DS4

3h00

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. On considère deux droites du plans $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ qui dépendent d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'équations cartésiennes respectives :

$$D_1(\lambda) : \lambda x + y = 1 \quad \text{et} \quad D_1(\lambda) : x + \lambda y = -1$$

1. Résoudre le système d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lambda x + y & = 1 \\ x + \lambda y & = -1 \end{cases}$$

2. Soit Σ l'ensemble des valeurs pour lesquelles le système précédent n'est pas de Cramer. Que vaut Σ ?
3. Que dire des droites $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ si $\lambda \in \Sigma$?
4. Pour $\lambda \notin \Sigma$ justifier que l'unique point d'intersection de $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$, noté M_λ, a pour coordonnées :

$$M_\lambda = \left(\frac{-1}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\lambda} \right)$$

5. Soit $A = (0, 1)$ et $B = (-1, 0)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$A \in D_1(\lambda) \quad \text{et} \quad B \in D_2(\lambda)$$

6. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donner un vecteur directeur $u_1(\lambda)$ de $D_1(\lambda)$ et $u_2(\lambda)$ de $D_2(\lambda)$. A quelle(s) condition(s) sur λ les deux droites sont elles orthogonales ?
7. A quelle(s) condition(s) sur λ le triangle $AM_\lambda B$ est il rectangle en M_λ ?

Exercice 2. On définit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\mathrm{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^3 + z + 2 \end{array} \right.$$

1. Etude de la fonction f sur $\mathbb{C}$.
   (a) Vérifier que -1 est racine de f et en déduire toutes les racines de f sur $\mathbb{C}$.
   (b) La fonction f est elle injective ?
   (c) Question hors-programme de première année : quel théorème permet de justifier que f est surjective ? (à faire si on a fini le reste et si on a une idée, j'en ai parlé rapidement dans un cours)
2. On note g la restriction de la fonction f à $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{g} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x + 2 \end{array} \right.$$

   (a) Etudier la fonction g.
   (b) Montrer que g réalise une bijection.
3. Etude de la réciproque. On note $\mathrm{g}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de g.
   (a) Comment obtenir la courbe représentative de g^{-1} à partir de celle de g.
   (b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g^{-1}(2)$ et $(\mathrm{g}^{-1})'(2)$

Exercice 3. La concentration d'alcool (en $g.L^{-1}$) dans le sang d'une personne ayant absorbé, à jeun (autrement dit (y(0)=0)), une quantité Q d'alcool vérifie l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t) = \frac{Q}{6}e^{-2t} \quad (E)$$

où t est le temps écoulé après ingestion exprimé en heures.

On suppose qu'une personne ingère la quantité $Q = 24g$ d'alcool.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) dans ce cas, on pourra chercher une solution particulière de la forme $y_p(t) = \lambda e^{-2t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est à déterminer.
2. Résoudre $e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0$.
3. Exprimer en heure le temps qu'il faut pour que la personne (à jeun au début de l'expérience) possède un taux d'alcoolémie inférieur à $0.5gL^{-1}$. On répondra à l'aide d'un calcul littéral.

Exercice 4. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (E)$$

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ montrer que les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + bx^2\ln(x)$ sont solutions de E. (On mettra en valeurs les calculs de f' et f'')
2. Réciproquement on considère y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et on cherche à montrer qu'elles sont bien de la forme précédente. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y\left(e^t\right)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}, z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y et ses dérivées.
   (b) En déduire que z vérifie
   $$z'' - 4z' + 4z = 0.$$
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) Conclure

TOURNEZ SVP

Exercice 5. On considère dans cet exercice qu'un brin d'ADN est représenté par une chaîne de caractère appelée `ADN`, où les nucléotides seront désignés par les lettres "A", "C", "G" et "T" dans le brin d'ADN.

1. Écrire une fonction `comptage(ADN, c)` prenant comme argument une chaîne de caractères `ADN` et un caractère `c` et qui renvoie le nombre d'apparitions de `c` dans `ADN`.
2. Écrire une fonction qui prend en argument une chaîne de caractères `ADN`, et qui renvoie une liste de taille 4, dont l'élément 0 est la proportion de "A", l'élément 1 la proportion de "C", l'élément 2 la proportion de "G" et l'élément 3 la proportion de "T".
3. A une séquence d'ADN correspond une unique séquence d'ARN grâce aux règles de complémentarité : G et C sont inversés, A devient U et T devient A. Par exemple, la séquence d'ADN 'AATCGA' est transcrite en 'UUAGCU.'

   Ecrire une fonction `transcription` qui prend en argument une chaîne de caractères `ADN` et retourne la chaine d'ARN correspondante.
4. On souhaite repérer les éventuelles mutations par substitution (remplacement d'un nucléotide par un autre) entre deux brins d'ADN. Écrire une fonction qui prend en argument deux brins d'ADN, qui compare lettre à lettre les deux brins et retourne une liste contenant les positions des mutations observées entre les deux brins d'ADN. La fonction devra renvoyer un message d'erreur si les deux brins ne sont pas de même taille.
5. On souhaite repérer les séquences codantes d'un brin d'ADN. Pour cela, on veut repérer la position du codon d'initiation "ACG". Écrire une fonction `init` qui prend en argument un brin d'ADN sous forme de chaine de caractères, et qui renvoie la chaine de caractère où seules les nucléotides apres 'ACG' aparraissent.

   Exemple `init('AGGTACGTTAGT')` devra renvoyer : `'ACGTTAGT'`
6. On suppose maintenant que notre chaine de caractères `ADN` commence par le codon 'ACG'. On dispose de la fonction suivante : Que fait cette fonction ? En particulier dire ce qu'elle retourne sur l'exemple : `ADN='ACGGAGTTTTGG'`
7. Ecrire une fonction qui prend un chaine de caractères `ADN` qui commence par le codon 'ACG' retourne la liste des codons jusqu'au premier codon stop (TAA, TAG, ou TGA) (ce codon stop sera inclus dans la liste)