Table des matières

Chapitre 18 : Variables Aléatoires Réelles

Dans tout ce chapitre, on se place dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

I Généralités sur les variables aléatoires réelles finies

Définition et notations

Définition 1. On appelle variable aléatoire réelle finie sur Ω, notée varf, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1. Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, donner l'univers Ω et un exemple de varf sur Ω.

1. On lance une pièce de monnaie deux fois de suite, et à chaque lancer on gagne un euro si on obtient pile, on perd 2 euros si on obtient face.

$$G \left| \begin{array}{ccc} [\![P, F]\!] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & 1 \\ F & \mapsto & -2 \end{array} \right.$$

2. On lance deux dés non truqués de couleurs différentes.

$$S \left| \begin{array}{ccc} [\![1, 6]\!]^2 & \to & \mathbb{R} \\ (i, j) & \mapsto & i + j \end{array} \right.$$

Définition 2. On appelle univers image d'une varf, noté $X(\Omega)$ l'ensemble des images de l'application Ω.

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \,|\, \omega \in \Omega\}.$$

Exemple 2. Donner les univers images pour les 2 exemples précédents.

Remarque. En BCPST1, on ne travaille que sur des univers Ω finis.

Notations : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note :

- $[X = a] = X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = a\}$
- $[X \leq a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq a\}$
- $[X \geq a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \geq a\}$
- $[X < a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < a\}$
- $[X > a] = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > a\}$

Soit $A \subset \Omega$ on note :

- $[X \in A] = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A\}$

Comme ce sont des événements, on peut calculer leur probabilité.

Exemple 3. On reprend le deuxième exemple. Calculer $P([Y = 5])$, $P([Y \geq 10])$, $P([1 \leq Y < 5])$, $P([Y > 12])$.

Exercice 1. Soit X une varf et $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $P([X \leq a])$ en fonction de $P([X \geq a])$.

Proposition 1. Système complet d'évènements associé à une varf

- Si X est une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [X = x_i]$ est un sce.
- En particulier, on a
$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P([X = a])$$

Exemple 4. Donner le sce associé dans les exemples du début.

I. 1 Loi d'une variable aléatoire réelle finie

Définition 3. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle loi de probabilité de X notée f_X l'application

$$f_X \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & P([X = x]) \end{array} \right.$$

Déterminer la loi de probabilité de X :

- Donner l'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.
- Pour chaque élément x de $X(\Omega)$, calculer sa probabilité $P(X = x)$:

$$\text{Calculs de } \; P(X = x_1),\; P(X = x_2),\; P(X = x_3),\; \ldots,\; P(X = x_n).$$

Exemple 5. Donner les lois des varf des exemples du début.

Deux représentations sont utilisées pour définir la loi d'une var :

- **Sous la forme d'un tableau**
- **Sous la forme d'un diagramme en bâtons**

Exemple 6. Donner les deux représentations graphiques possibles pour les exemples du début.

I. 2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle finie

Définition 4. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de X notée F_X l'application

$$F_X \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & P([X \leq x]) \end{array} \right.$$

Exemple 7. Calculer la fonction de répartition F_X pour les 2 exemples du début. Faire de plus à chaque fois la représentation graphique de F_X.

fonction_repartition.png

Proposition 2. Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition alors :

1. F est croissante.
2. F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

De plus on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{z \leq x, z \in X(\Omega)} P(X = z)$$

Lien entre la fonction de répartition et la loi D'après la propriété ci-dessus, on remarque que si l'on connaît la loi de X, on peut calculer la fonction de répartition de X. Mais la réciproque est vraie aussi. Si on connaît la fonction de répartition de X, on peut en déduire la loi de X. Cela peut être utile lorsqu'il est plus facile de déterminer la fonction de répartition que la loi.

Proposition 3. Soit X une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tels que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Alors on a :

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Démonstration. □

Exercice 2. Un joueur prélève successivement et avec remise n boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On considère les varf X et Y égales respectivement au plus grand et au plus petit numéro des n boules tirées. Donner les univers images de X et de Y. Calculer la fonction de répartition de X. En déduire la loi de X. Calculer ensuite pour tout $k \in Y(\Omega)$: $P([Y > k])$. En déduire la loi de Y.

Penser à passer par la fonction de répartition pour obtenir la loi de var définie avec des min ou des max.

I. 3 Composée d'une variable aléatoire réelle finie : $Y = g(X)$

Si X est une variable aléatoire finie et g une fonction numérique dont l'ensemble de définition contient $X(\Omega)$, on peut étudier la variable aléatoire $Y = g(X)$.

Méthode pour étudier les var de type $Y = g(X)$:

- Calcul de l'univers image $Y(\Omega)$: Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ alors $Y(\Omega)$ s'obtient en calculant $g(x_1), g(x_2), g(x_3), \dots, g(x_n)$.
- Calcul de la loi de $Y = g(X)$: Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on écrit que : $P([Y = y]) = P([g(X) = y])$, et on se ramène alors à X.

