TD 14 : Polynômes

I Entrainement

Calculs

Exercice 1. On pose $P = X^2 + 3X$, $Q = X^2 + X + 1$, $S = X^2 - 1$.

1. Calculer P^2, $P - Q$ et $P^2 - Q^2$.
2. Calculer $P(X + 1)$.
3. Calculer $S \circ f$ avec $f : t \mapsto \cos(t)$.

Exercice 2. Simplifier le polynôme $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k$.

Exercice 3. Dans les deux cas suivants, déterminer tous les polynômes P vérifiant les conditions indiquées

1. $\deg(P) = 3$ et $P(1) = 4,\ P(-1) = 0,\ P(-2) = -5,\ P(2) = 15$.
2. $\deg(P) \leq 2$ et $P^2 = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$.

Exercice 4. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants où n désigne un entier strictement positif et P un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a_n \neq 0$.

1. $(X^4 + 1)^3$
2. $(X + 1)^n - (X - 1)^n$
3. $P^2 - P + 1$
4. $Q = P(X + 1) - P$
5. $\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Exprimer de deux façons différentes le coefficient de X^n dans le polynôme : $P = (1 + X)^n (1 + X)^n$.
2. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 6. Montrer que la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$ est de la forme

$$x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}}$$

où P_n esst un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient dominant.

Racines d'un polynôme

Exercice 7. Trouver toutes les racines de $P = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les polynômes $A = (X + 1)^n - (X - 1)^n$ et $B = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k\right)^2$.

1. Calculer le degré de ces deux polynômes.
2. Déterminer les racines de ces deux polynômes.

Exercice 9. Soit n un entier non nul. Montrer que a donné est racine du polynôme et déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine

1. $a = 2$ et $P = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$

2. $a = 1$ et $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$

Exercice 10. Déterminer le nombre a de manière à ce que le polynôme $P = X^5 - aX^2 - aX + 1$ ait -1 comme racine au moins double.

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et les polynômes

$$P = 1 + X + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{n!} \text{ et } Q = \frac{(X+n)(X+n-1)(X+n-2)\dots(X+1)}{n!}.$$

1. Calculer les degrés de P et de Q ainsi que $P(0)$ et $Q(0)$.
2. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $Q(i) = \binom{n+i}{i}$.
3. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $P(i) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{i+k-1}{k}$.
4. En déduire que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a : $Q(i) = P(i)$
5. En déduire que $P = Q$.

Factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ et conséquences

Exercice 12. À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $B = X^2 + X + 1$ divise-t-il le polynôme $A = X^4 + aX^2 + bX + c$?

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Factoriser dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ lorsque cela a un sens les polynômes suivants :

1. $P = X^3 + 1$
2. $P = (X + i)^n - (X - i)^n$
3. $P = X^6 - 1$
4. $P = X^8 + X^4 + 1$
5. $P = X^4 - 2X^2 - 8$
6. $P = X^n - 1$
7. $P = X^4 + 4$
8. $P = X^5 + 32$
9. $P = (2X - 1)^n - (-2X + 3)^n$
10. $P = X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ sachant que $i + 1$ est racine dans $\mathbb{C}$

Exercice 14. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et le polynôme $P = X^4 + aX^2 + bX + 1$.

1. Trouver a et b de telle sorte que $1 - i$ soit racine de P.
2. Dans ce cas, trouver toutes les autres racines complexes de P.
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Soient trois scalaires $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.
On suppose que u, v, w sont les trois racines complexes de P. Montrer que

$$u + v + w = -a \qquad uv + vw + uw = b \qquad \text{et} \qquad uvw = -c.$$

Exercice 16. Soit $n \geq 2$, on pose $P = (X + 1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.
2. On note Q le polynôme de $\mathbb{C}$ tel que : $P = XQ$. À l'aide des racines de Q, déterminer la valeur de :

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 17. Soit a un réel, n un entier naturel non nul et

$$Z = \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{4ki\pi}{n}} - 2\cos(a)e^{\frac{2ki\pi}{n}} + 1\right).$$

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$: $P(X) = X^2 - 2\cos(a)X + 1$.
2. En déduire une factorisation de Z.
3. Simplifier Z.

Résolutions d'équations avec des polynômes

Exercice 18. Expression de sommes.

1. Trouver un polynôme P de degré 3 tel que : $P - P(X+1) = X^3$.

   En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^{n} k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 4 tel que : $P(X+1) - P = X(X-1)(X-2)$

   En déduire pour tout $n \geq 1$ une expression simple de $S = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$.

Exercice 19. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P) = (3X+1)P - X(X-1)P'.$$

1. Vérifier que φ définit bien une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$?
   (b) Pour ces valeurs de n, déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\varphi(P) = X^2$.

Exercice 20. On cherche ici à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P$. Quel est son degré ?
2. Déterminer P à l'aide d'une identification des coefficients.
3. Retrouver l'expression de P en déterminant ses racines.

II Type DS

Exercice 21. Polynômes de Tchebychev de première espèce :
On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \quad P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n. \end{cases}$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4. Déterminer également les racines de ces trois polynômes.
2. Déterminer pour tout $n \geq 0$ le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P_n(1)$.
4. Soit $n \geq 0$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos t) = \cos(nt).$$
   (b) Réciproquement, montrer que si Q_n est un polynôme tel que
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q_n(\cos t) = \cos(nt)$$
   alors $P_n = Q_n$.
5. Etudier la parité de P_n. On pourra s'intéresser au polynôme $Q = P_n(-X) - (-1)^n P_n$.
6. Soit $n \geq 0$.
   (a) Déterminer les racines de P_n sur $[-1, 1]$.
   (b) En déduire toutes les racines de P_n.

Exercice 22. On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} P_0 = 1,\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} + \left(1 - \dfrac{X^2}{4}\right) P_n. \end{cases}$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré inférieur ou égal à n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le coefficient d'indice n de P_n.
   (a) Donner les valeurs de $a_0,\ a_1,\ a_2$ et a_3.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} - \dfrac{a_n}{4}$.
   En déduire une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis le degré du polynôme P_n.

Exercice 23. On considère l'équation suivante , d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + z + 1 = 0 \qquad (E)$$

1. On note $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la fonciton définie par $f(t) = t^3 + t + 1$. A l'aide de l'étude de f, justifier que l'équation (E) possède une unique solution réelle, que l'on notera r. Montrer que $r \in]-1, \frac{-1}{2}[$.
2. On note z_1 et z_2 les deux autres solutions complexes de (E) qu'on ne cherche pas à calculer. On sait alors que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ se factorise de la manière suivante :
$$P(X) = (X - r)(X - z_1)(X - z_2).$$
   En déduire que $z_1 + z_2 = -r$ et $z_1 z_2 = \frac{-1}{r}$.
3. Justifier l'encadrement : $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$.
   De même montrer que $1 < |z_1 z_2| < 2$.
4. Rappeler l'inégalité triangulaire et donner une minoration de $|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{C}$.
5. En déduire que
$$|z_1 + z_2| > |z_1| - \frac{2}{|z_1|}$$
6. Grâce à un raisonnement par l'absurde montrer que $|z_1| < 2$.
7. Conclure que toutes les solutions de (E) sont de modules strictement inférieures à 2.