Correction TD 18 : Équation différentielle

Entrainements

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué

1. $y' - 2y = x + x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $3y' - 2y = x$ sur $\mathbb{R}$
3. $y' = y + 1$ sur $\mathbb{R}$
4. $y' = -y + e^x$ sur $\mathbb{R}$

Correction 1. 1. $\mathbf{y' - 2y = x + x^2}$ **sur** $\mathbb{R}$:

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' - 2y = 0$:
  - ⋆ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -2x$.
  - ⋆ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - 2y = x + x^2$:
  Comme la fonction a est constante et que le second membre est de type polynôme, on peut chercher cette solution sous la forme : $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ que : $-2ax^2 + (-2b + 2a)x + b - 2c = x + x^2$. Par identification des coefficients, on obtient : $\begin{cases} -2a &= 1 \\ -2b + 2a &= 1 \\ b - 2x &= 0 \end{cases}$. Ainsi, on obtient que : $y_p(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{2}$.
- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :
  $\boxed{y(x) = Ce^{2x} - \dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

2. $\mathbf{3y' - 2y = x}$ **sur** $\mathbb{R}$:

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $3y' - 2y = 0 \iff y' - \frac{2}{3}y = 0$:
  - ⋆ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -\frac{2}{3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -\frac{2}{3}x$.
  - ⋆ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^{\frac{2}{3}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}x$:
  Comme la fonction a est constante et que le second membre est de type polynôme, on peut chercher cette solution sous la forme : $y_p(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ que : $a - \frac{2}{3}(ax + b) = x$. Par identification des coefficients, on obtient : $\begin{cases} -\frac{2}{3}a &= 1 \\ a - \frac{2}{3}b &= 0 \end{cases}$. Ainsi, on obtient que : $y_p(x) = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{4}$.
- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :
  $\boxed{y(x) = Ce^{\frac{2}{3}x} - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{4}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

3. $\mathbf{y' = y + 1}$ **sur** $\mathbb{R}$:

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' - y = 0$:

  ⋆ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - y = 1$:
  On cherche y_p sous forme constante on trouve $y_p(x) = -1$.
- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :
  $\boxed{y(x) = Ce^x - 1}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

4. $\mathbf{y' = -y + e^x}$ **sur** $\mathbb{R}$:

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' + y = 0$:

  ⋆ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' + y = e^x$:
  On cherche y_p sous forme ae^x avec $a \in \mathbb{R}$ on trouve $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$.
- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :
  $\boxed{y(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué

1. $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
3. $xy' - (1 + 2x)y = -x^2e^x$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
4. $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$
5. $y' - \dfrac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}y = 2$
6. $y' + \cos^3(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$
7. $y' + \dfrac{2}{x^2 - 1}y = x$ sur $]1, +\infty[$

Correction 2.

1. $\mathbf{(1 + x^2)y' + 2xy = 1}$ **sur** $\mathbb{R}$:

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre. Comme on a $1 + x^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, il est équivalent de résoudre $y' + \dfrac{2x}{1 + x^2}y = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' + \dfrac{2x}{1 + x^2}y = 0$:

  ⋆ La fonction $a : x \mapsto a(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2 > 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif et ainsi on a toujours $1 + x^2 \neq 0$. Donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \ln|1 + x^2| = \ln(1 + x^2)$.

  ⋆ La solution générale de l'équation homogène est alors : $y_h(x) = Ce^{-\ln(1+x^2)} = \dfrac{C}{1 + x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' + \dfrac{2x}{1 + x^2}y = \dfrac{1}{1 + x^2}$:
  On utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \dfrac{C(x)}{1 + x^2}$ avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi y_p est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, on obtient :

$$y_p'(x) + \frac{2x}{1 + x^2}y_p(x) = \frac{1}{1 + x^2} \Leftrightarrow \frac{C'(x)}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} \Leftrightarrow C'(x) = 1,$$

ainsi on peut prendre $C(x) = x$.

- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $\boxed{y(x) = \dfrac{C+x}{1+x^2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

2. $\mathbf{x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}}$ **sur** $\mathbb{R}^{+\star}$:

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre.

  Comme on la résout sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on a : $x^2 \neq 0$ et ainsi il est équivalent de résoudre : $y' - \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$.

- Résolution de l'équation homogène associée : $y' - \dfrac{y}{x^2} = 0$:

  ⋆ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $A(x) = \dfrac{1}{x}$.

  ⋆ La solution générale de l'équation homogène est alors : $y_h(x)Ce^{-\frac{1}{x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$:
  En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y_(x) = C(x)e^{-\frac{1}{x}}$ avec C fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi y_1 est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, on obtient :

$$y_p'(x) - \frac{y_p(x)}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{x^2}$$

  en simplifiant par $e^{-\frac{1}{x}} \neq 0$. Ainsi pour tout $x > 0$: $C(x) = -\dfrac{1}{x}$

  Ainsi : $y_p(x)\dfrac{-1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ est une solution particulière.

