# Correction TD - 11 : Dénombrement

## Entraînements

**Exercice 1.** On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si

1. on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?

**Correction 1. Rangement de billes dans des boîtes :**
Exercice très classique qui correspond à la répartition de billes dans des boîtes distinctes selon que les billes sont différentes ou non et que les boîtes peuvent contenir plusieurs billes ou non.

1. Comme les prospectus sont tous identiques, l'ordre dans lequel on les distribue dans les boîtes n'intervient pas. De plus, comme les boîtes ne peuvent pas contenir plus d'un prospectus, il n'y a pas de répétition possible. Ainsi, on est dans un cas où l'on doit choisir les 7 boîtes aux lettres qui vont contenir un prospectus parmi 10 boîtes aux lettres, ce choix se faisant sans ordre et sans répétition. Il y a donc $\binom{10}{7}$ façons de le faire.
2. Ici les prospectus sont tous différents et on peut par exemple imaginer qu'ils sont empilés selon un certain ordre (prospectus alimentaire puis bancaire...). Ici, lorsque vous allez choisir les boîtes aux lettres dans lesquelles vous allez mettre vos prospectus, l'ordre dans lequel vous choisissez vos boîtes à lettre intervient car tous les prospectus sont différents. Cela ne va donc pas donner le même résultat si vous choisissez d'abord la boîte aux lettres numéro 3 (qui reçoit donc le prospectus alimentaire) puis la boîte aux lettres numéro 6 (qui reçoit donc le prospectus bancaire) ou si vous choisissez d'abord la boîte aux lettres numéro 6 (qui reçoit donc le prospectus alimentaire) puis la boîte aux lettres numéro 3 (qui reçoit donc le prospectus bancaire). De plus, comme chaque boîte ne peut pas en recevoir plus d'un, il n'y a pas de répétition possible. Il s'agit donc de choisir 7 boîtes aux lettres parmi 10 en tenant compte de l'ordre et pas de répetition. On a donc $\frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!}$ façons de faire (ou alors 10 choix pour la première boîte aux lettres choisie, puis 9 choix pour la seconde boîte aux lettres choisie...).
3. Ici, il s'agit de choisir 7 boîtes aux lettres parmi 10 avec cette fois-ci à la fois de l'ordre mais aussi des répétitions car on peut mettre plusieurs prospectus dans chaque boîte aux lettres. On est dans le cas où il y a à la fois de l'ordre et des répétitions. Le nombre de façons de faire correspond aux nombres de $7-$uplet d'éléments pris parmis 10 avec répétitions possibles. Il y a donc $10^7$ façons de faire. Une autre façon de voir les choses est la suivante : on a 10 choix possibles pour le premier prospectus, 10 choix possibles pour le deuxième prospectus... et 10 choix pour le 7-ième prospectus. Ainsi, on a bien $10^7$ façons de faire.
4. Là, on est dans un cas où il n'y a pas d'ordre : en effet, les prospectus étant tous identiques, l'ordre dans lequel on les distribue n'intervient pas. Par contre il y a de la répétition car plusieurs prospectus peuvent être mis dans la même boîte aux lettres. Ici, la seule façon de faire est de considérer les 7 prospectus et de rajouter les 9 séparations entre les 10 boîtes aux lettres. On a donc en tout 16 emplacements possibles et il faut choisir la place des 9 séparations parmi ces 16 places, sans ordre (les séparations sont identiques) et sans répétition (un seul objet par emplacement). On obtient ainsi $\binom{16}{9}$ façons de faire.

**Exercice 2.** Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.

1. On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.
   (a) Donner le nombre de résultats possibles.
   (b) Combien de ces résultats amènent

i. exactement 1 jeton noir ?
ii. au moins 1 jeton noir ?
iii. au plus un jeton noir ?
iv. 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?

2. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.
3. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.

