Cahier de vacances

lundi 22 décembre

Exercice 1.

1. Résoudre $\ln(x+1) - \ln(x) \geq \ln(3x+1)$
2. Calculer le produit AB deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Etudier la fonction

$$f(x) = x\exp(x)$$

4. Ecrire une fonction Python `reverse` qui prend en argument une liste et retourne la liste parcourue dans l'autre sens. eg `reverse([1,4,12]` retourne `[12, 4, 1]`

Correction 1.

1. L'équation est bien définie sur $]\frac{-1}{3}, +\infty[$. On obtient

$$\frac{x+1}{x(3x+1)} \geq 1$$

Puis

$$\mathcal{S} = [\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}]$$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $f'(x) = \exp(x) + x\exp(x) = \exp(x)(1+x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$+\infty$

```python
def reverse(L):
    Lrev=[]
    for el in L:
        Lrev =[el]+Lrev
    return(Lrev)
```

ou

```python
def reverse(L):
    Lrev=[]
    for i in range(len(L)-1,-1,-1):
        Lrev=Lrev+[L[i]]
    return(Lrev)
```

4. **Mardi 23 décembre**

Exercice 2. 1. Etudier la fonction $f(x) = e^{2x+1} - x$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

donner la forme exponentielle des solutions.

3. Ecrire une fonction Python `somme` qui prend en argument une liste de nombres et retourne la somme des éléments de cette liste.

Correction 2.

1. $f'(x) = 2\exp(2x+1) - 1$

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{-\ln(2)-1}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{-\ln(2)-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1+\frac{\ln(2)}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. On calcule à l'aide du discriminant on obtient

$$r_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

ou en écriture exponentielle :

$$r_1 = e^{2i\pi/3} \quad \text{et} \quad r_2 = e^{-2i\pi/3}$$

3.
```python
def somme(L):
    s=0
    for el in L:
        s+=el
    return s
```

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^x + e^{-x} = 2$
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2n+3}{2} \end{cases}$$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$
3. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^n + n}{\sqrt{e^{2n} - 1}}$$

Correction 3.

1. $$\mathcal{S} = \{0\}$$
2. Soit $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$"

   $\boxed{\text{I}}$ Pour $n = 0$ on a $\mathcal{P}(0)$: "$u_0 = \frac{1}{2^0} - 2 \times 0 + 1$" c'est-à-dire $\mathcal{P}(0)$: "$u_0 = 2$" qui est vraie d'après l'énoncé.

   $\boxed{\text{H}}$ On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie On a alors $u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$ et donc d'après l'énoncé

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2^n} - 2n + 1) - \frac{2n+3}{2} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - n + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - 2n - 1 \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - 2(n+1) + 1 \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

   $\boxed{\text{Cl}}$ La propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. On factorise par e^n au numérateur et au dénominateur. On obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^n + n}{\sqrt{e^{2n} - 1}} = 2$$

Jeudi 25 décembre

Joyeux Noël

Vendredi 26 décembre

Exercice 4. 1. Déterminer la valeur de u_n, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\, u_{n+1} = 2u_n + 1$$

2. Résoudre $y'' + y = 1$
3. Déterminer le projeté orthogonal du point A de coordonnées $(1, 2)$ sur la droite D dirigée par $\vec{u} = (2, 1)$ et passant par $B = (0, 1)$
4. Ecrire une fonction Python `est_sym` qui prend en argument une liste de listes représentant une matrice et retourner `True` si la matrice correspondante est symétrique et `False` sinon.

Correction 4.

1. Technique habituelle ($v_n = u_n - \alpha$...) on trouve :

$$u_n = 2^{n+1} - 1$$

2. $$\mathcal{S} = \{x \mapsto 1 + A\cos(x) + B\sin(x) | (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

3. On trouve $D :\ x - 2y + 2 = 0$ et l'équation passnat par A et orthogonale à D

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

On trouve $H(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$

4.

Samedi 27 décembre

Exercice 5. 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$,
$$z + \overline{2z + i} = 1 - i$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$z^4 = -z^2$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$
$$u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$$
Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

4. Ecrire une fonction Python `compte_element` qui prend en argument une liste de nombre et une valeur, et retourne le nombre de fois où la valeur est présente dans la liste.
`compte_element([1,4,2,4,3,4], 4)` va retourner 3 et `compte_element([1,4,2,4,3,4], 12)` va retourner 0.

Correction 5.

