Correction - Interro 5

Exercice 1. Donner en fonction de $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k$$

Correction 1.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Correction 2. On pose $P(n) =: " \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} "$.

<u>Initialisation</u>

Pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{0(0+1)}{2} = 0.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) && \text{(Chasles)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{(HR)} \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= (n+1)\,\frac{n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u>

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$