**Correction 2. Tirage de jetons dans une urne**

1. On est dans un cas où l'ordre et la répétition interviennent puisque les jetons sont tirés successivement et avec remise.
   (a) A chaque tirage, on a 13 choix : 13 choix pour le premier tirage, 13 choix pour le second... Ainsi, on obtient $13^6$ résultats possibles.
   (b) i. Pour obtenir exactement un jeton noir, on doit : choisir à quel tirage on va tirer le jeton noir : il y a 6 choix possibles. Ensuite pour chaque choix de numéro de tirage, on a : 8 choix possibles de jetons noirs et pour les 5 autres tirages, on a 5 possibilités à chaque fois (5 jetons blancs). Ainsi, on obtient : $6 \times 8 \times 5^5$ résultats possibles.
   ii. On passe à l'ensemble complémentaire. Si on note $A$ l'ensemble des tirages avec au moins un jeton noir et $E$ l'ensemble des tirages possibles, on a : $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A})$. Et $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages sans aucun jeton noir. On a donc $\text{Card}(\overline{A}) = 5^6$ : à chaque tirage, on a 5 choix de jetons (les 5 jetons blancs) et il y a 6 tirages ordonnés. Ainsi, on obtient $\text{Card}(A) = 13^6 - 5^6$.
   iii. On note $A$ l'ensemble des tirages avec au plus un jeton noir. C'est l'union disjointe de $B$ l'ensemble des tirages avec exactement aucun jeton noir et de $C$ l'ensemble des tirages avec exactement un jeton noir. Or on a déjà vu que : $\text{Card}(B) = 5^6$ et $\text{Card}\, C = 6 \times 8 \times 5^5$. Ainsi, on obtient que : $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) + \text{Card}(C) = 5^6 + 6 \times 8 \times 5^5$.
   iv. Pour avoir 2 fois plus de jetons noirs que de blancs avec 6 tirages, la seule solution est de tirer 2 jetons blancs et 4 jetons noirs. On commence par fixer la place des 2 jetons blancs parmi les 6 tirages : $\binom{6}{2}$. Les jetons noirs étant alors placés dans les places restantes. Puis il y a $5^2$ choix pour les jetons blancs et $8^4$ choix possibles pour les jetons noirs. On obtient au final $\binom{6}{2} \times 5^2 \times 8^4$ résultats possibles.
2. On est dans un cas où l'ordre intervient mais où il n'y a pas répétition puisque les jetons sont tirés successivement et sans remise.
   (a) Il s'agit donc ici de choisir 6 jetons parmi 13 jetons avec ordre et sans remise, on obtient donc des 6 listes sans répétition, soit $\dfrac{13!}{(13-6)!} = \dfrac{13!}{7!}$. Une autre façon de le voir est de dire : pour le premier tirage, j'ai 13 choix, pour le deuxième tirage, j'ai 12 choix... et pour le dernier tirage, j'ai 8 choix. Ainsi, on a : $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = \dfrac{13!}{7!}$ résultats possibles.
   (b) i. Pour obtenir exactement un jeton noir, on doit : choisir à quel tirage on va tirer le jeton noir : il y a 6 choix possibles. Ensuite pour chaque choix de numéro de tirage, on a : 8 choix possibles de jetons noirs et pour les 5 autres tirages, on doit choisir 5 jetons parmi 5 sans remise mais avec ordre : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$. Ainsi, on obtient : $6 \times 8 \times 5!$ résultats possibles.
   ii. On passe à l'ensemble complémentaire. Si on note $A$ l'ensemble des tirages avec au moins un jeton noir et $E$ l'ensemble des tirages possibles, on a : $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A})$. Et $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages sans aucun jeton noir. On a donc $\text{Card}(\overline{A}) = 0$. En effet, comme il n'y a pas de remise et que l'on fait 6 tirages alors qu'il n'y a que 5 jetons blancs, il n'y a aucun tirage sans jeton noir. Ainsi, on obtient $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) = \dfrac{13!}{7!}$.
   iii. On note $A$ l'ensemble des tirages avec au plus un jeton noir. C'est l'union disjointe de $B$ l'ensemble des tirages avec exactement aucun jeton noir et de $C$ l'ensemble des tirages avec exactement un jeton noir. Or on a déjà vu que : $\text{Card}(B) = 0$ et $\text{Card}\, C = 6 \times 8 \times 5!$. Ainsi, on obtient que : $\text{Card}(A) = \text{Card}(C) = 6 \times 8 \times 5!$.
   iv. Pour avoir 2 fois plus de jetons noirs que de blancs avec 6 tirages, la seule solution est de tirer 2 jetons blancs et 4 jetons noirs. On commence par fixer la place des 2 jetons blancs parmi les

6 tirages : $\binom{6}{2}$. Les jetons noirs étant placés dans les places restantes. Puis il y a $5 \times 4$ choix pour les jetons blancs et $8 \times 7 \times 6 \times 5$ choix possibles pour les jetons noirs. On obtient au final $\binom{6}{2} \times 5 \times 4 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ résultats possibles.

