Fiche Chapitre 5.1 - Suites usuelles

Définition 1. Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Définition 2. Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite géométrique de raison q si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = qu_n$$

Définition 3. Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b ($a \neq 1$ et $b \neq 0$ sinon on est dans les deux cas précédents) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Définition 4. Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite récurrente linéaire d'ordre deux (SRL2=) si il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On appelle polynôme caractéristique associé à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le polynôme $X^2 - aX - b$. On appelle équation caractéristique associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation $X^2 - aX - b = 0$

Proposition 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = nr + u_0$$

Proposition 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = u_0 q^n$$

Proposition 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$. Alors il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a.

Déterminer cette valeur de α permet de donner la forme générale de la valeur de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une SRL2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Soit P son polynome caractéristique. Soit Δ le discriminant de P.

— Si $\Delta > 0$, on note r_1, r_2 les deux racines réelles de P. Il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

— Si $\Delta = 0$, on note r_0, l'unique racine réelle de P. Il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)r_0^n$$

— Si $\Delta < 0$, on note r_1, r_2 les deux racines complexes conjuguées. Soit ρ le module de r_1 (c'est aussi celui de r_2) Soit θ l'argument de r_1 (c'est l'opposé de celui de r_2). Il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \rho^n(A\cos(\theta n) + B\sin(\theta n))$$