DM Noel

Exercice 1. On considère deux droites du plans $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ qui dépendent d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'équations cartésiennes respectives :

$$D_1(\lambda) : \lambda x + y = 1 \quad \text{et} \quad D_1(\lambda) : x + \lambda y = -1$$

1. Résoudre le système d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda x + y & = 1 \\ x + \lambda y & = -1 \end{array} \right.$$

2. Soit Σ l'ensemble des valeurs pour lesquelles le système précédent n'est pas de Cramer. Que vaut Σ ?
3. Que dire des droites $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ si $\lambda \in \Sigma$?
4. Pour $\lambda \notin \Sigma$ justifier que l'unique point d'intersection de $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$, noté M_λ, a pour coordonnées :
$$M_\lambda = \left(\frac{-1}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\lambda} \right)$$
5. Soit $A = (0, 1)$ et $B = (-1, 0)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$A \in D_1(\lambda) \quad \text{et} \quad B \in D_2(\lambda)$$
6. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donner un vecteur directeur $u_1(\lambda)$ de $D_1(\lambda)$ et $u_2(\lambda)$ de $D_2(\lambda)$. A quelle(s) condition(s) sur λ les deux droites sont elles orthogonales ?
7. A quelle(s) condition(s) sur λ le triangle $AM_\lambda B$ est il rectangle en M_λ ?

Correction 1.

1. Résolvons le système proposé :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda x + y & = 1 \\ x + \lambda y & = -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x + \lambda y & = -1 \\ \lambda x + y & = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x + \lambda y & = -1 \\ (1-\lambda^2)y & = 1 - (-\lambda) \end{array} \right.$$

Le rang du système dépend de $\lambda \in \mathbb{R}$:

CAS 1 : $1 - \lambda^2 \neq 0$ autrement dit $\lambda \notin \{-1, 1\}$ Alors le système est de rang 2 et admet une unique solution :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + \lambda y & = -1 \\ y & = \frac{1+\lambda}{(1-\lambda^2)} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x + \lambda y & = -1 \\ y & = \frac{1}{1-\lambda} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = -1 - \frac{\lambda}{1-\lambda} \\ y & = \frac{1}{1-\lambda} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = \frac{-1+\lambda-\lambda}{1-\lambda} \\ y & = \frac{1}{1-\lambda} \end{array} \right.$$

On obtient

$$\boxed{S = \{\left(\frac{-1}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}\right)\}}$$

CAS 2 : $1 - \lambda^2 = 0$ autrement dit $\lambda \in \{-1, 1\}$ Le système est de rang 1

CAS 2.1 $\lambda = -1$ Le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{ll} x - y & = -1 \\ 0 & = 0 \end{array} \right.$$

On obtient

$$\boxed{S = \{(y-1, y) | y \in \mathbb{R})\}}$$

CAS 2.1 $\lambda = -1$ Le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+y & = -1 \\ 0 & = 2 \end{cases}$$

On obtient

$$\boxed{S = \emptyset}$$

2. D'après la question précédente le système n'est pas de Cramer pour

$$\boxed{\Sigma = \{-1, 1\}}$$

3. Si $\lambda = -1$ les deux droites sont confondues. Si $\lambda = 1$ les deux droites sont parallèles.
4. C'est en effet l'unique solution du système composé des deux équations de droites.
5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \times 0 + 1 = 1$$

donc $A \in D_1(\lambda)$

$$-1 + \lambda \times 0 = -1$$

donc $B \in D_2(\lambda)$

6. Un vecteur directeur de $D_1(\lambda)$ est

$$\boxed{u_1 = (-1, \lambda)}$$

Un vecteur directeur de $D_2(\lambda)$ est

$$\boxed{u_2 = (-\lambda, 1)}$$

Les deux droites sont orthogonales si et seulement si $u_1 \cdot u_2 = 0$ c'est à dire si

$$\lambda + = 0$$

$$\boxed{\text{Les deux droites sont orthogonales si et seulement si } \lambda = 0}$$

7. Comme $M_\lambda \in D_1(\lambda) \cap D_2(\lambda)$, et $A \in D_1(\lambda)$ et $B \in D_2(\lambda)$ on a $AM_\lambda B$ rectangle en M_λ si et seulement si $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ sont orthogonales c'est à dire

$$\boxed{AM_\lambda B \text{ rectangle en } M_\lambda \text{ si et seulement si } \lambda = 0}$$

Exercice 2. On considère $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 2\}$.