3. On est alors dans un cas où il n'y a ni ordre ni répétition car les jetons sont tirés simultanément.
   (a) Il s'agit donc de choisir 6 jetons parmi 13 jetons sans ordre et sans répétition. On obtient donc $\binom{13}{6}$ résultats possibles.
   (b) i. On doit choisir 1 jeton noir parmi les 8 et 5 jetons blancs parmi les 5. En fait la poignée de jetons que vous devez obtenir doit contenir les 5 jetons blancs et un jeton noir. On a donc 8 résultats possibles ce qui est bien égal à $\binom{8}{1} \times \binom{5}{5}$.
   ii. On passe à l'ensemble complémentaire. Si on note $A$ l'ensemble des tirages avec au moins un jeton noir et $E$ l'ensemble des tirages possibles, on a : $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(\overline{A})$. Et $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages sans aucun jeton noir. On a donc $\mathrm{Card}(\overline{A}) = 0$. En effet, comme il n'y a pas de remise et que l'on tire 6 jetons alors qu'il n'y a que 5 jetons blancs, il n'y a aucun tirage sans jeton noir. Ainsi, on obtient $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) = \binom{13}{6}$.
   iii. On note $A$ l'ensemble des tirages avec au plus un jeton noir. C'est l'union disjointe de $B$ l'ensemble des tirages avec exactement aucun jeton noir et de $C$ l'ensemble des tirages avec exactement un jeton noir. Or on a déjà vu que : $\mathrm{Card}(B) = 0$ et $\mathrm{Card}\, C = 8$. Ainsi, on obtient que : $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(C) = 8$.
   iv. Pour avoir 2 fois plus de jetons noirs que de blancs avec 6 tirages, la seule solution est de tirer 2 jetons blancs et 4 jetons noirs. On obtient donc $\binom{5}{2} \times \binom{8}{4}$ résultats possibles.

**Exercice 3.** Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes.

1. Il distribue 8 fruits différents (une pomme, une banane, ...). Combien y-a-t-il de distributions possibles
   (a) s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
   (b) si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?
2. Mêmes questions si les 8 fruits sont 8 pommes golden identiques.

**Correction 3. Rangement de billes dans des boîtes :**
On est dans le cas classique où il faut répartir 8 objets (différents ou distincts) parmi 13 singes distincts (ou boîtes), chaque singe pouvant en avoir soit 0 ou 1 ou plusieurs.

1. (a) Les fruits sont différents donc le choix de nos singes se fait avec ordre. Et il n'y a pas de répétitions possibles dans le choix des singes car chaque singe peut recevoir au plus un fruit. On doit donc compter le nombre de 8-listes parmi les 13 singes, donc il y a $\frac{13!}{(13-8)!} = \frac{13!}{5!}$ distributions possibles.
   (b) Les fruits sont différents donc le choix de nos singes se fait avec ordre. Et il y a des répétitions possibles dans le choix des singes car chaque singe peut recevoir 0, 1 ou plusieurs fruits. On doit donc compter le nombre de 8-listes avec répétition parmi les 13 singes, donc il y a $13^8$ distributions possibles.
   On peut aussi refaire le raisonnement : j'ai 13 choix pour la banane, 13 choix pour la pomme, 13 choix pour la poire...en tout, j'ai donc $13^8$ distributions possibles.
2. (a) Les fruits sont tous identiques donc le choix de nos singes se fait sans ordre. Et il n'y a pas de répétitions possibles dans le choix des singes car chaque singe peut recevoir au plus un fruit. On doit compter le nombre de combinaisons de 8 singes parmi 13, donc il y a $\binom{13}{8}$ distributions possibles.
   (b) Les fruits sont tous identiques donc le choix de nos singes se fait sans ordre. Et il y a des répétitions possibles dans le choix des singes car chaque singe peut recevoir 0, 1 ou plusieurs fruits. On est dans le cadre du choix de 8 singes parmi les 13 singes et ce choix se fait sans ordre et avec répétition. La seule manière de modéliser cela est de rajouter à nos 8 fruits identiques 12 séparations entre les singes. On a donc en tout 20 emplacements différents possibles et il faut choisir la place des 12 séparations parmi ces 20 places disponibles sans ordre (les séparations sont identiques) et sans répétition (un seul objet par séparation). On a donc $\binom{20}{12}$ distributions possibles.

**Exercice 4.** A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier à 12 touches : 3 lettres A, B et C et les 9 chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie de 3 chiffres.

1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien existe-t-il de codes
   (a) pour lesquels les 3 chiffres sont distincts ?
   (b) comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
   (c) pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
   (d) pour lesquels les 3 chiffres sont dans l'ordre strictement croissant ?

