Programme de colle : Semaine 9
Lundi 24 Novembre

1 Cours

1. Systèmes linéaires
   (a) Systèmes linéaires échelonnés.
   (b) Rang d'un système linéaire.
   (c) Pivot de Gauss.
2. Suites réelles :
   (a) Etude de suites : monotonie, limites.
   (b) Théorème de convergence des suites monotones.
   (c) Théorème d'encadrement.
   (d) Passage à la limite dans une (in)égalité.
   (e) Suites adjacentes (définition + théorème, bien faire la différence)
   (f) Suites extraites terme pair et impair
   (g) Etudes guidées des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$
3. Python :
   (a) Instruction conditionnelle (if/else)
   (b) Fonction
   (c) Boucle `for`, `while`
   (d) Listes

2 Exercices Types

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 2]$
   (b) Résoudre $\sqrt{x+2} - x \geq 0$
   (c) En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (d) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
   (e) Ecrire une fonction Python qui prend en argument un flottant ϵ et retourne le premier entier n tel que $|u_n - \ell| \leq \epsilon$ où ℓ est la limite précédemment déterminée.
2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = 3a_n.$$
   (a) Ecrire un script Python qui prend en argument un entier n et retourne la liste des valeurs de a_k pour k de 0 à n.
   (b) Démontrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de n.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer b_n en fonction de n.
3. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une des suites définies précédemment.
4. Déterminer le rang et résoudre le système linéaire d'inconnues réelles suivants :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

5. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & \lambda x \\ x & + & y & = & \lambda y \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & \lambda x \\ x & + & 2y & = & \lambda y \end{array}\right.$$

6. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^7$
7. Ecrire une fonction python qui prend en argument une liste d'entiers et retourne le plus grand élément.