DS 2

Durée 3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. 1. Résoudre $e^x - 2e^{-x} \geq -1$ (On pourra faire un changement de variable)

2. Résoudre $2x - \sqrt{3x+1} > 0$
3. Résoudre $2x - \sqrt{3x+1} = 1$
4. En déduire le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 2e^{-x} + 1}}{\ln\left(2x - \sqrt{3x+1}\,\right)}$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En intervertissant les deux sommes, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=k}^{n} \frac{k}{l+1}$$

Relation coefficients-racines Pour les exercices 3 et 4, on pourra utiliser le résultat suivant, appelé "relation coefficients-racines" :

— Soient $(s,p) \in \mathbb{C}^2$ et soient r_1 et r_2 les racines du polynôme : $x^2 - sx + p$. On a alors :

$$r_1 r_2 = p \quad \text{et} \quad r_1 + r_2 = s$$

— Réciproquement, soient r_1 et r_2 deux réels tels que $r_1 r_2 = p$ et $r_1 + r_2 = s$ alors r_1 et r_2 sont les racines du polynôme :

$$x^2 - sx + p.$$

Exercice 3. On propose de résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 6z + 4 = 0 \quad (E)$$

1. On considère $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E). Soient $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u + v = z$ et $uv = 2$.
   (a) Calculer $(u+v)^3$ de deux manières différentes.
   (b) En déduire que $u^3 + v^3 = -4$.
   (c) Calculer $u^3 v^3$.
   (d) Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
   (e) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$.
2. On pose $w = -2 + 2i$.
   (a) Ecrire w sous la forme exponentielle.
   (b) Résoudre l'équation $Z^3 = w$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ en exprimant les solutions sous forme exponentielle.
   (c) On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $Z^3 = w$ est $\{1+i, (1+\text{i})\ j, (1+i)j^2\}$.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les valeurs possibles de u et v, puis de z.
4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 4. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On considère $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

1. Calculer $\frac{1}{\omega}$ en fonction de $\overline{\omega}$
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ on a

$$\omega^k = \overline{\omega}^{7-k}.$$

3. En déduire que $\overline{A} = B$.
4. Montrer que la partie imaginaire de A est strictement positive. (On pourra montrer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.)
5. Montrer par récurrence que $\forall q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

6. Montrer alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$. En déduire que $A + B = -1$.
7. Montrer que $AB = 2$.
8. En déduire la valeur exacte de A.

Exercice 5. Pour chaque script, dire ce qu'affiche la console :

1. `Script1.py`

```python
a=0
n=100
for i in range(n):
  a=a+i
print(a/50)
```

2. `Script2.py`

```python
a=1
n=100
for i in range(n):
  a=a*i
print(a)
```

3. `Script3.py`

```python
a=0
n=100
for i in range(0,n,2):
  a=a+i
print(a/50)
```

4. `Script4.py`

```python
s=10
n=100
for i in range(n):
  s=s+2
print(s)
```

5. `Script5.py`

```python
a=10
for i in range(3):
  if a%2==0:
    a=a/2+i
  else:
    a=a+3
print(a)
```

6. `Script6.py` (On pourra s'aider de l'exercice 2)

```python
s=0
n=100
for k in range(n+1):
  for l in range(k,n+1):
    s=s+k/(l+1)
print(s)
```