- Conclusion :

  La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $\boxed{y(x) = \left(C - \dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

3. $\mathbf{xy' - (1+2x)y = -x^2e^x}$ **sur** $\mathbb{R}^{+\star}$:
   La solution générale est $\boxed{y(x) = Cxe^{2x} + (x^2 - x)e^x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

4. $\mathbf{y' - 2xy = -(2x-1)e^x}$ **sur** $\mathbb{R}$:
   La solution générale est $\boxed{y(x) = Ce^{x^2} + e^x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

5. $\mathbf{y' - \dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}y = 2}$:
   Il faut résoudre sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Je ne corrige ici que le dernier cas, les autres sont similaires.

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- Résolution de l'équation homogène associée : $y' - \dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}y = 0$:

  ⋆ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}$ est continue sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc il existe une primitive A de a sur $]1, +\infty[$. Calculons une primitive de a : pour cela, on écrit a sous la forme

$$a(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 - 1}.$$

Par identification, on obtient $\alpha = 1$ $\beta = -2$ et $\gamma = 0$, donc on a $a(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2-1}$. Une primitive de a sur $]1, +\infty[$ est donc $A(x) = \ln|x| - \ln|x^2-1| = \ln x - \ln(x^2-1)$.

⋆ La solution générale de l'équation homogène est alors : $y_h(x) = Ce^{-\ln x + \ln(x^2-1)} = C\frac{x^2-1}{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre :
  On utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = C\frac{x^2-1}{x}$ avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi y_p est bien dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in]1, +\infty[$, on obtient :

$$y_p' - \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}y_p = 2 \Leftrightarrow C'(x)\frac{x^2-1}{x} = 2 \Leftrightarrow C'(x) = \frac{2x}{x^2-1},$$

  ainsi on peut prendre $C(x) = \ln|x^2-1| = \ln(x^2-1)$ sur $]1, +\infty[$.
- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :
  $\boxed{y(x) = (C + \ln(x^2-1))\frac{x^2-1}{x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

6. $\mathbf{y' + \cos^3(x)y = 0}$ **sur** $\mathbb{R}$:
   La solution générale est $\boxed{y(x) = Ce^{-\frac{1}{12}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
7. $\mathbf{y' + \frac{2}{x^2-1}y = x}$ **sur** $]1, +\infty[$:
   La solution générale est $\boxed{y(x) = (C + \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln(x+1))\frac{x+1}{x-1}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

Exercice 3. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes

1. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
2. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$
3. $y' - y = x^2(e^x + e^{-x})$
4. $xy' + (1-2x)y = 1$
5. $x^3y' + 4(1-x^2)y = 0$
6. $(1-x^2)y' - 2xy = 1$
7. $(\tan x)y' + y - \sin x = 0$
8. $y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x$
9. $x^2y' - y = x^2 - x + 1$. On pourra chercher une solution particulière polynomiale.

Correction 3. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes

1. $\mathbf{(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2}$:
   La solution générale est :
   $\boxed{y(x)(C+x)(1+x^2)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
2. $\mathbf{y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1}$:
   On se place par exemple sur $]0, +\infty[$, la résolution est similaire sur $]-\infty, 0[$.
   La solution générale sur $]0, +\infty[$ est :
   $\boxed{y(x) = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
3. $\mathbf{y' - y = x^2(e^x + e^{-x})}$:
   - On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
   - Résolution de l'équation homogène associée : $y' - y = 0$:

     ⋆ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -x$.

- $\star$ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - y = x^2e^x + x^2e^{-x}$:
On applique ici le principe de superposition.
  - $\star$ Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - y = x^2e^x$:
  Comme la fonction a est constante et que le second membre est de type polynôme et exponentielle, on peut chercher cette solution sous la forme : $y_1 : x \mapsto (bx^2 + cx + d)e^x \times x$ car $a = -1$ avec $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ en divisant par $e^x \neq 0$ que :
  $3bx^2 + 2cx + d = x^2$. Par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient ainsi que : $y_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x^3}{3}e^x$.
  - $\star$ Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - y = x^2e^{-x}$:
  Comme la fonction a est constante et que le second membre est de type polynôme et exponentielle, on peut chercher cette solution sous la forme : $y_2 : x \mapsto (bx^2 + cx + d)e^{-x}$ avec $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ en divisant par $e^{-x} \neq 0$ que :
  $-2bx^2 + (2b - 2c)x + (c - 2d) = x^2$. Par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient ainsi que : $y_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto -\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)e^x$.
  - $\star$ D'après le principe de superposition, on obtient donc que une solution particulière est : $y_p = y_1 + y_2$.

- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :
$\boxed{y(x) = Ce^x + \dfrac{x^3}{3}e^x - \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)e^x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

4. $\mathbf{xy' + (1 - 2x)y = 1}$:
On se place par exemple sur $]0, +\infty[$, la résolution est similaire sur $] - \infty, 0[$.
La solution générale sur $]0, +\infty[$ est $\boxed{y(x) = \dfrac{C}{x}e^{2x} - \dfrac{1}{2x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

5. $\mathbf{x^3y' + 4(1 - x^2)y = 0}$:
La solution générale sur $]0, +\infty[$ est $\boxed{y(x) = Cx^4e^{\frac{2}{x^2}}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

6. $\mathbf{(1 - x^2)y' - 2xy = 1}$:
On se place par exemple sur $]1, +\infty[$, la résolution est similaire sur $] - \infty, -1[$ et $] - 1, 1[$.
La solution générale sur $]1, +\infty[$ est $\boxed{y(x) = \dfrac{C - x}{x^2 - 1}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

7. $(\tan \mathbf{x})\mathbf{y'} + \mathbf{y} - \sin \mathbf{x} = \mathbf{0}$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre.
Comme on la résout sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $\tan(x) \neq 0$ et ainsi il est équivalent de résoudre : $y' + \dfrac{y}{\tan(x)} = \cos(x)$.

- Résolution de l'équation homogène associée : $y' + \dfrac{y}{\tan(x)} = 0$:
  - $\star$ La fonction $a : x \mapsto a(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc il existe une primitive A de a sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $A(x) = \ln|\sin(x)|$. Comme on est sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\sin(x) > 0$ et ainsi on obtient que : $A(x) = \ln(\sin(x))$.
  - $\star$ La solution générale de l'équation homogène est alors : $y_(x) = \dfrac{C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' + \dfrac{y}{\tan(x)} = \cos(x)$:
En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la

forme : $y_p(x) = \dfrac{C(x)}{\sin(x)}$ avec C fonction dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi y_p est bien dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on obtient : $y_p'(x) + \dfrac{y_p(x)}{\sin(x)} = \cos(x) \Leftrightarrow C'(x) = \cos(x)\sin(x)$. Ainsi pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $C(x) = \ln|\sin(x)| = \ln(\sin(x))$

Ainsi : $y_p(x) = \dfrac{\ln(\sin(x))}{\sin x}$ est une solution particulière.

- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $\boxed{y_p(x) = \dfrac{C + \ln(\sin x)}{\sin x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

8. $\mathbf{y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x}$ **sur** $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

   La solution générale est $\boxed{y(x) = \left(C + \dfrac{1}{2}\sin^2(x) + \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{2}x\right)\dfrac{\cos x}{\sin x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

9. $\mathbf{x^2y' - y = x^2 - x + 1}$ **sur** $]0, +\infty[$**. On pourra vérifier que cette équation différentielle admet une fonction polynomiale comme solution particulière.** :

   La solution générale est $\boxed{y(x) = Ce^{-\frac{1}{x}} + x - 1}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

Exercice 4. Problèmes de raccords de solutions définies sur des intervalles disjoints :

1. On considère l'équation différentielle (E) : $xy' + y = 1$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ puis sur $\mathbb{R}^{-\star}$. Montrer que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'équation différentielle (E) : $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$. Résoudre (E) sur chaque intervalle où cela a un sens, puis étudier les éventuels raccords.
3. On considère l'équation différentielle (E) : $(x\ln x)y' - y = 0$. Résoudre (E) sur chaque intervalle où cela a un sens, puis étudier les éventuels raccords.
4. Étude des solutions sur $\mathbb{R}^{+\star}$, $\mathbb{R}^{-\star}$ et sur $\mathbb{R}$ de (E) : $xy' + 2y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Correction 4. Problèmes de raccord de solutions définies sur des intervalles disjoints :

1. **On considère l'équation différentielle (E) :** $\mathbf{xy' + y = 1}$**.**
   - **Résoudre (E) sur** $\mathbb{R}^{+\star}$ **puis sur** $\mathbb{R}^{-\star}$**.**
     La solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ est
     $\boxed{y(x) = \dfrac{C_1}{x} + 1}$ avec $C_1 \in \mathbb{R}$ constante.
     La solution générale sur $\mathbb{R}^{-\star}$ est
     $\boxed{y(x) = \dfrac{C_2}{x} + 1}$ avec $C_2 \in \mathbb{R}$ constante.
   - **Montrer que (E) admet une unique solution sur** $\mathbb{R}$**.**
     On cherche une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $xy' + y = 1$. D'après la question précédente, il existe C_1 et C_2 deux constantes telles que
     $$y(x) = \begin{cases} \dfrac{C_1}{x} + 1 & \text{sur }]0, +\infty[\\[2ex] \dfrac{C_2}{x} + 1 & \text{sur }]-\infty, 0[. \end{cases}$$
     Or y doit être dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier continue en 0. Il faut pour cela que l'on ait $C_1 = C_2 = 0$, car sinon la limite en 0 de $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas finie. Donc on a nécessairement $y : x \mapsto 1$. On vérifie que cette fonction est bien solution. On a donc montré que la seule solution sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{y : x \mapsto 1}$.

