Programme de colle : Semaine 30
Mardi 10 Juin

1 Cours

TOUT

2 Exercices Types

1. Soit la fonction f définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.
   (a) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.
   (b) Ce prolongement est-il dérivable ?
   (c) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
   (d) Ce prolongement est-il dérivable ?
2. Soit $n \geq 2$, on pose $P=(X+1)^n-1$.
   (a) Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.
   (b) On note Q le polynôme de $\mathbb{C}$ tel que : $P = XQ$. À l'aide des racines de Q, déterminer la valeur de :
   $$A=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
3. Soit D la droite d'équation $y=2x+1$ en donner une représentation paramétrique. En donner un vecteur normal. Soit $A=(1,2)$ donner le projeté orthogonal de A sur D
4. Soit D la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x &= 1+2\lambda \\ y &= 2-\lambda \end{cases}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$. En donner une équation cartésienne.
5. À l'aide d'une étude de fonction, démontrer l'inégalité suivante :$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x-\dfrac{x^2}{2}\geq 1$.
6. (a) Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{a}{1+x^2}+b$
   (b) A l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive de $x\mapsto 2x\arctan(x)$
7. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $n\geq 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ième tirage.
   (a) Déterminer Y_1.
   (b) Soit $n\geq 2$.
      i. Justifier que $Y_n \leq N-1$.

ii. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a

$$P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1).$$

(c) En déduire que la suite $(E(Y_n))_{n\geq 1}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de $E(Y_n)$ pour tout $n \geq 1$.

8. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le système : $(A - \lambda I_3)X = 0_{31}$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Calculer $P^{-1}AP$.

(c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) La matrice A est-elle inversible ?

(e) On considère trois suites u, v et w définies par

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ w_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - w_n \\ v_{n+1} &= v_n \\ w_{n+1} &= -u_n + 2v_n + w_n. \end{cases}$$

Donner l'expression explicite de chacune de ces trois suites.