

Correction TD 17 : Espace vectoriel

Entrainement

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\}$
3. $C = \{(x + 2y, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$

Correction 1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\}$

★ Première méthode : par la définition des sev. On a :

- $A \subset \mathbb{R}^2$ par définition.
- $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ car $2 \times 0 - 0 = 0$.
- Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in A$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ est également dans A . On note $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Les coordonnées de \vec{w} sont alors $\vec{w} = (\lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2)$. On a

$$2(\lambda u_1 + v_1) - (\lambda u_2 + v_2) = \lambda(2u_1 - u_2) + 2v_1 - v_2 = 0,$$

car on a $\vec{u} \in A$, donc $2u_1 - u_2 = 0$, et $\vec{v} \in A$, donc $2v_1 - v_2 = 0$. On en déduit que $\vec{w} \in A$, donc A est stable par combinaisons linéaires.

On a donc bien montré que A est un sev de \mathbb{R}^2 .

★ Deuxième méthode : en mettant A sous forme vectorielle. On résout l'équation définissant A :

$$2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x.$$

On a donc :

$$A = \{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 2), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 2)).$$

En particulier, A est un sev de \mathbb{R}^2 .

2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\}$

On a $(0, 0) \notin B$. En effet, $0 - 3 \times 0 + 1 = 1 \neq 0$. Donc B n'est pas un sev de \mathbb{R}^2 .

3. $C = \{(x + 2y, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

On met C sous forme vectorielle :

$$\vec{u}(u_1, u_2) \in C \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (u_1, u_2) = (x + 2y, y) = x(1, 0) + y(2, 1).$$

On a donc $C = \text{Vect}((1, 0), (2, 1))$, et en particulier, C est un sev de \mathbb{R}^2 .

4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$

On a bien $(0, 0) \in D$, car $0^2 + 0^2 = 0 \leq 1$. Montrons cependant que D n'est pas un sev. Soit $\vec{u} = (1, 0)$. On a bien $\vec{u} \in D$ car $1^2 + 0^2 = 1 \leq 1$. Mais par contre, $\vec{v} = 2\vec{u}$ n'est pas dans D : en effet, $2^2 + 0^2 = 4 > 1$. Donc D n'est pas stable par combinaisons linéaires, et D n'est pas un sev de \mathbb{R}^2 .

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + z = 0\}$

2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + z = 1\}$

3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 5y = 2y + z = 0\}$

4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad y = x^3\}$

5. $E = \{(2z, -z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$

Correction 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + z = 0\}$

Là encore, on peut utiliser deux méthodes, soit la définition, soit mettre A sous forme vectorielle. Je ne donne que la deuxième. On résout l'équation de A :

$$2x - 3y + z = 0 \Leftrightarrow z = 3y - x,$$

donc on a

$$A = \{(x, y, 3y - x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 3), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On a donc $A = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 3))$, et en particulier, A est un sev de \mathbb{R}^3 .

2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + z = 1\}$

On a $(0, 0, 0) \notin B$. En effet, $2 \times 0 - 3 \times 0 + 0 = 0 \neq 1$. Donc B n'est pas un sev de \mathbb{R}^3 .

3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 5y = 2y + z = 0\}$

On résout l'équation de C :

$$\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5y \\ z = -2y \end{cases},$$

donc on a

$$C = \left\{ \left(\frac{5}{2}y, y, -2y \right), y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{y}{2}(5, 2, -4), y \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a donc $C = \text{Vect}((5, 2, -4))$, et en particulier, C est un sev de \mathbb{R}^3 .

4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad y = x^3\}$

On a bien $(0, 0, 0) \in D$, car $0 = 0^3$. Montrons cependant que D n'est pas un sev. Soit $\vec{u} = (1, 1, 0)$. On a bien $\vec{u} \in D$ car $1 = 1^3$. Mais par contre, $\vec{v} = 2\vec{u}$ n'est pas dans D : en effet, $2 \neq 2^3$. Donc D n'est pas stable par combinaisons linéaires, et D n'est pas un sev de \mathbb{R}^3 .

5. $E = \{(2z, -z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$

On met E sous forme vectorielle :

$$\vec{u}(u_1, u_2, u_3) \in E \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{R} : (u_1, u_2, u_3) = (2z, -z, z) = z(2, -1, 1).$$

On a donc $E = \text{Vect}((2, -1, 1))$, et en particulier, E est un sev de \mathbb{R}^3 .

Sous-espaces vectoriels engendrés. Familles génératrices

Exercice 3. Trouver une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad ax + by + z = 0\}$

Correction 3. La méthode est toujours de mettre F sous forme vectorielle.

1. F est sous forme cartésienne : on résout le système d'équations cartésiennes pour obtenir la forme paramétrique de F , puis sa forme vectorielle.
On a $(x, y, z, t) \in F$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ y = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t - z \\ y = 2t \end{cases}$$

On a donc $F = \{(2t - z, 2t, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$, et finalement : $F = \text{Vect}((-1, 0, 1, 0), (2, 2, 0, 1))$.

2. On trouve de même : $F = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

3. On trouve de même : $F = \text{Vect}((1, 0, -a), (0, 1, -b))$.

Exercice 4. Donner l'écriture cartésienne des espaces vectoriels suivants.

