Correction TD 21 : DL

Entrainements

Négligeabilité

Exercice 1. Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en $+\infty$:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \exp(x),\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = 2,\ f_5(x) = \ln(x),\ f_6(x) = \sqrt{x}\ln x,\ f_7(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}.$$

Correction 1. A Venir

Exercice 2. Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en 0 :

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \exp(x^2) - 1,\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = x\sqrt{x},\ f_5(x) = \ln(x),\ f_6(x) = \sqrt{x}\ln x,\ f_7(x) = \ln(x+1).$$

Correction 2. A Venir

Exercice 3. Soit f et g deux fonctions. Montrer que

$$f(x) \underset{0}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$$

Correction 3. Par définition, on dit que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to a$ si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Cela signifie que :

$$\frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} - 1.$$

En prenant la limite, on obtient :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 1 - 1 = 0.$$

D'après la définition du petit-o, cela revient à dire que

$$f(x) - g(x) = o(g(x)) \quad \text{lorsque } x \to a.$$

Ainsi, nous avons démontré l'équivalence voulue.

Exercice 4. Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$
2. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

Correction 4. On considère les fonctions $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1. **Équivalence asymptotique :**
Calculons le rapport :
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}}.$$
Or, en utilisant le développement limité de la racine carrée au voisinage de 1 :
$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u) \quad \text{lorsque } u \to 0,$$
on obtient ici :
$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
En passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, on trouve :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
D'après la définition de l'équivalence asymptotique, on en conclut que :
$$f(x) \sim g(x) \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

2. **Détermination de α :**
On considère la différence :
$$f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$
En utilisant l'identité de factorisation :
$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b},$$
on écrit :
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$
Or, en utilisant l'équivalence précédente $\sqrt{x+1} \sim \sqrt{x}$, on a :
$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \sim 2\sqrt{x}.$$
Ainsi, on obtient :
$$f(x) - g(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
Cela montre que l'on peut choisir $\alpha = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire :
$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2x^{1/2}} + o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right).$$

Calculs de développements limités

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre donné :

1. $f(x) = e^x - \dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre 2
2. $f(x) = \exp(\sin x)$ à l'ordre 4
3. $f(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2}$ à l'ordre 2
4. $f(x) = \cos\sqrt{x}$ à l'ordre 5
5. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ à l'ordre 1
6. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5
7. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2
8. $f(x) = \sin x - x\cos x$ à l'ordre 8
9. $f(x) = 2^x - 1$ à l'ordre 2
10. $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
11. $f(x) = \tan^2 x$ à l'ordre 6
12. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4
13. $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ à l'ordre 3
14. $f(x) = \ln(1+\cos(2x))$ à l'ordre 4
15. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+2}$ à l'ordre 3
16. $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4
17. $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{\tan x}\right)$ à l'ordre 4
18. $f(x) = (1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3

Correction 5.

1. **DL en 0 à l'ordre 2 de $\mathbf{f(x) = e^x - \dfrac{1}{1-x}}$:**
   On écrit chacun des DL et on fait la somme :
   $$f(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 + x + x^2 + o(x^2)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
   On obtient donc : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}$.

   On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 0$, et comme $-\dfrac{x^2}{2} < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.
2. **DL en 0 à l'ordre 4 de $\mathbf{f(x) = \exp(\sin x)}$:**
   On a, en écrivant le $DL_4(0)$ de la fonction sinus :
   $$f(x) \underset{0}{=} \exp\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right).$$
   On pose $u(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)$. Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, on peut composer les DL. On a :
   $$e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + o(u^4)$$
   donc on en déduit :
   $$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4}{4!} + o(x^4) \\ &\underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2} - 2 \times \frac{x^4}{2 \times 3!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \end{aligned}$$
   Soit : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)}$.

   On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$, et comme $\dfrac{x^2}{2} > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

3. **DL en 0 à l'ordre 2 de $\mathbf{f(x)} = \sqrt[3]{1+x+x^2}$:**
On pose $u(x) = x + x^2$. Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, on peut composer les DL. On a :
$$(1+u)^{\frac{1}{3}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{3}u + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}u^2 + o(u^2),$$
donc on en déduit :
$$f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{3}(x+x^2) - \frac{1}{9}(x+x^2)^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2).$$
Soit finalement : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x^2 + o(x^2)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 1 + \frac{x}{3}$, et comme $\frac{2}{9}x^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.
4. **DL en 0 à l'ordre 5 de $\mathbf{f(x)} = \cos\sqrt{\mathbf{x}}$:**
On pose $u(x) = \sqrt{x}$. On a bien $u(0) = 0$, on peut donc composer. On écrit le DL de cos à l'ordre 10, afin d'obtenir de l'ordre 5 en remplaçant u par $\sqrt{x}$. On a :
$$\cos u \underset{0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \frac{u^8}{8!} - \frac{u^{10}}{10!} + o(u^{10}),$$
soit en composant : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \frac{x^5}{10!} + o(x^5)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 1 - \frac{x}{2}$, et comme $\frac{x^2}{4!} > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.
5. **DL en 0 à l'ordre 1 de $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{1}}{\sin \mathbf{x}}$:**
On écrit le DL de sin à l'ordre 3 car il y a des simplifications :
$$\frac{1}{\sin x} \underset{0}{=} \frac{1}{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} \underset{0}{=} \frac{1}{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2)\right)}.$$
On pose $u(x) = -\frac{x^2}{3!} + o(x^2)$. On a :
$$\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + o(u).$$
Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, on peut composer les DL :
$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{3!} + o(x^2)$$
et donc :
$$f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{3!} + o(x^2)\right),$$
soit finalement : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} -\frac{x}{6} + o(x)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = -\frac{x}{6}$. On ne connaît pas le terme suivant du DL, donc on ne peut pas déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0 (il faudrait pousser le DL plus loin).

