Correction TD 15 : Probabilité

Entrainement

Notions de base

Exercice 1. Soient trois personnes choisies une à une et sans remise dans une population. On note R_i l'événement « la i-ième personne a un rhésus + ». Ecrire à l'aide des R_i les événements suivants

- A : « au moins une personne a un rhésus + » ;
- B : « au moins deux personnes ont un rhésus + » ;
- C : « une personne exactement a un rhésus + » ;
- D : « au moins une des deux premières personnes a un rhésus + ».

Correction 1. Il s'agit ici uniquement de formuler les événements à l'aide de R_1, R_1, R_3.

- $A = R_1 \cup R_2 \cup R_3$.
- $B = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_3) \cup (R_2 \cap R_3)$
- $C = (R_1 \cap \overline{R}_2 \cap \overline{R}_3) \cup (R_2 \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_3) \cup (R_3 \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_1)$.
- $D = R_1 \cup R_2$.

Exercice 2. On étudie 4 sortes de maïs numérotés de 1 à 4 et on note M_i l'événement : « le maïs numéro i est transgénique ». Ecrire à l'aide de ces événements les événements suivants :

- A : « une seule sorte de maïs est transgénique » ;
- B : « au moins une des trois premières sortes de maïs n'est pas transgénique ».

Correction 2. Même chose que dans l'exercice précédent.

- $A = (M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4) \cup (M_2 \cap \overline{M}_1 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4) \cup (M_3 \cap \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_4) \cup (M_4 \cap \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3)$.
- $B = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 \cup \overline{M}_3$.

Exercice 3. Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie et 30% contre les 2 maladies. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard ne soit vacciné contre aucune de ces deux maladies ?

Correction 3.

- Notations : on note J l'événement « être vacciné contre la fièvre jaune », D l'événement « être vacciné contre la diphtérie » et T l'événement « être vacciné contre aucune de ces deux maladies ».
- Traduction des données de l'énoncé : $P(J) = \frac{9}{20}$, $P(D) = \frac{3}{5}$ et $P(J \cap D) = \frac{3}{10}$.
- Calcul de $P(T)$:
  On remarque que $T = \overline{J} \cap \overline{D}$. Or on a : $\overline{T} = J \cup D$ et ainsi on obtient que : $P(T) = 1 - P(\overline{T})$. On calcule donc $P(\overline{T})$: les événements J et D ne sont pas incompatibles, on utilise donc la formule du crible et on obtient que : $P(\overline{T}) = P(J) + P(D) - P(J \cap D) = \frac{3}{4}$. Ainsi on a : $\boxed{P(T) = \frac{1}{4}}$.

Exercice 4. Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts notés A et B. On estime que 2% des pièces présentent les deux défauts, 5% ont le défaut A mais pas le défaut B et 10% ont le défaut B. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce choisie au hasard présente le défaut A ? Aucun défaut ? Un seul défaut ?

Correction 4.

- Notations : on note A l'événement « présenter le défaut A »et B l'événement « présenter le défaut B ». On note aussi T l'événement « ne présenter aucun défaut »et S l'événement « présenter un seul défaut ».
- Traduction des données : $P(A \cap B) = \frac{1}{50}$, $P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$ et $P(B) = \frac{1}{10}$.
- Calcul de $P(A)$:
Comme $(B, \overline{B})$ est un sce, on a d'après la formule des probabilités totales que : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{50} + \frac{1}{20} = \frac{7}{100}$.
- Calcul de $P(T)$:
On remarque que $T = \overline{A} \cap \overline{B}$. Ainsi on a que $\overline{T} = A \cup B$ et donc $P(T) = 1 - P(\overline{T})$. Calculons $P(\overline{T})$. Comme les événements A et B ne sont pas incompatibles, on utilise la formule du crible et on obtient que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{20}$. Ainsi on a : $P(T) = \frac{17}{20}$.
- Calcul de $P(S)$:
On remarque que : $S = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Or les deux événements $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles deux à deux et ainsi on a : $P(S) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$. On connaît $P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$. Il reste à calculer $P(\overline{A} \cap B)$. Pour cela on peut utiliser par exemple $P(B)$. En effet $(A, \overline{A})$ est un sce ainsi d'après la formule des probabilités totales, on obtient que : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{25}$.
Finalement on obtient alors que $\boxed{P(S) = \frac{13}{100}}$.

Équiprobabilités

Exercice 5. On choisit 5 cartes au hasard et simultanément dans un jeu de 32 cartes. Donner les probabilités d'avoir

1. 5 cartes de la même couleur ;
2. (2 as et 3 rois) ou (3 as et 2 rois) ;
3. (au moins un as) et (deux rois exactement).

Correction 5.

- L'univers est l'ensemble des combinaisons de 5 éléments parmi 32 et ainsi $\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{5}$.
- On munit l'univers de la probabilité uniforme car on tire les cartes au hasard.
- Notations : on note A l'événement « tirer 5 cartes de la même couleur », B l'événement « tirer (2as et 3 rois) ou (3 as et 2 rois) » et C l'événement « tirer au moins un as et deux rois exactement ».

1. Comme on a muni l'univers de la probabilité uniforme, on obtient que : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{5}}{\binom{32}{5}}$ car il faut d'abord choisir la couleur puis prendre les 5 cartes dans la couleur choisie.
2. Si on note B_1 l'événement « tirer 2 as et 3 rois » et B_2 l'événement « tirer 3 as et 2 rois », on a $B = B_1 \cup B_2$ et les événements B_1 et B_2 sont incompatibles donc $P(B) = P(B_1) + P(B_2)$. On obtient ainsi : $P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{32}{5}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{32}{5}} = \frac{2\binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{32}{5}}$.
3. On a $P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)}$ et $\text{Card}(C) = \binom{4}{2}\left[\binom{4}{1}\binom{26}{2} + \binom{4}{2}\binom{26}{1} + \binom{4}{3}\right]$. Dans la parenthèse, on a calculé, une fois les 2 rois choisis, le cardinal pour avoir exactement 1 as ou exactement 2 as ou exactement 3 as. Ainsi on obtient que $P(C) = \frac{\binom{4}{2}\left[\binom{4}{1}\binom{26}{2} + \binom{4}{2}\binom{26}{1} + \binom{4}{3}\right]}{\binom{32}{5}}$.

