

# Chapitre 11 : Dénombrement

## I Cardinal d'un ensemble fini

**Définition 1.**

- Soit  $E$  un ensemble fini comportant  $n$  éléments. On dit alors que  $E$  est de cardinal  $n$  et on note  $\text{Card}(E) = n$ .
- L'ensemble vide est un ensemble fini et son cardinal est  $\text{Card}(\emptyset) = 0$ .
- Un singleton est un ensemble  $E$  vérifiant  $\text{Card}(E) = 1$ .

⚠ Ne pas confondre le nombre d'éléments et la "dimension" des objets à l'intérieur de l'ensemble.  
ex  $E = \{(1, 2, 3), (3, 4, 0)\}$  est un ensemble à 2 éléments :

1.  $(1, 2, 3)$
2.  $(3, 4, 0)$

Chaque élément est une liste contenant 3 nombres. ⚡

**Proposition 1.** Deux ensembles  $A$  et  $B$  sont disjoints lorsque  $A \cap B = \emptyset$  On a alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

**Exercice 1.** On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Quel est le nombre  $N$  de possibilités d'obtenir un 7 ou une figure ?

**Proposition 2.** Des ensembles finis  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont deux à deux disjoints lorsque

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

On a alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k)$$

⚠ Ne pas confondre des ensembles deux à deux disjoints et l'intersection de tous les ensembles est vide.

**Proposition 3.** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

## I. 1 Cardinal d'un complémentaire

**Proposition 4.** Soit  $A$  un sous ensemble d'un ensemble fini  $E$ .

On note  $\bar{A}$  son complémentaire dans  $E$ . Alors :

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$

**Remarque.** Penser au complémentaire dès que il y a : "au moins" dans l'énoncé.

**Exercice 2.** Dans un centre de vacances, il y a 50 personnes plus ou moins sportives et de nombreuses activités leur sont proposées : 15 personnes font du tennis, 20 de la piscine, 30 du volley-ball, 10 du tennis de table, 5 du cheval et 4 restent allongées au bord de la piscine toute la journée. Combien de personnes pratiquent au moins un sport ?

## I. 2 Cardinal d'un produit cartésien

**Définition 2.** Rappels sur le produit cartésien :

- Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. On note :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

et on a

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

- Soit  $E$  un ensemble, on note :

$$E^p = \{(e_1, e_2, \dots, e_p) \mid e_i \in E\}$$

et on a

$$\text{Card}(E^p) = \text{Card}(E)^p$$

**Exemple 1.** Calcul du cardinal de  $A \times B$  avec  $A = \{2, 6, 8\}$  et  $B = \{1, 3, 5, 6, 8\}$  :

**Exercice 3.** On tire successivement 2 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Quel est le nombre  $N$  de possibilités d'obtenir un roi suivi d'une dame ?
2. On tire maintenant successivement 4 cartes du même jeu. Quel est le nombre  $M$  de possibilités d'obtenir dans l'ordre un as, un roi, une dame, et un valet ?

## I. 3 Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble

**Définition 3.** Soit  $E$  un ensemble.

- On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . On a

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$$

**Exemple 2.** Calculer le nombre de parties des ensembles précédents.

## I. 4 Cardinal et applications

**Proposition 5.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis.

- Il existe une injection entre  $E$  et  $F$  ssi  $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$
- Il existe une surjection entre  $E$  et  $F$  ssi  $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$
- Il existe une bijection entre  $E$  et  $F$  ssi  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$

## II Choix de $p$ objets parmi $n$

La plupart des exercices de dénombrement peuvent se ramener au cas de tirages de  $p$  éléments parmi les  $n$  éléments d'un ensemble  $E$ . Il y a alors essentiellement quatre façons différentes de tirer  $p$  éléments parmi  $n$  :

- Avec ordre et répétition ( $n^p$ ) (Nombre de codes secrets de carte bleue)
- Avec ordre et sans répétition,  $(\frac{n!}{(n-p)!})$  (Nombre de possibilités au tiercé)
- Sans ordre et sans répétition,  $(\binom{n}{p})$  (nombre de possibilités au loto)
- Sans ordre et avec répétition. (plus rare et compliqué)

### II. 1 Choix successifs

#### II. 1. a Listes avec répétitions éventuelles (avec ordre et répétition)

**Définition 4.** Soit  $E$  un ensemble de cardinal fini  $n$ .

Une  $p$ -liste de  $E$  est un élément de  $E^p$

**Exemple 3.** Soit  $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ .

Donner une 2-liste de  $E$  : ..... et une 5-liste de  $E$  : .....

**Remarque.**  Ne pas confondre  $p$ -liste avec ensemble à  $p$  éléments. Dans une  $p$ -liste, l'ordre est important et si on change l'ordre, on change la  $p$ -liste. Dans un ensemble à  $p$  éléments, l'ordre n'intervient pas et l'ensemble est toujours le même lorsque l'on intervertit des éléments.

