Programme de colle : Semaine 25
Lundi 28 avril

1 Cours

1. Variables aléatoires.
   — Définition d'une variable aléatoire réelle finie. Univers image.
   — Loi et fonction de répartition
   — Moments : Espérance, variance (définition + Koenig Huygens) , écart-type.
   — Théorème de transfert.
   — Bienaimé-Tchebychev
   — Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernouilli, loi binomiale. (Les lois, l'espérance et la variance (exceptée celle de la loi unfire) doivent être connues par coeur)
   — Variables indépentantes.
2. Equation différentielle.
   — Retour sur les équations différentielles mais cette fois à coefficients pas nécessairement constant.
3. Python :
   — Tableau numpy, dictionnaires
   — Représentation informatique d'un polynome par une liste (évaluation, racine, dérivation, somme)

2 Exercices Types

1. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.
   (a) Déterminer les lois et les fonctions de répartition de X et de Y.
   (b) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et comparer ces espérances.
   (c) Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
2. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues.
   (a) On réalise 3 tirages successifs avec remise et on note Y le nombre de boules bleues obtenu au cours de ces tirages. Donner la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
   (b) On tire une boule de l'urne et on note T le numéro de la boule obtenue. Donner la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.
3. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $n \geq 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ième tirage.
   (a) Déterminer Y_1.
   (b) Soit $n \geq 2$.
      i. Justifier que $Y_n \leq N - 1$.
      ii. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a

$$P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1).$$

   (c) En déduire que la suite $(E(Y_n))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de $E(Y_n)$ pour tout $n \geq 1$.

   (a) i. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{a}{1+x^2} + b$
      ii. A l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive de $x \mapsto 2x \arctan(x)$
   (b) Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$

$$y' + \frac{1}{x} y = 2 \arctan(x)$$

4. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes

(a) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

(b) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$

(c) $y' - y = x^2(e^x + e^{-x})$

(d) $xy' + (1-2x)y = 1$

(e) $x^3y' + 4(1-x^2)y = 0$

(f) $(1-x^2)y' - 2xy = 1$

(g) $(\tan x)y' + y - \sin x = 0$

(h) $y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x$

(i) $x^2y' - y = x^2 - x + 1$. On pourra chercher une solution particulière polynomiale.