

Programme de colle : Semaine 4

Lundi 7 Octobre

1 Cours

1. Une étude de fonction en début de colle peut être demandée pendant toute l'année par les colleurs !
2. Trigonométrie
 - (a) Définition de arccos, arcsin, arctan (aucune propriété analytique n'est attendue)
 - (b) Formules d'additivité de cos et sin.
 - (c) Résolutions des équations trigonométriques
3. Sommes - Produits - Récurrences
 - (a) Raisonnement par récurrence (récurrence simple, double et récurrence forte : dans ce dernier cas, on doit donner à l'étudiant la proposition de récurrence)
 - (b) Notations Σ et \prod .
 - (c) Les sommes suivantes sont à connaître : $\sum_{k=1}^n 1, \sum_{k=1}^n k, \sum_{k=0}^n q^k$ (Les preuves des deux dernières sont exigibles)
 - (d) Linéarité de la somme.
 - (e) Relation de Chasles.
 - (f) Changement d'indice.
 - (g) Sommes télescopiques.
 - (h) Définition de la factorielle.
 - (i) Définition des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$.
 - (j) Binôme de Newton (preuve non exigible).
 - (k) Sommes doubles.
4. Python :
 - (a) Déclarer une variable
 - (b) Instruction conditionnelle (if/else)
 - (c) Fonction

2 Exercices Types

1. Résoudre $\cos(2x) = \sin(x)$
2. Résoudre $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{-1}{2}$
3. Donner la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$
4. Exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$
5. Calculer $\sum_{k=0}^n x^{2k}$ et $\sum_{k=0}^n x^{2k+1}$
6. Calculer $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$
7. Prouver par récurrence que $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

Montrer par récurrence que $u_n = n2^n$

9. Calculer $\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{j}{k}$
10. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k})$
11. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier et retourne True si l'entier est plus grand que 100 et False sinon.
12. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne $n/2$ si il est pair, et $3n + 1$ sinon.