On considère $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$.

1. Rappeler la nature géométrique de S. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$. Déterminer D_f le domaine de définition de f. Est elle bien définie pour tous les points de S ?
2. (a) Mettre $f(z) - \frac{7}{3}$ sous la forme d'une fraction.

   (b) Montrer que pour tout z dans l'ensemble de définition de f,

   $$\left| f(z) - \frac{7}{3} \right|^2 = \frac{|z|^2 + 8\mathfrak{Re}(z) + 16}{9(|z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z) + 1)}$$

   (c) On note S_2 le cercle de centre $7/3$ et de rayon r_0. Montrer que $f(S) \subset S_2$
3. (a) Soit $y = f(z)$, exprimer z en fonction de y quand cela a un sens.

   (b) Déterminer l'ensemble F tel que $f : D_f \to F$ soit bijective. Déterminer l'expression de f^{-1}

   (c) (Difficile) Montrer que pour tout $y \in S_2$, $f^{-1}(y) \in S$.

   (d) En déduire $f(S)$.