+1} \\ &\geq u_{n+1} \end{aligned}$$

(d) D'aprés $2a)$ $C_n \leq u_n$ et comme u_n est croissante $u_n \leq \ell$. Donc $C_n \leq \ell$.
D'après 2b) $(C_n)_{n\geq 1}$ est majorée, donc $(C_n)_{n\geq 1}$ converge en vertu du théorème de la limite monotone. Soit ℓ' sa limite.
D'après 2a)

$$\ell' \leq \ell$$

Et d'après 2c) $2\ell' - \ell' \geq \ell$ d'où

$$\ell' \geq \ell$$

Finalement

$$\boxed{(C_n)_{n\geq 1} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} C_n = \ell.}$$

3. (a) On a pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} &= \frac{1+2a_n}{a_n(1+a_n)} - \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{1+2a_n-(1+a_n)}{a_n(1+a_n)} \\ &= \frac{a_n}{a_n(1+a_n)} \\ &= \frac{1}{(1+a_n)} \end{aligned}$$

Ce qui est bien l'égalité demandée.

(b) Pour tout $n \geq 1$: $u_n = \frac{1}{1+a_n}$, or $(a_n)_{n\geq 1}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1+0} = 1}$$

(c) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_n}$ Comme $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante $a_n \geq a_{n+2}$ et donc $\frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_n} \geq 0$

$$\boxed{(u_n)_{n\geq 1} \text{ est croissante}}$$

(d) $C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}$ On reconnait une somme télescopique : on a donc

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1}\right)}$$

(e) D'après la question précédente :

$$a_{n+1} = \frac{1}{C_n + \frac{1}{a_1}} = \frac{1}{nC_n + 1}$$

D'après la question $2d)$ Comme $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et converge vers 1, C_n converge aussi vers 1. On a donc

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Au final

(f)

(g)

(h)

II. 10 $u_{n+1} = \sin(u_n)$ *(Pb)*

Exercice 26. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$.
2. On note $f(x) = \sin(x) - x$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < 0$.
3. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
5. Montrer que $f(x) = 0 \iff x = 0$.
6. Déterminer la valeur de ℓ.

Info

1. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne la valeur de u_n. (Pour ceux qui n'ont pas encore vu les fonctions, vous pouvez écrire un script qui demande à l'utilisateur la valeur de n souhaité et qui retourne la valeur de u_n sans les fonctions, mais bon c'est pas si différent...)
2. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $e \in \mathbb{R}^+$ et qui retourne la valeur du premier terme $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $|u_{n_0} - \ell| \leq e$ et la valeur de u_{n_0}. (même remarque)

Correction 29.

1. On fait une récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$ la propriété définie par : "$0 < u_n < \frac{\pi}{2}$"
   Par définition $u_0 = 1$, et on a bien $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ (car $\pi > 3$) Donc la propriété P est vraie au rang 0.
   On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que P_{n_0} soit vraie et on va montrer que ceci implique P_{n_0+1}
   En effet, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \in]0, 1[\subset]0, \pi/2[$ [5]. Donc si P_{n_0} est vraie, c'est à dire $u_{n_0} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a alors $u_{n_0+1} = \sin(u_{n_0}) \in]0, 1[$. De nouveau comme $1 < \frac{\pi}{2}$ ceci implique P_{n_0+1}.
   Par récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. Donc f est décroissante et $f(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < 0$.
3. $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n = f(u_n)$ Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ d'après la question 1, on a donc $f(u_n) < 0$ d'après la question 2. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$u_{n+1} \leq u_n$$

   ce qui assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0) d'après la question 1 et décroissante d'après la question précédente. Par théorème de la limite monotone, la suite converge vers $\ell \geq 0$
5. L'étude de f a montré que $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi $f(x) = 0 \implies x = 0$. Réciproquement, si $x = 0$, $f(0) = \sin(0) - 0 = 0$. L'équivalence est bien montrée.

5. en d'autres termes, $]0, \pi/2[$ est stable par la fonction sinus

6. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ on a aussi $\lim u_{n+1} = \ell$. De plus, comme la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ on a $\lim \sin(u_n) = \sin(\lim u_n)$. Ainsi la limite ℓ satisfait $\ell = \sin(\ell)$. Ce qui d'après la question précédente implique $\ell = 0$.

   Finalement
$$\lim u_n = 0$$

INFO

```python
from math import sin
def u(n):
  x=1    #valeur de u0
  for i in range(n):
     x=sin(x)    #relation de recurrence que l'on applique n fois avec range(n)
  return(x)

from math import abs
def limite(e):
   L=0 #valeur de la limite
   n=0  #on met en place un compteur
   val=u(n)  #valeur de u0

   while abs(val-L)>e: #tant que la valeur de |u(n)-L| est plus grande que e
      n+=1 #on incremente la valeur du compteur de 1
      val =u(n) #on actualise la valeur de u(n)

   return(n, u(n))
```

II. 11 $I_{n+1} = (2n+1)I_n$

Exercice 27. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (2n+1)I_n$. Exprimer I_n en fonction de n à l'aide uniquement de factorielle et puissance.

Correction 30. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_{n+1} = (2n+1)I_n$. Donc on a $I_n = (2(n-1)+1)I_{n-1}$ et $I_{n-1} = (2(n-2)+1)I_{n-2}$ et ainsi de suite jusqu'a $I_2 = (2\times 1+1)I_1 = 3I_1$ et $I_1 = (2\times 0+1)I_0 = I_0$. Ceci donne
$$I_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\right) I_0$$
(on peut vérifier la formule par récurrence si l'on veut être sûr)

Ici il s'agit maintenant de simplifier le produit. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ correspond au produit sur les nombres impairs de 1 à $2n-1$. Le produit sur les pairs de 2 à $2n$ vaut
$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\prod_{k=1}^{n}(k) = 2^n \times n!$$

et le produit sur tous les nombres de 1 à $2n$ vaut

$$\prod_{k=1}^{2n}(k) = (2n)!$$

Ainsi

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}}$$

II. 12 Calcul ensemble de définition

Exercice 28. Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{(x^2-4)\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

Correction 31.

Le logarithme est défini sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient donc comme condition

$$\frac{1}{x} > 0$$

Cette condition équivaut à $x > 0$.

La racine est définie sur $\mathbb{R}^+$ donc on obtient comme deuxième condition

$$(x^2-4)\ln(\frac{1}{x}) \geq 0.$$

Ceci équivaut à $(x-2)(x+2)\ln(x) \leq 0$ et un tableau de signe donne comme solution $[1,2]$. Ce dernier ensemble est donc l'ensemble de définition de f :

$$\boxed{D_f = [1,2]}$$

II. 13 Suite définites implicitement $x^3 + nx - 1$ (Pb)

Exercice 29.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$. On la note x_n.
2. Montrer que $x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1 < 0$.
3. En déduite que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Justifier que la suite est minorée par 0 et majorée par 1.
5. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. A l'aide d'un raisonement par l'absurde justifier que cette limite vaut 0.

Correction 32.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = x^3 + nx - 1$. C'est un polynome de degré 3, il est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$f'(x) = 3x^2 + n$$
Comme $n \geq 0$, la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et ainsi la fonction f_n est strictement croissante.
On a par ailleurs $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n \geq 1$. Comme f_n est continue sur $[0,1]$ et strictement croissante on peut appliquer le théorème de la bijection pour la valeur $0 \in [f_n(0), f_n(1)] = [-1,1]$. Ce théorème assure qu'il existe un unique réel $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. On calcule $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1$, on va montrer que $f_n(x_{n+1}) < 0$. Or par définition de x_{n+1} on a $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ ce qui donne :
$$x_{n+1}^3 + (n+1)x_{n+1} - 1 = 0$$
Donc $x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1 = -x_{n+1}$
Finalement en remplaçant dans la première égalité on obtient :
$$f_n(x_{n+1}) = -x_{n+1}$$
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$ d'après la première question,on a bien
$$f_n(x_{n+1}) < 0$$
3. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est strictement croissante, et $f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n)$ on a
$$x_{n+1} \leq x_n$$
Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Le raisonement effectué à la question 1 montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et majorée par 1.
5. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Le théorème de la limite monotone assure que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ cette limite.
6. Comme $x_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim x_n \geq 0$.. Supposons par l'absurde que $\ell > 0$.
On a alors d'une par $f_n(x_n) = 0$ donc $\lim x_n^3 + nx_n - 1 = 0$. Par ailleurs, $\lim x_n^3 - 1 = \ell^3 - 1$ et $\lim nx_n = +\infty$. Donc $\lim x_n^3 + nx_n - 1 = +\infty$. Comme $0 \neq +\infty$ et que la limite est unique, c'est une contradiction. Ainsi $\ell = 0$.

II. 14 $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$

Exercice 30. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale
$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout $x \in]1, e[$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a $(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} > 0$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 a l'aide d'une intégration par partie.
   (b) Démontrer, toujours à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n \leq e$.
   (c) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Correction 33.

1. Pour tout $x \in]1, e[$, $0 < \ln(x) < 1$, donc $\ln(x)^n \ln(x) < \ln(x)^n$. On obtient bien

$$\ln(x)^n - \ln(x)^{n+1} > 0$$

2. En intégrant, par positivité de l'intégrale on a

$$\int_1^e \ln(x)^n - \ln(x)^{n+1} dx > 0$$

Donc $I_n > I_{n+1}$ et la suite est bien décroissante.

3. vu en cours.

$$\int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx$$

Donc

$$\int_1^e \ln(x) dx = e - (e - 1) = 1$$

4. On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = (\ln(x))^{n+1}$. On a $u(x) = x$ et $v'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^n$. Et finalement

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e 1(\ln(x))^{n+1} dx \\ &= [x(\ln(x))^{n+1}]_1^e - \int_1^e x(n+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^n dx \\ &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

5. Comme $\ln(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, e]$, $\ln(x)^n \geq 0$. Par positivité de l'intérgale, I_n est positive.
6. D'après la question 2b, $(n+1)I_n = e - I_{n+1}$ et d'après la question précédente pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$ donc $e - I_{n+1} \leq e$. On a bien $(n+1)I_n \leq e$.
7. Les question précédentes montre que

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes assure que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut 0.

8. D'après la question 2b, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ donc

$$(n+1)I_n + I_{n+1} = e$$

et finalement $nI_n + (I_n + I_{n+1}) = e$ Comme $\lim I_n = \lim I_{n+1} = 0$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = e.$$

II. 15 Etude de $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$

Exercice 31. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$$

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de f.
2. Calculer la dérivée de f en déduire que le signe de f' dépend de celui de $g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$
3. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de g et calculer sa dérivée.
4. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $f'(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]0, \alpha[\cap D_f$.
5. Donner le tableau de variations complet de f.
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en e.

Correction 34.

1. La fonction exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction ln est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. La fonction inverse est définie et dérivabel sur $\mathbb{R}^*$ et enfin $\ln(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ donc la fonction f est définie et dérivable sur $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. On a pour tout $x \in D_f$
$$f'(x) = \frac{e^x \ln(x) - e^x \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{e^x}{\log^2(x)} g(x)$$
Comme poru tout $x \in D_f$, $\frac{e^x}{\log^2(x)} \geq 0$, le signe de f' est égal à celui de $g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$.
3. g est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ Ainsi $g'(x)$ est positif prou tout $x \in]0, +\infty[$.
4. La fonciton g est strictement croissante. Comme $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, le théorème de la bijection assure qu'il existe un unique $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$
Comme $g(1) = -1 < 0$ et que g est strictement croissante, on a de plus $\alpha > 1$
5.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	h	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6. On a $f'(e) = e^e g(e) = -e^e(1 - \frac{1}{e}) = -e^e + e^{e-1}$ et $f(e) = e^e$ Donc l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en e et donnée par
$$y - e^e = (-e^e + e^{e-1})(x - e)$$

II. 16 Wallis - Calcul $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ *(Pb)*

Le but de ce DM est de calculer la valeur de
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

II. 16. a Convergence

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Montrer que pour tout $k \geq 2$
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 2]$.

Correction 35.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2}$, donc $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Pour tout $k \geq 2$: $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$ Or pour tout $k \geq 2$, $0 < k(k-1) \leq k^2$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a donc :
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$$
3. D'après la question précédente, on peut majorer tous les termes de S_n à partir du rang $k = 2$. On a alors :
$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
On reconnait alors dans le membre de droite une somme téléscopique qui se simplifie de la manière suivante :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$
On obtient alors $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, d'après le théorème des limlites monotones la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, notons ℓ sa limite.
Comme $0 \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$, le théorème d'encadrement assure que $\ell \in [0, 2]$.

II. 17 Etude de $f(x) = x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 32. Soit f la fonction définie pour tout x par $f(x) = x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Donner le domaine de définiiton et de dérivabilité de f.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner l'équation de la tangente (T_n) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse n.
3. Calculer les coordonnées de l'intersection entre (T_n) et l'axe des abscisses. On note x_n la coordonnée non nulle.
4. Calculer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 36.

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, sa dérivée vaut :
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. L'équation de la tangente en $n \in \mathbb{N}$ est $y - f(n) = f'(n)(x-n)$ soit
$$y - n - \cos(\frac{1}{n}) = (1 + \frac{1}{n^2}\sin(\frac{1}{n}))(x-n)$$
3. L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$. Il n'est donc pas parallèle à (T_n). Notons A_n le point d'interesection entre ces deux droites. Les coordonnées de A_n sont donc $(x_n, 0)$ (car appartiennent à l'axe des abscisses) et vérifient :
$$0 - n - \cos(\frac{1}{n}) = (1 + \frac{1}{n^2}\sin(\frac{1}{n}))(x_n - n)$$
car A_n appartient à (T_n). Remarquons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2}\sin(\frac{1}{n}) > 0$ et donc $(1+\frac{1}{n^2}\sin(\frac{1}{n})) \neq 0$ et en particulier
$$x_n = \frac{-n-\cos(\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n^2}\sin(\frac{1}{n})} + n$$
4. En mettant au même dénominateur on obtient :
$$x_n = \frac{-n-\cos(\frac{1}{n}) + n + \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n^2}\sin(\frac{1}{n})} = \frac{-\cos(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n^2}\sin(\frac{1}{n})}$$
Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et que la fonction sin est bornée, on obtient
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sin(\frac{1}{n}) = 0$$
Comme $\cos(0) = 1$ et que la fonction cos est continue en 0 on obtient :
$$\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{1}{n}) = 1$$
Finalement
$$\lim_{n\to\infty} x_n = -1$$

II. 18 Calculs de limites

Exercice 33. Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})}$
2. $\lim_{x\to0} \frac{x\ln(x)}{e^x-1}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x+1)}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)e^{x^2}}{x^x}$

Correction 37.

1. (FI $\frac{0}{0}$ - pas nécessaire sur une copie) On fait un changement de variable : $y = x - 1$.
$$\frac{x-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \frac{y}{\cos(\frac{\pi y}{2} + \frac{\pi}{2})} = -\frac{y}{\sin(\frac{\pi y}{2})}$$
Or $\sin(\frac{\pi y}{2}) \sim_0 \frac{\pi y}{2}$. Donc
$$\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{y\to0} -\frac{y}{\sin(\frac{\pi y}{2})} = -\frac{2}{\pi}.$$

2. (FI $\frac{0}{0}$ - pas nécessaire sur une copie) D'après le cours $e^x - 1 \sim_0 x$ donc $\frac{x\ln(x)}{e^x-1} \sim_0 \ln(x)$ Ainsi :
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{e^x - 1} = -\infty.$$
3. (FI $\frac{+\infty}{+\infty}$ - pas nécessaire sur une copie) $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ et $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \ln(x)$. Donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x+1)} = 2$$
4. (FI $\frac{+\infty}{+\infty}$ - pas nécessaire sur une copie) La puissance est une fonction de la variable x, on passe donc à la forme exponentielle : $x^x = \exp(x\ln(x))$.
$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)e^{x^2}}{x^x} &= \frac{\ln(x)\exp(x^2)}{exp(x\ln(x)}\\ &= \ln(x)\exp(x^2 - x\ln(x))\\ &= \ln(x)\exp(x(x-\ln(x))\end{aligned}$$
Or $x - \ln(x) \to_{+\infty} +\infty$ par croissance comparée. Donc $\exp(x(x-\ln(x)) \to_{+\infty} +\infty$ et finalement
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)e^{x^2}}{x^x} = +\infty.$$

II. 19 Etude dérivabilité

Exercice 34. Etudier la continuité et la dérivabilité de
$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0\\ 0 & x = 0\end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0\\ 0 & x = 0.\end{cases}$$
Ces fonctions sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$?

Correction 38.
f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et produit de fonctions usuelles et on a $\forall x \in \mathbb{R}^*$
$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
et
$$g'(x) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
Etudions la dérivabilité en 0. On a $\tau_{f,0}(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ On montre comme dans le TD que $\lim_{x\to 0}\tau_{f,0}(x) = 0$ Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

De même, avec $\tau_{g,0}(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ On montre que $\lim_{x\to 0}\tau_{g,0}(x) = 0$ Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$

Il faut maintenant étudier la continuité de la dérivée.
$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
Donc g' est continue en 0 ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

En revanche $f'(x)$ n'admet pas de limite en 0 et en particulier f' n'est pas continue en 0. Ainsi f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 35. Fonctions k-contractantes.
On suppose que f est une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ et qu'il existe $k\in]0,1[$ tel que

$$\forall (x,y)\in[0,1]^2,\ |f(x)-f(y)|\leq k|x-y|.$$

Une telle fonction s'appelle une fonction k-contractante.

1. Montrer que f est continue.
2. En déduire que f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.
3. Montrer par l'absurde que ce point fixe est unique. On le note c.
4. On considère alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $c_0\in[0,1]$ et par la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ c_{n+1}=f(c_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|c_n-c|\leq k^n|c_0-c|$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 39.

1. • On cherche à étudier la continuité de f sur $[0,1]$. On repasse pour cela par la définition de la continuité en montrant que pour tout $x_0\in[0,1]$, f est continue en x_0. Pour cela il faut donc montrer que pour tout $x_0\in[0,1]$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
   Soit donc $x_0\in[0,1]$ fixé. On cherche donc à montrer que $f(x)-f(x_0)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Mais par définition d'une fonction k-contractante, on sait que :
   $$\forall x\in[0,1],\ |f(x)-f(x_0)|\leq k|x-x_0|.$$
   On va donc obtenir le résultat voulu en utilisant le corollaire du théorème des gendarmes. En effet, on a :
   ⋆ $\lim\limits_{x\to x_0} k|x-x_0|=0$ par propriété sur les somme, composée et produit de limites.
   ⋆ $\forall x\in[0,1]$, $|f(x)-f(x_0)|\leq k|x-x_0|$.
   Ainsi d'après le corollaire du théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Ainsi on a montré que la fonction f est continue en x_0 et comme cela est vraie pour tout $x_0\in[0,1]$, on a la continuité de f sur $[0,1]$.
2. Vérifions que f admet un unique point fixe dans $[0,1]$.
   ⋆ La fonction f vérifie bien : $f:[0,1]\to[0,1]$ et on vient de montrer qu'elle est continue sur $[0,1]$. Ainsi elle vérifie les hypothèses de la première question et ainsi on a bien l'existence d'un point fixe dans $[0,1]$.
   ⋆ Comme il est impossible d'avoir une hypothèse de croissance ou de décroissance pour f, on ne va pas pouvoir appliquer le théorème de la bijection. Ainsi, pour obtenir l'unicité du point fixe, on suppose par l'absurde qu'il existe deux points fixes $(c,d)\in[0,1]^2$ de f différents. Ainsi, on a : $|f(c)-f(d)|\leq k|c-d| \Leftrightarrow |c-d|\leq k|c-d|$. Or $0<k<1$ et ainsi, on a : $|c-d|<|c-d|$: absurde. Ainsi $c=d$ et f admet bien un unique point fixe.
3. (a) • On montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: c_n est bien définie et $c_n\in[0,1]$.

- Initialisation : pour $n=0$: par définition de la suite, on sait que c_0 existe bien et que $c_0 \in [0,1]$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose la propriété vraie au rang n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait donc que c_n existe et que $c_n \in [0,1]$.
  - $\star$ Comme $\mathcal{D}_f = [0,1]$ et que $c_n \in [0,1]$, on a : $c_n \in \mathcal{D}_f$. Ainsi $f(c_n)$ existe bien à savoir c_{n+1}.
  - $\star$ De plus, comme on sait que $f : [0,1] \to [0,1]$ et que $c_n \in [0,1]$, on obtient alors que : $f(c_n) \in [0,1]$, à savoir $c_{n+1} \in [0,1]$.

  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe bien et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $c_n \in [0,1]$.

(b)
- On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $|c_n - c| \leq k^n |c_0 - c|$.
- Initialisation : pour $n=0$: d'un côté, on a : $|c_0 - c|$ et de l'autre côté, on a : $k^0|c_0 - c| = |c_0 - c|$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose la propriété vraie au rang n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après la définition de la fonction f, on sait que : $|f(c_n) - f(c)| \leq k|c_n - c| \Leftrightarrow |c_{n+1} - c| \leq k|c_n - c|$ car c est le point fixe de f. Puis par hypothèse de récurrence, on sait aussi que $|c_n - c| \leq k^n|c_0 - c|$. Ainsi comme $k > 0$, on a : $k|c_n - c| \leq k^{n+1}|c_0 - c|$. Puis : $|c_{n+1} - c| \leq k^{n+1}|c_0 - c|$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|c_n - c| \leq k^n|c_0 - c|$.

(c) On peut alors utiliser le corollaire du théorème des gendarmes et on obtient que :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ |c_n - c| \leq k^n|c_0 - c|$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n|c_0 - c| = 0$ car $-1 < k < 1$.

Ainsi d'après le corollaire du théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$.

II. 21 Etude de $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. (Pb)

Exercice 36. Le but de ce problème est d'étudier la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. Etude globale :
   (a) Justifier que g est bien définie sur $\mathcal{D}_g =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   (b) Montrer que g est positive sur $\mathcal{D}_g$.
   (c) Justifier que g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et exprimer sa dérivée en tout point de $\mathcal{D}_g$.
   (d) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_g$.
   (e) Etudier les variations de g sur $\mathcal{D}_g$. (les limites aux bornes ne sont pas demandées pour cette question)
2. Etude au voisinage de 0

(a) Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[\quad \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$$

On fera très attention aux signes dans les inégalités.

(b) En déduire que g se prolonge par continuité en 0 et préciser la valeur de ce prolongement. Par la suite, on note encore g la fonction continue, prolongée en 0

(c) Montrer que g est dérivable à droite en 0 et préciser $g'(0)$.

3. Etude au voisinage de 1.

(a) A l'aide du théorème des accroissements finis appliquer à $h(t) = \ln(t) - t$ montrer que pour tout $t \in]0,1[$:

$$0 \leq \frac{\ln(t) - t + 1}{t-1} \leq \frac{1-t}{t}$$

(b) En déduire que pour tout $t \in]0,1[$:

$$\left|\frac{\ln(t) - t + 1}{t-1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$

(c) Montrer de manière analogue que pour tout $t > 1$ on a

$$\left|\frac{\ln(t) - t + 1}{t-1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$

(d) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$

$$\left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right| \leq 2$$

(e) Conclure que g est prolongeable par continuité en 1.

4. Etude au voisinage de $+\infty$.

(a) Montrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x)$$

(b) En déduire la limite de g en $+\infty$.

Correction 40.

1. Etude globale

(a) On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. Cette fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(x)$ soit défini, c'est-à-dire $x > 0$ et tel que $\ln(x) \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$. On a donc $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$. La fonction f est continue sur son ensemble de définition comme quotient de fonction usuelle, elle admet donc une primitive sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.[6] Notons F_1 une primitive sur $]0,1[$. Pour tout $x \in]0,1[$, on a $x^2 \in]0,1[$ et ainsi $g(x) = F_1(x^2) - F_1(x)$ est bien définie sur $]0,1[$. De la même façon, en notant F_2 une primitive sur $]1,+\infty[$. Pour tout $x \in]1,\infty[$, on a $x^2 \in]1,\infty[$ et ainsi $g(x) = F_2(x^2) - F_2(x)$ est bien définie sur $]1,\infty[$.

6. Il faut faire attention ici que l'intervalle définie par les bornes de l'intégrale ne contiennent pas des points où f n'est pas définie.

(b) Nous reprenons les notations de la question 1. Pour tout $x \in]0,1[$, $x^2 < x$ ainsi $g(x) = -\int_{x^2}^{x} f(t)dt$, où les bornes d'intégration sont ordonnées dans le sens croissant. Maintenant pour $x \in]0,1[$, $[x^2, x] \subset]0,1[$ or pour $t \in]0,1[$, $f(t) < 0$. Ainsi $g(x) > 0$ sur $]0,1[$.
Pour $x > 1$, on a $x^2 > x$ et les bornes sont déjà bien ordonées. De plus $\frac{1}{\ln(t)} > 0$ pour tout $t > 1$ et on a bien $g(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$.

(c) Nous reprenons les notations de la question 1. Par définition on a $g(x) = F_1(x^2) - F_1(x)$ pour $0 < x < 1$ et $g(x) = F_2(x^2) - F_2(x)$ pour $x > 1$. Or par définition d'une primitive les fonctions F_1, F_2 sont dérivables sur leur ensemble de définition. Donc g est dérivable en tant que composée et somme de fonctions dérivables.
On a pour tout $x < 1$: $g'(x) = 2xF_1'(x^2) - F_1'(x)$. Or $F_1'(x) = f(x)$ et donc $g'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)}$, en simplifiant et factorisant on obtient :

$$g'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Les calculs sont identiques sur $]1, +\infty[$.

(d) La fonction g' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_g$ comme quotient de fonction $\mathcal{C}^\infty$. Ainisi g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_g$.

(e) On a vu que pour tout $x \in \mathcal{D}_g$ on a

$$g'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

On obtient le tableau de signe/variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

2. Etude au voisinage de 0.

(a) Soit $x \in]0,1[$, alors comme on l'a vu précédemment $g(x) = -\int_{x^2}^{x} f(t)dt$ où les bornes de l'intégrales sont bien ordonnées. Par ailleurs pour tout $t \in [x^2, x]$ on a $\ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$ par croissance du logarithme. Et donc

$$\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}$$

par décroissance de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur R_-^*
Par croissance de l'intégrale on obtient alors :

$$\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x^2)} dt$$

Remarquons que le membre le plus à gauche et le plus à droite sont des fonctions constantes vis-à-vis de t. Ainsi leur intégrale ce calcule immédiatement, on obtient

$$(x-x^2)\frac{1}{\ln(x)} \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}dt \leq (x-x^2)\frac{1}{\ln(x^2)}$$

Le terme du milieu correspond à $-g(x)$ et on a donc après multiplication par -1 qui inverse le sens des inégalités ont obtient :

$$(x^2-x)\frac{1}{\ln(x^2)} \leq g(x) \leq (x^2-x)\frac{1}{\ln(x)}$$

c'est-à-dire en factorisant :

$$\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$$

(b) Par calcul usuel sur les limites : $\lim_{x\to 0} \frac{x)}{\ln(x)} = 0$ ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{\ln(x)} = 0$$

Le théorème des gendarmes assure que g admet une limite en 0 et

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

g est donc prolongeable par continuité en posant $g(0) = 0$

(c) On calcule le taux d'accroissement en 0 : $\tau_{g,x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{g(x)}{x}$ Ainsi pour tout $x \in]0,1[$:

$$\frac{x-1}{2\ln(x)} \leq \tau_{g,x} \leq \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Comme $\lim_{x\to 0} \frac{1)}{\ln(x)} = 0$, de nouveau d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim_{x\to 0} \tau_{g,x} = 0$ et ainsi g est dérivable en 0 et on a $g'(0) = 0$.

3. Au voisinage de 1.

(a) On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $h(x) = \ln(x) - x$ sur l'intervalle $[t,1]$ (ou $[1,t]$ selon l'ordre de 1 par rapport à x). h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en particulier sur $[t,1]$. h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en particulier sur $]t,1[$. Ainsi, il existe $c \in]t,1[$ tel que

$$\frac{h(t)-h(1)}{t-1} = h'(c)$$

Pour tout $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$, on a donc

$$\frac{\ln(t)-t+1}{t-1} = \frac{1-c}{c}$$

Pour tout $t < 1$ et tout $c \in]t,1[$ on a $t < c < 1$ donc $1-t > 1-c > 0$ et $\frac{1}{t} > \frac{1}{c} > 1$ d'où

$$\frac{1-t}{t} > \frac{1-c}{c} > 0$$

En particulier on a

$$0 \leq \frac{\ln(t)-t+1}{t-1} \leq \frac{1-t}{t}$$

(b) Comme pour tout $t \in]0,1[$, $-\frac{1-t}{t} < 0$ on a donc

$$-\frac{1-t}{t} \leq \frac{\ln(t)-t+1}{t-1} \leq \frac{1-t}{t}$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{\ln(t)-t+1}{t-1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$

(c) Le début du raisonement est similaire et on obtient qu'il existe $c \in [1,t]$ tel que

$$\frac{\ln(t)-t+1}{t-1} = \frac{1-c}{c}$$

Remarquons que $a : t \mapsto \frac{1-t}{t}$ est une fonction décroissante sur $]1,+\infty[$ donc pour tout $t > 1$ et tout $c \in]1,t[$ on a

$$a(t) \leq a(c) \leq a(c)$$

ainsi :

$$\frac{1-t}{t} \leq \frac{1-c}{c} \leq 0 \leq -\frac{1-t}{t}$$

où la dernière inégalité provient du signe de $\frac{1-t}{t}$ sur $]1,+\infty[$. On a donc :

$$\left|\frac{\ln(t)-t+1}{t-1}\right| \leq -\frac{1-t}{t} = \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$

(d)

$$\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} = \frac{t-1-\ln(t)}{\ln(t)(t-1)}$$

donc

$$\left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right| = \frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)}\right|$$

et donc

$$\left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right| \leq \frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right|.$$

Or $\lim\limits_{t\to 1} \frac{|1-t|}{|\ln(t)|} = 1$ grâce à l'équivalent $\ln(t+1) \sim_0 t$ Donc $\lim\limits_{t\to 1} \frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right| = 1$ Ainsi d'après la définition de la limite en 1, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$ on a

$$\left|\frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right| - 1\right| \leq \epsilon$$

En particulier, en prenant $\epsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$ on a $\left|\frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right| - 1\right| \leq 1$ Ce qui donne notamment :

$$\frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right| - 1 \leq 1$$

et enfin

$$\frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right| \leq 2$$

Avec l'inégalité obtenue précédemment on obtient bien qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$:

$$\left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right| \leq 2$$

(e) Regardons donc $u(x) = g(x) - \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt$ on obtient

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}dt \quad \text{par linéarité, d'où} \\
|u(x)| &= \left|\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}dt\right| \\
|u(x)| &\leq \int_{[x,x^2]} \left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right| dt \quad Enutilisantl'ingalittriangulaire
\end{aligned}$$

Remarquons ici que $\int_{[x,x^2]}$ signifie que l'on intégre sur $[x, x^2]$ ou $[x^2, x]$ selon l'ordre des bornes. On peut sinon faire une disjonction de cas, avec $x > 1$ ou $x < 1$.
On a donc pour $x, x^2 \in [1-\eta, 1+\eta]$

$$|u(x)| \leq \int_{[x,x^2]} 2dt = 2|x^2 - x|$$

Or quand $x \to 1$, on a bien $x, x^2 \in [1-\eta, 1+\eta]$ donc l'inégalité est vraie pour x suffisament proche de 1. Or $\lim_{x\to 1} |x^2 - x| = 0$ donc le théorème des gendarmes assure que

$$\lim_{x\to 1} |u(x)| = 0$$

Or $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt = [\ln(t)]_x^{x^2} = \ln(x^2) - \ln(x) = \ln(2)$ Ce qui donne avec la limite de $|u(x)|$, $\lim_{x\to 1} |g(x) - \ln(2)| = 0$ c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \ln(2)$$

Ainsi g est prolongeable par continuité en 1 en posant $g(1) = \ln(2)$

4. Au voisinage de $+\infty$.
   (a) On suit le même raisonnement que pour la question 2(a) : pour $x > 1$ et pour $t \in [x, x^2]$ on a

   $$\frac{1}{\ln(x^2)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)}$$

   par décroissance de la fonction f. Par positivité de l'intégrale on a donc :

   $$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)}dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt$$

   et ainsi $\frac{x^2-x}{\ln(x^2)} \leq g(x)$ d'où

   $$\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x)$$

   (b) Par croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} = +\infty$ et donc d'après le théorème de comparaison on a :

   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

II. 22 Non interversion limite intégrale

Exercice 37. Soit $x \in [0,1]$

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2}$.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
4. Que doit-on retenir de cet exercice ?

Correction 41.

1. Par croissance comparée, on a $\lim_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2} = 0$.
2. $$\begin{aligned} I_n &= \frac{-1}{2}\int_0^1 -2nxe^{-nx^2}\,dx \\ &= \frac{-1}{2}[e^{-nx^2}]_0^1 \\ &= \frac{-1}{2}(e^{-n} - e^0) \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \end{aligned}$$
3. On a donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}$.
4. On NE peut PAS intervertir limite et intégrale ! !

II. 23 Résolution $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor\frac{x}{2}\rfloor$

Exercice 38. On cherche à résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue réelle x :

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$$

1. Donner le domaine de définition de l'équation (E).
2. Ecrire un programme python qui demande à l'utilisateur un flottant x et qui renvoie True si le réel ets solution de l'équation (E) et False sinon.
3. Montrer que toute solution x de (E) est solution du système (S) suivant :
$$\begin{cases} \sqrt{x} & < & \frac{x}{2}+1 \\ \frac{x}{2}-1 & < & \sqrt{x} \end{cases}$$
4. Résoudre le système (S).
5. Soit $\alpha = 2(2+\sqrt{3})$ Calculer la partie entière de α.
6. Pour tout $k \in [\![0,7]\!]$ déterminer si les réels de l'intervalle $[k, k+1[$ sont solutions de (E).
7. Conclure.

Correction 42.

