Fonctions k-contractantes.

On suppose que f est une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ et qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Une telle fonction s'appelle une fonction k-contractante.

1. Montrer que f est continue.
2. En déduire que f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.
3. Montrer par l'absurde que ce point fixe est unique. On le note c.
4. On considère alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $c_0 \in [0,1]$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = f(c_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leq k^n |c_0 - c|$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.