Correction - DS2

Exercice 1. On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$\sin(3x) - \sin(x) \geq 0 \quad (E)$$

1. Dire si $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont solutions de (E)
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$
3. Résoudre $-2X^3 + X \geq 0$
4. En déduire les solutions de (E) sur $[0, 2\pi[$.

Correction 1.

1. $\sin(3\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3}) = \sin(\pi) - \sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ donc
$$\boxed{\frac{\pi}{3} \text{ n'est pas solution de } (E)}$$
$\sin(3\frac{5\pi}{6}) - \sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{2}) - \sin(\frac{5\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ donc
$$\boxed{\frac{5\pi}{6} \text{ est solution de } (E)}$$
2. On a pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:
$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x + x)\\ &= \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x)\\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x))\\ &= 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x)(1 - 2\sin^2(x))\\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)\end{aligned}$$
où l'on a utilisé $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ à la 4 ème ligne.
3.
$$\begin{aligned}&-2X^3 + X \geq 0\\ \iff &-X(2X^2 - 1) \geq 0\\ \iff &X((\sqrt{2}X)^2 - 1^2) \leq 0\\ \iff &X(\sqrt{2}X - 1)(\sqrt{2}X + 1) \leq 0\end{aligned}$$
A l'aide d'un tableau de signes on obtient l'ensemble des solutions :
$$\boxed{\mathcal{S}_2 =]-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}] \cup [0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}]}$$

4. D'après les questions 1 et 2 on a

$$\begin{aligned}\sin(3x)-\sin(x)\geq 0 &\iff 2\sin(x)-4\sin^3(x)\geq 0 \qquad\qquad \iff -2\sin^3(x)+\sin(x)\geq 0\\ &\iff \sin(x)\text{solution de } -2X^3+X\geq 0\\ &\iff \sin(x)\in]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]\end{aligned}$$

On obtient à l'aide du cercle trigonométrique, les solutions de l'équation $\sin(3x)-\sin(x)\geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{S}=[0,\tfrac{\pi}{6}]\cup[\tfrac{5\pi}{6},\pi]\cup[\tfrac{7\pi}{6},\tfrac{11\pi}{6}]}$$

Exercice 2. 1. A quelle condition sur $X, Y\in\mathbb{R}$ a-t-on

$$X=Y\iff X^2=Y^2$$

2. On souhaite résoudre dans $[-\pi,\pi[$ l'équation :

$$(1)\qquad |\cos(x)|=|\sin(x)|.$$

Montrer que (1) est équivalent à l'équation

$$(E)\qquad \cos(2x)=0.$$

3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ et en déduire les solutions de (1) sur $[-\pi,\pi[$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Correction 2.

1. On a $X=Y\iff X^2=Y^2$ si X et Y sont de même signe.
2. Comme $|\cos(x)|\geq 0$ et $|\sin(x)|\geq 0$ l'équation est équivalente à $\cos^2(x)=\sin^2(x)$. Or $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$ donc on obtient bien $(1)\iff\cos(2x)=0$.
3. On a donc $2x\equiv\frac{\pi}{2}\quad[\pi]$ ainsi

$$x\equiv\frac{\pi}{4}\quad[\frac{\pi}{2}]$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc

$$\mathcal{S}=\bigcup_{k\in Z}\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\}$$

Sur $[-\pi,\pi[$ les solutions sont :

$$\boxed{\mathcal{S}\cap[-\pi,\pi[=\{\tfrac{\pi}{4},\tfrac{3\pi}{4},\tfrac{-\pi}{4},\tfrac{-3\pi}{4}\}}$$

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=3, u_1=6$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n$$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq 3\times 2^n$

Correction 3. On montre le résultat par récurrence double. On pose

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \geq 3\times 2^n ET u_{n+1} \geq 3\times 2^{n+1}$"

