Correction DS 2

Exercice 1. 1. Déterminer un réel $r \in \mathbb{R}_+$ et un réel $\varphi \in [-\pi, \pi[$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = r\cos(x+\varphi)$$

2. En déduire les solutions de l'équation (T) suivante sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, \pi[$

$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos(2x) \quad (T)$$

Correction 1.

1. On a pour tout $(x, \varphi) \in \mathbb{R}^2$

$$\cos(x+\varphi) = \cos(x)\cos(\varphi) - \sin(x)\sin(\varphi)$$

On cherche donc (r, φ) tel que

$$\begin{cases} r\cos(\varphi) == 1, \\ -r\sin(\varphi) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

En mettant au carré ces deux équations on obtient

$$r^2 = 4$$

Si $r \in \mathbb{R}^+$, on a donc $r = 2$
Ceci nous donne ensuite

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{1}{2}, \\ \sin(\varphi) = \frac{-\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Avec $\varphi \in [-\pi, \pi[$ on a alors $\varphi = -\frac{\pi}{3}$
Finalement, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{3}}$$

2. D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}
(T) &\iff 2\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 2\cos(2x) \\
&\iff \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos(2x) \\
&\iff \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} \equiv 2x[2\pi] \\ ou \\ x - \frac{\pi}{3} \equiv -2x[2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \\ ou \\ 3x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \\ ou \\ x \equiv \frac{\pi}{9}[\frac{2}{3}\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{9} + \frac{2k}{3}\pi \,|k \in \mathbb{Z}\}$$

On obtient les solutions sur $[0, 2\pi[$

$$\mathcal{S} \cap [0, 2\pi[= \{\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}\}$$

Exercice 2. On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$\sin(3x) - \sin(x) \geq 0 \quad (E)$$

1. Dire si $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont solutions de (E)
2. (INFO) Completer la fonction Python suivante qui prend en argument un flottant x et retourne `True` si x est solution de (E) et `False` sinon. (On recopiera l'intégralité de la fonction sur la copie)

```
from math import sin
def est_solution(x):
    if sin(3*x)-sin(x) ...........
        return(........)
    else:
        return(.....)
```

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

4. Résoudre $-2X^3 + X \geq 0$
5. En déduire les solutions de (E) sur $[0, 2\pi[$.

Correction 2.

1. $\sin(3\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3}) = \sin(\pi) - \sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ donc

$$\boxed{\frac{\pi}{3} \text{ n'est pas solution de } (E)}$$

$\sin(3\frac{5\pi}{6}) - \sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{2}) - \sin(\frac{5\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ donc

$$\boxed{\frac{5\pi}{6} \text{ est solution de } (E)}$$

```
from math import sin
def est_solution(x):
    if sin(3*x)-sin(x) >=0:
        return True
    else:
        return False
```

2. On a pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x+x)\\ &= \sin(2x)\cos(x)+\sin(x)\cos(2x)\\ &= 2\sin(x)\cos^2(x)+\sin(x)(\cos^2(x)-\sin^2(x))\\ &= 2\sin(x)(1-\sin^2(x))+\sin(x)(1-2\sin^2(x))\\ &= 3\sin(x)-4\sin^3(x)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ à la 4 ème ligne.

3.

$$\begin{aligned}& -2X^3+X \geq 0\\ \iff & -X(2X^2-1)\geq 0\\ \iff & X((\sqrt{2}X)^2-1^2)\leq 0\\ \iff & X(\sqrt{2}X-1)(\sqrt{2}X+1)\leq 0\end{aligned}$$

A l'aide d'un tableau de signes on obtient l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 =]-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}] \cup [0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}]}$$

4. D'après les questions 1 et 2 on a

$$\begin{aligned}\sin(3x)-\sin(x)\geq 0 &\iff 2\sin(x)-4\sin^3(x)\geq 0 \qquad \iff -2\sin^3(x)+\sin(x)\geq 0\\ &\iff \sin(x)\text{solution de } -2X^3+X\geq 0\\ &\iff \sin(x)\in]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]\end{aligned}$$

On obtient à l'aide du cercle trigonométrique, les solutions de l'équation $\sin(3x)-\sin(x)\geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{S} = [0, \tfrac{\pi}{4}] \cup [\tfrac{3\pi}{4}, \pi] \cup [\tfrac{5\pi}{4}, \tfrac{7\pi}{4}]}$$

Exercice 3. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}.$$

1. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.

   On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2$.
2. Déterminer les variations de h. On ne demande pas les limites en $\pm\infty$, mais on notera les valeurs des extrema et la valeur de $h(0)$.

   On rappelle que $e \in]2,3[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle $[1;\ 2]$ tel que $h(a) = 0$. On ne cherchera pas à expliciter a.
   En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations. On demande ici les limites aux bornes.

