Correction - Interro 7

Exercice 1. Donner les solutions sur $\mathbb{C}$ de $z^6 = 1$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Correction 1. L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \{e^{i0}, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\}$$

Soit sous forme algébrique :

$$\mathcal{S} = \{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n

Correction 2. C'est une suite arithmético-géométrique. On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $v_n = u_n - \alpha$ soit géométrique. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \alpha \\ &= 2u_n - 1 - \alpha \\ &= 2(v_n + \alpha) - 1 - \alpha \\ &= 2v_n - 1 + \alpha \end{aligned}$$

On pose donc $\alpha = 1$ et ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géomtrique de raison 2.
Donc

$$v_n = 2^n v_0$$

et finalement

$$\boxed{u_n = 3 \times 2^n + 1}$$