Correction du DS 3

Exercice 1. Détermination de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. (a) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E) : 4x^2 + 2x - 1 = 0$.
   (b) Décrire les solutions de $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$.

2. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
   (a) Quelle est la valeur de $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$?
   (b) Montrer que $\omega^4 = \overline{\omega}$ et que $\omega^3 = \overline{\omega^2}$.
   (c) En déduire que
$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$
   (d) Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est une solution de l'équation (E). En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Correction 1.

(a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : 4x^2 + 2x - 1 = 0$. Son discriminant vaut :
$$\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 4 + 16 = 20.$$
Ainsi :
$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$
$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ dans } \mathbb{R} \text{ sont } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.}$$

(b) Les solutions de $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines 5eme de l'unité :
$$z_k = e^{\frac{2i\pi k}{5}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$
$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\} \text{ avec } \omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}.}$$

On note désormais $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

(a) On a pour tout $q \neq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
Donc
$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega}.$$
Or $\omega^5 = 1$ donc
$$\boxed{\text{On a } 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0.}$$

(b) Comme $|\omega| = 1$, on a $\overline{\omega} = \frac{1}{\omega} = \omega^{-1} = \omega^4$. En élevant au carré :
$$\overline{\omega^2} = (\overline{\omega})^2 = (\omega^4)^2 = \omega^8 = \omega^3.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \omega^4 = \overline{\omega} \text{ et } \omega^3 = \overline{\omega^2}.}$$

(c) Reprenons la relation de la question (a) et groupons les termes conjugués :

$$1 + (\omega + \omega^4) + (\omega^2 + \omega^3) = 0.$$

Or la formule d'Euler nous donne

$$\omega + \overline{\omega} = 2\mathfrak{Re}(\omega) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

et

$$\omega^2 + \overline{\omega^2} = 2\mathfrak{Re}(\omega^2) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

On obtient donc :

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$

$$\boxed{\text{On a } 1 + 2\cos(\tfrac{2\pi}{5}) + 2\cos(\tfrac{4\pi}{5}) = 0.}$$

(d) On a $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

et

$$1 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta).$$

En sommant ces relations et en évaluant en $\theta = \frac{2\pi}{5}$ on obtient :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1.$$

En substituant, on obtient :

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1) = 0$$

Soit en simplifiant :

$$4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$$

Donc $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation (E). On en déduit que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Or $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est positif (car $\frac{2\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}$ et $\cos(\theta) \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$)Donc

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.}$$

Exercice 2. On considère la relation de récurrence :

$$(R) : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n + 3n - 3.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui vérifie (R) et de plus :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3.$$

Le but de l'exercice est de déterminer une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une suite (v_n) vérifiant (R) de la forme $v_n = an + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
2. On pose alors $w_n = u_n - v_n$. Montrer que (w_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = 2w_{n+1} - 4w_n.$$

3. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
4. Donner alors l'expression de u_n en fonction de n.

Correction 2.

1. On cherche une suite particulière (v_n) vérifiant (R) sous la forme $v_n = an + b$. Remplaçons dans (R) :

$$a(n+2) + b = 2(a(n+1) + b) - 4(an + b) + 3n - 3.$$

En développant et simplifiant :

$$an + 2a + b = 2an + 2a + 2b - 4an - 4b + 3n - 3.$$

$$an + 2a + b = -2an + 2a - 2b + 3n - 3.$$

$$3an + 3b = 3n - 3.$$

En identifiant les coefficients de n et les constantes :

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = -1. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Une suite particulière est donc } v_n = n - 1.}$$

2. On pose $w_n = u_n - v_n$. Alors :

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= u_{n+2} - v_{n+2} \\ &= (2u_{n+1} - 4u_n + 3n + 1) - (2v_{n+1} - 4v_n + 3n + 1) \\ &= 2(u_{n+1} - v_{n+1}) - 4(u_n - v_n) \\ &= 2w_{n+1} - 4w_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{(w_n) \text{ vérifie bien la relation } w_{n+2} = 2w_{n+1} - 4w_n.}$$

3. On considère l'équation caractéristique associée :

$$X^2 - 2X + 4 = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 16 = -12 < 0$, donc les racines complexes sont :

$$r_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}.$$

D'où la forme générale :

$$w_n = (1 + i\sqrt{3})^n A + (1 - i\sqrt{3})^n B, \quad A, B \in \mathcal{C}.$$

Comme u_0 et u_1 sont réels, on choisit $B = \overline{A}$, et on obtient une forme réelle :

$$w_n = \rho^n \big(C \cos(n\theta) + D \sin(n\theta)\big),$$

avec $\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ et $\theta = \arctan(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$. Donc :

$$w_n = 2^n \big(C \cos(n\pi/3) + D \sin(n\pi/3)\big).$$

Déterminons C et D à partir de w_0 et w_1 :

$$w_0 = u_0 - v_0 = 1 - (0-1) = 2, \quad w_1 = u_1 - v_1 = 3 - (1-1) = 3.$$

On a :

$$\begin{cases} w_0 = 2^0(C) = C = 2, \\ w_1 = 2(C\cos(\pi/3) + D\sin(\pi/3)) = 2\left(\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}D\right) = C + \sqrt{3}D. \end{cases}$$

Donc :

$$3 = 2 + \sqrt{3}D \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\boxed{w_n = 2^n\left(2\cos\tfrac{n\pi}{3} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{n\pi}{3}\right).}$$

4. Enfin, $u_n = v_n + w_n$, donc :

$$\boxed{u_n = n - 1 + 2^n\left(2\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}\right)}.$$

Exercice 3. On se propose dans ce problème de calculer la limite de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est appelée la série harmonique alternée.

