Correction TD 19 : Variable Aléatoire Réelle

Entraînements

Calculs de lois, fonctions de répartition, espérance et variance

Exercice 1. On dispose d'un dé à 6 faces non truqué. Il possède une face portant le chiffre 1, 2 faces portant le chiffre 2 et 3 faces portant le chiffre 3. On le lance et on note X le chiffre obtenu. Donner la loi de X, sa fonction de répartition et calculer son espérance et sa variance.

Correction 1.

- Univers image : les seuls numéros que l'on peut obtenir sont $1, 2$ et 3, donc $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
- Calcul de la loi de X. Le dé est non truqué, on a donc équiprobabilité pour chacune des faces du dés. On a 6 faces en tout, et une seule ayant le numéro 1, donc $\boxed{P(X=1) = \frac{1}{6}}$. On a deux faces portant le numéro 2, donc $P(X=2) = \frac{2}{6}$, soit $\boxed{P(X=2) = \frac{1}{3}}$. Enfin, on a trois faces portant le numéro 3, donc $P(X=3) = \frac{3}{6}$, soit $\boxed{P(X=2) = \frac{1}{2}}$.
- Fonction de répartition : on utilise la formule du cours :
  - ⋆ si $x < 1$, on a $F_X(x) = 0$,
  - ⋆ si $1 \leq x < 2$, on a $F_X(x) = P(X=1) = \frac{1}{6}$,
  - ⋆ si $2 \leq x < 3$, on a $F_X(x) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$,
  - ⋆ si $x \geq 3$, on a $F_X(x) = 1$.
- Espérance : on calcule

$$E(X) = 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$$

  soit $\boxed{E(X) = \frac{7}{3}}$.
- Variance : on utilise la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

  On calcule $E(X^2)$ grâce au théorème du transfert :

$$E(X^2) = 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2) + 3^2 \times P(X=3) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = \frac{23}{3}$$

  soit $V(x) = \frac{23}{3} - \frac{49}{9}$, et donc $\boxed{V(X) = \frac{20}{9}}$.

Exercice 2. Soit $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et X une varf à valeurs dans $[\![0, 3]\!]$ dont la loi de probabilité est donnée par

$$P([X=0]) = P([X=3]) = \theta \quad P([X=1]) = P([X=2]) = \frac{1}{2} - \theta.$$

1. Donner la fonction de répartition de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

3. On pose $R = X(X-1)(X-2)(X-3)$. Donner la loi de probabilité de R.

Correction 2. La loi de probabilité d'une var X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P([X = x_i])$	θ	$\frac{1}{2} - \theta$	$\frac{1}{2} - \theta$	θ

1. D'après la formule du cours :
   - ⋆ si $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$,
   - ⋆ si $0 \leq x < 1$, on a $F_X(x) = P(X = 0) = \theta$,
   - ⋆ si $1 \leq x < 2$, on a $F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \theta + \frac{1}{2} - \theta = \frac{1}{2}$,
   - ⋆ si $2 \leq x < 3$, on a $F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \theta + \frac{1}{2} - \theta + \frac{1}{2} - \theta = 1 - \theta$,
   - ⋆ si $x \geq 3$, on a $F_X(x) = 1$.
2. Espérance : on calcule

$$E(X) = \sum_{k=0}^{3} kP(X = k) = 0 \times \theta + 1 \times (\frac{1}{2} - \theta) + 2 \times (\frac{1}{2} - \theta) + 3\theta$$

   soit $\boxed{E(X) = \frac{3}{2}}$ (ce qui était attendu, puisque X est symétrique).
   Pour la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, en calculant $E(X^2)$ grâce au théorème du transfert :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X = k) = 0^2 \times \theta + 1^2 \times (\frac{1}{2} - \theta) + 2^2 \times (\frac{1}{2} - \theta) + 3^2\theta = 4\theta + \frac{5}{2}.$$

   On obtient $\boxed{V(X) = 4\theta - \frac{1}{4}}$.
3. On remarque que $R(\Omega) = \{0\}$, donc R est constante égale à 0 : $\boxed{P(R = 0) = 1}$.
4. Ici je donne juste les résultats :

s_i	0	1
$P([S = s_i])$	$1 - \theta$	θ

t_i	0	1
$P([T = t_i])$	2θ	$1 - 2\theta$

v_i	0	1
$P([V = v_i])$	$1 - \theta$	θ

Exercice 3. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = 0 \text{ sur }]-\infty, -2[,\ \frac{1}{4} \text{ sur } [-2, 0[,\ \frac{1}{2} \text{ sur } [0, 3[,\ \frac{2}{3} \text{ sur } [3, 4[,\ 1 \text{ sur } [4, +\infty[.$$

1. Tracer la courbe représentative de F.
2. Soit X une varf ayant F pour fonction de répartition. Calculer alors $P([X \leq 1])$, $P([X < 1])$ et $P([-2 \leq X \leq 0])$.
3. Déterminer aussi la loi de X, son espérance et sa variance.
4. Soit Y et Z les varf définies par $Y = \dfrac{X}{2}$ et $Z = X + 2$. Déterminer les fonctions de répartition de Y et de Z et tracer leurs courbes représentatives sur le même graphique que F.

Correction 3.

1. À faire.
2. Par définition, $\boxed{P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1}{2}}$.
   On a de plus $P(X = 1) = 0$ car la fonction F n'a pas de saut en 1, donc $\boxed{P(X < 1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{2}}$.
   On a $P(-2 \leq X \leq 0) = P(X \leq 0) - P(X < -2) = F(0) - 0$, soit $\boxed{P(-2 \leq X \leq 0) = \frac{1}{2}}$.

