

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=0}^n F_{2k+1} = F_{2n+2}$ et $\sum_{k=0}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
3. (a) On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.
(b) Montrer que l'expression explicite de F_n est donnée par $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.