**Correction 4. Codes :**

1. Ici, l'ordre intervient et des répétitions sont possibles. Ainsi, on obtient 3 choix pour la lettre et pour chaque lettre choisie, on obtient ensuite une 3-liste prise parmi les 9 chiffres. Ainsi le nombre de codes différents est : $3 \times 9^3$.
2. (a) Ici l'ordre intervient toujours mais il n'y a pas de répétition possible car les 3 chiffres doivent être distincts. On compte donc le nombre de 3-listes sans répétition parmi les 9 chiffres, et on obtient $3 \times (9 \times 8 \times 7)$ codes différents lorsque les trois chiffres sont distincts.
   (b) On note $A$ l'ensemble des codes contenant au moins le chiffre 7. On a : $\text{Card}(A) = 3 \times 9^3 - \text{Card}(\overline{A})$. Et ici, $\overline{A}$ est l'ensemble des codes ne contenant pas le chiffre 7. Ainsi, on a : $\text{Card}(\overline{A}) = 3 \times 8^3$ et
   $$\text{Card}(A) = 3 \times 9^3 - 3 \times 8^3.$$
   (c) Tous les chiffres doivent être pairs donc il s'agit de ne prendre que les chiffres 2, 4, 6 et 8. Ainsi, on obtient, comme il y a toujours de l'ordre et des répétitions possibles : $3 \times 4^3$.
   (d) On cherche le nombre de façons de choisir 3 chiffres parmi 9 :
   - sans ordre, puisqu'une fois les nombres choisis, l'ordre est imposé : les chiffres doivent être entrés dans l'ordre croissant (donc que l'on choisisse $1, 2$ puis 3 ou 3, 2, puis 1, cela revient au même, dans tous les cas on rentrera 1, 2, 3 pour le code),
   - sans répétition, car comme l'ordre doit être strict, les nombres doivent distincts.

   On cherche donc le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 9, on obtient donc $\binom{9}{3}$ possibilités pour les chiffres. En ajoutant les 3 choix possibles pour les lettres, on a donc $3 \times \binom{9}{3}$ possibilités.

**Exercice 5.** Un jeu de cartes non truqué comporte 52 cartes. Une main est constituée de 8 cartes.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un as ?
3. Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un coeur ou une dame ?
4. Quel est le nombre de mains possibles avec exactement un as et exactement un coeur ?
5. Quel est le nombre de mains possibles comportant des cartes d'exactement 2 couleurs ?
6. Quel est le nombre de mains possibles comportant deux couleurs au plus ?
7. Quel est le nombre de mains possibles avec 8 cartes dont les rangs se suivent ?

**Correction 5. Jeu de cartes :**

1. On est dans un cas où il n'y a pas d'ordre ni de répétition. Il s'agit donc de choisir 8 cartes parmi 52 sans ordre ni répétition. On obtient donc $\binom{52}{8}$ mains différentes.
2. Une solution est de passer par le complémentaire. Si on pose $A$ : ensemble des mains possibles avec au moins un as et $E$ : ensemble des mains possibles. On obtient : $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A})$. De plus, on a : $\overline{A}$ : ensemble des mains possibles sans aucun as et ainsi il s'agit de choisir 8 cartes non plus parmi 52 mais parmi 48 car on enlève les 4 as. On obtient ainsi : $\text{Card}(A) = \binom{52}{8} - \binom{48}{8}$.

