

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geq 2$).

A - Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{\text{ième}} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X . Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^n P(Y = k) = 1.$$

4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

5. En déduire $E(Y)$.

B - Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p , par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^p X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1 .
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) . En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2 .
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p .
6. Soit $p \leq n - 1$.

- (a) Déterminer $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
- (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$

- (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
(On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, \dots, X_p étant supposées suivre une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).