Soit $a \in ]-1,1[$. On suppose l'existence d'une application $f$, continue sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

1. Calcul des dérivées successives de $f$.
   (a) Justifier l'existence d'une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel $x$, $f(x)$ en fonction de $x, a$ et $F$.
   (b) Justifier la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel $x$, $f'(x)$ en fonction de $x, a$ et $f$.
   (c) Démontrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre entier naturel $n$, on a
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$
   (d) En déduire, pour tout nombre entier naturel $n$ la valeur de $f^{(n)}(0)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel $x$ et tout nombre entier $n$, on a :
   $$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$
   *On pourra faire une récurrence et utiliser une intégration par parties*
3. Soit $A$ un nombre réel strictement positif.
   (a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul $M$ tel que :
   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f(x)| \leq M$$
   et en déduire que pour tout nombre entier naturel $n$, on a :
   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$
   .
   (b) Soit $x$ un nombre réel apartenant à $[-A, A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a
   $$|f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}.$$
   (c) En déduire que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-A, A]$
   (d) Que peut-on en déduire sur la fonction $f$ ?