2. **On considère l'équation différentielle (E) : $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$.** On obtient de la même façon qu'il existe C_1, C_2 et C_3 trois constantes telles que

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{C_1 - \frac{x^3}{3}}{x^2-1} & \text{sur }]-\infty, -1[\\ \dfrac{C_2 - \frac{x^3}{3}}{x^2-1} & \text{sur }]-1, 1[\\ \dfrac{C_3 - \frac{x^3}{3}}{x^2-1} & \text{sur }]1, +\infty[. \end{cases}$$

On veut prolonger cette fonction en -1 et 1 pour obtenir une fonction dérivable. Il faut en particulier que les limites à gauche et à droite soient finies. Regardons par exemple en -1^- : on a $\lim\limits_{-1^-} x^2 - 1 = 0$, donc pour avoir une limite finie en -1^-, il faut que le numérateur tende vers 0 également. Or on a $\lim\limits_{-1^-} C_1 - \dfrac{x^3}{3} = 0$ si et seulement si $C_1 = -\frac{1}{3}$. Dans ce cas, la fonction y s'écrit :

$$y(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1+x^3}{x^2-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1+x+x^2}{1+x},$$

et a bien une limite finie en -1^-.
On trouve de même que pour avoir une limite finie en -1^+, il faut nécessairement avoir $C_2 = -\dfrac{1}{3}$. On peut donc avoir un raccord en -1, et obtenir comme solution
$\boxed{y(x) = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1-x+x^2}{x-1}}$, dont on vérifie qu'elle est bien dérivable sur $]-\infty, 1[$.
On montre de même que l'on peut avoir un raccord en 1 en prenant cette fois $C_2 = \frac{1}{3}$, et $C_3 = \frac{1}{3}$. La solution sur $]-1, +\infty[$ est cette fois $\boxed{y(x) = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1+x+x^2}{1+x}}$.
Cependant, on ne peut pas avoir un raccord à la fois en -1 et en 1. En effet, les conditions pour les raccords sont incompatibles : il faudrait avoir à la fois $C_2 = -\dfrac{1}{3}$ et $C_2 = \dfrac{1}{3}$, ce qui est impossible.

3. **On considère l'équation différentielle (E) : $(x\ln x)y' - y = 0$.** On obtient qu'il existe C_1 et C_2 deux constantes telles que

$$y(x) = \begin{cases} -C_1 \ln x & \text{sur }]0, 1[\\ C_2 \ln x & \text{sur }]1, +\infty[. \end{cases}$$

Les limites en 1^- et 1^+ sont bien finies, et valent 0 quelles que soient les valeurs de C_1 et C_2, donc y peut être prolongée par continuité en 1 en posant $y(1) = 0$. On cherche maintenant à quelles conditions ce prolongement est dérivable. Calculons le taux d'accroissement à gauche de 1 :

$$\frac{y(x)-y(1)}{x-1} = \frac{-C_1 \ln x - 0}{x-1} = -C_1 \frac{\ln x}{x-1}.$$

On pose $X = x - 1$. On a cherche donc la limite de $-C_1 \dfrac{\ln(X+1)}{X}$ quand X tend vers 0^- : comme on a $\ln(X+1) \sim_0 X$, cette limite vaut $-C_1$. De même, on obtient $\lim\limits_{1}^{+} \dfrac{y(x)-y(1)}{x-1} = C_2$. Pour que y soit dérivable, il suffit donc que l'on ait $-C_1 = C_2$. Ainsi, l'équation différentielle (E) admet une infinité de solution sur $\mathbb{R}$, qui sont données par $\boxed{y : x \in]0, +\infty[\mapsto C \ln x}$, avec C une constante.