3. Là encore on peut passer par l'ensemble complémentaire. Si on pose $B$ : ensemble des mains possibles avec au moins (un coeur ou une dame) et $E$ : ensemble des mains possibles. On obtient : $\text{Card}(B) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{B})$. De plus, on a : $\overline{B}$ : ensemble des mains possibles sans coeur et sans dame et ainsi il s'agit de choisir 8 cartes non plus parmi 52 mais parmi 36 car on enlève les 13 coeurs et les 3 dames restantes. On obtient ainsi : $\text{Card}(A) = \binom{52}{8} - \binom{36}{8}$.
4. Il faut faire attention à l'as de coeur. On note $C$ : l'ensemble des mains possibles avec exactement un as et exactement un coeur mais sans l'as de coeur, $D$ l'ensemble des mains possibles avec l'as de coeur et aucun coeur et as pour les autres cartes et $E$ l'ensemble des mains possibles avec exactement un as et un coeur. On a bien $E = C \cup D$ et les deux ensembles $C$ et $D$ sont bien disjoints. Ainsi, on obtient $\text{Card}(E) = \text{Card}(C) + \text{Card}(D)$. Le cardinal de $C$ s'obtient en choisissant une carte parmi les 3 as ne contenant pas l'as de coeur, une carte parmi les 12 cartes de coeur sans l'as de coeur et les 6 cartes restantes parmi les 36 cartes restantes n'étant ni des coeur ni des as. On a donc : $\text{Card}(C) = \binom{3}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{6}$. Pour $D$, il faut prendre l'as de coeur, soit une seule possibilité, puis il faut prendre les 7 cartes restantes parmi les 36 autres cartes n'étant ni des coeurs ni des as. On obtient ainsi $\text{Card}(D) = 1 \times \binom{36}{7}$. Ainsi, on a : $\text{Card}(E) = \binom{3}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{6} + \binom{36}{7}$.
5. On commence par faire le choix de la couleur, on a donc 2 choix parmi 4 sans ordre et sans répétition : $\binom{4}{2}$. Une fois le choix de la couleur fait, il faut prendre nos 8 cartes parmi les cartes de ces deux couleurs à savoir on doit prendre 8 cartes parmi les 26 cartes des deux couleurs choisies. On a compté en trop le cas où nos 8 cartes étaient en fait toutes prises de la même couleur. Il faut donc retirer à $\binom{26}{8}$ le nombre de possibilités que l'on a d'avoir pris en fait 8 cartes de la même couleur, à savoir : $2 \times \binom{13}{8}$. On le compte 2 fois car il y a deux couleurs. Finalement, on obtient : $\binom{4}{2}\left[\binom{26}{8} - 2\binom{13}{8}\right]$.
6. On veut choisir au plus deux couleurs, c'est-à-dire exactement une ou bien exactement deux. On a calculé le nombre de tirages avec exactement deux couleurs à la question précédente. De plus, pour choisir des cartes d'une seule couleur, on a 4 choix pour la couleur, puis $\binom{13}{8}$ possibilités pour les tirages. Comme les tirages d'une couleur et de deux couleurs sont disjoints, le cardinal de l'union des deux ensembles est la somme des cardinaux, et on en déduit que l'on a $\binom{4}{2}\left[\binom{26}{8} - 2\binom{13}{8}\right] + 4\binom{13}{8}$ possibilités.
7. On commence par faire le choix de la plus petite carte : on a 6 choix pour la valeur de la plus petite carte : du 2 au 7. Une fois ce choix fait, cela détermine le choix des 8 autres valeurs puisque les valeurs doivent se suivrent strictement. Par exemple, si la plus petite carte est un 4 ensuite on doit avoir un 5,6,7,8,9,10,Valet. Puis, comme il y a 4 couleurs par valeur, on obtient finalement : $\binom{6}{1} \times 4^8$.

**Exercice 6.** Une urne contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches. On tire deux chaussures au hasard.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages où l'on obtient deux chaussures de même couleur ?
3. Combien de tirages amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien de tirages amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?

**Correction 6. Paires de chaussures :**

1. Il y a 20 chaussures en tout (on considère que toutes les chaussures sont distinctes même les chaussures de la même couleur) et on en prend 2. Il n'y a pas d'ordre ni de répétition et on a : $\binom{20}{2}$ tirages possibles.
2. Si on note $E$ l'ensemble des tirages où l'on obtient deux chaussures de la même couleur, on a : $E = E_N \cup E_M \cup E_B$ avec $E_N$ ensemble des tirages avec 2 chaussures de la couleur noire et pareil pour $E_M$

et $E_B$. Comme il y a respectivement 10 chaussures noires, 6 chaussures marrons et 4 chaussures blanches et que ces trois ensembles $E_N$, $E_M$ et $E_B$ sont des ensembles disjoints, on obtient

$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E_N) + \mathrm{Card}(E_M) + \mathrm{Card}(E_B) = \binom{10}{2} + \binom{6}{2} + \binom{4}{2}.$$

3. On fait le choix d'une chaussure de pied droit par exemple et à chaque choix fait, on fait le choix d'une chaussure de pied gauche. On obtient alors : $\binom{10}{1}\binom{10}{1} = 10 \times 10 = 100$.
4. Si on note $A$ l'ensemble des tirages où l'on obtient deux chaussures de la même couleur avec une chaussure droite et une chaussure gauche, on a : $A = A_N \cup A_M \cup A_B$ avec $A_N$ ensemble des tirages avec 2 chaussures de la couleur noire avec une chaussure droite et une chaussure gauche et pareil pour $A_M$ et $A_B$. Ainsi, on obtient
$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A_N) + \mathrm{Card}(A_M) + \mathrm{Card}(A_B) = 5 \times 5 + 3 \times 3 + 2 \times 2.$$

## Formules démontrées à l'aide du dénombrement

**Exercice 7.** On considère un quadrillage $\mathbb{N}^2$ du quart de plan des points à coordonnées positives. On appelle chemin croissant tout parcours suivant le quadrillage en utilisant des déplacements vers le haut ou vers la droite.