Exercice 6. Quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes dans la classe soient nées le même jour ? Pour simplifier, on ne tiendra pas compte des années bissextiles.

Correction 6.

- Soit n le nombre d'élèves dans la classe. Le choix des différentes dates d'anniversaires se fait avec ordre et avec répétition car deux personnes peuvent être nées le même jour. L'univers est donc l'ensemble des n-listes de l'ensemble $[\![1,365]\!]$ et ainsi $\text{Card}(\Omega) = 365^n$ (on a 365 choix pour la date d'anniversaire de la première personne, 365 choix pour la date d'anniversaire de la deuxième personne...).
- On munit l'univers de la probabilité uniforme car il y a équiprobabilité sur le jour de naissance des personnes.
- Notation : on note A l'événement « Au moins deux personnes sont nées le même jour ».

Il est plus simple ici de passer à l'événement contraire. On a $\overline{A}$: « Toutes les personnes sont nées des jours différents ».

Comme on a muni l'univers de la probabilité uniforme, on obtient que : $P(\overline{A}) = \dfrac{\text{Card}(\overline{A})}{\text{Card}(\Omega)}$. Or pour calculer $\text{Card}\,(\overline{A})$ il faut choisir les dates d'anniversaire dans $[\![1,365]\!]$ mais sans répétition. Ainsi, il y a 365 choix possibles pour la première personne, 364 choix possibles pour la deuxième personne,.... et $365-n+1$ choix possibles pour la n-ième personne. On obtient donc que : $P(\overline{A}) = \dfrac{365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1)}{365^n}$.

On obtient : $\boxed{P(A) = 1 - \dfrac{365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1)}{365^n}.}$

Pour $n = 47$, on trouve $P(A) \simeq 0.95$. Il y a donc une très forte probabilité que 2 élèves aient la même date d'anniversaire dans la classe !

Exercice 7. On lance trois dés distincts et équilibrés. On note A l'événement « les numéros sont égaux », B : « au moins un des numéros est égal à 3 » et C : « la somme des numéros est égale à 4 ». Calculer la probabilité pour qu'au moins un des trois événements soit réalisé.

Correction 7. Si on note T l'événement « au moins un des trois événements A, B et C est réalisés » alors on a : $T = A \cup B \cup C$. Ces trois événements ne sont pas incompatibles deux à deux et ainsi on utilise la formule du crible. On obtient donc : $P(T) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$. Calculons chacun de ces événements.

- L'univers Ω est l'ensemble des 3-uplet d'éléments pris parmi 6 et ainsi $\text{Card}(\Omega) = 6^3$. En effet, il y a ordre car les dés sont distincts (par exemple de couleurs différentes) et il y a répétition.
- Comme les 3 dés sont équilibrés, on munit Ω de la probabilité uniforme.
- Calcul de $P(T)$:
  - ⋆ On a : $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{6}{6^3} = \dfrac{1}{36}$.
  - ⋆ On a : $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{\text{Card}\,\overline{B}}{\text{Card}(\Omega)} = 1 - \dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{6^3 - 5^3}{6^3}$.
  - ⋆ On a : $P(C) = \dfrac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3}{6^3} = \dfrac{1}{72}$ car il n'y a que 3 possiblités pour obtenir une somme de 4.
  - ⋆ On a : $P(A \cap B) = \dfrac{\text{Card}\,A \cap B}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{1}{6^3}$ car la seule solution est d'avoir les 3 numéros qui valent 3.
  - ⋆ On a : $P(A \cap C) = \dfrac{\text{Card}\,A \cap C}{\text{Card}(\Omega)} = 0$ car $A \cap C = \emptyset$.
  - ⋆ On a : $P(B \cap C) = \dfrac{\text{Card}\,B \cap C}{\text{Card}(\Omega)} = 0$ car $B \cap C = \emptyset$.
  - ⋆ On a : $P(A \cap B \cap C) = \dfrac{\text{Card}\,A \cap B \cap C}{\text{Card}(\Omega)} = 0$ car $A \cap B \cap C = \emptyset$.

On obtient ainsi que $P(T) = \dfrac{99}{216}$.

Exercice 8. En lançant 6 dés différents, donner les probabilités d'avoir :

1. les 6 résultats possibles ;

2. au moins deux résultats distincts.

Correction 8.

- L'univers Ω est l'ensemble des 6-uplet d'éléments pris parmi 6 et ainsi $\mathrm{Card}(\Omega) = 6^6$. En effet, il y a ordre car les dés sont distincts (par exemple de couleurs différentes) et il y a répétition.
- Comme les 6 dés sont équilibrés, on munit Ω de la probabilité uniforme.
- Notations des événements : on note A l'événement « obtenir les 6 résultats possibles » et B l'événement « obtenir au moins deux résultats distincts ».
- Calcul de $P(A)$: pour obtenir les 6 résultats possibles, on doit obtenir une permutation de $[\![1, 6]\!]$. Comme il y a 6! telles permutations, on en déduit que $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{6!}{6^6}$.
- Calcul de $P(B)$: il est plus simple ici de passer à l'événement contraire.
  On a $P(B) = 1 - P(\overline{B})$ avec $\overline{B}$: « avoir tous les résultats identiques ».
  Or il n'y a que 6 possibilités pour avoir les résultats tous identiques.
  Ainsi, on obtient que : $P(B) = 1 - \dfrac{\mathrm{Card}(\overline{B})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1 - \dfrac{6}{6^6} = \dfrac{6^5 - 1}{6^5}$.

Exercice 9. On répartit 4 boules numérotées de 1 à 4 dans 4 tiroirs également numérotés de 1 à 4, chaque tiroir pouvant recevoir toutes les boules. On pourra considérer qu'un résultat est une 4-liste (n_1, n_2, n_3, n_4) où n_i est le numéro du tiroir contenant la boule de numéro i.
Quelle est la probabilité pour que les 4 tiroirs soient occupés ? Pour qu'un seul tiroir soit occupé ? Pour que les boules 1 et 2 se trouvent dans les 2 premiers tiroirs ?

Correction 9.