1. $E = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 2, 2)$ et $v = (2, 1, 3)$.
2. $E = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 4, 1, 1)$ et $v = (-1, 2, 2, 1)$.
3. $E = \{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

Correction 4. Donner l'écriture cartésienne des espaces vectoriels suivants.

1. Par définition, $(x, y, z) \in E$ ssi il existe alors λ, μ tels que $(x, y, z) = \lambda u + \mu v$, soit en passant aux coordonnées :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ 2\lambda + \mu = y \\ 2\lambda + 3\mu = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ -3\mu = y - 2x \\ -\mu = z - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ -3\mu = y - 2x \\ 0 = 3z - y - 4x \end{cases}$$

Ce système est compatible ssi la dernière équation est vérifiée, donc $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3z - y - 4x = 0\}$.

2. On trouve de même : $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y - x - 3t = 0 \text{ et } x + 2z - 3t = 0\}$.

3. On trouve de même : $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 4y - 5z + 2t = 0\}$.

Exercice 5. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - 3y + 2z = 0\}$ et $u = (1, 3, 4)$ et $v = (3, -1, -3)$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et que (u, v) est une famille génératrice de E .

Correction 5. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - 3y + 2z = 0\}$ et $u = (1, 3, 4)$ et $v = (3, -1, -3)$. On traite les deux questions en même temps en montrant directement que $E = \text{Vect}(u, v)$. On a

$$(x, y, z) \in \text{Vect}(u, v) \Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) = \lambda u + \mu v$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \lambda + 3\mu = x \\ 3\lambda - \mu = y \\ 4\lambda - 3\mu = z \end{cases}$$

On résout ce système :

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = x \\ 3\lambda - \mu = y \\ 4\lambda - 3\mu = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = x \\ -10\mu = y - 3x \quad (\mathbf{L}_2 - 3\mathbf{L}_1) \\ -15\mu = z - 4x \quad (\mathbf{L}_3 - 4\mathbf{L}_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = x \\ -10\mu = y - 4x \\ 0 = 10z + 5x - 15y \quad (10\mathbf{L}_3 - 15\mathbf{L}_1) \end{cases}$$

Ce système est compatible ssi la dernière équation est vérifiée, c'est-à dire ssi $2z - 3y + x = 0$. On remarque que c'est exactement l'équation de E , donc on a bien montré que $E = \text{Vect}(u, v)$ et donc que E est un sev.

Exercice 6. Dans \mathbb{K}^3 , on considère $u = (2, -4, 7)$ et $v = (-1, 2, -3)$. Peut-on déterminer a de sorte que $w \in \text{Vect}(u, v)$ dans chacun des 3 cas suivants :

1. $w = (-1, a, 3)$
2. $w = (-1, 2, a)$
3. $w = (-1, -1, a)$

Correction 6. Dans \mathbb{K}^3 , on considère $u = (2, -4, 7)$ et $v = (-1, 2, -3)$. Peut-on déterminer a de sorte que $w \in \text{Vect}(u, v)$ dans chacun des 3 cas suivants :

1. On a $w = (-1, a, 3) \in \text{Vect}(u, v)$ ssi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $w = \lambda u + v$. En passant au coordonnées, on doit donc résoudre le système suivant d'inconnues λ et μ :

$$\begin{cases} -1 = 2\lambda - \mu \\ a = -4\lambda + 2\mu \\ 3 = 7\lambda - 3\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = -1 \\ -4\lambda + 2\mu = a \\ 7\lambda - 3\mu = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = -1 \\ 0 = a - 2 \quad (\mathbf{L}_2 + 2\mathbf{L}_1) \\ \lambda = 6 \quad (\mathbf{L}_3 - 3\mathbf{L}_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 13 \\ \lambda = 6 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ce système est compatible si et seulement si la dernière équation, qui ne comporte plus d'inconnue, est vérifiée. Donc $w \in \text{Vect}(u, v)$ si et seulement si $a = 2$.

2. On a $w = (-1, 2, a) \in \text{Vect}(u, v)$ ssi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $w = \lambda u + v$. En passant au coordonnées :

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu = -1 \\ -4\lambda + 2\mu = 2 \\ 7\lambda - 3\mu = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = -1 \\ 0 = 0 \quad (\mathbf{L}_2 + 2\mathbf{L}_1) \\ \lambda = a + 3 \quad (\mathbf{L}_3 - 3\mathbf{L}_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2a + 4 \\ \lambda = a + 3 \end{cases}$$

Ce système est compatible quelle que soit la valeur de a . Donc $w \in \text{Vect}(u, v)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

3. On a $w = (-1, -1, a) \in \text{Vect}(u, v)$ ssi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $w = \lambda u + \mu v$. En passant au coordonnées :

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu = -1 \\ -4\lambda + 2\mu = -1 \\ 7\lambda - 3\mu = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = -1 \\ 0 = -3 \quad (\mathbf{L}_2 + 2\mathbf{L}_1) \\ \lambda = a + 3 \quad (\mathbf{L}_3 - 3\mathbf{L}_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2a + 4 \\ \lambda = a + 3 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

Ce système n'est pas compatible, et ce quelle que soit la valeur de a . Donc $\boxed{\text{pour tout } a \in \mathbb{R}, \text{ on a } w \notin \text{Vect}(u, v)}$

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que $u = (m, 1, m)$ appartient à $\text{Vect}(v, w)$ avec $v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, m, -1)$.

Correction 7. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que $u = (m, 1, m)$ appartient à $\text{Vect}(v, w)$ avec $v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, m, -1)$.