Exercice 3. Reprendre l'exemple 1 du début et étudier $U = Z^2 - Z - 2$.

II Moments d'une variable aléatoire réelle finie

II. 1 Espérance d'une variable aléatoire réelle finie

On s'intéresse ici à la moyenne d'un phénomène aléatoire. Mais la moyenne au sens arithmétique semble sans intérêt car certaines valeurs ont une probabilité plus forte que d'autres d'arriver. On va ainsi s'intéresser à une moyenne pondérée par la probabilité qu'a la valeur d'arriver.

Définition 5. Soit X une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

- On appelle espérance de X notée $E(X)$ le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

- Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite centrée.

Exemples.
- Si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$ fixé alors $E(X) = \sum_{i=1}^{n} iP(X = i)$
- Si $X(\Omega) = \{-3, -1, 1, 2\}$ alors $E(X) = -3P(X = -3) - P(X = -1) + P(X = 1) + 2P(X = 2)$
- Si X est une varf constante égale à a : $X = a$, alors $E(X) = a$
- Si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ alors

$$E(X) =$$

- Si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$ fixé alors

$$E(X) =$$

- Si X est une varf constante égale à a : $X = a$, alors

$$E(X) =$$

Remarque. L'espérance est ainsi la moyenne de chacune des valeurs prises par la variable aléatoire X pondérée par la probabilité que X prenne cette valeur.

Exemple 8. Calculer l'espérance dans chacun des exemples du début.

Théorème de transfert

Théorème 4. Soit X une var avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique et $Y = g(X)$. Alors, on a

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)P(X = x_i)$$

Exemples.

- Si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$ fixé alors $E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2 P(X = i)$
- Si $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ alors $E(\ln(X)) = \sum_{i=1}^{6} \ln(i)P(X = i)$
- Si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$ fixé alors $E(X^3) = \sum_{i=1}^{n} i^3 P(X = i)$

Exercice 4. Reprendre l'exercice 3 et calculer l'espérance des varf X, Y, Z et T.

Penser au théorème de transfert pour calculer l'espérance de var de type $Y = g(X)$ avec X connu.

Définition 6. Soit X une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on appelle moment d'ordre k de X, noté parfois $m_k(X)$, le nombre réel :

$$m_k(X) = E(X^k) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^k P(X = x_i)$$

Exercice 5. Calculer les moments d'ordre 0, 1, 2 et 3 de la var X dont la loi est définie dans l'exercice 3.

Linéarité de l'espérance

Proposition 5. Linéarité de l'espérance :

- Soit X une var et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

- Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des var et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

Démonstration. Démontrons que $E(aX + b) = aE(X) + b$.

□

Exercice 6. On considère r boules numérotées de 1 à r et n tiroirs numérotés de 1 à n. On place au hasard chacune des r boules dans l'un des n tiroirs, chaque tiroir pouvant contenir 0, 1 ou plusieurs boules. On note V la var égale au nombre de tiroirs restés vides. Déterminer l'espérance de V.

II. 2 Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle finie

Définition 7. Soit X une variable aléatoire finie. On appelle variance de X, notée $V(X)$, le nombre réel défini par
$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Remarque. La variance est la moyenne du carré de la distance entre les valeurs de X et de sa moyenne $E(X)$. Ainsi, la variance mesure l'écart entre X et sa moyenne c'est-à-dire la dispersion de la var X.

Formule de Koenig-Huygens En pratique, on n'utilise quasiment jamais la définition de la variance pour calculer la variance car cela entraine des calculs compliqués. Ainsi, dans la quasi-totalité des cas, on utilise la formule de Koenig-Huygens donnée ci-dessous pour calculer la variance.

Proposition 6. Soit X une variable aléatoire finie.
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration. □

Exemple 9. Calculer la variance dans chacun des 2 exemples du début.

Méthode pour calculer la variance : utiliser la formule de Koenig-Huygens :

- Étape 1 : calculer l'espérance $E(X)$.
- Étape 2 : calculer en utilisant le théorème de transfert $E(X^2)$.
- Étape 3 : conclure en utilisant la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Proposition 7. Soit X une variable aléatoire finie et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- $V(X) \geq 0$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- En particulier on a : $V(X + b) = V(X)$

Définition 8. Soit X une variable aléatoire finie. On appelle écart-type de X le nombre réel noté σ le nombre
$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 10.
- Une var d'espérance nulle et d'écart-type (ou de variance) égal à 1 est dite réduite
- Si X est une var d'espérance m et d'écart-type σ alors $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ est une var centrée réduite. En effet :

II. 3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Cette inégalité permet de donner une estimation de l'écart de la variable aléatoire avec son espérance.

Proposition 8. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit X une variable aléatoire finie, et $\varepsilon > 0$. On a alors :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque. Intuivement, on obtient que la probabilité que l'erreur entre X et son espérance soit supérieur à ε est majorée par $\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$. On remarque que :

- pour ε grand (un grand écart avec l'espérance), la probabilité est très petite.
- pour ε petit (un petit écart avec l'espérance), l'inégalité peut ne pas être utile, en particulier si $\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2} > 1$.

