Devoir Vacances

Lundi 24/10/2021

Correction 1.

1. $D_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = (2x+1)e^{-\frac{1}{x}}$
2. $z = \frac{-1}{2^6}$, $Re(z) = \frac{-1}{2^6}$, $Im(z) = 0$
3. $\frac{(n+3)(n+4)}{2} - 1$
4. $u_n = -\frac{1}{2^n} + 2$

Mardi 25/10/2021

Correction 2.

1. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x+2x}{e^x+x^2}$
2. $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2^n}\right)$
3. 8
4. $u_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$
5. $z = e^{-i\pi/6}$ donc $Re(z) = cos(\frac{pi}{6}$ et $Im(z) = \sin(\frac{-\pi}{6}$

Mercredi 26/10/2021

Correction 3.

1. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = (\cos(x) - x\sin(x))e^{x\cos(x)}$
2. Soit $S_n = \sum_{i=0}^{n}(2x)^{2i}$, (Remarque : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quasiment sous la forme d'une somme d'une suite géométrique. On utilise $a^{nm} = (a^n)^m$))

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}((2x)^2)^i = \sum_{i=0}^{n}(4x^2)^i$$

On applique ensuite la formule du cours : Si $x^2 \neq \frac{1}{4}$:

$$S_n = \frac{1-(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2}$$

Et donc : $S_n = \frac{1-(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2} = \frac{1-4^{n+1}x^{2n+2}}{1-4x^2}$ si $x^2 \neq \frac{1}{4}$
$S_n = n+1$ si $x^2 = \frac{1}{4}$

3. Soit $v_n = u_n - \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. On cherche ℓ afin que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= 2u_n + 1 - \ell \\ &= 2(v_n + \ell) + 1 - \ell \\ &= 2v_n + \ell + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $\ell = -1$, on obtient $v_n = u_n + 1$ qui est une suite géométrique de raison 2. Donc $v_n = v_0 2^n$ et $v_0 = u_0 + 1 = 2$. On obtient donc $v_n = 2^{n+1}$. En revenant à u_n cela donne :

$$\boxed{u_n = v_n - 1 = 2^{n+1} - 1}$$

4. 0
5. $\mathcal{S} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

Jeudi 27/10/2021

Correction 4.

1. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{6\sin^2(2x)\cos(2x)(2+\cos(5x)-5\sin^3(2x)\sin(5x)}{(2+\cos(5x))^2}$
2. On étudie $D(x) = e^x - (x+1)$, définie sur $\mathbb{R}$ et $D'(x) = e^x - 1$. $D'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$. Le minimum de D est obtenu en 0 et vaut $e^0 - (0+1) = 0$ donc $D(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $e^x \geq x + 1$
3. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}(k^2+1)$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} k^2 + \sum_{k=2}^{n} 1 \quad \text{linéarité} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 1^2 + (n-1) \quad \text{n-1 nombre entre 2 et n} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 + n - 1 \quad formuleducours \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n - 2}$$

4. $z = \sqrt{2}e^{i\pi/2}$
5.
```
def somme_harmonique(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+1/k
    return(S)
```

Vendredi 28/10/2021

Correction 5.

1. $$f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+3x}}{3^x}\right)^4$$

   Rappelons que $3^x = exp(x\ln(3))$ est définie sur $\mathbb{R}$ et strictectement positif.
   Donc f est définie pour tout x vérifiant $x^2+3x \geq 0$ c'est à dire $x(x+3)\geq 0$ soit $D_f =]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$. Et f est dérivable sur $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$.
   On simplifie f en utilisant la puissance 4 : on a

   $$f(x) = \frac{(x^2+3x)^2}{3^{4x}}.$$

   Maintenant on utilise la formule de la dérivée d'un quotient $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = (x^2+3x)^2$ et $v(x) = 3^{4x} = \exp(4x\ln(3))$.
   Calculons les dérivées de ces deux fonctions :

   $$u'(x) = 2(2x+3)(x^2+3x)$$

   et

   $$v'(x) = 4\ln(3)\exp(4x\ln(3)) = 4\ln(3)3^{4x}$$

   On obtient alors :

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2(2x+3)(x^2+3x)3^{4x} - (x^2+3x)^2 4\log(3)3^{4x}}{3^{8x}} \end{aligned}$$

2. 0
3. $u_n = 1$
4. 0
5.

```python
from random import randint
def lancer_de_de():
    de=randint(1,6)
    return(de)
```

Samedi 29/10/2021

Correction 6.

1. On étudie $D(X) = \ln(1+X) - X$ sur $\mathbb{R}_+$. $D(X) \leq 0 \iff \ln(1+X) \leq X \iff 1+X \leq e^X$ qui est vrai pour tout $X \in \mathbb{R}$ d'aprés l'ex 4. Donc $\ln(1+X) \leq X$ pour tout $X \geq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $D(x^2) \leq 0$ c'est-à-dire $\ln(1+x^2) \leq x^2$
2. $D_f = [1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$.
$$f'(x) = \frac{1+\sqrt{x^2-1}}{x^2-1+x\sqrt{x^2-1}}$$
3. 1
4. $\mathcal{S} = [\frac{1}{2}, +\infty[$
5.
```
from math import *
def solution(x,y,z):
   L_1= (pi**2)*x +1.4*y +z
   L_2= log(2)*x+1.7*y +(2**4)*z
    if L_1==120 and L_2==0:
       return(True)
    else:
       return(False)
```
   def solutio

Dimanche 30/10/2021

REPOS!

Lundi 31/11/2021

REPOS!

Mardi 01/11/2021

Correction 7.