4. **On considère l'équation différentielle (E) : $xy' + 2y = \dfrac{x}{1+x^2}$.**

On obtient qu'il existe C_1 et C_2 deux constantes telles que

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{C_1 + x - \arctan x}{x^2} & \text{sur }]-\infty, 0[\\ \dfrac{C_2 + x - \arctan x}{x^2} & \text{sur }]0, +\infty[. \end{cases}$$

Grâce à un DL de la fonction arctan en 0, on montre que la fonction $x \mapsto \dfrac{x - \arctan x}{x^2}$ se prolonge en 0 en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que y se prolonge en une fonction dérivable si et seulement on peut prolonger $\dfrac{C_1}{x}$ et $\dfrac{C_2}{x}$. Or les limites en 0 ne sont finies que si $C_1 = C_2 = 0$. On a donc une unique solution sur $\mathbb{R}$ de (E), c'est le prolongement de la fonction $\boxed{y : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x - \arctan x}{x^2}}$.

Exercice 5. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants en précisant à chaque fois l'intervalle de travail (mais sans étudier les problèmes de raccord) :

1. $y' \cos x - y \sin x = 0$ et $y(0) = 1$
2. $y' + xy = 2x$ et $y(0) = 1$

Correction 5. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants en précisant à chaque fois l'intervalle de travail (mais sans étudier les problèmes de raccord) :

1. $\mathbf{y' \cos x - y \sin x = 0}$ **et** $\mathbf{y(0) = 1}$:
   On résout sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, un intervalle contenant 0 sur lequel la fonction cosinus ne s'annule pas. Il est alors équivalent de résoudre
   $$y' - \frac{\sin x}{\cos x} y = 0.$$
   On obtient comme solution générale $y(x) = \dfrac{C}{\cos x}$. Déterminons la constante C grâce à la condition initiale en 0. On a $y(0) = 1 = \dfrac{C}{\cos 0}$, donc on a $C = 1$. On en déduit que l'unique solution vérifiant $y(0) = 1$ est $\boxed{y : x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\mapsto \dfrac{1}{\cos x}}$.
2. $\mathbf{y' + xy = 2x}$ **et** $\mathbf{y(0) = 1}$:

   - On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre.

   - Résolution de l'équation homogène associée : $y' + xy = 0$:
     - ⋆ La fonction $a : x \mapsto a(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \dfrac{x^2}{2}$.
     - ⋆ La solution générale de l'équation homogène est alors : $y_h(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
   - Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' + xy = 2x$:
     En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec C fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi y_p est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient : $y_p'(x) + xy_p(x) = 2x \Leftrightarrow C'(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}$.
     Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}}$, et $y_p(x) = 2$ est une solution particulière.
   - Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Étude de la condition initiale :
Comme $y(0) = 1$, on a : $y(0) = Ce^0 + 2 = C + 2 = 1 \Leftrightarrow C = -1$. Ainsi il existe une unique solution qui est : $\boxed{y : x \in \mathbb{R} \mapsto 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}}$.

Exercice 6. Trouver toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

Correction 6. Trouver toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la relation $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(-\mathbf{x})$.
On est ici dans une situation où la variable n'est pas la même des deux côtés de l'équation. On doit donc se débarrasser du $f(-x)$. Commençons par dériver cette équation : comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f'(x) = f(-x)$, on a f' dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$f''(x) = -f'(-x).$$

Or on sait que $f'(-x) = f(-(-x))$ d'après la relation de départ, donc on a $f'(-x) = f(x)$, et donc f vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants suivante :

$$f''(x) + f(x) = 0.$$

L'équation caractéristique est donnée par $r^2 + 1 = 0$, et a deux solutions complexes conjuguées $\pm i$. On en déduit que f est de la forme $f(x) = A\cos x + B\sin x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Synthèse : on revient à l'équation de départ. On a $f'(x) = -A\sin x + B\cos x$, et $f(x) = A\cos x - B\sin x$, donc on obtient :

$$-A\sin x + B\cos x = A\cos x - B\sin x \Leftrightarrow (B - A)(\cos x + \sin x) = 0.$$

Pour $t = 0$, on a $\cos x + \sin x \neq 0$, donc on en déduit que : $B = A$. Finalement les solutions sont de la forme $\boxed{f(x) = A(\cos x + \sin x)}$.

Exercice 7. Soit m un réel. On considère l'équation différentielle (E) : $mxy' - y = y^2 - x^2$.

1. Donner une condition sur m pour qu'il existe une solution polynomiale notée y_0.
2. On suppose ici que $m = 1$. On cherche les solutions de (E) de la forme $y = y_0 + \dfrac{1}{z}$. Déterminer une équation différentielle (E') simple vérifiée par z.
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Correction 7. Soit m un réel. On considère l'équation différentielle (E) : $mxy' - y = y^2 - x^2$.
Remarquons tout d'abord que cette équation différentielle n'est pas linéaire, à cause du terme en y^2 : on ne peut donc pas utiliser les méthodes du cours.