3. On a $X(\Omega)=\{-2,0,3,4\}$ car ce sont les points de discontinuité de F. De plus, les probabilités de chaque élément de $X(\Omega)$ sont égale à la valeur du saut de F, soit :
   - $P(X=-2)=F(-2)=\dfrac{1}{4}$,
   - $P(X=0)=F(0)-F(-2)=\dfrac{1}{4}$,
   - $P(X=3)=F(3)-F(0)=\dfrac{1}{6}$,
   - $P(X=4)=F(4)-F(3)=\dfrac{1}{3}$,

   On en déduit
   $$E(X)=-2P(X=-2)+0P(X=0)+3P(X=3)+4P(X=4)$$
   soit $\boxed{E(X)=\dfrac{4}{3}}$.
   De plus, d'après la formule de Koenig-Huygens, on a $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$. Et le théorème du transfert donne
   $$E(X^2)=(-2)^2P(X=-2)+0^2P(X=0)+3^2P(X=3)+4^2P(X=4),$$
   soit $E(X^2)=\dfrac{47}{6}$ et donc $\boxed{V(X)=\dfrac{109}{18}}$.
4. On a $Y(\Omega)=\{-1,0,\frac{3}{2},2\}$, et $Z(\Omega)=\{0,2,5,6\}$ et les probabilités sont les mêmes que précédemment, donc on a
   $$\forall t\in\mathbb{R},\quad F_Y(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<-2\\ \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad -1\leq x<0\\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 0\leq x<\frac{3}{2}\\ \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad \frac{3}{2}\leq x<2\\ 1 & \text{si} \quad x\geq 2.\end{cases} \quad \text{et} \quad \forall t\in\mathbb{R},\quad F_Z(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<-2\\ \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad 0\leq x<2\\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 2\leq x<5\\ \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad 5\leq x<6\\ 1 & \text{si} \quad x\geq 6.\end{cases}$$
   Le graphe de F_Z est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre 0 du graphe de F, et celui de F_Z le translaté de vecteur $2\mathbf{i}$ de F.

Exercice 4. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues :

1. On tire simultanément 3 boules de l'urne et on note X le nombre de boules bleues obtenu. Donner la loi de X.
2. On réalise 3 tirages successifs sans remise et on note Z le nombre de boules bleues obtenu au cours de ces tirages. Donner la loi de Z.

Correction 4. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues.

1. Le nombre de tirages total est $\binom{5}{3}$. Le nombre de tirages qui améne k boules bleues sont $\binom{3}{k}\binom{2}{3-k}$ donc $X(\Omega)=\{1,2,3\}$ et
   $$\boxed{P(X=k)=\frac{\binom{3}{k}\binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}}}$$
2. Faire des tirages successifs sans remise revien à faire un tirage simultané, X et Z ont dont la même loi :

$$\boxed{P(Z=k)=\frac{\binom{3}{k}\binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}}}$$

Exercice 5. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois et les fonctions de répartition de X et de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et comparer ces espérances.
3. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.

Correction 5. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces équilibrées. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.

1. On pense ici à passer par la fonction de répartition, car il y a des min et des max. On note N_1 le numéro du premier dé et N_2 celui du deuxième.
   - Fonction de répartition de X, puis loi de X. On a tout d'abord $X(\Omega)=[\![1,6]\!]$. Soit $k\in[\![1,6]\!]$, on cherche à calculer $P(X\leq k)$. Si le plus grand numéro est inférieur à k, cela veut dire que les deux numéros sont inférieurs à k. On a donc $P(X\leq k)=P([N_1\leq k]\cap[N_2\leq k])$. Les deux lancers étant indépendants, on obtient :
   $$P(X\leq k)=P(N_1\leq k)\times P(N_2\leq k).$$
   Or les dés sont équilibrés, donc on a équiprobabilité. On en déduit $P(N_i\leq k)=\frac{k}{6}$, et donc $\boxed{P(X\leq k)=\frac{k^2}{36}}$.
   La fonction de répartition de X est donc donnée par
     - $\star$ si $x<1$, on a $F_X(x)=0$,
     - $\star$ si $k\leq x<k+1$, avec $k\in[\![1,5]\!]$, on a $F_X(x)=\frac{k^2}{36}$,
     - $\star$ si $x\geq 6$, on a $F_X(x)=1$.

   On en déduit la loi de probabilité de X :
     - $\star$ si $k=1$, on a $P(X=1)=F_X(1)$, soit $\boxed{P(X=1)=\frac{1}{36}}$,
     - $\star$ si $k\in[\![2,6]\!]$, on a $P(X=k)=F_X(k)-F_X(k-1)$, soit $\boxed{P(X=k)=\frac{k^2}{36}-\frac{(k-1)^2}{36}}$.

   On remarque que l'on peut regrouper les deux cas dans la deuxième formule.
   - Fonction de répartition de Y, puis loi de Y. On a de même $Y(\Omega)=[\![1,6]\!]$. Soit $k\in[\![1,6]\!]$, on cherche à calculer cette fois $P(Y>k)$ pour en déduire $P(Y\leq k)$. Si le plus petit numéro est strictement supérieur à k, cela veut dire que les deux numéros sont strictement supérieurs à k. On a donc $P(Y>k)=P([N_1>k]\cap[N_2>k])$. Le même raisonnement que précédemment donne $P(Y>k)=\frac{(6-k)^2}{36}$.
   On en déduit $\boxed{P(Y\leq k)=1-\frac{(6-k)^2}{36}}$, puis
     - $\star$ si $x<1$, on a $F_Y(x)=0$,
     - $\star$ si $k\leq x<k+1$, avec $k\in[\![1,5]\!]$, on a $F_Y(x)=1-\frac{(6-k)^2}{36}$,
     - $\star$ si $x\geq 6$, on a $F_Y(x)=1$.

   On en déduit la loi de probabilité de Y :
     - $\star$ si $k=1$, on a $P(Y=1)=F_Y(1)=1-\frac{25}{36}$, soit $\boxed{P(Y=1)=\frac{9}{36}}$,
     - $\star$ si $k\in[\![2,6]\!]$, on a $P(Y=k)=F_Y(k)-F_Y(k-1)$, soit $\boxed{P(X=k)=\frac{(6-(k-1))^2}{36}-\frac{(6-k)^2}{36}}$.

2. La formule de l'espérance donne

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36}\right) \\ &= \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{6} k(k^2 - k^2 + 2k - 1) \\ &= \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{6} k(2k-1) \\ &= \frac{2}{36}\sum_{k=0}^{6} k^2 - \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{6} k \\ &= \frac{2}{36} \times \frac{6(6+1)(12+1)}{6} - \frac{1}{36} \times \frac{6(6+1)}{2} \end{aligned}$$

en utilisant les formules usuelles de sommes.

On obtient donc : $\boxed{E(X) = \frac{161}{36}}$.

