Programme de colle : Semaine 28
Lundi 25 mai

1 Cours

1. Développements limités
   — Définition d'une fonction admettant un $DL_n(a)$.
   — Notation $o(x^n)$, notion de négligeabilité
   — Formule de Taylor-Young.
   — DL de exp, ln, cos, sin, $(1+x)^\alpha$
   — DL des polynomes et troncatures des DL.
2. Applications linéaires (encore et toujours)
   — Définition d'une application linéaire entre deux EV.
   — Définition du noyau et de l'image
   — Théorème liant injectivité et noyau
   — Théorème liant surjectivité et image
   — Définition du rang.
   — Théorème du rang et ses conséquences.
   — Ecrire de la matrice d'une application linéaire dans des bases fixées.
   — Application linéaire canoniquement associé à une matrice.
   — Lien entre opérations sur les matrices et opérations sur les applications linéaires.
3. Python :
   — Tableau numpy, dictionnaires
   — Représentation informatique d'un polynome par une liste (évaluation, racine, dérivation, somme)

2 Exercices Types

1. Soit f et g deux fonctions. Montrer que
$$f(x) \underset{g}{\sim} (x) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$$
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre donné :
   (a) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre 2
   (b) $f(x) = \sin x - x\cos x$ à l'ordre 8
   (c) $f(x) = \ln(x+1) - e^x$ à l'ordre 2
   (d) $f(x) = \tan^2 x$ à l'ordre 6

   Trouver un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de 0 :
   (a) $f(x) = \dfrac{2}{\sin x} - \dfrac{2}{\ln(1+x)}$
   (b) $f(x) = \sin(2x) - 2\sin x$
   (c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)$
   (d) $f(x) = (e+x)^e - e^{e+x}$
   (e) $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)$
3. Montrer que la fonction $f(x,y,z) = (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z)$ est linéaire.

4. Pour chacune des applications linéaires suivantes (on ne demande pas ici de vérifier qu'elles sont bien linéaires), décrire l'image et le noyau (en donner une base). En déduire si elles sont injectives, surjectives. Déterminer celles qui sont des isomorphismes, des automorphismes.
   (a) $f(x, y, z) = (x - 2y + z, x + y - 2z, -2x + y + z)$
   (b) $f(x, y) = (4x + y, x - y, 2x + 3y)$
   (c) $f(x, y, z) = (2x + y + z, x - y + 2z, x + 5y - 4z)$
5. Soit $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée à M.
   (a) Soit $u = (1, 2, -1)$. Montrer que (u) est une base de $\ker f$.
   (b) Soient $v = (1, 0, -1)$ et $w = (1, -1, 0)$. Calculer $f(v)$ et $f(w)$.
   (c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f relativement à cette base.
   (d) Montrer que $\operatorname{Im} f = \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$.
6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer le rang de f et une base et la dimension de $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$. On note $\mathcal{B}_1$ une base de l'image et $\mathcal{B}_2$ une base du noyau.
   (b) Démontrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.