Exemple avec les points de coordonnées  $(2, 3)$  et  $(3, 2)$  :

**Proposition 6.** Avec ordre et répétition :

Le nombre de façons de choisir  $p$  objets pris parmi  $n$  objets distincts avec répétition possible et avec ordre est  $n^p$  c'est-à-dire  $\text{Card}(E^p)$

**Exemples.** • **Exemple fondamental : Tirage successif avec remise**

Soient une urne contenant  $n$  boules différentes et un entier  $p$ . On tire successivement  $p$  boules dans l'urne, on note le numéro de la boule tirée à chaque fois et l'on remet la boule dans l'urne. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est .....

- Nombre de façons de ranger 2 chemises de couleurs différentes dans 3 tiroirs discernables : ....
- Nombre de mots de 5 lettres écrits avec les lettres A,B,C,D,E et F : .....
- Nombre de répartitions possibles de 5 billes différentes dans 10 boîtes distinctes avec 0, 1 ou plusieurs billes par boîte : .....

## *II. 1. b Listes sans répétition (avec ordre et sans répétition)*

**Définition 5.** Soit  $E$  un ensemble de cardinal fini  $n$ .

Une  $p$ -liste de  $E$  sans répétition (ou arrangement de  $p$  éléments de  $E$ ) est .....

**Exemple 4.** Soit  $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ .

Donner une 5-liste sans répétition de  $E$  : .....

**Remarque.** Pour qu'il n'y ait pas de répétition, il faut nécessairement que l'on ait .....

**Proposition 7.** Avec ordre et sans répétition :

Le nombre de façons de choisir  $p$  objets pris parmi  $n$  objets distincts sans répétition possible et avec ordre est .....  
c'est-à-dire :

**Remarque.** On utilise parfois la notation  $\mathcal{A}_n^p$  (pour "arrangement") pour désigner le nombre de  $p$ -listes sans répétition d'un ensemble à  $n$  éléments. Ainsi, on a  $\mathcal{A}_n^p = \dots$ .  
Par convention, on pose  $\mathcal{A}_n^0 = 1$  et  $\mathcal{A}_n^p = 0$  si  $p > n$ .

**Exemples.** • **Exemple fondamental : Tirage successif sans remise**

Soient une urne contenant  $n$  boules différentes et un entier  $p$ . On tire successivement et sans remise  $p$  boules dans l'urne. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est .....

- Nombre de répartitions possibles de 5 billes différentes dans 10 boîtes distinctes avec au plus une bille par boîte : .....
- Nombre de paris possibles au tiercé dans une course où 15 chevaux sont en compétition : .....
- Nombre de mots de 3 lettres distinctes avec les lettres A,B,C et D : .....

**Définition 6.** Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments.

On appelle permutation de  $E$  .....

**Exemple 5.** Soit  $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ .

Donner un exemple de permutation de  $E$  : .....

Doner un exemple de 7-liste de  $E$  qui n'est pas une permutation : .....

**Proposition 8.** Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . Le nombre de permutations de  $E$  est .....

**Exercice 4.** Nombre de permutations de  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$  ? de  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$  ? .....

## II. 2 Choix simultanés

### II. 2. a Combinaisons (sans ordre et sans répétition)

**Définition 7.** Soient  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ .

On appelle combinaison de  $p$  éléments pris parmi  $n$  éléments de  $E$  .....

.....

**Exemple 6.** Soit  $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ .

Donner une combinaison à 5 éléments de  $E$  : .....

**Remarque.** On doit nécessairement avoir .....

**Proposition 9.** Sans ordre et sans répétition :

Le nombre de façons de choisir  $p$  objets pris parmi  $n$  objets distincts sans répétition possible et sans ordre est .....  
c'est-à-dire :

**Exemples.** • **Exemple fondamental : Tirage simultané non ordonné**

Soient une urne contenant  $n$  boules différentes et un entier  $p$ . On tire simultanément  $p$  boules.

Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est .....

- Nombre de répartitions possibles de 5 billes identiques dans 10 boîtes distinctes avec au plus une bille par boîte : .....

**Exercice 5.** Jeu de cartes : on distribue 5 cartes d'un jeu de 32 cartes à un joueur, celui-ci dispose donc d'une main de 5 cartes.

1. Déterminer le nombre de mains possibles.
2. Déterminer le nombre de mains contenant exactement 2 coeurs.
3. Déterminer le nombre de mains contenant exactement 2 cartes de pique, 2 cartes de cœur et 1 carte de carreau.

**Exercice 6.** Formule des "chefs" : un sélectionneur de foot doit choisir  $k$  joueurs parmi  $n$  candidats, et désigner un capitaine parmi les joueurs. En comptant de deux façons différentes le nombre de possibilités, redémontrer la formule des "chefs".

### II. 2. b Choix sans ordre et avec répétition

Ce cas là est plus rare mais il apparaît parfois. On verra quelques exemples en TD.

**Exemple 7.** On considère 5 boules indiscernables que l'on veut placer dans 3 tiroirs distincts, chaque tiroir pouvant contenir de 0 à 5 boules. Donner le nombre de répartitions possibles.

