Correction - DM

Exercice 1. 1. Soient p et $q \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\sin(p) - \sin(q) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{p+q}{2}} 2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)$$

2. Trouver une formule similaire pour

$$\cos(p) + \cos(q)$$

3. Soient p et $q \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q}.$$

4. En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Correction 1. 1. On note $S = \dfrac{p+q}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
\sin(p) - \sin(q) &= \mathfrak{Im}\left(e^{ip} - e^{iq}\right) && \text{(Euler)}\\
&= \mathfrak{Im}\left(e^{iS}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right) && \text{(angle moitié)}\\
&= \mathfrak{Im}\left(e^{iS} 2i \sin\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

2.
Toujours avec $S = \dfrac{p+q}{2}$, :

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= \mathfrak{Re}\left(e^{ip} + e^{iq}\right) && \text{(Euler)}\\
&= \mathfrak{Re}\left(e^{iS}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right) && \text{(angle moitié)}\\
&= \mathfrak{Re}\left(e^{iS}\, 2\cos\frac{p-q}{2}\right).
\end{aligned}$$

3.
On a

$$\begin{aligned}
\sin(p) - \sin(q) &= \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{p+q}{2}} 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) && \text{D'après 1.}\\
&= \mathrm{Im}\left((\cos(\frac{p+q}{2}) + i\sin(\frac{p+q}{2}))2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right)\\
&= \mathrm{Im}\, 2i\cos(\frac{p+q}{2})\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) && \text{on ne garde que la partie imaginaire}\\
&= \cos(\frac{p+q}{2})\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

On obtient de même

$$\cos p + \cos q = \cos(\frac{p+q}{2})\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Et donc

$$\begin{aligned}\frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q} &= \frac{\cos(\frac{p+q}{2})\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}{\cos(\frac{p+q}{2})\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}\\ &= \frac{\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}{\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}\\ &= \tan\left(\frac{p-q}{2}\right).\end{aligned}$$

4. On prend $p=\frac{\pi}{6}$, $q=\frac{\pi}{4}$, alors

$$\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{\sin(\pi/6)-\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/6)+\cos(\pi/4)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.}$$

Exercice 2. 1. Soit $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $k\leq n$. Rappeler la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

2. Montrer que pour tout $(k,p,n)\in\mathbb{N}^3$ tel que $0\leq k\leq p\leq n$, on a

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{n}{p}\binom{p}{k}.$$

3. Énoncer la formule du binôme de Newton.
4. Déduire que pour tout $(p,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p\leq n$,

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{n}{p}2^p.$$

5. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $(p,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p\leq n$,

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}x^ky^{n-k}=\binom{n}{p}y^{n-p}(x+y)^p.$$

6. En déduire que

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}x^ky^{n-k}=(x+2y)^n.$$

Correction 2. 1. Par définition pour tout $(k,n)\in\mathbb{N}^2$

$$\binom{n}{k}=\begin{cases}\frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k\leq n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

2. On écrit les deux côtés :

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!}=\frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}.$$

Et

$$\binom{n}{p}\binom{p}{k}=\frac{n!}{p!(n-p)!}\cdot\frac{p!}{k!(p-k)!}=\frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}.$$

Les deux expressions sont égales.

3. Formule du binôme de Newton $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

4. On somme l'égalité précédente pour $k=0$ à p et on applique la question 2 :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{p}\binom{p}{k} && \text{D'après 2} \\
&= \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} && \text{Par linéarité} \\
&= \binom{n}{p} 2^p && \text{D'après le BdN avec } x = y = 1
\end{aligned}$$

5. On multiplie par $x^k y^{n-k}$ et on somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} x^k y^{n-k} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{p}\binom{p}{k} x^k y^{n-k} && \text{D'après 2} \\
&= \binom{n}{p} y^n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{x}{y}\right)^k && \text{Par linéarité} \\
&= \binom{n}{p} y^n (1 + \frac{x}{y})^p && \text{D'après le BdN} \\
&= \binom{n}{p} y^n (\frac{y+x}{y})^p \\
&= \binom{n}{p} y^{n-p} (y+x)^p
\end{aligned}$$

6. C'est juste une application du binôme de Newton.