Correction DS 1

Exercice 1. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+2}. \quad (I)$$

Ecrire un script Python, qui demande à l'utilisateur un nombre flottant x et qui affiche True si x vérifie l'équation (I) et False sinon.

Exercice 2. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0 \qquad (E)$$

1. Déterminer le domaine de définition de (E).
2. Dire si les réels suivants sont solutions ou non de (E)

$$x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = 12$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
4. Montrer que résoudre (E) est équivalent à résoudre le système :

$$\begin{cases} \sqrt{5x-1} > & 2x-1 \qquad (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x \qquad (E_2) \end{cases}$$

5. Résoudre les deux inéquations obtenues à la question précédente.
6. Résoudre (E).

Correction 1.

1. Seule la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}_+$ ainsi (E) est bien définie pour tout x tel que $5x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire

$$\boxed{D_E =]\tfrac{1}{5}, +\infty[}$$

2. Cours

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a}$$

3. Notons $f(x) = \lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor$ On a $f(\frac{1}{5}) = \left\lfloor 2\frac{1}{5} - \sqrt{5\frac{1}{5} - 1} \right\rfloor = \lfloor 2\frac{1}{5} \rfloor = 0$ Donc

$$\boxed{\frac{1}{5} \text{ est solution de } E}$$

On a $f(\frac{1}{2}) = \left\lfloor 2\frac{1}{2} - \sqrt{5\frac{1}{2} - 1} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \right\rfloor$ Or $\frac{3}{2} > 1$ donc $\sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{1} = 1$ et donc $1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$ ainsi

$$\boxed{\frac{1}{2} \text{ n'est pas solution de } E}$$

On a $f(1) = \left\lfloor 2 \times 1 - \sqrt{5-1} \right\rfloor = \lfloor 2-2 \rfloor = \lfloor 0 \rfloor$

$$\boxed{1 \text{ est solution de } E}$$

On a $f(12) = \left\lfloor 2 \times 12 - \sqrt{60-1} \right\rfloor = \left\lfloor 24 - \sqrt{59} \right\rfloor$ Or$59 < 64 = 8^2$ donc $\sqrt{59} < 8$ et $24 - \sqrt{59} > 24 - 8 = 16$ ainsi $f(2) > 16$ et

$$\boxed{12 \text{ n'est pas solution de } E}$$

4. D'après ce qu'on vient de voir, pour tout $x \in D_E$ on a :

$$2x - \sqrt{5x-1} - 1 < \left\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \right\rfloor \leq 2x - \sqrt{5x-1}$$

Si x est solution de (E) on a $\left\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \right\rfloor = 0$ et donc l'équation (E) équivaut à $2x - \sqrt{5x-1} - 1 < 0 \leq 2x - \sqrt{5x-1}$, soit

$$\boxed{\begin{cases} \sqrt{5x-1} > & 2x-1 \qquad (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x \qquad (E_2) \end{cases}}$$

5. Résolvons ces deux inéquations. Tout d'abord la première :

$$\sqrt{5x-1} > 2x - 1 \quad (E_1)$$

On distingue deux cas :

- ▶ Cas 1 : $2x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq \frac{1}{2}$
  Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned} (E_1) &\iff 5x - 1 > (2x-1)^2 \\ &\iff 5x - 1 > 4x^2 - 4x + 1 \\ &\iff 4x^2 - 9x + 2 < 0 \end{aligned}$$

  Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 9^2 - 4*4*2 = 81 - 32 = 49 = 7^2$. $4x^2 - 9x + 2$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{9+7}{8} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de (E_1) sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &=]\frac{1}{4}, 2[\cap[\frac{1}{2}, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{2}, 2[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } [\tfrac{1}{2}, +\infty[\text{ sont } \mathcal{S}_1 = [\tfrac{1}{2}, 2[}$$

- <u>Cas 2 :</u> $2x - 1 < 0$ c'est-à-dire $x < \frac{1}{2}$
  Dans ce cas, tous les réels $x \in D_E$ sont solutions car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur }]-\infty, \tfrac{1}{2}[\text{ sont } \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{2}]}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, 2[}$$

On fait la même chose pour (E_2)

$$\sqrt{5x-1} \leq 2x \quad (E_2)$$

On distingue deux cas :

- <u>Cas 1 :</u> $2x \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 0$
  Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 5x - 1 \leq (2x)^2 \\ &\iff 5x - 1 \leq 4x^2 \\ &\iff 4x^2 - 5x + 1 \geq 0\end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 5^2 - 4 * 4 * 1 = 25 - 16 = 9 = 3^2$.
$4x^2 - 5x + 1$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{5+3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de (E_2) sur $[0, +\infty[$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= (]-\infty, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[) \cap [0, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } [0, +\infty[\text{ sont } \mathcal{E}_2 = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, +\infty[}$$

