

Programme de colle : Semaine 15

Lundi 19 Janvier

1 Cours

1. Limites et continuité.

- (a) Définition des limites ($a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) avec les quantificateurs. J'ai pris comme définition de la limite une limite épointée :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in (]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}) \cap D_f, \quad |f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

- (b) limites à gauche limites à droites.
(c) Taux d'accroissement et limites usuelles
(d) Croissances comparées
(e) Notation $f(x) = o(g(x))$ et $f(x) \sim g(x)$
(f) Règles de calcul sur les équivalents.
(g) Définition de la continuité, continuité à gauche à droite en un point.
(h) Définition de la continuité sur un intervalle de \mathbb{R} .
(i) Définition de la fonction partie entière
(j) Fonction continues, limites et suites (théorèmes de compositions)
(k) Théorème : TVI, bijection.
(l) Théorème : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

2. Matrices

- (a) Calcul matriciel.
(b) Rang d'une matrice.
(c) Matrice inversible.
(d) Lien avec les systèmes linéaires.
(e) Calcul d'une puissance n -ème.

3. Dénombrement

- (a) Cardinal d'un ensemble (union de deux ensembles, complémentaire.)
(b) Choix de p objets parmi n .

4. Python :

- (a) Instructions conditionnelles (if/else)
(b) Fonctions
(c) Boucles `for`, `while`
(d) Listes
(e) Chaînes de caractères.

2 Exercices Types

1. Soient les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer des réels α et β tels que $A = \alpha I_3 + \beta J$. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (c) Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} &= y_n + z_n \\ y_{n+1} &= x_n + z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n. \end{cases}$$

Calculer x_n , y_n et z_n en fonction de n .

2. Soient les deux matrices suivantes : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer B^3 . B est-elle inversible ?
(b) Calculer les puissances n-ièmes de C .

Exercice 1. Donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

$$f_1(x) = \frac{\cos(1/x)}{x}$$

$$f_7(x) = \frac{x+1}{2x}$$

$$f_{13}(x) = \ln(2^x + x)$$

$$f_2(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$f_8(x) = \frac{3^x - 4^x}{3^x + 4^x}$$

$$f_{14}(x) = x^{1/x}$$

$$f_3(x) = \ln(x+1) - \ln(x^2)$$

$$f_9(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$f_{15}(x) = (\ln x)^x$$

$$f_4(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$$

$$f_{10}(x) = \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x)}{x}$$

$$f_{16}(x) = \frac{x^3 + 2^x}{3^x}$$

$$f_5(x) = \frac{2^x + x}{2^x}$$

$$f_{11}(x) = x^2 - x \cos x + 2$$

$$f_{17}(x) = (x^2 + x + 1)^{1/x}$$

$$f_6(x) = \frac{x + (-1)^x}{x - \ln(x^3)}$$

$$f_{12}(x) = \frac{\ln(x^2 + x - 2)}{x - 1}$$

$$f_{19}(x) = x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 \right)$$

Dénombrément :

1. Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.

- (a) On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.
- i. Donner le nombre de résultats possibles.
 - ii. Combien de ces résultats amènent
 - A. exactement 1 jeton noir ?
 - B. au moins 1 jeton noir ?
 - C. au plus un jeton noir ?
 - D. 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?

- (b) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.

- (c) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.

Informatique :

1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste et retourne l'indice du maximum de cette liste.
2. Un polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est encodé en python par une liste à trois éléments $L = [c, b, a]$.
Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste à trois éléments correspondant à un polynôme du second degré et retourne le nombre de racine réelle de ce polynôme.