TD 20 : Applications linéaires

Entrainements

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f de E dans F est une application linéaire.

1. $f(x,y) = (x-y, x, 2x+y)$
2. $f(x,y) = (y, x^2)$
3. $f(x) = |x|$
4. $f(x,y,z,w,t) = (y+t, 0, 2x-3y+1)$
5. $f(x,y) = (x+y, \sqrt{x^2+y^2})$
6. $f(x,y) = (\sin(x+y), x)$

Noyau, image, injectivité, surjectivité, isomorphisme

Exercice 2. Pour chacune des applications linéaires suivantes (on ne demande pas ici de vérifier qu'elles sont bien linéaires), décrire l'image et le noyau. En déduire si elles sont injectives, surjectives. Déterminer celles qui sont des isomorphismes, des automorphismes.

1. $f(x,y,z) = (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z)$
2. $f(x,y) = (4x+y, x-y, 2x+3y)$
3. $f(x,y,z) = (2x+y+z, x-y+2z, x+5y-4z)$
4. $f(x,y,z) = (y, 0, x+z, 3x+y-2z)$
5. $f(x,y) = (2x-3y, x-y, x+2y)$
6. $f(x,y,z) = (z, x-y, y+z)$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^3 - 3f - 2Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Prouver que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Soit g un endomorphisme de E tel que : $g^3 - g^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et tel que $g \neq Id_E$. Montrer que g n'est pas bijectif.

Applications linéaires et matrices

Exercice 4. Soient les vecteurs $u = (1,1)$, $v = (2,-1)$ et $w = (1,4)$.

1. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur w dans la base (u,v).
3. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2,1)$ et $f(v) = (1,-1)$. Déterminer $f(x,y)$.
4. Pour quelles valeurs du paramètre réel a existe-t-il une application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $g(u) = (2,1) \quad g(v) = (1,-1) \quad g(w) = (5,a)$?

Exercice 5. On considère f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de matrices relativement à la base canonique $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices de $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. Montrer que $\ker f = \operatorname{Im} f$ et donner une base de $\operatorname{Im} f$. Donner sans calcul une base de $\operatorname{Im} g$.
3. On pose $h = f + g$. Calculer la matrice de $h \circ h$. Conclusion ?

Exercice 6. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Démontrer que la donnée de

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad f(e_2) = e_1 - e_2 \quad f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Comment choisir λ pour que f soit surjective ? Injective ? Comment choisir λ pour que f soit un automorphisme ?

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = (2e_1 - 5e_2 - 8e_3)$ et $f(e_3) = (-e_1 + 4e_2 + 6e_3)$.

1. Donner l'expression de $f(x, y, z)$
2. Déterminer $\ker(f - Id_E)$ et en donner une base et la dimension.
3. Déterminer $\ker(f^2 + Id_E)$ et en donner une base et la dimension.
4. Montrer que $\ker(f - Id_E) \cap \ker(f^2 + Id_E) = \{0_E\}$.
5. Montrer que la réunion des deux bases précédentes constitue une base de E. Trouver l'image par f^2 des vecteurs de cette base.

Exercice 8. On considère l'application linéaire définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2y - 3z, -2x + 4y - 5z, z).$$

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice M de f relativement à $\mathcal{B}$.
2. On pose : $f_1 = (-1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$ et $f_3 = (1, 0, 0)$. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$.
3. On appelle matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ dans une base $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})$. Si un vecteur u a pour vecteur coordonnées X dans $\mathcal{B}$ et X' dans $\mathcal{B}'$, on a $X = PX'$.
   Déterminer $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$.
4. Vérifier que : $PNP^{-1} = M$. Retrouver ce résultat sans calcul (remarquer que : $P^{-1} = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$).

Exercice 9.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par

   $$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n, x_2 + \cdots + x_n, \ldots, x_n).$$

   Montrer que f est bijective et donner l'expression analytique de sa réciproque.
2. En déduire que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 10. Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par : $h(x, y, z) = (-2x + y + 2z, -x + y + z, -2x + y + 2z)$.

1. Donner la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\ker h$. Quel est le rang de h ? Donner une base de $\operatorname{Im} h$.
3. Déterminer la matrice de $h^2 = h \circ h$. Quel est le rang de h^2 ? Son noyau ? Son image ?
4. Calculer h^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice relativement à la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. On pose $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 0)$ et $u_3 = (0, -1, 2)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f relativement à cette base. Que remarquez-vous ?