1. Combien y-a-t-il de chemins croissants de longueur $n \in \mathbb{N}$ ? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?
2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ fixé.
   (a) Combien de chemins croissants permettent de relier $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ ?
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq m + n$. Pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$, dénombrer le nombre de chemins reliant $A$ et $B$ et passant par $C_k\begin{pmatrix} k \\ p-k \end{pmatrix}$. En déduire la formule de Vandermonde.

**Correction 7. Chemins le long d'un quadrillage**

1. Vous pouvez commencer par faire un exemple avec par exemple $n = 5$ pour comprendre comment cela fonctionne.
   - A chaque déplacement, il y a deux choix possibles : soit vers la droite, soit vers le haut. Ainsi, un chemin croissant est une succession de déplacements de type $d$ (vers la droite) et de type $h$ (vers le haut). L'ordre intervient car le chemin n'est pas le même si on a commencé par se déplacer vers la droite puis vers le haut ou si on a fait l'inverse. De plus, il y a répétition possible car on peut bien entendu se déplacer plusieurs fois vers le haut et plusieurs fois vers la droite. Ainsi, un chemin croissant de longueur $n$ est un $n$-uplet d'éléments $h$ ou $d$. Il y en a $2^n$ choix possibles.
   - Au bout de $n$ déplacements, on atteint un point de la forme $(k, p)$ avec $k + p = n$, soit $p = n - k$. Ainsi les points atteints sont les points $(k, n - k)$, avec $k \in \{0, \dots, n\}$, qui correspondent à la diagonale du carré $n \times n$. Il y a donc $n + 1$ points distincts.
2. (a) Pour relier $A$ et $B$, il suffit de faire successivement $m$ déplacements vers la droite et $n$ déplacements vers le haut et ceci dans n'importe quel ordre. On a donc $m + n$ déplacements à faire au total. On commence par choisir le nombre de façon de placer les $m$ déplacements vers la droite : on doit choisir $m$ déplacements parmi $n + m$, sans ordre et sans répétition, soit $\binom{n+m}{m}$. Il n'y a ensuite plus le choix pour les autres déplacements, qui sont nécessairement des déplacements vers le haut. On obtient donc : $\binom{m+n}{m}$ chemins croissants permettent de relier $A$ et $B$.

   (b) Comme dans la question précédente, pour relier $A$ et $C_k$, il suffit de faire successivement $k$ déplacements vers la droite et $p - k$ déplacements vers le haut, soit $p - k + k = p$ déplacements au total. Avec le même raisonnement, on obtient donc $\binom{p}{k}$ chemins possibles de $A$ jusqu'à $C_k$.
   Puis pour relier $C_k$ et $B$, il suffit de faire successivement $m - k$ déplacements vers la droite et $n - (p - k)$ déplacements vers le haut, soit $m - k + n - (p - k) = m + n - p$ déplacements au total. On obtient

donc $\binom{m+n-p}{m-k}$ chemins possibles de $C_k$ à $B$ (on remarque que ce nombre de chemins est bien nul dès que $k > m$ où que $p-k > n$).
Ces choix sont successifs, on a donc $\binom{p}{k} \times \binom{m+n-p}{m-k}$ chemins possibles pour aller de $A$ à $B$ en passant par $C_k$.
On veut en déduire une autre formule pour le nombre de chemins de $A$ à $B$. Pour aller de $A$ à $B$, au bout de $p$ déplacements, on est forcément sur un point de la forme $(k, p-k)$, avec $k \in \{0, \dots, p\}$. Il suffit donc de sommer ces différentes possibilités, et on obtient $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{m+n-p}{m-k}$ Sachant que les termes de la somme sont nuls dès que $k > m$, et en identifiant avec le résultat trouvé à la question précédente, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{p}{k}\binom{m+n-p}{m-k} = \binom{m+n}{m}.$$

Pour retrouver la formule de Vandermonde, il suffit de faire un changement dans le nom des variables, et poser $M = m+n-p$, $N = p$ et $R = m$. On obtient alors

$$\sum_{k=0}^{R} \binom{N}{k}\binom{M}{R-k} = \binom{M+N}{R},$$

ce qui est bien la formule voulue.

**Exercice 8.** Soient $p$, $q$ et $r$ trois entiers naturels tels que $p+q+r \geq 1$.

1. Combien de mots de $p+q+r$ lettres peut-on former en utilisant $p$ fois la même lettre $A$, $q$ fois la lettre $B$ et $r$ fois la lettre $C$ ? Vérifier le résultat avec $p = q = r = 1$.
2. Démontrer la formule : $(a+b+c)^n = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p} \binom{n}{p}\binom{n-p}{q} a^p b^q c^{n-p-q}$.

