

Fiche Chapitre 3 : Entiers, sommes et produits

Définition 1. $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

⚠ La somme $\sum_{k=1}^n a_k$ NE DEPEND PAS DE k . ⚠

Définition 2. $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$

Proposition 1. $\sum_{k=1}^n (\lambda a_k + b_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$

Proposition 2. $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$

Méthode 3. $\sum_{k=0}^n a_{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$

Théorème 3. Si $P(n)$ est une proposition telle que :

- $P(0)$ est vraie, (ou plus généralement $P(n_0)$ est vraie pour un certain entier $n_0 \in \mathbb{N}$)
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n + 1)$,

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. (ou plus généralement $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$)

Proposition 4 (Sommes classiques).

$$\sum_{k=0}^n 1 = n + 1 \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n + 1)}{2} \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \text{si } q \neq 1$$

Binome de Newton

Définition 4. Si $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on appelle coefficient binomial, le nombre $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Proposition 5. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

- Symétrie des coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Triangle de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Proposition 6. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

Théorème 7. Binôme de Newton

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Approfondissements

Méthode 5. Comprendre le formalisme des récurrences doubles, des récurrences fortes.

Méthode 6. Comprendre la notation

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m a_{k,j}$$

Méthode 7. Interversion dans le cas d'indices liés

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \dots = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n \dots$$