De même, on a

$$\begin{aligned} E(Y) = \sum_{k=1}^{6} kP(Y=k) &= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{(6-(k-1))^2}{36} - \frac{(6-k)^2}{36}\right) \\ &= \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k((6-k)^2 + 2(6-k) + 1 - (6-k)^2) \\ &= \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k(13-2k) \\ &= \frac{13}{36}\sum_{k=1}^{6} k - \frac{2}{36}\sum_{k=1}^{6} k^2 \\ &= \frac{13}{36} \times \frac{6(6+1)}{2} - \frac{2}{36} \times \frac{6(6+1)(12+1)}{6} \end{aligned}$$

soit $\boxed{E(Y) = \frac{91}{36}}$. On vérifie que l'on a bien $E(X) > E(Y)$, ce qui est normal, car la valeur moyenne du plus grand numéro doit être supérieure à la valeur moyenne du plus petit numéro.

3. D'après la formule de Koenig-Huygens, on a : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. De plus, d'après le théorème de

transfert on a :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X=k) &= \sum_{k=1}^{6} k^2 \left(\frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36}\right) \\
&&= \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{6} k2(2k-1) \\
&&= \frac{2}{36}\sum_{k=0}^{6} k^3 - \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{6} k^2 \\
&&= \frac{2}{36} \times \left(\frac{6(6+1)}{2}\right)^2 - \frac{1}{36} \times \frac{6(6+1)(12+1)}{6}
\end{aligned}$$

On obtient donc $E(X^2) = \dfrac{791}{36}$. On en déduit $\boxed{V(X) = \dfrac{2555}{36^2} \simeq 1.97}$.
La même méthode donne : $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$, avec :

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \sum_{k=1}^{6} k^2 P(Y=k) &= \sum_{k=1}^{6} k^2 \left(\frac{(6-(k-1))^2}{36} - \frac{(6-k)^2}{36}\right) \\
&&= \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k^2(13-2k) \\
&&= \frac{13}{36}\sum_{k=1}^{6} k^2 - \frac{2}{36}\sum_{k=1}^{6} k^3 \\
&&= \frac{13}{36} \times \frac{6(6+1)(12+1)}{6} - \frac{2}{36} \times \left(\frac{6(6+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

On obtient donc $E(Y^2) = \dfrac{301}{36}$. On en déduit $\boxed{V(Y) = \dfrac{2555}{36^2} \simeq 1.97}$. Remarquons qu'il est logique que le minimum et le maximum des numéros aient la même variance, c'est-à-dire la même dispersion par rapport à leur valeur moyenne.

Exercice 6. On considère deux urnes comportant chacune des jetons numérotés de 1 à n, avec $n \in \mathbb{N}^\star$. On tire au hasard un jeton dans chaque urne et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer l'espérance $E(X)$. En déduire un équivalent de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction 6. On considère deux urnes comportant chacune des jetons numérotés de 1 à n, avec $n \in \mathbb{N}^\star$. On tire au hasard un jeton dans chaque urne et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer l'espérance $E(X)$. En déduire un équivalent de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. On lance m dés non truqués numérotés de 1 à m.

1. Soit X_1 la var égale au nombre de dés amenant le 6. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.

2. On relance les dés qui n'ont pas amené de 6. Soit X_2 le nombre de ceux qui amènent 6 lors du deuxième lancer. Calculer $P(X_2 = k)$ pour tout $k \in [\![0, m]\!]$. En déduire la loi de X_2 son espérance et sa variance.
   On pourra montrer en particulier que : $\binom{m}{i}\binom{m-i}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{i}$.
3. On poursuit l'expérience précédente : à chaque lancer, on relance uniquement les dés qui n'ont pas donné 6 aux lancers précédents. Soit X_n la varf égale au nombre de dés amenant 6 au n-ième lancer.
   (a) Soit $Z_{i,n}$ la var valant 1 si le dé numéroté i donne 6 au n-ième lancer et 0 sinon. Calculer la loi de $Z_{i,n}$.
   (b) Déterminer la loi de X_n et donner sans calcul son espérance et sa variance.

Correction 7. **On lance m dés non truqués.**

1. **Soit $\mathbf{X_1}$ la var égale au nombre de dé amenant le 6. Donner sans calcul la loi de $\mathbf{X_1}$ son espérance et sa variance :**
   On reconnaît une loi binomiale car X_1 est un nombre de succés, le succés correspondant à obtenir le chiffre 6 et l'expérience revient bien à répéter m fois la même expériences dans les mêmes conditions (car tous les dés sont identiques). On a ainsi $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{1}{6}\right).}$ On a ainsi :
   $$\forall k \in [\![0, m]\!],\ P([X_1 = k]) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{m-k}.$$
   De plus, on a : $E(X_1) = \frac{m}{6}$ et $V(X_1) = \frac{5m}{36}$.
2. **On relance les dés qui n'ont pas amené de 6. Soit $\mathbf{X_2}$ le nombre de ceux qui amènent 6 lors de la deuxième relance. Donner la loi de $\mathbf{X_2}$ son espérance et sa variance. On pourra montrer en particulier que : $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{l}}\binom{\mathbf{m-l}}{\mathbf{k}} = \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}\binom{\mathbf{m-k}}{\mathbf{l}}$.**
   - On peut commencer par vérifier l'égalitée des coefficients binomiaux donnée.
     - ⋆ D'un côté, on a : $\binom{m}{l}\binom{m-l}{k} = \frac{m!}{l!k!(m-l-k)!}$ en simplifiant par $(m-l)!$.
     - ⋆ De l'autre côté, on a : $\binom{m}{k}\binom{m-k}{l} = \frac{m!}{l!k!(m-l-k)!}$ en simplifiant par $(m-k)!$.