On a $u \in \text{Vect}(v, w)$ ssi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u = \lambda v + \mu w$, ie :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = m \\ \lambda + m\mu = 1 \\ \lambda - \mu = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = m \\ (m-1)\mu = 1-m \quad (\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1) \\ -2\mu = 0 \quad (\mathbf{L}_3 - \mathbf{L}_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = m \\ 0 = 1-m \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Ce système est compatible si et seulement si $m = 1$, donc $\boxed{u \in \text{Vect}(v, w) \text{ ssi } m = 1}$.

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, dire si la famille (u_i) engendre E :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $u_1 = (1, -1, -2)$, $u_2 = (7, 10, 3)$ et $u_3 = (3, -4, -7)$
2. $E = \mathbb{R}^4$ et $u_1 = (0, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 0, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1, 1)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, $u_5 = (1, 1, 1, 0)$

Correction 8.

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On peut écrire u comme combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3 ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$, soit en passant aux coordonnées :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = x \\ -\lambda_1 + 10\lambda_2 - 4\lambda_3 = y \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 7\lambda_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = x \\ 17\lambda_2 - \lambda_3 = x + y \\ 17\lambda_2 - \lambda_3 = 2x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = x \\ 17\lambda_2 - \lambda_3 = x + y \\ 0 = x - y + z \end{cases}$$

Or la dernière équation n'est pas vérifiée pour toutes les valeurs de (x, y, z) , donc $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ n'engendre pas } \mathbb{R}^3}$

Remarque : on vient de montrer que $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$, c'est donc un plan de \mathbb{R}^3 .

2. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On peut écrire u comme combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 ssi il existe des λ_i tels que $u = \sum_{i=1}^5 \lambda_i u_i$. En passant aux coordonnées, on obtient cette fois un système compatible quelles que soient les valeurs de (x, y, z, t) . Donc $\boxed{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \text{ engendre } \mathbb{R}^4}$.

Familles libres

Exercice 9. Les familles suivantes de \mathbb{R}^3 sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.

1. $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -1)$ et $w = (1, 5, -1)$
2. $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (3, 1, \lambda)$ λ paramètre réel.
3. $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (4, -2, 1)$
4. $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$ et $t = (1, 1, 1)$

Correction 9.

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$, soit en passant aux coordonnées :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, donc la famille est libre.

2. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$, soit en passant aux coordonnées :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_2 - (\lambda + 6)\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -(\lambda - 2)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On doit alors faire deux cas :

Cas 1 : si $\lambda \neq 2$. Dans ce cas, la dernière équation donne $\lambda_3 = 0$, puis en remontant $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, donc la famille est libre.

Cas 2 : si $\lambda = 2$. Dans ce cas, la dernière équation donne $0 = 0$, et le système équivaut à :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases}$$

La famille est donc liée. En prenant comme valeur particulière $\lambda_3 = 1$, on obtient $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_1 = 1$, soit la relation : $u - 2v + w = 0$.

3. De même, on montre que la famille est libre.
4. On a 4 vecteurs dans \mathbb{R}^3 de dimension 3 donc la famille est liée. De plus, avec la méthode du dessus, on trouve comme relation de liaison $w = u + v + w$.

Exercice 10. Pour quelles valeurs du réel m la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre dans \mathbb{R}^4 ?

$$u_1 = (1, 1, 0, 0) \quad u_2 = (1, m, 1, 0) \quad u_3 = (1, 0, m, 1) \quad u_4 = (1, 0, 0, m)$$

Correction 10. Soient λ_i tels que $\sum_{i=1}^4 \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{R}^4}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + m\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 + m\lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m^3 + m^2 - m + 1)\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 = -m^3\lambda_4 \\ \lambda_2 = m^2\lambda_4 \\ \lambda_3 = -m\lambda_4 \end{cases}$$

On résout $-m^3 + m^2 - m + 1 = 0$. Une solution particulière est $m = 1$. On factorise par $(m - 1)$, et on obtient $-m^3 + m^2 - m + 1 = (m - 1)(m^2 - 1) = (m - 1)^2(m + 1)$. On doit donc faire plusieurs cas :

- Cas 1 : si $m = 1$. Alors la première équation équivaut à $0 = 0$, et on a donc des solutions non nulles au système : la famille est liée. De plus, en prenant $\lambda_4 = 1$, on obtient $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$, donc la relation de liaison est $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$.
- Cas 2 : si $m = -1$: à nouveau la famille est liée. De plus, en prenant $\lambda_4 = 1$, on obtient $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$, donc la relation de liaison est $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$.
- Cas 3 : si $m \notin \{-1, 1\}$: alors le système a pour seule solution $(0, 0, 0, 0)$, donc la famille est libre.

Base, Dimension

Exercice 11. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . Donner une base de F et sa dimension.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 3z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 4z = 0\}$
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x + 2y - 2z, -x + 3y - z, x + 7y - 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
4. $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad 2xy + z - t = 0 \text{ et } x - y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - at = 0\}$ avec a un paramètre réel.

Correction 11.

