DS2

3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. 1. Déterminer un réel $r \in \mathbb{R}_+$ et un réel $\varphi \in [-\pi, \pi[$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = r\cos(x + \varphi)$$

2. En déduire les solutions de l'équation (T) suivante sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, \pi[$

$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos(2x) \quad (T)$$

Exercice 2. On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$\sin(3x) - \sin(x) \geq 0 \quad (E)$$

1. Dire si $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont solutions de (E)
2. (INFO) Completer la fonction Python suivante qui prend en argument un flottant x et retourne `True` si x est solution de (E) et `False` sinon. (On recopiera l'intégralité de la fonction sur la copie)

```
from math import sin
def est_solution(x):
    if sin(3*x)-sin(x) ...........
        return(........)
    else:
        return(.....)
```

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

4. Résoudre $-2X^3 + X \geq 0$
5. En déduire les solutions de (E) sur $[0, 2\pi[$.

Exercice 3. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}.$$

1. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.

   On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^x - 2e^x + 2$.
2. Déterminer les variations de h. On ne demande pas les limites en $\pm\infty$, mais on notera les valeurs des extrema et la valeur de $h(0)$.

   On rappelle que $e \in]2, 3[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle $[1;\ 2]$ tel que $h(a) = 0$. On ne cherchera pas à expliciter a.
   En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations. On demande ici les limites aux bornes.
5. (INFO) Ecrire une fonction Python qui prend en argument un flottant x et renvoie la valeur de $f(x)$ si x est dans l'ensemble de définition de f et 'erreur' sinon.
6. (INFO) Ecrire une fonction Python qui prend en argument deux flottants (x, y) et renvoie :

— Un message d'erreur si x ou y n'est pas dans l'ensemble de définition de f.
— `True` si $f(x) \geq f(y)$
— `False` si $f(x) < f(y)$

Exercice 4. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, développer $(k+1)^4 - k^4$.
3. En calculant $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4$ de deux manières différentes, donner la valeur de $R = \sum_{k=0}^{n} k^3$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. (On pourra garder une formule développée, malgré ce que j'ai pu dire en classe...)
4. (INFO) Soit $p \in \mathbb{N}$, on note $R_x(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$ Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ et renvoie la valeur de $R_p(n)$

Exercice 5 (INFO)**.** On dispose de la fonction suivante :

```
def mystere(x,y):
    if x>y:
        return x-y
    else:
        return y-x
```

1. Soient x, y deux réels à quoi correspond mathématiquement la valeur de `mystere(x,y)` ? (j'attends une formule mathématiques, pas une explication d'un paragraphe !)

   On importe la fonction racine de la bibliothèque math à l'aide de la commande `from math import sqrt`
2. Que renvoie `mystere(2**3-1, 3**2-2)` ? Justifier.
   On dispose de la fonction suivante :

```
def mystere2(x,y):
    if x+y<3:
        return 2*x
    elif x-y>4:
        return y
    else:
        return x+y
```

3. Que renvoie `mystere2(1,-4)` ? Justifier.
4. Que renvoie `mystere2(2,mystere(3,4))` ? Justifier.