     Ainsi on a bien que : $\boxed{\binom{m}{l}\binom{m-l}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{l}.}$
   - Loi de X_2 :
     - ⋆ Univers image : $\boxed{X_2(\Omega) = [\![0, m]\!].}$
     - ⋆ Loi :
       Soit $k \in X_2(\Omega)$. On remarque que pour calculer $P([X_2 = k])$, on a besoin de connaître le nombre de dés que l'on relance lors de la deuxième relance. Et ainsi on a besoin de connaître le nombre de dés qui ont amené 6 lors du premier lancer. On utilise donc le sce associé à la var X_1. Ainsi comme $([X_1 = 0]; [X_1 = 1]; [X_1 = 2]; \ldots; [X_1 = m])$ est un sce on a d'après la formule des probabilités totales :
       $$P([X_2 = k]) = \sum_{l=0}^{m} P([X_1 = l] \cap [X_2 = k]).$$
       Puis comme d'après la question 1, on a bien que pour tout $l \in [\![0, m]\!]$: $P([X_1 = l]) \neq 0$, les probabilités conditionnelles $P_{[X_1=l]}$ existent toutes. Ainsi on obtient d'après la formule des probabilités composées :
       $$P([X_2 = k]) = \sum_{l=0}^{m} P([X_1 = l])P_{[X_1=l]}([X_2 = k]).$$

En utilisant la question 1, on obtient que : $\forall l \in [\![0,m]\!],\ P([X_1=l]) = \binom{m}{l}\left(\frac{1}{6}\right)^l\left(\frac{5}{6}\right)^{m-l}$. Puis on a : $P_{[X_1=l]}([X_2=k]) = \binom{m-l}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{m-l-k}$ car on sait que l'on relance alors $m-l$ dés. On peut alors calculer la somme et on obtient que :

$$P([X_2=k]) = \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\left(\frac{1}{6}\right)^l\left(\frac{5}{6}\right)^{m-l}\binom{m-l}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{m-l-k} = \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{m-k}{l}\left(\frac{1}{6}\right)^{l+k}\left(\frac{5}{6}\right)^{2m-2l-k}$$

en utilisant l'égalité sur les coefficients binomiaux démontrée ci-dessus. On sort alors tout ce qui ne dépend pas de l indice de sommation et on obtient que :

$$P([X_2=k]) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k}\sum_{l=0}^{m}\binom{m-k}{l}\left(\frac{1}{6}\right)^l\left(\frac{5}{6}\right)^{-2l} = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k}\sum_{l=0}^{m}\binom{m-k}{l}\left(\frac{6}{25}\right)^l.$$

Comme, pour tout $l > m-k$, on a : $\binom{m-k}{l} = 0$, on obtient alors en utilisant la relation de Chasles que :

$$P([X_2=k]) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k}\sum_{l=0}^{m-k}\binom{m-k}{l}\left(\frac{6}{25}\right)^l.$$

On reconnaît alors le binôme de Newton et on obtient que :

$$\begin{aligned} P([X_2=k]) &= \binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k}\left(\frac{6}{25}+1\right)^{m-k} \\ &= \binom{m}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{25}{36}\right)^m\left(\frac{31}{25}\right)^{m-k} \\ &= \binom{m}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{25}{36}\right)^k\left(\frac{25}{36}\right)^{m-k}\left(\frac{31}{25}\right)^{m-k} \\ &= \binom{m}{k}\left(\frac{5}{36}\right)^k\left(\frac{31}{36}\right)^{m-k}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{31}{36} = 1 - \frac{5}{36}$, on reconnaît alors l'expression d'une loi binomiale et ainsi on a : $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{5}{36}\right)}$.

- Espérance et variance de X_2 : On obtient que $E(X_2) = \frac{5m}{36}$ et $V(X_2) = \frac{155m}{36^2}$.

Exercice 8. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues.

1. On réalise 3 tirages successifs avec remise et on note Y le nombre de boules bleues obtenu au cours de ces tirages. Donner la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
2. On tire une boule de l'urne et on note T le numéro de la boule obtenue. Donner la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

Correction 8. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues.

1. On reconnaît une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, \frac{3}{5})$, $E(X) = \frac{9}{5}$, $V(X) = \frac{9}{5} \times \frac{2}{5}$.
2. On reconnaît une loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{3}{5})$, $E(X) = \frac{3}{5}$, $V(X) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$.

Exercice 9. Un magicien possède une pièce truquée qui renvoie pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et face avec probabilité $\frac{2}{3}$. Il lance le dé n fois, et on note X la fréquence d'apparition du pile au cours de ces n lancers. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.

Correction 9. **Un magicien possède une pièce truquée qui renvoie pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et face avec probabilité $\frac{2}{3}$. Il lance la pièce n fois, et on note X la fréquence d'apparition du pile au cours de ces n lancers.** On note Y le nombre d'apparitions du pile au cours des n lancers. Comme les expériences sont indépendantes et ont toutes la même probabilités de succès $\frac{1}{3}$, Y suit une loi binomiale : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$. On a donc $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et $P(Y = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$, $E(Y) = np = \frac{n}{3}$ et $V(Y) = np(1-p) = \frac{2n}{9}$.
On a de plus $X = \frac{Y}{n}$. On en déduit alors, d'après les propriétés sur l'espérance et la variance : $X(\Omega) = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$, et $P\left(X = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$, $E(X) = \frac{E(Y)}{n} = \frac{1}{3}$ et $V(X) = \frac{V(Y)}{n^2} = \frac{2}{9n}$.

Exercice 10. On considère une urne de taille $N > 1$ contenant r boules blanches et $N-r$ boules noires ($0 < r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

1. (a) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 1$.
   (b) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 2$.
   (c) Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X. Donner son esprérance. Même question dans le cas $r = N$.
   On revient désormais au cas général $1 < r < N$.
2. Calculer l'univers image de X.
3. Soit k une de ces valeurs.
   (a) Déterminer la probabilité qu'au cours des $k-1$ premiers tirages soient apparus $r-1$ boules blanches.
   (b) Vérifier que : $P([X = k]) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.

Correction 10. 1. (a) Cas $N = 4$, $r = 1$: il y a une seule boule blanche et trois boules noires.
Le tirage s'arrête lorsqu'on extrait la boule blanche. Le nombre de tirages X correspond à la position de la boule blanche dans une permutation aléatoire des 4 boules.
Il y a 4 positions possibles pour la boule blanche $\Rightarrow X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4\})$.
Donc : $\mathbb{E}[X] = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5$.

(b) Cas $N = 4$, $r = 2$: on s'arrête lorsqu'on a tiré les 2 boules blanches.
On considère toutes les permutations possibles des 4 boules. X est la position du second tirage d'une boule blanche.
Il faut compter, pour chaque position $k \in \{2, 3, 4\}$, le nombre de permutations où les deux boules blanches apparaissent parmi les k premiers éléments, et où la deuxième est en position k.
On obtient :

$$P(X = 2) = \frac{\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}, \quad P(X = 3) = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{6}, \quad P(X = 4) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6}$$

Donc X suit une loi discrète sur $\{2, 3, 4\}$ avec :

$$\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6} = \frac{2 + 6 + 12}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

(c) Reconnaissance de lois :
— Si $r = 1$, X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, N\}$.
Donc : $\mathbb{E}[X] = \frac{N+1}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{N^2-1}{12}$.

