TD 15 : Probabilité

Entrainement

Notions de base

Exercice 1. Soient trois personnes choisies une à une et sans remise dans une population. On note R_i l'événement « la i-ième personne a un rhésus + ». Ecrire à l'aide des R_i les événements suivants

- A : « au moins une personne a un rhésus + » ;
- B : « au moins deux personnes ont un rhésus + » ;
- C : « une personne exactement a un rhésus + » ;
- D : « au moins une des deux premières personnes a un rhésus + ».

Exercice 2. On étudie 4 sortes de maïs numérotés de 1 à 4 et on note M_i l'événement : « le maïs numéro i est transgénique ». Ecrire à l'aide de ces événements les événements suivants :

- A : « une seule sorte de maïs est transgénique » ;
- B : « au moins une des trois premières sortes de maïs n'est pas transgénique ».

Exercice 3. Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie et 30% contre les 2 maladies. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard ne soit vacciné contre aucune de ces deux maladies ?

Exercice 4. Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts notés A et B. On estime que 2% des pièces présentent les deux défauts, 5% ont le défaut A mais pas le défaut B et 10% ont le défaut B. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce choisie au hasard présente le défaut A ? Aucun défaut ? Un seul défaut ?

Équiprobabilités

Exercice 5. On choisit 5 cartes au hasard et simultanément dans un jeu de 32 cartes. Donner les probabilités d'avoir

1. 5 cartes de la même couleur ;
2. (2 as et 3 rois) ou (3 as et 2 rois) ;
3. (au moins un as) et (deux rois exactement).

Exercice 6. Quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes dans la classe soient nées le même jour ? Pour simplifier, on ne tiendra pas compte des années bissextiles.

Exercice 7. On lance trois dés distincts et équilibrés. On note A l'événement « les numéros sont égaux », B : « au moins un des numéros est égal à 3 » et C : « la somme des numéros est égale à 4 ». Calculer la probabilité pour qu'au moins un des trois événements soit réalisé.

Exercice 8. En lançant 6 dés différents, donner les probabilités d'avoir :

1. les 6 résultats possibles ;
2. au moins deux résultats distincts.

Exercice 9. On répartit 4 boules numérotées de 1 à 4 dans 4 tiroirs également numérotés de 1 à 4, chaque tiroir pouvant recevoir toutes les boules. On pourra considérer qu'un résultat est une 4-liste (n_1, n_2, n_3, n_4) où n_i est le numéro du tiroir contenant la boule de numéro i.
Quelle est la probabilité pour que les 4 tiroirs soient occupés ? Pour qu'un seul tiroir soit occupé ? Pour que les boules 1 et 2 se trouvent dans les 2 premiers tiroirs ?

Probabilités conditionnelles

Exercice 10. Une urne contient b boules blanches et n boules noires (b et n sont dans $\mathbb{N}^\star$).

1. On fait deux tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules de couleurs différentes ?
2. Même question dans le cas où les tirages s'effectuent de la façon suivante : si la première boule tirée est blanche, on la remet avec en plus deux boules blanches, sinon on ne la remet pas.

Exercice 11. Mr G. dispose de n clefs sur son trousseau et une seule ouvre la porte de la salle 78.

1. N'ayant pas beaucoup dormi la nuit précédente, Mr G. essaye les clés jusqu'à trouver la bonne sans penser à mettre de côté les mauvaises clés. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au k-ième essai ?
2. Même question dans le cas où Mr G. a bien dormi et pense à mettre de côté les mauvaises clés.

Exercice 12. On considère n urnes $U_1, U_2, \dots, U_n$. L'urne U_1 contient b boules blanches et n noires, les autres contiennent initialement b boules blanches et b boules noires. On tire une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis une boule de U_2 que l'on met dans U_3 et ainsi de suite. On note p_i la probabilité d'obtenir une boule blanche au i-ième tirage. Calculer p_1 puis p_{i+1} en fonction de p_i pour $i \geq 2$. Déterminer p_i en fonction de i puis $\lim\limits_{i\to+\infty} p_i$.

Exercice 13. On dispose de $2n$ jetons numérotés de 1 à n dans un sac, chaque numéro apparaissant deux fois. A tire un jeton, le remet puis B tire un autre jeton. Calculer la probabilité que A tire un numéro qui soit au moins le double du numéro de B.

Exercice 14. Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs A et B. Au jour 0, elle va à la fleur A. À chaque nouvelle journée, il y a une probabilité $p \in]0,1[$ qu'elle aille sur la même fleur que la veille. Pour tout entier n, on note A_n l'événement « l'abeille est sur la fleur A le jour n »et B_n l'événement « l'abeille est sur la fleur B le jour n ». On pose de plus $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$.

