DM Noel

Exercice 1. On considère deux droites du plans $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ qui dépendent d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'équations cartésiennes respectives :

$$D_1(\lambda) : \lambda x + y = 1 \quad \text{et} \quad D_1(\lambda) : x + \lambda y = -1$$

1. Résoudre le système d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lambda x + y & = 1 \\ x + \lambda y & = -1 \end{cases}$$

2. Soit Σ l'ensemble des valeurs pour lesquelles le système précédent n'est pas de Cramer. Que vaut Σ ?
3. Que dire des droites $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ si $\lambda \in \Sigma$?
4. Pour $\lambda \notin \Sigma$ justifier que l'unique point d'intersection de $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$, noté M_λ, a pour coordonnées :

$$M_\lambda = \left(\frac{-1}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}\right)$$

5. Soit $A = (0, 1)$ et $B = (-1, 0)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$A \in D_1(\lambda) \quad \text{et} \quad B \in D_2(\lambda)$$

6. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donner un vecteur directeur $u_1(\lambda)$ de $D_1(\lambda)$ et $u_2(\lambda)$ de $D_2(\lambda)$. A quelle(s) condition(s) sur λ les deux droites sont elles orthogonales ?
7. A quelle(s) condition(s) sur λ le triangle $AM_\lambda B$ est il rectangle en M_λ ?

Exercice 2. On considère $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$.

1. Rappeler la nature géométrique de S. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$. Déterminer D_f le domaine de définition de f. Est elle bien définie pour tous les points de S ?
2. (a) Mettre $f(z) - \frac{7}{3}$ sous la forme d'une fraction.
   (b) Montrer que pour tout z dans l'ensemble de définition de f,

$$\left|f(z) - \frac{7}{3}\right|^2 = \frac{|z|^2 + 8\mathfrak{Re}(z) + 16}{9(|z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z) + 1)}$$

   (c) On note S_2 le cercle de centre $7/3$ et de rayon r_0. Montrer que $f(S) \subset S_2$
3. (a) Soit $y = f(z)$, exprimer z en fonction de y quand cela a un sens.
   (b) Déterminer l'ensemble F tel que $f : D_f \to F$ soit bijective. Déterminer l'expression de f^{-1}
   (c) (Difficile) Montrer que pour tout $y \in S_2$, $f^{-1}(y) \in S$.
   (d) En déduire $f(S)$.