Soit A la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ n'est pas inversible. On appelle ces réels les *valeurs propres* de A.
2. (a) Calculer A^2 et A^3.
   (b) Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   (c) Montrer que (Id_3, A, A^2) est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (d) Est-ce une base ?
3. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Soit α, β, γ trois réels et $M = \alpha\,\mathrm{Id}_3 + \beta A + \gamma A^2$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}$
   (c) Réciproquement, on considère $a, b, c, d, e, f, g, h,$ et i des réels tel que $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Déterminer, en fonction des coefficients de M, trois réels α, β, γ tels que $M = \alpha\,\mathrm{Id}_3 + \beta A + \gamma A^2$
   (d) En déduire, une base de $\mathcal{S}$.
4. On considère S' l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.
   (a) Est ce que $\mathcal{S}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.
   Dans la suite, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^3$, le produit matriciel MX soit correctement défini.
   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$..
      i. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.
      ii. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que M^2X soit non nul.
      iii. Montrer que la famlille $B = (X, MX, M^2X)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.