Initialisation Pour $n = 0$ on a d'une part : $u_0 = 3, u_1 = 6$ et d'autre part $3 \times 2^0 = 3$ et $3 \times 2^1 = 6$ Dont $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a donc $u_n \geq 3\times 2^n ET u_{n+1} \geq 3\times 2^{n+1}$ On chercher à vérifier $\mathcal{P}(n+1)$, il suffit pour cela de vérifier que $u_{n+2} \geq 3\times 2^{n+2}$. Montrons cette dernière inégalité.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + u_n \quad \text{énoncé} \\ &\geq 2\times 3\times 2^{n+1} + 3\times 2^n \quad \text{Hypothèse de récurrence} \qquad \geq 2^n(2\times 3\times 2 + 3) \\ &\geq 2^n \times 15 \end{aligned}$$

Or $3 \times 2^2 = 12$ donc $2^n \times 15 \geq 3\times 2^{n+2}$ Ainsi

$$u_{n+2} \geq 3\times 2^{n+2}$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{u_n \geq 3\times 2^n}$$

Exercice 4.

1. En justifiant proprement chaque étape de calcul, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4.$$
2. Développer $(k+1)^4 - k^4$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
4. A l'aide des trois questions précédentes, montrer qu'il existe un polynôme P de degré 3, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)P(n).$$
On déterminera explicitement $P(n)$
5. En déduire finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Correction 4.

1. On reconnaît une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4 &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=0}^{n} k^4 \quad \textbf{Par linéarité} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} j^4 - \sum_{k=0}^{n} k^4 \quad \textbf{Changement de variable } j = k+1 \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} j^4\right) + (n+1)^4 -^4 + \sum_{k=1}^{n} k^4 \quad \text{Relation de Chasles} \\
&= (n+1)^4 \quad \text{Les deux sommes sont égales}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4}$$

2. On utilise le binôme de Newton on obtient

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

Donc

$$\boxed{(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}$$

3. Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$"

<u>Initialisation</u> Pour $n = 0$ on a d'une part : $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$ et d'autre part : $\frac{0(0+1)(2*0+1)}{6} = 0$
Dont $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En ajoutant de part et d'autre $(n+1)^2$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6}
\end{aligned}$$

Or $2n^2 + 7n + 6 = (2n+3)(n+2)$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

4. On a donc D'après la question 1 on a

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4$$

D'après la question 2 on a :

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n}(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = (n+1)^4$$

Par linéarité on a donc

$$4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)^4$$

Enfin on a montré à la question 3 que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on sait que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)$ donc

$$4\sum_{k=0}^{n} k^3 = (n+1)^4 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

Enfin simplifions $(n+1)^4 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) &= (n+1)\Big((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\Big) \\
&= (n+1)\Big(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1\Big) \\
&= (n+1)\Big(n^3 + n^2\Big)
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)\Big(n^3 + n^2\Big)}$$

La propriété est démontrée avec $P(n) = n^3 + n^2$

5. $n^3+n^2 = n^2(n+1)$ donc $\frac{1}{4}(n+1)\Big(n^3+n^2\Big) = \frac{(n+1)^2n^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$ On obtient bien le résultat demandé.

Problème 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$

1. Calculer S_1 et S_2

2. A l'aide d'un changement de variable montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

4. En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
5. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

On pose $e_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2}$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

7. On va montrer ensuite que $(e_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.
   (a) Justifier (brièvement) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \geq 0$.
   (b) On note $E_n = \{\frac{1}{2k^2} \,|\, k \in [\![n, 2n]\!]\}$
      i. Donner en fonction de n le nombre d'éléments de E_n.
      ii. Donner en fonction de n la plus grande valeur des éléments de E_n.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$.
   (d) Conclure.

Remarque : Avec l'inégalité $\forall x > 0, \ln(1+x) \leq x$, on peut montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq S_n$ et ainsi en déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide du théorème d'encadrement.

Correction 5.

