CH18 : Équation différentielle (bis)

Définition 1. Équations différentielles linéaires du premier ordre :

- On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme résoluble toute équation de la

  forme : y'(t)+a(t)y(t)=b(t) (1)

- Lorsque b est la fonction nulle, on dit que c'est une équation homogéne.

  On appelle équation homogène associée à (1) l'équation : y'(t)+a(t)y(t)=0

- Une équation différentielle linéaire est dite à coefficients constants lorsque les fonctions a et b sont constantes.

Définition 2. Solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :
On appelle solution de l'équation différentielle linéaire (1) toute fonction :

- f dérivable sur $\mathbb{R}$
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$

Théorème 1. Soit $a : I \to \mathbb{R}$ continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et soit A une primitive de a sur I.
Les solutions de l'équation différentielle homogène associée (2) : $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions :

$$S_h = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

où A est une primitive de a

Proposition 2 (Méthode de la variation de la constante)**.** Soient deux fonctions a et b continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et A une primitive de a. L'équation différentielle (1) : $y' + a(x)y = b(x)$ admet une solution particulière de la forme

$$\forall x \in I, \quad y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}$$

avec C une fonction dérivable qui s'obtient par un calcul de primitive.