Programme de colle : Semaine 21
Lundi 17 mars

1 Cours

1. Intégration
   — Définition des primitives et de l'intégrale (comme différence des valeurs d'une primitive)
   — Propriétés sur les intégrales (Chasles, linéarité, positivité, croissance)
   — Primitives usuelles
   — IPP, changement de variable
   — Sommes de riemann.
2. Probabilité :
   — Univers, événements, système complet d'événements.
   — Probabilité définition et exemple proba uniforme.
   — Formule des proba totales.
   — Probabilité conditionnelle.
   — Formule des proba composées.
   — Formule des proba totales version proba conditionnelle.
   — Formule de Bayes (+ démo)
   — Evenements indépendants, mutuellement indépendants, expériences indépendantes.
3. Python :
   — Tableau numpy, dictionnaires
   — Représentation informatique d'un polynome par une liste (évaluation, racine, dérivation, somme)

2 Exercices Types

1. Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :
   (a) $x \mapsto \cos(3x)$
   (b) $x \mapsto \cos^3(x)$
   (c) $x \mapsto \cos(x)\sin^4(x)$
   (d) $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
   (e) $x \mapsto \tan(x)$
   (f) $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
   (g) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
   (h) $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$
   (i) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
   (j) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$
   (k) $x \mapsto \dfrac{5x-12}{x(x-4)}$
2. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$
   (b) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx$
   (c) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$
   (d) $\displaystyle\int_1^t x^n \ln(x)dx$, $n \in \mathbb{N},\ t > 0$
3. Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :
   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x) + \tan^3(x))dx \quad (u = \tan x)$
   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(x)\cos^2(x)dx \quad (u = \cos x)$
   (c) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}dt$, $a > 0 \quad (t = a\sin u)$
   (d) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx$
   (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$
   (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{2+x}}{1+x}dx \quad (x = u^2-2)$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$
   (b) En déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$J_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{e}$$
   (d) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$
   (e) Trouver un équivalent simple de J_n quand n tend vers l'infini.
5. Trouver un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$
6. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.
   Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, calculer f' et étudier les variations de f.
7. Soient trois personnes choisies une à une et sans remise dans une population. On note R_i l'événement « la i-ième personne a un rhésus + ». Ecrire à l'aide des R_i les événements suivants
   - A : « au moins une personne a un rhésus + » ;
   - B : « au moins deux personnes ont un rhésus + » ;
   - C : « une personne exactement a un rhésus + » ;
   - D : « au moins une des deux premières personnes a un rhésus + ».
8. On répartit 4 boules numérotées de 1 à 4 dans 4 tiroirs également numérotés de 1 à 4, chaque tiroir pouvant recevoir toutes les boules. On pourra considérer qu'un résultat est une 4-liste (n_1, n_2, n_3, n_4) où n_i est le numéro du tiroir contenant la boule de numéro i.
   Quelle est la probabilité pour que les 4 tiroirs soient occupés ? Pour qu'un seul tiroir soit occupé ? Pour que les boules 1 et 2 se trouvent dans les 2 premiers tiroirs ? (+ modélisation informatique)
9. On considère n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. L'urne U_1 contient b boules blanches et n noires, les autres contiennent initialement b boules blanches et b boules noires. On tire une boule de U_1 que l'on met dans U_2 puis une boule de U_2 que l'on met dans U_3 et ainsi de suite. On note p_i la probabilité d'obtenir une boule blanche au i-ième tirage. Calculer p_1 puis p_{i+1} en fonction de p_i pour $i \geq 2$. Déterminer p_i en fonction de i puis $\lim\limits_{i\to+\infty} p_i$.
10. On possède un jeu de 32 cartes et un jeu de 52 cartes. On choisit au hasard l'un de ces jeux et on y tire une carte. On constate que c'est une dame. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du jeu de 32 cartes ?
11. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par
    $$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3sin(u_n) + 2$$
12. Représenter informatiquement un polynome (liste) et donner une fonction qui permet de faire la somme de deux polynomes.