1. Pour tout entier n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. En remarquant que $a_n + b_n = 1$, déterminer les expressions explicites de a_n et b_n.
3. Vers quoi tendent les deux suites ? Interpréter.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère n sacs $S_1, \dots, S_n$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, le sac S_k contient k jetons blancs et $n+1-k$ jetons noirs. On choisit un sac avec une probabilité de choisir le sac S_k égale à αk. Après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.

1. Trouver la valeur de α.
2. Quelle est la probabilité de tirer un jeton blanc.
3. Le jeton pioché est blanc. Quelle est la probabilité que ce jeton proviennent du sac S_k pour $k \in [\![1,n]\!]$ fixé ?

Exercice 16. La proportion de pièces défectueuses dans un lot est de 0.05. Le contrôle qualité des pièces accepte une pièce bonne avec une probabilité de 0.96 et refuse une pièce mauvaise avec une probabilité de 0.98. On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité :

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?
3. qu'une pièce refusée soit bonne ?

Exercice 17. Un individu est choisi au hasard dans une population comportant une proportion $p \in]0,1[$ de tricheurs aux cartes. On fait choisir une carte d'un jeu de 52 cartes par cet individu et on admet que s'il est tricheur, il retourne un as surement. Quelle est la probabilité que cet individu retourne un as ?

Exercice 18. On possède un jeu de 32 cartes et un jeu de 52 cartes. On choisit au hasard l'un de ces jeux et on y tire une carte. On constate que c'est une dame. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du jeu de 32 cartes ?

Exercice 19. Un magasin vend des sabres laser provenant pour 70% d'un fabriquant A et pour 30% d'un fabriquant B. Parmi ceux qui proviennent de l'usine A, 20% possèdent un défaut contre 10% pour ceux sortant de l'usine B. Vous vous offrez un superbe sabre laser et pas de chance il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par B ?

Indépendance

Exercice 20. On lance deux fois une pièce parfaite. On note A l'événement : « le premier lancer donne Pile », B l'événement : « le deuxième lancer donne Pile » et C l'événement : « on obtient deux résultats différents ». Etudier l'indépendance mutuelle et deux à deux de ces trois événements.

Exercice 21. On contrôle séparément et de façon indépendante les trois dimensions d'un pavé. Les probabilités de rejet sont égales à 0.06 pour la longueur, 0.04 pour la largeur et 0.08 pour la hauteur. Le pavé est refusé dès qu'une de ses dimensions est rejetée. Quelle est la probabilité pour qu'un pavé soit refusé ?

Exercice 22. Dans une entreprise, des pièces sont fabriquées en série par deux machines A et B. La machine A, récente, assure 75% de la production. La probabilité qu'une pièce fabriquée par A soit défectueuse est de 0.01. la machine B, plus ancienne, assure le reste de la production et la probabilité qu'elle fabrique une pièce défectueuse est de 0.16.

1. On prélève au hasard une pièce fabriquée par cette entreprise. Quelle est la probabilité quelle soit défectueuse ?
2. On prélève au hasard, avec remise, 10 pièces fabriquées par cette entreprise. Quelle est la probabilité de trouver au moins deux pièces défectueuses ?

Type DS

Exercice 23. Roudoudou le hamster vit une vie paisible de hamster. Il a deux activités : manger et dormir... On va voir Roudoudou à 00h00 ($n = 0$). Il est en train de dormir.

— Quand Roudoudou dort à l'heure n, il y a 7 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 3 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

— Quand Roudoudou mange à l'heure n, il y a 2 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 8 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

On note D_n l'événement 'Roudoudou dort à l'heure n' et M_n 'Roudoudou mange à l'heure n'. On note $d_n = P(D_n)$ et $m_n = P(M_n)$ les probabilités respectives.

1. Justifier que $d_n + m_n = 1$.
2. Montrer rigoureusement que
$$d_{n+1} = 0,7d_n + 0,2m_n$$
3. Exprimer de manière similaire m_{n+1} en fonction de d_n et m_n.
4. Soit A la matrice
$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$
Résoudre en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
6. Montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. Calculer D^n où $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\,(1/2)^n + 2 & -2\,(1/2)^n + 2 \\ -3\,(1/2)^n + 3 & 2\,(1/2)^n + 3 \end{pmatrix}$.
9. En déduire la valeur de d_n en fonction de n.