- L'univers est l'ensemble des 4-listes pris parmi 4 éléments. Ainsi $\mathrm{Card}(\Omega) = 4^4$.
- Le choix du tiroir se fait au hasard ainsi on munit Ω de la probabilité uniforme.
- On note A l'événement « les 4 tiroirs sont occupés ». On a : $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{4!}{4^4}$ car on a 4 choix pour la boule 1, puis 3 choix pour la boule 2, puis 2 choix pour la boule 3 et enfin 1 seul choix pour la boule 4.
- On note B l'événement « un seul tiroir est occupé ». On a : $P(B) = \dfrac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{4}{4^4} = \dfrac{1}{4^3}$ car il faut faire le choix du tiroir et il y a ainsi 4 choix possibles et ensuite toutes les boules vont dans ce même tiroir.
- On note C l'événement « les boules 1 et 2 se trouvent dans les deux premiers tiroirs ». On a : $P(C) = \dfrac{\mathrm{Card}(C)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{2^2 \times 4^2}{4^4} = \dfrac{1}{4}$ car on a deux choix possibles pour les 2 premières boules puis 4 choix possibles pour les deux dernières boules.

Probabilités conditionnelles

Exercice 10. Une urne contient b boules blanches et n boules noires (b et n sont dans $\mathbb{N}^\star$).

1. On fait deux tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules de couleurs différentes ?
2. Même question dans le cas où les tirages s'effectuent de la façon suivante : si la première boule tirée est blanche, on la remet avec en plus deux boules blanches, sinon on ne la remet pas.

Correction 10.

1. - Notations : on note B_i l'événement « tirer une boule blanche au tirage i », N_i l'événement « tirer une boule noire au tirage i »et on note S l'événement « on tire deux boules de couleurs différentes ».
   - Expression de S : $S = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$.
   - Calcul de $P(S)$:

- ⋆ Comme les événements $B_1 \cap N_2$ et $N_1 \cap B_2$ sont incompatibles, on a : $P(S) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2)$.
- ⋆ Calcul de $P(B_1 \cap N_2)$: on a $P(B_1) = \dfrac{b}{b+n}$, car les tirages sont font avec équiprobabilité, donc $P(B_1) \neq 0$. Ainsi, d'après la formule des probabilités composées : $P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2)$. De plus, on a : $P_{B_1}(N_2) = \dfrac{n}{n+b-1}$ car on a enlevé une boule blanche de l'urne. Ainsi, on obtient que : $P(B_1 \cap N_2) = \dfrac{b}{b+n} \times \dfrac{n}{n+b-1}$.
- ⋆ Calcul de $P(N_1 \cap B_2)$: de même, on a $P(N_1) = \dfrac{n}{b+n} \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées : $P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P_{N_1}(B_2)$. De plus, on a : $P_{N_1}(B_2) = \dfrac{b}{n+b-1}$. Ainsi, on obtient que : $P(N_1 \cap B_2) = \dfrac{n}{b+n} \times \dfrac{b}{n+b-1}$.
- ⋆ Conclusion : $\boxed{P(S) = \dfrac{2nb}{(b+n)(b+n-1)}}$.

2.
   - Expression de S : de même qu'à la question 1, $S = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$.
   - Calcul de $P(S)$:
     - ⋆ Comme les événements $B_1 \cap N_2$ et $N_1 \cap B_2$ sont incompatibles, on a : $P(S) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2)$.
     - ⋆ Calcul de $P(B_1 \cap N_2)$: on a toujours $P(B_1) = \dfrac{b}{b+n} \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées : $P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2)$. De plus, on a cette fois : $P_{B_1}(N_2) = \dfrac{n}{n+b+2}$ car on a remis la boule blanche ainsi que 2 autres boules blanches. Ainsi, on obtient que : $P(B_1 \cap N_2) = \dfrac{b}{b+n} \times \dfrac{n}{n+b+2}$.
     - ⋆ Calcul de $P(N_1 \cap B_2)$: on a toujours $P(N_1) = \dfrac{n}{b+n} \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées : $P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P_{N_1}(B_2)$. De plus, on a : $P_{N_1}(B_2) = \dfrac{b}{n+b-1}$ car on ne remet pas de boule dans l'urne. Ainsi, on obtient que : $P(N_1 \cap B_2) = \dfrac{n}{b+n} \times \dfrac{b}{n+b-1}$.
     - ⋆ Conclusion : $\boxed{P(S) = \dfrac{2nb}{b+n}\left[\dfrac{1}{n+b+2} + \dfrac{1}{n+b-1}\right]}$.

Exercice 11. Mr G. dispose de n clefs sur son trousseau et une seule ouvre la porte de la salle 78.

1. N'ayant pas beaucoup dormi la nuit précédente, Mr G. essaye les clés jusqu'à trouver la bonne sans penser à mettre de côté les mauvaises clés. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au k-ième essai ?
2. Même question dans le cas où Mr G. a bien dormi et pense à mettre de côté les mauvaises clés.

Correction 11.

1. On note S l'évènement « ouvrir la porte au k-ième essai » et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: C_j l'évènement « la j-ième clé ouvre la porte ». On a donc
$$S = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-1}} \cap C_k.$$
Or ici Mr G. ne met pas de côté les mauvaises clés : les événements sont donc mutuellement indépendants. On a donc :
$$P(S) = P(\overline{C_1}) \times P(\overline{C_2}) \times \ldots \times P(\overline{C_{k-1}}) \times P(C_k).$$
De plus, comme Mr G. choisit les clés au hasard, la probabilité d'avoir une mauvaise clé vaut $\dfrac{n-1}{n}$ et la probabilité d'avoir la bonne clé vaut $\dfrac{1}{n}$. On a donc : $\boxed{P(S) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{n}}$.