1. (E) est bien défini pour $x \geq 0$

2.
```
x=float(input('donnez une valeur de x' ))
if floor(sqrt(x))==floor(x/2):
        print(True)
else:
        print(false)
```

3. Rappelons l'inégalité vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

Soit x une solution de (E) on a d'une part :

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \leq \frac{x}{2}$$

et

$$\sqrt{x} - 1 < \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

Donc

$$\boxed{\sqrt{x} < \tfrac{x}{2} + 1}$$

D'autre part on a :

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{x}$$

et

$$\frac{x}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

donc

$$\boxed{\tfrac{x}{2} - 1 < \sqrt{x}.}$$

4. — Résolvons la première inégalité : $\sqrt{x} < \frac{x}{2} + 1$

   - Cas 1 $\frac{x}{2} + 1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -2$. Rappelons que l'ensemble de définion de l'équation est $x \geq 0$, on se concentre donc sur les réels positifs.
     On peut alors mettre l'équation au carré qui devient

     $$x < \frac{x^2}{4} + x + 1.$$

     D'où $x^2 > -4$ ce qui est toujours vrai.

     $$\boxed{\text{Les solutions de cette première inéquation sont } x \geq 0}$$

   - Cas 2 $\frac{x}{2} + 1 < 0$. Ce cas ne se produit pas car $x \geq 0$ pour que l'équation soit bien définie.

   — Résolvons la seconde inégalité : $\frac{x}{2} - 1 < \sqrt{x}$

   - Cas 1 $\frac{x}{2} - 1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 2$.
     On peut alors mettre l'équation au carré qui devient

     $$\frac{x^2}{4} - x + 1 < x$$

D'où l'on obtient $\frac{x^2}{4} - 2x + 1 < 0$. Le discrimant vaut $\Delta = 4 - 1 = 3 > 0$ et on obtient 2 racines
$$r_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$$
soit en simplifiant
$$r_1 = 2(2+\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad r_2 = 2(2-\sqrt{3}).$$
Le polynôme est strictement négatif entre les racines c'est-à-dire sur $]2(2-\sqrt{3}), 2(2+\sqrt{3})[$.
On doit maintenant prendre l'intersection avec l'ensemble de définition : $x \geq 0$ et l'hypothèse $x \geq 2$ On obtient
$$x \in [2, 2(2+\sqrt{3})[$$

- Cas $2\ \frac{x}{2} - 1 < 0$ c'est-à-dire $x < 2$. Ici tous les réels sont solutions car la racine est toujours positive.
  On obtient donc $x \in [0, 2[$
  En conclusion, les solutions de cette deuxième équation sont
$$\boxed{[0, 2(2+\sqrt{3})[}$$

Les solutions du système correspondent à l'intersection des deux enembles trouvés précédemment : c'est donc
$$\boxed{[0, 2(2+\sqrt{3})[}$$

5. $1 < 3 < 4$ donc $1 < \sqrt{3} < 2$ et donc $3 < 2+\sqrt{3} < 4$ et finalement $\alpha \in]6, 8[$. Ainsi $\lfloor \alpha \rfloor$ vaut 6 ou 7.
   Vérifions que $\alpha > 7$, pour cela regardons l'inégalité
$$\begin{array}{rrl} & 2(2+\sqrt{3}) & > 7 \\ \iff & (2+\sqrt{3}) & > \frac{7}{2} \\ \iff & \sqrt{3} & > \frac{3}{2} \\ \iff & 3 & > \frac{9}{4} \\ \iff & 12 & > 9 \end{array}$$
   La dernière inégalité étant vraie, comme nous avons procédé par équivalence, on a bien $\alpha > 7$. Ainsi
$$\boxed{\lfloor \alpha \rfloor = 7}$$

6. — Cas $k = 0$ Soit $x \in [0, 1[$. On a alors $0 \leq \sqrt{x} < 1$ et donc $\lfloor x \rfloor = 0$ et $0 \leq \frac{x}{2} < \frac{1}{2} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0$. D'où
$$\boxed{\forall x \in [0, 1[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$
   — Cas $k = 1$ Soit $x \in [1, 2[$. On a alors $1 \leq \sqrt{x} < \sqrt{2} < 2$ et donc $\lfloor x \rfloor = 1$ et $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0$. D'où
$$\boxed{\forall x \in [1, 2[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor \neq \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

— <u>Cas $k=2$</u> Soit $x \in [2,3[$. On a alors $1 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{x} < \sqrt{3} < 2$ et donc $\lfloor x \rfloor = 1$ et $1 \leq \frac{x}{2} < \frac{3}{2} < 2$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [2,3[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

— <u>Cas $k=3$</u>
Soit $x \in [3,4[$. On a alors $1 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{x} < \sqrt{4} = 2$ et donc $\lfloor x \rfloor = 1$ et $1 \leq \frac{3}{2} \leq \frac{x}{2} < 2$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [3,4[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

— <u>Cas $k=4$</u> Soit $x \in [4,5[$. On a alors $2 \leq \sqrt{x} < \sqrt{5} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $2 \leq \frac{x}{2} < \frac{5}{2} < 3$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 2$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [4,5[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

— <u>Cas $k=5$</u> Soit $x \in [5,6[$. On a alors $2 \leq \sqrt{x} < \sqrt{5} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $2 \leq \frac{x}{2} < \frac{5}{2} < 3$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 2$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [5,6[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

— <u>Cas $k=6$</u> Soit $x \in [6,7[$. On a alors $2 \leq \sqrt{6} \leq \sqrt{x} < \sqrt{7} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $3 \leq \frac{x}{2} < \frac{7}{2} < 4$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 3$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [6,7[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor \neq \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

— <u>Cas $k=7$</u> Soit $x \in [7,8[$. On a alors $2 \leq \sqrt{7} \leq \sqrt{x} < \sqrt{8} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $3 \leq \frac{7}{2} \leq \frac{x}{2} < \frac{8}{2} = 4$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 3$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [7,8[\quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor \neq \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor}$$

7. On a vu à la question 4 que si x était solution de $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ alors $x \in [0, \alpha] \subset [0,8[$.
Réciproquement, la question précédente permet de voir que x est solution si $x \in [0,1[\cup[2,3[\cup[3,4[\cup[4,5[\cup[5,6[=$ $[0,1[\cup[2,6[$ et n'était pas solution pour $x \in [1,2[\cup[6,7[\cup[7,8[$.

$$\boxed{\mathcal{S} = [0,1[\cup[2,6[}$$

II. 24 Etude $x\exp(\sin^2(x))$. [d'après Godillon 16-17]

Exercice 39. On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto x\exp(\sin^2(x)).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
2. Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers un ensemble I à déterminer.
3. Justifier que la bijection réciproque f^{-1} de $f_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
4. Justifier l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_{x\to 0}(x^5)$.
5. En composant les développements limités de f^{-1} et f, déterminer les valeurs des constantes a, b et c.

6. Que peut-on en déduire pour la tangente à la courbe représentatitve de f^{-1} au voisinage de 0 ?

Correction 43.

1. Tout calcul fait on obtient
$$f(x) =_0 x + x^3 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^5)$$
2. f est définie et dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a
$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(\sin^2(x)) + x2\cos(x)\sin(x)\exp(\sin^2(x) \\ &= (1 + 2x\cos(x)\sin(x))\exp(\sin^2(x)) \\ &= (1 + x\sin(2x))\exp(\sin^2(x)) \end{aligned}$$
Le signe de f' est égal à celui de $(1 + x\sin(2x)$ et on a : Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$: $x \geq 0$ et $\sin(2x) \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$. et pour $x \in [-)\frac{\pi}{2}, 0]$ on a $x \leq 0$ et $\sin(2x) \leq 0$ donc $f'(x) \geq 0$.
Au final f est strictement croissante sur l'intervalle considéré. Elle est de plus continue, le théor§me de la bijection asssure que f réalise une bijection de $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur
$$I = \left]f(\frac{-\pi}{2}), f(\frac{\pi}{2})\right[= \left]\frac{-\pi}{2}e, \frac{\pi}{2}e\right[$$
3. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur I et
4. D'après la question précédente et la formule de Taylor-Young, f admet un développement limité à tout ordre, donc en particulier à l'ordre 5. Comme f est une fonction impaire, il en est de même pour f^{-1} et aussi pour la partie régulière de son DL. Ainsi les termes pairs du DL de f^{-1} sont nuls et il l'existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$$
on a
$$a = f^{-1'}(x), \quad b = \frac{f^{-1^{(3)}}(x)}{3!} \quad c = \frac{f^{-1^{(5)}}(x)}{5!}$$
5. On a d'une part $f^{-1} \circ f(x) = x$ et d'autre part
$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f(x) &= a(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5) + b(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5)^3 + c(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5)^5 + o(x^5) \\ &= a(x + x^3 + \frac{1}{6}x^5) + b(x^3 + 3x^5) + cx^5 + o(x^5) \\ &= ax + (a + b)x^3 + (\frac{a}{6} + 3b + c)x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$
Ce qui donne par identification $a = 1, a + b = 0, (\frac{a}{6} + 3b + c) = 0$ On trouve $(a, b, c) = (1, -1, \frac{17}{6},$ d'où
$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{17}{6}x^5 + o(x^5)$$
6. Par conséquent la tangente à la courve représentative de f^{-1} en 0 admet pour équation $y = x$ et au voisinage à gauche la courbe représentative de f est au dessus de sa tangente et au voisinage à droite la courbe représentative de f est en dessous de sa tangente et

II. 25 Inégalités / récurrence

Exercice 40. 1. Comparer (avec une inégalité large) pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres n et 3^n. (Prouver cette inégalité)

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

   (a) Enoncer l'inégalité triangulaire.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 4^n$.

Correction 44.

1. On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n) : n \leq 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $0 \leq 3^0 = 1$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang 0.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a par hypothèse de récurrence :
$$n + 1 \leq 3^n + 1$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq 2 \times 3^n$ donc
$$3^n + 1 \leq 3 \times 3^n = 3^{n+1}$$
La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n + 1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:
$$\boxed{\mathcal{P}(n) : n \leq 3^n}$$

2. (a) Cf cours $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$:
$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

   (b) On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n) : |u_n| \leq 4^n$ et $|u_{n+1}| \leq 4^{n+1}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $|u_0| = 1 \leq 4^0 = 1$ et $|u_1| = 3 \leq 4^1$. La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$: « $|u_{n+1}| \leq 4^{n+1}$ et $|u_{n+2}| \leq 4^{n+2}$ » est vraie.

$u_{n+1} \leq 4^{n+1}$ par hypothèse de récurrence. Il suffit donc de montrer que $|u_{n+2}| \leq 4^{n+2}$. On a

$$\begin{aligned}
|u_{n+2}| &= |3u_{n+1} - 2u_n| \quad \text{par définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= |3u_{n+1}| + |2u_n| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&\leq 3 * 4^{n+1} + 2 * 4^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&\leq 4^n(3 * 4 + 2) \\
&\leq 4^n(14) \\
&\leq 4^n(4^2) \\
&\leq 4^{n+2}
\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{P}(n) : |u_n| \leq 4^n}$$

II. 26 Fibonacci

Exercice 41. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
2. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
3. (a) On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.
   (b) Montrer que l'expression explicite de F_n st donnée par $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Correction 45.

1. Nous allons montrer ces propriétés par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la prorpriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) := \text{« } \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1 \text{ ».}$$

Montrons $\mathcal{P}(0)$. Vérifions la première égalité :

$$\sum_{k=0}^{0} F_{2k+1} = F_{0+1} = F_1 = 1$$

et

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1$$

Donc la première égalité est vraie au rang 0.
Vérifions la sedonde égalité :

$$\sum_{k=0}^{0} F_{2k} = F_0 = 0$$

et

$$F_{2*0+1} - 1 = F_1 - 1 = 0$$

Donc la seconde égalité est vraie au rang 0. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Considérons la première égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} + F_{2n+3}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} &= F_{2n+2} + F_{2n+3}. \\ &= F_{2n+4}. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= F_{2(n+1)+2}.\end{aligned}$$

La première égalité est donc héréditaire.
Considérons la sedonde égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k} + F_{2n+2}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} &= F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2}. \\ &= F_{2n+3} - 1. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= F_{2(n+1)+1} - 1.\end{aligned}$$

La seconde égalité est donc héréditaire. Finalement la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1}$$

2. On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} F_k^2 = F_0^2 = 0$ et $F_0 F_1 = 0$. La propriété est donc vraie au rang 0.

   Hérédité :
   Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n.
   On a $\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2$ Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1} F_{n+2} \quad \text{par définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

   La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n + 1$.
   Conclusion :
   Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}}$$

3. Le polynôme du second degrès $X^2 - X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$ les racines sont donc $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. En particulier, ces nombres vérifient : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ et $\psi^2 - \psi - 1 = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1 \text{ et } \psi^2 = \psi + 1.}$$

4. Notons :$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$ On a

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \psi^0) = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \psi^1) = 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi^2) - \psi^n(\psi^2)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi+1) - \psi^n(\psi+1)) \quad \text{D'après la question précédente} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} + \varphi^n - \psi^{n+1} - \psi^n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \psi^n) \\
&= u_{n+1} + u_n
\end{aligned}$$

Donc u_n satisfait aussi la relation de récrurrence. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.

5. D'après la question précédente on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \varphi \frac{\varphi^n\left(1 - \frac{\psi^{n+1}}{\varphi^{n+1}}\right)}{\varphi^n\left(1 - \frac{\psi^n}{\varphi^n}\right)} \\
&= \varphi \frac{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n}
\end{aligned}$$

Remarquons que $|\varphi| > |\psi|$ en particulier $|\frac{\psi}{\varphi}| < 1$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1} = 0.$$

Finalemetn

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.}$$

II. 27 Equation à paramètre

Exercice 42. On note $\Delta(m) = m^2 - 8m + 12$.

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue m :

$$\Delta(m) > 0 \qquad (I_1)$$

2. On note $r_+(m) = \frac{m+\sqrt{\Delta(m)}}{4}$ et $r_-(m) = \frac{m-\sqrt{\Delta(m)}}{4}$.

3. Résoudre
$$r_+(m) \geq 1 \quad \text{et} \quad r_-(m) \geq 1.$$
4. Résoudre l'inéquation d'inconnue y et de paramétre $m \in \mathbb{R}$
$$\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} \geq m \tag{I_2}$$

Correction 46.

1. Le discriminant réduit de $\Delta(m)$ vaut $\delta(m) = 16 - 12 = 4$. Les racines de $\delta(m)$ valent donc $m_1 = 4 - 2 = 2$ et $m_2 = 4 + 2 = 6$. Donc $\Delta(m) = (m-2)(m-6)$ et les solutions de $\Delta(m) > 0$ sont
$$\mathcal{S} =]-\infty, 2[\cup]6, +\infty[.$$
2. Les expressions $r_+(m)$ et $r_-(m)$ sont définies pour $\Delta(m) \geq 0$ soit $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$.
Résolvons $r_+(m) \geq 1$ pour $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$.
$$\begin{aligned} & \frac{m + \sqrt{\Delta(m)}}{4} \geq 1 \\ \iff \quad & m + \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 \\ \iff \quad & \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 - m \end{aligned}$$
Si $\underline{(4-m) < 0}$, m est solution car $\sqrt{\Delta(m)} \geq 0$.

Si $\underline{(4-m) \geq 0}$, l'équation $r_+(m) \geq 1$ est équivalente à
$$\begin{aligned} & \Delta(m) \geq (4-m)^2 \\ \iff \quad & m^2 - 8m + 12 \geq m^2 - 8m + 16 \\ \iff \quad & 0 \geq 4 \end{aligned}$$
Donc pour tout $m \leq 4$, m n'est pas solution.
Finalement, les solutions de $r_+(m) \geq 1$ sont
$$\mathcal{S}_+ = [6, +\infty[.$$
Résolvons $r_-(m) \geq 1$ pour $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$.
$$\begin{aligned} & \frac{m - \sqrt{\Delta(m)}}{4} \geq 1 \\ \iff \quad & m - \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 \\ \iff \quad & m - 4 \geq \sqrt{\Delta(m)} \end{aligned}$$
Si $\underline{(m-4) < 0}$, m n'est pas solution car $\sqrt{\Delta(m)} \geq 0$.

Si $\underline{(m-4) \geq 0}$, l'équation $r_-(m) \geq 1$ est équivalente à

$$\begin{aligned} & (m-4)^2 \geq \Delta(m) \\ \iff \quad & m^2 - 8m + 16 \geq m^2 - 8m + 12 \\ \iff \quad & 4 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $m \geq 4$, m est solution.
Finalement, les solutions de $r_-(m) \geq 1$ sont

$$\mathcal{S}_+ = [6, +\infty[.$$

3. L'ensemble de définition de $\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1}$ est $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On va résoudre

$$\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} \geq m \qquad (I_4(m))$$

en fonction de $m \in \mathbb{R}$.

Pour tout $y \in D_1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} - \frac{m(y-1)}{y-1} &\geq 0 \\ \frac{2y^2 - \frac{3}{2} - m(y-1)}{y-1} &\geq 0 \\ \frac{2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)}{y-1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $2y^2 - my + (\frac{3}{2} + m)$ vaut

$$m^2 - 4(2)(-\frac{3}{2} + m) = m^2 - 8m + 12.$$

On reconnait l'expression de $\Delta(m)$.

(a) D'après la question 1, $\Delta(m) > 0$ pour $m \in]-\infty, 2[\cup]6, +\infty[$. Sur cet ensemble le polynôme $2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)$ admet deux racines, $r_-(m)$ et $r_+(m)$. Donc

$$2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m) = 2(y - r_-(m))(y - r_+(m)).$$

Pour $m \geq 6$, d'après la question 2, on a :

$$r_+(m) \geq r_-(m) \geq 1$$

On note $q(y) = 2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)$

y	$-\infty$		1		$r_-(m)$		$r_+(m)$
$q(y)$		$+$		$+$	0	$-$	0
$y-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{q(y)}{y-1}$		$-$		$+$	0	$-$	0

Les solutions de l'équation $I_4(m)$ pour $m \geq 6$ sont

$$\boxed{S =]1, r_-(m)] \cup [r_+(m), +\infty[}$$

Pour $m \leq 2$, d'après la question 2, on a :

$$1 \geq r_+(m) \geq r_-(m)$$

y	$-\infty$		$r_-(m)$		$r_+(m)$		1		$+\infty$
$q(y)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$y-1$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$\frac{q(y)}{y-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	

Les solutions de l'équation $I_4(m)$ pour $m \leq 2$ sont

$$\boxed{S = [r_-(m), r_+(m)] \cup]1, +\infty[.}$$

4. Pour $\Delta(m) = 0$, c'est-à-dire $m \in 2, 6$. Pour $m = 2$, on a $r_+(2) = r_-(2) = \frac{1}{2}$ et

$$2y^2 - 2y + (-\frac{3}{2} + 2) = 2(y - \frac{1}{2})^2$$

et les solutions de I_2 sont donc

$$\boxed{S = \{\tfrac{1}{2}\} \cup]1, +\infty[.}$$

Pour $m = 6$, on a $r_+(6) = r_-(6) = \frac{3}{2}$ et

$$2y^2 - 6y + (-\frac{3}{2} + 6) = 2(y - \frac{3}{2})^2$$

et les solutions de I_2 sont donc

$$\boxed{S =]1, +\infty[.}$$

5. Pour $\Delta(m) < 0$, c'est-à-dire $m \in]2, 6[$.
Le polynome q n'a pas de racine réelle. Il est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$. Les solutions de $I_4(m)$ sont donc

$$\boxed{S =]1, +\infty[.}$$

II. 28 Partie Entière

Exercice 43. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0 \tag{E}$$

1. Déterminer le domaine de définition de E.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
3. Montrer que résoudre (E) revient à résoudre deux inéquations qu'on déterminera.
4. Résoudre les deux équations obtenues à la question précédente.
5. Résoudre (E).

Correction 47.

1. La fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc l'expression $\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor$ pour tout x tel que $5x - 1 \geq 0$.

$$\boxed{\text{L'équation est définie pour } x \geq \tfrac{1}{5}.}$$

2. Cf cours. Par définition, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$ donc

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in \mathbb{R},\ a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a.}$$

3. On a pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor y \rfloor = 0$ si et seulement si $0 \leq y < 1$. Donc, résoudre E revient à résoudre

$$\boxed{\begin{cases} 2x - \sqrt{5x-1} < 1 & (I_1) \\ 2x - \sqrt{5x-1} \geq 0 & (I_2) \end{cases}}$$

4. Résolvons (I_1) :

$$2x - \sqrt{5x-1} < 1 \quad \iff \quad 2x - 1 < \sqrt{5x-1}$$

Si $\underline{2x - 1 < 0 \text{ et } x \geq \frac{1}{5}}$, x est solution de I_1. Remarquons que $2x - 1 < 0$ et $x \geq \frac{1}{5}$ se simplifie en $x \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}[$.
Si $\underline{2x - 1 \geq 0 \text{ et } x \geq \frac{1}{5}}$, (I_1) est équivalente à

$$4x^2 - 4x + 1 < 5x - 1 \quad \iff \quad 4x^2 - 9x + 2 < 0$$

Le discriminant de $4x^2 - 9x + 2$ vaut $\Delta = 81 - 32 = 49$.
Les racines de $4x^2 - 9x + 2$ valent donc

$$r_1 = \frac{9+7}{8} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

.
Donc $4x^2 - 9x + 2 = 4(x-2)(x - \frac{1}{4})$.
Le polynôme $4x^2 - 9x + 2$ est donc strictement négatif sur $U_1 =]\frac{1}{4}, 2[$. Sous la condition ($2x - 1 \geq 0$ et $x \geq \frac{1}{5}$), les solutions de (I_1) sont donc $S = [\frac{1}{2}, 2[$.
En conclusion l'ensemble des solutions de (I_1) est

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, 2\right[= \left[\frac{1}{5}, 2\right[.}$$

5. Résolvons (I_2) :
$$2x - \sqrt{5x-1} \geq 0 \quad \iff \quad 2x \geq \sqrt{5x-1}$$
Si $\underline{2x < 0 \text{ et } x \geq \frac{1}{5}}$, x n'est pas solution de I_2, car $\sqrt{5x-1} \geq 0$.
Si $\underline{2x \geq 0 \text{ et } x \geq \frac{1}{5}}$, (I_2) est équivalente à
$$4x^2 \geq 5x - 1 \quad \iff \quad 4x^2 - 5x + 1 \geq 0$$
Le discrimant de $4x^2 - 5x + 1$ vaut $\Delta = 25 - 16 = 9$.
Les racines de $4x^2 - 5x + 1$ valent donc
$$r_1 = \frac{5+3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}.$$
Donc $4x^2 - 5x + 1 = 4(x-1)(x-\frac{1}{4})$, le polynôme $4x^2 - 5x + 1$ est donc positif sur $U_2 = \left]-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup [1, +\infty[$.
Sous la condition ($2x \geq 0$ et $x \geq \frac{1}{5}$), les solutions de (I_2) sont donc $S = U_2 \cap [\frac{1}{5}, +\infty[= \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \cup [1, +\infty[$
En conclusion l'ensemble des solutions de (I_1) est
$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \cup [1, +\infty[}$$

6. Le réel x est solution de l'équation (E) si et seulement si il est solution de (I_1) et (I_2). C'est-à-dire :
$$x \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$$
L'ensemble des solutions de E est donc :
$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \cup [1, 2[.}$$

II. 29 Equation trigonométrique / changement de variable

Exercice 44. Résoudre l'inéquation d'inconnue x :
$$\frac{\frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} \leq x + \frac{1}{2}$$
Résoudre sur $[0, 2\pi[$:
$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin(x) - \frac{1}{2}} \leq \sin(x) + \frac{1}{2}$$
Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Correction 48. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ l'inéquation est équivalente à
$$\frac{\frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} - \frac{(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} \leq 0$$

D'où

$$\frac{-x^2+\frac{3}{4}}{x-\frac{1}{2}} \leq 0$$

$$\frac{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{x-\frac{1}{2}} \geq 0$$

Les solutions sont

$$\mathcal{S} = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}[\cup[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[.$$

En posant $X = \sin(x)$, x est solution de la seconde inéquation si et seulement si

$$\sin(x) \in \mathcal{S}$$

On résoud donc

$$\sin(x) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}[\cup[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$$

Comme $\sin(x) \leq 1$ ceci équivaut à

$$\sin(x) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}[\cup[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$$

Sur $[0, 2\pi[$ on a donc

$$x \in [0, \frac{\pi}{6}[\cup[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]\cup]\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$$

II. 30 Calcul de la dérivée de arcsin *[Agro 2015]*

Exercice 45.

1. Que vaut $\arcsin(1/2)$ et $\arcsin(-\sqrt{2}/2)$?
2. Tracer le graphe de la fonction arcsin dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Soit $x \in [-1, 1]$, calculer $\sin(\arcsin(x))$?
4. Soit $x \in [-1, 1]$, montrer que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \cos(2n \arcsin(x))$
5. Calculer f_0, f_1 et f_2.
6. (a) Soient a et b deux réels, exprimer $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$ et $\cos(b)$.
   (b) En déduire que pour tout entier n on a :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f_{n+2}(x) + f_n(x) = 2(1-2x^2)f_{n+1}(x).$$

Correction 49.

1. $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ et $\arcsin(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\pi}{4}$
2.
3. Pour $x \in [-1, 1]$ l'équation $\sin(\theta) = x$ admet une unique solution dans $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ notée $\theta = \arcsin(x)$. On a donc

$$\sin(\arcsin(x)) = x.$$

4. On a $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x) = 1 - x^2$ Or cos est positif pour tout $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc
$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

5.
$$f_0(x) = \cos(0 \arcsin(x)) = 1$$
$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos(2 \arcsin(x) \\ &= \cos^2(\arcsin(x)) - \sin^2(\arcsin(x)) \\ &= 1 - x^2 - x^2 \\ &= 1 - 2x^2 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f_2(x) &= \cos(4 \arcsin(x)) \\ &= \cos^2(2 \arcsin(x)) - \sin^2(2 \arcsin(x)) \\ &= (1 - 2x^2)^2 - (2 \sin(\arcsin(x) \cos(\arcsin(x))^2 \\ &= 1 - 4x^2 + 4x^4 - 4(x(\sqrt{1 - x^2})^2 \\ &= 1 - 4x^2 + 4x^4 - 4(x^2(1 - x^2)) \\ &= 1 - 8x^2 + 8x^4 \end{aligned}$$

6. (a) $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$
   (b)
$$f_{n+2}(x) + f_n(x) = \cos(2(n + 2) \arcsin(x)) + \cos(2n \arcsin(x))$$
$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) + f_n(x) &= \cos(2(n + 2) \arcsin(x)) + \cos(2n \arcsin(x)) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2(n + 2) + 2n}{2} \arcsin(x)\right) \cos\left(\frac{2(n + 2) - 2n}{2} \arcsin(x)\right) \\ &= 2 \cos(2(n + 1) \arcsin(x) \cos(2 \arcsin(x)) \\ &= 2f_{n+1}(x)f_1(x) \\ &= 2(1 - 2x^2)f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

II. 31 Somme double max + *info*

Exercice 46. 1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $i \leq n$. Caculer en fonction de i et n :
$$\sum_{j=i+1}^{n} j$$

3. On rappelle que l'on note $\max(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } i \geq j \\ j & \text{sinon.} \end{cases}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \max(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+i^2+n-i}{2}$$

4. En déduire que

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \max(i,j) \left(\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}\right)$$

5. On note

$$S_k = \sum_{i,j \in [\![1,1000]\!]} \max(i^k, j^k).$$

   (a) Rappeler ce que renvoie l'instruction Python `range(a,b)` avec deux entiers $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $a \leq b$.

   (b) Ecrire un script Python qui demande à l'utilsateur la valeur de k, calcul S_k et affiche le résultat.

Correction 50. Pour $n = 0$ on a d'une part $\sum_{k=1}^{0} k^2 = 0$ et $\frac{0*1*(2*0+1)}{6} = 0$ la propriété est vraie au rang 0

Montrons l'hérédité de la formule et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

et donc par hypothèse :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2++7n+6)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(n+1)[(2n+3)(n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

La formule est bien héréditaire elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après le cours : $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} j = \frac{(n+i+1)(n-i)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \max(i,j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \max(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} j \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(n+i+1)(n-i)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{n^2-i^2+n-i}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2+i^2+n-i}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) &= \frac{1}{2}\left(n(n^2+n) + \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n^2(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(6n+(2n+1)-3}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(8n-2)}{6}\right) \\
&= \left(\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}\right)
\end{aligned}$$

`range(a,b)` renvoie la suite d'entiers de a à $b-1$.

```python
k = int(input ('quelle est la valeur de k ? '))
S=0
for i in range(1,1001):  #on fait une boucle for pour obtenir la somme sur i
    for j in range(1,1001):  #et une deuxieme pour la somme sur j
        if i<=j:
            S=S+j**k
        else:
            S=S+i**k
print(S)
```

II. 32 Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k^4$

Exercice 47. 1. Rappeler la valeur de $R_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, développer $(k+1)^5 - k^5$.
3. A l'aide de la somme téléscopique $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 - k^5$ donner la valeur de $R_4 = \sum_{k=0}^{n} k^4$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. (On pourra garder une formule développée, malgré ce que j'ai pu dire en classe...)
4. Soit $x \in \mathbb{N}$, on note $R_x(n) = \sum_{k=0}^{n} k^x$ Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$ et rend la valeur de $R_x(n)$
5. Soit $x \in \mathbb{N}$, on note $R_x(n) = \sum_{k=0}^{n} k^x$. Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$, qui affiche un message d'erreur si x n'est pas un entier positif et rend la valeur de $R_x(n)$ sinon.
6. Montrer que les suites $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.
7. Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre $e > 0$ et qui rend le premier rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_{n_0} - b_{n_0}| \leq e$ et la valeur de a_{n_0}

Correction 51.

1. $R_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$
3. On a d'une part
$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 - k^5 = (n+1)^5$$
et d'autre part
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 - k^5 &= \sum_{k=0}^{n} 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1\\ &= 5R_4 + 10R_3 + 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\end{aligned}$$
Donc
$$R_4 = \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - 10\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\right)$$
On trouve à la fin des calculs
$$R_4 = \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)$$

4.

```python
def R(x,n):
  if x<0 or type(x)!=int: #on teste que x est bien positif et entier
    print('erreur')
  else:
    R=0
    for k in range(n+1): # on fait une boucle for pour obtenir la somme
      R=R+k**x #x est l'exposant, k l'indice de somme
  return(R) #on indente le return au niveau du if...else et pas au
                                    #niveau de la boucle for.
```

5. Regardons la monotonie de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$$

donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$$\begin{aligned}
b_{n+1}-b_n &= a_{n+1}+\frac{1}{n+1}-a_n+\frac{1}{n}\\
&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\\
&=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}\\
&=\frac{-1}{n(n+1)^2}<0
\end{aligned}$$

Donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Enfin $a_n-b_n=\frac{-1}{n}$, et donc $\lim_{n\to+\infty}a_n-b_n=0$.
Ainsi les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

6.

```python
from math import abs
def limite(e):   # fonction qui prend en argument le parametre e
   n=0   #on initialise la valeur de n
   a=1   #on initialise la valeur de a_0
   b=2   #on initialise la valeur de b_0

   while abs(a-b)>e:   #tant que la difference est plus grande que e
      n+=1    #on actualise la valeur de n
      a=a+1/(n**2)     #on actualise la valeur de a_n
      b=a+1/(n)     #on actualise la valeur de b_n
   return(n,a )
```

II. 33 *Formule D'inversion de somme (Pb)*

Exercice 48. Dans cet exercice, on considère une suite quelconque de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k.$$

Partie I : Quelques exemples

1. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1.
2. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \exp(n)$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $(n \geq 1, n \geq k \geq 1)$,
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.
   (c) Calculer la valeur de b_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Partie II : Formule d'inversion

Le but de cette partie est de montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'exprime en fonction de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que pour tout $(k, n, p) \in \mathbb{N}^3$, tel que $k \leq p \leq n$ on a :
$$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}.$$
2. Montrer que, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, tel que $k \leq n$ on a :
$$\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n+1-k}{i} = (-1)^{n-k}.$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n+1}{k} b_k$$
4. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_{n+1} en fonction de b_{n+1} et de $a_0, ..., a_n$.
5. Prouver, par récurrence forte sur n que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} b_k.$$
6. En utilisant le résultat précédent montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k 2^k (-1)^{n-k} = 2n.$$

Correction 52.

Partie I : Quelques exemples

1. Pour $a_n = 1$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Pour $a_n = exp(n)$, $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^k = (1+e^1)^n$.
3. (a)

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

   (b) Comme le premier terme est nul $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}k = \sum_{k=1}^n n\binom{n-1}{k-1}$ Et d'après la question précédente on a donc $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}k = n\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$ Or en faisant un changement de variable on obtient $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$. Donc

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}k = n2^{n-1}$$

   (c) D'après la question 3a) on a $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$. Donc

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

   Ainsi

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

   On fait un changement de variable $k+1=j$ on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{1}{k+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{j}\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - 1\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)\end{aligned}$$

Partie II : Formule d'inversion

1. C'est l'exercice 2 du DM 4.
2.

$$\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n+1-k}{i} = \sum_{i=0}^{n-k+1}(-1)^i\binom{n+1-k}{i} - (-1)^{n-k+1}$$

   Et d'après le BdN :

$$\sum_{i=0}^{n-k+1}(-1)^i\binom{n+1-k}{i} = (1-1)^{n-k} = 0$$

   et

$$-(-1)^{n-k+1} = (-1)^{n-k}$$

   Ce qui donne le résultat.

3. $b_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a_k + a_{n+1}$. Donc

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a_k$$

4. Soit $P(n)$ la propriété : " $\forall p \leq n \, a_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b_p$."

   Montrons $P(0)$: "$\forall j \leq 0 \, a_j = \displaystyle\sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} b_k$." Il suffit de vérifier $a_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} \binom{0}{k} b_k$.
   Et on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} \binom{0}{k} b_k. = b_0$ Par ailleurs, par définition $b_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a_k = a_0$. Ainsi $P(0)$ est vraie.
   <u>Hérédité</u>
   On suppose que P est vraie pour un certain entier naturel n fixé. Montrons $P(n+1)$. Pour cela il suffit de vérifier que

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} b_k$$

   Or on a vu que

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{p} a_p$$

   et en utilisant l'hypothése de récurrence on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{p} a_p &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{p} \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b_k \\
&= \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} b_k \\
&= \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k} \binom{n+1-k}{p-k} (-1)^{p-k} b_k
\end{aligned}$$

   D'après la question II . 1.
   On échange les deux symboles sommes on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k} \binom{n+1-k}{p-k} (-1)^{p-k} b_k &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=k}^{n} \binom{n+1}{k} \binom{n+1-k}{p-k} (-1)^{p-k} b_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k \sum_{p=k}^{n} \binom{n+1-k}{p-k} (-1)^{p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n+1-k}{i} (-1)^{i}
\end{aligned}$$

En faisant le cahngement d'indice $p-k=i$.
On obtient finalement en utilisant la question II. 2.

