

DS4

3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. On considère deux droites du plans $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ qui dépendent d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'équations cartésiennes respectives :

$$D_1(\lambda) : \lambda x + y = 1 \quad \text{et} \quad D_2(\lambda) : x + \lambda y = -1$$

1. Résoudre le système d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$$

2. Soit Σ l'ensemble des valeurs pour lesquelles le système précédent n'est pas de Cramer. Que vaut Σ ?
3. Que dire des droites $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ si $\lambda \in \Sigma$?
4. Pour $\lambda \notin \Sigma$ justifier que l'unique point d'intersection de $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$, noté M_λ , a pour coordonnées :

$$M_\lambda = \left(\frac{-1}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\lambda} \right)$$

5. Soit $A = (0, 1)$ et $B = (-1, 0)$ deux points de \mathbb{R}^2 . Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$A \in D_1(\lambda) \quad \text{et} \quad B \in D_2(\lambda)$$

6. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donner un vecteur directeur $u_1(\lambda)$ de $D_1(\lambda)$ et $u_2(\lambda)$ de $D_2(\lambda)$. A quelle(s) condition(s) sur λ les deux droites sont elles orthogonales ?
7. A quelle(s) condition(s) sur λ le triangle $AM_\lambda B$ est il rectangle en M_λ ?

Correction 1.

1. Résolvons le système proposé :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \lambda y = -1 \\ \lambda x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \lambda y = -1 \\ (1 - \lambda^2)y = 1 - (-\lambda) \end{cases}$$

Le rang du système dépend de $\lambda \in \mathbb{R}$:

CAS 1 : $1 - \lambda^2 \neq 0$ **autrement dit** $\lambda \notin \{-1, 1\}$ Alors le système est de rang 2 et admet une unique solution :

$$\begin{cases} x + \lambda y = -1 \\ y = \frac{1+\lambda}{(1-\lambda^2)} \end{cases} \iff \begin{cases} x + \lambda y = -1 \\ y = \frac{1}{1-\lambda} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 - \frac{\lambda}{1-\lambda} \\ y = \frac{1}{1-\lambda} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-1+\lambda-\lambda}{1-\lambda} \\ y = \frac{1}{1-\lambda} \end{cases}$$

On obtient

$$S = \left\{ \left(\frac{-1}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\lambda} \right) \right\}$$

CAS 2 : $1 - \lambda^2 = 0$ **autrement dit** $\lambda \in \{-1, 1\}$ Le système est de rang 1

CAS 2.1 $\lambda = -1$ Le système est équivalent à

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$S = \{(y - 1, y) | y \in \mathbb{R}\}$$

CAS 2.1 $\lambda = -1$ Le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

On obtient

$$S = \emptyset$$

2. D'après la question précédente le système n'est pas de Cramer pour

$$\Sigma = \{-1, 1\}$$

3. Si $\lambda = -1$ les deux droites sont confondues. Si $\lambda = 1$ les deux droites sont parallèles.

4. C'est en effet l'unique solution du système composé des deux équations de droites.

5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \times 0 + 1 = 1$$

donc $A \in D_1(\lambda)$

$$-1 + \lambda \times 0 = -1$$

donc $B \in D_2(\lambda)$

6. Un vecteur directeur de $D_1(\lambda)$ est

$$u_1 = (-1, \lambda)$$

Un vecteur directeur de $D_2(\lambda)$ est

$$u_2 = (-\lambda, 1)$$

Les deux droites sont orthogonales si et seulement si $u_1 \cdot u_2 = 0$ c'est à dire si

$$\lambda + 1 = 0$$

$$\boxed{\text{Les deux droites sont orthogonales si et seulement si } \lambda = -1}$$

7. Comme $M_\lambda \in D_1(\lambda) \cap D_2(\lambda)$, et $A \in D_1(\lambda)$ et $B \in D_2(\lambda)$ on a $AM_\lambda B$ rectangle en M_λ si et seulement si $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ sont orthogonales c'est à dire

$$\boxed{AM_\lambda B \text{ rectangle en } M_\lambda \text{ si et seulement si } \lambda = -1}$$

Exercice 2. On définit la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} par

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^3 + z + 2 \end{cases}$$

1. Etude de la fonction f sur \mathbb{C} .

(a) Vérifier que -1 est racine de f et en déduire toutes les racines de f sur \mathbb{C} .

(b) La fonction f est-elle injective ?

(c) Question hors-programme de première année : quel théorème permet de justifier que f est surjective ? (à faire si on a fini le reste et si on a une idée, j'en ai parlé rapidement dans un cours)

2. On note g la restriction de la fonction f à \mathbb{R} :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x + 2 \end{cases}$$

- (a) Etudier la fonction g .
 - (b) Montrer que g réalise une bijection.
3. Etude de la réciproque. On note $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la bijection réciproque de g .
- (a) Comment obtenir la courbe représentative de g^{-1} à partir de celle de g .
 - (b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $g^{-1}(2)$ et $(g^{-1})'(2)$

Correction 2.

