1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ que vaut $\tan(\arctan(x))$?
   (b) Soit $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?
   (c) Soit $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?
   (d) Soit $k \in \mathbb{Z}$, et $x \in]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, que vaut $\arctan(\tan(x))$?
2. On rappelle que la dérivée d'un quotient $\frac{f}{g}$ vaut $\frac{f'g-fg'}{g^2}$. Montrer que pour tout x où tan est définie on a :
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$
3. On rappelle que la dérivée d'une composée $f \circ g$ vaut $g' \times f' \circ g$. Grâce à la formule obtenue en 1.(a) montrer que la dérivée de arctan sur $\mathbb{R}$ vaut
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
4. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$
5. Soit x, y deux réels positifs. Montrer que si $xy < 1$ alors
$$0 \leq \arctan(x) + \arctan(y) < \frac{\pi}{2}$$
6. Etant donnée $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, tel que $xy < 1$, montrer que
$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$ [1]
7. Soit $x > 0$, comparer : $\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ et $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$.
8. Simplifier
$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$
9. En déduire $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.