6. **DL en 0 à l'ordre 5 de $\mathbf{f(x) = (\cos x)^{\sin x}}$:**
On commence par mettre la fonction sous forme exponentielle, car $\cos x > 0$ au voisinage de 0 : $f(x) = \exp(\sin x \ln(\cos x))$. On écrit le DL de cos et on remplace dans le logarithme :
$$\ln(\cos x) \underset{0}{=} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right).$$
On pose $u(x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$. Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, on peut composer les DL :
$$\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$
Soit par composee :
$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + o(x^5)\\ &\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).\end{aligned}$$
On multiplie ensuite par le DL de sin :
$$\sin x \ln(\cos x) \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right) = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{12} + o(x^5) = -\frac{x^3}{2} + o(x^5).$$
Puis on pose $u(x) = -\frac{x^3}{2} + o(x^5)$, et on compose par le DL de exp car $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$: $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 1$. De plus, on a $-\frac{x^3}{2} > 0$ si $x < 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0 à gauche, et $-\frac{x^3}{2} < 0$ si $x > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0 à droite.

7. **DL en 0 à l'ordre 2 de $\mathbf{f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}}$:**
On passe sous forme exponentielle : $f(x) = \exp(\frac{1}{x}\ln(1+x))$. On écrit ensuite le $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ et on divise par x :
$$\frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$
Attention on ne peut pas composer directement car ce qu'on obtient ne tend pas vers 0 ! On remplace dans l'exponentielle :
$$f(x) \underset{0}{=} \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right).$$
On peut cette fois composer par le DL de exp. On obtient :
$$f(x) \underset{0}{=} e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)$$
Soit : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + o(x^2)\right)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = e - \frac{e}{2}x$, et comme $\frac{11}{24}x^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

8. **DL en 0 à l'ordre 8 de $\mathbf{f(x) = \sin x - x\cos x}$:**

   On écrit les deux DL de sin et cos et on remet dans l'expression de f. On obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{840} + o(x^8)}$.

   On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 0$. De plus, on a $\frac{x^3}{3} < 0$ si $x < 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0 à gauche, et $\frac{x^3}{3} > 0$ si $x > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0 à droite.

9. **DL en 0 à l'ordre 2 de $\mathbf{f(x) = 2^x - 1}$:**
   On passe sous forme exponentielle : $f(x) = e^{x\ln 2} - 1$. On a $\lim_{x\to 0} x\ln 2 = 0$, donc on peut composer par le DL de exp. On obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} x\ln 2 + \frac{\ln^2(2)}{2}x^2 + o(x^2)}$.

   On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = x\ln 2$, et comme $\frac{\ln^2(2)}{2}x^2$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

10. **DL en 0 à l'ordre 3 de $\mathbf{f(x) = e^{\sqrt{1+x}}}$:**
    On écrit le DL de $\sqrt{1+x}$:
    $$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$
    Attention, cette expression ne tend pas vers 0, on ne peut pas composer directement. On remplace dans l'exponentielle :
    $$f(x) \underset{0}{=} \exp\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) \underset{0}{=} e \times \exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right).$$
    On peut cette fois composer, et on obtient :
    $$f(x) \underset{0}{=} e\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^3 + o(x^3)\right).$$
    On en déduit : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} e\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right)}$.

    On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = e + \frac{e}{2}x$. De plus, on a $\frac{x^3}{48} < 0$ si $x < 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0 à gauche, et $\frac{x^3}{48} > 0$ si $x > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0 à droite.

11. **DL en 0 à l'ordre 6 de $\mathbf{f(x) = \tan^2 x}$:**
    On a $\tan x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$. On élève ce DL au carré :
    $$\tan x \underset{0}{=} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)\right)^2 = x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{15} + \frac{x^6}{9} + o(x^6).$$
    On obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + o(x^6)}$.
    On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 0$, et comme $x^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

12. **DL en 0 à l'ordre 3 de $\mathbf{f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$:**
    On commence par écrire le DL à l'intérieur :
    $$\frac{\sin x}{x} \underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3).$$

On remplace dans le logarithme :
$$f(x) \underset{0}{=} \ln\left(1-\frac{x^2}{3!}+o(x^3)\right).$$
On pose $u(x)=-\frac{x^2}{3!}+o(x^3)$. On a bien $\lim\limits_{x\to 0} u(x)=0$, donc on peut composer par le DL du logarithme, et on obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{6}+o(x^3)}$.