1. $D_f =]1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$
2. $f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$ $D_f =]0, +\infty[$ $f'(x) = (1+\ln(x))e^x x\ln(x)$, $f'(x) \geq 0 \iff x \in]e^{-1}, +\infty[$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{e^e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $u_n = \exp(\ln(2)(2^n - 1)) = 2^{2^n - 1}$
4. $\frac{1}{2}$
5. $z = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$

Mercredi 02/11/2021

Correction 8.

1. $D_f =]-2, -\frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-4-18x}{\sqrt{9x^2-4}(x+2)}$$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ pour $q \neq 1$.
   On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^k \\ &= \frac{1-{e^{\frac{i\pi}{n}}}^n}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}} \\ &= \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}} \\ &= \frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} e^{\frac{ik\pi}{n}} &= e^{\sum_{k=0}^{n} \frac{ik\pi}{n}} \\ &= e^{i\pi\frac{n(n+1)}{2n}} \\ &= e^{i\pi\frac{n+1}{2}}\end{aligned}$$

3. $\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\right)$

4.
```
from random import randint
def somme_des_lancers(n):
    S=0
    for i in range(n):
        S=S+randin(1,6)
    return(S)
```

5. Notons (E) l'équation $\sqrt{x+1} \leq x$.
   L'ensemble de définition de l'équation est $D = [-1, +\infty[$. Afin de mettre au carré on distingue les deux cas :

— Cas 1 : $x \geq 0$.
Alors $(E) \iff x+1 \leq x^2 \iff x^2-x-1 \geq 0$ On factorise x^2-x-1 à l'aide des racines $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on obtient

$$(E) \iff (x-r_1)(x-r_2) \geq 0$$

Donc $x \in]-\infty, r_1] \cup [r_2, +\infty[$, or on est dans le cas $x \geq 0$ on a donc

$$\boxed{\text{cas 1 } x \in [\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[}$$

— Cas 2 : $x < 0$.
Comme pour tout $x \in D$, $\sqrt{x+1} \geq 0$, l'équation (E) n'est jamais vérifiée.

$$\boxed{\text{cas 2 : pas de solution}}$$

Au final les solutions de (E) sont

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[}$$

Jeudi 03/11/2021

Correction 9.

1. Soit $P(n)$: " $\prod_{k=1}^{n} k! = \prod_{k=1}^{n} k^{n+1-k}$"

   (Initialisation) $P(1)$: " $\prod_{k=1}^{1} k! = \prod_{k=1}^{1} k^{1+1-k}$"
$$\prod_{k=1}^{1} k! = 1! = 1$$
   et
$$\prod_{k=1}^{1} k^{1+1-k} = 1^{2-1} = 1$$
   $P(1)$ est vraie.

   Hérédité.
   On suppose qu'il existe n tel que $P(n)$ soit vraie et montrons $P(n+1)$
$$\prod_{k=1}^{n+1} k! = (n+1)! \prod_{k=1}^{n} k!$$
   Par hypothèse de récurrence on a
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} k! &= (n+1)! \prod_{k=1}^{n} k^{n+1-k} \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} k \prod_{k=1}^{n} k^{n+1-k} \\ &= (n+1) \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} k^{n+1-k} \\ &= (n+1) \prod_{k=1}^{n} k \times k^{n+1-k} \\ &= (n+1) \prod_{k=1}^{n} k^{n+2-k}\end{aligned}$$
   Or $(n+1) = (n+1)^1 = (n+1)^{n+2-(n+1)}$. Donc $(n+1) \prod_{k=1}^{n} k^{n+2-k} = \prod_{k=1}^{n+1} k^{n+2-k}$
   Et finalement
$$\prod_{k=1}^{n+1} k! = \prod_{k=1}^{n+1} k^{n+2-k}$$

ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion :
Par principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

2. $D_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \pi(e^{2x} - 1)^{\pi-1}$
3. $u_n = 2^n$
4. $\mathcal{S} = \{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\}$
5.

```
from math import sqrt
def double_somme(n):
    S=0
    for j in range(1,n+1):
        for k in range(1,n+1):
            S=S+sqrt(j)/k
    return(S)
```

Vendredi 04/11/2021

Correction 10.

1. $D_f = \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. $D_f = \mathbb{R}^2$

$$f'(x) = \frac{-e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{e^{\frac{-x^2}{2}+1}}}$$

3. $+\infty$

4.
```
def minimum(a,b):
    if a<=b:
        return(a)
    else:
        return(b)
```

Samedi 05/11/2021

Correction 11.

1. $D_f =]-\infty, 0[$ $f'(x) = \frac{1}{x}$ (ce n'est pas une erreur de signe)
2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2\exp(x)\ln(x^2) - 2\exp(x)\frac{2}{x}}{(\ln(x^2))^2}$$

3.

```
def double_somme2(n):
    S=0
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,n+1):
            if i<j:
                S=S+i
            else:
                S=S+j
    return(S)
```

4. $\mathcal{S} = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [1, +\infty[$
5.

$$u_n \leq \frac{1}{n!}(n! + \sum_{k=0}^{n-1} k!)$$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ $k! \leq (n-1)!$

$$\begin{aligned} u_n &\leq 1 + \frac{1}{n!}(\sum_{k=0}^{n-1}(n-1)!) \\ &\leq 1 + \frac{1}{n!}(n(n-1)!) \\ &\leq 1 + 1 \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n!}\left(n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2}(n-2)! = \frac{1}{n!}(n-1)! \leq \frac{1}{n}$$

Donc

$$1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$$

Le théorème des gendarmes implique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.