Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = [\![1, n]\!]$. On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de E_n sur E_p.

1. Calculer $S_{n,p}$ si $p > n$.
2. Justifier grâce au cardinal qu'une surjection de E_n dans E_n est une bijection. En déduire $S_{n,n}$.
3. Déterminer $S_{n,1}$.
4. Combien y-a-t-il d'applications de E_n dans E_2 ? Parmi ces applications lesquelles ne sont pas surjectives ? En déduire $S_{n,2}$.
5. Soit f une surjection de E_{p+1} dans E_p, justifier que tous les éléments de E_p ont exactement un antécédent sauf un qui en a exactement deux. En déduire que $S_{p+1,p} = \frac{p}{2}(p+1)!$

   On suppose désormais que $0 < p \leq n$.

6. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k = 0$
7. Montrer que pour tout (k, q) tel que $0 \leq k \leq q \leq p$
$$\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}.$$
8. (a) En déduire que, si $0 \leq k < p$, alors $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} \binom{p}{q}\binom{q}{k}(-1)^q = 0.$

   (b) Que vaut la somme précédente quand $k = p$?
9. Montrer que pour tout entier q de E_p le nombre d'applications de E_n dans E_p ayant un enemble d'image à q éléments est égal à $\binom{p}{q} S_{n,q}$.
10. En déduire que $p^n = \displaystyle\sum_{q=1}^{p} \binom{p}{q} S_{n,q}$.
11. A l'aide d'une inversion de sommes montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k \binom{p}{k} k^n = \sum_{q=1}^{p}\left(\sum_{k=q}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{q}\right) S_{n,q}$.
12. A l'aide des questions précédentes (8, 10, 11 notamment), en déduire que $S_{n,p} = (-1)^p \displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k \binom{p}{k} k^n$.

    Dans les questions suivantes on va essayer de déterminer une relation de récurrence entre $S_{n,p}$ et les valeurs de $S_{n-1,p}$ et $S_{n-1,p-1}$
13. Soit $\varphi : E_n \to E_p$ une surjection. (Combien y-a-t-il de possibilités pour φ ?) On note φ_1 la restriction de φ à E_{n-1}.

    (a) Supposons que φ_1 est surjective. Combien y-a-t-il de possibilité pour φ_1 ?

    (b) Supposons que φ_1 n'est pas surjective, en déduire que $Im(\varphi) = Im(\varphi_1) \cup \{\varphi(n)\}$ cette union étant disjointe. $Im(\varphi)$ désigne l'image de la fonction, c'est-à-dire $\{\varphi(e) \,|\, e \in E_n\}$. Montrer ainsi que φ_1 est surjective de E_{n-1} sur $E_p \setminus \{\varphi(n)\}$. Combien y-a-t-il de possibilités pour φ_1 ?

    (c) En déduire que $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.

    (d) A l'image du triangle de Pascal, construire une table des $S_{n,p}$ pour $0 \leq p \leq n \leq 5$

    (e) Ecrire un programme Python qui prend en argument (n, p) et retourne la valeur de $S_{n,p}$.