1. On repasse en écriture algébrique, on obtient $z = \frac{1}{3}$
2. On passe de z^2 de l'autre coté, on factorise. On obtient
$$\mathcal{S} = \{0, i, -i\}$$
3. Equation caractéristique $X^2 + X + 1 = 0$ racine $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$ On obtient apres calcul :
$$u_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

```python
def compte_element(L,a):
    c=0
    for el in L:
        if el==a:
            c+=1
    return c
```

Dimanche 28 décembre

Exercice 6. 1. Etudier la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

2. Résoudre l'équation de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$e^{\lambda x+1} \leq 2e^{x-\lambda}$$

3. Résoudre le problème de Cauchy suivant (sur $]1, +\infty[$:

$$\begin{cases} y' + y & = 1 \\ y(2) & = 1 \end{cases}$$

Correction 6.

1. $f'(x) = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

2.

$$e^{\lambda x+1} \leq 2e^{x-\lambda} \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$$

Comme les deux membres sont strictement positifs, on prend le logarithme népérien :

$$\lambda x + 1 \leq \ln 2 + x - \lambda$$

On regroupe :

$$(\lambda - 1)x \leq \ln 2 - \lambda - 1$$

On distingue selon le signe de $\lambda - 1$.

$$\boxed{\begin{cases} \lambda > 1 : & x \leq \dfrac{\ln 2 - \lambda - 1}{\lambda - 1}, \\ \lambda < 1 : & x \geq \dfrac{\ln 2 - \lambda - 1}{\lambda - 1}, \\ \lambda = 1 : & \varnothing. \end{cases}}$$

3. On obtient $\mathcal{S} = \{x \mapsto 1\}$

Lundi 29 Décembre

Exercice 7. 1. Soit $a \geq 0$ Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$

$$(1+a)^n \geq 1+an$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_1 = \frac{1}{3}$ et $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}u_n$. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n}{3^n}$
3. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n définie par

$$u_0 = 1$$

et pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

(il faudra garder en mémoire dans une liste toutes les valeurs de u_0 à u_{k-1} pour calculer u_k...)

Correction 7.

1. Soit $\mathcal{P}(n)$: "$(1+a)^n \geq 1+an$"

$\boxed{\text{I}}$ Pour $n=0$ on a $\mathcal{P}(0)$: "$(1+a)^0 \geq 1+a\times 0$" C'est à dire :

$$\mathcal{P}(0) : \text{"}1 \geq 1\text{"}$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H}}$ On suppose qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a alors :

$$(1+a)^n \geq 1+an$$

En multipliant par $(1+a)$ (qui est positif car $a \geq 0$) on obtient

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &\geq (1+an)(1+a)\\ &\geq 1+an+a+a^2n\\ &\geq 1+a(n+1)+a^2n\end{aligned}$$

Comme $n\geq 0$ et $a\in\mathbb{R}$ on a $a^2n \geq 0$, donc

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+a(n+1)$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$\boxed{\text{Cl}}$ La propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$

2. Soit $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = \frac{n}{3^n}$"

$\boxed{\text{I}}$ Pour $n=1$ on a $\mathcal{P}(1)$:"$u_1 = \frac{1}{3^1}$" qui est vraie d'après l'énoncé.

$\boxed{\text{H}}$ On suppose qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a alors $u_n = \frac{n}{3^n}$ et donc d'aprés l'énoncé :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{n+1}{3n}\frac{n}{3^n}\\ &= \frac{n+1}{3\times 3^n}\\ &= \frac{n+1}{3^{n+1}}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$\boxed{\text{Cl}}$ La propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

3.

```
def suiteu(n):
    u0=1
    u=[u0]
    for i in range(n):
        Sn=0
        for uk in u:
            Sn=Sn+uk
        u=u+[Sn]
    return(u[-1])
```

Exercice 8. 1. Etudier la fonction
$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$$

2. Résoudre l'équation de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'inconnue x
$$\ln(x^2 + x) \geq \ln(\lambda x - 1)$$
On fera attention à l'ensemble de définition (qui dépend de λ)

3. Calculer la limite suivante :
$$\lim_{n \to +\infty} n(\ln(n + 1) - \ln(n))$$

4. Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j}$$

Correction 8.

1. $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 1 = \frac{-(x^2-2x+1)}{x^2+1} = -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et on a
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$
(Obtenue en factorisant par x puis CC.)

