Programme de colle : Semaine 18
Lundi 10 février

1 Cours

1. Polynôme :
   — Définition d'un polynôme (comme fonction polynomiale)
   — Degré, coefficient dominant.
   — Racines, multiplicités.
2. Dérivation
   — Définition du taux de variations (notation : $\tau_{f,x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$)
   — Dérivabilité en 1 point, sur un intervalle.
   — Théorème utilisant la continuité (Rolle, TAF, hypothéses à connaitre)
   — Dérivée d'ordre supérieur. Définition de $\mathcal{C}^n(I)$.
3. Python :
   — Tableau numpy, dictionnaires
   — Représentation informatique d'un polynome par une liste (évaluation, racine, dérivation, somme)

2 Exercices Types

1. Dans les deux cas suivants, déterminer tous les polynômes P vérifiant les conditions indiquées
   (a) $\deg(P) = 3$ et $P(1) = 4,\ P(-1) = 0,\ P(-2) = -5,\ P(2) = 15$.
   (b) $\deg(P) \leq 2$ et $P^2 = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$.
2. Déterminer le nombre a de manière à ce que le polynôme $P = X^5 - aX^2 - aX + 1$ ait -1 comme racine au moins double.
3. Soient les polynômes $P = X^2 - X + 1$ et $Q = X^3 - X$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit par récurrence les polynômes P_n par
$$\begin{cases} P_1 = P \\ P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n. \end{cases}$$
   (a) Calculer P_2.
   (b) Calculer les degrés de P_2 et de P_3.
   (c) Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le degré de P_n.
   (d) Déterminer le coefficient dominant de P_n.
4. Soit la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout x réel par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Calculer f' et f''.
   (b) Montrer par récurrence que la dérivée n-ième est de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^n\sqrt{1-x^2}}$, où P_n est un polynôme. Donner une relation (R) entre P_{n+1}, P_n et P'_n.
   (c) Montrer que P_n est une fonction paire si n est pair et une fonction impaire si n est impair.
   (d) Montrer par récurrence en utilisant la relation (R) que $P'_n = n^2 P_{n-1}$.
   (e) En déduire que les polynômes P_n vérifient pour tout entier $n \geq 1$ la relation de récurrence suivante
$$P_{n+1} = (2n+1)XP_n + n^2(1-X^2)P_{n-1}.$$
5. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 e^x}{1-e^{-3x}}$.
   (a) Donner le domaine de définition et les limites aux bornes. Étudier la continuité de f, et prolonger f par continuité lorsque c'est possible.

(b) Étudier la dérivabilité de la fonction prolongée. f prolongée est elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

6. Montrer que si f est dérivable n fois sur $[a, b]$ et admet $n+1$ zéros sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.
7. Montrer pour tout $x > 0$ que :
$$x < e^x - 1 < xe^x$$
8. Soit la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$
9. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par
$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3sin(u_n) + 2$$
10. Représenter informatiquement un polynome (liste) et donner une fonction qui permet de faire la somme de deux polynomes.