1. **Donner une condition sur m pour qu'il existe une solution polynomiale notée y_0.**
Cherchons par exemple s'il existe une solution polynomiale de degré 1 (sinon, on augmentera le degré). On cherche donc une solution de la forme $y_0(x) = ax + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En remplaçant dans l'équation, on obtient :
$$mx(2a) - ax - b = a^2x^2 + 2abx + b^2 - x^2.$$
Soit, en identifiant les coefficients :
$$\begin{cases} a^2 - 1 &= 0 \\ am - a &= 2ab \\ -b &= b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \text{ ou } a = 1 \\ b = -1 \text{ ou } a = 0 \\ a(m-1) = 2ab \end{cases}$$
En utilisant la dernière équation, et en remplaçant par les différentes valeurs possibles de a et b, on montre que ce système a des solutions pour $m = 1$, $m = -1$ ou $m = 3$. Ainsi, il existe une solution polynomiale pour $\boxed{m \in \{1, -1, 3\}}$.

2. **On suppose ici que $m = 1$. On cherche les solutions de (E) de la forme $y = y_0 + \frac{1}{z}$. Déterminer une équation différentielle (E') simple vérifiée par z.**
On exprime y' en fonction de z'. On a : $y' = y_0' - \frac{z'}{z^2}$. En remplaçant dans l'équation (pour $m = 1$), on obtient :
$$xy_0' - x\frac{z'}{z^2} - y_0 - \frac{1}{z} = y_0^2 + 2\frac{y_0}{z} + \frac{1}{z^2} - x^2.$$
Or on a $xy_0' - y_0 = y_0^2 - x^2$, donc on peut simplifier :
$$-x\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z} = 2\frac{y_0}{z} + \frac{1}{z^2}.$$
En multipliant par z^2 des deux côtés, on obtient :
$$-xz' - z = 2y_0 z + 1$$
On choisit la solution particulière $y_0(x) = x$ (trouvée au 1). On obtient alors (E') :
$\boxed{xz' + (2x+1)z = -1}$.

3. **Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).**
L'équation (E') est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On doit diviser par x pour la résoudre, on fait donc deux cas :
   - Cas 1 : sur $]0, +\infty[$. On a $(E') \Leftrightarrow z' + \frac{2x+1}{x}z = -\frac{1}{x}$.
     - ⋆ Résolution de l'équation homogène associée : $z' + \frac{2x+1}{x}z = 0$. La solution est de la forme $z_h(x) = Ce^{-A(x)}$, où A est une primitive de $x \mapsto \frac{2x+1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, et $C \in \mathbb{R}$. On choisit $A(x) = 2x + \ln x$. On a donc $z_h(x) = Ce^{-2x-\ln x} = C\frac{e^{-2x}}{x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
     - ⋆ Recherche d'une solution particulière avec la méthode de variation de la constante. On cherche une solution sous la forme $z_p(x) = C(x)\frac{e^{-2x}}{x}$, où C est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$. On remplace dans l'équation, et on obtient :
$$\begin{aligned} & C'(x)\frac{e^{-2x}}{x} + C(x)\frac{-2xe^{-2x} - e^{-2x}}{x^2} + \frac{2x+1}{x}C(x)\frac{e^{-2x}}{x} = -\frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow\ & C'(x) = -e^{2x} \end{aligned}$$
       On peut donc prendre $C(x) = -\frac{e^{2x}}{2}$, soit $z_p(x) = -\frac{1}{2x}$.
     - ⋆ On en déduit que la solution générale est donnée par $\boxed{z(x) = \frac{2Ce^{-2x} - 1}{2x}}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
   - Cas 2 : sur $]-\infty, 0[$. Les mêmes calculs donnent $\boxed{z(x) = \frac{2De^{-2x} - 1}{2x}}$, avec $D \in \mathbb{R}$.

On en déduit les solutions de (E) : on a $y = y_0 + \frac{1}{z}$, avec $y_0(x) = x$, donc on obtient :
$$\boxed{y(x) = \begin{cases} x + \dfrac{2x}{2Ce^{-2x} - 1} & \text{si } x > 0 \\ x + \dfrac{2x}{2De^{-2x} - 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$ tels que $2Ce^{-2x} - 1 \neq 0$ et $2De^{-2x} - 1 \neq 0$.

Type DS

Exercice 8. Un mobile (assimilé à un point) tombe verticalement dans l'atmosphère à une vitesse $v(t) > 0$ (les vitesses sont orientées positivement vers le bas).
Les seules forces auxquelles le mobile est soumis sont son poids (constant dirigé vers le bas) et le frottement exercé par l'air (dirigé vers le haut, proportionnel à v^2).
L'équation vérifiée par v est ainsi la suivante :

$$(E) \quad mv' = -kv^2 + mg$$

avec m masse du solide, k est la constante de résistance du milieu et g est l'accélération de la pesanteur ($m,\ k,\ g$ sont des constantes strictement positives).