Préliminaires

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Montrer que pour tout $x > -1$,

$$\ln(x+1) \leq x. \quad (I_1)$$

Étude de la série harmonique

On définit $(H_n)_{n\geq 1}$ par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La suite $(H_n)_{n\geq 1}$ est appelée la série harmonique.

3. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k).$$

   (b) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n \geq \ln(n+1).$$

   (c) Donner la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Constante d'Euler

On définit pour tout $n \geq 2$, par

$$A_n = H_{n-1} - \ln(n) \quad \text{et} \quad B_n = H_{n-1} - \ln(n-1)$$

4. (a) Montrer que $(A_n)_{n\geq 2}$ est croissante.
   (b) Montrer que $(B_n)_{n\geq 2}$ est décroissante (on pourra utiliser (I_1) pour un x bien choisi)
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} A_n - B_n$
5. En déduire que la suite $(A_n)_{n\geq 2}$ converge vers une limite, que l'on notera γ (appelée *constante d'Euler*).

Convergence de la série harmonique alternée

6. (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,
$$S_{2n} + H_{2n} = H_n.$$
   (b) (Difficile) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = -\ln(2).$$
   (c) Justifier que S_{2n+1} a la même limite que S_{2n}.
   (d) Conclure sur la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

Correction 3.

1. On a
$$S_1 = -1, \qquad S_2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad S_3 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}.$$
$$\boxed{S_1 = -1,\ S_2 = -\frac{1}{2},\ S_3 = -\frac{5}{6}.}$$
2. Soit $f(x) = \ln(x+1) - x$.
   (a) f est définie sur $]-1, +infty[$ et dérivable sur cet ensemble. On a $\forall x > 0$:
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}.$$
   Donc f est croissante sur $]-1, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty)$ et $f(0) = 0$, donc pour tout $x > 0$:
$$f(x) < 0$$
   Ce qui est équivalent à l'inégalité demandée.
3. **Étude de la série harmonique.** On définit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité admise $\ln(1+u) \leq u$ $(u \geq 0)$ appliquée à $u = \frac{1}{k}$ donne
$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \quad \text{et donc} \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$
$$\boxed{\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k).}$$
   (b) En sommant de $k = 1$ à n,
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \geq\ \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln k\big) = \ln(n+1).$$
   où la deuxième somme est une somme téléscopique.
   (c) On a $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ Par théorème de comparaison on a donc :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty}$$

4. (a) Étude de la suite (A_n)
On a :
$$A_{n+1} - A_n = (H_n - \ln(n+1)) - (H_{n-1} - \ln n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
Or, pour tout $x > 0$, on sait que $\ln(1+x) \leq x$ avec égalité uniquement pour $x = 0$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$:
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad A_{n+1} - A_n > 0.$$
$$\boxed{\text{La suite } (A_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

(b) Étude de la suite (B_n)
De même :
$$B_{n+1} - B_n = (H_n - \ln n) - (H_{n-1} - \ln(n-1)) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$
On utilise l'inégalité (I_1) : pour $x = \frac{-1}{n}$, on obtient :
$$-\frac{1}{n} > \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$
Ainsi :
$$B_{n+1} - B_n < 0.$$
$$\boxed{\text{La suite } (B_n) \text{ est décroissante.}}$$

(c) Limite de $A_n - B_n$
On a :
$$A_n - B_n = (H_{n-1} - \ln n) - (H_{n-1} - \ln(n-1)) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right).$$
Quand $n \to +\infty$, $\frac{1}{n-1} \to 0$ et $\lim_{x \to 0} ln(1+x) = 0$donc
$$\lim_{n \to +\infty} A_n - B_n \to 0.$$
$$\boxed{\lim_{n \to \infty} (A_n - B_n) = 0.}$$

5. Convergence de (A_n)
La suite (A_n) est croissante, la suite (B_n) est décroissante, et $\lim_{n\to\infty}(A_n - B_n) = 0$. Ces suites sont adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, les suites (A_n) et (B_n) convergent vers la même limite, notée γ.
$$\boxed{\text{La suite } (A_n) \text{ converge vers la constante d'Euler } \gamma.}$$

6. **Convergence de la série harmonique alternée.**
(a) On pose, pour $n \geq 1$,
$$P(n) =: \text{"} S_{2n} + H_{2n} = H_n \text{"}.$$
Initialisation
Pour $n = 1$,
$$S_2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$
d'où $S_2 + H_2 = 1 = H_1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \geq 1$ tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $S_{2n} + H_{2n} = H_n$. Alors

$$\begin{aligned}
S_{2(n+1)} + H_{2(n+1)} &= \left(S_{2n} + \tfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \tfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}\right) + \left(H_{2n} + \tfrac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{2n+2}\right) \\
&= (S_{2n} + H_{2n}) + \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) \\
&= (S_{2n} + H_{2n}) + \frac{2}{2n+2} \\
&= H_n + \frac{1}{n+1} \qquad \text{(par l'H.R.)} \\
&= H_{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion

Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$, i.e.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} + H_{2n} = H_n.}$$

(b)

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= H_n - H_{2n} \\
&= A_{n+1} + \ln(n) - A_{2n+1} - \ln(2n+1) \\
&= A_{n+1} - A_{2n+1} + \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

Or $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie, ainsi par unicité de la limite : $\lim_{n\to\infty} A_{n+1} - A_{2n+1} = 0$.

Par ailleurs $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{2}$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) = -\ln(2).$$

(c) $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{-1}{2n+1}$ Or $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2n+1} = 0$ Donc les deux suites ont même limites.

(d) Les suites des termes paires (S_{2n}) et des termes impaires (S_{2n+1}) ayant la même limite, la suite (S_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = -\ln 2.}$$