1. Rappeler la nature géométrique de S. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$. Déterminer D_f le domaine de définition de f. Est elle bien définie pour tous les points de S ?
2. (a) Mettre $f(z) - \frac{7}{3}$ sous la forme d'une fraction.
   (b) Montrer que pour tout z dans l'ensemble de définition de f,

   $$\left| f(z) - \frac{7}{3} \right|^2 = \frac{|z|^2 + 8\mathfrak{Re}(z) + 16}{9(|z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z) + 1)}$$

   (c) On note S_2 le cercle de centre $7/3$ et de rayon r_0. Montrer que $f(S) \subset S_2$
3. (a) Soit $y = f(z)$, exprimer z en fonction de y quand cela a un sens.
   (b) Déterminer l'ensemble F tel que $f : D_f \to F$ soit bijective. Déterminer l'expression de f^{-1}
   (c) (Difficile) Montrer que pour tout $y \in S_2$, $f^{-1}(y) \in S$.
   (d) En déduire $f(S)$.

Correction 2.

1. S est le cercle de centre 0 et de rayon 2. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Comme $|-1| = 1$, $-1 \notin S$ donc f est bien définie sur S.
2. (a)
$$f(z) - \frac{7}{3} = \frac{6z + 3 - 7(z+1)}{3(z+1)} = \frac{-z-4}{3(z+1)}$$

   (b)
$$\begin{aligned}
\left|f(z) - \frac{7}{3}\right|^2 &= \left|\frac{-z-4}{3(z+1)}\right|^2 \\
&= \frac{|z+4|^2}{9|z+1|^2} \\
&= \frac{(z+4)\overline{(z+4)}}{9(z+1)\overline{(z+1)}} \\
&= \frac{(z+4)(\overline{z}+4)}{9(z+1)(\overline{z}+1)} \\
&= \frac{z\overline{z} + 4(z+\overline{z}) + 16}{9(z\overline{z} + (z+\overline{z}) + 1)} \\
&= \frac{|z|^2 + 8\mathfrak{Re}(z) + 16}{9(|z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z) + 1)}
\end{aligned}$$

   (c) (La question était manifestement mal posée, il aurait par exemple fallu présicer le rayon qui vaut $\frac{2}{3}$)
   Pour tout $z \in S$, on a $|z|^2 = 4$ donc pour tout $z \in S$:
$$\begin{aligned}
\left|f(z) - \frac{7}{3}\right|^2 &= \frac{4 + 8\mathfrak{Re}(z) + 16}{9(4 + 2\mathfrak{Re}(z) + 1)} \\
&= \frac{8\mathfrak{Re}(z) + 20}{9(2\mathfrak{Re}(z) + 5)} \\
&= \frac{4(2\mathfrak{Re}(z) + 5)}{9(2\mathfrak{Re}(z) + 5)} \\
&= \frac{4}{9} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2
\end{aligned}$$
   On obtient $r_0 = \frac{2}{3}$ car $\left|f(z) - \frac{7}{3}\right| > 0$.
   Ainsi pour tout $z \in S$ on a $f(z) \in S_2$. D'où $f(S) \subset S_2$.
3. (a) On résout $y = f(z)$.
$$\begin{aligned}
y &= \frac{2z+1}{z+1} \\
(z+1)y &= 2z+1 \\
z(y-2) &= 1-y \\
z &= \frac{1-y}{y-2} \quad y \neq 2
\end{aligned}$$
   (b) Ainsi $f : D_f \to \mathbb{C} \setminus \{2\}$ réalise une bijection et $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{y-2}$
   (c) Soit $y \in S_2$ on va réaliser le même procédé que la question 2b) pour f^{-1}. Comme on va

s'intéresser aux images de $y \in S_2$ on cherche à mettre en lumière le role de $|y - \frac{7}{3}|$

$$\begin{aligned}
\left|f^{-1}(y)\right|^2 &= \frac{|1-y|^2}{|y-2|^2} \\
&= \frac{|y-1|^2}{|y-2|^2} \\
&= \frac{|(y-\frac{7}{3})+\frac{4}{3}|^2}{|(y-\frac{7}{3})+\frac{1}{3}|^2} \\
&= \frac{|y-\frac{7}{3}|^2+\frac{8}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3})+\frac{16}{9}}{|y-\frac{7}{3}|^2+\frac{2}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3})+\frac{1}{9}}
\end{aligned}$$

Maintenant, pour tout $y \in S_2$ on a $|y - \frac{7}{3}|^2 = \frac{4}{9}$ donc pour tout $y \in S_2$ on a

$$\begin{aligned}
\left|f^{-1}(y)\right|^2 &= \frac{\frac{4}{9}+\frac{8}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3})+\frac{16}{9}}{\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3})+\frac{1}{9}} \\
&= \frac{\frac{8}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3})+\frac{20}{9}}{\frac{2}{3}\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3})+\frac{5}{9}} \\
&= \frac{24\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3})+20}{6\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3})+5} \\
&= \frac{4(6\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3})+5)}{6\mathfrak{Re}(y-\frac{7}{3})+5} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $y \in S_2$ $f^{-1}(y)$ appartient au cercle de centre 0 et de rayon 2, c'est-à-dire S. On vient donc de montrer $f^{-1}(S_2) \subset S$.

(d) Les questions 2c) et 3c) impliquent que $f(S) = S_2$