Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall t > 0,\ f'(t) = f(1/t)$$

On fixe une fonction $f \in \mathcal{S}$ et on définit la fonction g par

$$g(x) = f(e^x)$$

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde en fonction de f.
2. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est solution de l'équation diffrentielle suivante :
$$y'' - y' + y = 0 \quad (E)$$
3. Résoudre (E).
4. En déduire que f est de la forme
$$f(t) = A\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + B\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$
où (A, B) sont deux constantes réelles.
On appelle $f_1(t) = \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$ et $f_2(t) = \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$
5. Calculer les dérivées premières de f_1 et f_2
6. En considérant les cas $t = 1$ et $t = e^{\pi/\sqrt{3}}$, montrer que A et B sont solutions de
$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} A - B\sqrt{3} & = & 0 \\ A\sqrt{3} - 3B & = & 0 \end{array}\right.$$
7. Résoudre (S).
8. Conclure.