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$

$$\boxed{S_1 = \frac{3}{2}}$$

$S_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$$\boxed{S_1 = \frac{7}{12}}$$

2. On pose le changement de variable $i = k + n$. On a Comme $k \in [\![0, n]\!]$, on a $i = k + n \in [\![n, 2n]\!]$ et donc

$$S_n = \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i}$$

Comme l'indice est muet on a bien

$$\boxed{S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) - \ln(k) \\
&= \sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k)
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $i = k+1$ dans la première somme : on obtient

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) = \sum_{i=n+1}^{2n+1} \ln(i)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{i=n+1}^{2n+1} \ln(i) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k) \\
&= \sum_{i=n+1}^{2n} \ln(i) + \ln(2n+1) - \left(\ln(n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k)\right) \\
&= \ln(2n+1) - \ln(n) + \sum_{i=n+1}^{2n} \ln(i) - \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) \\
&= \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

4. En tant que quotient de polynômes on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ Par composition, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \ln(2)$ Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(2)}$$

5. On fait une autre étude de fonction. On pose $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

Donc $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, on obtient pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$. Ainsi pour tout $x \geq 0$, on a $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$, d'où

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) \geq x - \tfrac{x^2}{2}}$$

6. On applique l'inégalité obtenue à la questin précédente à $\frac{1}{k} > 0$. On obtient donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$
En sommant ces inégalités entre n et $2n$ on obtient donc
$$\sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\right) \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$
Ce qui donne en utilisant la linéarité :
$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2} \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$
D'où
$$S_n - e_n \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$
En faisant passer e_n dans le membre de droite on obtient
$$\boxed{S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

7. (a) e_n est une somme de termes positifs, c'est donc positif.
   (b) i. E_n contient $n + 1$ éléments
   ii. Le plus grand élément de E_n est $\frac{1}{2n^2}$
   (c) Ainsi pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$
   $$\frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2n^2}$$
   On somme ces inégalités on obtient pour k variant de n à $2n$
   $$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n^2}$$
   d'où
   $$\boxed{e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}}$$
   (d) On a donc montré que
   $$0 \leq e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$$
   Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n^2} = 0$, le théorème d'encadrement assure que
   $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} e_n = 0}$$
   Remarque :
   (e) On fait une étude de fonction : soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(1 + x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et
   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x}.$$
   . Ainsi pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$, on a donc pour tout $x \geq 0$ $f(x) \geq 0$, c'est-à-dire $x - \ln(1 + x) \geq 0$. Finalement

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ x \geq \ln(1+x)}$$

Ainsi, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

Donc en sommant pour $k \in [\![n, 2n]\!]$ on obtient :

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq S_n$$

On obtient finalement

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \leq S_n \leq e_n + \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

En appliquant le théorème d'encadrement on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$$

Informatique

Exercice 5. Que retournent les scripts suivants :

Script 1

```
a=1
b=1
c=a+b
a=0
if c==b:
    a=1
else:
    a=2
print(a,c)
```

Script 2

```
a=2
b=a**3
c=a-b
if c>3:
    print(2)
elif a<=2:
    print(1)
else:
    print('coucou')
```

Script 3

```
a=1
b=a*2
a=b
b=b+a
print(a,b)
```

Script 4

```
a=1
for i  in range(5):
    if i%2==0:
        a=a+1
print(a)
```

Correction 6. Le script 1 affiche :

$$(2, 2)$$

Le script 2 affiche :

$$1$$

Le script 3 affiche :

$$(2, 4)$$

Le script 4 affiche :

$$4$$

Exercice 6.

1. Ecrire une fonction `discriminant` qui prend en argument trois nombres a, b et c et retourne la valeur du discriminant du polynome $ax^2 + bx + c$
2. Écrire une fonction `trinome` qui prend en argument trois nombres a, b et c et renvoie la valeur de(s) (la) solution(s) de $ax^2 + bx + c = 0$ si il en existe et renvoie la phrase 'pas de solution réelle' sinon.

Correction 7.

1.
```
def determinant(a,b,c):
    return( b**2 -4*a*c)
```

2.
```
def solution(a,b,c):
    if a==0:
        return( "pas un polynome de degre 2")

    delta= determinant(a,b,c)
    if delta <0:
        return 'pas de solution'
    elif delta==0:
        return (-b/2*a)
    else:
        return (-b+delta**0.5)/(2*a), (-b-delta**0.5)/(2*a)
```

Exercice 7. Ecrire une fonction Python `Somme` qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} k^5$

Correction 8.

```
def somme(n):
    s=0
    for i in range(n+1):
        s=s+i**5
    return(s)
```