1. On met F sous forme vectorielle, et on obtient : $F = \text{Vect}((2, 5, 1))$. La famille $((2, 5, 1))$ est libre car elle ne comporte qu'un seul vecteur non nul, donc c'est une base de F , et $\dim F = 1$.
2. On met F sous forme vectorielle, et on obtient : $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (-4, 0, 1))$. On montre que la famille $((1, 1, 0), (-4, 0, 1))$ est libre, donc c'est une base de F , et $\dim F = 2$.
3. On a $F = \text{Vect}((1, 2, -2), (-1, 3, -1), (1, 7, -5))$, mais la famille n'est pas libre. On en extrait une famille libre : $((1, 2, -2), (-1, 3, -1))$, qui est alors une base, et donc $\dim F = 2$.
4. On met sous forme vectorielle, et pour cela on résout :

$$\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + 2y - at = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ 3y - z - 3t = 0 \\ (2 - a)t = 0 \end{cases}$$

On fait deux cas :

Cas 1 : si $a = 2$, alors on a $F = \text{Vect}((-2, 1, 3, 0), (-4, 0, -3, 1))$, cette famille est bien libre et $\dim F = 2$.

Cas 2 : si $a \neq 2$, alors on a $t = 0$, $F = \text{Vect}((-2, 1, 3, 0))$, cette famille est bien libre et $\dim F = 1$.

Exercice 12. Les familles suivantes sont-elles libres ? Si oui, on les complètera en une base de \mathbb{R}^3 et si non, on donnera la relation de liaison. Sont-elles génératrices de \mathbb{R}^3 ? Si oui, on en extraira une base de \mathbb{R}^3 , si non, on donnera un vecteur de \mathbb{R}^3 qui ne s'exprime pas en fonction des vecteurs de la famille.

1. $\mathcal{F}_1 = ((2, 4, 3), (1, 5, 7))$
2. $\mathcal{F}_2 = ((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6))$
3. $\mathcal{F}_3 = ((9, 3, -7), (1, 8, 8), (5, -5, 1))$
4. $\mathcal{F}_4 = ((0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1))$

Correction 12. 1. La famille n'est pas génératrice car elle a moins de 3 éléments. Ce n'est donc pas une base. On montre toujours avec la même méthode que \mathcal{F}_1 est libre. Pour la compléter en une base de \mathbb{R}^3 , il faut ajouter un vecteur non lié. On prend par exemple $(1, 0, 0)$, et on regarde si la famille est libre si elle ne l'est pas, on essaye avec un autre vecteur). Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1(2, 4, 3) + \lambda_2(1, 5, 7) + \lambda_3(1, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$, et on cherche des valeurs de x, y, z telles que la seule solution soit $(0, 0, 0)$. On doit résoudre :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 13\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \quad \mathbf{4L_3 - 3L_2}$$

La famille $((2, 4, 3), (1, 5, 7), (1, 0, 0))$ est alors libre et de taille 3. Comme \mathbb{R}^3 est de dimension 3, c'est bien une base de \mathbb{R}^3 .

2. On remarque que la famille ne peut pas être libre car elle comporte plus de 3 éléments. Ce n'est donc pas une base. Soient à nouveau $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\sum_{i=1}^4 \lambda_i u_i = 0$, soit

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 - 3\lambda_4 \end{cases}$$

On a ici deux degrés de liberté, il faut donc enlever 2 vecteurs pour obtenir une famille libre. On prend des valeurs particulières, tout d'abord $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = 0$, qui donnent $u_1 - 2u_2 + u_3 = 0$, donc on peut exprimer u_3 en fonction de u_1 , et u_2 , ce qui permet de supprimer u_3 . De même, pour $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 1$, on obtient $2u_1 - 3u_2 + u_4 = 0$, ce qui permet de supprimer u_4 . On a donc $\text{Vect}((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6)) = \text{Vect}((1, 2, 3), (2, 3, 4))$, et cette famille est bien libre (pour le montrer, on pourrait reprendre le système précédent pour $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 0$). On peut la compléter en une base de \mathbb{R}^3 en ajoutant le vecteur $(1, 0, 0)$ (à détailler).

3. On montre que la famille est libre. Comme elle est de taille 3, c'est une base de \mathbb{R}^3 .
4. On montre que la famille est libre. Comme elle est de taille 3, c'est une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 13. Soit la famille (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1, 7, 2)$, $v_2 = (3, 5, 9)$ et $v_3 = (2, 4, 6)$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de \mathbb{R}^3 . Quelle est la matrice des coordonnées de $u = (0, -2, -1)$ dans cette base ?

Correction 13. Comme la famille est de taille 3, il suffit de montrer qu'elle est libre, toujours avec la même méthode (on pourrait aussi montrer qu'elle est génératrice, mais c'est souvent plus calculatoire). Pour obtenir ensuite les coordonnées de u , on cherche les λ_i tels que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, soit

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 7\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = -2 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 6\lambda_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 19 \\ \lambda_2 = -11 \\ \lambda_3 = 7 \end{cases}$$

On en déduit que $M_{(v_1, v_2, v_3)}(u) = \begin{pmatrix} 19 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par (u, v) avec $u = (1, -1, 2)$ et $v = (2, 1, 3)$.

1. Montrer que (u, v) est une base de E
2. Vérifier que le vecteur $(3, 3, 4)$ appartient bien à E et déterminer ses coordonnées dans la base (u, v) .

Correction 14. 1. Comme (u, v) est par définition une famille génératrice de F , il suffit de montrer que c'est aussi une famille libre, et ce avec la méthode habituelle.