5. (INFO) Ecrire une fonction Python qui prend en argument un flottant x et renvoie la valeur de $f(x)$ si x est dans l'ensemble de définition de f et 'erreur' sinon.
6. (INFO) Ecrire une fonction Python qui prend en argument deux flottants (x, y) et renvoie :
   — Un message d'erreur si x ou y n'est pas dans l'ensemble de définition de f.
   — `True` si $f(x) \geq f(y)$
   — `False` si $f(x) < f(y)$

Correction 3.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
$$f'(x) = \frac{e^x(x^2) - (e^x - 1)2x}{x^4}$$
Soit en simplifiant :
$$\boxed{f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3}}$$
2. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} h'(x) &= e^x + xe^x - 2e^x \\ &= (x-1)e^x \end{aligned}$$
On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	2-e	$\nearrow$	

De plus $h(0) = 0$.
3. h est continue, strictement croissante, $h(1) = 2 - e < 0$ et $h(2) = 2 > 0$ donc d'après le théorème de la bijection,
$$\boxed{\exists! a \in [1, 2],\ h(a) = 0}$$
Les variations de h nous donnent ensuite son signe :
$$\begin{cases} h(x) > 0 & \text{si } x < 0, \\ h(x) < 0 & \text{si } x \in]0, a[. \\ h(x) > 0 & \text{si } x > a, \end{cases}$$
4. Voici le tableau de variations complet de h :

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^3		$-$	$\|$	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$		$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

5.
```python
from math import exp
def f(x):
    if x==0:
        return 'Erreur'
    else:
        return  (exp(x) -1 )/x**2
```

6.
```python
def compare(x,y)
    if x==0 or y==0:
        return 'erreur'
    elif f(x) < f(y):
        return False
    else:
        return True
```

Exercice 4. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, développer $(k+1)^4 - k^4$.

3. En calculant $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 - k^4$ de deux manières différentes, donner la valeur de $R = \sum_{k=0}^{n} k^3$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. (On pourra garder une formule développée, malgré ce que j'ai pu dire en classe...)

4. (INFO) Soit $p \in \mathbb{N}$, on note $R_x(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$ Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ et renvoie la valeur de $R_p(n)$

Correction 4.

1. On pose $P(n)$: " $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ "

   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $P(n)$: " $\sum_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0(0+1)(2*0+1)}{6}$ "

Or $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$ et $\frac{0(0+1)(2*0+1)}{6} = 0$
Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \quad (Chasles) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad (HR) \qquad = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6}{6}
\end{aligned}$$

Or $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$
Donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

Autrement dit, $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

2. $(k+1)^4 - k^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4$

$$\boxed{(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}$$

3. On reconnait une somme telescopique :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4 - 0^4 = (n+1)^4$$

Et par la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 - k^4 &= \sum_{k=0}^{n} 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 && (1) \\
&= 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 && (2) \\
&= 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && (3)
\end{aligned}$$

On obtient

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\right)$$

Les calculs donnent

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}}$$

4.
```
def R(p,n):
    s=0
    for k in range(n+1):
        s=s+k**p
    return(s)
```

Exercice 5 (INFO)**.** On dispose de la fonction suivante :

```
def mystere(x,y):
    if x>y:
        return x-y
    else:
        return y-x
```

1. Soient x, y deux réels à quoi correspond mathématiquement la valeur de `mystere(x,y)` ? (j'attends une formule mathématiques, pas une explication d'un paragraphe !)

   On importe la fonction racine de la bibliothèque math à l'aide de la commande `from math import sqrt`
2. Que renvoie `mystere(2**3-1, 3**2-2)` ? Justifier.
   On dispose de la fonction suivante :

   ```
   def mystere2(x,y):
       if x+y<3:
           return 2*x
       elif x-y>4:
           return y
       else:
           return x+y
   ```
3. Que renvoie `mystere2(1,-4)` ? Justifier.
4. Que renvoie `mystere2(2,mystere(3,4))` ? Justifier.

Correction 5.

1. `mystere(x,y)` $= |x-y|$
2. $2^3-1=7$, $3^2-2=7$. Les deux nombres sont égaux, donc la fonction renvoie 0
3. $1-4=-3$ donc on est pas dans le premier cas. $1-(-4)=5$ donc la condition $x-y>4$ est satisfaite. La fonction renvoie -4
4. `mystere(3,4)` renvoie 1, car $|3-4|=1$. 2+1 =3, et 2-1 =1, donc la fonction `mystere2(2,1)` renvoie $2+1$, c'est à dire 3

   Ainsi `mystere2(2,mystere(3,4))` renvoie 3.