— Si $r = N$, on doit tirer toutes les boules et on a $X = N$. Donc : $\mathbb{E}[X] = N$, $\mathrm{Var}(X) = 0$.

2. **Univers image de** X :
   On doit tirer au moins r boules pour obtenir les r blanches. Le tirage s'arrête lorsqu'on a eu la r-ième blanche. Donc :
   $$\Omega(X) = \{r, r+1, \ldots, N\}$$
3. Soit $k \in \{r, \ldots, N\}$:
   (a) On cherche la probabilité qu'au cours des $k-1$ premiers tirages, on ait exactement $r-1$ boules blanches. On choisit $r-1$ positions parmi les $k-1$ premières pour y placer des boules blanches, et la r-ième blanche est à la position k.
   On a donc :
   $$P(r-1 \text{ blanches parmi les } k-1 \text{ premiers tirages}) = \frac{\binom{k-1}{r-1} \cdot \binom{N-k}{r-(r-1)=1}}{\binom{N}{r}} = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$$
   (b) On retrouve :
   $$P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$$
4. **Espérance et variance de** X :
   X suit la loi discrète définie par :
   $$P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} \quad \text{pour } k = r, \ldots, N$$
   On cherche à calculer l'espérance de X :
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=r}^{N} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=r}^{N} k \cdot \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{N} k \cdot \binom{k-1}{r-1}$$
   On effectue un changement d'indice en posant $j = k-1$. On obtient :
   $$\sum_{k=r}^{N} k \cdot \binom{k-1}{r-1} = \sum_{j=r-1}^{N-1} (j+1) \cdot \binom{j}{r-1}$$
   On utilise ensuite l'identité combinatoire suivante :
   $$(j+1)\binom{j}{r-1} = r\binom{j+1}{r}$$
   On en déduit :
   $$\sum_{j=r-1}^{N-1} (j+1) \cdot \binom{j}{r-1} = r \sum_{j=r-1}^{N-1} \binom{j+1}{r} = r \sum_{i=r}^{N} \binom{i}{r} \quad (\text{avec } i = j+1)$$
   Donc :
   $$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{\binom{N}{r}} \sum_{i=r}^{N} \binom{i}{r}$$
   Or :
   $$\sum_{i=r}^{N} \binom{i}{r} = \binom{N+1}{r+1} \quad (\text{ a prouver par récurrence sur } N)$$
   Finalement, on obtient :
   $$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{\binom{N}{r}} \cdot \binom{N+1}{r+1}$$

Exercice 11. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et des boules noires en nombres respectifs b_1, n_1, b_2, n_2 non nuls. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine. Si l'on obtient une boule blanche (resp noire), le deuxième tirage se fait dans U_1 (resp U_2). Si au i-ème tirage, la boule obtenue est blanche, le $i+1$-ème tirage se fait dans U_1 sinon dans U_2. Soit B_i l'événement *on obtient une boule blanche au tirage i.*

1. Calculer $P(B_1)$, $P(B_2)$ et $P(B_{n+1})$ en fonction de $P(B_n)$.
2. Soit X_n le nombre de boules blanches obtenues lors des n premiers tirages. Calculer $E(X_n)$. On pourra introduire Y_i la varf égale au nombre de boule blanche obtenue au tirage i.

Correction 11. 1. **Probabilités $P(B_1)$, $P(B_2)$ et $P(B_{n+1})$ en fonction de $P(B_n)$**

— On choisit une urne au hasard au premier tirage (U_1 ou U_2 avec probabilité $1/2$). La probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage est :

$$P(B_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{b_1}{b_1+n_1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{b_2}{b_2+n_2}$$

— Pour le deuxième tirage :

$$P(B_2) = P(B_1)\cdot\frac{b_1}{b_1+n_1} + (1-P(B_1))\cdot\frac{b_2}{b_2+n_2}$$

On utilise que si le premier tirage donne une boule blanche, le second se fait dans U_1 ; sinon dans U_2.

— De façon générale, on peut écrire pour tout $n \geq 1$:

$$P(B_{n+1}) = P(B_n)\cdot\frac{b_1}{b_1+n_1} + (1-P(B_n))\cdot\frac{b_2}{b_2+n_2}$$

Cette formule exprime $P(B_{n+1})$ comme une combinaison linéaire de $P(B_n)$ et de la probabilité d'obtenir une blanche dans U_2.

2. **Espérance du nombre de boules blanches obtenues en n tirages**

On note $q_n = P(B_n)$, on obtient une suite récurrente arithmético géométrique de terme général :
La solution générale est :

$$q_n = (q_1 - q^*)a^{n-1} + q^*, \quad \text{où } q^* = \frac{p_2}{1-p_1+p_2}\text{et } a = P(B_1) - P(B_2)$$

(à vérifier)

On note Y_i la variable aléatoire indicatrice de l'obtention d'une boule blanche au i-ième tirage :

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i\text{-ième tirage} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{donc } \mathbb{E}(Y_i) = q_i$$

Alors :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Or :

$$q_i = (q_1 - q^*)a^{i-1} + q^*$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n}\left((q_1-q^*)a^{i-1} + q^*\right) = (q_1 - q^*)\sum_{i=0}^{n-1} a^i + nq^*$$

Somme géométrique :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \begin{cases} \frac{1-a^n}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Type DS

Exercice 12. Un jeune homme écrit à une jeune fille au cours d'une année non bissextile. Il adopte la résolution suivante : le jour de l'an, il lui écrit à coup sûr. S'il lui a écrit le jour i, il lui écrit le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$. S'il ne lui a pas écrit le jour i, il lui écrit le lendemain à coup sûr. Soit X_i la varf de Bernoulli valant 1 si le jeune homme écrit le jour i et 0 sinon.

1. Former une relation de récurrence entre $P([X_{i+1}=1])$ et $P([X_i=1])$.
2. En déduire la loi de X_i pour tout $i \in [\![1,365]\!]$.
3. Soit X la varf égale au nombre de lettres envoyées dans l'année. Calculer $E(X)$.