2. On répond aux deux questions en même temps. Cherchons λ, μ tels que $(3, 3, 4) = \lambda u + \mu v$, ie :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 3 \\ -\lambda + \mu = 3 \\ 2\lambda + 3\mu = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 3 \\ 3\mu = 6 \\ -\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Donc $w = (3, 3, 4) \in E$ et sa matrice de coordonnées est donnée par $M_{(u, v)}(w) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. On désigne par E l'espace vectoriel \mathbb{C}^3 . On considère les parties suivantes de E :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, \quad x + iy - z = 0\} \quad G = \{(a + ib, a - ib, a + b), \quad (a, b) \in \mathbb{C}^2\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sev de E . Donner une base pour chacun de ces sev.
2. Donner une équation cartésienne de G .
3. Donner un système d'équations cartésiennes et une base pour $H = F \cap G$.
4. Donner une base de E composé d'un vecteur de F , d'un vecteur de G et d'un vecteur quelconque.

Correction 15. On désigne par E l'espace vectoriel \mathbb{C}^3 . On considère les parties suivantes de E :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, \quad x + iy - z = 0\} \quad G = \{(a + ib, a - ib, a + b), \quad (a, b) \in \mathbb{C}^2\}.$$

1. On met F et G sous forme vectorielle : $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, i))$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1), (i, -i, 1))$.
On montre que ces familles sont aussi libres, et sont donc des bases respectives de F et G .

2. On a $(x, y, z) \in G$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(i, -i, 1)$, soit

$$\begin{cases} \lambda + i\mu = x \\ \lambda - i\mu = y \\ \lambda + \mu = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + i\mu = x \\ -2i\mu = y - x \\ (1 - i)\mu = z - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + i\mu = x \\ -2i\mu = y - x \\ 0 = (1 - i)y - (1 + i)x + 2iz \end{cases}$$

Ce système est compatible ssi la dernière équation est vérifiée. On a donc : $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, (1 - i)y - (1 + i)x + 2iz = 0\}$

3. On a donc $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, x + iy - z = 0 \text{ et } (1 - i)y - (1 + i)x + 2iz = 0\}$. On met ensuite H sous forme vectorielle, et on obtient : $H = \text{Vect}((-i, 1, 0))$. Cette famille ne contient qu'un seul vecteur non nul, c'est donc une base de H .
4. On choisit $u = (1, 0, 1) \in F$, $v = (1, 1, 1) \in G$, et au hasard, $w = (1, 0, 0)$. On montre ensuite que la famille (u, v, w) est bien libre (si par malchance, la famille est liée, on choisit un autre vecteur), et que donc (u, v, w) est une base de \mathbb{C}^3 .

Exercice 16. Donner la dimension de $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec $v_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, -2, 0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0, -2)$ et $v_4 = (-1, -5, 1, 2, 5)$.

Correction 16. Soient λ_i tels que $\sum_i \lambda_i v_i = 0_{R^5}$, soit :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 - 5\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_4 \\ \lambda_2 = -2\lambda_4 \\ \lambda_3 = \lambda_4 \end{cases}$$

On en déduit que la famille est liée. En prenant $\lambda_4 = 1$, on voit que $-v_1 - 2v_2 + v_3 + v_4 = 0$, donc on peut exprimer v_4 en fonction des autres, et donc le supprimer. On montre que la famille (v_1, v_2, v_3) est alors libre (en prenant $\lambda_4 = 0$ dans le système précédent par exemple), et donc que c'est une base de F . On a donc $\dim F = 3$.

Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un système linéaire

Exercice 17. Pour chaque famille de vecteurs, donner le rang et une base du sev engendré :

- $E = \mathbb{R}^4$ et $u = (1, 1, 0, 0)$, $v = (3, -1, 3, -1)$, $w = (0, 1, 0, 1)$, $x = (-1, 5, -1, 5)$
- $E = \mathbb{C}^2$ et $u = (1, i)$, $v = (i, -1)$
- $E = \mathbb{R}^4$ et $u = (1, 0, 0, -1)$, $v = (2, 1, 0, 1)$, $w = (1, -1, 1, -1)$, $x = (7, 2, 0, 1)$, $y = (-2, -3, 1, 0)$.

Correction 17. 1. $E = \mathbb{R}^4$ et $u = (1, 1, 0, 0)$, $v = (3, -1, 3, -1)$, $w = (0, 1, 0, 1)$, $x = (-1, 5, -1, 5)$: il y a deux méthodes pour trouver le rang d'une famille de vecteurs, soit en calculant le rang du système linéaire associé, soit en calculant le rang de la matrice de la famille. L'avantage de la première méthode est qu'elle donne directement les relations de liaison entre les vecteurs si

ceux-ci sont liés, et permet donc d'extraire une famille libre. On choisit cette méthode ici : soient λ_i tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w + \lambda_4 x = 0$, ie :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 + 5\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_3 + 14\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

La famille est donc liée, et en prenant $\lambda_4 = 1$, on voit que l'on peut éliminer x de la famille. On obtient alors (u, v, w) famille génératrice et libre (le montrer en prenant $\lambda_4 = 0$ par exemple), donc une base, et donc le rang de \mathcal{F} est 3.

2. $E = \mathbb{C}^2$ et $u = (1, i)$, $v = (i, -1)$: avec la même méthode, on obtient que le rang est 1 et une base est (u) .
3. $E = \mathbb{R}^4$ et $u = (1, 0, 0, -1)$, $v = (2, 1, 0, 1)$, $w = (1, -1, 1, -1)$, $x = (7, 2, 0, 1)$, $y = (-2, -3, 1, 0)$: avec la même méthode, on obtient que le rang est 4 et une base est (u, v, w, x) .