1. Déterminer une solution constante (E). On la note v_0.
2. On suppose maintenant que v ne prend pas la valeur v_0. On pose $Z = \dfrac{1}{v - v_0}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par Z et la résoudre.
3. On suppose qu'initialement (à $t = 0$), la vitesse du mobile est $v_i > 0$. Donner pour $t \geq 0$, l'expression de $v(t)$ en fonction de t et v_i.
4. Etudier les variations de v sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'allure de la courbe de v sur un même graphique. On étudiera deux cas : $0 < v_i < v_0$ et $v_i > v_0$.

Correction 8. **Un mobile (assimilé à un point) tombe verticalement dans l'atmosphère à une vitesse $v(t) > 0$ (les vitesses sont orientées positivement vers le bas). Les seules forces auxquelles le mobile est soumis sont son poids (constant dirigé vers le bas) et le frottement exercé par l'air (dirigé vers le haut, proportionnel à v^2). L'équation vérifiée par v est ainsi la suivante :**

$$(E) \quad mv' = -kv^2 + mg$$

avec m masse du solide, k est la constante de résistance du milieu et g est l'accélération de la pesanteur ($m,\ k,\ g$ sont des constantes strictement positives).
Remarquons tout d'abord que cette équation différentielle n'est pas linéaire, à cause du terme en y^2 : on ne peut donc pas utiliser les méthodes du cours.

1. **Déterminer une solution constante (E). On la note v_0.**
   On cherche une solution particulière de la forme $v = v_0$. On remplace dans l'équation, et on obtient :
   $$0 = -kv_0^2 + mg \Rightarrow v_0^2 = \frac{mg}{k}.$$
   On a donc deux solutions constantes, $v = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ et $v = -\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$. Comme v_0 est une vitesse positive, on choisit $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}}$.
2. **On suppose maintenant que v ne prend pas la valeur v_0. On pose $Z = \dfrac{1}{v - v_0}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par Z et la résoudre.**
   Exprimons v en fonction de Z, puis v' en fonction de Z'. On a : $Z = \dfrac{1}{v - v_0}$, donc $v = v_0 + \dfrac{1}{Z}$. On en déduit

que $v' = -\dfrac{Z'}{Z^2}$. Remplaçons dans l'équation (E) :

$$\begin{array}{rcll} -m\dfrac{Z'}{Z^2} & = & -k\left(v_0+\dfrac{1}{Z}\right)^2+mg & \\ \Rightarrow\quad -m\dfrac{Z'}{Z^2} & = & -kv_0^2-2kv_0\dfrac{1}{Z}-\dfrac{k}{Z^2}+mg & \\ \Rightarrow\quad -m\dfrac{Z'}{Z^2} & = & -2kv_0\dfrac{1}{Z}-\dfrac{k}{Z^2} & \text{car on a } -kv_0^2+mg=0 \text{ d'après 1.} \\ \Rightarrow\quad -mZ' & = & -2kv_0Z-k & \end{array}$$

On a donc Z solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constants suivante :

$$Z' - \frac{2kv_0}{m}Z = \frac{k}{m}.$$

- ⋆ Résolution de l'équation homogène associée : $Z' - \dfrac{2kv_0}{m}Z = 0$. La solution est de la forme $Z_h(t) = Ce^{\frac{2kv_0}{m}t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
- ⋆ Recherche d'une solution particulière. Le second membre est constant, on cherche une solution sous la forme $Z_p(t) = \alpha$. On remplace dans l'équation, et on obtient :

$$-\frac{2kv_0}{m}\alpha = \frac{k}{m} \ \Rightarrow\ \alpha = -\frac{1}{2v_0}.$$

- ⋆ On en déduit que la solution générale est donnée par $\boxed{Z(t) = Ce^{\frac{2kv_0}{m}t} - \dfrac{1}{2v_0}}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. **On suppose qu'initialement (à $t = 0$), la vitesse du mobile est $v_i > 0$. Donner pour $t \geq 0$, l'expression de $v(t)$ en fonction de t et v_i.**
On revient à v : on a

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{Z(t)} \ \Rightarrow\ v(t) = v_0 + \frac{1}{Ce^{\frac{2kv_0}{m}t} - \frac{1}{2v_0}}.$$

De plus, on sait que $v(0) = v_i$, donc on a :

$$v_0 + \frac{1}{C - \frac{1}{2kv_0}} = v_i \ \Rightarrow\ C = \frac{1}{v_i - v_0} + \frac{1}{2v_0}.$$

On en déduit que $\boxed{v(t) = v_0 + \dfrac{1}{\left(\frac{1}{v_i-v_0}+\frac{1}{2v_0}\right)e^{\frac{2kv_0}{m}t} - \frac{1}{2v_0}}}$.

