1. Vérifier que la formule du binôme est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ (et sur votre brouillon faite $n = 3$). On va prouver la formule par récurrence. On détaille les différentes étapes dans les prochaines questions :
2. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1}.$$

3. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1}$$

4. En déduire que

$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

5. Conclure.

   Application : Soit $n, m \in \mathbb{N}^2$

   (a) Calculer $(1+x)^n(1+x)^m$ et $(1+x)^{n+m}$ à l'aide du binome de Newton.

   (b) En déduire que pour tout $r \leq n+m$ on a :

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{n}{j} \binom{m}{r-j} = \binom{n+m}{r}$$