- ► <u>Cas 2 :</u> $2x < 0$ c'est-à-dire $x < 0$
  Dans ce cas, aucun réel n'est solution car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ sont } \mathcal{E}_2' = \emptyset}$$

  En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_2' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, +\infty[}$$

6. x est solution de (E) si et seulement si il est solution de (E_1) et (E_2), l'ensemble des solutions correspond donc à l'intersection : $\mathcal{E} \cap \mathcal{S} = ([\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[) \cap [\frac{1}{5}, 2[= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, 2[$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont } [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, 2[}$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

1. Etudier la parité de f.
2. Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f

Exercice 4. On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$. On rappelle que pour tout réel y on note $\sqrt[3]{y}$ l'unique solution de l'équation $x^3 = y$ d'inconnue x.

Le but de l'exercice est de donner des expressions simplifiées de α et β.

1. Ecrire un script Python qui permet d'afficher une valeur approchée de α.
2. (a) Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
   (b) Vérifier que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
   (c) En déduire que $(\alpha + \beta)^3 = 4 - 3(\alpha + \beta)$
3. On pose $u = \alpha + \beta$ et on considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + 3x - 4$.
   (a) A l'aide de la question précédente montrer que u est une racine de P c'est-à-dire que $P(u) = 0$.
   (b) Trouver une autre racine « évidente » de P.
   (c) Trouver trois nombres réels a, b, et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
   (d) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(e) En déduire la valeur de u.

4. On considère la fonction polynomiale $Q : x \mapsto Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$
   (a) A l'aide des questions précédentes, développer et simplifier $Q(x)$ pour tout nombre réel x.
   (b) En déduire des expressions plus simples de α et β.

Correction 2.

1.
```
print((2+5**(1/2))**(1/3))
```

2. (a)

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\\ &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}}\\ &= \sqrt[3]{4-5}\\ &= \sqrt[3]{-1}\\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}\\ &= 4\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha\beta = -1 \text{ et } \alpha^3+\beta^3 = 4}$$

(b)

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.}$$

(c)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ &= 4-3\alpha\beta\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(u) &= P(\alpha+\beta) \\ &= (\alpha+\beta)^3 + 3\alpha\beta - 4 \\ &= 0 \quad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

$$\boxed{u \text{ est racine de } P}$$

4. 1 est aussi racine de P, en effet : $P(1) = 1 + 3 - 4 = 0$

$$\boxed{1 \text{ est racine de } P}$$

5. Développons $(x-1)(ax^2+bx+c)$ on obtient

$$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

En identifiant avec P, on a : $a = 1, b - a = 0, c - b = 3, -c = -4$ c'est à dire

$$\boxed{a = 1,\ b = 1 \text{ et } c = 4}$$

6. D'après la question précédente $P(x) = (x-1)(x^2+x+4)$ Le discriminant de x^2+x+4 est $\Delta = 1 - 4 * 4 = -15 < 0$ $x^2+x+4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $P(x) = 0$ admet pour unique solution

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$$

7. 1 est racine de P, c'est la seule. Comme u est aussi racine,

$$\boxed{u = 1}$$

8. (a) Développons Q :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-\alpha)(x-\beta) \\ &= x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta \\ &= x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ Q(x) = x^2 - x - 1}$$

(b) L'expression $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ montre que les racines de Q sont α et β. D'autre part, on connait une autre expression des racines de Q à l'aide du discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, les racines de Q sont

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Remarquons que $r_1 < r_2$ et on a $\alpha < \beta$ donc

$$\boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Correction 3. L'équation (I) est définie pour tout $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ et pour tout $x \in D$ on a :

$$\begin{aligned}
(I) &\iff \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x+2} \leq 0 \\
&\iff \frac{x+2-x(x+1)}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \\
&\iff \frac{-x^2+2}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \\
&\iff \frac{x^2-2}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \\
&\iff \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+1)(x+2)} \geq 0
\end{aligned}$$

On fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x - \sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x + 1$		$-$		$-$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
$x + 2$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+1)(x+2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Les solutions sont donc

$$\boxed{\mathbb{S} =]-\infty, -2[\cup [-\sqrt{2}, -1[\cup [\sqrt{2}, +\infty[}$$

```python
x=float(input('Choisissez un reel x'))
if 1/(x+1) <= x/(x+2):
    print(True)
else:
    print(False)
```

Correction 4.

1. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} \\ &= \frac{\frac{1}{e^{2x}}-1}{\frac{1}{e^{2x}}+1} \\ &= \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc impaire.}}$$

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})} \\ &= \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} = 1}$$

$\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} = -1}$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \end{aligned}$$

Comme l'exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a le tableau suivant :