**Correction 8. Formule du multinôme (deuxième question plus dure)**

1. On raisonne ici comme pour les anagrammes. On obtient donc $\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$ mots différents.
2. Calcul de $(a+b+c)^n$ :
Le terme général est de la forme $a^p b^q c^r$ avec $p+q+r = n$. De plus, un tel terme va apparaître lorsque l'on développe complétement $(a+b+c)^n$ autant de fois que l'on peut former de mots de $n$ lettres en utilisant $p$ fois la lettre $a$, $q$ fois la lettre $b$ et $r$ fois la lettre $c$. Ainsi, le terme $a^p b^q c^r$ devra être sommé $\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$ fois.
On obtient ainsi que

$$(a+b+c)^n = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p} \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} a^p b^q c^r.$$

En effet, on commence par choisir $p$ variant de 0 à $n$, puis il faut choisir $q$ variant de 0 à $n-p$ et enfin pour $r$, on est obligé de prendre $r = n-p-q$.
De plus, comme $r = n-p-q$, on a :

$$\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} = \frac{n!}{p!q!(n-p-q)!} \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{p}\binom{n-p}{q} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!} = \frac{n!}{p!q!(n-p-q)!}.$$

On a donc : $\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{q}$. En remplaçant dans la somme, on obtient bien le résultat voulu, à savoir :

$$\boxed{(a+b+c)^n = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p} \binom{n}{p}\binom{n-p}{q} a^p b^q c^{n-p-q}}.$$

## Type DS

**Exercice 9.** Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On suppose que les boules sont discernables et on effectue un tirage de 6 boules de cette urne successivement et avec remise.

1. Donner le nombre de résultats possibles.
2. Combien de ces résultats amènent
   (a) 5 boules blanches puis une boule noire dans cet ordre ?
   (b) exactement une boule noire ?
   (c) au moins une boule noire ?
   (d) plus de boules noires que de boules blanches ?

**Correction 9. Tirage de boules dans une urne**

1. On est dans un cas où il y a ordre et répétition. Un résultat est un 6-uplet de boules pris dans un ensemble de 13 boules. On a donc 13 choix pour le premier tirage, 13 choix pour le second tirage... et ainsi on obtient $13^6$ résultats possibles.
2. (a) On a 5 choix possibles pour le premier tirage, 5 choix possibles pour le second tirage,..., puis 5 choix possibles pour le cinquième tirage et 8 choix possibles pour le dernier tirage. Au final, on obtient $5^5 \times 8$ résultats possibles.
   (b) Pour obtenir exactement une boule noire, on doit : choisir à quel tirage on va tirer la boule noire : il y a 6 choix possibles. Ensuite pour chaque choix de numéro de tirage, on a : 8 choix possibles de boules noires et pour les 5 autres tirages, on a 5 possibilités à chaque fois (5 boules blanches). Ainsi, on obtient : $6 \times 8 \times 5^5$ résultats possibles.
   (c) On passe à l'ensemble complémentaire. Si on note $A$ l'ensemble des tirages avec au moins une boule noire et $E$ l'ensemble des tirages possibles, on a : $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(\overline{A})$. Et $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages sans aucune boule noire. On a donc $\mathrm{Card}(\overline{A}) = 5^6$ : à chaque tirage, on a 5 choix de boules (les 5 boules blanches) et il y a 6 tirages ordonnés. Ainsi, on obtient $\mathrm{Card}(A) = 13^6 - 5^6$.
   (d) On considère que l'on veut strictement plus de boules noires que blanches. C'est donc la réunion disjointe de 0 boule blanche et 6 boules noires ou 1 boule blanche et 5 boules noires ou 2 boules blanches et 4 boules noires. On obtient ainsi : $8^6 + 6 \times 5 \times 8^5 + \binom{6}{2} \times 5^2 \times 8^4$.

**Exercice 10.** Soient $n$, $p$ et $q$ trois entiers naturels. Le but de l'exercice est de démontrer la formule suivante :

$$\sum_{k=p}^{2p} \binom{k}{p} 2^{2p-k} = 2^{2p}.$$

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots de $p+q+1$ lettres prises dans l'ensemble $\{A, B\}$.

