Programme de colle : Semaine 19
Lundi 16 Février

1 Cours

1. Limites et continuité. Savoir calculer des limites reste au programme dès qu'on fait de l'analyse ! C'est comme étudier une fonction, il faut savoir le faire.
2. Dérivabilité
   — Dérivabilité en un point.
   — Equation de la tangente
   — Dérivabilité sur un intervalle : Rolle, TAF.
   — Dérivabilité d'ordre supérieur. Notation $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$
3. Polynômes
   — Définition de $\mathbb{K}[X]$ comme l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.
   — Notion de degré et coefficients dominants.
   — Racine d'un polynômes définition et caractérisation par divisibilité ($P(a) = 0 \Longleftrightarrow P = (X - a)Q$)
   — Multiplicité d'une racine
   — Un polynôme non nul de degré inférieur à n a au plus n racines.
   — Factorisation, théorème de d'Alembert Gauss (Hors programme)
   — Retour sur les racines $n-$èmes de l'unité.
4. Python :
   — Correspondance entre polynome $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et la liste $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Evaluation, calcul du degré, de la dérivée.

2 Exercices Types

Exercice 1. *Donner les racines ainsi que leur multiplicité du polynôme* $P = X^6 - X^3$

Exercice 2. *Factoriser dans* $\mathbb{C}$, $X^n - 1$.

Exercice 3. *Donner la formule de* $f^{(n)}(x)$ *lorsque* $f : x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 4. *Soit* P *un polynôme admettant deux racines réelles, montrer que la dérivée s'annule sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 5. *Montrer en utilisant le TAF que* $\forall x > 0$

$$x \leq e^x - 1 \leq x e^x$$

Exercice 6. *On cherche ici à déterminer tous les polynômes* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tels que* $P(X^2) = (X^2 + 1)P$.

1. *Soit* $P \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $P(X^2) = (X^2 + 1)P$. *Quel est son degré ?*
2. *Déterminer* P *à l'aide d'une identification des coefficients.*
3. *Retrouver l'expression de* P *en déterminant ses racines.*

Exercice 7. *Soit la fonction* $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ *définie pour tout* x *réel par* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

1. *Calculer* f' *et* f''.
2. *Montrer par récurrence que la dérivée n-ième est de la forme* $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1 - x^2)^n \sqrt{1 - x^2}}$, *où* P_n *est un polynôme. Donner une relation* (R) *entre* P_{n+1}, P_n *et* P_n'.
3. *Montrer que* P_n *est une fonction paire si* n *est pair et une fonction impaire si* n *est impair.*
4. *Montrer par récurrence en utilisant la relation* (R) *que* $P_n' = n^2 P_{n-1}$.
5. *En déduire que les polynômes* P_n *vérifient pour tout entier* $n \geq 1$ *la relation de récurrence suivante*

$$P_{n+1} = (2n + 1) X P_n + n^2 (1 - X^2) P_{n-1}.$$

Exercice 8. ***Informatique.*** *On identifie le polynôme* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *à la liste* $L = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$. *Ecrire une fonction qui prend en argument une liste* L *correspondant à un polynome* P *et un flottant* a *et retourne la valeur de* $P(a)$.