

Cahier de vacances

lundi 22 décembre

Exercice 1. 1. Résoudre $\ln(x+1) - \ln(x) \geq \ln(3x+1)$

2. Calculer le produit AB deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Etudier la fonction

$$f(x) = x \exp(x)$$

4. Ecrire une fonction Python `reverse` qui prend en argument une liste et retourne la liste parcourue dans l'autre sens. eg `reverse([1,4,12])` retourne `[12, 4, 1]`

Correction 1.

1. L'équation est bien définie sur $\left] \frac{-1}{3}, +\infty \right[$. On obtient

$$\frac{x+1}{x(3x+1)} \geq 1$$

Puis

$$\mathcal{S} = \left[\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right]$$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $f'(x) = \exp(x) + x \exp(x) = \exp(x)(1+x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-e$	$+\infty$

```
1 def reverse(L):
2     Lrev=[]
3     for el in L:
4         Lrev =[el]+Lrev
5     return (Lrev)
```

ou

```
1 def reverse(L):
2     Lrev=[]
3     for i in range(len(L)-1,-1,-1):
4         Lrev=Lrev+[L[i]]
5     return (Lrev)
```

4. Mardi 23 décembre

Exercice 2. 1. Etudier la fonction $f(x) = e^{2x+1} - x$

2. Résoudre dans \mathbb{C}

$$z^2 + z + 1 = 0$$

donner la forme exponentielle des solutions.

3. Ecrire une fonction Python `somme` qui prend en argument une liste de nombres et retourne la somme des éléments de cette liste.

Correction 2.

1. $f'(x) = 2 \exp(2x+1) - 1$

$$f'(x) \geq 0 \iff x \geq \frac{-\ln(2)-1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{-\ln(2)-1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0 ⋮	+
$f(x)$	$+\infty$	$1 + \frac{\ln(2)}{2}$	$+\infty$

2. On calcule à l'aide du discriminant on obtient

$$r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

ou en écriture exponentielle :

$$r_1 = e^{2i\pi/3} \quad \text{et} \quad r_2 = e^{-2i\pi/3}$$

```

31      def somme(L):
32          s=0
33          for el in L:
34              s+=el
35          return s

```

Exercice 3. 1. Résoudre dans \mathbb{R} : $e^x + e^{-x} = 2$

2. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2n+3}{2} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$

3. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^n + n}{\sqrt{e^{2n} - 1}}$$

Correction 3.

1.

$$\mathcal{S} = \{0\}$$

2. Soit $\mathcal{P}(n)$: " $u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$ "

[I] Pour $n = 0$ on a $\mathcal{P}(0)$: " $u_0 = \frac{1}{2^0} - 2 \times 0 + 1$ " c'est-à-dire $\mathcal{P}(0)$: " $u_0 = 2$ " qui est vraie d'après l'énoncé.

[H] On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a alors $u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$ et donc d'après l'énoncé

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} - 2n + 1 \right) - \frac{2n+3}{2} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - n + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - 2n - 1 \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - 2(n+1) + 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

[Cl] La propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

3. On factorise par e^n au numérateur et au dénominateur. On obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^n + n}{\sqrt{e^{2n} - 1}} = 2$$

Jeudi 25 décembre

Joyeux Noël

Vendredi 26 décembre

Exercice 4. 1. Déterminer la valeur de u_n , où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$$

2. Résoudre $y'' + y = 1$
3. Déterminer le projeté orthogonal du point A de coordonnées $(1, 2)$ sur la droite D dirigée par $\vec{u} = (2, 1)$ et passant par $B = (0, 1)$
4. Ecrire une fonction Python `est_sym` qui prend en argument une liste de listes représentant une matrice et retourner `True` si la matrice correspondante est symétrique et `False` sinon.

Correction 4.

1. Technique habituelle ($v_n = u_n - \alpha\dots$) on trouve :

$$u_n = 2^{n+1} - 1$$

- 2.

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto 1 + A \cos(x) + B \sin(x) | (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

3. On trouve $D : x - 2y + 2 = 0$ et l'équation passant par A et orthogonale à D

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On trouve $H(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$

- 4.

Exercice 5. 1. Résoudre dans \mathbb{C} ,

$$z + \overline{2z + i} = 1 - i$$

2. Résoudre dans \mathbb{C}

$$z^4 = -z^2$$

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$$

Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

4. Ecrire une fonction Python `compte_element` qui prend en argument une liste de nombre et une valeur, et retourne le nombre de fois où la valeur est présente dans la liste.

`compte_element([1,4,2,4,3,4], 4)` va retourner 3 et `compte_element([1,4,2,4,3,4], 12)` va retourner 0.

Correction 5.

1. On repasse en écriture algébrique, on obtient $z = \frac{1}{3}$

2. On passe de z^2 de l'autre coté, on factorise. On obtient

$$\mathcal{S} = \{0, i, -i\}$$

3. Equation caractéristique $X^2 + X + 1 = 0$ racine $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$ On obtient apres calcul :

$$u_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

```

1 def  compte_element(L,a):
2     c=0
3     for el in L:
4         if el==a:
5             c+=1
6     return c

```

Exercice 6. 1. Etudier la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

2. Résoudre l'équation de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$e^{\lambda x+1} \leq 2e^{x-\lambda}$$

3. Résoudre le problème de Cauchy suivant (sur $]1, +\infty[$:

$$\begin{cases} y' + y &= 1 \\ y(2) &= 1 \end{cases}$$

Correction 6.

1. $f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	$\nearrow 1$

2. On obtient 1. (faire des taux d'accroissements et des composés des limites)

3.