2. Attention, cette fois Mr G. met de côté les mauvaises clés : les événements ne sont pas mutuellement indépendants, il faut utiliser la formule des probabilités composées. Il faut de plus supposer que l'on a $k \leq n$, car au bout de n essais, Mr G. est sûre d'avoir trouvé la bonne clé.
On a $P(\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-1}}) \neq 0$, car il est possible de choisir $k-1$ fois de suite une mauvaise clé si $k \leq n$. On peut alors utiliser la formule des probabilités composées et on obtient que :
$$P(S) = P(\overline{C_1}) P_{\overline{C_1}}(\overline{C_2}) P_{\overline{C_1} \cap \overline{C_2}}(\overline{C_3}) \times \cdots \times P_{\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-2}}}(\overline{C_{k-1}}) P_{\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-1}}}(C_k).$$
On a de plus :
   - ⋆ $P(\overline{C_1}) = \dfrac{n-1}{n}$ car on choisit la clé au hasard donc il y a équiprobabilité, et il y a $n-1$ clés qui n'ouvrent pas la porte pour n clés en tout.
   - ⋆ $P_{\overline{C_1}}(\overline{C_2}) = \dfrac{n-2}{n-1}$ car on a enlevé une mauvaise clé du trousseau, donc il reste $n-2$ qui ne marchent pas pour $n-1$ clés au total.
   - ⋆ On continue ainsi de suite, jusqu'à $P_{\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-2}}}(\overline{C_{k-1}}) = \dfrac{n-1-(k-2)}{n-(k-2)} = \dfrac{n-k+1}{n-k+2}$ car on a enlevé $k-2$ mauvaises clés.
   - ⋆ Enfin, on a : $P_{\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-1}}}(C_k) = \dfrac{1}{n-(k-1)} = \dfrac{1}{n-k+1}$ car on a enlevé $k-1$ mauvaises clés, et il n'y a qu'une seule clé qui ouvre la porte.

   Calculons alors $P(S)$. On a :
$$P(S) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$
Ainsi $\boxed{\text{la probabilité de trouver la bonne clé au } k\text{-ième essai est } \frac{1}{n}.}$

Exercice 12. On considère n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. L'urne U_1 contient b boules blanches et n noires, les autres contiennent initialement b boules blanches et b boules noires. On tire une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis une boule de U_2 que l'on met dans U_3 et ainsi de suite. On note p_i la probabilité d'obtenir une boule blanche au i-ième tirage. Calculer p_1 puis p_{i+1} en fonction de p_i pour $i \geq 2$. Déterminer p_i en fonction de i puis $\lim_{i \to +\infty} p_i$.

Correction 12.

- Notations : pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note B_i l'événement « tirer une boule blanche au tirage i »et N_i l'événement « tirer une boule noire au tirage i ». On a ainsi pour tout $i \in \mathbb{N}$: $p_i = P(B_i)$.
- Calcul de $p_1 = P(B_1)$. Comme on tire au hasard une boule dans l'urne 1, on peut utiliser la probabilité uniforme et on obtient que : $P(B_1) = \dfrac{b}{b+n}$ d'après l'énoncé.
- On fixe $i \in \mathbb{N}$ et on cherche une relation de récurrence entre p_i et p_{i+1}.(B_i, N_i) est un sce donc d'après la formule des probabilités totales, on obtient que : $P(B_{i+1}) = P(B_{i+1} \cap B_i) + P(B_{i+1} \cap N_i)$. Comme on a : $P(B_i) \neq 0$ et $P(N_i) = 1 - P(B_i) \neq 0$ d'après le protocole. Ainsi les probabilités conditionnelles P_{B_i} et P_{N_i} existent bien et on peut utiliser la formule des probabilités totales. On obtient que : $P(B_{i+1}) = P_{B_i}(B_{i+1})P(B_i) + P_{N_i}(B_{i+1})P(N_i)$. Or on a : $P(B_i) = p_i$, $P(N_i) = 1 - p_i$. De plus d'après le protocole, on obtient que : $P_{B_i}(B_{i+1}) = \dfrac{b+1}{2b+1}$ et $P_{N_i}(B_{i+1}) = \dfrac{b}{2b+1}$. Ainsi, on obtient la relation : $p_{i+1} = \dfrac{1}{2b+1} p_i + \dfrac{b}{2b+1}$.
- On reconnaît alors une suite arithmético-géométrique. Je ne donne que le résultat, je vous laisse faire les calculs. On obtient que pour tout $i \in \mathbb{N}$: $p_i = \left(\dfrac{b}{b+n} - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2b+1}\right)^i + \dfrac{1}{2}$. Comme $-1 < \dfrac{1}{2b+1} < 1$, on a : $\lim_{i \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2b+1}\right)^i = 0$. Puis par propriété sur les produit et somme de limites, on obtient que : $\lim_{i \to +\infty} p_i = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 13. On dispose de $2n$ jetons numérotés de 1 à n dans un sac, chaque numéro apparaissant deux fois. A tire un jeton, le remet puis B tire un autre jeton. Calculer la probabilité que A tire un numéro qui soit au moins le double du numéro de B.

Correction 13. On note S l'évènement « A tire un numéro qui soit au moins le double du numéro de B » et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose B_i l'évènement « B tire le numéro i ».
Pour que A tire un numéro qui soit au moins le double du numéro de B, il faut déjà connaître le numéro tiré par B. Mais $(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n)$ est un sce donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(S \cap B_i).$$

De plus on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $P(B_i) = \dfrac{2}{2n} = \dfrac{1}{n}$. Ainsi pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $P(B_i) \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle P_{B_i} existe bien. On peut donc appliquer la formule des probabilités composées et on obtient que

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{B_i}(S).$$

Il reste alors à calculer $P_{B_i}(S)$: comme on sait que B a tiré le numéro i, il faut que A tire un numéro compris, si possible, entre $2i$ et n. Pour que cela soit possible, il faut déjà que : $2i \leq n \Leftrightarrow i \leq \dfrac{n}{2}$. On voit donc ici que l'on doit étudier deux cas selon que n pair ou impair.

- Si n pair, on obtient par Chasles que

$$P(S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} P_{B_i}(S) + 0$$

car si $i > \dfrac{n}{2}$ alors $P_{B_i}(S) = 0$. Puis pour tout $i \in [\![1, \frac{n}{2}]\!]$: $P_{B_i}(S) = \dfrac{2(n-2i+1)}{2n} = \dfrac{n-2i+1}{n}$ car il y a $n - 2i + 1$ numéros possibles et pour chacun de ces numéros, il y a deux boules. Ainsi on obtient que :

$$P(S) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(n-2i+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{n+2}{4n}.$$

- Si n impair, on obtient par Chasles :

$$P(S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} P_{B_i}(S) + 0$$

car si $i > \dfrac{n-1}{2}$ alors $P_{B_i}(S) = 0$. Puis pour tout $i \in [\![1, \dfrac{n-1}{2}]\!]$: $P_{B_i}(S) = \dfrac{2(n-2i+1)}{2n} = \dfrac{n-2i+1}{n}$ car il y a $n - 2i + 1$ numéros possibles et pour chacun de ces numéros, il y a deux boules. Ainsi on obtient que :

$$\boxed{P(S) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2i+1) = \frac{n-1}{2n} + \frac{n-1}{2n^2} - \frac{(n-1)(n+1)}{4n^2}}.$$

Exercice 14. Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs A et B. Au jour 0, elle va à la fleur A. À chaque nouvelle journée, il y a une probabilité $p \in]0, 1[$ qu'elle aille sur la même fleur que la veille. Pour tout entier n, on note A_n l'événement « l'abeille est sur la fleur A le jour n »et B_n l'événement « l'abeille est sur la fleur B le jour n ». On pose de plus $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$.