Exercice 7. On lance n fois de suite un dé équilibré.

1. Soit X le nombre d'apparition du nombre 6. Quelle loi suit X ? Donner son espérance et sa variance.
2. Soit Y la fréquence d'apparition du nombre 6. Exprimer Y en fonction de X, et donner son espérance et sa variance.
3. Soit p_n la probabilité que Y soit proche de $\dfrac{1}{6}$ à 0.1 près. Combien de lancers doit-on effectuer pour que p_n soit supérieur à 0.9 ?

III Lois usuelles

III. 1 Loi uniforme

Modélisation type

- Lancer d'un dé équilibré à 6 faces. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu. On obtient
$$\forall k \in [\![1, 6]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{6}$$
- Autres exemples :
  - ⋆ Tirer une boule dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu. On obtient
$$\forall k \in [\![1, N]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{N}$$

Schéma uniforme :
Expériences dont toutes les issues sont équiprobables.

Définition 9. Soit X une var.

- Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: On dit que X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$ si
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = x_k) = \frac{1}{n}$$
On note alors $X \sim U(n)$
- Cas particulier où $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$:
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$
On note alors $X \sim U([\![1, n]\!])$

Représentation graphique

loiunif.png

Proposition 9. Soit X une var.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, $n \in \mathbb{N}^\star$, alors :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) =$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(X(\Omega))$ avec $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$ avec $a < b$, alors :

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

Démonstration. □

III. 2 Loi de Bernoulli

Modélisation type Modélisation type :

Une pièce truquée possède p chances de tomber sur pile (succés) et $q = 1 - p$ chances de tomber sur face (échec). On définit la VARF X qui teste si pile est sortie : X vaut 1 si on obtient pile et 0 sinon.

$$P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Schéma de Bernoulli :
Expériences n'ayant que 2 résultats possibles : succès ou échec.

Loi

Définition 10. Soit X une var et $p \in [0,1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si

$$P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = 1 - p$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$

Exemples.

- Soit $A \subset \Omega$ alors la loi 1_A suit une loi de Bernouilli de paramètre $p = P(A)$.

Représentation graphique

Proposition 10. Soit X une var avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $p \in [0,1]$. Alors

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1-p) = pq$$

III. 3 Loi binomiale

Modélisation type

- Exemple 1 On dispose d'une urne avec N boules, R rouges et $N-R$ jaunes. On effectue n tirages successifs avec remise, la probabilité d'obtenir exactement k boules rouges parmi les n tirages est
  - ⋆ $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
  - ⋆ Loi de X :
  $$P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{R^k (N-R)^{n-k}}{N^n}$$
- Exemple 2 (Schéma binomial) On effectue n lancers d'une pièce non équilibrée satisfaisant $P(pile) = p$ et $P(face) = q$ on effectue n lancer et X correspond au nombre de pile on obtient :
  - ⋆ $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
  - ⋆ Loi de X :
  $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Loi

Définition 11. Soient X une var, $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \sim B(n, p)$ ou $X \hookrightarrow B(n, p)$

Représentation graphique

Proposition 11. Soit X une var avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1-p) = npq$$

IV Indépendance de var

IV. 1 Indépendance de deux var

Définition

Définition 12. Soient X et Y deux var. On dit que X et Y sont indépendantes si :

Exercice 8.

1. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire 2 successivement avec remise. Soient X le numéro du premier jeton, et Y le numéro du second. Étudier l'indépendance de X et Y.
2. Reprendre l'exercice précédent avec deux tirages sans remise.

Conséquence sur les trois types de lois

Proposition 12. Soit (X, Y) un couple de var. Il y a équivalence entre :

- Les var X et Y sont indépendantes.
- $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ....
- Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P([Y = y]) \neq 0$, ...
- Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $P([X = x]) \neq 0$, ...

Proposition 13. (X, Y) couple, esperance et varaince de $X + Y$ et XY.

Lemme des coalitions

Proposition 14. Soient X et Y deux var indépendantes.

Alors $u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendants.

Exemples. Si X et Y sont indépendantes, alors, par exemple

- ....
- ....

IV. 2 Généralisation : indépendance de n var

Définition 13. Soient $X_1, \dots X_n$ n var. Elles sont mutuellement indépendantes si :

Remarques.

- On vous demandera rarement de montrer que des var sont mutuellement indépendantes. C'est plutôt une donnée de l'exercice qui permet de faire le calcul de la probabilité d'intersections d'événements.
- Exemples types de modèles donnant des var mutuellement indépendantes :
  - ⋆ ....
  - ⋆ ....
  - ⋆ De façon générale : ....

Proposition 15. Soient $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_p$ des var mutuellement indépendantes. Alors :

- ....
- ....

Exemples. Si X, Y, Z, T sont mutuellement indépendantes, alors, par exemple

- ....
- ....