DS 4 - Mathématiques

2h15

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2,$$

et (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Donner le tableau de variations de f.
2. Déterminer $f([0,2])$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,2]$.
4. Résoudre sur $[0,+\infty[$, l'inéquation $f(x) - x \geq 0$.
5. En déduire le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et déterminer sa limite.

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre λ.

$$(S_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & \lambda x \\ x & + & y & + & z & = & \lambda y \\ x & + & y & + & z & = & \lambda z \end{array} \right.$$

1. Échelonner le système.
2. Déterminer le rang de S_λ en fonction de λ.
3. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
4. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ.
5. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$.

Exercice 3. Pour tout réel $t > 0$, on note P_t le polynôme $x \to x^5 + tx - 1$. Le but de ce problème est d'étudier les racines de P_t en fonction de $t > 0$.

1. On fixe $t > 0$ pour cette question. Prouver que P_t admet une unique racine réelle notée $f(t)$.
2. Montrer que $f(t) \in]0,1[$ pour tout $t > 0$.
3. Soit g la fonction $g :]0,1[\to]0,+\infty[\ x \mapsto \frac{1-x^5}{x}$ montrer que g est bijective.
4. Justifier que f est la bijection réciproque de g
5. (a) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ pour tout $t > 0$.
   (b) En déduire le sens de variations de f.

Exercice 4. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[,\ f(1) = 1 \text{ et } \forall t > 0,\ f'(t) = f(1/t)$$

On fixe une fonction $f \in \mathcal{S}$.

1. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Rappeler la formule de dérivation d'une composée de fonctions $u \circ v$.
2. Justifier que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde en fonction de f.

   On définit maintenant g par

$$g(x) = f(e^x)$$

3. Donner l'ensemble de définition de g.
4. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est solution de l'équation différentielle suivante :

$$y'' - y' + y = 0 \quad (E)$$

5. Résoudre (E).
6. En déduire que f est de la forme

$$f(t) = A\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + B\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

   où (A, B) sont deux constantes réelles.
   On appelle $f_1(t) = \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$ et $f_2(t) = \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$
7. Calculer les dérivées premières de f_1 et f_2
8. Déterminer les valeurs de A et B.