TD 0 - Résolution d'équations

Entraînements

Exercice 1. Résoudre les (in)-équations suivantes :

1. $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0$
2. $x^3 - x^2 - x - 2 < 0$
3. $(3x-1)(x+2) + (2-6x)(4x+3) > 0$
4. $32x^6 - 162x^2 < 0$
5. $\dfrac{2x}{4x^2-1} \leq \dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}$
6. $\dfrac{x^4+x}{x^4-5x^2+4} < 1$
7. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x$
8. $(x-1)^2 \leq 1$
9. $\dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{1}{2x}$
10. $\dfrac{2x+1}{1+x} \geq \dfrac{3x-2}{1+x}$
11. $\dfrac{x^2+10x-4}{x-2} \leq \dfrac{16x+2}{x+1}$

Exercice 2. Résolution d'équations et d'inéquations avec les fonctions $\ln$, $\exp$ et $x \mapsto a^x$:

1. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$
2. $\ln(1 + e^{-x}) < x$
3. $|\ln x| < 1$
4. $\ln(2x+4) - \ln(6-x) = \ln(3x-2) - \ln(x)$
5. $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0$
6. $2^{2x+1} + 2^x = 1$
7. $e^{3x} - e^{2x} - e^{x+1} + e \leq 0.$
8. $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 \leq 0$
9. $2e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$
10. $2\ln(x) + \ln(2x-1) > \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$
11. $4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geq 0$
12. $e^x - e^{-x} = 3$
13. $9^x - 2 \times 3^x - 8 > 0$

Exercice 3. On considère l'expression $R(a) = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

1. Pour quels valeurs de a, $R(a)$ est-elle bien définie ?
2. Pour ces valeurs, simplifier l'expression $R(a)$. Tracer la fonction $a \mapsto R(a)$.

Exercice 4. Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - (m+1)x + m}.$$

Exercice 5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois propositions suivantes

$$P_1(f) : \text{"}\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < M\text{"}$$

$$P_2(f) : \text{"}\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)\text{"}$$

$$P_3(f) : \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq f(y)\text{"}$$

1. Donner les négations de ces propositions
2. Dire si ces propositions sont vraies ou fausses pour les fonctions suivantes :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right. , \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array} \right. , \quad h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

On justifiera, dans le cas où les propositions sont vraies, en donnant une valeur pour les variables quantifiées par le quantificateur $\exists$

Type DS

Exercice 6. On souhaite résoudre l'inéquation suivante

$$I(a) \quad : \quad ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1 \geq 0$$

d'inconnue x et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. A quelle.s condition.s sur a cette inéquation n'est-elle pas de degré 2 ? La résoudre pour la.les valeur.s correspondante.s

   Dans toute la suite de l'exercice nous supposerons que a est tel que l'inéquation est de degré 2.
2. Montrer alors que le discriminant de $ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1$ en tant que polynome du second degre en x, vaut
   $$\Delta(a) = 4a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 2a + 1$$
3. Montrer que $\Delta(a) = (a-1)^2(2a+1)^2$
4. (a) Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des solutions de $\Delta(a) = 0$. Déterminer $\mathcal{M}$

   (b) Résoudre $I(a)$ pour $a \in \mathcal{M}$.

   On suppose désormais que $a \notin \mathcal{M}$.
5. (a) Justifier que $\Delta(a) > 0$ et exprimer $\sqrt{\Delta(a)}$ à l'aide de valeur absolue.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\{|x|, -|x|\} = \{x, -x\}$$

   (c) En déduire que l'ensemble des racines de $ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1$ est
   $$R = \left\{\frac{1}{a}, 2a - 1\right\}$$

   On note
   $$r_1(a) = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad r_2(a) = 2a - 1$$
6. Résoudre $r_1(a) \geq r_2(a)$.
7. Conclure en donnant les solutions de $I(a)$ en fonction de a.

Exercice 7. On cherche les racines réelles du polynôme $P(x) = x^3 - 6x - 9$.

1. Donner en fonction du paramètre x réel, le nombre de solutions réelles de l'équation $x = y + \frac{2}{y}$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| \geq 2\sqrt{2}$. Montrer en posant le changement de variable $x = y + \frac{2}{y}$ que :
   $$P(x) = 0 \Longleftrightarrow y^6 - 9y^3 + 8 = 0$$
3. Résoudre l'équation $z^2 - 9z + 8 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{R}$.
4. En déduire une racine du polynôme P.
5. Donner toutes les racines réelles du polynôme P.