Exercice 18. Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) avec $u_1 = (\lambda, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, \lambda, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, \lambda, 1)$ et $u_4 = (1, 1, 1, \lambda)$. Discuter selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction 18. On utilise ici la méthode matricielle, car on ne cherche que le rang. On applique la méthode du pivot de Gauss à la matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

On obtient une matrice triangulaire. On différencie deux cas :

Cas 1 : si $\lambda = 1$, alors toutes les lignes sont nulles sauf la première, donc le rang est 1.

Cas 2 : si $\lambda \neq 1$, alors toutes les lignes sont non nulles, donc le rang est 4.

Correction 19. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants définis par

1. $E = \text{Vect}((1, 1, -2), (2, 1, -3), (0, 1, -1))$: en résolvant le système linéaire associé, on montre que la famille est liée et que le dernier vecteur peut être supprimé : $((1, 1, -2), (2, 1, -3))$ est une base de E .
2. $F = \text{Vect}((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$: on montre cette fois que l'on peut supprimer les deux derniers vecteurs : $((4, -5, 3), (2, 3, -2))$ est une base de E .

Exercice 19. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants définis par

1. $E = \text{Vect}((1, 1, -2), (2, 1, -3), (0, 1, -1))$
2. $F = \text{Vect}((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$

Correction 20. On applique la méthode du pivot de Gauss à la matrice M définie par $M = \begin{pmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & m-3 & 4 \\ 3 & -3 & m+5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & m-3 & 4 \\ 3 & -3 & m+5 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ m & -1 & 2 \\ 3 & -3 & m+5 \end{pmatrix} \\ \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ 0 & -2-m^2+3m & 4-4m \\ 0 & 3-3m & 2m-2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ 0 & -(m-1)(m-2) & -4(m-1) \\ 0 & -3(m-1) & 2(m-1) \end{pmatrix}$$

On fait alors 2 cas :

Cas 1 : si $m = 1$, la matrice est échelonnée et il n'y a que la première ligne qui est non nulle, donc le rang est 1.

Cas 2 : si $m \neq 1$, on a alors :

$$M \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ 0 & -3(m-1) & 2(m-1) \\ 0 & -(m-1)(m-2) & -4(m-1) \end{pmatrix} \\ \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ 0 & -3(m-1) & 2(m-1) \\ 0 & 0 & -2m^2+6m-8 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ 0 & -3(m-1) & 2(m-1) \\ 0 & 0 & 2(m-1)(m+4) \end{pmatrix}$$

On fait à nouveau deux cas :

Cas 2.1 : si $m = -4$, alors la matrice est échelonnée et seules les deux premières lignes sont non nulles, donc le rang est 2.

Cas 2.2 : si $m \notin \{1, -4\}$, alors la matrice est échelonnée et les 3 lignes sont non nulles, donc le rang est 3.

Type DS

Exercice 20. On considère les ensembles suivants :

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$$

$$F = \text{Vect}(u_1 = (1, 3, 0, 2), u_2 = (2, 7, -3, 6), u_3 = (1, 1, 6, -2))$$

- (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
(b) Déterminer une base \mathcal{B}_E de E . Quelle est la dimension de E ?
- Déterminer une base \mathcal{B}_F de F . Quelle est la dimension de F ?
- Déterminer une représentation cartésienne de F
- Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
- (a) On considère la famille de vecteurs \mathcal{F} formée des vecteurs de \mathcal{B}_E et de \mathcal{B}_F . Montrer que la famille \mathcal{F} est libre. (En étant astucieux et en utilisant la question 4, c'est assez rapide)
(b) Justifier que \mathcal{F} est une base et en déduire que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F})$
- On considère le vecteur $u = (2, 3, 1, 2)$. Donner les coordonnées de u dans la base \mathcal{F} .

7. Soit $u \in \mathbb{R}^4$. Dédurre des résultats précédents qu'il existe un unique vecteur $e \in \mathcal{E}$ et un unique vecteur $f \in \mathcal{F}$ tels que $u = e + f$. Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^4$, cet unique vecteur $e \in \mathcal{E}$ est appelé le projeté de u sur \mathcal{E} parallèlement à \mathcal{F} . On le note $p(u)$ pour les questions suivantes.
8. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les composantes de $p(u)$ en fonction de x, y, z et t .
9. Vérifier que :
- (a) $\forall u \in \mathcal{E}, p(u) = u$,
 - (b) $\forall u \in \mathcal{F}, p(u) = 0$.

Correction 21. 1. (a) On résout le système définissant les éléments de E :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_4 = -2x_3 \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} E &= \{(x_2 + x_3, x_2, x_3, -2x_3) \mid (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x_2(1, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, -2) \mid (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -2)) \end{aligned}$$

Ainsi E est un sev de \mathbb{R}^4 et $((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -2))$ en est une famille génératrice.

- (b) Comme la famille $((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -2))$ est libre, (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) cette famille est une base de E .