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p}a_p=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k(-1)^{n-k}$$

On conclut en remarquant que $b_{n+1}=\binom{n+1}{n+1}b_{n+1}(-1)^{n+1-(n+1)}$ et ainsi

$$a_{n+1}=(-1)^{n+1-(n+1)}\binom{n+1}{n+1}b_{n+1}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}b_k=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}b_k$$

5. On a vu dans la partie I que pour $a_n=n$ on a $b_n=n2^{n-1}$. Donc en appliquant le résultat précédent on a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k2^{k-1}(-1)^{n-k}=n$$

Ce qui donne finalement

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k2^{k}(-1)^{n-k}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k2^{k-1}(-1)^{n-k}=2n$$

II. 34 Etude de $I_n=\int_1^e(\ln(x))^n dx$

Exercice 49. On considère pour tout $n\in\mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n=\int_1^e(\ln(x))^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout $x\in]1,e[$ et pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$ on a $(\ln(x))^n-(\ln(x))^{n+1}>0$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer, toujours à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$
3. (a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n\geq 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)I_n\leq e$.
   (c) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n+(I_n+I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Correction 53.

1. Pour tout $x\in]1,e[$, $0<\ln(x)<1$, donc $\ln(x)^n\ln(x)<\ln(x)^n$. On obtient bien

$$\boxed{\ln(x)^n-\ln(x)^{n+1}>0}$$

2. En intégrant, par positivité de l'intégrale on a

$$\int_1^e\ln(x)^n-\ln(x)^{n+1}dx>0$$

$$\boxed{\text{Donc } I_n > I_{n+1} \text{ et la suite est bien décroissante.}}$$

3. vu en cours.
$$\int_1^e \ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx$$
Donc
$$\boxed{\int_1^e \ln(x)dx = e-(e-1) = 1}$$

4. On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = (\ln(x))^{n+1}$. On a $u(x) = x$ et $v'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^n$. Et finalement
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e 1(\ln(x))^{n+1}dx \\ &= [x(\ln(x))^{n+1}]_1^e - \int_1^e x(n+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^n dx \\ &= e-(n+1)I_n \end{aligned}$$

5. Comme $\ln(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, e]$, $\ln(x)^n \geq 0$.
$$\boxed{\text{Par positivité de l'intérgale, } I_n \text{ est positive.}}$$

6. D'après la question 2b, $(n+1)I_n = e - I_{n+1}$ et d'après la question précédente pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$ donc $e - I_{n+1} \leq e$.
$$\boxed{\text{On a bien } (n+1)I_n \leq e.}$$

7. Les question précédentes montre que
$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$
Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes assure que
$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et sa limite vaut } 0.}$$

8. D'après la question 2b, $I_{n+1} = e-(n+1)I_n$ donc
$$(n+1)I_n + I_{n+1} = e$$
et finalement $nI_n + (I_n + I_{n+1}) = e$ Comme $\lim I_n = \lim I_{n+1} = 0$ on obtient
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nI_n = e.}$$

II. 35 Etude de $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \sin(x)}\right)$

Exercice 50. 1. Résoudre $\sin(x) \geq \frac{-1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$

2. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de f définie par

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \sin(x)}\right)$$

3. Rappeler la formule de dérivée d'une composée $(f \circ g)'$.
4. Calculer la dérivée de f sur son ensemble de dérivabililité.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $\frac{\pi}{6}$.
6. On rappelle que la fonction $a\%b$ en Python renvoie le reste de la division de a par b, c'ets à dire l'unique réel r entre $[0, b[$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a = kb + r$. Cette fonction peut prendre des paramètres a, b réels, pas nécessairement entier.
   (a) Ecrire une fonction Python `reste` qui prend en paramètre un réel x et qui retourne son reste modulo 2π.
   (b) Ecrire une fonction python `definition` qui prend en paramètre un réel x et renvoi 1 si $x \in D_f$ et 0 sinon.
   (c) Ecrire une fonction python `f` qui prend en parmètre un réel x, qui renvoie un message d'erreur si $x \notin D_f$ et retourne la valeur de $f(x)$ sinon.

Correction 54.

1. Sur $[0, 2\pi]$ les solutions sont $S_0 = [0, \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{11\pi}{6}, 2\pi]$. Sur $\mathbb{R}$, les solutions sont $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi] \cup [\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$
2. Pour que $f(x)$ soit défini il faut que :
   — $\frac{1}{2} + \sin(x) \geq 0$ (racine défini sur R_+.)
   — $\sqrt{(\frac{1}{2} + \sin(x))} > 0$ (ln définie sur $\mathbb{R}_+^*$.)

   Ces equations donnent

$$D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi[\cup] \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi] = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}] \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi[$$

   La fonction est dérivable sur le même ensemble $D_f = D_{f'}$
3. $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$.
4. Pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2} + \sin(x))$ et donc

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(x)\frac{1}{\frac{1}{2} + \sin(x)} = \frac{\cos(x)}{1 + 2\sin(x)}$$

5. LA fonction est dérivable en $\frac{\pi}{6}$, donc la courbe admet une tangente en ce point. L'équation de la tangente est $y - f(\frac{\pi}{6}) = f'(\frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{6})$ Ce qui donne :

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4}(x - \frac{\pi}{6})$$

6.
```
from math import *
def reste(x):
   r=x%2*pi
   return(r)

def definition1(x):
   r=reste(x)
   if  0<= r<7*pi/6  or  11*pi/6<r:
      return(1)
   else:
      return(0)

def definition2(x): #autre solution
   if  sin(x)<1/2:
      return(1)
   else:
      return(0)

def f(x):
   if definition1(x)==1:
      return(log(sqrt( 1/2 +sin(x)))
   else:
      return('x n est pas dans le domaine de defiition ')
```

II. 36 EDL - concentration de glucose

Exercice 51. En l'abscence d'apport énergétique la concentration en glucose dissout dans le sang dans le temps mesurée en heure $t \mapsto c(t)$ (en $g \cdot L^{-1}$) vérifie l'équation différentielle

$$y' + 0.01y = -0.02$$

La concentration en glucose après un repas est égale à $c_0 = 1,2gL^{-1}$.

Donner les solutions de l'équation différentielle $y' + 0.01y = -0.02$.

Donner l'expression de la concentration en glucose $c(t)$ en utilisant la condition initiale $c(0) = 1.2$

Au bout de combien de temps après un repas la concentration en glucose dans le sang sera inférieure à $0,8gL^{-1}$?

Exprimer le résulat avec un calcul litéral, puis en donner une valeur approchée (on pourra utiliser que $\ln(7/8) \approx -0.13$)

Correction 55.

1. Les solutions de l'équation différentielle homogène sont $\{f : t \mapsto \lambda e^{-0.01t} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ Une solution particulière de l'équaiton est $c_0(t) = -2$
   Les solutions de l'équation différentielle sont donc $S = \{f : t \mapsto \lambda e^{-0.01t} - 2\, | \lambda \in \mathbb{R}\}$
   Après le repas, la concentration est de 1.2 on pose donc $c(0) = 1.2$ et $c(t) = \lambda e^{-0.01t} - 2$. Ce qui donne $\lambda - 2 = 1.2$ d'où $\lambda = 3.2$.
   On cherche à résoudre $3.2e^{-0.01t} - 2 \leq 0.8$. On obtient $e^{-0.01t} \leq \frac{2.8}{3.2}$.
   On a donc $t \geq \frac{-1}{0.01} \ln(\frac{7}{8})$ La valeur approchée de $\frac{-1}{0.01} \ln(\frac{7}{8}) \sim 13$.
   La concentration en glucose sera inférieure à $0.8gL^{-1}$ au bout de $13h$ environ.

II. 37 Etude de $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ (Pb)

Exercice 52. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. Etudiez la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$. (Domaine de définition, limites et variations)
3. Résoudre $f(x) = x$. On note α l'unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $u_1 < \alpha < 2$.
5. On note $I = [1, \alpha]$ et $J = [\alpha, 2]$. Montrer que $f(I) \subset J$ et $f(J) \subset I$.
6. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_n = u_{2n} \quad b_n = u_{2n+1}.$$

   Enfin on note A la fonction définie pour tout x par $A(x) = f \circ f(x)$. Montrer que $a_{n+1} = A(a_n)$. On peut montrer de manière similaire que $b_{n+1} = A(b_n)$, on ne demande pas de le prouver.
7. Soit F une fonction réelle. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ alors $F(\mathcal{E}) \subset F(\mathcal{F})$. En déduire que I est stable par A. De même, on pourrait montrer que J est stable par A, on ne demande pas de le prouver.
8. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $A(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{x+1}$
9. Résoudre $A(x) \geq x$ sur $]0, +\infty[$.
10. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, calculer leur limite.
12. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
13. (a) Ecrire une fonction Python `u` qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n
    (b) Ecrire une fonction Python `limiteu` qui prend en paramètre un reel $\epsilon > 0$ et qui renvoie la valeur de du premier rang $n_0 \geq 0$ tel que $|u_{n_0} - \ell| \leq \epsilon$

Correction 56.

1. $u_1 = \frac{3}{2}$
2. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. f est dérivable sur son ensemble de définition et

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

   On obtient le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

3. $\frac{1}{x}+1=x \Longleftrightarrow x^2-1-x=0$ Dont les solutions sont $\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\}$. L'unique solution dans $\mathbb{R}^+$ est $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
4. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 2 \Longleftrightarrow \sqrt{5} \leq 3 \Longleftrightarrow 5 \leq 9$ qui est vrai.
   $u_1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow 2 \leq \sqrt{5} \Longleftrightarrow 4 \leq 5$ qui est vrai.
5. $f(\alpha)=\alpha$, $f(2)=\frac{3}{2}$. comme f est décroissante sur J on a bien pour tout $x \in J$ $f(2) \leq f(x) \leq f(\alpha)$. Donc
   $$\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \alpha.$$
   Comme $1 \leq \frac{3}{2}$ on a bient $f(J) \subset I$.
   Un argument similaire montre que pour tout $x \in I$ on a :
   $$\alpha=f(\alpha) \leq f(x) \leq f(1)=2$$
   et ainsi $f(I) \subset J$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}$:
   $$A(a_n)=f\circ f(a_n)=f\circ f(u_{2n})=f(u_{2n+1})=u_{2n+2}=a_{n+1}$$
7. On suppose donc que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Soit $y \in F(\mathcal{E})$ c'est à dire qu'il existe $x \in \mathcal{E}$ tel que $f(x)=y$ Comme $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$,on a $x \in \mathcal{F}$, donc $y=f(x) \in \mathcal{F}$. Ainsi en tuilisant la question 5 on obtient :
   $$f\circ f(I) \subset f(J) \subset I$$
8. $A(x)=f(f(x))=f(1+\frac{1}{x})=1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{2x+1}{x+1}$ Donc $A(x)-x=\frac{2x+1}{x+1}-x=\frac{2x+1-x^2-x}{x+1}=\frac{-x^2+x+1}{x+1}$
9. $A(x)-x \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{-x^2+x+1}{x+1}$ dont les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont $S=]0,\alpha[$.
10. $a_0=u_0 \in J$, comme J est stable par A on déduit par récurrrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in J$. De même comme $u_1=v_1 \in I$, et I est stable par A on déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
    $$a_{n+1}-a_n=A(a_n)-a_n$$
    Comme $A(x)-x \leq 0$ sur J et $a_n \in J$, on a bien $a_{n+1}-a_n \leq 0$ donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
    $$b_{n+1}-b_n=A(b_n)-b_n$$
    Comme $A(x)-x \geq 0$ sur I et $b_n \in I$, on a bien $b_{n+1}-b_n \geq 0$ donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et bornées. Elles sont donc convergentes d'après le théorème de la limite monotone. Notons ℓ_a la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ℓ_b la limite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Nous n'avons pas montré que ces suites étaient adjacentes, nous ne pouvons pas directement dire que les limites sont identiques)
    Par unicité de la limite $\lim_{n\to infty} a_{n+1}=\ell_a$. Comme A est continue sur $\mathbb{R}_+$ on a $\lim_{n\to\infty} A(a_n)=A(\ell_a)$. Ainsi ℓ_a vérifie $A(\ell_a)=\ell_a$. on a vu à la quetsion 9 que cette avait pour unique solution $\ell_a=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le même argument montre que $\ell_b=\alpha$.
12. Les deux suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} convergent et ont même limite. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc aussi convergente et a pour limite α.

13.
```python
from math import *
def u(n):
    x=0
    for i in range(n):
        x=1+1/x
    return(x)

def limiteu(epsilon):
    n=0
    l=(1+sqrt(5))/2
    while abs(u(n)-l)>epsilon:
        n=n+1
    return(n)

def limiteu2(epsilon): #autre solution
    n=0
    l=(1+sqrt(5))/2
    u=2
    while abs(u-l)>epsilon:
        n=n+1
        u=u+1/u
    return(n)


def limiteab(epsilon):
    n=0
    while abs(u(2*n)-u(2*n+1))>epsilon:
        n=n+1
    return(n)
```

II. 38 Calcul de limites

Exercice 53. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \ln(x)$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^x-1}{\sin(x)\ln(x^2)}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2-1}$

Correction 57.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\begin{aligned}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \ln(x) &= \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)\\ &= \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \ln(x) = \ln(2).$$

2. $x^x - 1 = e^{x\ln(x)} - 1$ Comme $x\ln(x) \to_0 0$ et $e^u - 1 \sim_0 u$ on obtient : $x^x - 1 \sim_0 x\ln(x)$. Au dénominateur on a $\sin(x)\ln(x^2) = 2\sin(x)\ln(x) \sim_0 2x\ln(x)$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{x^x-1}{\sin(x)\ln(x^2)} = \frac{1}{2}$
3. On fait le changement de variable $y = x-1$. On obtient $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi y}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \sim_0 -\frac{\pi y}{2}$ et $x^2 - 1 = y^2 + 2y = (y(2+y)$. Donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2-1} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{y(2+y)} = -\frac{\pi}{4}$$

4. Version DS $\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1}{x^2-1}$ Le numérateur tend vers -1, le dénominateur tend vers 0. On distingue la limite à droite et à gauche :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1}{x^2-1} = +\infty$$

II. 39 Equation intégrale $f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt$ (Pb)

Exercice 54. Soit $a \in]-1,1[$. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

1. Calcul des dérivées successives de f.
   (a) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.
   (b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.
   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre entier naturel n, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

   (d) En déduire, pour tout nombre entier naturel n la valeur de $f^{(n)}(0)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a :

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

On pourra faire une récurrence et utiliser une intégration par parties

3. Soit A un nombre réel strictement positif.

(a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que :

$$\forall x \in [-A, A], \quad |f(x)| \leq M$$

et en déduire que pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$\forall x \in [-A, A], \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$

.

(b) Soit x un nombre réel apartenant à $[-A, A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$|f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) En déduire que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-A, A]$

(d) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

Correction 58.

1. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive, notée F. On a par définition de l'intégrale $f(x) = F(ax) - F(0)$.

   (b) Une primitive est par définiton une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ et finalemtn f est de classe $\mathcal{C}^1$. On a
$$f'(x) = aF'(ax) = af(ax).$$

   (c) On pose $P(n)$: " f est de classe C^n et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$ ".
   - $P(0)$ est vraie par hypothèse.
   - Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors f de classe $\mathcal{C}^n$, et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$. Or comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question précédente, on a alors que $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ c'est à dire f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Enfin $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= a^{n(n+1)/2} f'(a^n x) \\ &= a^{n(n+1)/2+n} a f(a a^n x) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= a^{n(n+1)/2+n+1} f(a^{n+1} x) \\ &= a^{(n+1)(n+2)/2} f(a^{n+1} x) \end{aligned}$$
   - On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$.

   (d) On a donc $f^{(n)}(0) = a^{n(n+1)/2} f(0)$. Or $f(0) = \int_0^0 f(t) df = 0$ Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$f^{(n)}(0) = 0$$

2. On montre le résultat par récurrence. On pose pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, la proposition $P(n)$: "$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$"
   - Réécrivons $P(0)$. On a $P(0)$: "$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t) dt.$", c'est à dire : $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$. Ce qui est vrai par définition de l'intégrale.

— Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors pour tout nombre réel x, $f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$. Comme suggérer par l'énoncé on fait une IPP. On pose

$u(t) = f^{(n+1)}(t)$ $\quad$ $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$

$v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ $\quad$ $v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$ $\quad$ On a donc

$$f(x) = \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

Le crochet vaut $\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) - \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)$ les deux termes valent 0 (le second à l'aide de la question précédente). On obtient bien

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

— Par récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Soit $A > 0$. Comme f est continue et $[-A, A]$ est un segment, le théorème de continuité sur un segment assure que f est bornée et atteint ses bornes. Donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [-A, A]$, $|f(x)| \leq M$.

D'après 1c) on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$ En particulier $|f^{(n)}(x)| = |a^{n(n+1)/2}||f(a^n x)|$ Or comme $|a| < 1$, $|a^{n(n+1)/2}| \leq 1$ et pour tout $x \in [-A, A]$, on a $a^n x \in [-A, A]$ et ainsi $|f(a^n x)| \leq M$. Au final pour tout $x \in [-A, A]$:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

(b) D'après la question 2 on a : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$, donc $|f(x)| \leq \displaystyle\int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right| dt$ c'est l'inégatilité triangulaire sur les intégrales. On majore maintenant $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ à l'aide de la question précédente, on obtient pour tout $x \in [-A, A]$:

$$f(x) \leq M \int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!}\right| dt.$$

Donc $f(x) \leq M \left[\frac{|(x-t)|^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ Or comme $x \in [-A, A]$ on a bien :

$$|f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$$

(c) Par croissance comparée, en passant à la limite on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Ainsi le théorème des gendarmes assure que pour tout $x \in [-A, A]$ on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 0.$$

Evidemment $f(x)$ ne dépend pas de n donc par unicité de la limite $f(x) = 0$

Ceci étant vrai pour tout $x \in [-A, A]$ et comme A est arbitraire, ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$f \equiv 0$$

II. 40 Fonction de plusieurs variables

Exercice 55. 1. Soit $u(x,y)$ la fonction définie par

$$u(x,y) = x^2 + xy + x - 2y^2 + 2y$$

et les deux sous-ensembles de de $\mathbb{R}^2$, E et F définies par :

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2 \,|\, -\frac{x}{2} \leq y \leq x+1\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2 \,|\, x+1 \leq y \leq -\frac{x}{2}\}$$

(a) Sur un graphique soigné, représenter E et F.

(b) En considérant à y fixé, la fonction polynômiale $P(x) = u(x,y)$, résoudre $u(x,y) \geq 0$

2. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \int_0^{u(x,y)} e^{\sqrt{t}}\, dt.$$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

(b) Caculer le gradient de f.

(c) En déduire que $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est l'unique point critique de f.

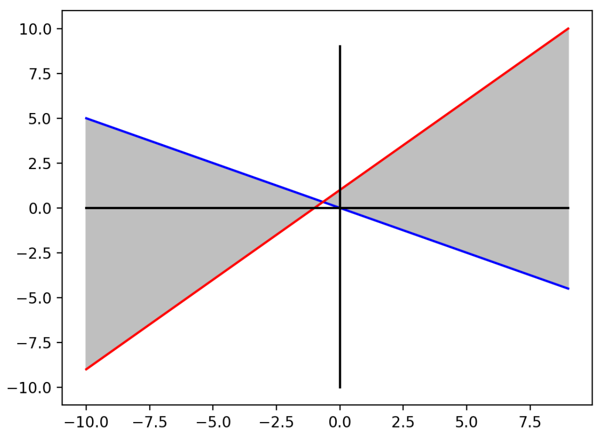
3. (a) Calculer $f\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(b) Montrer que $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est un minimum sur l'ensemble de définition de f.

(c) Question bonus : D'autres points réalisent ce minimum, lesquels ? Pourquoi le gradient ne s'annule pas en ces autres points ?

Correction 59.

1. (a) Tracer en python ;




```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
plt.clf()
X=np.arange(-10,10,1)
Y=-X/2
```

```

plt.plot(X,Y,'b')
plt.plot(X,X+1,'R')
plt.plot(X,0*X,'black')
plt.plot(0*X,X,'black')

plt.fill([-2/3,9,9],[1/3,-4.5,10],color = '0.75')
plt.fill([-2/3,-10,-10],[1/3,5,-9],color = '0.75')
plt.show()
```

(b) Ecrivons $P(x)$ sous la forme bien connue d'un polynôme du second degré : $P(x) = x^2 + x(y+1) - 2y^2 + 2y$. On calcule son discriminant on obtient

$$\Delta = (y+1)^2 - 4(-2y^2+2y) = 9y^2 - 6y + 1 = (3y-1)^2 \geq 0$$

On obtient donc deux racines réelles (possiblement confondues)

$$\frac{-y-1 \pm |3y-1|}{2}$$

$$-2y \quad \text{et} \quad y-1$$

On peut donc écrire

$$P(x) = (x+2y)(x-y+1)$$

Comme y est arbitraire on obtient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(x, y) = (x+2y)(x-y+1)$$

Ainsi, $u(x, y) \geq 0$ si et seulement

$$\left\{\begin{array}{ll} x+2y & \geq 0 \\ x-y+1 & \geq 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ll} x+2y & \leq 0 \\ x-y+1 & \leq 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} y & \geq -\frac{x}{2} \\ y & \leq x-1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ll} y & \leq -\frac{x}{2} \\ y & \geq x-1 \end{array}\right.$$

$$(x, y) \in E \quad \text{ou} \quad (x, y) \in F$$

Ainsi

$$u(x, y) \geq 0 \Longleftrightarrow (x, y) \in E \cup F$$

2. (a) Notons $g(t) = e^{\sqrt{t}}$. g est définie est continue sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi f est bien définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u(x, y) \geq 0$ c'est-à-dire d'après la question précédente : $(x, y) \in E \cup F$.

(b) On calcule les dérivées partielles. Notons G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+$ on a

$$f(x, y) = G(u(x, y)) - G(0).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) G'(u(x, y)) \\ &= (2x+y+1) e^{u(x,y)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)G'(u(x,y)) \\ &= (x-4y+2)e^{u(x,y)}\end{aligned}$$

D'où

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (2x+y+1)e^{u(x,y)} \\ (x-4y+2)e^{u(x,y)} \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned}\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} (2x+y+1)e^{u(x,y)} \\ (x-4y+2)e^{u(x,y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2x+y+1 &= 0 \\ x-4y+2 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x-4y &= -2 \\ 2x+y &= -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \quad -4y &= -2 \\ \quad\quad 9y &= 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \quad -4y &= -2 \\ \quad\quad y &= \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= -2+4\frac{1}{3} = \frac{-2}{3} \\ y &= \frac{1}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

3. (a) $u\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\frac{1}{3} = 0$. Donc

$$f\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 0$$

(b) Pour tout $(x,y) \in D_f$, $u(x,y) \geq 0$ donc comme pour tout $t \geq 0$, $e^{\sqrt{t}} > 0$ on a bien

$$\int_0^{u(x,y)} e^{\sqrt{t}} dt \geq 0$$

et ainsi,

$$u(x,y) \geq 0 = f\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

(c) Tous les points 'au bord' de E et F satisfont $u(x,y) = 0$ en effet si $x+2y = 0$ ou $x-y+1 = 0$ on a bien $u(x,y) = 0$ d'après la factorisation obtenue a la question 1b). Ces points n'ont pas un gradient nul alors que ce sont aussi des minima... Il n'y a pas de problème car dans le théorème disant "minima $\Longrightarrow$ gradient nul" il faut que le point soit à intérieur du domaine de définition. -

II. 41 Intégrale de Gauss (D'après G2E 2019]

Exercice 56 (G2E 2019)**.** Dans cet exercice σ désigne un réel strictement positif.

On considère les trois fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = xe^{-x}, \quad h(x) = \frac{2}{ex}$$

$\mathcal{C}_\sigma$ désigne la courbe représentative de f_σ et $\mathcal{H}$ la courbe représentative de h

1. Soit $I_\sigma(t) = \displaystyle\int_0^t f_\sigma(x)dx$. Calculer $I_\sigma(t)$ pour tout $t \geq 0$ et en déduire la limite $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I_\sigma(t)$
   L'année prochaine, on dira que f_σ est une fonction de densité.
2. f_σ est-elle continue ?
3. (a) Démontrer que g admet un maximum que l'on déterminera.
   (b) En déduire que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_\sigma(x) \leq h(x).$$
   (c) Etudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente puis montrer que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, les courbes $\mathcal{C}_\sigma$ et $\mathcal{H}$ ont une tangente commune dont on donnera une équation cartésienne.

Correction 60.

1. Considérons F_σ définie par $F_\sigma(t) = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ pour tout $x \geq 0$, F_σ est dérivalbe sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour $x \geq 0$, $F_\sigma'(x) = f_\sigma(x)$ ainsi
   $$I_\sigma(t) = [F_\sigma(x)]_0^t = F_\sigma(t) - F_\sigma(0) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} + 1.$$
   Or $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = 0$ donc
   $$\lim_{t\to\infty} I_\sigma(t) = 1.$$
2. f_σ est continue sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions usuelles. En 0,
   $$\lim_{x\to 0^+} f_\sigma(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0$$
   et
   $$\lim_{x\to 0^-} f_\sigma(x) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0$$
   Ainsi f_σ est continue en 0 et finalement continue sur $\mathbb{R}$.
3. (a) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$
   Ainsi g est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.
   g atteint son maximum en 1 et vaut e^{-1}.

(b) Pour tout $x > 0$ on

$$\begin{aligned} f_\sigma(x) &= \frac{2}{x}\frac{x^2}{2\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{2}{x}g(\frac{x^2}{2\sigma^2}) \\ &\leq \frac{2}{x}e^{-1} \quad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

Ainsi $f_\sigma(x) \leq \frac{2}{ex} = h(x)$.

(c) L'égalité a lieu en $x_0 \geq 0$ vérifiant $g(\frac{x_0^2}{2\sigma^2}) = e^{-1} = g(1)$. On a vu à la question 3)a) que e^{-1} était atteint uniquement en 1 par g. On a donc $\frac{x_0^2}{2\sigma^2} = 1$. C'est-à-dire, comme $x_0 \geq 0$,

$$x_0 = \sqrt{2}\sigma$$

On a bien

$$f_\sigma(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}e^{-1} = \frac{2}{e\sqrt{2}\sigma} = h(x_0).$$

Ainsi $\mathcal{C}_\sigma$ et $\mathcal{H}$ ont bien un point en commun. Vérifions que les tangentes sont identiques en ce point.

Tout d'abord remarquons ques les deux courbes admettent bien des tangentes car sont des courbes représentatives de fonctions $\mathcal{C}^1$. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_\sigma$ en x_0 est donnée par $Y - f_\sigma(x_0) = f'_\sigma(x_0)(X - x_0)$ et on a $f'_\sigma(x_0) = \frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}} - \frac{x_0^2}{\sigma^4}e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}$ ce qui donne en simplifiant :

$$f'_\sigma(x_0) = \frac{1}{\sigma^2}e^{-1} - \frac{2}{\sigma^2}e^{-1} = -\frac{1}{\sigma^2}e^{-1}$$

On obtient ainsi comme équation pour la tangente à $\mathcal{C}_\sigma$ en x_0 :

$$Y - \frac{\sqrt{2}}{e\sigma} = -\frac{1}{e\sigma^2}(X - \sqrt{2}\sigma)$$

Faisons de même avec la tangente à $\mathcal{H}$ en x_0 et calculons $h'(x_0)$. On a $h'(x_0) = \frac{-2}{ex_0^2} = \frac{-2}{e2\sigma^2} = -\frac{1}{e\sigma^2} = f'_\sigma(x_0)$ Ainsi les deux courbes admettent bien la même tangente en x_0 à savoir :

$$Y - \frac{\sqrt{2}}{e\sigma} = -\frac{1}{e\sigma^2}(X - \sqrt{2}\sigma)$$

II. 42 Etude famille de fonction, intégrale, et somme (ECRICOME 2002)

Exercice 57. On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1 + x).$$

A- Étude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Étude du cas particulier $n = 1$.
   (a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1, +\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1, +\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
   (a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   (b) En déduire les variations de f_n sur $]-1, +\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

B- Étude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

1. Calcul de U_1.
   (a) Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que :
   $$\forall x \in [0,1], \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale :
   $$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\, dx.$$
   (c) Montrer que $U_1 = \frac{1}{4}$.
2. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
   (b) Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (On ne demande pas sa limite.)
   (c) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$
   (d) En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$
Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :
$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$
   (a) Montrer que :
$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$
   (b) En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx.$$
   (c) En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :
$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

Correction 61. On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :
$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

A - Étude des fonctions f_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :
$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

1. h_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables et
$$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{n+1+nx}{(1+x)^2}$$
Et comme $x > -1$ on a $nx > -n$ et $h_n'(x) > 0$.
Donc h_n est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$
2. On a : $h_n(0) = 0$, et comme h_n est strictement croissante, sur $]-1,0[$ on a :
$\boxed{h_n < 0 \text{ sur }]-1,0[\text{ et sur }]0,+\infty[\text{ on a } h_n > 0}$
3. Étude du cas particulier $n = 1$.
   (a) $f_1(x) = x\ln(1+x)$.
   La composée de $x \to 1+x$ dérivable sur $]-1,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ où ln est dérivable.
   Et $x \to x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$
$$f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x)$$
   (b) Donc f_1 est strictement décroissante sur $]-1,0[$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

(a) Comme $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \to x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (la formule pour dériver serait différente pour la puissance 0) donc (produit et somme) f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) \\ &= x^{n-1}h_n(x) \end{aligned}$$

(b) Donc si n est pair, $n-1$ est impair donc

n pair :

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
f_n'		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$				$\nearrow$	$+\infty$
			0		
	$-\infty$	$\nearrow$			

n impair :

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$+$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			0		

En -1, $x^n \to +1$ si n est pair et $x^n\ln(1+x) \to -\infty$ et $x^n\ln(1+x) \to +\infty$ si n impair
En $+\infty$: $x^n\ln(1+x) \to +\infty$

B - Étude d'une suite. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

1. Calcul de U_1.

(a) Pour comparer, on met les deux expressions sous la même forme (même dénominateur) en réordonnant par rapport aux puisances de x :

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2 + (b+a)x + b + c}{x+1}$$

On a donc l'égalité **si** $a = 1$ et $b + a = 0$ et $b + c = 0$ soit $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$
Une autre rédaction est de chercher ces coefficients au brouillon et de constater que :

$$x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

et donc que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$ conviennent

(b) On peut alors déterminer une primitive (la fonction intégrée est continue sur l'intervalle d'intégration) et $x + 1 > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx &= \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_{x=0}^1 \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) On a

$$U_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$$

et en intégrant par partie (on dérive le ln pour le faire disparaître)
$u(x) = \ln(1+x)$, u de classe C^1 sur $[0,1]$, $u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$
$v'(x) = x$, v' est continue $v(x) = x^2/2$

$$\begin{aligned} U_1 &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)}dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Pour monter que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, il suffit de comparer U_n et U_{n+1}.
   Comme ce sont des intégrales, on compare leurs contenus sur $[0,1]$:
   $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et comme $\ln(1+x) \geq 0$ sur $[0,1]$ (car $1+x \geq 1$) donc $x^{n+1}\ln(1+x) \leq x^n \ln(1+x)$ et comme $0 \leq 1$ (ordre des bornes) on a alors

   $$\int_0^1 x^{n+1}\ln(1+x)\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$$

   et $U_{n+1} \leq U_n$.
   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } U \text{ est décroissante}}$
   (b) Toutes ces intégrales sont positive ou nulles car le contenu est positif et les bornes sont en ordre croissant
   Donc U est décroissante et minorée par 0donc convergente.
   (c) Pour encadrer l'intégrale, on encadre là encore le contenu. Pour obtenir $\frac{1}{n+1}$ on conserve le x^n dans cet encadrement. On se contente donc d'encadre le ln :
   Si $0 \leq x \leq 1$ alors $1 \leq 1+x \leq 2$ et comme ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que 1, $1+x$ et 2 en sont éléments, $\ln(1) \leq \ln(1+x) \leq \ln(2)$.
   Comme $x^n \geq 0$ alors $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$
   Enfin comme $0 \leq 1$:

   $$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\,dx = \ln(2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}}$
   (d) Et comme $\dfrac{\ln 2}{n+1} \to 0$, $\boxed{\text{par encadrement } U_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0}$
3. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.
   Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :

   $$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k.$$

(a) Comme $-x \neq 1$ on a :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{(-x)^{n+1}-1}{-x-1}. \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \end{aligned}$$

(b) On a donc en intégrant l'égalité précédente sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k dx &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{x=0}^{1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$

d'une part et d'autre part

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \left[\ln(1+x)\right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx \end{aligned}$$

et finalement

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx.$$

(c) On reconnaît dans la formule proposée $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$. On fait donc apparaître dans l'expression de U_n la quantité $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx$:

On a

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\, dx$$

avec $u(x) = \ln(1+x)$, u est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

et avec $v'(x) = x^n$ continue on a $v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ donc en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} U_n &= \left[\frac{x^{n+1}\ln(1+x)}{n+1}\right]_{x=0}^{1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)} dx \\ &= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \end{aligned}$$

et de
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$
on tire
$$\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx=(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}-\ln 2\right]$$
d'où finalement
$$U_n=\frac{\ln 2}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2-\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^k}{k+1}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

II. 43 Binome de Newton

Exercice 58. 1. Vérifier que la formule du binôme est vraie pour $n=0$, $n=1$, $n=2$ (et sur votre brouillon faite $n=3$). On va prouver la formule par récurrence. On détaille les différentes étapes dans les prochaines questions :

2. Montrer que $\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1}.$$
3. Montrer que $\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right)=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n-k+1}$$
4. En déduire que
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}$$
5. Conclure.
   Application : Soit $n,m\in\mathbb{N}^2$
   (a) Calculer $(1+x)^n(1+x)^m$ et $(1+x)^{n+m}$ à l'aide du binome de Newton.
   (b) En déduire que pour tout $r\leq n+m$ on a :
$$\sum_{j=0}^{r}\binom{n}{j}\binom{m}{r-j}=\binom{n+m}{r}$$

Correction 62.

1. Vérifier que la formule du binôme est vraie pour $n=0$, $n=1$, $n=2$ (et sur votre brouillon faite $n=3$).
   (a) $n=0$
   On a $(a+b)^0=1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^kb^{0-k}=a^0b^0=1$

(b) $n=1$

On a $(a+b)^1 = a+b$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^kb^{1-k} = \binom{1}{0}a^0b^{1-0}+\binom{1}{1}a^1b^{1-1} = a+b$

(c) $n=2$

On a $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}a^kb^{2-k} = \binom{2}{0}a^0b^{2-0}+\binom{2}{1}a^1b^{2-1}+\binom{2}{2}a^2b^{2-2} =$ $b^2+2ab+b^2$

On va prouver la formule par récurrence. On détaille les différentes étapes dans les prochaines questions :

2. Montrer que $\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} = a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\binom{n}{n}a^{n+1}b^{n-n}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+a^{n+1}\end{aligned}$$

On fait le changement devariable $k+1=j$ sur la somme. On obtient $j\in[\![1,n]\!]$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^jb^{n-j+1}$$

Comme j est un indice muet, on peut le changer en k. On a donc la formule demandée.