1. Pour tout entier n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. En remarquant que $a_n + b_n = 1$, déterminer les expressions explicites de a_n et b_n.

3. Vers quoi tendent les deux suites ? Interpréter.

Correction 14.

1. On utilise pour cela le sce (A_n, B_n) et on obtient d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) \qquad \text{et} \qquad P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap A_n) + P(B_{n+1} \cap B_n).$$

D'après le protocole, $P(A_n) \neq 0$ et $P(B_n) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles P_{A_n} et P_{B_n} existent bien. On peut donc alors appliquer la formule des probabilités composées et on obtient que

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) = pa_n + (1-p)b_n \\ b_{n+1} & = & P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) = (1-p)a_n + pb_n. \end{array}$$

2. Comme (A_n, B_n) est un sce, on a bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n = 1$.
Ainsi on obtient que :

$$a_{n+1} = (2p-1)a_n + 1 - p \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = (2p-1)b_n + 1 - p.$$

Dans les deux cas, on reconnaît une suite arithmético-géométrique et les calculs sur ce type de suite donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{a_n = \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{b_n = -\frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}}$$

en utilisant le fait que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

3. Comme $p \in]0,1[$, alors $2p - 1 \in]0,1[$ et ainsi on a : $-1 < 2p - 1 < 1$. Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} (2p-1)^n = 0$. Donc par somme de limite, on obtient que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{2} = \lim_{n \to +\infty} b_n}.$$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère n sacs $S_1, \ldots, S_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le sac S_k contient k jetons blancs et $n + 1 - k$ jetons noirs. On choisit un sac avec une probabilité de choisir le sac S_k égale à αk. Après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.

1. Trouver la valeur de α.
2. Quelle est la probabilité de tirer un jeton blanc.
3. Le jeton pioché est blanc. Quelle est la probabilité que ce jeton proviennent du sac S_k pour $k \in [\![1, n]\!]$ fixé ?

Correction 15.

1. On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ S_k l'évènement « choisir le sac S_k ». Comme $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n)$ est un sce, on sait que : $\sum\limits_{k=1}^{n} P(S_k) = 1$. Or on sait que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $P(S_k) = \alpha k$. Ainsi le calcul de la somme donne

$$\sum_{k=1}^{n} P(S_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} k = \alpha \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

On obtient donc que : $\alpha \times \dfrac{n(n+1)}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2}{n(n+1)}$.

2. On note B l'évènement « tirer un jeton blanc ». Pour calculer $P(B)$, on doit savoir dans quel sac on se trouve. On utilise ainsi le fait que $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n)$ est un sce et on obtient donc d'après la formule des probabilités totales que

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap S_k) = P(B \cap S_1) + P(B \cap S_2) + \cdots + P(B \cap S_n).$$

On sait que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $P(S_k) = \dfrac{2k}{n(n+1)}$ donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $P(S_k) \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle P_{S_k} existe pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. On peut donc appliquer la formule des probabilités composées et on obtient que

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(S_k)P_{S_k}(B) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k \times P_{S_k}(B).$$

Mais on a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $P_{S_k}(B) = \dfrac{k}{n+1}$. Ainsi on obtient que

$$P(B) = \frac{2}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2}{n(n+1)^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3(n+1)}.$$

3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$ fixé. On cherche à calculer $P_B(S_k)$ qui existe bien car on vient de montrer à la question précédente que $P(B) \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle P_B existe bien. De plus on remarque qu'il y a inversion de chronologie et on utilise donc la formule de Bayes. On obtient alors

$$P_B(S_k) = \frac{P_{S_k}(B)P(S_k)}{P(B)}.$$

Et on sait que $P(S_k) \neq 0$ car $P(S_k) = \dfrac{2k}{n(n+1)}$ donc la probabilité conditionnelle P_{S_k} existe bien. Comme $P_{S_k}(B) = \dfrac{k}{n+1}$, on obtient au final que

$$P_B(S_k) = \frac{6k^2}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 16. La proportion de pièces défectueuses dans un lot est de 0.05. Le contrôle qualité des pièces accepte une pièce bonne avec une probabilité de 0.96 et refuse une pièce mauvaise avec une probabilité de 0.98. On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité :

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?
3. qu'une pièce refusée soit bonne ?

Correction 16.

1.
   - Notations : on note A l'événement « accepter une pièce », B l'événement « la pièce est bonne »et T l'événement « il y a une erreur de contrôle ».
   - Reprise des données de l'exercice :
     - ⋆ $P(\overline{B}) = 0.05 \neq 0$ et ainsi $P_{\overline{B}}$ existe bien.
     - ⋆ $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0.95 \neq 0$ et ainsi P_B existe bien.
     - ⋆ $P_B(A) = 0.96$ car P_B existe bien. De plus, comme P_B est une probabilité, on a donc : $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 0.04$.
     - ⋆ $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 0.98$ car $P_{\overline{B}}$ existe bien. De plus, comme $P_{\overline{B}}$ est une probabilité, on a donc : $P_{\overline{B}}(A) = 1 - P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 0.02$.
   - Calcul de $P(T)$:
     On a : $T = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Or les événements $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles et ainsi on obtient que : $P(T) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$. Puis comme les probabilités conditionnelles P_B et $P_{\overline{B}}$ existent bien, on obtient que : $P(T) = P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B}) + P_B(\overline{A})P(B) = 0.02 \times 0.05 + 0.04 \times 0.95$. Ainsi $P(T) = 0.039$.
2. On remarque qu'il y a ici une inversion de chronologie, on va donc utiliser la formule de Bayes. Ainsi sous réserve que les deux probabilités conditionnelles P_A et $P_{\overline{B}}$ existent bien, on a : $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})}{P(A)}$.

