

Pour toute variable aléatoire X telle que l'ensemble de ses valeurs images $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de \mathbb{N} , on définit sa fonction génératrice par :

$$g_X : t \mapsto \mathbb{E}(t^X)$$

où \mathbb{E} désigne l'espérance.

Soit X une telle variable aléatoire. On note $m \in \mathbb{N}$ sa valeur image maximale, ainsi $X(\Omega) \subset \{0, 1, 2, \dots, m\}$.

1. Justifier que g_X est une fonction polynomiale.
2.
 - (a) Calculer $g_X(1)$.
 - (b) Montrer que $g'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.
 - (c) Montrer que $g''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$.
 - (d) Exprimer $V(X)$ (où V désigne la variance) en fonction de $g'_X(1)$ et $g''_X(1)$.
3.
 - (a) Exprimer g_{X+1} à l'aide de g_X .
 - (b) Exprimer g_{2X} à l'aide de g_X .
4. Dans cette question, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ où $(n, p) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$.
 - (a) Calculer g_X .
 - (b) Retrouver les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ à l'aide de la fonction génératrice.