3. Montrer que $\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right) = a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n-k+1}$$

$$\begin{aligned}(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right) &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}\end{aligned}$$

Maintenant on fait un changement de variable sur la première somme en posant $j=k+1$. On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^jb^{n-j+1}$$

On a donc, en se rappelant que j est muet et donc remplacable par k

$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

On applique la relation de Chasles au dernier terme de la première somme et au premier terme de la deuxième somme. On obtient :

$$\begin{aligned}(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}+\binom{n}{n+1-1}a^{n+1}b^{n-(n+1)+1}\\&\quad+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}+\binom{n}{0}a^0 b^{n+1-0}\\&=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1}\end{aligned}$$

4. En déduire que
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$
On applique la relation obtenue dans la question 2 (relation de Pascal) à ce qu'on vient de trouver.
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1}$$
Par ailleurs,
$$a^{n+1}=\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^{n-(n+1)+1}$$
et
$$b^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^0 b^{n-0+1}$$
Ce sont donc les deux termes qui manquent à la somme de 0 à $(n+1)$. ON a ainsi
$$a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$
Ce qui prouve le résultat grace à la question 5
5. Conclure.
On fait une récurrence. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\mathcal{P} :' \forall a,b\in\mathbb{C}, (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$
L'initialisation a été faite à la question 3.
L'hérédité correspond à la question 6.

Application D'après le binome :

$$(1+x)^n(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} x^l$$

Et par ailleurs

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n+m}{j} x^j$$

Comme $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$ on peut identifier les coefficients des deux polynomes. On obtient pour tout $r \in [\![0, n+m]\!]$

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k,l,k+l=r} \binom{n}{k}\binom{m}{l}$$

et

$$\sum_{k,l,k+l=r} \binom{n}{k}\binom{m}{l} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

II. 44 inéquation à paramétre - Une bien l'autre pas finie

Exercice 59. On considère l'inéquation (E_a) de paramètre $a \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\frac{2x+a}{x-4a} \leq \frac{x}{x-2a} \qquad (E_a)$$

1. Donner l'ensemble des solutions pour $a = 0$

   Pour la suite on supppose que $a \neq 0$.
2. Donner le domaine de définition de (E_a) en fonction de a.
3. Résoudre pour $a > 0$ l'inéquation : $(x-4a)(x-2a) \geq 0$.
4. Résoudre pour $a > 0$ l'inéquation : $x^2 + ax - 2a^2 \geq 0$.
5. En déduire pour $a > 0$ les solutions de (E_a).
6. Faire de même avec $a < 0$.

Correction 63.

1. Pour $a = 0$, l'équation devient (E_0) : $\frac{2x}{x} \leq \frac{x}{x}$ C'est-à-dire

$$2 \leq 1$$

.

$$\boxed{(E_0) \text{ n'admet pas de solution.}}$$

2. L'équation est bien définie pour tout $x - 4a \neq 0$ et $x - 2a \neq 0$.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } (E_a) \text{ est } \mathbb{R} \setminus \{2a, 4a\}}$$

3. Remarquons que pour $a > 0$, $4a > 2a$, les solutions de $(x-4a)(x-2a) \geq 0$ sont donc

$$\boxed{S_1 =]-\infty, 2a[\cup]4a, +\infty[}$$

4. Regardons le discriminant de $x^2 + ax - 2a^2$. On obtient $\Delta = a^2 + 4a^2 = 9a^2$. Ainsi il y a deux racines réelles distinctes (rappelons que $a \neq 0$)

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{9a^2}}{2} = a \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{9a^2}}{2} = -2a$$

On a donc
$$x^2 + ax - 2a^2 = (x-a)(x+2a)$$

(Remarquons par ailleurs que cette égalité est aussi vraie pour $a < 0$, ceci nous sera utile pour la question 6) Les solutions de $x^2 + ax - 2a^2 \geq 0$ sont donc

$$\boxed{]-\infty, -2a[\cup]a, +\infty[}$$

5.

$$\begin{aligned}
(E_a) &\Longleftrightarrow \frac{2x+a}{x-4a} - \frac{x}{x-2a} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{(2x+a)(x-2a) - (x-4a)x}{(x-4a)(x-2a)} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{(2-1)x^2 + (-4a+a+4a)x - 2a^2)}{(x-4a)(x-2a)} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{x^2 + ax - 2a^2}{(x-4a)(x-2a)} \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{x^2 + ax - 2a^2}{(x-4a)(x-2a)} \leq 0
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-2a$		a		$2a$		$4a$		$+\infty$
$x^2 + ax - 2a^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$+$	||	$+$	
$(x-4a)(x-2a)$		$+$		$+$		$+$	||	$-$	||	$+$	
$\dfrac{x^2 + ax - 2a^2}{(x-4a)(x-2a)}$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

Ainsi les solutions sont

$$\boxed{S_a = [-2a, a]\cup]2a, 4a[}$$

6. Pour $a < 0$, la seule chose qui change est l'ordre des valeurs $-2a, a, 2a, 4a$. On a dans ce cas : $4a < 2a < a < -2a$ et donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$4a$		$2a$		a		$-2a$		$+\infty$
$x^2+ax-2a^2$		$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x-4a)(x-2a)$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x^2+ax-2a^2}{(x-4a)(x-2a)}$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi les solutions pour $a<0$ sont

$$\boxed{S_a =]4a, 2a[\cup [a, -2a]}$$

II. 45 Racine de x^3-6x-9

Exercice 60. On cherche les racines réelles du polynôme $P(x)=x^3-6x-9$.

1. Donner en fonction du paramètre x réel, le nombre de solutions réelles de l'équation $x=y+\frac{2}{y}$ d'inconnue $y\in\mathbb{R}^*$.
2. Soit $x\in\mathbb{R}$ vérifiant $|x|\geq 2\sqrt{2}$. Montrer en posant le changement de variable $x=y+\frac{2}{y}$ que :
$$P(x)=0 \iff y^6-9y^3+8=0$$
3. Résoudre l'équation $z^2-9z+8=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{R}$.
4. En déduire une racine du polynôme P.
5. Donner toutes les racines réelles du polynôme P.

Correction 64.

1. Résolvons l'équation proposée en fonction du paramètre x. On a
$$\begin{aligned} & y+\tfrac{2}{y} &= x\\ \iff & y^2+2 &= yx\\ \iff & y^2-xy+2 &= 0\end{aligned}$$
On calcule le discriminant de ce polynome de degré 2 on obtient
$$\Delta = x^2-8$$
Donc :
   — si $x^2-8>0$ c'est-à-dire si $|x|>2\sqrt{2}$, l'équation admet 2 solutions.
   — si $x^2-8=0$ c'est-à-dire si $x=2\sqrt{2}$ ou $x=-2\sqrt{2}$ l'équation admet 1 seule solution.
   — si $x^2-8<0$ c'est-à-dire si $x\in]-2\sqrt{2},22\sqrt{2}[$ l'équation admet 0 solution.
2. Soit $x=y+\frac{2}{y}$, on a :
$$\begin{aligned} & P(x) &= 0\\ \iff & \left(y+\tfrac{2}{y}\right)^3-6\left(y+\tfrac{2}{y}\right)-9 &= 0\end{aligned}$$

Développons à part $\left(y+\frac{2}{y}\right)^3$. On obtient tout calcul fait

$$\left(y+\frac{2}{y}\right)^3 = y^3+6y+\frac{12}{y}+\frac{8}{y^3}$$

Donc

$$\begin{array}{rrl} & \left(y+\frac{2}{y}\right)^3-6\left(y+\frac{2}{y}\right)-9 & =0 \\ \Longleftrightarrow & y^3+\frac{8}{y^3}-9 & =0 \\ \Longleftrightarrow & y^6+8-9y^3 & =0 \end{array}$$

où la dernière équivalence s'obtient en multipliant par y^3 non nul.

3. On résout $z^2-9z+8=0$ à l'aide du discriminant du polynôme z^2-9z+8 qui vaut $\delta=81-32=49=7^2$. On a donc deux solutions

$$\boxed{z_1=\frac{9+7}{2}=8 \quad \text{et} \quad z_2=\frac{9-7}{2}=1}$$

4. La question d'avant montre que $\sqrt[3]{1}=1$ est solution de l'équation $y^6-9y^3+8=0$ (on peut le vérifier à la main si on veut, mais c'était le but de la question précédente.)
Comme on a effectué le changement de variable $x=y+\frac{2}{y}$ et à l'aide de la question 2, on voit que $x=1+\frac{2}{1}=3$ est solution de l'équation $P(x)=0$ c'est-à-dire que

$$\boxed{3 \text{ est une racine de } P.}$$

(de nouveau on pourrait le revérifier en faisant le calcul, mais ceci n'est psa nécéssaire)

5. Comme 3 est racine de P, on peut écrire $P(x)$ sous la forme $(x-3)(ax^2+bx+c)$, avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. En développant on obtient $P(x)=ax^3+(-3a+b)x^2+(c-3b)x-3c$. Maintenant par identification on obtient

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ -3a+b & = & 0 \\ c-3b & = & -6 \\ -3c & = & -9 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 3 \\ c & = & 3 \\ c & = & 3 \end{cases}$$

Et finalement

$$P(x)=(x-3)(x^2+3x+3)$$

Il nous reste plus qu'à trouver les racines de x^2+3x+3 que l'on fait grâce à son discriminant qui vaut $\Delta=9-12<-3$.