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y=0$, et comme $-\frac{x^2}{6}<0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

13. **DL en 0 à l'ordre 3 de $\mathbf{f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}}$:**
On a :
$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1+x+x^2+x^3+o(x^3).$$
On élève ce DL aa cube :
$$\frac{1}{(1-x)^3} \underset{0}{=} \left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right)^3 = 1+3x+3x^2+3x^3+x^3+3x^2+o(x^3) \underset{0}{=} 1+3x+6x^2+4x^3+o(x^3).$$
Puis on multiplie par $1+x$:
$$f(x) \underset{0}{=} (1+x)\left(1+3x+6x^2+4x^3+o(x^3)\right) \underset{0}{=} 1+3x+6x^2+4x^3+x+3x^2+6x^3+o(x^3).$$
Soit en rassemblant les termes : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1+4x+9x^2+10x^3+o(x^3)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y=1+4x$, et comme $9x^2>0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

14. **DL en 0 à l'ordre 4 de $\mathbf{f(x)=\ln(1+\cos(2x))}$:**
On commence par écrire le DL de $\cos(2x)$:
$$\cos(2x) \underset{0}{=} 1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4) \underset{0}{=} 1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4).$$
On remplace dans $f(x)$:
$$f(x) \underset{0}{=} \ln\left(1+1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4)\right) \underset{0}{=} \ln\left(2-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4)\right).$$
Attention, on ne peut pas composer directement par le DL du logarithme :
$$f(x) \underset{0}{=} \ln 2+\ln\left(1-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right).$$
On compose ensuite les DL en posant $u(x)=-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$, qui tend bien vers 0 en 0, et on obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \ln 2-x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y=\ln 2$, et comme $-x^2 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

15. **DL en 0 à l'ordre 3 de $\mathbf{f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+2}}$:**
On essaye de se ramener à du $\frac{1}{1+u(x)}$, avec $u(x)$ qui tend vers 0 en 0 :
$$\frac{1}{x^2+x+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}}.$$

On pose $u(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2}$, et on a bien $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, on peut composer les DL :

$$\frac{1}{x^2+x+2} \underset{0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3)\right).$$

En développant, puis en multipliant par $1+x$, on obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{3x^2}{4}+\frac{x^3}{8}\right)+o(x^3)}$.

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}$, et comme $-\dfrac{3x^2}{8} < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

16. **DL en 0 à l'ordre 4 de $\mathbf{f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}$:**
On écrit tout d'abord le DL à l'intérieur :

$$\frac{\sin x}{x} \underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3).$$

On élève ensuite au carré, et on obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45}x^4 + o(x^4)}$.

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 1$, et comme $-\dfrac{x^2}{3} < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

17. **DL en 0 à l'ordre 4 de $\mathbf{f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{\tan x}\right)}$:**
On commence par le DL à l'intérieur :

$$\frac{x}{\tan x} \underset{0}{=} \frac{x}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)} \underset{0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4)}.$$

On pose ensuite $u(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2x^4}{15}$, qui tend vers 0 en 0. On peut donc composer les DL et on obtient :

$$\frac{x}{\tan x} \underset{0}{=} 1 - \left(\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{15}\right) + \left(\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{15}\right)^2 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{11x^4}{45} + o(x^4).$$

On remplace dans $f(x)$:

$$f(x) \underset{0}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{11x^4}{45} + o(x^4)\right)\right) \underset{0}{=} \sin\left(\frac{\pi}{6}x^2 - \frac{11\pi}{90}x^4 + o(x^4)\right)$$

en utilisant les formules de trigonométrie. On a $\dfrac{\pi}{6}x^2 - \dfrac{11\pi}{90}x^4 + o(x^4)$ qui tend vers 0 en 0, donc on peut composer les DL, et on obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \frac{\pi}{6}x^2 + \frac{\pi}{90}x^4 + o(x^4)}$.

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 0$, et comme $\dfrac{\pi}{6}x^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

18. **DL en 0 à l'ordre 3 de $\mathbf{f(x) = (1 + \arctan x)^{\frac{1}{x}}}$:**
On met sous forme exponentielle : $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\arctan x\right)\right)$.
On a de plus : $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, et donc on doit calculer le DL de :

$$\ln(1+\arctan x) \underset{0}{=} \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right).$$

On a $\lim_{x\to 0} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4) = 0$, donc par composée de DL :

$$\begin{aligned}
\ln(1+\arctan x) &\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^4 + o(x^4) \\
&\underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

On obtient :

$$f(x) \underset{0}{=} \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \underset{0}{=} e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right).$$

On a $\lim_{x\to 0} -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3) = 0$, donc par composée de DL :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{0}{=} e\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12}\right)^3 + o(x^3)\right) \\
&\underset{0}{=} e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right)
\end{aligned}$$

On obtient finalement : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} e - \dfrac{ex}{2} + \dfrac{ex^2}{8} + \dfrac{ex^3}{16} + o(x^3)}$.

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = e - \dfrac{e}{2}x$, et comme $\dfrac{ex^2}{8} > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 6. Déterminer le développement limité à l'ordre n donné de la fonction f au voisinage de x_0 dans les cas suivants :

- $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x_0 = \frac{1}{4}$ à l'ordre $n = 5$.
- $f(x) = \frac{1}{x}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 5$.
- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 3$ à l'ordre $n = 4$.
- $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{4}$ à l'ordre $n = 3$.
- $f(x) = x^{\frac{1}{-1+\ln x}}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 3$.
- $f(x) = e^{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre n quelconque.

Correction 6. Je ne donne les détails que pour le début.