E est de dimension 2

2. Calculons le rang de (u_1, u_2, u_3) , en calculant le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

On a

$$\text{rg}((u_1, u_2, u_3)) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Ainsi

$$\dim(F) = 2$$

De plus, les vecteurs (u_1, u_2) forment une famille libre : ce sont deux vecteurs non colinéaires, comme $\text{Card}(u_1, u_2) = 2 = \dim(F)$ cette famille est donc une base de F .

$$\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } F}$$

3. Comme (u_1, u_2) est une base de F , on a $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, u = \lambda u_1 + \mu u_2$
 Pour obtenir une représentation cartésienne de F , on résout ensuite le système d'inconnue (λ, μ) et de paramètre (x_1, x_2, x_3, x_4) . On obtient

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda + 2\mu = x_1 \\ 3\lambda + 7\mu = x_2 \\ -3\mu = x_3 \\ 2\lambda + 6\mu = x_4 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + 2\mu = x_1 \\ \mu = x_2 - 3x_1 \\ -3\mu = x_3 \\ +2\mu = x_4 - 2x_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda + 2\mu = x_1 \\ \mu = x_2 - 3x_1 \\ 0 = x_3 + 3(x_2 - 3x_1) \\ 0 = x_4 - 2x_1 - 2(x_2 - 3x_1) \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux dernières équations sont les équations de compatibilités du système, on a donc

$$\boxed{F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -9x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}}$$

4. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \cap F &\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ -9x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \\ -6x_2 - 8x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -6x_2 - 8x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -6x_2 - 8x_3 = 0 \\ 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -6x_2 - 8x_3 = 0 \\ 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 0 \quad 5x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est de rang 4 à 4 inconnues, il admet donc une unique solution. Comme il est homogène, cette solution est $(0, 0, 0, 0)$. Ainsi

$$\boxed{E \cap F = \{(0, 0, 0, 0)\}}$$

5. (a) Avec nos choix de \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F on obtient

$$\mathcal{F} = ((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -2), (1, 3, 0, 2), (2, 7, -3, 6))$$

Pour montrer que cette famille est libre on peut soit faire la méthode "habituelle" soit procéder de la façon suivante.

On note $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, -2)$ et l'énoncé note $u_1 = (1, 3, 0, 2)$, $u_2 = (2, 7, -3, 6)$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2 = O_{\mathbb{R}^4}$$

On obtient alors

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = -(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2)$$

Or comme E et F sont des sev de \mathbb{R}^4 on a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in F$ et $-(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2) \in E$ Mais comme ces deux vecteurs sont égaux on a donc

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in F \cap E \quad \text{et} \quad -(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2) \in E \cap F$$

Ainsi

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = O_{\mathbb{R}^4} \quad \text{et} \quad -(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2) = O_{\mathbb{R}^4}$$

Mais comme (v_1, v_2) et (u_1, u_2) sont des familles libres, on a alors :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Ainsi la famille \mathcal{F} est libre

(b) \mathcal{F} est une famille libre et de plus $\text{Card}(\mathcal{F}) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$.

\mathcal{F} est donc une base de \mathbb{R}^4

6. Il faut résoudre le système

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2 = (2, 3, 1, 2)$$

On obtient

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 \\ \lambda_1 & & +3\lambda_3 & +7\lambda_4 \\ & \lambda_2 & & -3\lambda_4 \\ & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & +6\lambda_4 \end{array} \right. = \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \\
& \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 \\ & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 \\ & \lambda_2 & & -3\lambda_4 \\ & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & +6\lambda_4 \end{array} \right. = \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \\
& \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1; L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2} \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 \\ & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 \\ & & +2\lambda_3 & +2\lambda_4 \\ & & -2\lambda_3 & -4\lambda_4 \end{array} \right. = \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \\
& \xLeftrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 \\ & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 \\ & & +2\lambda_3 & +2\lambda_4 \\ & & & -2\lambda_4 \end{array} \right. = \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \\
& \xLeftrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 / (-2)} \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 \\ & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{array} \right. = \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{array} \\
& \xLeftrightarrow{} \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & -2 & +2 & -2 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{array} \right. = \begin{array}{l} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{array} \\
& \xLeftrightarrow{} \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{array} \right. = \begin{array}{l} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{array}
\end{aligned}$$

Ainsi la matrice de coordonnées de u dans la base \mathcal{F} est

$$M_{\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7. Comme $0_{\mathbb{R}^4} \in E$ et $0_{\mathbb{R}^4} \in F$ donc $0_{\mathbb{R}^4} + 0_{\mathbb{R}^4} = 0_{\mathbb{R}^4} \in G$. Ainsi G est non vide.

Soit $(x_1, x_2) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $x_i \in G$ on a $x_1 = e_1 + f_1$ et $x_2 = e_2 + f_2$ où $e_i \in E$ et $f_i \in F$
Ainsi

$$\begin{aligned}
x_1 + \lambda x_2 &= e_1 + f_1 + \lambda(e_2 + f_2) \\
&= e_1 + \lambda e_2 + (f_1 + \lambda f_2)
\end{aligned}$$

Comme E et F sont des sev, $e_1 + \lambda e_2 \in E$ et $f_1 + \lambda f_2 \in F$. Ainsi

$$x_1 + \lambda x_2 \in G$$

$$\boxed{G \text{ est un sev de } \mathbb{R}^4}$$

8.

$$u_1 = u_1 + 0_{\mathbb{R}^4}, u_2 = u_2 + 0_{\mathbb{R}^4}, v_1 = 0_{\mathbb{R}^4} + v_1, v_2 = 0_{\mathbb{R}^4} + v_2$$

Donc

$$u_1, u_2, v_1, v_2 \in G$$

Ainsi

$$\text{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2) \subset G$$

Comme (u_1, u_2, v_1, v_2) est une famille libre,

$$\dim \text{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2) = 4$$

Ainsi

$$4 \leq \dim(G)$$

Or $G \subset \mathbb{R}^4$ donc $\dim(G) \leq 4$ ainsi

$$\boxed{\dim(G) = 4 \text{ et } G = \mathbb{R}^4 \text{ et}}$$

Bonus pour l'année prochaine

Exercice 21. On admet que l'ensemble E des suites réelles est un espace vectoriel. Montrer que l'ensemble des suites bornées est un sev de E .