4. **Etudier les variations de v sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'allure de la courbe de v sur un même graphique. On étudiera deux cas : $0 < v_i < v_0$ et $v_i > v_0$.**
La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions dérivables. On a de plus :

$$v'(t) = -\frac{\left(\frac{1}{v_i-v_0}+\frac{1}{2v_0}\right)\times\frac{2kv_0}{m}\times e^{\frac{2kv_0}{m}t}}{\left(\left(\frac{1}{v_i-v_0}+\frac{1}{2v_0}\right)e^{\frac{2kv_0}{m}t}-\frac{1}{2v_0}\right)^2}$$

Tous les termes du quotient sont strictement positifs, à l'exception du terme :

$$A = \frac{1}{v_i - v_0} + \frac{1}{2v_0} = \frac{v_0 + v_i}{2v_0(v_i - v_0)}.$$

On fait deux cas :

⋆ Si $0 < v_i < v_0$: alors on a $A < 0$, et donc $v'(t) > 0$. On a donc le tableau de variations suivant :

t	0		$+\infty$
v	v_i	$\nearrow$	v_0

On justifie la limite en $+\infty$: on a $\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{2kv_0}{m}t} = +\infty$, donc par somme et quotient, $\lim_{t\to+\infty} v(t) = v_0$.

⋆ Si $v_i > v_0$. Cette fois, on a $A > 0$, et donc $v'(t) < 0$. On a donc le tableau de variations suivant :

t	0		$+\infty$
v	v_i	$\searrow$	v_0

On représente ci-dessous l'allure des courbes dans le cas $0 < v_i < v_0$ (en bleu) et dans le cas $v_i > v_0$ (en rouge). On remarque que dans les deux cas, le mobile se stabilise en temps long à la vitesse limite v_0. L'évolution diffère selon la vitesse initiale :

⋆ Si $0 < v_i < v_0$: le mobile accélère sous l'effet de la pesanteur (terme mg de l'équation). Puis à mesure que la vitesse augmente, l'effet des frottements de l'air (terme $-kv^2$ de l'équation) limitent l'accélération, jusqu'à stabilisation autour de v_0, vitesse pour laquelle les effets de la pesanteur et des frottements de l'air s'équilibrent.

⋆ Si $v_i > v_0$: cette fois, le mobile ralentit sous l'effet des frottements de l'air, jusqu'à stabilisation autour de v_0.

Exercice 9. 1. (a) Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{a}{1+x^2} + b$

(b) A l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive de $x \mapsto 2x \arctan(x)$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$

$$y' + \frac{1}{x} y = 2 \arctan(x)$$

Correction 9. 1. (a)

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{1+x^2} &= \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+x^2}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} \\ &= 1 + \frac{-1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{a = -1, b = 1}$$

(b) $F(x) = \int_0^x 2t(t)dt$ est une primitive de $x \mapsto 2x(x)$. On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
F(x) &= [t^2\arctan(t)]_0^x - \int_0^x t^2\frac{1}{1+t^2}dt \\
&= x^2\arctan(x) - \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}dt \quad \text{(Question 1a)} \\
&= x^2\arctan(x) - x + \arctan(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{x \mapsto x^2\arctan(x) - x + \arctan(x) \text{ est une primitive de } x \mapsto 2x(x)}$$

2. On résout tout d'abord l'équation homogène associée :

$$y' + \frac{1}{x}y = 0 \quad (EH)$$

dont solutions sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{EH} &= \{x \mapsto Ce^{-\ln(x)} \,|\, C \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \mapsto C\frac{1}{x} \,|\, C \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Puis on cherche une solution particulière de $y' + \frac{1}{x}y = 2(x)$, à l'aide de la méthode de la variation de la constante. On cherche la solution de la forme $y_p(x) = C(x)\frac{1}{x}$ où C est une fonction dérivable à déterminer. Cette fonction est solution si et seulement si

$$C'(x)\frac{1}{x} + C(x)\frac{-1}{x^2} + \frac{C(x)}{x}\frac{1}{x} = 2\arctan(x)$$

ce qui donne

$$C'(x) = 2x\arctan(x)$$

D'après la question 1, $C(x) = x^2\arctan(x) - x + \arctan(x)$ Et une solution particulière est

$$y_p(x) = x\arctan(x) - 1 + \frac{\arctan(x)}{x}$$

Ainsi les solutions de $y' + \frac{1}{x}y = 2(x)$ sont

$$\mathcal{S}_E = \{x \mapsto x\arctan(x) - 1 + \frac{\arctan(x)}{x} + C\frac{1}{x} \,|\, C \in \mathbb{R}\}$$