Correction 12. Un jeune homme écrit à une jeune fille au cours d'une année non bissextile. Il adopte la résolution suivante : le jour de l'an, il lui écrit à coup sûr. S'il lui a écrit le jour i, il lui écrit le lendemain avec une probabilité $\mathbf{\frac{1}{2}}$. S'il ne lui a pas écrit le jour i, il lui écrit le lendemain à coup sûr. Soit $\mathbf{X_i}$ la varf de Bernouilli valant 1 si le jeune homme écrit le jour i et 0 sinon.

1. **Former une relation de récurrence entre $\mathbf{P([X_{i+1}=1])}$ et $\mathbf{P([X_i=1])}$:**
   Les évènements $([X_i=0],[X_i=1])$ forment le sce associé à la var de Bernouilli X_i. Ainsi on obtient en utilisant la formule des probabilités totales que :
   $$P([X_{i+1}=1]) = P([X_i=0]\cap[X_{i+1}=1]) + P([X_i=1]\cap[X_{i+1}=1]).$$
   D'après le protocole, on a : $P([X_i=0]) \neq 0$ et $P([X_i=1]) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles $P_{[X_i=0]}$ et $P_{[X_i=1]}$ existent bien. On peut alors utiliser la formule des probabilités composées et on obtient que :
   $$P([X_{i+1}=1]) = P([X_i=0])P_{[X_i=0]}([X_{i+1}=1]) + P_{[X_i=1]}([X_{i+1}=1]) = P([X_i=0]) + \frac{1}{2}P([X_i=1]).$$
   Comme de plus $P([X_i=0]) = 1 - P([X_i=1])$, on obtient que :
   $$\boxed{P([X_{i+1}=1]) = 1 - \frac{1}{2}P([X_i=1]).}$$
2. **En déduire la loi de $\mathbf{X_i}$ pour tout $\mathbf{i \in [\![1,365]\!]}$:**
   - Pour tout $i \in [\![1,365]\!]$, on a : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p_i)$ avec $p_i = P([X_i=1])$. Ainsi pour connaître la loi de X_i, il suffit de connaître p_i à savoir de calculer $P([X_i=1])$.
   - Calcul de p_i :
     La question précédente donne que :
     $$\forall i \in [\![1,365]\!], \quad p_{i+1} = 1 - \frac{1}{2}p_i.$$
     On reconnaît ainsi une suite arithmético-géométrique. On ne détaille pas les calculs mais on obtient au final :
     $$\boxed{\forall i \in [\![1,365]\!], \quad p_i = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}.}$$
   - Ainsi, on a : $\boxed{\forall i \in [\![1,365]\!], \quad X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}\right).}$

3. **Soit X la varf égale au nombre de lettres envoyées dans l'année. Calculer E(X) :**
On remarque que : $X = \sum_{i=1}^{365} X_i$. Ainsi par linéarité de l'espérance, on obtient que : $E(X) = \sum_{i=1}^{365} E(X_i)$. De plus comme $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}\right)$, on a : $E(X_i) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{365}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}\right] \\ &= \frac{-2}{3}\sum_{i=1}^{365}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i} + \frac{2}{3}\times 365 \\ &= \boxed{\frac{2}{9}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{365}\right) + \frac{730}{3}.} \end{aligned}$$

Exercice 13. Un tireur doit toucher n cibles ($n \in \mathbb{N}^\star$) numérotées de 1 à n dans l'ordre et il s'arrête dès qu'il rate une cible. On suppose que s'il se présente devant la k-ième cible, la probabilité qu'il la touche est $p_k \in]0,1[$. On note X le nombre de cibles touchées.

1. Déterminer la loi de X.
2. On suppose que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $p_k = p$.
   (a) Déterminer la loi de X en fonction de p et de $q = 1-p$.
   (b) Pour tout $t \in [0,1]$, on définit la fonction génératrice associée à X par : $G_X(t) = E(t^X)$. Justifier que $G'_X(1) = E(X)$ et en déduire l'espérance de X ainsi que la limite de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction 13.

1. On commence par trouver l'univers image : on peut toucher de 0 à n cibles, donc $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
Notons F_k l'événement « le tireur touche la k-ième cible ». D'après l'énoncé, $P(F_k) = p_k$. De plus, on a, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$,
$$P(X=k) = P(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \cap \overline{F}_{k+1}),$$
car pour toucher exactement k cibles, il faut réussir les k premiers coups, et rater la cible au $k+1$-ième essai.
On a, d'après la formule des probabilités composées, comme $P(F_1 \cap \ldots \cap F_k) \neq 0$) :
$$P(X=k) = P(F_1) \times P_{F_1}(F_2) \times \ldots \times \times P_{F_1\cap\ldots\cap F_k}(\overline{F}_{k+1})$$
d'où $\boxed{P(X=k) = p_1p_2\ldots p_k(1-p_{k+1})}$.
Pour $k=0$, il faut rater la première cible, donc $\boxed{P(X=0) = 1-p_1}$.
Pour $k=n$, il faut toucher toutes les cibles. le même raisonnement donne $\boxed{P(X=n) = p_1p_2\ldots p_n}$.

2. (a) D'après la question précédente, on a, pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\boxed{P(X=k) = p^kq}$, et $\boxed{P(X=n) = p^n}$.
   (b) D'après le théorème de transfert, on a
$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{n} t^k P(X=k).$$
Cette expression est un polynôme en t, donc est bien dérivable par rapport à t, et on a
$$G'_X(t) = 0 + \sum_{k=1}^{n} kt^{k-1}P(X=k).$$

On en déduit
$$G'_X(1)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{n}kP(X=k),$$
On a donc bien : $\boxed{G'_X(1)=E(X)}$.
Calculons $G_X(t)$. On a
$$G_X(t)=\sum_{k=0}^{n}t^kP(X=k)=q+\sum_{k=1}^{n-1}t^kp^kq+t^np^n=q\sum_{k=0}^{n-1}(tp)^k+t^np^n.$$
Or $tp\neq 1$, donc on a
$$G_X(t)=q\frac{1-(tp)^n}{1-tp}+t^np^n.$$
On dérive :
$$G'_X(t)=q\frac{-np(tp)^{n-1}(1-tp)-(1-(tp)^n)(-p)}{(1-tp)^2}+nt^{n-1}p^n.$$
On prend la valeur en $t=1$, et on obtient
$$E(X)=G'_X(1)=q\frac{-np^n(1-p)+p(1-p^n)}{(1-p)^2}+np^n=-np^n+\frac{p}{q}(1-p^n)+np^n.$$
en utilisant le fait que $1-p=q$. On a donc $\boxed{E(X)=\frac{p}{q}(1-p^n)}$.
On a $p\in]0,1[$, donc $\lim\limits_{+\infty}p^n=0$. De plus, $np^n=ne^{n\ln p}$ avec $\ln p<0$, donc par théorème des croissances comparées on a $\lim\limits_{+\infty}np^n=0$. Donc finalement, $\boxed{\lim\limits_{+\infty}E(X)=\frac{p}{q}}$.

