

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto x \exp(\sin^2(x)).$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $f$ .
2. Justifier que  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  vers un ensemble  $I$  à déterminer.
3. Justifier que la bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f|_{\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .
4. Justifier l'existence de  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$ .
5. En composant les développements limités de  $f^{-1}$  et  $f$ , déterminer les valeurs des constantes  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
6. Que peut-on en déduire pour la tangente à la courbe représentative de  $f^{-1}$  au voisinage de 0 ?