DM 12

Exercice 1. Pour tout réel $t > 0$, on note P_t le polynôme $X^5 + tX - 1 \in \mathbb{R}_5[X]$. Le but de ce problème est d'étudier les racines de P_t en fonction de $t > 0$.

1. Dans cette question, on fixe un $t > 0$. Prouver que P_t admet une unique racine notée $f(t)$.
2. Montrer que $f(t) \in]0, 1[$ pour tout $t > 0$.
3. Soit $t_1 > 0, t_2 > 0$, tel que $t_1 < t_2$
   (a) Montrer que $(f(t_1))^5 + t_2 f(t_1) - 1 > 0$
   (b) Justifier alors que $P_{t_2}(f(t_1)) > P_{t_2}(f(t_2))$
   (c) En déduire que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
4. Justifier que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.
5. Déterminer $\lim_{t\to 0^+} f(t)$.
6. Déterminer $\lim_{t\to +\infty} f(t)$.
7. En déduire $\lim_{t\to +\infty} tf(t) = 1$. (Comment noter ce résultat avec le signe équivalent : $\sim$)
8. Justifier que f est la bijection réciproque de $g :]0, 1[\to]0, +\infty[\; x \mapsto \frac{1-x^5}{x}$
9. (a) Justifier que f est dérivale sur $]0, +\infty[$ et exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ pour tout $t > 0$.
   (b) En déduire la limite de $f'(t)$ en 0. Calculer la limite de $t^2 f'(t)$ en $+\infty$ (Comment noter ce résultat avec le signe équivalent : $\sim$)