

Roudoudou le hamster vit une vie paisible de hamster. Il a deux activités : manger et dormir... On va voir Roudoudou à 00h00 ( $n = 0$ ). Il est en train de dormir.

- Quand Roudoudou dort à l'heure  $n$ , il y a 7 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 3 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.
- Quand Roudoudou mange à l'heure  $n$ , il y a 2 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 8 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

On note  $D_n$  l'événement 'Roudoudou dort à l'heure  $n$ ' et  $M_n$  'Roudoudou mange à l'heure  $n$ '. On note  $d_n = P(D_n)$  et  $m_n = P(M_n)$  les probabilités respectives.

1. Justifier que  $d_n + m_n = 1$ .
2. Montrer rigoureusement que

$$d_{n+1} = 0,7d_n + 0,2m_n$$

3. Exprimer de manière similaire  $m_{n+1}$  en fonction de  $d_n$  et  $m_n$ .
4. Soit  $A$  la matrice

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Résoudre en fonction de  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'équation  $AX = \lambda X$  d'inconnue  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

5. Soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .

6. Montrer que  $P^{-1}AP = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Calculer  $D^n$  où  $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = \begin{pmatrix} 3(1/2)^n + 2 & -2(1/2)^n + 2 \\ -3(1/2)^n + 3 & 2(1/2)^n + 3 \end{pmatrix}$ .

9. En déduire la valeur de  $d_n$  en fonction de  $n$ .