

Programme de colle : Semaine 17

Lundi 2 Février

1 Cours

1. Limites et continuité.

- (a) Définition des limites ($a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) avec les quantificateurs. J'ai pris comme définition de la limite une limite épointée :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \setminus \{x_0\} \cap D_f, |f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

- (b) limites à gauche limites à droites.
(c) Taux d'accroissement et limites usuelles
(d) Croissances comparées
(e) Notation $f(x) = o(g(x))$ et $f(x) \sim g(x)$
(f) Règles de calcul sur les équivalents.
(g) Définition de la continuité, continuité à gauche à droite en un point.
(h) Définition de la continuité sur un intervalle de \mathbb{R} .
(i) Définition de la fonction partie entière
(j) Fonction continues, limites et suites (théorèmes de compositions)
(k) Théorème : TVI, bijection.
(l) Théorème : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

2. Dérivabilité

- Dérivabilité en un point.
- Équation de la tangente
- Dérivabilité sur un intervalle : Rolle, TAF.
- Dérivabilité d'ordre supérieur. Notation \mathcal{C}^n et \mathcal{C}^∞

3. Python :

- (a) Instructions conditionnelles (if/else)
- (b) Fonctions
- (c) Boucles `for`, `while`
- (d) Listes
- (e) Chaînes de caractères.

2 Exercices Types

Exercice 1. Donner la formule de $f^{(n)}(x)$ lorsque $f : x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 2. Soit P un polynôme admettant deux racines réelles, montrer que la dérivée s'annule sur \mathbb{R} .

Exercice 3. Montrer en utilisant le TAF que $\forall x > 0$

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$

Exercice 4. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ? Si oui, le prolongement est-il de classe \mathcal{C}^1

$$1. \ f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$2. \ f(x) = \frac{|x| \ln(1+x)}{e^{2x^2} - 1}.$$

$$3. \ f(x) = \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1).$$

$$4. \ f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$

$$5. \ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

$$6. \ f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}}$$

$$7. \ f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$8. \ f(x) = \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{|x|}$$

$$9. \ f(x) = x \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$$

$$10. \ f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$11. \ f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$$

$$12. \ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

$$13. \ f(x) = x^x$$

Informatique :

1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste et retourne l'indice du maximum de cette liste.
2. Un polynome du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est encodé en python par une liste à trois éléments $L = [c, b, a]$.
Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste à trois éléments correspondant à un polynome du second degré et retourne le nombre de racine réelle de ce polynome.