1. (a) $f(-1) = -1 - 1 + 2 = 0$ donc -1 est racine de f . On peut donc factoriser f par $(z + 1)$, on obtient

$$f(z) = (z + 1)(z^2 - z + 2)$$

Le discriminant de $z^2 - z + 2$ vaut $\Delta = 1 - 8 = -7$ on obtient donc deux autres racines :

$$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}$$

- (b) La fonction n'est pas injective car 0 admet 3 antécédents.
 - (c) La fonction est surjective, c'est le théorème de D'Alembert Gauss ! En effet soit $y \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = y \iff z^3 + z + 2 - y = 0$ Or tout polynôme admet au moins une racine dans \mathbb{C} , il existe donc z_1 tel que $z_1^3 + z_1 + 2 - y = 0$ autrement dit $f(z_1) = y$.
2. (a) g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = x^2 + 1$$

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- (b) C'est une application du théorème de la bijection dont on vérifie les hypothèses :
- f est continue sur \mathbb{R}
 - f est strictement croissante sur \mathbb{R} (question précédente)
 - $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (question précédente)
3. (a) C'est du cours : on fait la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$
- (b) g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \neq 0$. Donc g^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{(g' \circ g^{-1})(x)}$$

$g^{-1}(2) = 0$ car $g(0) = 2$. Donc

$$g(g^{-1})'(2) = \frac{1}{(g' \circ g^{-1})(2)} = \frac{1}{g'(0)} = 1$$

Exercice 3. La concentration d'alcool (en $g.L^{-1}$) dans le sang d'une personne ayant absorbé, à jeun (autrement dit ($y(0)=0$)), une quantité Q d'alcool vérifie l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t) = \frac{Q}{6} e^{-2t} \quad (E)$$

où t est le temps écoulé après ingestion exprimé en heures.

On suppose qu'une personne ingère la quantité $Q = 24g$ d'alcool.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) dans ce cas, on pourra chercher une solution particulière de la forme $y_p(t) = \lambda e^{-2t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est à déterminer.
2. Résoudre $e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0$.
3. Exprimer en heure le temps qu'il faut pour que la personne (à jeun au début de l'expérience) possède un taux d'alcoolémie inférieur à $0.5g.L^{-1}$. On répondra à l'aide d'un calcul littéral.

Correction 3.

1. On pose $X = e^{-t}$. t est solution de $e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0 \iff X$ est solution de $X^2 - X + \frac{1}{8}$
On résout $X^2 - X + \frac{1}{8}$ à l'aide du discriminant : $\Delta = 1 - 4\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ On obtient deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$$

Qui se simplifient en

$$X_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Ainsi les solutions de l'inéquation sont :

$$\boxed{\mathcal{S} =] - \infty, X_1[\cup] X_2, +\infty[}$$

Donc t est solution de

$$e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0 \iff e^{-t} \in] - \infty, X_1[\cup] X_2, +\infty[$$

Comme l'exponentielle est toujours positive cela équivaut à

$$e^{-t} \in] 0, X_1[\cup] X_2, +\infty[$$

ce qui donne $-t \in] - \infty, \ln(X_1)[\cup] \ln(X_2), +\infty[$ et *in fine*

$$\boxed{t \in] - \infty, -\ln(X_2)[\cup] -\ln(X_1), \infty[}$$

2. Soit (EH) l'équation homogène associée :

$$y'(t) + y(t) = 0$$

dont les solutions sont $y(t) = C e^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$

On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y_p(t) = \lambda e^{-2t}$

$$y_p \text{ est solution de (E) si et seulement si } -2\lambda e^{-2t} + \lambda e^{-2t} = 4e^{-2t}$$

On obtient

$$\lambda = -4$$

Ainsi, les solutions de (E) sont de la forme :

$$y(t) = Ce^{-t} - 4e^{-2t}$$

On a supposé que la personne était à jeun au temps 0 donc $y(0) = 0$, on obtient ainsi que $C = 4$

Finalement la concentration d'alcool dans le sang de l'individu est donnée par la fonction

$$y(t) = 4(e^{-t} - e^{-2t})$$

On cherche désormais le temps t_0 tel que $y(t_0) < 0.5$. On est donc amené à résoudre l'inéquation

$$4(e^{-t} - e^{-2t}) < 0.5$$

C'est-à-dire

$$e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0$$

qui d'après la question 1 admet comme solution

$$\mathcal{S} =]-\infty, -\ln(X_2)[\cup]-\ln(X_1), \infty[$$

Ainsi on obtient $t_0 = -\ln(X_1) \simeq 1.9$

L'individu aura un taux d'alcoolémie inférieur à $0.5g.L^{-1}$ après environ 2h

Exercice 4. On cherche à résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (E)$$

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ montrer que les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x)$ sont solutions de E . (On mettra en valeurs les calculs de f' et f'')
2. Réciproquement on considère y une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* et on cherche à montrer qu'elles sont bien de la forme précédente. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
 - (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y et ses dérivées.
 - (b) En déduire que z vérifie

$$z'' - 4z' + 4z = 0.$$

- (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
- (d) Conclure

Correction 4.