Exercice 12. Soit $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée à M.

1. Soit $u = (1, 2, -1)$. Montrer que (u) est une base de $\ker f$.
2. Soient $v = (1, 0, -1)$ et $w = (1, -1, 0)$. Calculer $f(v)$ et $f(w)$.
3. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f relativement à cette base.
4. Montrer que $\operatorname{Im} f = \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$.

Applications linéaires et rang

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 3e_2 + e_3$ et $f(e_3) = -2e_2 + 6e_3$.

1. Écrire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer le rang de f, une base et la dimension de son noyau, une base de l'image.

Exercice 14. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de f et une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\ker(f)$. On note $\mathcal{B}_1$ une base de l'image et $\mathcal{B}_2$ une base du noyau.
2. Démontrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Calculer le rang de f. En déduire le noyau et l'image de f.
2. f est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}.
3. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injective. Pour chacune de ces valeurs, déterminer $\ker(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3})$.
4. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(f + Id_{\mathbb{R}^3})^n$.

Exercices plus abstraits

Exercice 16. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$ et $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.
2. Montrer que : $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f \subset \ker g$.

Exercice 17. Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $(x_1, \ldots, x_r)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que

1. Si $(f(x_1), \ldots, f(x_r))$ est libre, alors $(x_1, \ldots x_r)$ est libre.
2. Si $(x_1, \ldots, x_r)$ est libre et f injective, alors $(f(x_1), \ldots, f(x_r))$ est libre.
3. Si $(x_1, \ldots x_r)$ est une famille génératrice de E et f surjective, alors $(f(x_1), \ldots, f(x_r))$ est une famille génératrice de F.
4. Si $(f(x_1), \ldots, f(x_r))$ est une famille génératrice de F et f injective alors $(x_1, \ldots, x_r)$ est une famille génératrice de E.
5. f est bijective si et seulement si l'image de toute base de E par f est une base de F.

Exercice 18. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont stables par g.

Exercice 19. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, on a : $\mathrm{Im}(\lambda f) = \mathrm{Im}\, f$ et $\ker(\lambda f) = \ker f$.

Exercice 20. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f \circ f = f^2$. Montrer que

$$\ker(f^2) = \ker f \Leftrightarrow \ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}.$$

Exercice 21. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ soit liée.

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \lambda e_i$. (On pourra considérer $e_1 + e_i$).
2. Montrer que f est soit identiquement nulle, soit une homothétie vectorielle.

Exercice 22. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $(u, f(u), f^2(u))$ soit une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de f dans cette base.

Type DS

Exercice 23 (Equation dans $\mathcal{L}(E)$)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à son vecteur nul. On s'intéresse aux endomorphismes f de E vérifiant la relation

$$f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E\,. \quad (*)$$

Un exemple On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (3x + 2y, -x) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $g \circ g$ et vérifier que g est solution de $(*)$
3. Déterminer $F = \ker(g - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et donner une base de F et une base de G.
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$
5. Soit $u = (1, -1)$ et $v = (-2, 1)$ Montrer que $B = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer (x, y) comme combinaison linéaire de u et v.
7. Calculer $g^n(u)$ et $g^n(v)$.
8. Donner finalement l'expression de $g^n(x, y)$ en fonction de x et y.

Etude générale On se place à nouveau dans le cas général et on s'intéresse à l'équation $(*)$.

1. Montrer que si f vérifie $(*)$ alors f est bijective et exprimer f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de Id_E.
2. Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. L'ensemble des endomorphisme vérifiant $(*)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, espace des endomorphismes de E ?

Etude des puissance de f On suppose dans la suite que f est une solution de $(*)$ et que f n'est pas de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que (f, Id_E) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$
2. (a) Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de Id_E et f.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, f^n peut s'écrire sous la forme $f^n = a_n f + b_n\,\mathrm{Id}_E$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$
   (c) Justifier que dans l'écriture précédente, le couple (a_n, b_n) est unique.
3. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0$
   (b) En déduire une expression de a_n ne faisant intervenir que n.
   (c) Calculer alors b_n.