Chapitre 0 : Résolution d'équations

Table des matières

I Quantificateurs

Définition 1. Une propriété est un énoncé mathématique dont on peut dire sans ambiguité s'il est vrai ou faux.

Certaines propriétés ne dépendent pas de variables :

— P_1 : "$3 > \pi$", P_1 est fausse.

— P_2 : "La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$. P_2 est vraie.

Mais il est courant qu'elles en dépendent :

— $P_1(x)$: "$3 > x$". Ici, $P_1(2)$ est vraie et $P_1(\pi)$ est fausse.

— $P_2(f)$: "La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$". Ici, $P_2(\exp)$ est vraie, $P_2(x \mapsto x^2)$ est fausse.

Les (in)-équations sont des propriétés mathématiques contenant une (in)-égalité entre deux expressions mathématiques. Résoudre une (in)-équation c'est donné sous la forme la plus simple possible toutes les valeurs pour lesquelles cette propriété est vérifiée. Dans ce chapitre, on se restreindra au cas où les équations contiennent une seule inconnue réelle. On considérera dans d'autres chapitres le cas où les variables sont plusieurs réelles (systèmes linéaires) ou mêmes des fonctions (équations différentielles).

On utilisera dans la suite du cours les quantificateurs suivants :

Définition 2. Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant d'une variable $x \in E$.

- $\forall$ se lit 'quelque soit' ou 'pour tout'. Si $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$, on écrit : $\forall x \in E,\ P(x)$
- $\exists$ se lit 'il existe'. Si $P(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$, on écrit : $\exists x \in E,\ P(x)$

II Equations polynomiales

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(E_1) \quad x^2+3x+2=0 \qquad (E_3) \quad x^2+3x+2 \geq 0 \qquad (E_5) \quad x^2+2x+1 \leq 0$$

$$(E_2) \quad x^2+2x+1=0 \qquad (E_4) \quad x^2+2x+1 \geq 0 \qquad (E_6) \quad x^2+2x+2 < 0$$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(P_1): \quad x^3+3x^2+2x=0, \quad (P_2) \quad x^3-3x+2=0, \quad (P_3) \quad x^4+2x+1 \geq 0$$

Points à retenir

— La formule du discriminant et des racines.

— La factorisation quand on obtient une racine.

— L'écriture des solutions sous forme d'intervalles ou d'ensembles.

III Equations rationnelles

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(Q_1): \quad \frac{-2}{x+3}=x, \quad (Q_2): \quad \frac{-2}{x+3} \leq x, \quad (Q_3): \quad \frac{x+1}{x-1} < \frac{x-3}{x+2}$$

Points à retenir

— La condition pour multiplier une inéquation. (signe)

— Les règles de calculs sur les fractions.

— La mise au même dénominateur.

IV Equations avec des radicaux

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(R_1): \quad \sqrt{x}=x \qquad (R_4): \quad \sqrt{x} < 2x+1 \qquad (R_7): \quad \sqrt{x^2+x} < \sqrt{x-1}$$

$$(R_2): \quad \sqrt{x+2}=x \qquad (R_5): \quad \sqrt{x-2} \geq x \qquad (R_8): \quad \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} \leq x$$

$$(R_3): \quad \sqrt{x+1}=-x+1 \qquad (R_6): \quad \sqrt{x^2-1} \geq x \qquad (R_9): \quad \frac{1}{\sqrt{x+1}} > x$$

Points à retenir

— Les implications et les équivalences entre deux propositions.

— Les disjonctions de cas.

— La condition pour mettre au carré. (signe)

— Les règles de calculs sur les racines.

— Les identités remarquables.

V Valeurs absolues

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(V_1): \quad |x| = 1, \quad (V_2): \quad |x+1| = -1, \quad (V_3): \quad |x+1| = \sqrt{x}.$$

$$(V_4): \quad |x-1| \leq 1-2x, \quad (V_5): \quad |x+1| \leq |1-2x|, \quad (V_6): \quad ||x|-5| \geqslant ||3x|-3|.$$

Points à retenir

— La définition de la valeur absolue, son graphe.

— Les disjonctions de cas.

VI Changement de variables

Exercice 6. Résoudre

$(CV_1): \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$ $\qquad (CV_3): \quad x^4+3x^2+2 \geq 0$ $\qquad (CV_5): \quad \frac{1}{\ln(x)-1} \leq \ln(x)+1$

$(CV_2): \quad x^4+3x^2+2 = 0$ $\qquad (CV_4): \quad \frac{1}{e^x-1} \leq e^x$ $\qquad (CV_6): \quad (\ln(x))^2+2\ln(x)+1 = 0$

Points à retenir

— Savoir trouver un changement de variable.

— Passer des solutions de l'équation originale à celle où l'on a changé la variable.

VII Paramètres

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$(P_1): \quad \lambda x^2+2x+1 = 0$ $\qquad (P_3): \quad x-1 = 2\lambda x+1$ $\qquad (P_5): \quad |x-\lambda| = \frac{1}{2}x+1$

$(P_2): \quad \frac{1}{x+\lambda} \geq x-\lambda$ $\qquad (P_4): \quad x-1 < 2\lambda x+1$ $\qquad (P_6): \quad \exp(2x)+\lambda\exp(x)+1 = 0$

Points à retenir

— Résoudre une équation à paramètre c'est résoudre beaucoup d'équations à la fois. On donne pour chaque valeur du paramètre l'ensemble des solutions.

— Ne pas confondre le paramètre avec l'inconnue !

VIII Par étude de fonctions

Exercice 8. Résoudre les inéquations suivantes à l'aide d'une étude de fonction

$(I_1): \quad \ln(x+1) \leq x$ $\qquad (I_3): \quad \sin(x) \leq x$

$(I_2): \quad e^x-1 \geq x$ $\qquad (I_4): \quad \sin(x) \geq \frac{\pi x}{2}$

Points à retenir

— Montrer une inégalité sur un ensemble I revient à résoudre une inéquation et montrer que l'ensemble des solutions est tout l'ensemble I.

— Etudier la différence des membres d'une inégalité afin de comparer à 0

IX Un peu de tout

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x

$$(T_1) : \quad (x^2-1)e^x - (x^2-1)e^{(x^2)} \geq 0$$

$$(T_2) : \quad \frac{2x-1}{x^2-x+1} - 1 \leq 0$$

$$(T_3) : \quad xe^x - x \leq 0$$

$$(T_4) : \quad \frac{e^x(e^{2x}+1) - e^x(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} \geq 0$$

Exercice 10. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq x+1$.

— Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$e^{2x} - x \geq 0.$$

— Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$e^x - 2x \geq 0.$$