$$\boxed{\text{L'unique racine réelle de } P \text{ est } 3}$$

Je rajoute le graphique de la courbe représentative de P avec le programme Python qui permet de le tracer.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def P(x):
      return(x**3-6*x+9)
X=np.linspace(-5,5,100)
Y=P(X)
Z=np.zeros(100)
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,Z)
plt.show()
```

II. 46 Résolution de $\sqrt{e^x-2} \geq e^x-4$

Exercice 61. Donner l'ensemble de définition de

$$f(x)=\sqrt{e^x-2}$$

Résoudre

$$f(x)\geq e^x-4$$

Correction 65. f est bien définie pour tout x tel que $e^x-2\geq 0$ c'est à dire pour $e^x\geq 2$ soit $x\geq \ln(2)$

$$\boxed{D_f=[\ln(2),+\infty[}$$

On fait le changement de variable $e^x=X$, l'équaiton $f(x)\geq e^x-4$ équivaut alors à

$$\sqrt{X-2}\geq X-4 \quad (E')$$

(E') est bien définie sur $[2,+\infty[$

On étudie alors le signe de $X-4$

— Si $X-4\geq 0$, ie $X\in[4,+\infty[$.

$$\begin{aligned} E' &\Longleftrightarrow X-2\geq X^2-8X+16\\ &\Longleftrightarrow X^2-9X+18\leq 0\end{aligned}$$

Le discriminant de $X^2-9X+18$ vaut $\Delta=9^2-4*18=81-72=9=3^2$ On a donc deux racines réelles :

$$X_1=\frac{9+3}{2}=6 \quad \text{et} \quad X_2=\frac{9-3}{2}=3$$

Donc $(E')\Longleftrightarrow (X-6)(X-3)\leq 0$ d'où les solutions sur $[4,+\infty[$:

$$\mathcal{S}_1=[4,6]$$

— Si $X-4<0$, ie $X\in]-\infty,4[$.

Alors comme $\sqrt{X-2}\geq 0$ et $X-4<0$, tous les réels de l'ensemble de définition sont solutions

$$\mathcal{S}_2=[2,4]$$

Ainsi les solutions de (E') sont

$$\mathbb{S}'=[2,6]$$

On repasse à la variable x on a $e^x = X$ donc $x = \ln(X)$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) \geq e^x - 4 \text{ sont } \mathcal{S} = [\ln(2), \ln(6)]}$$

II. 47 Equation trigonométrique et changement de variable

Exercice 62. 1. Résoudre l'inéquation d'inconnue y suivante :

$$\frac{y-3}{2y-3} \leq 2y \quad (E_1)$$

2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation d'inconnue X :

$$\frac{\sin^2(X)-3}{2\sin^2(X)-3} \leq 2\sin^2(X) \quad (E_2)$$

3. Finalement donner les solutions sur $[0, 2\pi[$ de l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{\sin^2(2x+\frac{\pi}{6})-3}{2\sin^2(2x+\frac{\pi}{6})-3} \leq 2\sin^2(2x+\frac{\pi}{6}) \quad (E_3)$$

Correction 66.

1.
$$\begin{array}{rrl} & \frac{y-3}{2y-3} & \leq 2y \\ \iff & 0 & \leq 2y - \frac{y-3}{2y-3} \\ \iff & 0 & \leq \frac{4y^2-7y+3}{2y-3} \end{array}$$

$4y^2 - 7y + 3$ admet pour racines : $y_0 = 1$ et $y_1 = \frac{3}{4}$, donc

$$\begin{array}{rrl} & \frac{y-3}{2y-3} & \leq 2y \\ \iff & 0 & \leq \frac{4(y-1)(y-\frac{3}{4})}{2(y-\frac{3}{2})} \end{array}$$

Donc les solutions de (E_1) sont

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = [\tfrac{3}{4}, 1] \cup]\tfrac{3}{2}, +\infty[}$$

2. X est solutions de (E_2) si et seulement si :

$$\sin^2(X) \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

Comme pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\sin(X) \in [-1, 1]$, ceci équivaut à

$$\sin^2(X) \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

c'est-à-dire : $\sin^2(X) \geq \frac{3}{4}$, soit $\left(\sin(X) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin(X) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0$ On obtient donc

$$\sin(X) \in \left[-1, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right]$$

On a d'une part $\sin(X) \leq \frac{-\sqrt{3}}{2} \iff X \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$ et d'autre part $\sin(X) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff X \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{-\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Ainsi les solutions de (E_2) sont

$$\mathcal{S}_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$$

En remarquant que $\frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi$ et $\frac{5\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \pi$, on peut simplifier les solutions de la manière suivante :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]}$$

3. x est solution de (E_3) si et seulement si

$$2x + \frac{\pi}{6} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]$$

C'est-à-dire

$$2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$$

On obtient

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right]$$

Les solutions sur $[0, 2\pi[$ sont donc

$$\boxed{\mathcal{S}_3 = \left[\tfrac{\pi}{12}, \tfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\tfrac{\pi}{12} + \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\tfrac{\pi}{12} + \pi, \tfrac{\pi}{2} + \pi\right] \cup \left[\tfrac{\pi}{12} + \tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{3\pi}{2}\right]}$$

II. 48 Equation différentielle, changement de variable

Exercice 63. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall t > 0,\ f'(t) = f(1/t)$$

On fixe une fonction $f \in \mathcal{S}$ et on définit la fonction g par

$$g(x) = f(e^x)$$

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde en fonction de f.
2. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est solution de l'équation diffrentielle suivante :

$$y'' - y' + y = 0 \quad (E)$$

3. Résoudre (E).

4. En déduire que f est de la forme

$$f(t) = A\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + B\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

où (A, B) sont deux constantes réelles.
On appelle $f_1(t) = \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$ et $f_2(t) = \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$
5. Calculer les dérivées premières de f_1 et f_2
6. En considérant les cas $t = 1$ et $t = e^{\pi/\sqrt{3}}$, montrer que A et B sont solutions de

$$(S)\begin{cases} A - B\sqrt{3} &= 0 \\ A\sqrt{3} - 3B &= 0 \end{cases}$$

7. Résoudre (S).
8. Conclure.

Correction 67.

1. Remarquons qu'étant donné que f est dérivable et $t \mapsto \frac{1}{t}$ est aussi dérivable, la fonction f' est dérivable par composée de fonctions dérivables. Ainsi f est dérivable deux fois sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\boxed{f''(t) = \frac{-1}{t^2}f'(1/t) = \frac{-1}{t^2}f(t)}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et $exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$, de nouveau par composition, g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.
Calculons les dérivées successives de g en fonction de celles de f :

$$g'(x) = e^x f'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x}f''(e^x)$$

On a donc

$$\begin{aligned} g''(x) - g'(x) + g(x) &= e^x f'(e^x) + e^{2x}f''(e^x) - e^x f'(e^x) + f(e^x) \\ &= e^{2x}f''(e^x) + f(e^x) \end{aligned}$$

On utilise alors la relation vérifiée par f : $f'(x) = f(1/x)$, on a par dérivation $f''(x) = \frac{-1}{x^2}f'(1/x) = \frac{-1}{x^2}f(x)$, d'où

$$f''(e^x) = \frac{-1}{e^{2x}}f(e^x) = -e^{-2x}f(e^x)$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g''(x) - g'(x) + g(x) &= -e^{2x}e^{-2x}f(e^x) + f(e^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc solution de l'équation différentielle } g'' - g' + g = 0.}$$

3. Résolvons (E) avec la méthode vue en cours. Le polynôme caractéristique est $X^2 - X + 1$ qui admet comme discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et donc deux racines complexes : $r_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de (E) sont donc de la forme

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto e^{x/2}\left(A\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \mid A, B \in \mathbb{R}\right\}}$$

4. On vient de voir que $f(e^x)$ est de la forme $e^{x/2}(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right))$, donc $f(t)$ est de la forme
$$f(t) = A\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + B\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$
avec A, B deux constantes réelles. Ceci est bien la forme demandée par l'énoncé, avec
$$f_1(t) = \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$
et
$$f_2(t) = \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

5. Calculons les dérivées des fonctions f_1 et f_2. On a
$$\begin{aligned} f_1'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) - \sqrt{t}\frac{\sqrt{3}}{2t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) \end{aligned}$$
De même
$$f_2'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

6. Pour $t = 1$ on obtient d'une part
$$\begin{aligned} f(1) &= A\sqrt{1}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1)\right) + B\sqrt{1}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1)\right) \\ &= A \end{aligned}$$
et d'autre part :
$$\begin{aligned} f'(1) &= Af_1'(1) + Bf_2'(1) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$
Comme $f'(1) = f(1/1) = f(1)$, on obtient alors
$$A = \frac{A + B\sqrt{3}}{2}$$
donc $2A = A + B\sqrt{3}$ et finalement
$$\boxed{A - B\sqrt{3} = 0}$$

C'est la première équation du système (S)

Faisons la même chose pour $t = e^{\pi/\sqrt{3}}$. Remarquons tout d'abord que

$$f'(e^{\pi/\sqrt{3}}) = f(1/e^{\pi/\sqrt{3}}) = f(e^{-\pi/\sqrt{3}})$$

Calculons alors les deux membres de cette égalité.

$$\begin{aligned} f(e^{-pi/\sqrt{3}}) &= Ae^{-\pi/2\sqrt{3}}\cos(-\frac{\pi}{2}) + Be^{-\pi/2\sqrt{3}}\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ &= -Be^{-\pi/2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

et

$$f_1'(e^{\pi/\sqrt{3}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

$$f_2'(e^{\pi/\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

d'où

$$f'(e^{\pi/\sqrt{3}}) = -\frac{A\sqrt{3}}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}} + \frac{B}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

Finalement on obtient

$$Be^{-\pi/2\sqrt{3}} = -\frac{A\sqrt{3}}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}} + \frac{B}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

Donc

$$-B = -\frac{A\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{2}$$

Ce qui donne alors $-2B = -A\sqrt{3} + B$ et finalement

$$\boxed{-3B + A\sqrt{3} = 0}$$

C'est la deuxième équation du système (S)

7. Le système (S) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} A - B\sqrt{3} &=& 0 \\ \sqrt{3}(A - \sqrt{3}B) &=& 0 \end{array}\right. \iff A - B\sqrt{3} = 0$$

Le système admet alors une infinité de solutions de la forme

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(B\sqrt{3}, B) \,|\, B \in R\}}$$

8. On en déduit que f est de la forme

$$f(t) = B\sqrt{3}f_1(t) + Bf_2(t)$$

où B est une constante réelle.

Il faut maintenant vérifier que les fonctions de cette forme sont bien solutions de notre problème.

f est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(t)=\frac{B\sqrt{3}}{\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)-\frac{B}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

D'autre part $f(1/t)=B\sqrt{3}f_1(1/t)+Bf_2(1/t)$
Et on a

$$\begin{aligned}f_1(1/t)&=\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1/t)\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)\end{aligned}$$

De même on obtient

$$f_2(1/t)=-\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

par imparité de la fonction sin
Ainsi

$$f(1/t)=B\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)-B\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)=f'(t)$$

II. 49 Suite arithmético-géométrique

Exercice 64. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $0<a<b$. On pose $u_0=a, v_0=b$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n},\quad v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}.$$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_n<v_n$.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n-u_n\leq\frac{1}{2^n}(v_0-u_0)$.

Correction 68.

1. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout n par : « $0<u_n<v_n$ ». **Initialisation :** Pour $n=0$, la propriété est vraie, d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé $0<a<b$.
Hérédité :
Soit $n\geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$ qui est bien défini car u_n et v_n sont positifs par hypothèse de récurrence. Cette expression assure aussi que u_{n+1} est positif.
De plus,

$$\begin{aligned}v_{n+1}-u_{n+1}&=\frac{u_n+v_n}{2}-\sqrt{u_nv_n} && \text{Par définition.}\\&=\frac{u_n-2\sqrt{u_nv_n}+v_n}{2}\\&=\frac{(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n})^2}{2} && \text{car } u_n \text{ et } v_n \text{ sont positifs.}\\&>0\end{aligned}$$

Ainsi $v_{n+1} > u_{n+1}$ La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{0 < u_n < v_n}$$

2. Montrons par récurrence la propriété définie $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout n par : « $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. ». **Initialisation :** Pour $n = 0$, la propriété est vraie car le terme de gauche vaut $v_0 - u_0$ et le terme de droite vaut $\frac{1}{1}(v_0 - u_0)$.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Montrons tout d'abord que $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} - \frac{1}{2}(v_n - u_n) &= \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} - \frac{1}{2}(v_n - u_n) \\ &= u_n - \sqrt{u_n v_n} \\ &= \sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

On a donc bien $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. On applique maintenant l'hypothèse de récurrence, on a alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0) \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0) \end{aligned}$$

La propriété P est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0).}$$

III Autre

III. 1 Inclusion ensemble complexe

Exercice 65. Montrer que

$$\{z \in \mathbb{C}\,,\, |z+1| \leq 1\} \subset \{z \in \mathbb{C}\,,\, -2 \leq \mathfrak{Re}(z) \leq 0\}$$

On n'est pas obligé d'utiliser la forme algébrique...

Correction 69. Comme pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$ on a pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C}\,,\, |z+1| \leq 1\}$:

$$|\mathfrak{Re}(z+1)| \leq |z+1| \leq 1$$

C'est-à-dire :

$$-1 \leq z + 1 \leq 1$$

soit

$$\boxed{-2 \leq z \leq 0}$$

III. 2 Calcul de $e^{i\pi/7}$

Exercice 66. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On considère $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

1. Calculer $\frac{1}{\omega}$ en fonction de $\overline{\omega}$
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ on a
$$\omega^k = \overline{\omega}^{7-k}.$$
3. En déduire que $\overline{A} = B$.
4. Montrer que la partie imaginaire de A est strictement positive. (On pourra montrer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.)
5. Rappelons la valeur de la somme d'une suite géométrique : $\forall q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
Montrer alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$. En déduire que $A + B = -1$.
6. Montrer que $AB = 2$.
7. En déduire la valeur exacte de A.

Correction 70.

1. $$\frac{1}{\omega} = e^{\frac{-2i\pi}{7}} = \overline{\omega}$$
2. On a $\omega^7 = e^{7\frac{2i\pi}{7}} = e^{2i\pi} = 1$ donc pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ on a
$$\omega^{7-k}\omega^k = 1$$
D'où
$$\omega^k = \frac{1}{\omega^{7-k}} = \overline{\omega}^{7-k}$$
3. On a d'après la question précédente :
$$\overline{\omega} = \omega^6$$
$$\overline{\omega^2} = \omega^5$$
$$\overline{\omega^4} = \omega^3$$
Ainsi on a :
$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{\omega + \omega^2 + \omega^4}\\ &= \overline{\omega} + \overline{\omega^2} + \overline{\omega^4}\\ &= \omega^6 + \omega^5 + \omega^3\\ &= B.\end{aligned}$$

4. $$\mathfrak{Im}(A) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})$$
   Comme sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$
   $$\sin(\frac{\pi}{7}) \leq \sin(\frac{2\pi}{7})$$
   Donc
   $$\mathfrak{Im}(A) \geq \sin(\frac{4\pi}{7}) > 0$$
5. On a
   $$\sum_{k=0}^{6} \omega^k = \frac{1-\omega^7}{1-\omega} = 0$$
   Or
   $$A + B = \sum_{k=1}^{6} \omega^k = \sum_{k=0}^{6} \omega^k - 1 = -1$$
6. $AB = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10}$ D'où
   $$AB = 2\omega^7 + \omega^4(1 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) = 2\omega^7 = 2$$
7. A et B sont donc les racines du polynome du second degré $X^2 + X + 2$. Son discriminant vaut $\Delta = 1 - 8 = -7$ donc
   $$A \in \{\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}\}$$
   D'après la question 4, $\mathfrak{Im}(A) > 0$ donc
   $$A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

III. 3 Complexe, ensemble, minimum

Exercice 67. Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Calculer
   $$\inf\left\{\left|\frac{1}{z} + z\right|, z \in \mathbb{U}\right\}$$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on note $\alpha(z) = \frac{1}{z} + z$.
   (a) Calculer le module de $\alpha(z)$ en fonction de celui de z.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x} + x \geq 2$.
   (c) En déduire
   $$\inf\{|\alpha(z)|, z \in \mathbb{C}^*\}$$

Correction 71.

1. Comme $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{z} + z\right| &= \left|e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right| \\ &= \left|2\cos(\frac{\theta}{2}\right| \end{aligned}$$

Pour $\theta = \pi$ on a $\left|2\cos(\frac{\theta}{2}\right| = 0$ donc

$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z} + z\right|, z \in \mathbb{U}\right\} = 0$$

2. (a)

$$\begin{aligned} |\alpha(z)| &= \left|\frac{1}{\overline{z}} + z\right| \\ &= \left|\frac{1 + z\overline{z}}{\overline{z}}\right| \\ &= \left|\frac{1 + |z|^2}{\overline{z}}\right| \\ &= \frac{|1 + |z|^2|}{|\overline{z}|} \\ &= \frac{1 + |z|^2}{|z|} \\ &= \frac{1}{|z|} + |z| \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x > 0$ on a

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} - 2 &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$.

(c) On a $|\alpha(1)| = \frac{1}{|1|} + |1| = 2$ et on a vu que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|\alpha(z)| \geq 2$ donc

$$\inf\{|\alpha(z)|, z \in \mathbb{C}^*\} = 2$$

III. 4 Complexe minimum/maximum

Exercice 68. 1. Résoudre pour $\theta \in \mathbb{R}$, l'équation $e^{i\theta} = 1$.

On note $f(\theta) = e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + e^{3i\theta} + e^{4i\theta}$

2. Montrer que $|f(\theta)| = \left|1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{4i\theta} + e^{5i\theta}\right|$

3. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ on a
$$|f(\theta)| = \left|\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right|.$$
4. En déduire la valeur de $\inf\{|f(\theta)|\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\}$.
5. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|f(\theta)| \leq 6$.
6. En déduire la valeur de $\sup\{|f(\theta)|\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

Correction 72. $e^{i\theta} = 1$ si et seulement si $\cos(\theta) = 1$ et $\sin(\theta) = 0$ c'est-à-dire
$$\theta \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
On a $f(\theta) = e^{-i\theta}(1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{4i\theta} + e^{5i\theta})$. On a donc
$$|f(\theta)| = |e^{i\theta}| \left|1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{4i\theta} + e^{5i\theta}\right|$$
Comme $|e^{i\theta}| = 1$ on a bien le résultat souhaité.

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. La raison est différent de 1 d'après la question 1 et l'hypothése faite sur θ. On a donc
$$|f(\theta)| = \left|\frac{1 - e^{i6\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right|$$
On utilise l'angle moitié, on obtient
$$\frac{1 - e^{i6\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i3\theta}(e^{-3i\theta} - e^{i3\theta})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})}$$
Donc
$$\begin{aligned}|f(\theta)| &= \left|\frac{e^{i3\theta}}{e^{i\theta/2}}\right| \left|\frac{e^{-3i\theta} - e^{i3\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})}\right| \\ &= 1\left|\frac{2i\sin(3\theta)}{2i\sin(\frac{\theta}{2})}\right| \\ &= \left|\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right|\end{aligned}$$
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $|f(\theta)| \geq 0$ par définition du module. Par ailleurs, d'après la question précédente
$$|f(\pi)| = \left|\frac{\sin(3\pi)}{\sin(\frac{\pi}{2})}\right| = 0$$
donc
$$\boxed{\inf\{|f(\theta)|\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\} = 0.}$$
Pour le maximum on applique l'inégalité triangulaire, on a
$$|f(\theta)| \leq \left|e^{-i\theta}\right| + 1 + \left|e^{i\theta}\right| + \left|e^{2i\theta}\right| + \left|e^{3i\theta}\right| + \left|e^{4i\theta}\right| = 6$$
Enfin pour $\theta = 0$ on obtient $f(0) = 6$ donc
$$\boxed{\sup\{|f(\theta)|\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\} = 6.}$$

III. 5 Etude de sinh *sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *(A vérifier)*

Exercice 69. On définit la fonction *sinus hyperbolique* de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

1. Etude de la fonction sinh sur $\mathbb{C}$.
   (a) Que vaut $\sinh(z)$ quand z est imaginaire pur ?
   (b) La fonction sinh est elle injective ?
2. On note sh la restriction de la fonction sinh à $\mathbb{R}$:

$$\text{sh} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

   Etude de la fonction sh sur $\mathbb{R}$.
   (a) Etudier la fonction sh.
   (b) Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera.
   (c) A retravailler En déduire que la fonction sinh est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
   (d) On note $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$
3. Etude de la réciproque. On note argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de sh.
   (a) Comment obtenir la courbe représentative de argsh à partir de celle de sh.
   (b) Démontrer que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

   (c) En résolvant $y = \text{sh}(x)$ déterminer l'expression de $\text{argsh}(y)$ en fonction de y et retrouver ensuite le résultat de la question précédente.
4. Etudier la limite de $\text{argsh}(x) - \ln(x)$ quand $x \to +\infty$.

Correction 73.

1. Soit z un imaginaire pur, il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = i\theta$. On a alors $\sinh(z) = \sinh(i\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i\sin(\theta)$ d'après les formules d'Euler.

   En particulier la fonction sinh n'est pas injective sur $\mathbb{C}$: on a $\sinh(0) = \sinh(2i\pi) = 0$.

(2) (a) La fonction sh est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Comme l'exponentielle est psitive sur $\mathbb{R}$, $\text{sh}'(x) > 0$ et la fonction est donc strictement croissante.

   (b) Ses limites valent $\lim_{x \to +\infty} sh(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} sh(x) = -\infty$. Comme sh est continue, le théorème de la bijection assure que sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   (c) Cette question était mal posée et trop compliquée, je l'ai retirée du barême. Je propose la solution à la fin de l'exercice.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\
&= \frac{(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x})}{4} - \frac{(e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x})}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

3. (a) C'est du cours : il suffit de faire la symétrie par rapport à la première diagonale, la droite d'équation $y = x$.

(b) La fonction argsh est dérivable car sh est dérivable de dérivée non nulle sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vérifie :

$$\mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{argsh}(x))}$$

Or le calcul montre que $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$, comme de plus $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)}$ d'après la question 2d) on a :

$$\mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

(c) On résout $y = \mathrm{sh}(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
2ye^x &= e^{2x} - 1 \\
e^{2x} - 2ye^x - 1 &= 0
\end{aligned}$$

En posant $u = e^x$, on obtient une équation du second degré $u^2 - 2yu - 1 = 0$ qui admet deux racines réelles :

$$u_+ = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{et} \quad u_- = y - \sqrt{y^2 + 1}$$

Comme u_- est négatif et que l'on a posé $u = e^x$ la seule solution de $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ est $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, autrement dit

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

On retrouve que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\begin{aligned}
\mathrm{argsh}'(x) &= \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh}(x) - \ln(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \ln(x) \\ &= \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right) \\ &= \ln\left(1 + \sqrt{+\frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argsh}(x) - \ln(x) = \ln(2).$$

Surjectivité de sinh. Il faut commencer de la même manière que pour trouver l'expression de argsh dans $\mathbb{R}$ mais en se rappelant que $y \in \mathbb{C}$. Pour tout $y \in \mathbb{C}$ on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sinh(z) = y$. Autrement dit on résout

$$e^{2z} - 2ye^z + 1 = 0$$

Soit $Z = e^z$. On souhaite résoudre $Z^2 - 2yZ + 1 = 0$. Ici y est complexe. Le discriminant vaut $\Delta = 4y^2 + 4$ (il n'est ni positif, ni négatif, il est complexe !) Il existe $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = \Delta$. Les deux racines sont donc

$$Z_+ = \frac{2y+u}{2} \quad \text{et} \quad Z_- = \frac{2y-u}{2}$$

On revient à la variable z. Pour cela il faut écrire Z_+ (ou Z_- d'ailleurs) sous forme trigonométrique : $Z_+ = |Z_+|e^{i\theta_+}$. et on fini par prendre $z = \ln(|Z_+|) + i\theta_+$ (Ici le logarithme est bien définie, c'est le logarithme réel que l'on connait, bon il faudrait vérifier que $|Z_+|$ n'est pas égal à 0 ce qui équivaut à $Z_+ = 0$...) De nouveau on retrouve que la fonction n'est pas injective, on peut prendre θ_+ modulo 2π.

III. 6 *Géométrie, droite et inclusion*

Exercice 70. Soit $D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y = -2 \text{ et } 3y - 2z = 0\}$ $D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - z = -1 \text{ et } 3x - z = -3\}$

1. Soit $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in D_1$. Exprimer x_1 et y_1 en fonction de z_1.
2. Etablir que $D_1 \subset D_2$
3. Soit $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in D_2$. Exprimer x_2 et y_2 en fonction de z_2.
4. Etablir que $D_2 \subset D_1$.

Correction 74. Soit $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in D_1$. On a $x_1 - y_1 = -2$ et $3y_1 - 2z_1 = 0$ donc

$$\boxed{y_1 = \tfrac{2}{3}z_1}$$

et $2x_1 = -2 + y_1 = -2 + \frac{2}{3}z_1$ donc

$$\boxed{x_1 = -1 + \tfrac{1}{3}z_1}$$

Ainsi

$$x_1 + y_1 - z - 1 = -1 + \frac{1}{3}z_1 + \frac{2}{3}z_1 - z_1 = -1$$

et

$$3x_1 - z_1 = -3 + z_1 - z_1 = -3$$

Donc $P_1 \in D_2$. Le résultat étant vrai pour tout $P_1 \in D_1$, on a donc

$$\boxed{D_1 \subset D_2}$$

Soit $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in D_2$. On a $x_2 + y_2 - z_2 = -1$ et $3x_2 - z_2 = -3$ donc

$$\boxed{x_2 = -1 + \frac{1}{3}z_2}$$

et $y_2 = -1 + z_2 - x_2 = -\frac{1}{3}z_2 + z_2 = \frac{2}{3}z_2$ donc

$$\boxed{y_2 = \frac{2}{3}z_2}$$

Ainsi

$$2x_2 - y_2 = -2 + \frac{2}{3}z_2 - \frac{2}{3}z_2 = -2$$

et

$$3y_2 - z_2 = 3\frac{2}{3}z_2 - z_2 = 0$$

Donc $P_2 \in D_1$. Le résultat étant vrai pour tout $P_2 \in D_2$, on a donc

$$\boxed{D_2 \subset D_1}$$

III. 7 Matrice, famille libre, commutant

Exercice 71. Soit A la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda \operatorname{Id}$ n'est pas inversible. On appelle ces réels les *valeurs propres* de A.
2. (a) Calculer A^2 et A^3.
   (b) Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   (c) Montrer que (Id_3, A, A^2) est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (d) Est-ce une base ?
3. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Soit α, β, γ trois réels et $M = \alpha \operatorname{Id}_3 + \beta A + \gamma A^2$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}$
   (c) Réciproquement, on considère a, b, c, d, e, f, g, h, et i des réels tel que $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Déterminer, en fonction des coefficients de M, trois réels α, β, γ tels que $M = \alpha \operatorname{Id}_3 + \beta A + \gamma A^2$

(d) En déduire, une base de $\mathcal{S}$.

4. On considère S' l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.

   (a) Est ce que $\mathcal{S}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

   (b) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.
   Dans la suite, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^3$, le produit matriciel MX soit correctement défini.

   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$..

      i. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.

      ii. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.

      iii. Montrer que la famlille $B = (X, MX, M^2X)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction 75.

1. $A - \lambda \operatorname{Id}_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Cette matrice est déjà échelonnée, elle n'est pas inversible si et seulement si $\lambda = 0$.

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$.

3. (a) $\mathcal{S}$ contient la matrice nulle, $\mathcal{S}$ est donc non vide. De plus si $M, N \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(M + \lambda N)A &= MA + \lambda NA \\ &= AM + \lambda AN \\ &= A(M + \lambda N)\end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (b) Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $M = \alpha \operatorname{Id}_3 + \beta A + \gamma A^2$. On a

$$\begin{aligned}AM &= A(\alpha \operatorname{Id}_3 + \beta A + \gamma A^2) \\ &= \alpha A + \beta A^2 + \gamma A^3 \\ &= (\alpha \operatorname{Id}_3 + \beta A + \gamma A^2)A \\ &= MA\end{aligned}$$

   Ainsi $M \in \mathcal{S}$.

   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ On a

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} b & e & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathcal{S}$ on obtient les équations suivantes : $\begin{cases} b = 0 \\ e = 0 \\ 0 = 0 \\ a = e \\ b = f \\ c = 0 \\ d = h \\ e = i \\ f = 0 \end{cases}$ Ce qui se simplifie en $\begin{cases} b = c = f = 0 \\ a = e = i \\ d = h \end{cases}$

Au final si $M \in \mathcal{S}$, M est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} = a \operatorname{Id}_3 + dA + gA^2$$

(d) On en déduit que $\mathcal{S} = \{M = \alpha \operatorname{Id}_3 + \beta A + \gamma A^2 \,|\, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\} = \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}_3, A, A^2)$. On a vu à la question 2b) que $(\operatorname{Id}_3, A, A^2)$ etait une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, comme elle est génératrice de $\mathcal{S}$ par définition d'un espace vectoriel engendré c'est donc une base de $\mathcal{S}$.

4. (a) La matrice nulle n'appartient pas à $\mathcal{S}'$ car $0^2 = 0$.

(b) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $M = PAP^{-1}$, on d'une part $M^2 = PA^2P^{-1}$ qui est non nul car A^2 est non null et P et P^{-1} sont inversibles et d'autre part $M^3 = PA^3P^{-1} = P0P^{-1} = 0$. Donc $M \in \mathcal{S}'$

(c) i. $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $M \in \mathcal{S}'$.

ii. Si tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vérifiaient $M^2X = 0$, alors $M^2 = 0$ (il suffit de vérifier avec les vecteurs de la base canonique). Ainsi il existe un vecteur tel $M^2X \neq 0$

iii. Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_0 X + \lambda_1 MX + \lambda_2 M^2 X = 0$$

On a en composant par M :

$$\lambda_0 MX + \lambda_1 M^2 X + \lambda_3 M^3 X = 0$$

Or $M^3 = 0$ donc

$$\lambda_0 MX + \lambda_1 M^2 X = 0$$

En réitérant le processus on obtient

$$\lambda_0 M^2 X = 0$$

Or comme $M^2 X \neq 0$ par hypothèse, on a $\lambda_0 = 0$ L'équation précédente donne alors $\lambda_1 = 0$ et finalement

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

La famille est libre. Comme elle contient 3 vecteurs dans un ev de dimension 3 c'est une base.

III. 8 Complexe, raisonnement par l'absurde, recurrence

Exercice 72. Soit z, z' deux nombres complexes.

1. Rappeler les valeurs de $A = z\overline{z}$, $B = |z\overline{z}|$, $C = |\overline{z}z'|^2$ en fonction de $|z|$ et $|z'|$.
2. On suppose dans cette question et la suivante que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$. Montrer que
$$\overline{z}z' \neq 1$$
3. Montrer que
$$1 - \left|\frac{z - z'}{1 - \overline{z}z'}\right|^2 = \frac{(1 - |z'|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{z}z'|^2}$$
4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes vérifiant : $|z_0| < 1, |z_1| < 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$z_{n+2} = \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n}z_{n+1}}$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < 1$ et que $\overline{z_n}z_{n+1} \neq 1$, et donc que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pourra utiliser les deux questions précédentes dans une récurrence double

Correction 76.

1. Comme $|z| < 1$ et $|z'| < 1$ on a $|\overline{z}z'| = |\overline{z}||z'| = |z||z'| < 1$. Or si deux nombres complexes sont égaux ils ont même module, donc $\overline{z}z'$ ne peut pas être égal à 1, sinon ils auraient le même module.
2. Après avoir mis au même dénominateur le membre de gauche, on va utiliser le fait que pour tout complexe u, on a $|u|^2 = u\overline{u}$:
$$\begin{aligned}
1 - \left|\frac{z - z'}{1 - \overline{z}z'}\right|^2 &= \frac{|1 - \overline{z}z'|^2 - |z - z'|^2}{|1 - \overline{z}z'|^2} \\
&= \frac{(1 - \overline{z}z')(\overline{1 - \overline{z}z'}) - (z - z')(\overline{z - z'})}{|1 - \overline{z}z'|^2} \\
&= \frac{(1 - \overline{z}z')(1 - z\overline{z'}) - (z - z')(\overline{z} - \overline{z'})}{|1 - \overline{z}z'|^2} \\
&= \frac{(1 - \overline{z}z' - z\overline{z'} + |\overline{z}z'|^2) - (|z|^2 - \overline{z'}z - \overline{z}z' + |z'|^2)}{|1 - \overline{z}z'|^2} \\
&= \frac{(1 + |\overline{z}z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2)}{|1 - \overline{z}z'|^2}
\end{aligned}$$
Remarquons enfin que $(1 - |z|^2)(1 - |z'|^2) = 1 + |zz'|^2 - |z|^2 - |z'|^2$. Or $|\overline{z}z'|^2 = |\overline{z}|^2|z'|^2 = |z|^2|z'|^2 = |zz'|^2$. On a bien
$$\boxed{1 - \left|\frac{z - z'}{1 - \overline{z}z'}\right|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z'|^2)}{|1 - \overline{z}z'|^2}}$$
3. Soit $P(n)$ la propriété : « $|z_n| < 1$ et $|z_{n+1}| < 1$ » . Remarquons que d'après la question 2, $P(n)$ implique que $\overline{z_n}z_{n+1} \neq 1$ et donc que z_{n+2} est bien définie.
Prouvons $P(n)$ par récurrence.

Initialisation : $P(0)$ est vraie d'après l'énoncé : $|z_0| < 1$ et $|z_1| < 1$.

Hérédité : On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons alors $P(n+1)$: « $|z_{n+1}| < 1$ et $|z_{n+2}| < 1$ ». Par hypothèse de récurrence on sait déjà que $|z_{n+1}| < 1$ il reste donc à prouver que $|z_{n+2} < 1$.
On a

$$|z_{n+2}| = \left| \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n} z_{n+1}} \right|$$

Or d'après la question 3,

$$\left| \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n} z_{n+1}} \right|^2 = 1 - \frac{(1 - |z_n|^2)(1 - |z_{n+1}|^2)}{|1 - \overline{z_n} z_{n+1}|^2}$$

Par hypothèse de récurrence, $(1 - |z_n|^2)(1 - |z_{n+1}|^2) > 0$. Le dénominateur est aussi positif, donc $\frac{(1-|z_n|^2)(1-|z_{n+1}|^2)}{|1-\overline{z_n} z_{n+1}|^2} > 0$ et ainsi :

$$\left| \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n} z_{n+1}} \right|^2 < 1$$

Donc $|z_{n+2}| < 1$. On a donc prouvé que la propriété P était hériditaire.
Conclusion : Par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme remarqué au début de récurrence, ceci implique que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III. 9 Simplification de $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$

Exercice 73. On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$. On rappelle que pour tout réel y on note $\sqrt[3]{y}$ l'unique solution de l'équation $x^3 = y$ d'inconnue x.

Le but de l'exercice est de donner des expressions simplifiées de α et β.

1. Ecrire un script Python qui permet d'afficher une valeur approchée de α.
2. (a) Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
   (b) Vérifier que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.
   (c) En déduire que $(\alpha + \beta)^3 = 4 - 3(\alpha + \beta)$
3. On pose $u = \alpha + \beta$ et on considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + 3x - 4$.
   (a) A l'aide de la question précédente montrer que u est une racine de P c'est-à-dire que $P(u) = 0$.
   (b) Trouver une autre racine « évidente » de P.
   (c) Trouver trois nombres réels a, b, et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
   (d) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (e) En déduire la valeur de u.
4. On considère la fonction polynomiale $Q : x \mapsto Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$
   (a) A l'aide des questions précédentes, développer et simplifier $Q(x)$ pour tout nombre réel x.
   (b) En déduire des expressions plus simples de α et β.

Correction 77.

1.
```python
print((2+5**(1/2))**(1/3))
```

2. (a)

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\\ &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}}\\ &= \sqrt[3]{4-5}\\ &= \sqrt[3]{-1}\\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}\\ &= 4\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha\beta=-1 \text{ et } \alpha^3+\beta^3=4}$$

(b)

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.}$$

(c)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ &= 4-3\alpha\beta\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}P(u) &= P(\alpha+\beta)\\ &= (\alpha+\beta)^3+3\alpha\beta-4\\ &= 0 \quad \text{d'après la question précédente}\end{aligned}$$

$$\boxed{u \text{ est racine de } P}$$

4. 1 est aussi racine de P, en effet : $P(1)=1+3-4=0$

$$\boxed{1 \text{ est racine de } P}$$

5. Développons $(x-1)(ax^2+bx+c)$ on obtient

$$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

En identifiant avec P, on a : $a = 1, b-a = 0, c-b = 3, -c = -4$ c'est à dire

$$\boxed{a = 1,\ b = 1 \text{ et } c = 4}$$

6. D'après la question précédente $P(x) = (x-1)(x^2+x+4)$ Le discriminant de x^2+x+4 est $\Delta = 1 - 4*4 = -15 < 0$ $x^2+x+4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $P(x) = 0$ admet pour unique solution

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$$

7. 1 est racine de P, c'est la seule. Comme u est aussi racine,

$$\boxed{u = 1}$$

8. (a) Développons Q :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-\alpha)(x-\beta) \\ &= x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta \\ &= x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ Q(x) = x^2 - x - 1}$$

   (b) L'expression $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ montre que les racines de Q sont α et β.
   D'autre part, on connait une autre expression des racines de Q à l'aide du discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, les racines de Q sont

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

   Remarquons que $r_1 < r_2$ et on a $\alpha < \beta$ donc

$$\boxed{\alpha = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

III. 10 Equation du second degré à coeff complexes

Exercice 74. On considère l'équation du second degré suivante :

$$z^2 + (3i-4)z + 1 - 7i = 0 \quad (E)$$

1. A la manière d'une équation réelle, calculer le discriminant Δ du polynôme complexe, et montrer que $\Delta = 3 + 4i$
2. On se propose de résoudre (E_2) : $u^2 = \Delta$ d'inconnue complexe u.
   (a) On écrit $u = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que (E_2) est équivalent à

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{x}.$$

(b) En déduire que les solutions de (E_2) sont

$$u_1 = 3 - i \quad \text{et} \quad u_2 = 1 - 2i$$

3. Soit u_1 une solution de l'équation précédente. On considère $r_1 = \frac{-3i+4+u_1}{2}$. Montrer que r_1 est solutions de l'équation (E).
4. Quelle est à l'autre solution de (E) ?

Correction 78. On suit les étapes indiquées dans l'énoncé.

1. Le discriminant vaut

$$\Delta = (3i-4)^2 - u^4(1-7i) = -9 - 24i + 16 - 4 + 28i = 3 + 4i$$

2. Résolvons $u^2 = 3 + 4i$.

(a) On pose donc $u = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ On a donc $(x+iy)^2 = 3+4i$, soit $x^2-y^2+2xyi = 3+4i$ En identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient :

$$x^2 - y^2 = 3 \quad 2xy = 4$$

Comme $x \neq 0$ (sinon $\Delta \in \mathbb{R}_-$), la deuxième équation devient

$$\boxed{y = \frac{2}{x}.}$$

On remplace alors y avec cette valeur dans la première équation, ce qui donne :

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$$

et en multipliant par x^2

$$\boxed{x^4 - 3x - 4 = 0}$$

(b) On fait un changement de variable $X = x^2$ dans l'équation $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. On obtient

$$X^2 - 3X - 4 = 0$$

De discriminant $\Delta_2 = 9+4*4 = 25 = 5^2$. Cette équation admet ainsi deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

Remarquons maintenant que X doit être positif car $x^2 = X$ ainsi, les solutions pour la variable x sont

$$x_1 = \sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = -\sqrt{4} = -2$$

Ce qui correspond respectivement à $y_1 = 1$ et $y_2 = -1$ On obtient finalement deux solutions pour $u^2 = \Delta$ à savoir

$$\boxed{u_1 = 2 + i \quad \text{et} \quad u_2 = -2 - i}$$

3. On considère donc $r_1 = \frac{-3i+4+2+i}{2} = 3 - i$. Montrons que r_1 est solution de (E)

$$r_1^2 = (3-i)^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i$$
$$(3i-4)r_1 = (3i-4)(3-i) = 9i + 3 - 12 + 4i = -9 + 13i$$

Donc $r_1^2 + (3i-4)r_1 = 8 - 6i - 9 + 13i = -1 + 7i$ Soit

$$r_1^2 + (3i-4)r_1 + 1 - 7i = 0$$

$$\boxed{\text{Donc } r_1 \text{ est bien solution de } (E).}$$

4. L'autre solution est sans aucun doute

$$\boxed{r_2 = \frac{-3i+4+u_2}{2} = 1 - 2i}$$

III. 11 Inégalitée somme/factorielle

Exercice 75. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)! \geq \sum_{k=0}^{n} k!$$

Les récurrences c'est bien mais long...

Correction 79. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $k! \leq n!$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} k! \leq \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

III. 12 Double somme des min

Exercice 76. Calculer

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \min(i,j)$$

Correction 80. Solution 1 :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}\min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\min(i,j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}+\sum_{i=1}^{n}(n-i)i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{-i^2+(2n+1)i}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}-i^2+(2n+1)\sum_{i=1}^{n}i\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(2n+1)\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Solution 2 :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}\min(i,j) &= \sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i=j}\min(i,j)+\sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i<j}\min(i,j)+\sum_{i,j\in[\![1,n]\!],j<i}\min(i,j)\\
&= \left(\sum_{i\in[\![1,n]\!]}i\right)+\left(2\sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i<j}i\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}i\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)i\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)i\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+2\left(\frac{n^2(n-1)}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}+2\frac{n(n-1)(n+1)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(3+2(n-1))}{6}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

III. 13 Géométrie représentation paramétrique de droite.

Exercice 77. On considère les vecteurs de l'espace $\vec{u} = (-2, 1, 2)$ et $\vec{v} = (1, 4, -1)$.

1. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|(-2)\vec{v}\|$.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
3. Donner la représentation paramétrique de la droite D passant par $A = (2, -3, 1)$ et dirigée par $\vec{v}$.
4. Déterminer si le point $B = (3, 1, 0)$ appartient à D.

Correction 81.

1. $$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$
   et
   $$\vec{v} = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
2. Calculons le produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
   $$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -2 \times 1 + 1 \times 4 + 2 \times -1 = -2 + 4 - 2 = 0$$
   D'après le cours, les deux vecteurs sont donc orthogonaux.
3. $M = (x, y, z) \in D$ si et seulement si $\vec{AM}$ est colinéaire à $\vec{v}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AM} = \lambda \vec{v}$. On obtient donc
   $$\begin{cases} x - 2 &= \lambda \times 1 \\ y + 3 &= \lambda \times 4 \\ z - 1 &= \lambda \times (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 2 + \lambda \\ y &= -3 + 4\lambda \\ z &= 1 - \lambda \end{cases}$$
4. Il faut vérifier si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\begin{cases} 3 &= 2 + \lambda \\ 1 &= -3 + 4\lambda \\ 0 &= 1 - \lambda \end{cases}$$
   La première équation donne $\lambda = 1$, les autres équations sont compatibles : $1 = -3 + 4 \times 1$ et $0 = 1 - 1 \times 1$. Ainsi
   $$B \in D$$

III. 14 Géométrie et complexe

Exercice 78. On considère $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 2\}$.

1. Rappeler la nature géométrique de S. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$. Déterminer D_f le domaine de définition de f. Est elle bien définie pour tous les points de S ?
2. (a) Mettre $f(z) - \frac{7}{3}$ sous la forme d'une fraction.

   (b) Montrer que pour tout z dans l'ensemble de définition de f,
   $$\left| f(z) - \frac{7}{3} \right|^2 = \frac{|z|^2 + 8\mathfrak{Re}(z) + 16}{9(|z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z) + 1)}$$

(c) On note S_2 le cercle de centre $7/3$ et de rayon r_0. Montrer que $f(S) \subset S_2$

3. (a) Soit $y = f(z)$, exprimer z en fonction de y quand cela a un sens.
   (b) Déterminer l'ensemble F tel que $f : D_f \to F$ soit bijective. Déterminer l'expression de f^{-1}
   (c) (Difficile) Montrer que pour tout $y \in S_2$, $f^{-1}(y) \in S$.
   (d) En déduire $f(S)$.

Correction 82.

1. S est le cercle de centre 0 et de rayon 2. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Comme $|-1| = 1$, $-1 \notin S$ donc f est bien définie sur S.
2. (a)
$$f(z) - \frac{7}{3} = \frac{6z+3-7(z+1)}{3(z+1)} = \frac{-z-4}{3(z+1)}$$
   (b)
$$\begin{aligned}
\left|f(z) - \frac{7}{3}\right|^2 &= \left|\frac{-z-4}{3(z+1)}\right|^2 \\
&= \frac{|z+4|^2}{9|z+1|^2} \\
&= \frac{(z+4)\overline{(z+4)}}{9(z+1)\overline{(z+1)}} \\
&= \frac{(z+4)(\overline{z}+4)}{9(z+1)(\overline{z}+1)} \\
&= \frac{z\overline{z}+4(z+\overline{z})+16}{9(z\overline{z}+(z+\overline{z})+1)} \\
&= \frac{|z|^2+8\mathfrak{Re}(z)+16}{9(|z|^2+2\mathfrak{Re}(z)+1)}
\end{aligned}$$
   (c) (La question était manifestement mal posée, il aurait par exemple fallu présicer le rayon qui vaut $\frac{2}{3}$)
   Pour tout $z \in S$, on a $|z|^2 = 4$ donc pour tout $z \in S$:
$$\begin{aligned}
\left|f(z) - \frac{7}{3}\right|^2 &= \frac{4+8\mathfrak{Re}(z)+16}{9(4+2\mathfrak{Re}(z)+1)} \\
&= \frac{8\mathfrak{Re}(z)+20}{9(2\mathfrak{Re}(z)+5)} \\
&= \frac{4(2\mathfrak{Re}(z)+5)}{9(2\mathfrak{Re}(z)+5)} \\
&= \frac{4}{9} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2
\end{aligned}$$
   On obtient $r_0 = \frac{2}{3}$ car $\left|f(z) - \frac{7}{3}\right| > 0$.
   Ainsi pour tout $z \in S$ on a $f(z) \in S_2$. D'où $f(S) \subset S_2$.

3. (a) On résout $y = f(z)$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{2z+1}{z+1} \\ (z+1)y &= 2z+1 \\ z(y-2) &= 1-y \\ z &= \frac{1-y}{y-2} \quad y \neq 2 \end{aligned}$$

(b) Ainsi $f : D_f \to \mathbb{C} \setminus \{2\}$ réalise une bijection et $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{y-2}$

(c) Soit $y \in S_2$ on va réaliser le même procédé que la question 2b) pour f^{-1}. Comme on va s'intéresser aux images de $y \in S_2$ on cherche à mettre en lumière le role de $|y - \frac{7}{3}|$

$$\begin{aligned} \left|f^{-1}(y)\right|^2 &= \frac{|1-y|^2}{|y-2|^2} \\ &= \frac{|y-1|^2}{|y-2|^2} \\ &= \frac{|(y-\frac{7}{3})+\frac{4}{3}|^2}{|(y-\frac{7}{3})+\frac{1}{3}|^2} \\ &= \frac{|y-\frac{7}{3}|^2 + \frac{8}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3}) + \frac{16}{9}}{|y-\frac{7}{3}|^2 + \frac{2}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3}) + \frac{1}{9}} \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout $y \in S_2$ on a $|y - \frac{7}{3}|^2 = \frac{4}{9}$ donc pour tout $y \in S_2$ on a

$$\begin{aligned} \left|f^{-1}(y)\right|^2 &= \frac{\frac{4}{9} + \frac{8}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3}) + \frac{16}{9}}{\frac{4}{9} + \frac{2}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3}) + \frac{1}{9}} \\ &= \frac{\frac{8}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3}) + \frac{20}{9}}{\frac{2}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3}) + \frac{5}{9}} \\ &= \frac{24\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3}) + 20}{6\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3}) + 5} \\ &= \frac{4(6\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3}) + 5)}{6\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3}) + 5} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $y \in S_2$ $f^{-1}(y)$ appartient au cercle de centre 0 et de rayon 2, c'est-à-dire S. On vient donc de montrer $f^{-1}(S_2) \subset S$.

(d) Les questions 2c) et 3c) impliquent que $f(S) = S_2$

III. 15 Logique et trigo

Exercice 79. 1. A quelle condition sur $X, Y \in \mathbb{R}$ a-t-on

$$X = Y \iff X^2 = Y^2$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi[$ l'équation :

$$|\cos(x)| = |\sin(x)|. \tag{11}$$

Correction 83.

1. On a $X = Y \iff X^2 = Y^2$ si X et Y sont de même signe.
2. Comme $|\cos(x)| \geq 0$ et $|\sin(x)| \geq 0$ l'équation est équivalente à $\cos^2(x) = \sin^2(x)$, soit encorrectione

$$\cos(2x) = 0.$$