1. Calculer $\mathrm{Card}\,(\mathcal{M})$.
2. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}$ contenant au moins $p+1$ fois la lettre A. Etant donné un entier $k \in \{1, \dots, q+1\}$, on note $\mathcal{N}_k$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{N}$ dont le $p+1$-ième A se trouve en $p+k$-ième position. Déterminer $\mathrm{Card}\,(\mathcal{N}_k)$. En déduire $\mathrm{Card}\,(\mathcal{N})$ sous forme d'une somme.
3. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}$ contenant au moins $q+1$ fois la lettre B. Déterminer $\mathrm{Card}\,(\mathcal{R})$.
4. En déduire la formule : $\sum\limits_{k=0}^{q} \binom{p+k}{p} 2^{q-k} + \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{q+k}{q} 2^{p-k} = 2^{p+q+1}$.
5. Conclure.

**Correction 10. Démonstration d'une formule par le dénombrement**

1. Il s'agit ici de dénombrer le nombre de mots formés avec des A et des B. L'ordre intervient donc et il y a répétitions possibles : on peut prendre plusieurs fois la lettre A et plusieurs fois la lettre B. Un tel mot est donc une $(p+q+1)$-liste de deux lettres et on obtient ainsi

$$\mathrm{Card}(\mathcal{M}) = 2^{p+q+1}.$$

2. - On veut que le $p+1$-ième A se trouve en $p+k$-ième position. Cela signifie que les $p+k-1$ premières lettres comporte $p$ lettres A. Pour les $p+k-1$ premières lettres, il y a donc autant de possibilités que de façons de placer ces $p$ lettres A parmi les $p+k-1$ lettres : on a donc $\binom{p+k-1}{p}$ choix possibles. Ensuite la $p+k$-ième lettre est un A et il y a donc une seule possibilité. Puis, pour les $q-k+1$ lettres restantes, il n'y a pas de restriction : on a donc $2^{q-k+1}$ possibilités. Au final, on obtient

$$\mathrm{Card}(\mathcal{N}_k) = \binom{p+k-1}{p} 2^{q-k+1}.$$

   - Il est cair que $(\mathcal{N}_1, \ldots \mathcal{N}_{q+1})$ est un système complet de $\mathcal{N}$ puisque le $p+1$-ième A se trouve entre la position $p+1$ et la position $p+q+1$ et les $\mathcal{N}_i$ sont bien 2 à 2 disjoints. Par conséquent, on a

$$\mathrm{Card}(\mathcal{N}) = \sum_{k=1}^{q+1} \mathrm{Card}(\mathcal{N}_k) = \sum_{k=1}^{q+1} \binom{p+k-1}{p} 2^{q-k+1}.$$

3. En utilisant un raisonnement similaire pour $\mathcal{R}$ (le $q+1$-ième B pouvant se trouver entre la position $q+1$ et la position $p+q+1$), on obtient, en remplaçant simplement $p$ par $q$ dans la formule précédente,

$$\mathrm{Card}(\mathcal{R}) = \sum_{k=1}^{p+1} \mathrm{Card}(\mathcal{R}_k) = \sum_{k=1}^{p+1} \binom{q+k-1}{q} 2^{p-k+1}.$$

4. Comme un mot de $\mathcal{M}$ comporte $p+q+1$ lettres, il comporte nécessairement ou bien au moins $p+1$ lettres A, ou bien au moins $q+1$ lettres B, ce qui s'écrit $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cup \mathcal{R}$. Ensuite, $\mathcal{N} \cap \mathcal{R}$ désigne l'ensemble des mots de $\mathcal{M}$ comportant au moins $p+1$ lettres $A$ et $q+1$ lettres $B$, ce qui n'est pas possible car un mot de $\mathcal{M}$ a $p+q+1$ lettres seulement. Ainsi, $\mathcal{N} \cap \mathcal{R} = \emptyset$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(\mathcal{M}) &= \mathrm{Card}(\mathcal{N}) + \mathrm{Card}(\mathcal{R}) \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+k-1}{p} 2^{q-k+1} + \sum_{k=1}^{q+1} \binom{q+k-1}{q} 2^{p-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{p} 2^{q-k} + \sum_{k=0}^{q} \binom{q+k}{q} 2^{p-k}
\end{aligned}$$

en posant $k' = k-1$ dans les deux sommes. En utilisant alors la question 1, on obtient

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{p} 2^{q-k} + \sum_{k=0}^{q} \binom{q+k}{q} 2^{p-k} = 2^{p+q+1}.$$

5. On applique alors la formule précédente pour $p = q$ et cela nous donne

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{p} 2^{p-k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{p} 2^{p-k} = 2^{2p+1}.$$

On divise alors par 2 de chaque côté et on obtient

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{p} 2^{p-k} = 2^{2p}.$$

Si on pose alors $k' = p+k$, on a :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{p} 2^{p-k} = \sum_{k=p}^{2p} \binom{k}{p} 2^{2p-k} = 2^{2p}.$$

On obtient bien la formule voulue.