

# Programme de colle : Semaine 15

## Lundi 19 Janvier

### 1 Cours

#### 1. Limites et continuité.

- (a) Définition des limites ( $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ) avec les quantificateurs. J'ai pris comme définition de la limite une limite épointée :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \left(]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[ \setminus \{x_0\}\right) \cap D_f, \quad |f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

- (b) limites à gauche limites à droites.
- (c) Taux d'accroissement et limites usuelles
- (d) Croissances comparées
- (e) Notation  $f(x) = o(g(x))$  et  $f(x) \sim g(x)$
- (f) Regles de calcul sur les équivalents.
- (g) Définition de la continuité, continuité à gauche à droite en un point.
- (h) Définition de la continuité sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ .
- (i) Définition de la fonction partie entière
- (j) Fonction continues, limites et suites (théorèmes de compositions)
- (k) Théorème : TVI, bijection.
- (l) Théorème : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

#### 2. Matrices

- (a) Calcul matriciel.
- (b) Rang d'une matrice.
- (c) Matrice inversible.
- (d) Lien avec les systèmes linéaires.
- (e) Calcul d'une puissance  $n$ -ème.

#### 3. Dénombrement

- (a) Cardinal d'un ensemble (union de deux ensembles, complémentaire.)
- (b) Choix de  $p$  objets parmi  $n$ .

#### 4. Python :

- (a) Instructions conditionnelles (if/else)
- (b) Fonctions
- (c) Boucles `for`, `while`
- (d) Listes
- (e) Chaînes de caractères.

### 2 Exercices Types

1. Soient les deux matrices suivantes :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Déterminer des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $A = \alpha I_3 + \beta J$ . Calculer  $J^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(c) Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites de réels telles que  $x_0 = y_0 = z_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} x_{n+1} &= y_n + z_n \\ y_{n+1} &= x_n + z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n. \end{cases}$$

Calculer  $x_n$ ,  $y_n$  et  $z_n$  en fonction de  $n$ .

2. Soient les deux matrices suivantes :  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

(a) Calculer  $B^3$ .  $B$  est-elle inversible ?

(b) Calculer les puissances  $n$ -ièmes de  $C$ .

**Exercice 1.** Donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

$$f_1(x) = \frac{\cos(1/x)}{x}$$

$$f_2(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$f_3(x) = \ln(x+1) - \ln(x^2)$$

$$f_4(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$$

$$f_5(x) = \frac{2^x + x}{2^x}$$

$$f_6(x) = \frac{x + (-1)^x}{x - \ln(x^3)}$$

$$f_7(x) = \frac{x+1}{2x}$$

$$f_8(x) = \frac{3^x - 4^x}{3^x + 4^x}$$

$$f_9(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$f_{10}(x) = \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x)}{x}$$

$$f_{11}(x) = x^2 - x \cos x + 2$$

$$f_{12}(x) = \frac{\ln(x^2 + x - 2)}{x - 1}$$

$$f_{13}(x) = \ln(2^x + x)$$

$$f_{14}(x) = x^{1/x}$$

$$f_{15}(x) = (\ln x)^x$$

$$f_{16}(x) = \frac{x^3 + 2^x}{3^x}$$

$$f_{17}(x) = (x^2 + x + 1)^{1/x}$$

$$f_{19}(x) = x^2 \left( \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 \right)$$

Dénombrement :

1. Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.

(a) On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.

i. Donner le nombre de résultats possibles.

ii. Combien de ces résultats amènent

A. exactement 1 jeton noir ?

B. au moins 1 jeton noir ?

C. au plus un jeton noir ?

D. 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?

(b) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.

(c) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.

Informatique :

1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste et retourne l'indice du maximum de cette liste.

2. Un polynôme du second degré  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  est encodé en python par une liste à trois éléments  $L = [c, b, a]$ . Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste à trois éléments correspondant à un polynôme du second degré et retourne le nombre de racine réelle de ce polynôme.