Correction 22. On admet que l'ensemble E des suites réelles est un espace vectoriel. Montrer que l'ensemble des suites bornées est un sev de E .

Soit F l'ensemble des suites bornées. On a bien $F \subset E$, et F non vide puisque la suite constante égale à 0 est dans F .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de F , et $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda u_n + v_n$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée également. Ainsi, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$.

On a donc bien montré que $\boxed{F \text{ est un sev de } E}$.

Exercice 22. On admet que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $S_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Soit $E_{i,j}$ la matrice n'ayant que des 0 sauf le coefficient (i,j) qui vaut 1. Montrer que la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,3} + E_{3,2})$ forme une base de $S_3(\mathbb{R})$. et en déduire sa dimension.
3. Montrer que l'ensemble des matrices anti-symétriques $A_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Trouver une base de $A_3(\mathbb{R})$ et en déduire sa dimension.
5. Que pouvez-vous conjecturer pour la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ et de $A_n(\mathbb{R})$?

Correction 23. On admet que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

1. **Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $S_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**

On a bien $S_3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $S_3(\mathbb{R})$ est non vide puisque la matrice nulle est symétrique, donc $0_3 \in S_3(\mathbb{R})$. Soient A et B des matrices de $S_3(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que la matrice $C = \lambda A + B$ est symétrique. On a :

$${}^tC = {}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB = \lambda A + B = C$$

car A et B sont symétriques. Ainsi ${}^tC = C$ et $C \in S_3(\mathbb{R})$.

On a donc bien montré que $S_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. **Soit $E_{i,j}$ la matrice n'ayant que des 0 sauf le coefficient (i, j) qui vaut 1. Montrer que la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,3} + E_{3,2})$ forme une base de $S_3(\mathbb{R})$. et en déduire sa dimension.**

On doit montrer que la famille est à la fois libre et génératrice.

- Montrons que la famille est libre : soient $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ tels que :

$$aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{3,3} + d(E_{1,2} + E_{2,1}) + e(E_{1,3} + E_{3,1}) + f(E_{2,3} + E_{3,2}) = 0_3$$

$$\Leftrightarrow a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = d = e = f = 0$$

On en déduit que la famille est libre.

- Montrons que la famille est génératrice : soit A une matrice symétrique. On a, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $a_{i,j} = a_{j,i}$. On peut alors écrire A sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{3,3} + d(E_{1,2} + E_{2,1}) + e(E_{1,3} + E_{3,1}) + f(E_{2,3} + E_{3,2}).$$

Ainsi toute matrice symétrique peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille considérée. Cette famille est donc génératrice.

On a donc montré que $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,3} + E_{3,2})$ est une base de $S_3(\mathbb{R})$.

On en déduit que $\dim(S_3(\mathbb{R})) = 6$.

3. **Montrer que l'ensemble des matrices anti-symétriques $A_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**

On raisonne comme pour les matrices symétriques : on a bien $A_3(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $A_3(\mathbb{R})$ est non vide puisque la matrice nulle est anti-symétrique, donc $0_3 \in A_3(\mathbb{R})$. Soient A et B des matrices de $A_3(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que la matrice $C = \lambda A + B$ est anti-symétrique. On a :

$${}^tC = {}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB = -\lambda A - B = -C$$

car A et B sont anti-symétriques. Ainsi ${}^tC = -C$ et $C \in A_3(\mathbb{R})$.

On a donc bien montré que $A_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. **Trouver une base de $A_3(\mathbb{R})$ et en déduire sa dimension.**

On montre de la même manière que pour les matrices symétriques $(E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,3} - E_{3,1}, E_{2,3} - E_{3,2})$ est une base de $A_3(\mathbb{R})$ et on en déduit que $\dim(A_3(\mathbb{R})) = 3$.

5. **Que pouvez-vous conjecturer pour la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ et de $A_n(\mathbb{R})$?**

Pour définir une matrice symétrique, il faut choisir ses coefficients diagonaux, ainsi que les coefficients au dessus de la diagonale. Les coefficients en-dessous de la diagonale seront alors définis par la propriété $a_{i,j} = a_{j,i}$. On doit donc compter combien il existe de coefficients (i,j) tels que $1 \leq i \leq j \leq n$. Pour cela, on peut calculer la somme double suivante :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j 1 = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On conjecture donc que $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Une autre façon de faire le calcul est de représenter le triangle des points considérés. En rassemblant deux triangles, on obtient un rectangle de taille $n \times (n+1)$. Ainsi, il y a bien $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients à choisir.

Pour les matrices antisymétriques, les coefficients diagonaux sont nécessairement nuls. On ne peut choisir que les coefficients strictement au-dessus de la diagonale. Le même calcul que précédemment donne alors

$$\dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$