

TD 12 : continuité

Entraînements

Limites

Exercice 1. Donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

$$f_1(x) = \frac{\cos(1/x)}{x}$$

$$f_2(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$f_3(x) = \ln(x+1) - \ln(x^2)$$

$$f_4(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$$

$$f_5(x) = \frac{2^x + x}{2^x}$$

$$f_6(x) = \frac{x + (-1)^x}{x - \ln(x^3)}$$

$$f_7(x) = \frac{x+1}{2x}$$

$$f_8(x) = \frac{3^x - 4^x}{3^x + 4^x}$$

$$f_9(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$f_{10}(x) = \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x)}{x}$$

$$f_{11}(x) = x^2 - x \cos x + 2$$

$$f_{12}(x) = \frac{\ln(x^2 + x - 2)}{x - 1}$$

$$f_{13}(x) = \ln(2^x + x)$$

$$f_{14}(x) = x^{1/x}$$

$$f_{15}(x) = (\ln x)^x$$

$$f_{16}(x) = \frac{x^3 + 2^x}{3^x}$$

$$f_{17}(x) = (x^2 + x + 1)^{1/x}$$

$$f_{19}(x) = x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 \right)$$

Étude de la continuité de fonctions numériques

Exercice 2. Étudier la continuité des deux fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto (x^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \cos(\ln|x|) \ln(1+x).$$

Exercice 3. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2. g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-4x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad 3. h(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 + 4x}{1+x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 4. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5. On considère la fonction h définie par

$$h(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{si } |x| < 1 \quad \text{et} \quad h(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{si } |x| \geq 1.$$

Déterminer les réels a , b et c pour lesquels h est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R} .

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \max(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$.
2. En déduire que la fonction $\max(f, g)$ est continue sur \mathbb{R} .

Partie Entière

Exercice 7. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x - 1} \rfloor = 0 \quad (E)$$

1. Déterminer le domaine de définition de E .
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a .
3. Montrer que résoudre (E) revient à résoudre deux inéquations qu'on déterminera.
4. Résoudre les deux équations obtenues à la question précédente.
5. Résoudre (E) .

Exercice 8. Montrer que la fonction partie entière est croissante, ie montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor.$$

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Exercice 9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 10. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor.$$

Exercice 11. Soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer la limite de f en n à gauche et à droite.
3. En déduire l'ensemble de continuité de f .

Existence d'un éventuel prolongement par continuité

Exercice 12. Étudier la continuité des fonctions suivantes. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ?

1. $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$

2. $f(x) = \frac{|x| \ln(1+x)}{e^{2x^2} - 1}.$

3. $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1).$

4. $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$

5. $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$

6. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}}$

7. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}$

8. $f(x) = \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{|x|}$

9. $f(x) = x \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$

10. $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

11. $f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$

12. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$

13. $f(x) = x^x$

Exercice 13. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$. Étudier un éventuel prolongement par continuité de f .

Exercice 14. Peut-on prolonger par continuité en les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$
2. $g(x) = x^x$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la continuité de $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{e^x - 1}$.

L'application f admet-elle un prolongement par continuité aux bornes de son domaine de définition ?

Exercice 16. Soit n un entier naturel non nul. On définit f_n par $f_n(x) = \frac{e^{x^2} - e}{x^{2n} - 1}$. Quel est son ensemble de définition ? La fonction f_n admet-elle un prolongement par continuité définie sur \mathbb{R} ?

Exercice 17. Montrer que pour $a > -1$, la fonction f_a définie par $f_a(x) = |x|^a \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un prolongement par continuité sur \mathbb{R} .

Applications des théorèmes sur la continuité

Exercice 18. Soit l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$. Montrer qu'elle a trois racines dans \mathbb{R} .

Exercice 19. Étudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha \in]-2, -1[$. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 20. Suites implicites, le retour !

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^3 + 3x - n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} . On note u_n cette solution.
2. Montrer que : $0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la suite est croissante.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1 - 3\frac{u_n}{n}$. En déduire que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$ ainsi que la limite de la suite.

Exercice 21. Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0, 1]$.

Exercice 22. Étude des points fixes d'une fonction.

1. Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction continue sur $[0, 1]$ alors f admet un point fixe dans $[0, 1]$.
2. Montrer que si f est continue et décroissante sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, f admet un unique point fixe dans $[0, 1]$.

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que si f possède des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$ alors elle est bornée.

Exercice 24. Soient $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues sur $[0, 1]$ et telles que $f \circ g = g \circ f$. Le but est de montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$. On va raisonner par l'absurde en supposant que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \neq g(x).$$

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où : $\forall x \in [0, 1], \quad f(x) > g(x)$.

- Démontrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \geq g(x) + m$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1] : f^n(x) \in [0, 1]$ et $g^n(x) \in [0, 1]$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
- Conclure.

Exercice 25. Montrer que $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Expliciter f^{-1} .

Exercice 26. Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Montrer que f est une bijection de \mathcal{D}_f sur $f(\mathcal{D}_f)$, ensembles à préciser. Quelles sont les propriétés de f^{-1} ? Expliciter f^{-1} .

Exercice 27. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On pose, $\forall x \in]a, b[, \quad f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$.

- Démontrer que f réalise une bijection de $]a, b[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Que peut-on dire de l'application f^{-1} ?
- Déterminer f^{-1} dans le cas $a = -1$ et $b = 1$. Représenter graphiquement f et f^{-1} .

Exercice 28. On note f la fonction définie par $f(x) = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)}$.

- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
- Étudier la fonction.
- On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 29. On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
- On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Résolution d'équations fonctionnelles

Exercice 30. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)$.

- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
- En déduire que g est constante sur \mathbb{R} .

Exercice 31. Le but est de déterminer toutes les fonctions f continues sur \mathbb{R} telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On considère une telle fonction et on pose $a = f(1)$.

- Calculer $f(0)$.
- Montrer que la fonction f est impaire.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(nx) = nf(x)$. On pourra commencer à le montrer pour $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}a$.
- En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xa$ (on pourra utiliser en l'admettant le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels).
- Conclure.