1. **DL de $\mathbf{f(x)} = \sqrt{\mathbf{x}}$ au voisinage de $\mathbf{x_0} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ à l'ordre $n = 5$.**

   On se ramène à 0 en posant $X = x - \dfrac{1}{4}$, soit $x = X + \dfrac{1}{4}$. On cherche le $DL_5(0)$ de $F(X) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + X} = \sqrt{\dfrac{1}{4}(1+4X)}$. Pour cela, on pose $u(X) = 4X$. On a $u(0) = 0$, et :

   $$(1+u)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}u + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}u^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}}{3!}u^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}u^4 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{7}{2}}{5!}u^5 + o(u^5).$$

   Soit par composée de DL :

   $$F(X) \underset{0}{=} \frac{1}{2}\left(2 + 2X - 2X^2 + 4X^3 - 10X^4 + 28X^5 + o(X^5)\right).$$

   On en déduit, en revenant à x : $\boxed{f(x) \underset{\frac{1}{4}}{=} \dfrac{1}{2} + (x - \dfrac{1}{4}) - (x - \dfrac{1}{4})^2 + 2(x - \dfrac{1}{4})^3 - 5(x - \dfrac{1}{4})^4 + 14(x - \dfrac{1}{4})^5 + o((x - \dfrac{1}{4})^5}$

   On en déduit que la tangente en $\dfrac{1}{4}$ a pour équation $y = \frac{1}{2} + (x - \dfrac{1}{4})$, et comme $-(x - \dfrac{1}{4})^2 < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de $\dfrac{1}{4}$.

2. **DL de $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre n quelconque**.

On se ramène à 0 en posant $X = x - 1$. On doit faire le DL en 0 de $g(X) = \dfrac{1}{X+1}$. On obtient :

$$g(X) \underset{0}{=} 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 + \ldots + (-1)^n X^n + o(X^n).$$

En revenant à x on a donc :

$$\boxed{f(x) \underset{1}{=} 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + \cdots + (-1)^n (x-1)^n + o((x-1)^n)}$$

On en déduit que la tangente en 1 a pour équation $y = 1 - (x-1) = 2 - x$, et comme $(x-1)^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 1.

3. **DL de $\mathbf{f(x) = \frac{x+1}{x-1}}$ au voisinage de $x_0 = 3$ à l'ordre $n = 4$.**

On se ramène à 0 en posant $X = x - 3$. On doit calculer le DL en 0 à l'ordre 4 de $g(X) = \dfrac{X+4}{X+2}$. On a :

$$\frac{1}{X+2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{X}{2}} \underset{0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{4} - \frac{X^3}{8} + \frac{X^4}{16} + o(X^4)\right),$$

puis par produit :

$$\begin{aligned} \frac{X+4}{X+2} &\underset{0}{=} (X+4)\left(\frac{1}{2} - \frac{X}{4} + \frac{X^2}{8} - \frac{X^3}{16} + \frac{X^4}{32} + o(X^4)\right) \\ &\underset{0}{=} 2 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{4} - \frac{X^3}{8} + \frac{X^4}{16} + o(X^4). \end{aligned}$$

En revenant à x, on obtient : $\boxed{f(x) \underset{3}{=} 2 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 - \frac{1}{8}(x-3)^3 + \frac{1}{16}(x-3)^4 + o((x-3)^4)}$.

On en déduit que la tangente en 3 a pour équation $y = 2 - \dfrac{1}{2}(x-3)$, et comme $\dfrac{1}{4}(x-3)^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 1.

4. **DL de $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre $n = 3$** (Difficile).

On se ramène à 0 en posant $X = x - \dfrac{\pi}{4}$. On obtient : $\boxed{f(x) \underset{\frac{\pi}{4}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[1 + (x - \frac{\pi}{4})(1 - \frac{2}{\pi}) + (x - \frac{\pi}{4})^2(-\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} + \frac{6}{\pi^2}) + (x -\right.}$

On en déduit que la tangente en $\dfrac{\pi}{4}$ a pour équation $y = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left[1 + (x - \dfrac{\pi}{4})(1 - \dfrac{2}{\pi})\right]$, et comme $(x - \dfrac{\pi}{4})^2(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{6}{\pi^2}) < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$.

5. **DL de $f(x) = x^{\frac{1}{-1+\ln x}}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 3$.**

On se ramène à 0 en posant $X = x - 1$. On obtient : $\boxed{f(x) \underset{1}{=} 1 - (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{5}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)}$.

On en déduit que la tangente en 1 a pour équation $y = 1 - (x-1) = 2 - x$, et comme $-\dfrac{1}{2}(x-1)^2 < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 1.

6. **DL de $f(x) = e^{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre n quelconque**.

On se ramène à 0 en posant $X = x - 1$. On obtient : $\boxed{f(x) = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(x-1)^n}$

On en déduit que la tangente en 1 a pour équation $y = 1 + (x-1) = x$, et comme $\dfrac{1}{2}(x-1)^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 1.

7. **DL de** $f(x)=\dfrac{x^n\ln x}{x^2-1}$ **au voisinage de** $x_0=1$ **à l'ordre 2.**

   On se ramène à 0 en posant $X=x-1$. On obtient : $\boxed{f(x)\underset{1}{=}\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2}(n-1)+(x-1)^2(1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{4})+o((x-}$

   On en déduit que la tangente en 1 a pour équation $y=\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2}(n-1)$, et comme $(x-1)^2(1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{4})>0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 1.

Exercice 7. Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x+x^2}$. Calculer $f^{(4)}(0)$.

