On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. On rappelle que pour tout réel y on note $\sqrt[3]{y}$ l'unique solution de l'équation $x^3 = y$ d'inconnue x.
Le but de l'exercice est de donner des expressions simplifiées de α et β.

1. Ecrire un script Python qui permet d'afficher une valeur approchée de α.
2. (a) Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
   (b) Vérifier que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
   (c) En déduire que $(\alpha+\beta)^3 = 4 - 3(\alpha+\beta)$
3. On pose $u = \alpha + \beta$ et on considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + 3x - 4$.
   (a) A l'aide de la question précédente montrer que u est une racine de P c'est-à-dire que $P(u) = 0$.
   (b) Trouver une autre racine « évidente » de P.
   (c) Trouver trois nombres réels a, b, et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$
   (d) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (e) En déduire la valeur de u.
4. On considère la fonction polynomiale $Q : x \mapsto Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$
   (a) A l'aide des questions précédentes, développer et simplifier $Q(x)$ pour tout nombre réel x.
   (b) En déduire des expressions plus simples de α et β.