TD 19 : Variable Aléatoire Réelle

Entraînements

Calculs de lois, fonctions de répartition, espérance et variance

Exercice 1. On dispose d'un dé à 6 faces non truqué. Il possède une face portant le chiffre 1, 2 faces portant le chiffre 2 et 3 faces portant le chiffre 3. On le lance et on note X le chiffre obtenu. Donner la loi de X, sa fonction de répartition et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2. Soit $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et X une varf à valeurs dans $[\![0, 3]\!]$ dont la loi de probabilité est donnée par

$$P([X = 0]) = P([X = 3]) = \theta \quad P([X = 1]) = P([X = 2]) = \frac{1}{2} - \theta.$$

1. Donner la fonction de répartition de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. On pose $R = X(X-1)(X-2)(X-3)$. Donner la loi de probabilité de R.

Exercice 3. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = 0 \text{ sur }]-\infty, -2[, \ \frac{1}{4} \text{ sur } [-2, 0[, \ \frac{1}{2} \text{ sur } [0, 3[, \ \frac{2}{3} \text{ sur } [3, 4[, \ 1 \text{ sur } [4, +\infty[.$$

1. Tracer la courbe représentative de F.
2. Soit X une varf ayant F pour fonction de répartition. Calculer alors $P([X \leq 1])$, $P([X < 1])$ et $P([-2 \leq X \leq 0])$.
3. Déterminer aussi la loi de X, son espérance et sa variance.
4. Soit Y et Z les varf définies par $Y = \frac{X}{2}$ et $Z = X + 2$. Déterminer les fonctions de répartition de Y et de Z et tracer leurs courbes représentatives sur le même graphique que F.

Exercice 4. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues :

1. On tire simultanément 3 boules de l'urne et on note X le nombre de boules bleues obtenu. Donner la loi de X.
2. On réalise 3 tirages successifs sans remise et on note Z le nombre de boules bleues obtenu au cours de ces tirages. Donner la loi de Z.

Exercice 5. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois et les fonctions de répartition de X et de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et comparer ces espérances.
3. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.

Exercice 6. On considère deux urnes comportant chacune des jetons numérotés de 1 à n, avec $n \in \mathbb{N}^\star$. On tire au hasard un jeton dans chaque urne et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.
2. En déduire la loi de X.

3. Calculer l'espérance $E(X)$. En déduire un équivalent de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. On lance m dés non truqués numérotés de 1 à m.

1. Soit X_1 la var égale au nombre de dés amenant le 6. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. On relance les dés qui n'ont pas amené de 6. Soit X_2 le nombre de ceux qui amènent 6 lors du deuxième lancer. Calculer $P(X_2 = k)$ pour tout $k \in [\![0, m]\!]$. En déduire la loi de X_2 son espérance et sa variance.
   On pourra montrer en particulier que : $\binom{m}{i}\binom{m-i}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{i}$.
3. On poursuit l'expérience précédente : à chaque lancer, on relance uniquement les dés qui n'ont pas donné 6 aux lancers précédents. Soit X_n la varf égale au nombre de dés amenant 6 au n-ième lancer.
   (a) Soit $Z_{i,n}$ la var valant 1 si le dé numéroté i donne 6 au n-ième lancer et 0 sinon. Calculer la loi de $Z_{i,n}$.
   (b) Déterminer la loi de X_n et donner sans calcul son espérance et sa variance.

Exercice 8. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues.

1. On réalise 3 tirages successifs avec remise et on note Y le nombre de boules bleues obtenu au cours de ces tirages. Donner la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
2. On tire une boule de l'urne et on note T le numéro de la boule obtenue. Donner la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 9. Un magicien possède une pièce truquée qui renvoie pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et face avec probabilité $\frac{2}{3}$. Il lance le dé n fois, et on note X la fréquence d'apparition du pile au cours de ces n lancers. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 10. On considère une urne de taille $N > 1$ contenant r boules blanches et $N-r$ boules noires ($0 < r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

1. (a) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 1$.
   (b) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 2$.
   (c) Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X. Donner son esprérance. Même question dans le cas $r = N$.
   On revient désormais au cas général $1 < r < N$.
2. Calculer l'univers image de X.
3. Soit k une de ces valeurs.
   (a) Déterminer la probabilité qu'au cours des $k-1$ premiers tirages soient apparus $r-1$ boules blanches.
   (b) Vérifier que : $P([X = k]) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 11. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et des boules noires en nombres respectifs b_1, n_1, b_2, n_2 non nuls. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine. Si l'on obtient une boule blanche (resp noire), le deuxième tirage se fait dans U_1 (resp U_2). Si au i-ème tirage, la boule obtenue est blanche, le $i+1$-ème tirage se fait dans U_1 sinon dans U_2. Soit B_i l'événement *on obtient une boule blanche au tirage* i.