Correction 7. Soit la fonction f définie par : $\mathbf{f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x+x^2}}$**. Calculer** $\mathbf{f^{(4)}(0)}$**.**

- La fonction f est bien définie si $1+x+x^2\neq 0$. Comme $\Delta=-3<0$, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- De plus, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions de classe C^∞. Ainsi en particulier elle est de classe C^4 au voisinage de 0. Donc d'après le théorème de Taylor-Young, la fonction f admet un $DL_4(0)$ qui est donnée par la formule :

$$f(x)\underset{0}{=}f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\circ(x^4).$$

- Calculons alors le $DL_4(0)$ de la fonction f directement :

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x)\times(1+(x+x^2))^{-1}\\ &\underset{0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)\times\left(1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+(x+x^2)^4\right)+\circ(x^4)\\ &\underset{0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)\times\left(1-x+x^3-x^4\right)+\circ(x^4)\\ &\underset{0}{=} 1-x-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x^3-\frac{23}{4!}x^4+\circ(x^4). \end{aligned}$$

- Par unicité du développement limité, on a donc

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=-\frac{23}{4!}\Leftrightarrow\boxed{f^{(4)}(0)=-23.}$$

Exercice 8. Oral agro 2001.
Soient un entier $n\geq 1$ et la fonction f d'une variable réelle x définie par

$$f(x)=\ln\left(1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right).$$

1. Montrer que f est définie au voisinage de 0 et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Calculer $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

Correction 8. Soient un entier $\mathbf{n\geq 1}$ **et la fonction f d'une variable réelle x définie par**

$$\mathbf{f(x)=\ln\left(1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\right)}.$$

1. **Montrer que f est définie au voisinage de 0 et de classe** $\mathcal{C}^\infty$**.**
2. **Calculer** $\mathbf{f'(0)}$**,** $\mathbf{f''(0)}$ **et** $\mathbf{f^{(3)}(0)}$**.**

À ne pas faire.

Recherche de limites et d'équivalents

Exercice 9. Dire si les fonctions suivantes ont une limite au point a et si oui les déterminer.

1. $x \mapsto \dfrac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{\sin x - x}$ en $a = 0$
2. $x \mapsto \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ en $a = 0$
3. $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x - x\ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$ en $a = 0$
4. $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2$ en $a = +\infty$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ en $a = 0$
6. $x \mapsto \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ en $a = 1$
7. $x \mapsto \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ en $a = +\infty$
8. $x \mapsto (x^6 + x^2 + 1)^{\frac{1}{6}} - (x^4 + 1)^{\frac{1}{4}}$ en $a = +\infty$
9. $x \mapsto \left(\dfrac{3^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\ln x}$ en $a = +\infty$
10. $x \mapsto \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$ en $a = 0$
11. $x \mapsto (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$ en $a = \dfrac{1}{2}$
12. $x \mapsto \left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right]\ln x$ en $a = +\infty$
13. $x \mapsto x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ en $a = +\infty$
14. $x \mapsto \dfrac{\tan x - 1}{\sin(2x) - 1}$ en $a = \dfrac{\pi}{4}$
15. $x \mapsto x^{\frac{1}{1-x}}$ en $a = 1$
16. $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}$ en $a = 1$

Correction 9. Je ne donne les détails que pour les premières questions.

1. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \dfrac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{\sin x - x}$ **en** $a = 0$ **:**
Inutile de calculer un DL de la fonction. Il suffit ici de calculer un DL du numérateur, un DL du dénominateur, d'en déduire des équivaments et de conclure par quotient d'équivalents. Pour cela, l'idée est de faire un DL de chacun des termes, à un ordre suffisamment grand pour qu'il reste un terme, mais pas trop grand non plus pour ne pas compliquer les calculs. On a :
$$e^x - \ln(1+x) - \cos x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \underset{0}{=} \frac{3x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{\sim} \frac{3x^2}{2}.$$
Et pour le dénominateur :
$$\sin x - x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x \underset{0}{=} -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}.$$
Par quotient d'équivalents, on en déduit : $f(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{\frac{3x^2}{2}}{\frac{x^3}{6}} = -\dfrac{9}{x}$, et donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty}$.

2. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ **en** $a = 0$ **:**
On fait un DL au numérateur :
$$f(x) \underset{0}{=} \frac{x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3} + o(1).$$
On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{3}}$.

3. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x - x\ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$ **en** $a = 0$ **:**
On a pour le numérateur :

$$\sin^2 x - x\ln(1+x) \underset{0}{=} \left(x + o(x^2)\right)^2 - x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} x^2 + o(x^3) - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{=} \frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}.$$

Et pour le dénominateur :

$$e^x + \cos x - \sin x - 2 \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 2 \underset{0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}.$$

Par quotient d'équivalents, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{3}} = \frac{3}{2}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{2}}$.

4. **Calcul de la limite de** $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2$ **en** $a = +\infty$ **:**
On commence par poser $X = \dfrac{1}{x}$. On cherche la limite en 0 de $g(X) = \dfrac{1}{X^3}\sin X - \dfrac{1}{X^2}$. On a :

$$g(X) \underset{0}{=} \frac{1}{X^3}\left(X - \frac{X^3}{6} + o(X^3)\right) - \frac{1}{X^2} = -\frac{1}{6} + o(1).$$

On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{6}}$.

5. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ **en** $a = 0$ **:** On a :

$$f(x) = \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^2 \sin x} \underset{0}{=} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - x^2}{x^2 \sin x} \underset{0}{=} \frac{x^2 - 2\frac{x^3}{6} - x^2 + o(x^3)}{x \sin x} \underset{0}{=} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2 \sin x}.$$

Or on sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$ (inutile ici de faire un DL), donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{3}}{x^3} = -\frac{1}{3}$, et : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{3}}$.

6. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ **en** $a = 1$ **:**
On commence par poser $X = x - 1$. On calcule la limite en 0 de :

$$g(X) = \frac{(X+1)^{X+1} - (X+1)}{-X + \ln(X+1)} = \frac{e^{(X+1)\ln(X+1)} - X - 1}{\ln(1+X) - X}.$$

Or on a :

$$\ln(1+X) \underset{0}{=} X - \frac{X^2}{2} + o(X^2),$$

donc en remplaçant :

$$e^{(X+1)\ln(X+1)} \underset{0}{=} \exp\left((1+X)\left(X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right)\right) \underset{0}{=} \exp\left(X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right)$$

On peut composer par le DL de l'exponentielle, car $X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$ tend vers 0 :

$$e^{(X+1)\ln(X+1)} \underset{0}{=} 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{1}{2}\left(X + \frac{X^2}{2}\right)^2 + o(X^2) \underset{0}{=} 1 + X + X^2 + o(X^2).$$

On a donc pour le numérateur :

$$e^{(X+1)\ln(X+1)} - X - 1 \underset{0}{=} X^2 + o(X^2) \underset{0}{\sim} X^2.$$

Pour le dénominateur, on a : $\ln(1+X) - X = -\frac{X^2}{2} + o(X^2) \underset{0}{\sim} -\frac{X^2}{2}$, donc par quotient d'équivalents, $g(X) \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{X^2}{2}}{X^2} = -2$. On en déduit : $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = -2}$.

7. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ **en** $a = +\infty$ **:** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = e}$.
8. **Calcul de la limite de** $x \mapsto (x^6+x^2+1)^{\frac{1}{6}} - (x^4+1)^{\frac{1}{4}}$ **en** $a = +\infty$ **:** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
9. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \left(\frac{3^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\ln x}$ **en** $a = +\infty$ **:** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.
10. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$ **en** $a = 0$ **:** $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -1}$.
11. **Calcul de la limite de** $x \mapsto (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$ **en** $a = \frac{1}{2}$ **:** $\boxed{\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\pi}}$.
12. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right]\ln x$ **en** $a = +\infty$ **:** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.
13. **Calcul de la limite de** $x \mapsto x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ **en** $a = +\infty$ **:** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.
14. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \frac{\tan x - 1}{\sin(2x) - 1}$ **en** $a = \frac{\pi}{4}$ **:** $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = +\infty}$.
15. **Calcul de la limite de** $x \mapsto x^{\frac{1}{1-x}}$ **en** $a = 1$ **:** $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = e^{-1}}$.
16. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}$ **en** $a = 1$ **:** $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = -1}$.

Exercice 10. Trouver un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de a :

1. $f(x) = \frac{2}{\sin x} - \frac{2}{\ln(1+x)}$ au voisinage de $a = 0$
2. $f(x) = \sin(2x) - 2\sin x$ au voisinage de $a = 0$
3. $f(x) = \ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)$ au voisinage de $a = 0$
4. $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) - \frac{1}{x}$ au voisinage de $a = +\infty$
5. $f(x) = (e+x)^e - e^{e+x}$ au voisinage de $a = 0$
6. $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)$ au voisinage de $a = 0$

Correction 10. x Je ne donne les détails que pour les premières questions.

1. **Équivalent de** $f(x) = \frac{2}{\sin x} - \frac{2}{\ln(1+x)}$ **au voisinage de** $a = 0$ **:**
   On met au même dénominateur, puis on fait un DL à l'ordre 3 :

$$f(x) = \frac{2\ln(1+x) - 2\sin x}{\sin x\ln(1+x)} \underset{0}{=} \frac{2\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 2(x + o(x^2))}{\sin x\ln(1+x)} \underset{0}{=} \frac{-x^2 + o(x^2)}{\sin x\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{x^2} = -1,$$

   en utilisant les équivalents usuels de $\sin x$ et $\ln(1+x)$ en 0. On en déduit : $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} -1}$.

2. **Équivalent de $f(x) = \sin(2x) - 2\sin x$ au voisinage de $a = 0$:**
On peut composer avec le DL du sinus car $2x$ tend vers 0 en 0 :

$$f(x) \underset{0}{=} 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) - 2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} -x^3 + o(x^3).$$

On en déduit : $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} -x^3}$.

3. **Équivalent de $f(x) = \ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)$ au voisinage de $a = 0$:**
Il vaut mieux toujours commencer par les fonctions les plus à l'intérieur :

$$\frac{\tan x}{x} \underset{0}{=} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Donc en remplaçant dans f :

$$f(x) \underset{0}{=} \ln\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} \frac{x^2}{3} + o(x^2),$$

en composant avec le DL du ln car $\frac{x^2}{3} + o(x^2)$ tend vers 0 en 0. On a donc : $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{3}}$.

4. **Équivalent de $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) - \frac{1}{x}$ au voisinage de $a = +\infty$:**
On commence par poser $X = \frac{1}{x}$, et on cherche un équivalent en 0 de $g(X) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+X}\right) - X = \ln\left(1 + \frac{X}{1+X}\right) - X$. On a :

$$\frac{X}{1+X} \underset{0}{=} X(1 - X + o(X)) = X - X^2 + o(X^2).$$

Donc en composant avec le DL du ln :

$$\ln\left(1 + \frac{X}{1+X}\right) - X \underset{0}{=} X - X^2 - \frac{1}{2}\left(X - X^2\right)^2 - X + o(X^2) \underset{0}{==} \frac{3}{2}X^2 + o(X^2).$$

En revenant à x, on obtient donc : $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3}{2}x^2}$.

5. **Équivalent de $f(x) = (e+x)^e - e^{e+x}$ au voisinage de $a = 0$:** $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}e^{e-1}}$.

6. **Équivalent de $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1 + \sin x)$ au voisinage de $a = 0$:**
Ici, il faut monter l'ordre petit à petit car les termes se simplifient au fur et à mesure... On obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{12}}$.

