On définit la fonction *sinus hyperbolique* de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

1. Etude de la fonction sinh sur $\mathbb{C}$.
   (a) Que vaut $\sinh(z)$ quand z est imaginaire pur ?
   (b) La fonction sinh est elle injective ?
2. On note sh la restriction de la fonction sinh à $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{sh} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

   Etude de la fonction sh sur $\mathbb{R}$.
   (a) Etudier la fonction sh.
   (b) Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera.
   (c) ⚠ A retravailler ⚠ En déduire que la fonction sinh est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
   (d) On note $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$
3. Etude de la réciproque. On note argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de sh.
   (a) Comment obtenir la courbe représentative de argsh à partir de celle de sh.
   (b) Démontrer que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

   (c) En résolvant $y = \mathrm{sh}(x)$ déterminer l'expression de $\mathrm{argsh}(y)$ en fonction de y et retrouver ensuite le résultat de la question précédente.
4. Etudier la limite de $\mathrm{argsh}(x) - \ln(x)$ quand $x \to +\infty$.