DS1

2h30

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Résoudre sur son ensemble de définition l'inéquation

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+2}.$$

Exercice 2. On souhaite résoudre l'équation suivante :

$$(E) \quad : \quad e^{2x} + 3e^{x} - 4e^{-x} \geq 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. On pose $X = e^x$. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si X est strictement positif et solution de
$$(E') \quad : \quad X^3 + 3X^2 - 4 \geq 0$$
2. Montrer que 1 est racine de $X^3 + 3X^2 - 4$.
3. Résoudre (E')
4. En déduire les solutions de (E)

Exercice 3. On considère les deux propositions suivantes :

$$P_1(f) : \text{"}\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x > A,\ f(x) = 0\text{"}$$

$$P_2(f) : \text{"}\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{y\}, f(x) = f(y)\text{"}$$

1. Donner les négations de ces propriétés.
2. Dire si ces propositions ou leur négation sont vraies pour les fonctions suivantes :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 12, \\ 1 & \text{si } x \geq 12. \end{cases} \end{array} \right. , \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

On justifiera en donnant une valeur pour les variables quantifiées par le quantificateur $\exists$.

Exercice 4. On souhaite résoudre l'équation de paramètre $m \in \mathbb{R}$ et d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$|x^2 - (m+1)x + m| \leq m - 1 \quad (E_m)$$

1. Résoudre (E_m) pour $m < 1$.
2. Résoudre (E_1) (autrement dit, quand $m = 1$)

   A partir de maintenant et pour le reste de l'exercice on suppose que $m > 1$.
3. Justifier que pour tout $x \in]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[$ on a :

   $$x^2 - (m+1)x + m \geq 0.$$

   On note $I_m =]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[$ et $J_m =]1, m[$ le complémentaire de I_m dans $\mathbb{R}$.
4. On se propose tout d'abord de résoudre E_m sur I_m
   (a) Soit $\Delta(m) = m^2 + 2m - 3$. Etudier le signe de $\Delta(m)$ en fonction de m.

   On note
   $$r_-(m) = \frac{m+1-\sqrt{\Delta(m)}}{2} \quad \text{et} \quad r_+(m) = \frac{m+1+\sqrt{\Delta(m)}}{2}$$
   (b) Justifier que r_- et r_+ sont bien définis pour tout $m > 1$.
   (c) Montrer que pour tout $m > 1$,
   $$r_-(m) < 1 \quad \text{et} \quad r_+(m) > m$$
   (d) Conclure en résolvant (E_m) sur I_m pour $m > 1$
5. On va résoudre maintenant (E_m) sur J_m
   (a) Justifier brièvement que J_m est non vide ?
   (b) Montrer que pour tout $x \in J_m$,
   $$(E_m) \Longleftrightarrow x^2 - (m+1)x + 2m - 1 \geq 0$$
   Soit $\Gamma(m) = m^2 - 6m + 5$.
   (c) Ecrire en toute lettre le nom de la lettre grecque Γ
   (d) Etudier le signe de $\Gamma(m)$ en fonction de m.
   (e) En déduire pour tout $m \in]1, 5]$ les solutions de (E_m) sur J_m.

   On note
   $$s_-(m) = \frac{m+1-\sqrt{\Gamma(m)}}{2} \quad \text{et} \quad s_+(m) = \frac{m+1+\sqrt{\Gamma(m)}}{2}$$
   (f) Justifier que s_- et s_+ sont bien définis pour $m > 5$.
   (g) Montrer que pour tout $m > 5$:
   $$s_-(m) > 1 \quad \text{et} \quad s_+(m) < m$$
   (h) En déduire pour tout $m > 5$ les solutions de (E_m) sur J_m.
6. Dresser un tableau récapitulatif des solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ en fonction de m. (On pourra réutiliser les notations r_-, r_+, s_-, s_+)

7. Pour $m = 6$ tracer sur un même graphique
   - Le graphe de $f(x) = x^2 - (m+1)x + m$
   - Le graphe de $g(x) = |x^2 - (m+1)x + m|$
   - La droite d'équation $y = m - 1$
   - Les points d'abscisses $r_-(m), r_+(m), s_-(m), s_+(m)$, sur l'axe des abscisses.
   - L'ensemble des solutions de (E_m)

   On ne demande pas forcément quelque chose de très précis, mais quelque chose de propre et qui fait apparaître clairement l'ensemble des solutions de (E_m). Je vous conseille de prendre un peu de place, et de tracer ces graphes entre -1 et 7 sur l'axe des abscisses et entre -7 et 10 sur les ordonnées.

   Si certains graphes se superposent, on pourra utiliser de la couleur et légender le graphique afin de simplifier la lecture.