Étude locale de fonctions

Exercice 11. Dans chacun des cas suivants, étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (s'il y a lieu). On étudiera aussi la position locale de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (s'il y a lieu).

1. $f(x) = (x+1)\exp\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $g(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x}$
3. $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
4. $f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$
5. $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$
6. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$

Correction 11.

1. $f(x) = (x+1)\exp\left(\frac{1}{x}\right)$
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$
   - On pose $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) = F(X) &= \frac{1}{X}(1+X)e^X \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{X}\left(1 + 2X + \frac{3}{2}X^2 + \circ(X^2)\right) \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{X} + 2 + \frac{3}{2}X + \circ(X). \end{aligned}$$

   - On repasse à x et on obtient

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + 2 + \frac{3}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{-\infty}{=} x + 2 + \frac{3}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Ainsi, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
   - Au voisinage de $+\infty$, $\frac{3}{2x} > 0$ et au voisinage de $-\infty$, $\frac{3}{2x} < 0$, ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote olique au voisinage de $+\infty$ et elle est en-dessous de son asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.
2. $g(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x}$
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car la fonction racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   - On pose $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) = F(X) &= \frac{1}{X}\left(1 + X + X^3\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{X}\left(1 + \frac{X}{3} - \frac{X^2}{9} + \circ(X^2)\right) \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{X} + \frac{1}{3} - \frac{X}{9} + \circ(X). \end{aligned}$$

   - On repasse à x et on obtient

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{-\infty}{=} x + \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Ainsi, la droite d'équation $y = x + \frac{1}{3}$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
   - Au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{9x} > 0$ et au voisinage de $-\infty$, $\frac{1}{9x} < 0$, ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote olique au voisinage de $+\infty$ et elle est en-dessous de son asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

3. $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
   - $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$. On ne fait l'étude qu'en $+\infty$.
   - On pose $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{array}{rcl} f(x) = F(X) & = & e^{X\ln\left(\frac{1+X}{X}\right)} \\ & \underset{0}{=} & e^{X(-\ln X + X + \circ(X))} \\ & \underset{0}{=} & e^{-X\ln(X) + \circ(X\ln X)} \\ & \underset{0}{=} & 1 - X\ln(X) + \circ(X\ln X). \end{array}$$

   - On repasse à x et on obtient
$$f(x) \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \circ\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$
On remarque que cela n'est absolument pas un DL (ni d'ailleurs un développement asymptotique) car il y a présence de $\ln(x)$. Mais cela nous donne quand même l'asymptote et la position de la courbe par rapport à cette asymptote. On remarque aussi que le DL de l'exponentielle a pû être utilisé car, par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{X\to 0^+} X\ln X = 0$. De plus, par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, cela assure que $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$.
   - Comme quand x est au voisinage de $+\infty$, on a : $\dfrac{\ln(x)}{x} > 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

4. $f(x) = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $9 + x^2 > 0$.
   - On pose $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{array}{rcl} f(x) = F(X) & = & \dfrac{1}{X} - 2 + \dfrac{1}{X^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{X^2} + 9}} \\ & = & \dfrac{1}{X} - 2 + \dfrac{1}{X^2} \times \dfrac{|X|}{\sqrt{1+9X^2}} \\ & \underset{0}{=} & \dfrac{1}{X} - 2 + \dfrac{|X|}{X^2}\left(1 - \dfrac{9}{2}X^2 + \circ(X^2)\right). \end{array}$$

Ainsi, on obtient que
$$F(X) \underset{0^+}{=} \frac{2}{X} - 2 - \frac{9}{2}X + \circ(X) \qquad \text{et} \qquad F(X) \underset{0^-}{=} -2 + \frac{9}{2}X + \circ(X).$$

   - On repasse à x et on obtient
$$f(x) \underset{+\infty}{=} 2x - 2 - \frac{9}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{-\infty}{=} -2 + \frac{9}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$
Ainsi la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 2$ au voisinage de $+\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ au voisinage de $-\infty$.

- Comme $-\dfrac{9}{2x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe est en-dessous de son asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et comme $\dfrac{9}{2x} < 0$ au voisinage de $-\infty$, la courbe est en-dessous de son asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

5. $f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$
   - $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
   - On pose $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) = F(X) &= -\frac{1}{X^2}\ln(1+X) \\ &\underset{0}{=} -\frac{1}{X^2}\left(X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \circ(X^3)\right) \\ &\underset{0}{=} -\frac{1}{X} + \frac{1}{2} - \frac{X}{3} + \circ(X). \end{aligned}$$

   - On repasse à x et on obtient

$$f(x) \underset{+\infty}{=} -x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{-\infty}{=} -x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Ainsi, la droite d'équation $y = -x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
   - Comme $-\dfrac{1}{3x} < 0$ au voisinage de $+\infty$ et $-\dfrac{1}{3x} > 0$ au voisinage de $-\infty$, la courbe est en-dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et elle est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

6. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$
   - $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$.
   - On pose $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) = F(X) &= \frac{e^X}{|X|}(1+2X)^{\frac{1}{2}} \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{|X|}\left[\left(1 + X + \frac{X^2}{2}\right)\left(1 + X - \frac{X^2}{2}\right) + \circ(X^2)\right] \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{|X|}\left(1 + 2X + X^2 + \circ(X^2)\right). \end{aligned}$$

   Ainsi, on obtient que

$$F(X) \underset{0^+}{=} \frac{1}{X} + 2 + X + \circ(X) \qquad \text{et} \qquad F(X) \underset{0^-}{=} -\frac{1}{X} - 2 - X + \circ(X).$$

   - On repasse à x et on obtient

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + 2 + \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{-\infty}{=} -x - 2 - \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Ainsi, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ et la droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.
   - Comme $\dfrac{1}{x} > 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de l'asymptote $y = x + 2$ au voisinage de $+\infty$ et comme $-\dfrac{1}{x} > 0$ au voisinage de $-\infty$, la courbe est au-dessus de l'asymptote $y = -x - 2$ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 12. Soit la fonction f définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.
2. Ce prolongement est-il dérivable ?
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
4. Ce prolongement est-il dérivable ?