Exercice 14. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $n\geq 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ième tirage.

1. Déterminer Y_1.
2. Soit $n\geq 2$.
   (a) Justifier que $Y_n\leq N-1$.
   (b) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $k\in[\![0,N]\!]$, on a
   $$P(Y_n=k)=\frac{N-k}{N}P(Y_{n-1}=k)+\frac{k+1}{N}P(Y_{n-1}=k+1).$$
3. En déduire que la suite $(E(Y_n))_{n\geq 1}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de $E(Y_n)$ pour tout $n\geq 1$.

Correction 14. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $\mathbf{n\geq 1}$, on note $\mathbf{Y_n}$ le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ième tirage.

1. **Déterminer $\mathbf{Y_1}$:** À l'issu du premier tirage, un seul numéro a été tiré et il y a donc toujours $N-1$ numéros non encore tirés. Ainsi $Y_1(\Omega)=\{N-1\}$ et $P(Y_1=N-1)=1$. $\boxed{\text{La var } Y_1 \text{ est la var certaine égale à } N-1.}$
2. **Soit $\mathbf{n\geq 2}$.**
   (a) **Justifier que $\mathbf{Y_n\leq N-1}$:**
   Après n tirages, le nombre minimum de numéros sortis est 1 dans le cas où on a toujours tiré le même numéro. Ainsi le nombre maximum de numéros non encore sortis est $N-1$. Ainsi on vient bien de montrer que : $\boxed{Y_n\leq N-1}$. Ainsi on a : $Y_n(\Omega)=[\![0,N-1]\!]$.

(b) **Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $\mathbf{k} \in [\![0, \mathbf{N}-1]\!]$, on a**

$$\mathbf{P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1).}$$

Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$ fixé. Pour obtenir $[Y_n = k]$ lors du tirage n, seulement deux cas sont possibles lors du tirage $n-1$. Soit on a : $[Y_{n-1} = k]$, soit on a : $[Y_n = k+1]$. En effet pour avoir k numéros non encore sortis au tirage n :

- soit il restait déjà k numéros non encore sortis au tirage $n-1$ et lors du tirage n on a tiré un numéro déjà sorti
- soit il restait $k+1$ numéros non encore sortis au tirage $n-1$ et lors du tirage n on a tiré un nouveau numéro jamais sorti.

Puis en utilisant ensuite la formule des probabilités totales, on obtient que :

$$P([Y_n = k]) = P([Y_{n-1} = k] \cap [Y_n = k]) + P([Y_{n-1} = k+1] \cap [Y_n = k]).$$

Puis d'après la formule des probabilités composées, on obtient que :

$$P([Y_n = k]) = P([Y_{n-1} = k]) P_{[Y_{n-1}=k]}([Y_n = k]) + P([Y_{n-1} = k+1]) P_{[Y_{n-1}=k+1]}([Y_n = k]).$$

D'après le protocole, on a : $P([Y_{n-1} = k]) \neq 0$ et $P([Y_{n-1} = k+1]) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles $P_{P([Y_{n-1}=k])}$ et $P_{P([Y_{n-1}=k+1])}$ existent bien. On a alors :

- Pour obtenir $[Y_n = k]$ sachant $[Y_{n-1} = k]$, il faut choisir lors du tirage n un des $N-k$ numéros déjà sorti lors des $n-1$-ième premiers tirages. Ainsi on a : $P_{[Y_{n-1}=k]}([Y_n = k]) = \dfrac{N-k}{N}$.
- Pour obtenir $[Y_n = k]$ sachant $[Y_{n-1} = k+1]$, il faut choisir lors du tirage n un des $k+1$numéros pas encore tirés lors des $n-1$-ième premiers tirages. Ainsi on a : $P_{[Y_{n-1}=k+1]}([Y_n = k]) = \dfrac{k+1}{N}$.

On obtient donc bien au final que :

$$\boxed{P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1).}$$

3. **En déduire que la suite $(\mathbf{E(Y_n)})_{\mathbf{n \geq 1}}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de $\mathbf{E(Y_n)}$ pour tout $\mathbf{n \geq 1}$.**
   - Montrons que la suite $(E(Y_n))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique :
   Par définition de l'espérance, on a pour tout $n \geq 1$:

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{N-1} k P([Y_n = k]).$$

On utilise alors l'égalitée démontrée à la question précédente afin d'essayer de trouver un lien entre $E(Y_n)$ et $E(Y_{n-1})$. On a :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} k \left(\frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k(N-k) P(Y_{n-1} = k) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k(k+1) P(Y_{n-1} = k+1). \end{aligned}$$

On pose alors le changement de variable $j = k + 1$ dans la deuxième somme et on obtient que :

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} k(N-k)P(Y_{n-1}=k) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(k-1)kP(Y_{n-1}=k) \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\left[k(N-k)+(k-1)k\right]P(Y_{n-1}=k)\right) + 0 + (N-1)P(Y_{n-1}=N) \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N-1} k(N-1)P(Y_{n-1}=k)\right)
\end{aligned}$$

en utilisant la relation de Chasles puis en utilisant le fait que $P(Y_{n-1} = N) = 0$ car $Y_n(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$.
On obtient alors :

$$\boxed{E(Y_n) = \frac{N-1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} kP(Y_{n-1}=k) = \frac{N-1}{N}E(Y_{n-1}).}$$

Ainsi la suite $(E(Y_n))_{n\geq 1}$ est bien une suite géométrique de raison $\dfrac{N-1}{N}$.