On a donc $2x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ ou encorrectione

$$x \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\frac{\pi}{2}]$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in Z} \{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\}$$

Sur $[-\pi, \pi[$ les solutions sont :

$$\mathcal{S} \cap [-\pi, \pi[= \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}\}$$

III. 16 Suite récurrence complexes $z_{n+1} = z_n^2 - 2iz_n - 1 + i$

Exercice 80. Soit $1 > \epsilon > 0$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| \leq 1 - \epsilon$. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = i + u$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = z_n^2 - 2iz_n - 1 + i$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n - i| \leq (1-\epsilon)^{2^n}$. En déduire la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 84. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} - i = z_n^2 - 2iz_n - 1 = (z_n - i)^2$$

.

On va procéder par récurrence. Pour $n = 0$ on a

$$|z_0 - i| = |u| \leq 1 - \epsilon = (1-\epsilon)^{2^0}$$

Supposons donc qu'il existe n tel que $|z_n - i| \leq (1-\epsilon)^{2^n}$ et montrons l'inégalité pour $(n+1)$ On a

$$z_{n+1} - i = z_n^2 - 2iz_n - 1 = (z_n - i)^2.$$

Donc

$$|z_{n+1} - i| = |z_n - i|^2,$$

D'après l'hypothése de récurrence on a $|z_n - i| \leq (1-\epsilon)^{2^n}$, d'où

$$|z_n - i|^2 \leq \left((1-\epsilon)^{2^n}\right)^2 = (1-\epsilon)^{2\times 2^n}$$

C'est à dire

$$|z_{n+1} - i| \leq (1-\epsilon)^{2^{n+1}}$$

L'inégalité est donc héréditaire et la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $|1-\epsilon| < 1$ on a $\lim_{n\to\infty}(1-\epsilon)^{2^{n+1}} = 0$ donc

$$\lim_{n\to\infty} z_n = i.$$

IV probabilité

IV. 1 Urne Indépendance d'évenements (facile)

Exercice 81. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements

A="tirage d'un nombre pair"
B="tirage d'un multiple de 3"

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Correction 85.

1. On a :

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$
$$B = \{3, 6, 9, 12\}$$
$$A \cap B = \{6, 12\}.$$

   On a donc $P(A) = 1/2, P(B) = 1/3$ et $P(A \cap B) = 1/6 = P(A)P(B)$. Les événements A et B sont indépendants.

2. Les événements A, B et $A \cap B$ s'écrivent encore exactement de la même façon. Mais cette fois, on a : $P(A) = 6/13, P(B) = 4/13$ et $P(A \cap B) = 2/13 \neq 24/169$. Les événements A et B ne sont pas indépendants. C'est conforme à l'intuition. Il n'y a plus la même répartition de boules paires et de boules impaires, et dans les multiples de 3 compris entre 1 et 13 , la répartition des nombres pairs et impairs est restée inchangée.

IV. 2 Sujet Révision - Shuffle Ipod

Problème 3. Dans tout le problème, n sera un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un I-Pod contient n pistes (numérotées de 1 à n) et fonctionne en mode aléatoire selon le protocole suivant :

— La première psite lie est choisie de façon aléatoire et uniforme parmi les n pistes.

— A la fin de la lecture d'une piste, la suivante est choisie de façon aléatoire et uniforme parmi les n pistes. (Il est donc possible que la même piste soit lue plusieurs fois de suite...)
Ce problème étudie différents aspects de vette lecture aléatoire. Les différentes partites sont dans une grande mesure indépendantes les unes des autres.

Partie A

Dans cette partie on fixe un entier naturel k supéreiur ou égal à 1 et on s'intéresse aux k premières lectures effectuées. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le nombre de fois où la piste numéro i est lue au cours des k premières lectures.

1. Déterminer la loi de X_i et donner son espérance est sa variance.
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

3. (a) Que vaut $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$?
   (b) En déduire que la covariance de X_i et X_j pour tout $i \neq j$ vaut $\frac{-k}{n^2}$.
4. (a) Déterminer la loi conjointe de X_i et X_j pour tout $i \neq j$.
   (b) Retrouver alors le résultat du 3b.
5. Commenter le signe de la covariance de X_i et X_j pour $i \neq j$.
6. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$, n entiers naturels.
   (a) On suppose que $\sum_{i=1}^n a_i \neq k$. Que vaut la probabilité $\mathbb{P}(X_1 = a_1 \cap X_2 = a_2 \cap \dots X_n = a_n)$?
   (b) On suppose maintenant que $\sum_{i=1}^n a_i = k$. Montrer que probabilité

$$\mathbb{P}(X_1 = a_1 \cap X_2 = a_2 \cap \dots X_n = a_n) = \frac{k!}{a_1!a_2!\dots a_n!}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

Partie B

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Z_k le nombre de pistes différentes qui ont été lues au moins une fois au cours des k premières lectures.

1. Décrire avec soin l'ensemble des valeurs que prend Z_k en fonction de n et k.
2. Quelle est la loi de Z_1 ? Donner son espérance et sa variance.
3. (a) Soient i et j entre 1 et n. Détermminer $P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = j)$ en distinguant les cas $j = i$, $j = i+1$ et $j \notin \{i, i+1\}$
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$P(Z_{k+1} = i) = \frac{i}{n}P(Z_k = i) + \frac{n-i+1}{n}P(Z_k = i-1)$$

   (c) Calculer $P(Z_k = 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (d) On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = n^{k-1}P(Z_k = 2)$. Exprimer α_{k+1} en fonction de α_k et n, puis en déduire l'expression de α_k en fonction de k et n.
   (e) Déduire de ce qui précède la valeur de $P(Z_k = 2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. (a) A l'aide de la question $3b$ montrer que :

$$E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}E(Z_k) + 1$$

   (b) En déduire l'expression de $E(Z_k)$ en fonction de n et k.
   (c) Calculer la limite quand $k \to +\infty$ de $E(Z_k)$. Ce résultat était-il prévisible ?
   (d) Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de $E(Z_k)$. Ce résultat était-il prévisible ?
5. On va dans cette question montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(Z_k = i) = \frac{\binom{n}{i}}{n^k}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(i-j)^k$$

   (a) Montrer que la propriété est vraie pour $k = 1$ (traiter séparément les cas $i = 1$ et $i > 1$.)
   On suppose la propriété vraie pour un certain rang $k \in \mathbb{N}^*$ et on va montrer qu'elle est vraie pour le rang $k+1$.

(b) Montrer que la relation au rang $k+1$ est vraie pour $i=1$.

(c) A l'aide du résultat de la question 3b, montrer que la relation au rang $k+1$ est vraie pour tout $i \geq 2$.

(d) Conclure.

(e) Soient k et i deux entiers tels que $1 \leq k < i$. Que vaut $\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j \binom{i}{j}(i-j)^k$?

Correction 86.

1. Par symétrie du problème, tous les X_i suivent la même loi. On a $X_i(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et ce sont des sommes de k variables de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{n}$ ce sont donc des binomiales $\mathcal{B}(k, \frac{1}{n})$
2. $\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = 1) = 0$ en effet, si la piste 1 a été jouée k fois, il n'est pas possible que la piste 2 ait été jouée. En revanche $\mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = 1) \neq 0$. Ainsi les variables ne sont pas 2 à 2 indépendantes, donc a fortiori elles ne sont pas mutuellement indépendantes.
3. $\sum_{i=1}^n X_i = k$
4. Remarquons que les covariances $\text{Cov}(X_i, X_j)$ sont toutes égales pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]^2$ pour $i \neq j$ par symétrie du problème. On note ce nombre α.
   Par ailleurs, $\text{Cov}(X_i, X_i) = V(X_i) = \frac{1}{n}\frac{n-1}{n}k$ (formule du cours)
   Maintenant on calcule $\text{Cov}(\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i, X_j)$ de deux manières : Par linéarité vis-à-vis de la première variable on obtient
   $$\text{Cov}(\sum_{i=1}^n X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) = (n-1)\alpha + \frac{1}{n}\frac{n-1}{n}k$$
   On calcule directement à l'aide de la formule de Koenig Huygens, comme $\sum_{i=1}^n X_i = k$ on obtient :
   $$\text{Cov}(\sum_{i=1}^n X_i, X_j) = \text{Cov}(k, X_j) = E(kX_j) - E(k)E(X_j) = 0$$
   Ainsi
   $$(n-1)\alpha + \frac{1}{n}\frac{n-1}{n}k = 0$$
   et donc
   $$\text{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{k}{n^2}$$
5. $(X_i, X_j)(\Omega) = [\![1, k]\!]^2$
   Soit $u, v \in [\![1, k]\!]^2$. Si $u + v \geq k$, on a alors $\mathbb{P}(X_i = u, X_j = v) = 0$
   Maintenant si $u + v \leq k$, il faut choisir les places des u fois où la piste i est jouée : il y a $\binom{k}{u}$ possibilités, chacune arrivant avec la probabilité $(\frac{1}{n})^u$. Ensuite il faut placer les v fois où la psite j est jouée parmi les lectures restantes : il y a $\binom{k-u}{v}$ possibilités, chacune arrivant avec la probabilité $(\frac{1}{n})^v$.
   On obtient :
   $$\mathbb{P}(X_i = u, X_j = v) = \binom{k}{u}\binom{k-u}{v}\left(\frac{1}{n}\right)^{u+v}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-u-v}$$

6. On sait que $E(X_i) = E(X_j) = \frac{k}{n}$
Calculons maintenant $E(X_iX_j)$.

$$\begin{aligned}
E(X_iX_j) &= \sum_{u=0}^{k}\sum_{v=0}^{k} uv\mathbb{P}(X_i = u, X_j = v)\\
&= \sum_{u=0}^{k}\sum_{v=0}^{k-u} uv\binom{k}{u}\binom{k-u}{v}\left(\frac{1}{n}\right)^{u+v}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{k-u-v}\\
&= \sum_{u=0}^{k} u\binom{k}{u}\left(\frac{1}{n}\right)^{u}\sum_{v=0}^{k-u} v\binom{k-u}{v}\left(\frac{1}{n}\right)^{v}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{k-u-v}
\end{aligned}$$

Analysons la somme intérieure :

$$\begin{aligned}
\sum_{v=0}^{k-u} v\binom{k-u}{v}\left(\frac{1}{n}\right)^{v}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{k-u-v} &= \sum_{v=1}^{k-u} v\binom{k-u}{v}\left(\frac{1}{n}\right)^{v}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{k-u-v}\\
&= \sum_{v=1}^{k-u} (k-u)\binom{k-u-1}{v-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{v}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{k-u-v}\\
&= (k-u)\sum_{v=0}^{k-u-1}\binom{k-u-1}{v}\left(\frac{1}{n}\right)^{v+1}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{k-u-1-v}\\
&= (k-u)\frac{1}{n}\sum_{v=0}^{k-u-1}\binom{k-u-1}{v}\left(\frac{1}{n}\right)^{v}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{k-u-1-v}
\end{aligned}$$

On reconnait un binome de Newton :

$$\sum_{v=0}^{k-u} v\binom{k-u}{v}\left(\frac{1}{n}\right)^{v}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{k-u-v} = (k-u)\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1-\frac{2}{n}\right)^{k-u-1}$$

Revenons en au calcul de $E(X_iX_j)$, en remplacant la somme intérieure par le terme que l'on vient de trouver.

$$\begin{aligned}
E(X_iX_j) &= \sum_{u=0}^{k} u\binom{k}{u}\left(\frac{1}{n}\right)^{u}(k-u)\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-u-1}\\
&= \sum_{u=1}^{k}(k-u)k\binom{k-1}{u-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{u+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-u-1}
\end{aligned}$$

On utilise alors le fait que $(k-u)\binom{k-1}{u-1} = (k-1)\binom{k-2}{u-1}$ (on peut le vériifer en passant par les factorielles) on obtient alors :

$$\begin{aligned}
E(X_iX_j) &= \sum_{u=1}^{k-1} k(k-1)\binom{k-2}{u-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{u+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-u-1}\\
&= k(k-1)\sum_{u=0}^{k-2}\binom{k-2}{u}\left(\frac{1}{n}\right)^{u+2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-u-2}\\
&= k(k-1)(\frac{1}{n})^2\sum_{u=0}^{k-2}\binom{k-2}{u}\left(\frac{1}{n}\right)^{u}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-2-u}\\
&= k(k-1)(\frac{1}{n})^2\left(\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}\right)^{k-2}\\
&= k(k-1)(\frac{1}{n})^2
\end{aligned}$$

On obtient bien alors

$$Cov(X_i,X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = k(k-1)(\frac{1}{n})^2 - (\frac{k}{n})^2 = \frac{-k}{n^2}$$

7. La covariance est négative. En effet les deux variables aléatoires ont un comportement opposées : si le morceau i est lu beaucoup de fois, le morceau j a tendance à être moins lu.
8. Dans ce cas, on a nécessairement $\mathbb{P}(X_1 = a_1 \cap X_2 = a_2 \cap \dots X_n = a_n) = 0$ car il y a k morceaux joués.
9. Il faut placer les a_1 lectures du morceau 1 parmi les k lectures, puis les a_2 lecture du morceau 2 parmi les $k-a$ restante et ainsi de suite.
   Chacune de ces séquence a pour probabilité $\left(\frac{1}{n}\right)^{a_1}\left(\frac{1}{n}\right)^{a_2}...\left(\frac{1}{n}\right)^{a_n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{k}$
   Ainsi

$$\mathbb{P}(X_1 = a_1 \cap X_2 = a_2 \cap \dots X_n = a_n) = \binom{k}{a_1}\binom{k-a_1}{a_2}...\binom{k-a_1-a_2-...-a_{n-1}}{a_n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}$$

   Simplifions le produit des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}
\binom{k}{a_1}\binom{k-a_1}{a_2}...\binom{k-a_1-a_2-...-a_{n-1}}{a_n} &= \frac{k!}{a_1!(k-a_1)!}\frac{(k-a_1)!}{a_2!(k-a_2)!}...\frac{(k-a_1-a_2-...-a_{n-1})!}{a_n!(k-a_1-a_2-...-a_{n-1}-a_n)!}\\
&= \frac{k!}{a_1!a_2!...a_n!}
\end{aligned}$$

   On obtient bien le résultat demandé.

1. $Z_k(\Omega) = [\![1, \min(k,n)]\!]$
2. $Z_1(\Omega) = \{1\}$. Z_1 est variable aléatoire égale certaine égale à 1. $\mathbb{P}(Z_1 = 1) = 1$ et $E(Z_1) = 1$, $V(Z_1) = 0$
3. Si $j = i$ $\mathbb{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = i)$ est la probabilité que le morceau joué au rang $k+1$ soit compris dans les i premiers morceaux joués. On a donc

$$\mathbb{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = i) = \frac{i}{n}$$

Si $j = i+1$ $\mathbb{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = i+1)$ est la probabilité que le morceau joué au rang $k+1$ ne soit pas compris dans les i premiers morceaux joués. On a donc

$$\mathbb{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = i) = \frac{n-i}{n}$$

Si $j \notin \{i, i+1\}$ $\mathbb{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = j)$ est un événement impossible et on a

$$\mathbb{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = j) = 0$$

4. On utilise la formule des probabilités totales.
On obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{k+1} = i) &= \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \mathbb{P}(Z_{k+1} = i \text{ et } Z_k = j) \\
&= \mathbb{P}(Z_{k+1} = i \text{ et } Z_k = i) + \mathbb{P}(Z_{k+1} = i \text{ et } Z_k = i-1) \\
&= \mathbb{P}_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = i)P(Z_k = i) + \mathbb{P}_{(Z_k=i-1)}(Z_{k+1} = i)\mathbb{P}(Z_k = i-1) \\
&= \frac{i}{n}P(Z_k = i) + \frac{n-i+1}{n}P(Z_k = i-1)
\end{aligned}$$

5. $Z_k = 1$ correspond à l'événement : " 1 seule piste a été jouée". On a donc

$$P(Z_k = 1) = (\frac{1}{n})^{k-1}$$

6.

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1} &= n^k P(Z_{k+1} = 2) \\
&= n^k \left(\frac{2}{n}P(Z_k = 2) + \frac{n-1}{n}P(Z_k = 1) \right) \\
&= 2n^{k-1}P(Z_k = 2) + (n-1)n^{k-1}\frac{1}{n^{k-1}} \\
&= 2\alpha_k + n - 1
\end{aligned}$$

C'est donc une suite arithmético géométrique. On obtient

$$\alpha_k = (n-1)(2^{k-1} - 1)$$

7.

$$P(Z_k = 2) = \frac{1}{n^{k-1}}\alpha_k = \frac{(n-1)(2^{k-1}-1)}{n^{k-1}}$$

8.

$$
\begin{aligned}
E(Z_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{n} iP(Z_{k+1}=i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{i}{n}P(Z_k=i)+\frac{n-i+1}{n}P(Z_k=i-1)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n}P(Z_k=i)+\sum_{i=1}^{n} i\frac{n-i+1}{n}P(Z_k=i-1) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{n}P(Z_k=i)+\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\frac{n-i}{n}P(Z_k=i) \quad \text{changement de variable} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{n}P(Z_k=i)+\sum_{i=0}^{n-1} -\frac{i^2}{n}P(Z_k=i)+(i-\frac{i}{n})P(Z_k=i)+(P(Z_k=i) \\
&= nP(Z_k=n)+(1-\frac{1}{n})(E(Z_k)-P(Z_k=n))+(1-P(Z_k=n)) \\
&= (1-\frac{1}{n})E(Z_k)-1
\end{aligned}
$$

9. C'est de nouveau une suite arithmético géométrique. On trouve :

$$E(Z_k)=n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)$$

10.

$$\lim_{k\to+\infty} E(Z_k)=n$$

En effet quand le nombre de lectures est grand, toutes les pistes ont tendance à avoir été lue au moins une fois et Z_k tends vers la constante n, sont espérance en particulier aussi.

11. On va faire un DL, on a $\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=1-\frac{k}{n}+o(\frac{1}{n})$ et donc

$$E(Z_k)=k+o(1)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} E(Z_k)=k$$

Si le nombre de pistes est très grand devant le nombre de lecture, on aura à chaque écoute un nouveau morceau et donc le nombre de morceaux différents joués sera égale au nombre de lectures, autrement dit Z_k aura tendance à être égal à k.

12. On est dans le cas $k=1$. On cherche à montrer que

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad P(Z_1=i)=\frac{\binom{n}{i}}{n}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(i-j)$$

<u>Si $i=1$</u> On cherche à montrer que

$$P(Z_1=1)=\frac{\binom{n}{1}}{n}\sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{1}{j}(1-j)$$

On sait que $P(Z_1=1)=1$ et par ailleurs $\frac{\binom{n}{1}}{n}\sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{1}{j}(1-j)=\frac{n}{n}((-1)^0 1(1-0)=1$
<u>Si $i>1$</u> On sait que $P(Z_1=i)=0$. Par ailleurs

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(i-j) &= \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\frac{i!}{j!(i-j)!}(i-j)\\ &= \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\frac{i!}{j!(i-j-1)!}\\ &= i\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\frac{(i-1)!}{j!(i-1-j)!}\\ &= i\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\\ &= i(1-1)^{i-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $k=1$.

13. Pour $i=1$ on cherche à prouver que

$$P(Z_{k+1}=1)=\frac{\binom{n}{1}}{n^{k+1}}\sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{1}{j}(1-j)^{k+1}$$

On sait d'une part que $P(Z_{k+1}=1)=(\frac{1}{n})^k$
et d'autre part on a

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{1}}{n^{k+1}}\sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{1}{j}(1-j)^{k+1} &= \frac{1}{n^k}(-1)^0 1(1-0)k+1\\ &= \frac{1}{n^k}\end{aligned}$$

14. Soit $i\geq 2$

$$\begin{aligned}P(Z_{k+1}=i) &= \frac{i}{n}P(Z_k=i)+\frac{n-i+1}{n}P(Z_k=i-1)\\ &= \frac{i}{n}\frac{\binom{n}{i}}{n^k}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(i-j)^k+\frac{n-i+1}{n}\frac{\binom{n}{i}}{n^k}\sum_{j=0}^{i-2}(-1)^j\binom{i-1}{j}(i-1-j)^k\end{aligned}$$

REmarquons que $\frac{n-i+1}{n}\frac{\binom{n}{i}}{n^k}=\frac{i\binom{n}{i}}{n^{k+1}}$ et en faisant un changement de variable on obtient

$$\sum_{j=0}^{i-2}(-1)^j\binom{i-1}{j}(i-1-j)^k=-\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j-1}(i-j)^k$$

Donc

$$\begin{aligned}
P(Z_{k+1}=i) &= \frac{i\binom{n}{i}}{n^{k+1}}\left(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}(i-j)^k + -\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j-1}(i-j)^k\right)\\
&= \frac{i\binom{n}{i}}{n^{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\left((-1)^j(i-j)^k\left[\binom{i}{j}-\binom{i-1}{j-1}\right]\right)+i^k\right)\\
&= \frac{\binom{n}{i}}{n^{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\left((-1)^j(i-j)^k\left[i\binom{i-1}{j}\right]\right)+i^k\right)\\
&= \frac{\binom{n}{i}}{n^{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\left((-1)^j(i-j)^k(i-j)\binom{i}{j}\right)+i^k\right)\\
&= \frac{\binom{n}{i}}{n^{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\left((-1)^j(i-j)^{k+1}\binom{i}{j}\right)+i^k\right)\\
&= \frac{\binom{n}{i}}{n^{k+1}}\left(\sum_{j=0}^{i-1}\left((-1)^j(i-j)^{k+1}\binom{i}{j}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ouchhh !

15. Initialisé en 6a et héréditaire en 6c) la propriété est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
16. Cette somme vaut 0.

IV. 3 Fonction génératrice (Pb -dur)

Exercice 82. Pour toute variable aléatoire X telle que l'ensemble de ses valeurs images $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, on définit sa fonction génératrice par :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right)$$

où E désigne l'espérance.
Soit X une telle variable aléatoire. On note $m \in \mathbb{N}$ sa valeur image maximale, ainsi $X(\Omega) \subset \{0, 1, 2, \ldots, m\}$.

1. Justifier que g_X est une fonction polynomiale.
2. (a) Calculer $g_X(1)$.
   (b) Montrer que $g'_X(1) = \mathrm{E}(X)$.
   (c) Montrer que $g''_X(1) = \mathrm{E}(X(X-1))$.
   (d) Exprimer $\mathrm{V}(X)$ (où V désigne la variance) en fonction de $g'_X(1)$ et $g''_X(1)$.
3. (a) Exprimer g_{X+1} à l'aide de g_X.
   (b) Exprimer g_{2X} à l'aide de g_X.
4. Dans cette question, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ où $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$.
   (a) Calculer g_X.
   (b) Retrouver les valeurs de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de la fonction génératrice.

Correction 87.

1. — On a d'après le théorème de transfert :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{m} t^k \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$$

en posant $a_k = \mathrm{P}(X = k)$

$$\boxed{\text{Donc } g \text{ est bien une fonction polynomiale associée au polynôme } \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X].}$$

2. (a) Par définition de g_X, on a $g_X(1) = \mathrm{E}\left(1^X\right) = \mathrm{E}(1) = 1$.

$$\begin{aligned} g_X(1) &= \mathrm{E}\left(1^X\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m} 1^k \mathrm{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}(X = k) \\ &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{m} (X = k)\right) \\ &= \mathrm{P}\left(X \in \bigcup_{k=0}^{m} \{k\}\right) \\ &= \mathrm{P}(X \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}) = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{g_X(1) = 1}$$

(b) La fonction génératrice g_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale d'après la question 1. On a d'après le théorème de transfert :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{m} t^k \mathrm{P}(X = k)$$

donc : $g'_X : t \mapsto \sum_{k=0}^{m} k t^{k-1} \mathrm{P}(X = k)$ et en particulier :

$$g'_X(1) = \sum_{k=0}^{m} k 1^{k-1} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{m} k \mathrm{P}(X = k) = \mathrm{E}(X)$$

$$\boxed{g'_X(1) = \mathrm{E}(X)}$$

(c) La fonction génératrice est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour les mêmes raisons que celles exposées à la question précédente, et on a :

$$g''_X : t \mapsto \sum_{k=0}^{m} k(k-1) t^{k-2} \mathrm{P}(X = k)$$

donc en particulier :

$$g''_X(1) = \sum_{k=0}^{m} k(k-1)1^{k-2}\mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{m} k(k-1)\mathrm{P}(X=k) = \mathrm{E}(X(X-1))$$

d'après le théorème de transfert.

$$\boxed{g''_X(1) = \mathrm{E}(X(X-1))}$$

(d) On a d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$$

Or on a par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(X(X-1)) = \mathrm{E}\left(X^2 - X\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)$$

On peut également justifier cette égalité en détaillant les calculs à l'aide du théorème de transfert et la linéarité de la somme. D'où en utilisant les résultats des questions précédentes :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2\\ &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)^2\\ &= \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X)(1-\mathrm{E}(X))\\ &= g''_X(1) + g'_X(1)\left(1 - g'_X(1)\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{V}(X) = g''_X(1) + g'_X(1)\left(1 - g'_X(1)\right).}$$

3. (a) $g_{X+1} : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^{X+1}\right) = \mathrm{E}\left(t^X \times t\right) = \mathrm{E}\left(t^X\right) \times t = t g_X(t)$ par linéarité de l'espérance.

$$\boxed{g_{X+1}(t) = t g_X(t)}$$

(b) Par définition de la fonction génatrice, on a :

$$g_{2X} : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^{2X}\right) = \mathrm{E}\left(\left(t^2\right)^X\right) = g_X\left(t^2\right)$$

$$\boxed{g_{2X}(t) = g_X\left(t^2\right)}$$

4. (a)

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On en déduit d'après le théorème de transfert que :

$$\begin{aligned}g_X(t) &= \mathrm{E}\left(t^X\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} t^k \mathrm{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

Puis, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{g_X(t) = (pt+1-p)^n}$$

(b) On a d'après le résultat de la question précédente :

$$g'_X : t \mapsto np(pt+1-p)^{n-1} \text{ et } g''_X : t \mapsto n(n-1)p^2(pt+1-p)^{n-2}.$$

On en déduit d'après les résultat de la question 2 que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= g'_X(1) = np(p+1-p)^{n-1} = np(1)^{n-1} = np \\
\mathrm{V}(X) &= g''_X(1) + g'_X(1)\left(1 - g'_X(1)\right) = n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} + np(1-np) \\
&= np\left((n-1)p(1)^{n-2} + (1-np)\right) = np(np-p+1-np) = np(1-p).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien l'espérance et la variance de la loi binomiale.}}$$

Cette méthode efficace peut bien sûr être utilisée pour calculer les moments d'autres lois de probabilité finies.

IV. 4 Tirages boules urnes simultanés/successifs.

Exercice 83. On dispose d'une urne avec 3 boules rouges, 5 boules vertes et 8 boules jaunes. On tire simultanément 3 boules.

1. (a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de couleurs différentes.

On tire maintenant les boules de façon successive et avec remise.

2. (a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de couleurs différentes.
   (d) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de couleurs différentes sachant que la première est rouge.

Correction 88.

1. L'univers Ω est l'ensemble de 5 boules parmis 16.

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{16}{5}$$

   (a) Il y a 3 rouges. Donc l'événement A= 'piocher trois boules rouges' est de cardinal $\mathrm{Card}(A) = \binom{3}{3}$ et

$$P(A) = \frac{1}{\binom{16}{5}}$$

   (b) On peut choisir 3 rouges 3 vertest ou 3 jaunces. Ces événements sont incompatibles donc l'événement B= 'piocher trois boules de la même couleur' est de cardinal $\mathrm{Card}(B) = \binom{3}{3} + \binom{5}{3} + \binom{8}{3}$ et

$$P(B) = \frac{\binom{3}{3} + \binom{5}{3} + \binom{8}{3}}{\binom{16}{5}}$$

(c) Il faut donc piocher une jaune, une verte et une rouge. Le cardinal de l'événement C :' piocher trois boules de couleurs différentes' est donc $\text{Card}(C) = \binom{3}{1}\binom{5}{1}\binom{8}{1}$ et

$$P(C) = \frac{3*5*8}{\binom{16}{5}}$$

2. L'univers Ω est l'ensemble de 5 boules tirer successivement parmi 16 avec répétition car on remet les boules.

$$\text{Card}(\Omega) = 16^5$$

(a) Il y a 3 rouges. Donc l'événement A= 'piocher trois boules rouges' est de cardinal $\text{Card}(A) = 3^5$ et

$$P(A) = \left(\frac{3}{16}\right)^5$$

(b) On peut choisir 3 rouges 3 vertest ou 3 jaunces. Ces événements sont incompatibles donc l'événement B= 'piocher trois boules de la même couleur' est de cardinal $\text{Card}(B) = 3^5 + 5^5 + 8^5$ et

$$P(B) = \left(\frac{3}{16}\right)^5 + \left(\frac{5}{16}\right)^5 + \left(\frac{8}{16}\right)^5$$

(c) Il faut donc piocher une jaune, une verte et une rouge. On peut piocher ces boules dans l'ordre que l'on veut il faut donc multiplier par le cardinal des permutations sur 3 éléments. Le cardinal de l'événement C :' piocher trois boules de couleurs différentes' est donc $\text{Card}(C) = 3*5*8*(3!)$ et

$$P(C) = \frac{3*5*8*6}{16^5}$$

(d) Soit D l'événément 'piocher une rouge en premier'. On a $P(D) = \frac{3}{16}$. On cherche $P_D(C) = \frac{P(D\cap C)}{P(D)}$ L'événement $D\cap C$ est : 'piocher une boule rouge en premier et obtenir 3 boules de couleurs différentes. Il faut donc piocher une jaune et une verte sur les 2 autres tirages (On peut piocher ces boules dans l'ordre que l'on veut il faut donc multiplier par le cardinal des permutations sur 2 éléments.) On a donc $P(D\cap C) = \frac{3}{16} * \frac{5}{16} * \frac{8}{16} * 2! = \frac{15}{16^2}$

Donc

$$P_D(C) = \frac{\frac{15}{16^2}}{\frac{3}{16}} = \frac{5}{16}$$

IV. 5 Chaine de Markov - Hamster

Exercice 84. Roudoudou le hamster vit une vie paisible de hamster. Il a deux activités : manger et dormir... On va voir Roudoudou à 00h00 ($n = 0$). Il est en train de dormir.

— Quand Roudoudou dort à l'heure n, il y a 7 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 3 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

— Quand Roudoudou mange à l'heure n, il y a 2 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 8 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

On note D_n l'événement 'Roudoudou dort à l'heure n' et M_n 'Roudoudou mange à l'heure n'. On note $d_n = P(D_n)$ et $m_n = P(M_n)$ les probabilités respectives.

1. Justifier que $d_n + m_n = 1$.

2. Montrer rigoureusement que
$$d_{n+1} = 0,7d_n + 0,2m_n$$
3. Exprimer de manière similaire m_{n+1} en fonction de d_n et m_n.
4. Soit A la matrice
$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$
Résoudre en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
6. Montrer que $P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. Calculer D^n où $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 3\,(1/2)^n + 2 & -2\,(1/2)^n + 2 \\ -3\,(1/2)^n + 3 & 2\,(1/2)^n + 3 \end{pmatrix}$.
9. En déduire la valeur de d_n en fonction de n.

Correction 89.

1. D_n et M_n forment un système complet d'événements donc $d_n + m_n = 1$.
2. On cherche à calculer $d_{n+1} = P(D_{n+1})$ On applique la formule des probabilités totales avec le SCE (M_N, D_N)
$$\begin{aligned} d_{n+1} &= P(D_{n+1} \,|\, M_n)P(M_n) + P(D_{n+1} \,|\, D_n)P(D_n) \\ &= P(D_{n+1} \,|\, M_n)m_n + P(D_{n+1} \,|\, D_n)d_n \end{aligned}$$
L'énoncé donne : $P(D_{n+1} \,|\, M_n) = \frac{2}{10}$ et $P(D_{n+1} \,|\, D_n) = \frac{7}{10}$ et donc
$$d_{n+1} = 0,7d_n + 0,2m_n$$
3. On cherche à calculer $m_{n+1} = P(M_{n+1})$ On applique la formule des probabilités totales avec le SCE (M_N, D_N)
$$\begin{aligned} m_{n+1} &= P(M_{n+1} \,|\, M_n)P(M_n) + P(M_{n+1} \,|\, D_n)P(D_n) \\ &= P(M_{n+1} \,|\, M_n)m_n + P(M_{n+1} \,|\, D_n)d_n \end{aligned}$$
L'énoncé donne : $P(M_{n+1} \,|\, M_n) = \frac{8}{10}$ et $P(M_{n+1} \,|\, D_n) = \frac{3}{10}$ et donc
$$m_{n+1} = 0,3d_n + 0,8m_n$$
4. On obtient le système d'équations
$$\begin{cases} 7x + 2y &= 10\lambda x \\ 3x + 8y &= 10\lambda y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (7 - 10\lambda)x + 2y &= 0 \\ 3x + (8 - 10\lambda)y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + (8 - 10\lambda)y &= 0 \\ (7 - 10\lambda)x + 2y &= 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow 3 * L_2 - (7-10\lambda)L_1$

$\iff \begin{cases} 3x+(8-10\lambda)y & =0 \\ (-100\lambda^2+150\lambda-50)y & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} (7-10\lambda)x+2y & =0 \\ (2\lambda^2-3\lambda+1)y & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} (7-10\lambda)x+2y & =0 \\ (2\lambda-1)(\lambda-1)y & =0 \end{cases}$

Le système est de Cramer pour $(2\lambda-1)(\lambda-1) \neq 0$ et l'unique solution est alors $(0,0)$.

Pour $\lambda = 1$ on obtient $\iff \begin{cases} -3x+2y & =0 \\ 0 & =0 \end{cases}$ et les solutions sont de la forme :

$$\{(2a, 3a) \,|\, a \in \mathbb{R}\}$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on obtient $\iff \begin{cases} 2x+2y & =0 \\ 0 & =0 \end{cases}$ et les solutions sont de la forme :

$$\{(a, -a) \,|\, a \in \mathbb{R}\}$$

5. Le determinant de P vaut $det(P) = 3+2 = 5 \neq 0$ donc P est inversible. Son inverse vaut

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Ce n'est que du calcul.
7. $$D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A prouver par récurrence ou dire que c'est du cours pour des matrices diagonales.

8. On prouve tout d'abord par récurrence que pour tout n : $Q(n)$: "$A^n = PD^nP^{-1}$". Initialisation. La proposition est vraie pour $n = 0$ les deux cotés valent l'identité.
On suppose $Q(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a $A^n = PD^nP^{-1}$ et donc

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= APD^nP^{-1} \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} \\ &= PD\,\mathrm{Id}\,D^nP^{-1} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Ensuite c'est du calcul.

9. Et d'après les questions 2 et 3 on a

$$A\begin{pmatrix} d_n \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix}$$

et par récurrence

$$A^n\begin{pmatrix} d_0 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n \\ m_n \end{pmatrix}$$

D'après l'énoncé $d_0 = 1$ c'est l'événement certain. et donc

$$\begin{pmatrix} d_n \\ m_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\,(1/2)^n+2 \\ -3\,(1/2)^n+3 \end{pmatrix}$$

En particulier

$$d_n = \frac{1}{5}(3\,(1/2)^n+2)$$

IV. 6 Probabilité, VAR, tirage boules et urnes. (ECRICOME 2002)

Exercice 85. Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

A - Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ième} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que :
$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1.$$
4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$
5. En déduire $E(Y)$.

B - Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.

6. Soit $p \leqslant n-1$.
   (a) Déterminer $P_{Z_p=k}(X_{p+1}=1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
   $$P(X_{p+1}=1)=\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$
   (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

Correction 90.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

Étude du cas $c=0$. On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

— $Y=k$ si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au $k^{ième}$ tirage.

— $Y=0$ si les n boules tirées sont noires.

1. On effectue n tirages indépendants (le contenu de l'urne ne change pas) pour lesquels la probabilité d'obtenir *blanc* est toujours $1/2$ (boules équiprobables). Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$ et $E(X)=n/2$ et $V(x)=n/4$
2. Pour $k \in \{1,\dots,n\}$, $(Y=k)$ signifie qu'on obtient B pour la première fois au $k^{ième}$ tirage. Donc que l'on a eu N pour les tirages précédents
   $$(Y=k)=\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i \cap B_k$$
   et les tirages étants indépendants, .
   $$p(Y=k)=\prod_{i=1}^{k-1} p(N_i)\cdot p(B_k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k$$
   $(Y=0)$ signifie qu'il n'y a eu que des N lors des n tirages. Et donc $P(Y=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3. Pour calculer cette somme, il faut traiter à part la valeur $k=0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} p\left(Y=k\right) &= \sum_{k=1}^{n} P(Y=k)+p\left(Y=0\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{-\frac{1}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

4. On le démontre par récurrence : Pour $x \neq 1$

— Pour $n=1$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{1} kx^{k} &= x \text{ et} \\
\frac{1x^{1+2}-(1+1)x^{1+1}+x}{(1-x)^{2}} &= x\frac{x^{2}-2x+1}{(1-x)^{2}}=x
\end{aligned}$$

d'où l'égalité.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k}=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^{2}}.$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kx^{k} &= \sum_{k=1}^{n} kx^{k}+(n+1)\,x^{n+1} \\
&= (n+1)\,x^{n+1}+\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^{2}} \\
&= \frac{(n+1)\,x^{n+1}(1-x)^{2}+nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^{2}} \\
&= \frac{(n+1)\,x^{n+1}-2\,(n+1)\,x^{n+2}+(n+1)\,x^{n+3}+nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^{2}} \\
&= \frac{(n+1)\,x^{n+3}+-(n+2)\,x^{n+2}+x}{(1-x)^{2}}
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer

— Donc la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$

5. On a alors

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot p(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P(Y=k) + 0 \cdot p(Y=0) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} \\
&= 4\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right) \\
&= -(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2
\end{aligned}$$

Étude du cas $c \neq 0$. On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

— $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au $i^{ème}$tirage

— $X_i = 0$ sinon

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. X_i compte le nombre de boule(s) balnches obtenue au $i^{ème}$ tirage (uniquement). Z_p est donc le nombre total de boules blanches obtenues lors des p premiers tirages.
2. Au premier tirages, les 2 boules sont équiprobables. Donc $X_1(\Omega) = \{0,1\}$ et $p(X_1 = 1) = p(X_2 = 1) = 1/2$ et X_1 suit une loi de Bernouilli de paramètre $1/2$. On a don $E(X) = 1/2$ et $V(X) = 1/4$
3. Il y a ici 4 probabilités à déterminer en décomposant en fonction du résultat de chacun des deux premiers tirages :

   — $(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = (N_1 \cap N_2)$ donc $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = p(N_1 \cap N_2) = p(N_1)\, p(N_2/N1)$.
   Quand on a N_1 on rajoute alors c boules Noires. Il y a donc 1 blanche et c+1 noirs lors du second tirage. Ces boules étant équiprobables :
   $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$

   — De même $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = p(N_1 \cap B_2) = p(N_1)\, p(B_2/N1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2}$

   — $p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = p(B_1 \cap N_2) = p(B_1)\, p(N_2/B_1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2}$

   — et enfin $p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1)\, p(B_2/B1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$

   La loi de X_2 est la loi marginale :

   — $p(X_2 = 0) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{2}$

   — $p(X_2 = 1) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{2}$

   La loi de X_2 est donc la même que celle de X_1 et $E(X_2) = E(X_1) = 1/2$

4. Ici Z_2 est la somme de deux variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre de succès. **Mais** elles ne sont pas indépendantes. On ne peut donc pas conclure que $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2, 1/2)$

   — $Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

   — $(Z_2 = 0) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$ et $p(Z_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$ (d'après la loi du couple)

   — $(Z_2 = 1) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$ et comme ces deux parenthèses sont incompatibles :
   $p(Z_2 = 1) = p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{c+2}$

   — $(Z_2 = 2) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$ et $p(Z_2 = 2) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$.

5. On peut avoir en p tirages de 0 à p boules blanches. Donc $Z_p(\Omega) = [[0, p]]$

6. Soit $p \leqslant n - 1$.

   (a) Quand $(Z_p = k)$ on a obtenu k boules blanches et $p - k$ boules noires. On a donc rajouté lors de ces tirages $k \cdot c$ boules blanches et $(p-k)c$ boules noires.
   Il y a donc $k \cdot c + 1$ blanches et $(p-k)c + 1$ noires lors du $p + 1^{i\grave{e}me}$ tirages.
   Ces boules étant équiprobables

   $$p(X_{p+1} = 1 / Z_p = k) = \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2}$$

   (b) Les événements $(Z_p = k)_{k \in [[0,p]]}$ forment un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

   $$\begin{aligned} p(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} p(X_{p+1} = 1 / Z_p = k) p(Z_p = k) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2} p(Z_p = k) \ldots \end{aligned}$$

   Mais on ne connaît pas la loi de $Z_p \ldots$ Aussi ne fait on apparaître que son espérance :

   $$\begin{aligned} p(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2} p(Z_p = k) = \frac{1}{pc + 2} \sum_{k=0}^{p} (k \cdot c + 1) p(Z_p = k) \\ &= \frac{1}{pc+2} \left[c \sum_{k=0}^{p} k p(Z_p = k) + \sum_{k=0}^{p} p(Z_p = k) \right] \\ &= \frac{1}{pc+2} \left[cE(Z_p) + 1 \right] = \frac{cE(Z_p) + 1}{2 + pc} \end{aligned}$$

   (c) On en déduit par récurrence que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

   — Pour $p = 1$, X_1 suit bien une loi de Bernouilli de paramètre $1/2$

— Soit $p \geq 1$ tel que pour tout $k \in [[1,p]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$
Alors $E(Z_p) = \sum_{k=1}^{p} E(X_i) = p/2$
et

$$\begin{aligned} p(X_{p+1}=1) &= \frac{cE(Z_p)+1}{2+pc} = \frac{\frac{cp}{2}+1}{2+pc} = \frac{cp+2}{2(cp+2)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et donc $p(X_{p+1}=0) = 1 - p(X_p=1) = \frac{1}{2}$
Donc X_{p+1} suit une loi binomiale de paramètre $1/2$

— Donc pour tout entier $p \geq 1$: X_p suit une loi binomiale de paramètre $1/2$.

IV. 7 Dérangements

Exercice 86. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement et sans remise et après chaque tirage, on observe le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a rencontre au i-ième tirage si la boule tirée porte le numéro i. Déterminer la probabilité de l'événement E : « Il n'y a aucune rencontre ».

Remarques. Le problème des rencontres peut prendre des formes diverses :

- Un facteur possède n lettres adressées à n personnes différentes. Il les distribue au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'aucune n'arrive à destination ?
- À l'opéra, n spectateurs dépose au vestiaire leur chapeau numéroté selon leur ordre d'arrivé et un ticket leur est alors donné. Mais le responsable a mélangé tous les tickets et tous les chapeaux sont rendus au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'aucun spectateur ne retrouve son chapeau.
- n couples se présentent à un concours de danse. Chaque danseur choisit sa partenaire au hasard. Quelle est la probabilité pour que personne ne danse avec son conjoint ?

Correction 91.

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note N_i l'événement « tirer une boule noire au tirage i » et on note G l'événement « être gagnant ». Ainsi on a : $G = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n$. Comme il y a remise, on répète bien la même expérience n fois dans les mêmes conditions. Ainsi les événements $(N_1, N_2, \ldots, N_n)$ sont mutuellement indépendants et on a : $P(G) = P(N_1)P(N_2)\ldots P(N_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.
On pouvait aussi calculer cette probabilité sans utiliser la mutuelle indépendance mais avec du dénombrement car on est dans un cadre d'ordre et de répétition.
2. Pour cela, on montre que la fonction $f : x \mapsto \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ est croissante sur $[2,+\infty[$.
Il s'agit ici d'une étude classique de fonction. La fonction f est dérivable sur $[2,+\infty[$ comme quotient, somme et composée de fonctions et pour tout $x \geq 2$: $f'(x) = f(x)\left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}\right]$.
On pose pour tout $x \geq 2$: $g(x) = \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}$. Cette fonction est elle aussi dérivable sur $[2,+\infty[$ et pour tout $x \geq 2$: $g'(x) = \frac{-1}{x(x-1)^2}$. Ainsi comme on est sur $[2,+\infty[$, g' est

négative et ainsi la fonction g est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ par propriété sur les somme, quotient et composée de limites. Ainsi la fontion g reste positive sur $[2, +\infty[$. Donc f' est positive sur $[2, +\infty[$ comme produit de deux nombres positifs et car f est bien positive car c'est une exponentielle. Ainsi la fonction f est bien croissante sur $[2, +\infty[$. Et donc en particulier on a la croissance de la fonction $n \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ sur $\mathbb{N}^\star \setminus \{1\}$. De plus si $n = 1$, il n'y a pas de boule noire et ainsi $P(G) = 0$. Ceci prouve la croissance sur $\mathbb{N}^\star$ car pour tout $n \geq 2$: $f(n) \geq 0 \Leftrightarrow f(n) \geq f(1)$. Donc $\boxed{\text{la fonction } n \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \text{ est bien croissante sur } \mathbb{N}^\star}$.

3. • Comme la fonction $n \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ est croissante sur $\mathbb{N}^\star$, plus le nombre de boules totales n augmente, plus le nombre $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ augmente aussi, à savoir plus la probabilité de gagner augmente. Le joueur a donc intérêt à ce que le nombre de boules totales soient le plus grand possible.
   • En utilisant les équivalents usuels, on a : $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \underset{=\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$. On obtient donc que : $n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \underset{=\infty}{\sim} -1$. Ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = -1$ puis par propriété sur la composition de limite, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{-1}$. Or comme $p_n = e^{n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on obtient que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = e^{-1}}$.

IV. 8 Urnes de Polya sans VAR + info (Pb)

Exercice 87. On dispose d'une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges. On fait des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

— Si la boule tirée est de couleur blanche, on la remet et on ajoute une boule blanche

— Si la boule tirée est de couleur rouge, on la remet et on ajoute une boule rouge.

On appelle B_i l'événement "tirer une boule blanche au i-iéme tirage" et on note $p_i = P(B_i)$.

1. Calculer p_1 en fonction de b et r.
2. Montrer que $p_2 = \frac{b}{b+r}$.
3. On a tiré une boule blanche au deuxième tirage. Donner alors la probabilité que l'on ait tiré une boule blanche au premier tirage en fonction de b et r.
4. On appelle E_n l'événément

   E_n : " On tire que des boules blanches sur les n premiers tirages "

   et F_n l'événement

   F_n : " On tire pour la première fois une boule rouge au n-ième tirage"

   (a) Exprimer E_n à l'aide des événements $(B_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$

   (b) Exprimer F_n à l'aide de E_{n-1} et B_n

5. Pour tout $k \geq 2$ calculer $P_{E_{k-1}}(B_k)$.
6. Calculer $P(E_n)$ en fonction de b, r et n puis $P(F_n)$.
7. On souhaite modéliser informatiquement cette expérience. On va utiliser la lettre 'B' pour désigner les boules blanches et 'R' pour les rouges.
   (a) Créer une fonction `urne` qui prend en paramètres le nombre de boules blanches et rouges, et retourne une liste correspondant à l'urne initiale. (Cette liste n'a pas à être "mélangée")
   (b) Créer une fonction `tirage` qui prend en argument une liste correspondant à une urne, modélise le tirage d'une boule alétoirement dans cette urne, affiche la couleur de la boule tirée et retourne une liste correspondant à l'urne aprés l'ajout de la boule de la couleur tirée.
   (c) Créer une fonction `compte` qui prend une liste correspondant à une urne et retourne le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
   (d) Créer une fonction `expérience` qui prend en argument le nombre de boules blanches et rouges et N le nombre de tirages effectués et retourne le nombre de boules blanches dans l'urne aprés N tirages.

Correction 92.

1. On a $p_1 = P(B_1)$. Comme il y a b boules et $b + r$ boules en tout, on en déduit que $P(B_1) = \frac{b}{b+r}$

$$\boxed{p_1 = \frac{b}{b+r}}$$

2. On utilise le système complet d'événements $(B_1, \overline{B_1})$, la formule des probabilités totales donnent :

$$p_2 = P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|\overline{B_1})P(\overline{B_1})$$

Si on a tiré une boule blanche au tirage 1, il y a $b + 1$ boules blanches dans l'urne et r boules rouges, donc

$$P(B_2|B_1) = \frac{b+1}{b+r+1}$$

De même, si on a tiré une boule rouge au tirage 1, il y a b boules blanches dans l'urne et $r + 1$ boules rouges, donc

$$P(B_2|\overline{B_1}) = \frac{b}{b+r+1}$$

D'après le calcul de p_1, on sait que $P(\overline{B_1}) = 1 - P(B_1) = 1 - \frac{b}{b+r} = \frac{r}{b+r}$
Ainsi

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{b+1}{b+r+1}\frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+1}\frac{r}{b+r} \\
&= \frac{(b+1)b}{(b+r+1)(b+r)} + \frac{br}{(b+r+1)(b+r)} \\
&= \frac{(b+1+r)b}{(b+r+1)(b+r)} \\
&= \frac{b}{b+r}
\end{aligned}$$

$$\boxed{p_2 = \frac{b}{b+r}}$$

3. On cherche à calculer $P(B_1|B_2)$ et on utilise pour cela la formule de Bayes :

$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_2|B_1)P(B_1)}{P(B_2)}$$

Or on a vu que $P(B_1) = P(B_2)$ donc

$$P(B_1|B_2) = P(B_2|B_1)$$

Ainsi

$$\boxed{P(B_1|B_2) = \frac{b+1}{b+r+1}}$$

4. (a) $E_n = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$.
   (b) $F_n = E_{n-1} \cap \overline{B_n}$.
5. Si l'événement E_{k-1} est réalisé, on a tiré que des boules blanches sur les $k-1$ premiers tirages. Il y a donc $b+k-1$ boules blanches et $b+k-1+r$ boules au total. Donc

$$\boxed{P(B_k|E_{k-1}) = \frac{b+k-1}{b+k-1+r}}$$

6. On utilise la formule des probabilités conditionnelles et on obtient :

$$P(E_n) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_2 \cap B_1)\dots P(B_n|B_{n-1} \cap \dots \cap B_2 \cap B_1)$$

Remarquons que les termes du produit sont de la forme $P(B_k|E_{k-1})$ que l'on a calculé à la question précédente. On a donc

$$\begin{aligned} P(E_n) &= P(B_1)\prod_{k=2}^{n} P(B_k|E_{k-1}) \\ &= \frac{b}{b+r}\frac{b+2-1}{b+2-1+r}\frac{b+3-1}{b+2-1+r}\dots\frac{b+n-1}{b+n-1+r} \\ &= \frac{b}{b+r}\frac{b+1}{b+1+r}\frac{b+2}{b+2+r}\dots\frac{b+n-1}{b+n-1+r} \\ &= \frac{(b+n-1)!}{(b-1)!}\frac{(b+r-1)!}{(b+n-1+r)!} \end{aligned}$$

7. On en déduit la valeur de $P(F_n)$ de nouveau en utilisant la formule des proababilités conditionnelles :

$$P(F_n) = P(E_{n-1} \cap \overline{B_n}) = P(E_{n-1})P(\overline{B_n}|E_{n-1})$$

Si l'événement E_{n-1} est réalisé, il y a r boules rouges et $b+n-1+r$ boules au total. Donc

$$P(F_n) = \frac{r}{b+n-1+r}$$

8. (a)
```
def urne(b,r):
    L=['B' for i in range(b)] +['R' for i in range(n)]
    return(L)
```

(b)
```
from random import randint
def tirage(L):
        nouvel_urne=L[:]
        k=randint(0,len(L)-1)