Correction 12. **Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $]\mathbf{0},\mathbf{1}[\cup]\mathbf{1},+\infty[$ par $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\dfrac{\mathbf{x}\ln\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2-\mathbf{1}}$.**

1. **Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.**
On peut par exemple pour cela faire un $DL_0(1)$. On va même faire un $DL_1(1)$ afin de répondre en même temps à la question d'après. On pose donc pour cela $X=x-1\Leftrightarrow x=1+X$. On obtient après calculs que
$$f(x)=F(X)=\frac{(1+X)\ln(1+X)}{X(X+2)}=\frac{1}{2X}\times(1+X)\ln(1+X)\left(1+\frac{X}{2}\right)^{-1}\underset{0}{=}\frac{1}{2}+\circ(X).$$
Ainsi on a
$$f(x)\underset{1}{=}\frac{1}{2}+\circ(x-1).$$
Donc, comme on a existence d'un $DL_0(1)$, la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1)=\dfrac{1}{2}$.
2. **Ce prolongement est-il dérivable ?**
Comme on a existence d'un $DL_1(1)$, la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 1 avec $f'(1)=0$.
3. **Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.**
Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$. Puis par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.
4. **Ce prolongement est-il dérivable ?**
Avec le taux d'accroissement, on a :
$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x^2-1}=+\infty$$
par propriétés sur les somme et quotient de limites. Ainsi la fonction f ainsi prolongée en 0 n'est pas dérivable en 0 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Type DS

Exercice 13. Soit la fonction f définie par :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\arctan x+e^x-1.$$

1. Étudier f et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.
2. Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
3. Soit g la réciproque de la bijection précédente.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
En déduire que g admet, en tout point de I, des développements limités à tout ordre.
4. En utilisant le fait que $g\circ f=Id_{\mathbb{R}}$, donner un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Correction 13. **Soit la fonction f définie par :**
$$\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R},\ \mathbf{f}(\mathbf{x})=\arctan\mathbf{x}+\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-\mathbf{1}.$$

1. **Étudier f et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.**
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe C^∞. En particulier elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + e^x.$$
   Ainsi $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ comme somme de deux termes strictement positifs.
   - Limites aux bornes :
     - ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - 1$ par propriétés sur les sommes de limites. Et ainsi $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{\pi}{2} - 1$ au voisinage de $-\infty$.
     - ⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par propriétés sur les sommes de limites.
   - Variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\frac{\pi}{2} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.**
   D'après la question précédente, on a :
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues.
   - La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   Ainsi d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } I = \left]-\frac{\pi}{2} - 1, +\infty\right[.}$
3. **Soit g la réciproque de la bijection précédente.**
   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
   En déduire que g admet, en tout point de I, des développements limités à tout ordre.
   - On a :
     - ⋆ La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe C^∞.
     - ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) \neq 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) > 0$ comme somme de deux termes strictement positifs.

     Ainsi d'après le théorème sur la régularité des fonctions réciproques, on sait que $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est de classe } C^\infty}$
   - Comme la fonction g est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2} - 1, +\infty\right[$, on sait d'après le théorème de Taylor-Young que $\boxed{g \text{ admet en tout point de } I = \left]-\frac{\pi}{2} - 1, +\infty\right[\text{, des développements limités à tout ordre.}}$
4. **En utilisant le fait que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, donner un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.**

- Comme g admet un DL à tout ordre au voisinage de tout point de I et que $0 \in I$, g admet en particulier un DL à l'ordre 2 en 0. Ainsi il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$g(u) \underset{0}{=} a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \circ(u^2).$$

- On veut savoir si on peut poser $u = f(x)$. Comme $f(0) = 0$, on a bien que $f(x)$ tend bien vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi on va pouvoir poser $u = f(x)$. Il reste donc à trouver le $DL_2(0)$ de f. On a

$$f(x) \underset{0}{=} x + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2) - 1 \underset{0}{=} 2x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2).$$

- Par composition de DL du même ordre, on a, en posant $u = f(x)$:

$$\begin{array}{rcl} g(f(x)) & \underset{0}{=} & a_0 + a_1\left(2x + \dfrac{x^2}{2}\right) + a_2\left(2x + \dfrac{x^2}{2}\right)^2 + \circ(x^2) \\ g(f(x)) & \underset{0}{=} & a_0 + 2a_1 x + \left(\dfrac{a_1}{2} + 4a_2\right)x^2 + \circ(x^2) \end{array}$$

  Or on connait un deuxième DL de $f \circ g$: en effet, $g(f(x)) = x \underset{0}{=} x + o(x^2)$.

- Puis par unicité du développement limité, on obtient que

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0 \\ 2a_1 & = & 1 \\ \dfrac{a_1}{2} + 4a_2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ a_2 & = & -\dfrac{1}{16}. \end{array}\right.$$

  Ainsi on obtient que : $\boxed{g(x) \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \circ(x^2)}$.