DM 18

On reprend l'exercice 2 du concours blanc mais avec le vocabulaire des applications linéaires.

Exercice 1. On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2y-2z, -2x+4y-2z, -2x+2y) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme.
2. Soit $u = (1,1,1)$, $v = (2,3,1)$ et $w = (0,1,1)$. Calculer $g(u), g(v)$ et $g(w)$ et les exprimer en fonction de u, v et w.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $E_\lambda = \ker(f - \lambda \operatorname{Id})$.
   (a) (Vs dure) Déterminer λ tel que $E_\lambda \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et, dans ce cas, en donner une base.
   (b) (Vs facile) Déterminer une base de E_0 et E_2.
4. Montrer que $E_0 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$.
5. On note toujours $u = (1,1,1)$, $v = (2,3,1)$ et $w = (0,1,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. On note p l'application définie par

$$p(e_1) = u, \quad p(e_2) = v, \quad \text{et} \quad p(e_3) = w,$$

   où l'on a notée (e_1, e_2, e_3) la base canonique.
   (a) Justifier que de p est inversible.
   (b) En calculant l'image des vecteurs de la base canonique, déterminer l'expression de l'application h définie par $h = p^{-1} \circ g \circ p$.
   (c) On note D, P, M les matrices respectives de h, p, g dans la base canonique. Expliciter la valeur de chacune de ces matrices et déterminer la relation matricielle obtenue grâce à la question précédente.
7. (a) (Vs Dure) A l'aide d'une démontration par réccurrence déterminer M^n.
   (b) (Vs facile) Montrer par réccurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$. Puis expliciter la valeur de M^n.
8. Conclure en donnant l'expression de $g^n(A)$ où $A = (1,-1,-3)$