        if L[k]=='B':
          print('Boule blanche')
          nouvel_urne=nouvel_urne+['B']
        else:
          print('Boule Rouge')
          nouvel_urne=nouvel_urne+['R']
        return(nouvel_urne)
```

(c)
```

def compte(L):
  b=0
  for e in L:
    if e=='B':
      b=b+1
  return(b)
```

(d)
```
def experience(b,r,N):
  U=urne(b,r)
  for k in range(N):
    U=tirage(U)
  boule_b=compte(U)
  return(boule_b)
```

IV. 9 Chaine de markov - puce sur un triangle (événement, pas de diag)

Exercice 88. On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

— le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;

— pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n pour $n = 0, 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

En déduire une expression de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer les limites respectives des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n). Interpréter le résultat.

Correction 93.

1. Puisqu'en $n = 0$ le pion est en A, on a $a_0 = 1, b_0 = 0$ et $c_0 = 0$. A l'étape $n = 1$, d'après les informations de l'énoncé, $a_1 = 1/2, b_1 = c_1$. Puisque $a_1 + b_1 + c_1 = 1$, on a $b_1 = c_1 = 1/4$.
2. Les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) P(C_n).$$

Comme à la question précédente, on a $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1/2, P_{B_n}(A_{n+1}) = 1/4$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 1/4$. On en déduit que

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

En raisonnant de la même façon, ou par symétrie,

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$$
$$c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

3. D'après la question précédente, la matrice

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

convient.
4. On a $V^n = M^n V_0$, ce qui donne

$$\begin{cases} a_n = \frac{4^n+1}{3 \cdot 4^n} \\ b_n = \frac{4^n-2}{3 \cdot 4^n} \\ c_n = \frac{4^n-2}{3 \cdot 4^n} \end{cases}$$

On remarque qu'on a bien $a_n + b_n + c_n = 1$.

IV. 10 Nombre de surjections (Pb)

Exercice 89. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = [\![1, n]\!]$. On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de E_n sur E_p.

1. Calculer $S_{n,p}$ si $p > n$.

2. Justifier grâce au cardinal qu'une surjection de E_n dans E_n est une bijection. En déduire $S_{n,n}$.
3. Déterminer $S_{n,1}$.
4. Combien y-a-t-il d'applications de E_n dans E_2 ? Parmi ces applications lesquelles ne sont pas surjectives ? En déduire $S_{n,2}$.
5. Soit f une surjection de E_{p+1} dans E_p, justifier que tous les éléments de E_p ont exactement un antécédent sauf un qui en a exactement deux. En déduire que $S_{p+1,p} = \frac{p}{2}(p+1)!$

   On suppose désormais que $0 < p \leq n$.
6. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k = 0$
7. Montrer que pour tout (k, q) tel que $0 \leq k \leq q \leq p$
$$\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}.$$
8. (a) En déduire que, si $0 \leq k < p$, alors $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} \binom{p}{q}\binom{q}{k}(-1)^q = 0$.
   (b) Que vaut la somme précédente quand $k = p$?
9. Montrer que pour tout entier q de E_p le nombre d'applications de E_n dans E_p ayant un enemble d'image à q éléments est égal à $\binom{p}{q}S_{n,q}$.
10. En déduire que $p^n = \displaystyle\sum_{q=1}^{p} \binom{p}{q} S_{n,q}$.
11. A l'aide d'une inversion de sommes montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = \sum_{q=1}^{p}\left(\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}\right)S_{n,q}$.
12. A l'aide des questions précédentes (8, 10, 11 notamment), en déduire que $S_{n,p} = (-1)^p\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n$.

    Dans les questions suivantes on va essayer de déterminer une relation de récurrence entre $S_{n,p}$ et les valeurs de $S_{n-1,p}$ et $S_{n-1,p-1}$
13. Soit $\varphi : E_n \to E_p$ une surjection. (Combien y-a-t-il de possibilités pour φ ?) On note φ_1 la restriction de φ à E_{n-1}.
    (a) Supposons que φ_1 est surjective. Combien y-a-t-il de possibilité pour φ_1 ?
    (b) Supposons que φ_1 n'est pas surjective, en déduire que $Im(\varphi) = Im(\varphi_1) \cup \{\varphi(n)\}$ cette union étant disjointe. $Im(\varphi)$ désigne l'image de la fonction, c'est-à-dire $\{\varphi(e) \mid e \in E_n\}$. Montrer ainsi que φ_1 est surjective de E_{n-1} sur $E_p \setminus \{\varphi(n)\}$. Combien y-a-t-il de possibilités pour φ_1 ?
    (c) En déduire que $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
    (d) A l'image du triangle de Pascal, construire une table des $S_{n,p}$ pour $0 \leq p \leq n \leq 5$
    (e) Ecrire un programme Python qui prend en argument (n, p) et retourne la valeur de $S_{n,p}$.

Correction 94.

1. D'après le cours si il existe une surjection de $E \to F$ alors $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$. Ainsi $S_{n,p} = 0$ dès que $p > n$.
2. Si $f : E_n \to E_n$ est une surjection alors tous les éléments de l'image ont au moins un antécédents par définition. Mais ils ont au plus un antécédent sinon le cardinal de $f(E_n)$ serait strictement plus petit que celui de E_n. Ainsi d'après le cours $S_{n,n} = n!$.
3. Il n'y a qu'une seule application de E_n dans E_1 : l'application constante égale à 1. Cette application est bien surjcetive, donc $S_{n,1} = 1$.
4. Il y a 2^n applications de E_n dans E_2 (cf cours). Seules les applications constantes (l'application constante à 1 et celle constante à 2) ne sont pas surjectives. On trouve alors
$$S_{n,2} = 2^n - 2.$$
5. Soit f une surjection de E_{p+1} dans E_p. Tous les éléments ont au moins un antécédent par définition d'une surjection. Comme $\text{Card}(E_{p+1}) = \text{Card}\, E_p + 1$ il y a un élément de E_p qui a deux antécédents.
On choisit les deux éléments qui auront la même image : il y a $\binom{p+1}{2}$ façons de choisir 2 éléments dans E_{p+1}. Ensuite, choisir à chaque éléments une image revient à choisir une bijection entre deux ensembles à p éléments, soit $p!$ choix . On a alors
$$S_{p+1,p} = \binom{p+1}{2} p! = \frac{p(p+1)}{2} p! = \frac{p}{2}(p+1)!.$$
6. C'est le binome de Newton
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k = (1 + (-1))^p = 0^p = 0.$$
7. Cf DM 4 sur le binome.
8. (a) Soit $0 \leq k < p$
$$\begin{aligned}
\sum_{q=k}^{p} \binom{p}{q}\binom{q}{k}(-1)^q &= \sum_{q=k}^{p} \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}(-1)^q && \text{D'après Q7} \\
&= \binom{p}{k} \sum_{q=k}^{p} \binom{p-k}{q-k}(-1)^q && \binom{p}{k} \text{ ne dépend pas de } q \\
&= \binom{p}{k} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p-k}{j}(-1)^{(j+k)} && \text{Changement d'indice } q = j+k \\
&= \binom{p}{k}(-1)^k \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p-k}{j}(-1)^j \\
&= 0 && \text{D'après Q6}
\end{aligned}$$
   (b) Si $k = p$ on cherche la valeur de
$$\sum_{q=p}^{p} \binom{p}{q}\binom{q}{p}(-1)^q$$
   Il y a qu'un seul terme dans cette somme, il vaut $(-1)^p$.

9. Pour compter le nombre d'applications qui ont pour image q éléments il suffit de dénombre les images possibles (q éléments parmis E_p) : $\binom{p}{q}$. Ce choix fait, il suffit de dénombre les applications E_n dans E_p qui ont exactement ces q élements comme image : c'est-à-dire par définitin $S_{n,q}$. Ainsi il y a $\binom{p}{q}S_{n,q}$ applications qui ont pour image q éléments dans E_p.
10. On regarde la partition suivante

$$\{ \text{ applications } E_n \to E_p\} = \bigcup_{q=1}^{n} \{ \text{ applications } E_n \to E_p \text{ qui ont exactement } q \text{ images}\}$$

On a $\mathrm{Card}(\{ \text{ applications } E_n \to E_p\}) = p^n$ et $\mathrm{Card} \bigcup_{q=1}^{n} \{ \text{ applications } E_n \to E_p \text{ qui ont exactement } q \text{ images}\} = \sum_{q=1}^{n} \mathrm{Card}\{ \text{ applications } E_n \to E_p \text{ qui ont exactement } q \text{ images}\} = \sum_{q=1}^{n} \binom{p}{q} S_{n,q}$ D'où

$$p^n = \sum_{q=1}^{n} \binom{p}{q} S_{n,q}$$

11. On repart de la formule obtenue à la question précédente, dont on va changer le noms des variables pour se rapprocher de la formule demandée :

$$k^n = \sum_{q=1}^{n} \binom{k}{q} S_{n,q}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{q=1}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} S_{n,q}$$

Remarquons que la somme de droite vaut 0 pour $q > k$ à cause de $\binom{k}{q}$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n = \sum_{k=1}^{p} \sum_{q=1}^{k} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} S_{n,q}$$

Comme suggéré par l'énoncé on fait maintenant une interversion de somme $\sum_{k=1}^{p} \sum_{q=1}^{k} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} S_{n,q} = \sum_{q=1}^{p} \sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} S_{n,q}$ Avec l'équation précédente on obtient bien le résultat désiré :

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n = \sum_{q=1}^{p} \left(\sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{q} \right) S_{n,q}.$$

12. D'après 8a),b) on sait que pour $q < p$

$$\sum_{k=q}^{p} \binom{p}{k} \binom{k}{q} (-1)^k = 0$$

et pour $q = p$
$$\sum_{k=q}^{p} \binom{p}{k}\binom{k}{q}(-1)^k = (-1)^p$$
Ainsi dans la double somme de 11, la somme la plus intérieure vaut 0 sauf si $q = p$, on obtient ainsi :
$$\sum_{q=1}^{p}\left(\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}\right)S_{n,q} = (-1)^p S_{n,p}$$
D'après la formule préalablement obtenue en 11, on obtient
$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = (-1)^p S_{n,p}$$
Soit
$$S_{n,p} = (-1)^p\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n$$
(où on utilise $\frac{1}{(-1)^p} = \frac{(-1)^p}{(-1)^{2p}} = (-1)^p$)

13. Il y a $S_{n,p}$ possibilités pour φ par définition de $S_{n,p}$.
   (a) Si φ_1 est surjective, il y a $S_{n-1,p}$ possibilités pour φ_1.
   (b) Remarquons que par définition de l'image l'égalité entre les ensembles est toujours réalisée. $Im(\varphi_1) \cup \{\varphi(n)\} \subset Im(\varphi)$. Il faut donc montrer que l'union est disjointe. Pour cela on remarque que lorsque φ_1 n'est pas surjective et que φ est surjective $\varphi(n)$ est nécessairement un élément qui a un unique antécédent : n. On obtient bien alors $\varphi(n)$ n'est pas dans l'imgae de φ_1, soit en d'autres termes, que l'union est disjointe.
   φ_1 est alors une fonction de E_{n-1} dans E_p dont l'image est celle de φ (E_p) privée de $\varphi(n)$. il y a donc $S_{n-1,p-1}$ possibilités pour φ_1
   (c) Une fois φ_1 choisit, dont on vient de voir qu'il y a $S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}$ possibilités, il reste à choisir la valeur de $\varphi(n)$ ce qui laisse p possibilités, indépendantes du choix de φ_1. On obtient ainsi
$$S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$$
   (d)

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$n=1$	1	0	0	0	0
$n=2$	1	$2! = 2$	0	0	0
$n=3$	1	$2(1+2)=6$	$3(2+0)=6$	0	0
$n=4$	1	$2(6+1)=14$	$3(6+6)=36$	$4(6+0)=24$	0
$n=5$	1	$2(14+1)=30$	$3(14+36)=150$	$4(24+36)=240$	$5(24+0)=120$

   (e) Deux solutions. Grace à ce qu'on vient de voir à la question 13)c) on peut programmer une fonction récursivement de la manière suivante :

```
def S_rec(n,p):
    if p>n:
        return 0
    if p==1:
        return 1
    else:
        return( p*( S_rec(n-1,p) +S_rec(n-1,p-1)))
```

Sinon on utilise la somme obtenue en 12 :

```
from math import factorial
def S_binomial(n,p):
  if p>n:
    return 0
  else:
    s=0
    for k in range(1,p+1):
      s=s+((-1)**k)*factorial(p)/(factorial(k) *factorial(p-k) )* k**n
  return(((-1)**p)* s)
```

IV. 11 Urnes, boules et tirages !

Exercice 90. Une urne A contient 1 boule rouge et 2 noires. Une urne B contient 3 rouges et 1 noire. Au départ, on choisit une urne, la probabilité de choisir l'urne A est $p \in]0, 1[$. Puis on choisit une boule dans cette urne. Si, à un tirage quelconque, on a tiré une boule rouge, le tirage suivant se fait dans A, sinon, on choisit une boule de B. Les tirages se font avec remise. On note p_n la probabilité de choisir une boule rouge au tirage de numéro n. Calculer p_1, puis exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire p_n en fonction de n puis la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Correction 95. On note R_n l'événement " tirer une Rouge au tirage n" et N_n : " tirer une Noire au tirage n". On a évidemment $\overline{N_n} = R_n$.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(R_{n+1}) \quad \text{Par définition} \\ &= \mathbb{P}(R_{n+1}|R_n)\mathbb{P}(R_n) + \mathbb{P}(R_{n+1}|N_n)\mathbb{P}(N_n) \quad \text{Par la formule des probabilités totales} \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(R_{n+1}|R_n) = \frac{1}{3}$ car si on a tiré une boule rouge au tirage n le tirage se fait dans l'urne A qui contient 3 boules dont seuleemnt une noire. De même $\mathbb{P}(R_{n+1}|N_n) = \frac{3}{4}$. Ainsi

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{3}{4}(1 - p_n) \\ &= \frac{-5}{12}p_n + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

C'est une suite arithmético géométrique. On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ell = \frac{-5}{12}\ell + \frac{3}{4}$$

on trouve $\ell = \frac{9}{17}$ On sait d'après le cours (ou on refait le calcul) que la suite $u_n = p_n - \ell$ est géométrique de raison $\frac{-5}{12}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$u_n = u_1 \left(\frac{-5}{12}\right)^{n-1}$$

et $u_1 = p_1 - \frac{9}{17}$ Il faut encore calculer p_1 On a $p_1 = \mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_1|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R_1|B)\mathbb{P}(B)$ d'après la formule des probabilités totales (ici A et B sont les événements 'choix de l'urne .... ') On a donc $p_1 = \frac{1}{3}p + \frac{3}{4}(1 - p) = \frac{-5}{12}p + \frac{3}{4}$

Finalement $u_1 = \frac{-5}{12}p + \frac{3}{4} - \frac{9}{17} = \frac{-5}{12}p - \frac{15}{68}$
Et

$$p_n = \frac{9}{17} + \left(\frac{-5}{12}p - \frac{15}{68}\right)\left(\frac{-5}{12}\right)^{n-1}$$

La limite de p_n est $\frac{9}{17}$.

IV. 12 Dénombrement des matrices à coefficients $\{0,1\}$ (Pb)

Exercice 91. Soit $A_n[X]$ le sous ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$.

1. Combien y-a-t-il d'éléments dans $A_n[X]$?
2. Combien y-a-t-il d'éléments dans $A_n[X]$ de degré n ? On muni $A_n[X]$ de la probabilité uniforme.
3. On choisit un polynôme P aléatoirement dans $A_n[X]$, quelle est la probabilité que P soit de degré n ?
4. On choisit un polynôme P aléatoirement dans $A_n[X]$, quelle est la probabilité que P admette 0 comme racine ?
5. Quelle est la probabilité que P admette 0 comme racine simple (mais pas double) ?
6. Quelle est la probabilité que P admette 0 comme racine double sachant que 0 est racine ?
7. On modélise un polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de degré n par une liste Python de longueur $n+1$, dont les éléments sont donnés par $a_0, \cdots, a_n$ dans cette ordre.
   (a) Donner la liste correspondant au polynôme $P = X^3 + X + 1$
   (b) Ecrire une fonction `polynôme` qui prend en argument le degré n et qui retourne une liste correspondant à un polynôme de $A_n[X]$ dont les coefficients sont pris aléatoirement dans $\{0,1\}$.
   (c) Créer une fonction `degre` qui prend en argument une liste (représentant un polynôme) et qui retourne son degré.
   (d) Créer une fonction `racine` qui prend en argument une liste (représentant un polynôme) et qui vérifie si 0 est racine ou ne l'est pas.

Correction 96.

1. On peut choisir $n+1$ coefficients différents dans $\{0,1\}$. Il y a donc 2^{n+1} polynômes dans $A_n[X]$.
2. Pour qu'un polynôme de $A_n[X]$ soit de degré n il faut que le coefficient associé au monome de degré n soit non nul, c'est-à-dire égal à 1. Les autres coefficients peuvent etre choisis de manière indépendante on a donc 2^n polynômes de degré n dans $A_n[X]$.
3. D'après la question précédente et comme les probabilités sont uniformes on a $\mathbb{P}(P \text{ de degré n }) = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$
4. P admet 0 comme racine si $a_0 = 0$, le même argument que précédemment montre que :
$$\mathbb{P}(P \text{ admet 0 comme racine}) = \frac{1}{2}$$
5. P admet 0 comme racine si $a_0 = 0$, elle n'est pas double si $a_1 \neq 0$. Le même argument que précédemment montre que :
$$\mathbb{P}(P \text{ admet 0 comme racine simple mais pas double }) = \frac{1}{4}$$

6. $\mathbb{P}(P$ admet 0 comme racine double $|P$ admet 0 comme racine$) = \mathbb{P}(a_1 = 0$ et $a_0 = 0|a_0 = 0)$
Comme les choix de a_1 et a_0 sont indépendants on a

$$\mathbb{P}(P \text{ admet 0 comme racine double } |P \text{ admet 0 comme racine}) = \mathbb{P}(a_1 = 0) = \frac{1}{2}$$

7. (a) $P = X^3 + X + 1$ correspond à $[1, 1, 0, 1]$

   (b)
```
from random import randint
def polynome(n):
        L=[] #creation d une liste vide
        for i in range(n+1): # il y a n+1 coefficients a choisir et non pas
          a_i=randint(0,1) #choix aleatoire du coefficient a_i
          L= L+[a_i] #on ajoute le coefficient a_i a la liste L
        return(L)
```

   (c) On va regarder tous les coefficients en commencant par le dernier, dès qu'on obtient un coefficient non nul il correspondra au degré du polynôme.

```
def degre(L):
        i=n # on initialise donc le 'compteur' au degre le plus haut
 : n
        while i>0:
          if L[i+1] != 0: #on verifie si le coefficient est non nul.
                return( 'Le polynome est de degre i')
          else:
            i=i-1 #on regarde ensuite le coefficient juste avant
        return(' C est le polynome nul')
```

   (d)
```
def racine(L):
        if  L[0]==0:
                return('0 est racine')
        else:
                return('0 n est pas  racine')
```

IV. 13 Urnes boules et tirages 2

Exercice 92. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On pose $N = b + r$. On tire au hasard et successivement une boule de l'urne : si la boule est rouge, on la remplace par une boule blanche dans l'urne, sinon on ne la remplace pas.
Soit R_i l'événement : « on tire une boule rouge au i-ème tirage » et A_i l'événement : « on tire, pour la première fois, une boule blanche au i-ème tirage ».

1. Exprimer A_n à l'aide des R_k. Calculer $P(A_n)$.
2. Soit C_m l'événement : « quand on tire pour la première fois une boule blanche, il reste m boules rouges dans l'urne ».
   (a) Calculer $P(C_0)$ puis montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^\star,\ P(C_m) = \dfrac{r!}{N^r}\left(\dfrac{N^m}{m!} - \dfrac{N^{m-1}}{(m-1)!}\right)$.

(b) Vérifier que : $\sum\limits_{m=0}^{r} P(C_m)=1$. Qu'en conclure pour $\bigcup\limits_{m=0}^{r} C_m$?

Correction 97.

1.
   - On suppose que $n\leq N-1$. On a $A_n=R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{n-1}\cap\overline{R_n}$. Comme tous ces événements ne sont pas mutuellement indépendants, on utilise la formule des probabilités composées et on obtient sous réserve que toutes les probabilités conditionnelles existent bien :
   $$P(A_n)=P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(R_3)\times\cdots\times P_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-2}}(R_{n-1})P_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-1}}(\overline{R_n}).$$
   - On a : $P(R_1)=\frac{r}{N}$.
   De plus $P(R_1)\neq 0$ car $r\neq 0$ et ainsi P_{R_1} existe bien.
   - On a : $P_{R_1}(R_2)=\frac{r-1}{N}$ d'après le protocole.
   De plus $P(R_1\cap R_2)=P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)=\frac{r(r-1)}{N^2}\neq 0$ car $r\neq 0$ et $r\neq 1$ et ainsi $P_{R_1\cap R_2}$ existe bien.
   - On a : $P_{R_1\cap R_2}(R_3)=\frac{r-2}{N}$ d'après le protocole.
   De plus $P(R_1\cap R_2\cap R_3)=P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)\times P_{R_1\cap R_2}(R_3)=\frac{r(r-1)(r-2)}{N^3}\neq 0$ car $r\neq 0$, $r\neq 1$ et $r\neq 2$ et ainsi $P_{R_1\cap R_2\cap R_3}$ existe bien.
   - En itérant ainsi les calculs on montre que toutes les probabilités conditionnelles existent bien et on obtient que :
   $$\boxed{P(A_n)=\frac{r!}{N^n}\times\frac{b+n-1}{(r-n+1)!}}.$$

2. (a)
   - On peut remarquer que $C_0=A_{r+1}$ car $C_0=R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{n-1}\cap R_r\cap\overline{R}_{r+1}$ car il faut commencer par tirer toutes les boules rouges pour qu'il n'en reste aucune (le protocole nous disant qu'on ne remet jamais de boule rouge dans l'urne). Ainsi d'après la question précédente, on obtient que : $P(C_0)=\frac{r!}{N^r}$ en remplaçant dans la formule précédente tous les n par $r+1$.
   - Soit $m\geq 1$ fixé. De même, on a : $C_m=A_{r-m+1}$ car il faut commencer par tirer $r-m$ boules rouges puis la première boule banche. En effet, en tirant tout d'abord $r-m$ boules rouges, il va bien rester m boules rouges dans l'urne. Ainsi en remplaçant tous les n par des $r-m$ dans la formule de la question précédente, on obtient que : $P(C_m)=\frac{r!}{N^r}\times\frac{N^m}{N}\times\frac{N-m}{m!}=\frac{r!}{N^r}\times\frac{N^m}{m!}\times\frac{N-m}{N}$. Mais $\frac{N-m}{N}=1-\frac{m}{N}$ et ainsi, en développant, on obtient que : $\boxed{P(C_m)=\frac{r!}{N^r}\left(\frac{N^m}{m!}-\frac{N^{m-1}}{(m-1)!}\right)}$. On obtient bien le résultat voulu.

   (b)
   - On a : $\sum\limits_{m=0}^{r}P(C_m)=P(C_0)+\sum\limits_{m=1}^{r}\frac{r!}{N^r}\left(\frac{N^m}{m!}-\frac{N^{m-1}}{(m-1)!}\right)=P(C_0)+\frac{r!}{N^r}\left(\sum\limits_{m=1}^{r}\frac{N^m}{m!}-\sum\limits_{m=1}^{r}\frac{N^{m-1}}{(m-1)!}\right)$
   On reconnaît une somme télescopique et ainsi, on a : $\sum\limits_{m=0}^{r}P(C_m)=P(C_0)+\frac{r!}{N^r}\left(\frac{N^r}{r!}-\frac{N^0}{(0)!}\right)=\frac{r!}{N^r}+1-\frac{r!}{N^r}=1$. On obtient bien le résultat voulu.

- On obtient ainsi que $\bigcup_{m=0}^{r} C_m = \Omega$ car les $(C_m)_{m\in[\![0,r]\!]}$ forment un sce : ils sont incompatibles deux à deux et la somme de leurs probabilités fait 1.

IV. 14 Moteur d'avion d'après G2E (Pb)

Exercice 93 (D'après G2E 2014)**.** Une compagnie aérienne dispose d'une flotte constituée de deux types d'avions : des trimoteurs (un moteur situé en queue d'avion et un moteur sous chaque aile) et des quadrimoteurs (deux moteurs sous chaque aile).

Tous les moteurs de ces avions sont susceptibles, durant chaque vol, de tomber en panne avec la même probabilité $x \in]0,1[$ et indépendamment les uns des autres. Toutefois, les trimoteurs peuvent achever leur vol si le moteur situé en queue ou les deux moteurs d'ailes sont en état de marche et les quadrimoteurs le peuvent si au moins deux moteurs situés sous deux ailes distinctes sont en état de marche.

1. On note X_3 (respectivement X_4) la variable alétoire correponsdant au nombre de moteurs en panne sur un trimoteur (respectivement un quadirmoteur) durant un vol.
   (a) Quelles sont les lois suivies par X_3 et X_4 ?
   (b) Calculer la probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs du trimoteur tombent en panne. Même question pour le quadrimoteur.
2. (a) On note T l'événement « le trimoteur achève son vol ». Démontrer que :
$$P(T) = (1-x)(-x^2+x+1)$$
   (b) On note Q l'événement « le quadrimoteur achève son vol ». Démontrer que :
$$P(Q) = (1-x)^2(1+x)^2$$
3. Déterminer , des quadrimoteurs ou des trimoteurs, quels sont les avions les plus sûrs.

Correction 98.

1. (a) X_3 (resp. X_4) suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3,x)$ (resp. $\mathcal{B}(4,x)$)
   (b) L'événement que strictmeent moins de la moitié des moteurs du trimoteur tombent en pannes correspond à l'événement $[X_3 < \frac{3}{2}]$. Comme X_3 est à valeur entière cela correspond à $[X_3 \leq 1]$. Et on a
$$P(X_3 \leq 1) = P(X_3=0)+P(X_3=1) = (1-x)^3+\binom{3}{1}x(1-x)^2 = (1-x)^2(1-x+3x) = (1-x)^2(1+2x)$$
   On obtient le même type de calcul pour le quadrimoteur, on a $[X_4 < \frac{4}{2}] = [X_4 < 2] = [X_4 \leq 1]$ et donc
$$P(X_4 \leq 1) = P(X_4=0)+P(X_4=1) = (1-x)^4+\binom{4}{1}x(1-x)^3 = (1-x)^3(1-x+4x) = (1-x)^3(1+3x)$$
2. (a) Soit M_G (resp M_A resp. M_D) la variable aléatoire qui vaut 1 si le moteur de gauche (resp. le moteur arrière, reps. le moteur de droite) tombe en panne et 0 sinon. L'évènement T

correspond à l'événément $[M_A = 0] \cup ([M_G = 0 \text{ et } M_D = 0])$ On a donc

$$\begin{aligned}
P(T) &= P([M_A = 0] \cup ([M_G = 0 \text{ et } M_D = 0])) \\
&= P([M_A = 0]) + P(([M_G = 0 \text{ et } M_D = 0])) - P(M_A = 0 \text{ et } M_G = 0 \text{ et } M_D = 0]) \\
&= (1-x) + (1-x)^2 - (1-x)^3 \\
&= (1-x)(1 + (1-x) - (1-x)^2) \\
&= (1-x)(1 + x - x^2)
\end{aligned}$$

3. (a) On fait la meme chose en considérant les 4 moteurs. Soit M_{G_1} (resp M_{G_2} resp. M_{D_1} resp. M_{D_2}) la variable aléatoire qui vaut 1 si le premier moteur de gauche (resp. le deuxième moteur de gauche , reps. le premier moteur de droite, resp. le deuxième motuer de droite) tombe en panne et 0 sinon. L'évènement $\overline{Q}$ correspond à l'événément $[M_{G_1} = 1 \text{ et } M_{G_2} = 1] \cup [M_{D_1} = 1 \text{ et } M_{D_2} = 1]$ On a donc

$$\begin{aligned}
P(Q) &= 1 - P(\overline{Q}) \\
&= 1 - P([M_{G_1} = M_{G_2} = 1] - P([M_{D_1} = M_{D_2} = 1]) + P([M_{D_1} = M_{D_2} = M_{G_1} = M_{G_2} = 1) \\
&= 1 - x^2 - x^2 + x^4 \\
&= 1 - 2x^2 + x^4 \\
&= (1-x^2)^2 \\
&= ((1-x)(1+x))^2 \\
&= (1-x)^2(1+x)^2
\end{aligned}$$

4. On peut estimer que x est très proche de 0 (sinon il faut d'urgence arrêter de prendre l'avion) et regarder $P(T) - P(Q)$ quand x tends vers 0.
   On a $P(T) - P(Q) = (1-x)(-x^2+x+1) - (1-2x^2+x^4) = x^3 - x^4 = x^3 + o(x^3)$. Ainsi proche de 0, $P(T) \geq P(Q)$. Les trimoteurs sont donc plus fiables. (Il n'était même pas nécessaire de faire l'approximation $x \sim 0$ en effet $x^3 - x^4 = x^3(1-x)$ et comme $x \in [0,1]$, on a bien $P(T) \geq P(Q)$. La preuve avec l'approximation $x \sim 0$ peut-etre intéressante par exemple en physique pour avoir une idée du comportement d'une expérience dans certain cas limite)

IV. 15 Grenouille sur escalier (marche aléatoire)

Exercice 94. Une grenouille monte les marches d'un esacalier (supposé infini) en partant du sol (marche 0) et en sautant

— Ou bien une seule marche, avec probabilité p ;

— Ou bien deux marches, avec la probabilité $1-p$.

On suppose que les sauts sont indépenadnts les uns des autres.

1. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies au total. Quelle est la loi de X_n ? Exprimer Y_n en fonciton de X_n. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
2. Pour $k \geq 1$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k. Que vaut p_1 ? Que vaut p_2 ? Etarblir une formule de réurrence liant p_k à p_{k-1}. En déduire la valeur de p_k pour $k \geq 1$.

3. On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche. Ecrire un algorithme Python qui simule la variable aléatoire Z_n.

Correction 99.

1. Tout d'abord l'univers image est $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ car la grenouille fait n sauts. L'expérience décrite correspond à un schéma de Bernouilli : X_n compte le nombre de fois où n expériences indépendantes (les n premiers sauts) donnent un résultat ayant la probabilité p. La variable aléatoire X_n suit donc une loi binomiale de paramétres n, p : $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
   On a par ailleurs en suivant l'énoncé :
   $$Y_n = X_n + 2(n - X_n)$$
   car $n - X_n$ correspond au nombre de fois où la grenouille a sauté 2 marches.
   On calcule l'espérance en utilisant la linéarité et l'espèrance d'une loi binomiale :
   $$\begin{aligned} E(Y_n) &= E(X_n + 2(n - X_n)) \\ &= E(X_n) + 2n - 2E(X_n) \\ &= -E(X_n) + 2n \\ &= (2 - p)n \end{aligned}$$
   et la variance :
   $$\begin{aligned} Var(Y_n) &= Var(X_n + 2(n - X_n)) \\ &= Var(-X_n + 2n) \\ &= Var(X_n) \\ &= np(1 - p) \end{aligned}$$

2. On a $p_1 = p$ car la grenouille est à la marche 0 au départ et qu'elle a une probabilité p de sauter qu'une seule marche. Pour trouver p_2 remarquons que les deux possibilités pour que la grenouille passe par la marche 2 sont les suivantes :
   — Les deux premiers sauts sont des sauts de 1 marche : c'est l'événement $[X_2 = 1 \cap X_1 = 1]$
   — Le premier saut est un saut de 2 marches : c'est l'événement $[X_1 = 0]$ (X_i correspond au nombre de fois où on saute 1 marche, donc $[X_1 = 0]$ correspond à "le saut 1 n'est pas de une marche", cad, c'est un saut de 2 marches...)

   Ces deux événements sont incompatibles et on a alors :
   $$p_2 = \mathbb{P}(X_2 = 2 \cap X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 0) = p^2 + (1 - p)$$
   Il est plus simple de s'intéresser à l'évenement contraire, A_k : " la grenouille ne passe pas par la marche k". On a $\mathbb{P}(A_k) = 1 - p_k$. L'événemtn A_k est réalisé si et seulement si la grenouille passe par la marche $k - 1$ et fait un saut de deux marches, de probailité $p_{k-1} \times (1 - p)$. On a donc
   $$1 - p_k = p_{k-1}(1 - p)$$
   Soit en réarrangeant les termes :
   $$p_k = (p - 1)p_{k-1} + 1$$

C'est une suite arithmético-géométrique dont la limite vaut $\ell = \frac{2}{1-p}$, la suite $u_k = p_k - \ell$ est géométrique de raison $(p-1)$ et on a

$$u_k = (p-1)^{k-1} u_1 = (p-1)^{k-1}(p_1 - \ell)$$

et donc

$$p_k = (p-1)^{k-1}(p_1 - \ell) + \ell$$

Après simplification on tombe sur

$$p_k = \frac{1}{2-p} + (p-1)^{k-1} \frac{2p - p^2 - 1}{2-p}$$