- Expression de $(E(Y_n))_{n\geq 1}$:
  On obtient donc :

$$\forall n \geq 1,\ E(Y_n) = E(Y_1) \times \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}.$$

Mais on a montré à la question 1 que la var Y_1 est la var certaine égale à $N-1$. Ainsi $E(Y_1) = N-1$.
On obtient donc :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ E(Y_n) = (N-1) \times \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}.}$$

Exercice 15. Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. L'expérience aléatoire consiste à effectuer une succession illimitée de tirages selon le protocole suivant : on tire une boule de l'urne puis

- si la boule tirée est bleue, on la remet dans l'urne
- si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la var égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du n-ième tirage. On notera de plus les événeemnts suivants :

- R_k : *lors du k-ième tirage, on a extrait une boule rouge de l'urne*
- B_k : *lors du k-ième tirage, on a extrait une boule bleue de l'urne*

1. Donner la loi de probabilité de Y_1.
2. Soit $n \geq 2$. Donner l'univers image de Y_n.
3. Calculer pous tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $P([Y_n = 2])$.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = P([Y_n = 1])$.
   (a) Donner u_1 et u_2.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a : $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$. Cette relation reste-elle valable pour $n = 1$?
   (c) On pose pout tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, en déduire l'expression de v_n en fonction de n puis e u_n en fonction de n.
   (d) Déduire des résultats précédents $P([Y_n = 0])$ pour tout n entier naturel non nul.

5. Calculer l'espérance de Y_n.
6. Montrer que : $P([Y_n > 0]) \leq E(Y_n)$. Que peut-on dire que $\lim_{n\to+\infty} P([Y_n = 0])$?
7. On note Z la varf égale au numéro du tirage amenant la dernière boule rouge.
   (a) Donner l'univers image de Z.
   (b) Soit k un entier naturel, $k \geq 2$. Exprimer l'événeemnt $[Z = k]$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.
   (c) En déduire la loi de Z.

Correction 15. 1. **Loi de probabilité de Y_1** :
L'urne contient initialement 3 boules : 2 rouges et 1 bleue.

$$P(Y_1 = 2) = P(B_1) = \frac{1}{3}, \quad P(Y_1 = 1) = P(R_1) = \frac{2}{3}$$

2. **Univers image de Y_n pour $n \geq 2$** :
Chaque tirage d'une boule rouge diminue le nombre de rouges de 1, et ajoute une bleue. On ne peut jamais augmenter le nombre de rouges.
Donc :
$$\Omega(Y_n) = \{0, 1, 2\}$$

3. **Calcul de** $P(Y_n = 2)$:
Remarquer que $Y_n = 2$ signifie qu'aucune boule rouge n'a été tirée parmi les n premiers tirages.
On ne tire que des bleues. La probabilité d'extraire une bleue au k-ième tirage, si $Y_{k-1} = 2$, est toujours $\frac{1}{3}$.
Donc :
$$P(Y_n = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

4. On pose $u_n = P(Y_n = 1)$.
   (a) On a déjà vu :
   $$u_1 = P(Y_1 = 1) = \frac{2}{3}$$
   Calculons u_2 : On applique la formule des probabilités totales au SCE (B_1, R_1) on obtient ;
   $$u_2 = P(Y_2 = 1) = P(Y_2 = 1|B_1)P(B_1) + P(Y_2|R_1)P(R_1)$$
   pn obtient $u_2 = \frac{4}{9}$
   (b) On cherche une relation de récurrence, on applique la formule des probabilités totales au SCE $Y_n = 1, Y_n = 2$. On obtient
   Remarquons que l'on a $P(Y_{n+1} = 1|Y_n = 2) = P(R_{n+1}|Y_n = 2) = \frac{2}{3}$ et $P(Y_{n+1} = 1|Y_n = 1) = P(B_{n+1}|Y_n = 1) = \frac{2}{3}$donc :
   $$u_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1) = P(Y_n = 1) \cdot \frac{2}{3} + P(Y_n = 2) \cdot \frac{2}{3}$$
   Or $P(Y_n = 2) = \frac{1}{3^n}$, donc :
   $$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$$
   Oui, cette relation reste valable pour $n = 1$ (cf calculs précédents).
   (c) On pose $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$. Alors :
   $$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} = \left(\frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}\right) + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3^{n+1}}$$
   $$= \frac{2}{3}(v_n - \frac{2}{3^n}) + \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}v_n - \frac{4}{3^{n+1}} + \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}v_n$$

Donc :

$$v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$$

C'est une suite géométrique on a donc :

$$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} v_1$$

Donc :

$$u_n = v_n - \frac{2}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} v_1 - \frac{2}{3^n}$$

(d) Finalement :

$$P(Y_n = 0) = 1 - P(Y_n = 1) - P(Y_n = 2)$$

5. **Espérance de Y_n :**

$$\mathbb{E}(Y_n) = 0 \cdot P(Y_n = 0) + 1 \cdot P(Y_n = 1) + 2 \cdot P(Y_n = 2) = u_n + 2 \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{2n-2}{3^n} + \frac{2}{3^n} = \frac{2n}{3^n}$$

6. **Lien entre espérance et probabilité :** Remarquons que $P(Y_n > 0) = P(Y_n = 1) + P(Y_n = 2)$, et $E(Y_n) = 1P(Y_n = 1) + 2P(Y_n = 2) \geq P(Y_n = 1) + P(Y_n = 2)$ (car $P(Y_n = 2 > 0)$). On obtient bient :

$$P(Y_n > 0) \leq \mathbb{E}(Y_n)$$

donc :

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n = 0) = 1$$

7. **Variable Z : numéro du tirage de la dernière boule rouge**

(a) Univers image de Z :
$Z \in \mathbb{N}^\star$ car on commence avec 2 rouges et à chaque tirage rouge, leur nombre diminue.
Donc : $\mathrm{Im}(Z) = \{2, 3, 4, \dots\}$

(b) Événement $\{Z = k\}$:
Par définition on a

$$\{Z = k\} = \{Y_{k-1} = 1\} \cap \{Y_k = 0\}$$

Donc :

$$\{Z = k\} = \{Y_{k-1} = 1 \text{ et } Y_k = 0\}$$

(c) Probabilité :

$$P(Z = k) = P(Y_{k-1} = 1) \cdot P(R_k \mid Y_{k-1} = 1) = u_{k-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2(k-1)-2}{3^{k-1}} = \frac{4(k-2)}{3^k}$$