

# Programme de colle : Semaine 10

## Lundi 1 Décembre

### 1 Cours

1. Vocabulaires des applications
  - (a) Image directe
  - (b) Fonctions caractéristiques d'un ensemble
  - (c) Fonctions injectives/surjectives.
  - (d) Cas particuliers des fonctions réelles (stricte monotonie / TVI)
2. Systèmes linéaires
  - (a) Systèmes linéaires échelonnés.
  - (b) Rang d'un système linéaire.
  - (c) Pivot de Gauss.
3. Python :
  - (a) Instruction conditionnelle (if/else)
  - (b) Fonction
  - (c) Boucle `for`, `while`
  - (d) Listes

### 2 Exercices Types

1. Calculer  $f([-1, 1])$  où  $f$  est définie par  $f(x) = x^2 + x$
2. Donner un exemple d'une fonction injective qui n'est pas surjective.
3. Montrer que l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^3 + x + 1$  est bijective.
4. Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (3x + 2y, 5x + 3y). \end{array}$$

Montrer que pour tout  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ , il existe un unique  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f(x, y) = (X, Y)$  et donner l'expression de  $x$  et  $y$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .

5. Déterminer le rang et résoudre le système linéaire d'inconnues réelles suivants :

$$\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$$

6. Résoudre les systèmes suivants  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - y = \lambda x \\ x + 2y = \lambda y \end{cases}$$

7. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier la valeur de la somme  $\sum_{k=1}^n k^7$
8. Ecrire une fonction python qui prend en argument une liste d'entiers et retourne le plus grand élément.