

Programme de colle : Semaine 14

Lundi 12 Janvier

1 Cours

1. Matrices
 - (a) Calcul matriciel.
 - (b) Rang d'une matrice.
 - (c) Matrice inversible.
 - (d) Lien avec les systèmes linéaires.
 - (e) Calcul d'une puissance n -ème.
2. Dénombrement
 - (a) Cardinal d'un ensemble (union de deux ensembles, complémentaire.)
 - (b) Choix de p objets parmi n .
3. Python :
 - (a) Instructions conditionnelles (if/else)
 - (b) Fonctions
 - (c) Boucles `for`, `while`
 - (d) Listes
 - (e) Chaînes de caractères.

2 Exercices Types

1. Soient les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - (a) Déterminer des réels α et β tels que $A = \alpha I_3 + \beta J$. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (c) Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n. \end{cases}$$

Calculer x_n , y_n et z_n en fonction de n .

2. Soient les deux matrices suivantes : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
 - (a) Calculer B^3 . B est-elle inversible ?
 - (b) Calculer les puissances n -ièmes de C .

Dénombrement :

1. Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.
 - (a) On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.
 - i. Donner le nombre de résultats possibles.
 - ii. Combien de ces résultats amènent
 - A. exactement 1 jeton noir ?

- B. au moins 1 jeton noir ?
 - C. au plus un jeton noir ?
 - D. 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?
- (b) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.
- (c) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.

Informatique :

1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste et retourne l'indice du maximum de cette liste.
2. Un polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est encodé en python par une liste à trois éléments $L = [c, b, a]$.
Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste à trois éléments correspondant à un polynôme du second degré et retourne le nombre de racine réelle de ce polynôme.