1. Calculer $P(B_1)$, $P(B_2)$ et $P(B_{n+1})$ en fonction de $P(B_n)$.
2. Soit X_n le nombre de boules blanches obtenues lors des n premiers tirages. Calculer $E(X_n)$. On pourra introduire Y_i la varf égale au nombre de boule blanche obtenue au tirage i.

Type DS

Exercice 12. Un jeune homme écrit à une jeune fille au cours d'une année non bissextile. Il adopte la résolution suivante : le jour de l'an, il lui écrit à coup sûr. S'il lui a écrit le jour i, il lui écrit le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$. S'il ne lui a pas écrit le jour i, il lui écrit le lendemain à coup sûr. Soit X_i la varf de Bernoulli valant 1 si le jeune homme écrit le jour i et 0 sinon.

1. Former une relation de récurrence entre $P([X_{i+1} = 1])$ et $P([X_i = 1])$.
2. En déduire la loi de X_i pour tout $i \in [\![1, 365]\!]$.
3. Soit X la varf égale au nombre de lettres envoyées dans l'année. Calculer $E(X)$.

Exercice 13. Un tireur doit toucher n cibles ($n \in \mathbb{N}^\star$) numérotées de 1 à n dans l'ordre et il s'arrête dès qu'il rate une cible. On suppose que s'il se présente devant la k-ième cible, la probabilité qu'il la touche est $p_k \in]0, 1[$. On note X le nombre de cibles touchées.

1. Déterminer la loi de X.
2. On suppose que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = p$.
   (a) Déterminer la loi de X en fonction de p et de $q = 1 - p$.
   (b) Pour tout $t \in [0, 1]$, on définit la fonction génératrice associée à X par : $G_X(t) = E(t^X)$. Justifier que $G'_X(1) = E(X)$ et en déduire l'espérance de X ainsi que la limite de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $n \geq 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ième tirage.

1. Déterminer Y_1.
2. Soit $n \geq 2$.
   (a) Justifier que $Y_n \leq N - 1$.
   (b) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a
   $$P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k + 1).$$
3. En déduire que la suite $(E(Y_n))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de $E(Y_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 15. Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée de tirages selon le protocole suivant : on tire une boule de l'urne puis

- si la boule tirée est bleue, on la remet dans l'urne
- si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la var égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du n-ième tirage. On notera de plus les événeemnts suivants :

- R_k : *lors du k-ième tirage, on a extrait une boule rouge de l'urne*
- B_k : *lors du k-ième tirage, on a extrait une boule bleue de l'urne*

1. Donner la loi de probabilité de Y_1.
2. Soit $n \geq 2$. Donner l'univers image de Y_n.
3. Calculer pous tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $P([Y_n = 2])$.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = P([Y_n = 1])$.
   (a) Donner u_1 et u_2.

(b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$. Cette relation reste-elle valable pour $n = 1$?

(c) On pose pout tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, en déduire l'expression de v_n en fonction de n puis e u_n en fonction de n.

(d) Déduire des résultats précédents $P([Y_n = 0])$ pour tout n entier naturel non nul.

5. Calculer l'espérance de Y_n.
6. Montrer que : $P([Y_n > 0]) \leq E(Y_n)$. Que peut-on dire que $\lim_{n \to +\infty} P([Y_n = 0])$?
7. On note Z la varf égale au numéro du tirage amenant la dernière boule rouge.

   (a) Donner l'univers image de Z.

   (b) Soit k un entier naturel, $k \geq 2$. Exprimer l'événeemnt $[Z = k]$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.

   (c) En déduire la loi de Z.