1. Dérivons deux fois la fonction $y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2ax + 2bx \ln(x) + bx^2 \frac{1}{x} \\ &= 2ax + 2bx \ln(x) + bx \\ &= (2a + b)x + 2bx \ln(x) \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} y''(x) &= (2a + b) + 2b \ln(x) + 2bx \frac{1}{x} \\ &= (2a + 3b) + 2b \ln(x) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 x^2 y'' - 3xy' + 4y &= x^2 \left((2a + 3b) + 2b \ln(x) \right) - 3x \left((2a + b)x + 2bx \ln(x) \right) + 4 \left(ax^2 + bx^2 \ln(x) \right) \\
 &= \left((2a + 3b)x^2 + 2bx^2 \ln(x) \right) - \left((6a + 3b)x^2 + 6bx^2 \ln(x) \right) + \left(4ax^2 + 4bx^2 \ln(x) \right) \\
 &= (2a + 3b - 6a - 3b + 4a)x^2 + (2b - 6b + 4b)x^2 \ln(x) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ainsi y est bien solution de (E)

2. (a) $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$
 (b)

$$\begin{aligned}
 z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) &= e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) - 4e^t y'(e^t) + 4y(e^t) \\
 &= (e^t)^2 y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t)
 \end{aligned}$$

Or pour tout $x > 0$ il existe t tel que $x = e^t$ et on a alors

$$(e^t)^2 y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x)$$

Comme y est solution de (E) on a donc $x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0$ et finalement :

$$\boxed{z'' - 4z' + 4z = 0}$$

- (c) Soit $X^2 - 4X + 4 = 0$ l'équation caractéristique de associée à l'équation précédente. Cette équation admet une seule solution, à savoir, 2. Donc les solutions de $z'' - 4z' + 4z = 0$ sont

$$\boxed{\mathcal{S}_z = \{t \mapsto C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}}$$

- (d) Les solutions de (E) vérifient donc $y(x) = z(\ln(x))$ où $z \in \mathcal{S}_z$. Il existe donc $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned}
 y(x) &= C_1 e^{2\ln(x)} + C_2 \ln(x) e^{2\ln(x)} \\
 &= C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln(x)
 \end{aligned}$$

On retrouve bien la forme des solutions de 1.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } E \text{ est } \mathcal{S} = \{x \mapsto C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln(x) \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}}$$

TOURNEZ SVP

INFORMATIQUE

Exercice 5. On considère dans cet exercice qu'un brin d'ADN est représenté par une chaîne de caractère appelée `ADN`, où les nucléotides seront désignés par les lettres "A", "C", "G" et "T" dans le brin d'ADN.

1. Écrire une fonction `comptage(ADN, c)` prenant comme argument une chaîne de caractères `ADN` et un caractère `c` et qui renvoie le nombre d'apparitions de `c` dans `ADN`.
2. Écrire une fonction qui prend en argument une chaîne de caractères `ADN`, et qui renvoie une liste de taille 4, dont l'élément 0 est la proportion de "A", l'élément 1 la proportion de "C", l'élément 2 la proportion de "G" et l'élément 3 la proportion de "T".
3. A une séquence d'ADN correspond une unique séquence d'ARN grâce aux règles de complémentarité : G et C sont inversés, A devient U et T devient A. Par exemple, la séquence d'ADN 'AATCGA' est transcrite en 'UUAGCU.'
Écrire une fonction `transcription` qui prend en argument une chaîne de caractères `ADN` et retourne la chaîne d'ARN correspondante.
4. On souhaite repérer les éventuelles mutations par substitution (remplacement d'un nucléotide par un autre) entre deux brins d'ADN. Écrire une fonction qui prend en argument deux brins d'ADN, qui compare lettre à lettre les deux brins et retourne une liste contenant les positions des mutations observées entre les deux brins d'ADN. La fonction devra renvoyer un message d'erreur si les deux brins ne sont pas de même taille.
5. On souhaite repérer les séquences codantes d'un brin d'ADN. Pour cela, on veut repérer la position du codon d'initiation "ACG". Écrire une fonction `init` qui prend en argument un brin d'ADN sous forme de chaîne de caractères, et qui renvoie la chaîne de caractère où seules les nucléotides après 'ACG' apparaissent.
Exemple `init('AGGTACGTTAGT')` devra renvoyer : 'ACGTTAGT'
6. On suppose maintenant que notre chaîne de caractères `ADN` commence par le codon 'ACG'. On dispose de la fonction suivante : Que fait cette fonction ? En particulier dire ce qu'elle retourne sur l'exemple : `ADN='ACGGAGTTTGG'`
7. Écrire une fonction qui prend une chaîne de caractères `ADN` qui commence par le codon 'ACG' retourne la liste des codons jusqu'au premier codon stop (TAA, TAG, ou TGA) (ce codon stop sera inclus dans la liste)

Correction 5.

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
6. Elle découpe en codon, avec `ADN='ACGGAGTTTGG'` elle retournera : ['ACG', 'GAG', 'TTT', 'TGG']
- 7.
- 8.