Programme de colle : Semaine 26
Lundi 11 mai

1 Cours

1. Applications linéaires
   - Définition d'une application linéaire entre deux EV.
   - Définition du noyau et de l'image
   - Théorème liant injectivité et taille du noyau
2. Variables aléatoires.
   - Définition d'une variable aléatoire réelle finie. Univers image.
   - Loi et fonction de répartition
   - Moments : Espérance, variance (définition + Koenig Huygens) , écart-type.
   - Théorème de transfert.
   - Bienaimé-Tchebychev
   - Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernouilli, loi binomiale. (Les lois, l'espérance et la variance (exceptée celle de la loi unfire) doivent être connues par coeur)
   - Variables indépentantes.
3. Python :
   - Tableau numpy, dictionnaires
   - Représentation informatique d'un polynome par une liste (évaluation, racine, dérivation, somme)

2 Exercices Types

1. Montrer que la fonction $f(x, y, z) = (x - 2y + z, x + y - 2z, -2x + y + z)$ est linéaire.
2. Pour chacune des applications linéaires suivantes (on ne demande pas ici de vérifier qu'elles sont bien linéaires), décrire l'image et le noyau (en donner une base). En déduire si elles sont injectives, surjectives. Déterminer celles qui sont des isomorphismes, des automorphismes.
   (a) $f(x, y, z) = (x - 2y + z, x + y - 2z, -2x + y + z)$
   (b) $f(x, y) = (4x + y, x - y, 2x + 3y)$
   (c) $f(x, y, z) = (2x + y + z, x - y + 2z, x + 5y - 4z)$
3. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.
   (a) Déterminer les lois et les fonctions de répartition de X et de Y.
   (b) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et comparer ces espérances.
   (c) Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
4. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues.
   (a) On réalise 3 tirages successifs avec remise et on note Y le nombre de boules bleues obtenu au cours de ces tirages. Donner la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
   (b) On tire une boule de l'urne et on note T le numéro de la boule obtenue. Donner la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.
5. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $n \geq 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ième tirage.
   (a) Déterminer Y_1.
   (b) Soit $n \geq 2$.
      i. Justifier que $Y_n \leq N - 1$.
      ii. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a
      $$P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1).$$
   (c) En déduire que la suite $(E(Y_n))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de $E(Y_n)$ pour tout $n \geq 1$.