```
from random import *
def simulation_Z(n,p):
    Z=0
    marche=0

    while marche <n:
        saut = random()
        Z+=1
        if saut <p:
            marche+=1
        if saut >p:
            marche+=2

    return(Z)
```

IV. 16 *Archers proba de réussite*

Exercice 95. On considère deux archers A_1 et A_2 qui tirent chacun sur une cible de manière indépendante. L'archer A_1 (respectivement A_2) touche sa cible avec une probabilité p_1 (respectivement p_2) strictement comprise entre 0 et 1. On suppose de plus que les tirs des joueurs sont indépendants les uns des autres. On appelle X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs nécessaires à l'archer A_1 (respectivement A_2) pour qu'il touche sa cible pour la première fois. On note $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$

1. Déterminer les valeurs possibles prises par X_1
2. On introduit, pour tout entier naturel non nul i, l'événement E_i : « Le joeur A_1 touche la cible à son i-ème tir » . Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'événement $(X_1 = k)$ à l'aide des événements E_i, $i \in \mathbb{N}^*$
3. En déduire la loi de X_1
   (a) Pour tout entier naturel non nul k, calculer $P(X_1 > k)$ (on pourra s'intéresser à l'événement contraire)
   (b) En déduire que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad P_{(X_1 > m)}(X_1 > n + m) = P(X_1 > n)$$

4. Calculer $P(X_1 = X_2)$ (un peu difficile, il faut considérer des limites..., soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite on pourra noter $\lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$ de la manière suivante $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, il faudra évidemment s'assurer que la limite existe avant de faire ce genre de chose))

Correction 100.

1. $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$
2. $(X_1 = k) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{E_i} \cap E_k$
3. Ainsi par indépendances de tirs

$$\begin{aligned} P(X_1 = k) &= \prod_{i=1}^{k-1} P(\overline{E_i}) \cap P(E_k) \\ &= q_1^{k-1} p_1 \end{aligned}$$

(a) $P(X_1 > k) = 1 - P(X_1 \leq k)$ et $P(X_1 \leq k)$ Les événements $P(X_1 = i)$ avec $i \in [\![1, k]\!]$ sont disjoints on a donc

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq k) &= \sum_{i=1}^{k} P(X_1 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} q_1^{i-1} p_1 \\ &= \frac{1 - q_1^k}{1 - q_1} p_1 \\ &= 1 - q_1^k \end{aligned}$$

(b) Calculons $P_{(X_1 > m)}(X_1 > n + m)$. On a :

$$\begin{aligned} P_{(X_1 > m)}(X_1 > n + m) &= \frac{P(X_1 > m \text{ et } X_1 > n + m)}{P(X_1 > m)} \\ &= \frac{X_1 > n + m)}{P(X_1 > m)} \\ &= \frac{q_1^{n+m}}{q_1^m} \\ &= q_1^n \\ &= P(X_1 > n) \end{aligned}$$

4. Cette dernière question est vraiment du niveau de deuxième année (voire dur pour de la deuxième année... donc ne vous inquiétez pas si vous n'y êtes pas arrivés !)
L'événement $(X_1 = X_2)$ est égale à l'union disjointes :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X_1 = k \text{ et } X_2 = k)$$

On a donc

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X_1 = k \text{ et } X_2 = k)$$

On somme ici un nombre infini de termes, on va donc considérer la limite correspondante :

$$P(X_1 = X_2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in n} P(X_1 = k \text{ et } X_2 = k)$$

Comme $X_1 = k$ et $X_2 = k$ sont deux événements indépendants on a

$$\begin{aligned}
P(X_1 = X_2) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = k)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q_1^{k-1} p_1 q_2^{k-1} p_2\\
&= \lim_{n\to\infty} p_1p_2 \sum_{k=1}^{n} (q_1q_2)^{k-1}\\
&= \lim_{n\to\infty} p_1p_2 \frac{1-(q_1q_2)^n}{1-q_1q_2}\\
&= \frac{p_1p_2}{1-q_1q_2}
\end{aligned}$$

V info

V. 1 ADN - liste

Exercice 96 (Informatique)**.** Les questions sont plus ou moins indépendantes. Toutes les fonctions écrites (ou mentionnées) dans les questions précédentes peuvent être utilisées a posteriori.

Il est devenu habituel de dire que l'ADN se présente comme un texte composé à l'aide de quatre lettres A,C,G,T, qui s'enchaînent sans interruption et qui est orienté avec un début et une fin.

On souhaite faire une étude statistique des lettres présentes dans une séquence d'ADN.

1. (a) Ecrire une fonction `frequence_A` qui prend en argument une chaine de caractères `ADN` et qui retourne la fréquence de la lettre A dans cette chaîne.

   (b) On souhaite comparer la fréquence d'apparition de la lettre 'A' entre deux séquences d'ADN. Ecrire une fonction Python `compare` qui prend en argument deux chaines de caractères `ADN1`, `ADN2` et retourne 'elles sont proches' si la fréquence de la lettre A dans `ADN1` et dans `ADN2` diffère de moins de 0.01. La fonction retournera 'elles ne sont pas proches' dans le cas contraire.

On s'intéresse maintenant aux acides aminés, il faut alors regarder les codons qui se lisent par trois (cf le tableau de la dernière page), on doit donc diviser la chaîne de caractères par codon.

2. (a) Completer (sur votre copie) la fonction `liste_codon` python qui prend en argument une chaine de caractère `ADN` et qui retourne une liste dont les éléments sont les codons de la chaîne. (On supposera que la longueur de la chaine de caractères est bien divisible par 3 sans le vérifier dans la fonction)

```
def liste_codon(ADN):
    L=[]
```

```
    for i in range(0,  ,  ):
        L=L+[ADN[  :  ]]
    return(L)
```

Exemple : si `ADN='GCAGAGTTTTGGTGC'`, la liste retournée sera : `['GCA','GAG', 'TTT','TGG','TGC']`.

(b) On suppose que l'on a créé une liste `code_genetique` qui contient tous les codons possibles.
`code_genetique=['GCA','GCC', 'GCG', ...., 'TAG', 'TGA']`

Quelle est la longueur de la liste `code_genetique` ? Comment obtenir cette longueur avec une commande Python ?

(c) On suppose que l'on a une chaine de caractères `ADN` à notre disposition. Ecrire une fonction python `test` qui vérifie si chaque codons de la liste `L=liste_codon(ADN)` est bien un codon du code génétique.

(d) Compléter (sur votre copie) la fonction `start` qui prend en argument une liste de codons et qui retourne l'indice de la première fois où l'on trouve le codon START ('ATG'). Si jamais il n'y en a pas, elle devra retourner un message d'erreur.

```
def start(L):
    i=0
    while L[i]          :
        if i<len(L)-1:

        else:
            return('pas de codon START')
    return(  )
```

(Vous pouvez aussi proposer une fonction différente si vous ne comprenez pas la logique de celle-ci, mais attention aux problèmes d'indices.)

(e) Ecrire une fonction `stop` qui prend en argument une liste de codons et qui retourne l'indice de la première fois où l'on trouve un codon STOP. Si jamais il n'y en a pas, elle devra retourner un message d'erreur.

(f) Ecrire une fonction `proteine` qui prend en argument une liste de codons et retourne la sous-liste des codons entre le premier codon START et le premier codon STOP après ce codon START. (Cette sous-liste contiendra les deux codons START et STOP. On ne se penchera pas sur le problème d'erreurs, et on supposera que notre liste contient bien un codon START et un codon STOP dans le bon ordre)

A une séquence d'ADN correspond une unique séquence d'ARN grâce aux règles de complémentarité : G et C sont inversé, A devient U et T devient A. Par exemple, la séquence d'ADN 'AATCGA' est transcrite en 'UUAGCU.'

3. (a) Compléter (sur votre copie) la fonction python `transcription_lettre` qui prend en argument une lettre correspondant à de l'ADN et qui retourne la lettre d'ARN correspondante.

```python
def transcription_lettre(lettre):
        if lettre==    :
                lettre='G'
        elif           :
                lettre='C'
        elif lettre=='A':

        elif           :
                lettre=
    return(         )
```

(b) Ecrire une fonction python `transcription` qui prend en argument une chaine de caractères correspondant à de l'ADN et qui retourne la chaine de caractères d'ARN correspondante.

Parfois il y a des erreurs dans la transcription et une lettre est mal transmise.

(c) Ecrire une fonction python `mutation` qui prend en argument une chaine de caractères (correspondant à de l'ADN) et qui retourne une chaine de caractères où les lettres 'C' et 'G' sont inversées avec probabilité 99% et non inversée avec probabilité 1%, la lettre 'A' est bien changée en 'U' avec probabilité 99% et changée en 'C' avec probabilité 1% et la lettre 'T' devient la lettre 'A' avec proba 99% et changée en 'U' avec proba 1% . Après l'avoir importée, on pourra utiliser la fonction random() qui retourne un réel aléatoire entre 0 et 1.

Acides aminés				Codons
Alanine	Ala	A		GCA GCC GCG GCT
Glycine	Gly	G		GGA GGC GGG GGT
Proline	Pro	P		CCA CCC CCG CCT
Thréonine	Thr	T		ACA ACC ACG ACT
Valine	Val	V		GTA GTC GTG GTT
Isoleucine	Iso	I		ATA ATC - ATT
Methionine	Met	M	START	ATG
Arginine	Arg	A		CGA CGC CGG CGT AGA AGG
Leucine	Leu	L		CTA CTC CTG CTT TTA TTG
Sérine	Ser	S		TCA TCC TCG TCT AGT AGC
Asparagine	Asn	N		AAC AAT
Ac. Aspartique	Asp	D		GAC GAT
Cystéine	Cys	C		TGC TGT
Glutamine	Gln	Q		CAA CAG
Ac. Glutamique	Glu	E		GAA GAG
Histidine	His	H		CAC CAT
Lysine	Lys	K		AAA AAG
Phénylalanine	Phe	F		TTC TTT
Tyrosine	Tyr	Y		TAC TAT
Tryptophane	Trp	W		TGG
STOP				TAA TAG TGA

Tableau du code génétique.

Correction 101.

V. 2 Lancers de dés.

Exercice 97. Pour toutes les questions d'informatique on pourra utiliser les fonctions créées (ou citées) dans les questions précédentes.

On considère l'expérience suivante : on effectue une suite de lancers d'un dé équilibré. On suppose les lancers indépendants.

Pour tout entier n on note F_n l'événement : ' on obtient 6 au lancer n.'
et T_n l'événément : ' on obtient 6 pour la première fois au lancer n'.

1. Exprimer T_n en fonction des $(F_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$
2. En déduire que $P(T_n) = \frac{5^{n-1}}{6^n}$.
3. Créer une fonction Python `premier_six` qui simule le lancer d'un dé et retourne la première fois où l'on obtient le nombre 6.
4. Créer une fonction Python `moyenne_empirique` qui prend en argument un nombre N représentant le nombre d'itérations de l'expérience et qui retourne la valeur moyenne du nombre de lancers nécessaire pour obtenir le premier 6.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note B_n l'événement 'On obtient au moins un 6 dans les n premiers lancers'. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction des $(F_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$
6. En déduire $P(B_n)$.
7. Créer une fonction Python `combien_de_six` qui prend en argument un nombre n qui correspond au nombre de lancers et retourne le nombre de 6 obtenu pendant les n lancers.
8. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note C_k l'événement 'on obtient k six au cours des 100 premiers lancers'.
   Calculer $P(C_k)$ en fonction de k.
9. Créer une fonction Python `evenement_C` qui prend en argument un nombre k et retourne `True` si on a obtenu exactement k six au cours des 100 premiers lancers et `False` sinon.
10. Créer une fonction `frequence_C` qui prend en argument un nombre k et un nombre N qui correspond au nombres d'itération de l'expérience et retourne la fréquence des expériences pour lequel on a obtenue exactement k six pour 100 lancers.

Correction 102.

1. $T_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{F_k} \cap F_n$
2. $P(F_k) = \frac{1}{6}$ et $P(\overline{F_k}) = \frac{5}{6}$. Les lancers sont indépendants donc

$$\begin{aligned} P(T_n) &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{F_k})\right) P(F_n) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{5}{6}\right) \frac{1}{6} \\ &= \frac{5^{n-1}}{6^n} \end{aligned}$$

3. cf dernière page
4. cf dernière page

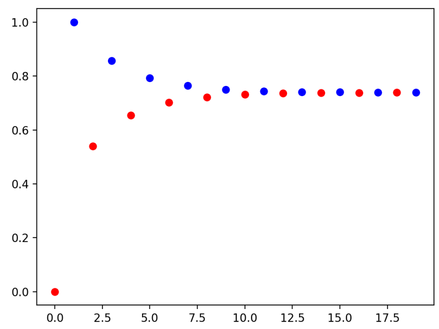
5. $\overline{B_n} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{F_k} \cap F_n$
6. $P(B_n) = 1 - P(\overline{B_n}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$
7. cf dernière page
8. L'univers est la suite des 100 lancers de dés, son cardinal est 6^{100} Le cardinal de l'événement est $\binom{100}{k} 1^k 5^{100-k}$ (position des dés donnant 6 $\times$ possibilités pour ces dés , $\times$ posiibilités pour les autres dés) On obtient
$$P(C_k) = \frac{\binom{100}{k} 5^{100-k}}{6^{100}}$$

V. 3 $u_{n+1} = \cos(u_n)$

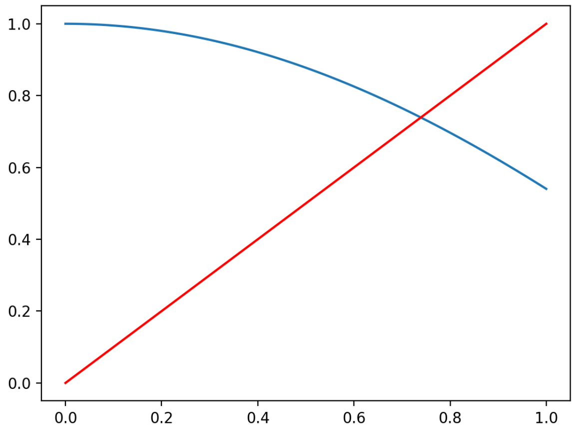
Problème 4 (Informatique)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \cos(u_n) \end{cases}$

1. Ecrire une fonction `suite_u` qui prend comme paramètre d'entrée un entier n et calcule la valeur de u_n correspondante.
2. On souhaite étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou tout du moins de ces premiers termes. Ecrire pour cela un programme qui trace un graphique sur lequel se trouvent les points (n, u_n) pour $n \in [\![0, 20]\!]$.

   On obtient le graphe suivant



   Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) semblent adjacentes, et converger vers une même limite ℓ, de sorte que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$
   En particulier, ℓ semble toujours appartenir à l'intervalle d'extrémités u_n et u_{n+1} pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, ce qui s'écrit :
$$\forall n \in N, |\ell - u_n| \leq |u_{n+1} - u_n|$$
   Nous admettrons tous ces résultats sans démonstration pour la suite.
3. Justifier que le réel ℓ satisfait $\ell = \cos(\ell)$
4. Proposer un programme permettant de tracer les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto x$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
   Après exécution, ce programme génère le graphe suivant :



Déterminer par lecture graphique une valeur approchée de ℓ.

5. (a) Ecrire une fonction `premier_entier(p)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier p et renvoie le plus petit entier tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-p}$

   (b) En déduire une fonction `approx(p)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier p et renvoie une valeur approchée de ℓ à $\pm 10^{-p}$ prés.

6. On souhaite déterminer une valeur approchée de ℓ par une autre méthode en utilisant un algorithme de dichotomie. On considère pour cela la fonction $h : x \in [0,1] \mapsto x - \cos(x)$.

   (a) Monter que h s'annule en un unique point de $\alpha \in [0,1]$ et que $\alpha = \ell$.

   (b) On suppose avoir défini la fonction h sur Python. Compléter la fonction suivante, qui prend comme paramètre d'entrée un réel $\epsilon > 0$ et qui renvoie une valeur approchée de ℓ à ϵ prés à l'aide de la méthode de la dichotomie.

```
def dichotomie(epsilon):
    a=0
    b=1

    while        >      :
        milieu = (a+b)/2
        if h(milieu)*h(a)<0:

        else:

    return(a)
```

Correction 103. 3 - Comme u_n converge vers ℓ par unicité de la limite u_{n+1} converge vers ℓ. Comme cos est continue sur $\mathbb{R}$ on a $lim_{n\to\infty}\cos(u_n) = \cos(\ell)$. Ainsi $\ell = \cos(\ell)$
4- $\ell \simeq 0.8$
6-a C'est une application du théorème de la bijection. h est continue et dérivable sur $[0,1]$ et $h'(x) = 1 + sin(x) > 0$ donc h est strictement croissante. $h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$ donc d'après le théorème de la bijection il existe un unique $\alpha \in [0,1]$ tel que $h(\alpha) = 0$. α vérifie donc $\alpha - \cos(\alpha) = 0$ cad $\alpha = \cos(\alpha)$ par unicité de la solution sur l'intervalle $[0,1]$ il est égale à ℓ.

V. 4 Mandelbrot

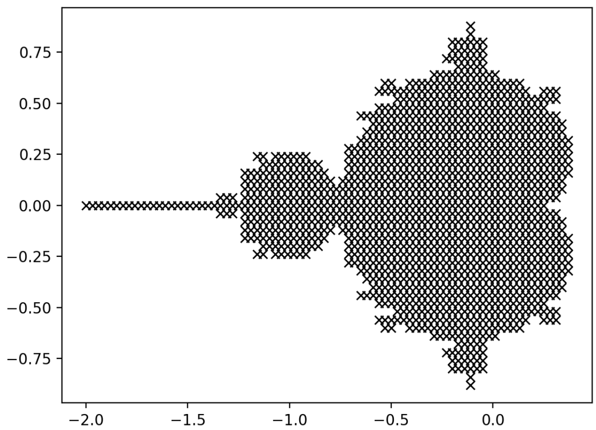
Exercice 98 (Ensemble de Mandelbrot)**.** Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 0$ et

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

où $c \in \mathbb{C}$ est un complexe.

Selon la valeur de c, il y a deux possibilités : soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée, soit son module tends vers l'infini. Le but de ce problème est d'écrire un algorithme qui permet de tracer l'ensemble des c pour lesquels la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée. Cette ensemble s'appelle l'ensemble de Mandelbrot.

1. Que vaut la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $c = 0$. Est ce que $c = 0$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot ?
2. Que valent les premières valeurs ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $c = i$. A votre avis est-ce-que $c = i$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot ?
3. Même question pour $c = 1 + i$ (pour $n = 0, 1, 2, 3$).
4. Ecrire une fonction Python `suite_z` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et un complexe $c \in \mathbb{C}$ et qui retourne la valeur de z_n.
5. On peut montrer que c appartient à l'ensemble de Mandelbrot si et seulement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < 2$. On suppose pour simplifier qu'un nombre c appartient à l'ensemble des Mandelbrot si et seulement si pour tout $n \in [\![0, 100]\!]$, $|z_n| < 2$. Ecrire une fonction verif qui prend un nombre complexe c et retourne `True` si c appartient à l'ensemble de Mandelbrot et `False` sinon.
6. Ecrire une fonction `tracer` qui prend en argument deux réels (x, y) et qui trace le point (x, y) sur un graphique si le point d'affixe $x + iy$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot.
7. Ecrire un script python qui teste si les points de coordonnées $\left(\frac{i}{100}, \frac{j}{100}\right)$ pour $i, j \in [\![-100, 100]\!]$ appartiennent à l'ensemble de Mandelbrot et les trace le cas échéant.



Correction 104.

1. Pour $c = 0$ la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0. 0 appartient donc à l'ensemble de Mandelbrot.
2. Pour $c = i$, $z_0 = 0$, $z_1 = i$, $z_2 = i^2 + i = -1 + i$, $z_3 = (-1 + i)^2 + i = -i$, $z_4 = (-i)^2 + i = -1 + i$. La suite semble périodique et donc le module est borné. Ainsi $c = i$ appartient donc à l'ensemble de Mandelbrot.

3. Pour $c=1+i$: $z_0=0$, $z_1=1+i$, $z_2=(1+i)^2+1+i=1+3i$, $z_3=(1+3i)^2+1+i=-7+7i$, $z_4=(-7+7i)^2+1+i=49(-1+i)^2+1+i=49(-2i)+1+i=1-97i$. Le module semble tendre vers l'infini. $c=1+i$ n'appartient donc pas à l'ensemble de Mandelbrot.

```
def suite_z(n,c):
    z=0
    for i  in range(n):
        z=z**2+c
    return(z)

def verif(c):
    for n in range(101):
        if suite_z(n,c)>2:
            return(False)
    return(True)

import matplotlib.pyplot as plt
def tracer(x,y):
    c=x+y*1j
    if verif(c)==True:
        plt.plot(x,y,'kx')

for x in range(-100,101):
    for y in range(-100,101):
        tracer(x/100,y/100)
plt.show()
```

V. 5 Pendu

Exercice 99. 1. On suppose que l'on dipose d'une liste `dictionnaire` contenant tous les mots du dictionnaire. (Pour vos testes, créer une liste `dictionnaire` contenant trois mots : 'coucou', 'olivier', 'matrice')

Ecrire une fonction `mots_de7lettres` qui retourne une liste ne contenant que les mots de 7 lettres du `dictionnaire`.

2. Ecrire une fonction `choix_mot`, qui choisit un mot de 7 lettres aléatoirement. (On pourra utiliser la fonction `len` qui prend en argument une chaine de caractères et qui retourne sa taille, (comme pour les listes))
3. Ecrire une fonction `transform` qui prend en argument une chaine de caractères `S` et retourne une liste dont chaque entrée est une lettre de la chaine `S`.
4. Créer une fonction `test_lettre` qui prend en argument un mot `M` et une lettre `a` et retourne la (ou les) position de la lettre `a` dans le mot `M`. Si `a` n'est pas dans le mot, la fonction retournera la liste vide.

   Exemples : `test_lettre`('olivier', 'i') –> [2, 4] et `test_lettre`('olivier', 'w') –> []
5. Ecrire une fonction `reponse` qui prend en argument deux chaines de caractères. L'une `M` correspondant au mot que l'on doit trouver et l'autre `P` correspondant à la proposition du joueur. Si le joueur propose une seule lettre alors la fonction `reponse` retourne la (ou les places) de la lettre

dans le mot `M`, si le joueur propose un mot (donc plusieurs lettres) alors la fonction `reponse` retourne `True` si le mot est bon et une liste vide si le mot est mauvais. (La liste vide permet d'être dans le même cas que si on avait donné juste une lettre qui n'est pas dans le mot)

6. Ecrire une fonction `lettre_connue` qui prend en argument un mot `M` (correspondant au mot à trouver) et une liste `L` (qui correspond au position des lettres déjà trouvées) et qui retourne une chaine de caractères où les lettres dont la position sont dans `L` s'affiche en claire et sinon sont remplacées par des '*'

   Exemple : `lettre_connue` ('olivier', [1,2,5]) retourne '*li**i**' `lettre_connue` ('matrice', [0,1,2]) affiche 'ma*****'

7. Compléter le code suivant qui permet de jouer au jeu du pendu sans limite d'essais.

```
def pendu():
    mot_a_trouver=.....
    mot_propose=''
    list_lettres_connues=[]
    while mot_propose != ......:
        l=lettres_connues(.... , ....)
        # On affiche les lettres deja trouvees par le joueur)
        print(l)

        mot_propose = input('Donner une lettre ou une proposition')
        #on demande au joueur une nouvelle lettre ou une nouvelle propostion

        rep=reponse(...., .... )
        #on analyse la reponse.

        if ...==.... : #si le joueur a trouve le bon mot
            print( ....  )# on le felicite
            return #on arrete le programme

        else: #sinon
            if len(rep)......:  #soit le mot n'est pas le bon ou la lettre n'es
                print('essaye encore') #et on lui dit de reesayer

            else:
                print('il y a ' +...... +' lettre ' + .... )
                #on affiche le nombre de fois ou la lettre proposee
                #apparait dans le mot cherche

                list_lettres_connues=....+....
                #et on ajoute a la liste des lettres
                #connues les nouvelles lettres.
```

8. Améliorer la fonction `pendu` pour que le programme s'arrête après 10 essais infructueux et affiche à chaque essais le nombre de tentatives restantes.

Correction 105.

V. 6 *Pivot de Gauss*

Exercice 100 (Extrait du Concours Agro-Veto 2019)**.** Des éléments de syntaxe Python, et en particulier l'usage du module numpy, sont donnés en annexe . Dans tout ce qui suit, les variables n, p, A, M, i, j et c vérifient les conditions suivantes qui ne seront pas rappelées à chaque question :

— n et p sont des entiers naturels tels que $p \geq n \geq 2$;

— A est une matrice carrée à n lignes inversible ;

— M est une matrice à n lignes et p colonnes telle que la sous-matrice carrée constituée des n premières colonnes de M est inversible ;

— i et j sont des entiers tels que $0 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq j \leq n-1$;

— c est un réel non nul.

On note $L_i \leftarrow L_i + cL_j$ l'opération qui ajoute à la ligne i d'une matrice la ligne j multipliée par c.

1. Soit la fonction initialisation :

```
def initialisation(A):
    n = np.shape(A)[0]
    mat = np.zeros((n,2*n))
    for i in range(0, n):
        for j in range(0, n):
            mat[i,j] = A[i,j]
    return(mat)
```

   Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant. L'appel initialisation (A) renvoie :

   (a) une matrice rectangulaire à n lignes et $2n$ colonnes remplie de zéros ;

   (b) une matrice de même taille que A ;

   (c) une erreur au niveau d'un range ;

   (d) une matrice rectangulaire telle que les n premières colonnes correspondent aux n colonnes de A, et les autres colonnes sont nulles.

2. Les trois fonctions multip, ajout et permut suivantes ne renvoient rien : elles modifient les matrices auxquelles elles s'appliquent.

   (a) Que réalise la fonction multip ?

```
def multip(M, i, c):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(0, p):
        M[i,k] = c*M[i,k]
```

   (b) Compléter la fonction ajout, afin qu'elle effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i + cL_j$.

```
def ajout(M, i, j, c):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(0, p):
        _____ ligne(s) a completer _____
```

   (c) Écrire une fonction permut prenant pour argument M, i et j, et qui modifie M en échangeant les valeurs des lignes i et j.

   Dans la suite du sujet, l'expression "opération élémentaire sur les lignes" fera référence à l'utilisation de permut, multip ou ajout.

3. Soit la colonne numéro j dans la matrice M. On cherche le numéro r d'une ligne où est situé le plus grand coefficient (en valeur absolue) de cette colonne parmi les lignes j à $n-1$. Autrement dit, r vérifie :

$$|A[r,j]| = \max\{|A[i,j]| \text{ pour } i \text{ tel que } j \leq i \leq n-1\}.$$

   Écrire une fonction `rang_pivot` prenant pour argument M et j, et qui renvoie cette valeur de r.

   Lorsqu'il y a plusieurs réponses possibles pour r, dire (avec justification) si l'algorithme renvoie le plus petit r, le plus grand r ou un autre choix.

   (L'utilisation d'une commande max déjà programmée dans Python est bien sûr proscrite.)

4. Soit la fonction mystere :

```
def mystere(M):
    n = np.shape(M)[0]
    for j in range(0, n):
        r = rang_pivot(M, j)
        permut(M, r, j)
        for k in range(j+1, n):
            ajout(M, k, j, -M[k,j]/M[j,j])
        print(M)
```

   (a) On considère dans cette question l'algorithme mystere appliqué à la matrice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

   Indiquer combien de fois la ligne print (M) est exécutée ainsi que les différentes valeurs qu'elle affiche

   (b) De façon générale, que réalise cet algorithme ?

5. On considère la fonction reduire :

```
def reduire(M):
    n = np.shape(M)[0]
    mystere(M)
    for i in range(0, n):
        multip(M, i, 1/M[i,i])
    #Les lignes suivantes sont \'a compl\'eter :
        ______________________________
```

   Compléter la fonction afin que la portion de code manquante effectue les opérations élémentaires suivantes sur les lignes :
   pour j prenant les valeurs $n-1, n-2, \dots, 1$, faire :
   pour k prenant les valeurs $j-1, j-2, \dots, 0$, faire :

$$\mathrm{L_k} \leftarrow \mathrm{L_k} - \mathrm{M[k,j]L_j}$$

   Indiquer ce que réalise cette fonction.

Annexe

On considère que le module numpy, permettant de manipuler des tableaux à deux dimensions, est importé via import numpy as np. Pour une matrice M à n lignes et p colonnes, les indices vont de 0 à $n-1$ pour les lignes et de 0 à $p-1$ pour les colonnes.

Python	Interprétation
abs(x)	Valeur absolue du nombre x
M[i, j]	Coefficient d'indice (i, j) de la matrice M
np· zeros ((n, p))	Matrice à n lignes et p colonnes remplie de zéros
T = np.shape(M) T[0] ou np.shape (M)[0] T[1] ou np.shape (M)[1]	Dimensions de la matrice M Nombre de lignes Nombre de colonnes
M[a : b, c : d]	Matrice extraite de M constituée des lignes a à $b-1$ et des colonnes c à $d-1$: si a (resp. c) n'est pas précisé, l'extraction commence à la première ligne (resp. colonne) si b (resp. d) n'est pas précisé, l'extraction finit à la dernière ligne (resp. colonne) incluse

Correction 106.