Dans cet exercice σ désigne un réel strictement positif.

On considère les trois fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = xe^{-x}, \quad h(x) = \frac{2}{ex}$$

$\mathcal{C}_\sigma$ désigne la courbe représentative de f_σ et $\mathcal{H}$ la courbe représentative de h

1. Soit $I_\sigma(t) = \displaystyle\int_0^t f_\sigma(x)dx$. Calculer $I_\sigma(t)$ pour tout $t \geq 0$ et en déduire la limite $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I_\sigma(t)$
   L'année prochaine, on dira que f_σ est une fonction de densité.
2. f_σ est-elle continue ?
3. (a) Démontrer que g admet un maximum que l'on déterminera.
   (b) En déduire que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_\sigma(x) \leq h(x).$$
   (c) Etudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente puis montrer que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, les courbes $\mathcal{C}_\sigma$ et $\mathcal{H}$ ont une tangente commune dont on donnera une équation cartésienne.