- On sait que $P(\overline{B}) = 0.05 \neq 0$ et ainsi $P_{\overline{B}}$ existe bien.
- Calculons $P(A)$ et vérifions que $P(A) \neq 0$:
  Comme presque toujours avec la formule de Bayes, le dénominateur se calcule en utilisant la formule des probabilités totales. On a en effet ici que $(B, \overline{B})$ est un sce et ainsi d'après la formule des probabilités totales, on obtient que : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$. Mais on a déjà montré que P_B et $P_{\overline{B}}$ existent bien et ainsi on obtient avec la version 2 de la formule des probabilités totales : $P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})$. D'après ce que l'on a déjà calculé, on obtient que : $P(A) = 0.96 \times 0.95 + 0.02 \times 0.05 = 0.913$. Ainsi $P(A) \neq 0$ et P_A existe bien.

Ainsi les deux hypothèses de la formule de Bayes sont bien vérifiées et on obtient donc : $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})}{P(A)} = \dfrac{0.02 \times 0.05}{0.913} = \dfrac{1}{913}$.

3. On remarque qu'il y a ici une inversion de chronologie, on va donc utiliser la formule de Bayes. Ainsi sous réserve que les deux probabilités conditionnelles P_B et $P_{\overline{A}}$ existent bien, on a : $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P_B(\overline{A})P(B)}{P(\overline{A})}$.

- On sait que $P(B) = 0.95 \neq 0$ et ainsi P_B existe bien.
- Calculons $P(\overline{A})$ et vérifions que $P(\overline{A}) \neq 0$:
  Ici il n'y a pas besoin d'utiliser la formule des probabilités totales car on connaît $P(A)$. Ainsi on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.087$. Ainsi $P(\overline{A}) \neq 0$ et $P_{\overline{A}}$ existe bien.

Ainsi les deux hypothèses de la formule de Bayes sont bien vérifiées et on obtient donc : $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P_B(\overline{A})P(B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0.04 \times 0.95}{0.087} = \dfrac{38}{87}$.

Exercice 17. Un individu est choisi au hasard dans une population comportant une proportion $p \in]0, 1[$ de tricheurs aux cartes. On fait choisir une carte d'un jeu de 52 cartes par cet individu et on admet que s'il est tricheur, il retourne un as surement. Quelle est la probabilité que cet individu retourne un as ?

Correction 17.

- Notations : on note T l'événement « être tricheur » et A l'événement « l'individu retourne un as ».
- $(T, \overline{T})$ est un sce, ainsi d'après la formule des probabilités totales, on obtient que : $P(A) = P(A \cap T) + P(A \cap \overline{T})$.
- D'après l'énoncé, on sait que $P(T) = p \in]0, 1[$. Ainsi $P(T) \neq 0$ et $P(\overline{T}) \neq 0$ et donc ainsi les probabilités conditionnelles P_T et $P_{\overline{T}}$ existent bien. On peut donc utiliser la formule des probabilités totales et on obtient que : $P(A) = P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})$.
- D'après l'énoncé, on a : $P(T) = p$ et ainsi $P(\overline{T}) = 1 - p$. De plus toujours d'après l'énoncé, on sait aussi que : $P_T(A) = 1$. De plus les cartes sont bien mélangées et ainsi on peut utiliser la probabilité uniforme et on obtient donc que $P_{\overline{T}}(A) = \dfrac{4}{52}$.
- Au final, on obtient donc que : $\boxed{P(A) = \dfrac{48}{52}p + \dfrac{4}{52} = \dfrac{12}{13}p + \dfrac{1}{13}}$.

Exercice 18. On possède un jeu de 32 cartes et un jeu de 52 cartes. On choisit au hasard l'un de ces jeux et on y tire une carte. On constate que c'est une dame. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du jeu de 32 cartes ?

Correction 18.

- Notations : on note D l'événement « tirer une dame », $J1$ l'événement « tirer une carte du jeu de 32 cartes » et $J2$ l'événement « tirer une carte du jeu de 52 cartes ».
- Calcul de $P_D(J1)$ sous réserve que la probabilité conditionnelle P_D existe bien :
  On remarque une inversion de chronologie, on va donc utiliser la formule de Bayes. Ainsi sous réserve que les probabilités conditionnelles P_{J1} et P_D existent bien, on obtient que : $P_D(J1) = \dfrac{P_{J1}(D)P(J1)}{P(D)}$.

- ⋆ Calcul de $P(J1)$: comme on choisit l'un des deux jeux au hasard, on utilise la probabilité conditionnelle et on obtient que : $P(J1) = \frac{1}{2}$. En particulier P_{J1} existe bien car $P(J1) \neq 0$.
- ⋆ Calcul de $P(D)$:
  Comme le plus souvent avec la formule de Bayes, le dénominateur se calcule en utilisant un sce et la formule des probabilités totales. Ainsi ici, on a $(J1, J2)$ est un sce et ainsi d'après la formule des probabilités totales, on obtient que $P(D) = P(D\cap J1)+P(D\cap J2)$. De plus, on a : $P(J1) = P(J2) = \frac{1}{2}$ car on choisit au hasard le jeu de carte utilisé. Ainsi on obtient en particulier que $P(J1) \neq 0$ et $P(J2) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles P_{J1} et P_{J2} existent bien. On peut donc utiliser la version 2 de la formule des probabilités totales et on obtient que : $P(D) = P_{J1}(D)P(J1) + P_{J2}(D)P(J2)$. Comme les cartes sont bien mélangées et que l'on tire une carte au hasard, on utilise la probabilité uniforme et ainsi on obtient que : $P_{J1}(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $P_{J2}(D) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. On a ainsi : $P(D) = \frac{91}{208}$. En particulier $P(D) \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle P_D existe bien.

On peut donc bien appliquer la formule de Bayes et on obtient que : $P_D(J1) = \frac{13}{91}$.

Exercice 19. Un magasin vend des sabres laser provenant pour 70% d'un fabriquant A et pour 30% d'un fabriquant B. Parmi ceux qui proviennent de l'usine A, 20% possèdent un défaut contre 10% pour ceux sortant de l'usine B. Vous vous offrez un superbe sabre laser et pas de chance il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par B ?

Correction 19. On note A l'évènement « provenir de l'usine A », B l'évènement « provenir de l'usine B »et D l'évènement « posséder un défaut ». L'énoncé nous indique que : $P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B) = \frac{3}{10}$. En particulier on a : $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles P_A et P_B existent bien. Puis l'énoncé nous dit aussi que : $P_A(D) = \frac{2}{10}$ et $P_B(D) = \frac{1}{10}$.
On cherche alors à calculer $P_D(B)$. Comme on remarque une inversion de chronologie, on va utiliser la formule de Bayes. On obtient donc sous réserve d'existence des probabilités conditionnelles que

$$P_D(B) = \frac{P_B(D)P(B)}{P(D)}.$$

On commence par calculer $P(D)$:
Comme (A, B) est un sce, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B).$$

Puis comme les probabilités conditionnelles P_A et P_B existent bien on obtient d'après la formule des probabilités composées que :

$$P(D) = P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D) = \frac{17}{100}.$$

En particulier $P(D) \neq 0$ et la probabilité conditionnelle P_D existe bien.
On connaît alors toutes les probabilités et on obtient donc que : $\boxed{P_D(B) = \frac{3}{14}}$.

Indépendance

Exercice 20. On lance deux fois une pièce parfaite. On note A l'événement : « le premier lancer donne Pile », B l'événement : « le deuxième lancer donne Pile » et C l'événement : « on obtient deux résultats différents ». Etudier l'indépendance mutuelle et deux à deux de ces trois événements.

Correction 20.

1. Étude de l'indépendance deux à deux :
   On doit donc regarder si les événements A, B ; A, C et B, C sont indépendants. Pour cela on doit donc calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ et $P(B\cap C)$.
   - Calcul de $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$:
     On obtient que $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$. Il s'agit de faire le raisonnement suivant, par exemple pour $P(C)$: on a $C=(P_1\cap F_2)\cup(F_1\cap P_2)$ avec notations évidentes. Les deux évenments $P_1\cap F_2$ et $F_1\cap P_2$ sont incompatibles deux à deux et ainsi on obtient que : $P(C)=P(P_1\cap F_2)+P(F_1\cap P_2)$. Puis les événements P_1, F_2 et F_1, P_2 sont mutuellement indépendants car on répète deux fois de suite la même expérience dans les mêmes conditions. Ainsi on obtient que : $P(C)=P(P_1)P(F_2)+P(F_1)P(P_2)=\frac{1}{2}$ car la pièce n'est pas truquée et on utilise donc la probabilité uniforme.
   - ⋆ $P(A\cap B)=P(P_1\cap P_2)=P(P_1)P(P_2)=\frac{1}{4}$ en utilisant le fait que les événements P_1 et P_2 sont mutuellement indépendants.
     ⋆ $P(A\cap C)=P(P_1\cap F_2)=P(P_1)P(F_2)=\frac{1}{4}$ en utilisant le fait que les événements P_1 et F_2 sont mutuellement indépendants.
     ⋆ $P(B\cap C)=P(F_1\cap P_2)=P(F_1)P(P_2)=\frac{1}{4}$ en utilisant le fait que les événements F_1 et P_2 sont mutuellement indépendants.
   - On remarque ainsi que l'on a bien : $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, $P(A\cap C)=P(A)P(C)$ et $P(B\cap C)=P(B)P(C)$ et ainsi les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.
2. Étude de l'indépendance mutuelle :
   Pour étudier l'indépendance mutuelle, il faut que les événements sont déjà deux à deux indépendants et en plus ils doivent vérifier : $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$. Or ici, on a : $A\cap B\cap C=\emptyset$ et ainsi $P(A\cap B\cap C)=0$. Ainsi $P(A\cap B\cap C)\neq P(A)P(B)P(C)$ et les trois événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 21. On contrôle séparément et de façon indépendante les trois dimensions d'un pavé. Les probabilités de rejet sont égales à 0.06 pour la longueur, 0.04 pour la largeur et 0.08 pour la hauteur. Le pavé est refusé dès qu'une de ses dimensions est rejetée. Quelle est la probabilité pour qu'un pavé soit refusé ?

Correction 21. On note A l'événement « la longueur est refusée », B : « la largeur est refusée » et C : « la hauteur est refusée ». On doit calculer $P(A\cup B\cup C)$. Attention, ces trois événements ne sont pas incompatibles ! On doit donc utiliser la formule :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

Or les événements A, B et C sont mutuellement indépendants, donc on a :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)\times P(B)-P(A)\times P(C)-P(B)\times P(C)+P(A)\times P(B)\times P(C).$$

L'application numérique donne que la probabilité de rejet est d'environ 0.17.

Exercice 22. Dans une entreprise, des pièces sont fabriquées en série par deux machines A et B. La machine A, récente, assure 75% de la production. La probabilité qu'une pièce fabriquée par A soit défectueuse est de 0.01. la machine B, plus ancienne, assure le reste de la production et la probabilité qu'elle fabrique une pièce défectueuse est de 0.16.

1. On prélève au hasard une pièce fabriquée par cette entreprise. Quelle est la probabilité quelle soit défectueuse ?
2. On prélève au hasard, avec remise, 10 pièces fabriquées par cette entreprise. Quelle est la probabilité de trouver au moins deux pièces défectueuses ?

Correction 22.

1. On note A et B les événements « la pièce est fabriquée par A, par B » et D l'événement « la pièce prélevée est défectueuse ». Comme (A, B) forme un sce et que $P(A) = 0.75 \neq 0$ et $P(B) = 0.25 \neq 0$, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P_A(D) \times P(A) + P_B(D) \times P(B).$$

D'après les données de l'exercice, on obtient $\boxed{P(D) = 0.0475}$.

2. Soit C l'événement : « trouver au moins deux pièces défectueuses ». On passe ici à l'événement contraire : $\overline{C}$: « Trouver 0 ou 1 pièce défectueuse ».
Notons E : « Trouver 0 pièce défectueuse » et F : « Trouver 1 pièce défectueuse ». On a $\overline{C} = E \cup F$. De plus, E et F sont incompatibles, donc $P(\overline{C}) = P(E) + P(F)$.
Calculons $P(E)$. Pour cela, on note D_i : « la i-ème pièce est défectueuse ». On a : $E = \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap \ldots \cap \overline{D}_{10}$. Or les événements D_i sont mutuellement inépendants, donc on a : $P(E) = P(\overline{D}_1) \times \ldots \times P(\overline{D}_{10})$. D'après la question 1. on a donc $P(E) = (1 - 0.0475)^{10}$.
Calculons à présent $P(F)$. Il faut d'abord compter le nombre de possibilités pour le numéro de la pièce défectueuse : cela peut être la première examinée, ou bien la deuxième, ..., ou la dernière : on a donc 10 possibilités. Dans chaque cas, la probabilité vaut $P(D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \ldots \cap \overline{D}_{10})$. Comme dans le cas précédent, les événements sont mutuellement indépendants, donc on obtient : $P(F) = 10 \times 0.0475 \times (1 - 0.0475)^9$.
Finalement, $P(C) = 1 - (P(E) + P(F))$, et l'application numérique donne $\boxed{P(C) \simeq 0.079}$.

Type DS

Exercice 23. Roudoudou le hamster vit une vie paisible de hamster. Il a deux activités : manger et dormir... On va voir Roudoudou à 00h00 ($n = 0$). Il est en train de dormir.

— Quand Roudoudou dort à l'heure n, il y a 7 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 3 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

— Quand Roudoudou mange à l'heure n, il y a 2 chances sur 10 qu'il dorme à l'heure suivante et 8 chances sur 10 qu'il mange à l'heure suivante.

On note D_n l'événement 'Roudoudou dort à l'heure n' et M_n 'Roudoudou mange à l'heure n'. On note $d_n = P(D_n)$ et $m_n = P(M_n)$ les probabilités respectives.

1. Justifier que $d_n + m_n = 1$.
2. Montrer rigoureusement que
$$d_{n+1} = 0,7d_n + 0,2m_n$$
3. Exprimer de manière similaire m_{n+1} en fonction de d_n et m_n.
4. Soit A la matrice
$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$
Résoudre en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
6. Montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. Calculer D^n où $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\,(1/2)^n + 2 & -2\,(1/2)^n + 2 \\ -3\,(1/2)^n + 3 & 2\,(1/2)^n + 3 \end{pmatrix}$.

9. En déduire la valeur de d_n en fonction de n.

Correction 23.

1. D_n et M_n forment un système complet d'événements donc $d_n + m_n = 1$.
2. On cherche à calculer $d_{n+1} = P(D_{n+1})$ On applique la formule des probabilités totales avec le SCE (M_N, D_N)

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= P(D_{n+1} \mid M_n)P(M_n) + P(D_{n+1} \mid D_n)P(D_n) \\ &= P(D_{n+1} \mid M_n)m_n + P(D_{n+1} \mid D_n)d_n \end{aligned}$$

   L'énoncé donne : $P(D_{n+1} \mid M_n) = \frac{2}{10}$ et $P(D_{n+1} \mid D_n) = \frac{7}{10}$ et donc

$$d_{n+1} = 0,7d_n + 0,2m_n$$

3. On cherche à calculer $m_{n+1} = P(M_{n+1})$ On applique la formule des probabilités totales avec le SCE (M_N, D_N)

$$\begin{aligned} m_{n+1} &= P(M_{n+1} \mid M_n)P(M_n) + P(M_{n+1} \mid D_n)P(D_n) \\ &= P(M_{n+1} \mid M_n)m_n + P(M_{n+1} \mid D_n)d_n \end{aligned}$$

   L'énoncé donne : $P(M_{n+1} \mid M_n) = \frac{8}{10}$ et $P(M_{n+1} \mid D_n) = \frac{3}{10}$ et donc

$$m_{n+1} = 0,3d_n + 0,8m_n$$

4. On obtient le système d'équations

$$\begin{cases} 7x + 2y &= 10\lambda x \\ 3x + 8y &= 10\lambda y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (7-10\lambda)x + 2y &= 0 \\ 3x + (8-10\lambda)y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + (8-10\lambda)y &= 0 \\ (7-10\lambda)x + 2y &= 0 \end{cases}$$

   $L_2 \leftarrow 3 * L_2 - (7-10\lambda)L_1$

$$\iff \begin{cases} 3x + (8-10\lambda)y &= 0 \\ (-100\lambda^2 + 150\lambda - 50)y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (7-10\lambda)x + 2y &= 0 \\ (2\lambda^2 - 3\lambda + 1)y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (7-10\lambda)x + 2y &= 0 \\ (2\lambda-1)(\lambda-1)y &= 0 \end{cases}$$

   Le système est de Cramer pour $(2\lambda-1)(\lambda-1) \neq 0$ et l'unique solution est alors $(0,0)$.

   Pour $\lambda = 1$ on obtient $\iff \begin{cases} -3x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$ et les solutions sont de la forme :

$$\{(2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

   Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on obtient $\iff \begin{cases} 2x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$ et les solutions sont de la forme :

$$\{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

5. Le determinant de P vaut $det(P) = 3 + 2 = 5 \neq 0$ donc P est inversible. Son inverse vaut

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Ce n'est que du calcul.
7.

$$D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   A prouver par récurrence ou dire que c'est du cours pour des matrices diagonales.

8. On prouve tout d'abord par récurrence que pour tout n : $Q(n)$: "$A^n = PD^nP^{-1}$". Initialisation. La proposition est vraie pour $n = 0$ les deux cotés valent l'identité.
   On suppose $Q(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a $A^n = PD^nP^{-1}$ et donc
   $$\begin{aligned} A^{n+1} &= APD^nP^{-1} \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} \\ &= PD\,\mathrm{Id}\,D^nP^{-1} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$
   Ensuite c'est du calcul.
9. Et d'après les questions 2 et 3 on a
   $$A\begin{pmatrix} d_n \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix}$$
   et par récurrence
   $$A^n\begin{pmatrix} d_0 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n \\ m_n \end{pmatrix}$$
   D'après l'énoncé $d_0 = 1$ c'est l'événement certain. et donc
   $$\begin{pmatrix} d_n \\ m_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\,(1/2)^n + 2 \\ -3\,(1/2)^n + 3 \end{pmatrix}$$
   En particulier
   $$d_n = \frac{1}{5}(3\,(1/2)^n + 2)$$