2.
$$\ln(x^2 + x) \geq \ln(\lambda x - 1) \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})$$

1) Ensemble de définition.
Il faut simultanément :
$$x^2 + x > 0 \quad \text{et} \quad \lambda x - 1 > 0.$$
Or
$$x^2 + x = x(x + 1) > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.$$
De plus,
$$\lambda x - 1 > 0.$$
$$\begin{cases} \lambda > 0 : & x > \dfrac{1}{\lambda}, \\ \lambda = 0 : & -1 > 0 \text{ (impossible)}, \\ \lambda < 0 : & x < \dfrac{1}{\lambda}. \end{cases}$$
Donc l'ensemble de définition est
$$D_\lambda = \begin{cases}]\frac{1}{\lambda}, +\infty[, & \text{si } \lambda > 0 \\ \emptyset, & \text{si } \lambda = 0 \\ ]-\infty, \frac{1}{\lambda}[, & \text{si } -1 \leq \lambda < 0 \\ ]-\infty, -1[, & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

2) Réduction de l'inégalité sur D_λ.
Sur D_λ, la fonction ln est strictement croissante, donc
$$\ln(x^2 + x) \geq \ln(\lambda x - 1) \iff x^2 + x \geq \lambda x - 1.$$
Ainsi
$$x^2 + (1 - \lambda)x + 1 \geq 0.$$

On pose
$$P_\lambda(x) = x^2 + (1-\lambda)x + 1.$$
Son discriminant vaut
$$\Delta(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1).$$

3) Étude du signe de P_λ.
Comme le coefficient dominant est $1 > 0$:

— Si $\Delta(\lambda) \leq 0$, i.e. $-1 \leq \lambda \leq 3$, alors
$$P_\lambda(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
et l'inégalité est vraie pour tout $x \in D_\lambda$.

— Si $\Delta(\lambda) > 0$, i.e. $\lambda < -1$ ou $\lambda > 3$, alors P_λ admet deux racines réelles
$$x_-(\lambda) = \frac{\lambda - 1 - \sqrt{(\lambda-3)(\lambda+1)}}{2}, \qquad x_+(\lambda) = \frac{\lambda - 1 + \sqrt{(\lambda-3)(\lambda+1)}}{2},$$
avec $x_- < x_+$, et
$$P_\lambda(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty, x_-] \cup [x_+, +\infty[.$$
Il faut donc intersecter avec D_λ.

4) Conclusion (ensemble des solutions).

$$\boxed{S_\lambda = \begin{cases} D_\lambda, & -1 \leq \lambda \leq 3,\ \lambda \neq 0, \\ D_\lambda \cap \Big( ]-\infty, x_-] \cup [x_+, +\infty[\Big), & \lambda < -1 \text{ ou } \lambda > 3, \end{cases}}$$

3. $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + \frac{1}{n})$ Et on a $\frac{\ln(1+x)}{x} \to x \to 01$. Donc
$$\lim_{n \to +\infty} n(\ln(n+1) - \ln(n)) = 1$$

4. On intervertit :
$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \frac{k}{j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} (\sum_{j=0}^{n} j + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{4}$$

Exercice 9. 1. On associe à un polynôme la liste de ces coefficients : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ on associe $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$

Ecrire une fonction Python `evaluation` qui prend en argument une liste qui correspond à un polynôme P et un flottant x et retourne la valeur de P(x)

eg. `evaluation([1,2,0,1], 2)` retournera $1 + 2 \times 2 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 13$

2. Ecrire une fonction `somme` qui prend en argument deux listes correspondant à deux polynômes P et Q et retourne une liste correspondant à la somme des deux polynômes.

   eg `somme([1,2,3],[2,3,1]` retournera `[3,5,4]`. Attention au degré des polynômes :

   `somme([1,2,3],[2,3,1,3]` retournera `[3,5,4,3]`.

3. Ecrire une fonction `derivation` qui prend en argument une liste correspondant à un polynôme P et retourne une liste correspondant au polynôme dérivé.

   eg. La liste [4,3,1,2] correspond à $P(x) = 4 + 3x + x^2 + 2x^3$ sa dérivée vaut $P'(x) = 3 + 2x + 6x^2$ donc `derivation([4,3,1,2]` retournera [3, 2, 6]

Correction 9.

1.
```python
def evaluation(L,x):
    a=0
    for i in range(len(L)):
        a=L[i]*x**i
    return(a)
```

```python
def somme(L1,L2):

    if len(L1)>len(L2):
        for i in range(len(L2)):
            L1[i]=[L2[i]+L1[i]]
        return(L1)
    else:
        return(somme(L2,L1))
```

3.
```python
def derivation(L):
    D=[]
    for i in range(1,len(L)):
        D+=[i*L[i]]
    return(D)
```

Bonne année !

Vendredi 2 Janvier

Exercice 10.

1. Résoudre $\ln(x^2) + \ln(x) = 3$
2. Résoudre $\frac{\ln(x)+1}{2\ln(x)-1} \leq 1$
3. Résoudre $\sqrt{3e^x - 2} \leq e^x$

Correction 10.

1. $\mathcal{S} = \{e\}$
2. $\mathcal{S} =]0, e^{1/2}[\cup]e^2, +\infty[$
3. $\mathcal{S} =]\ln(2), +\infty[$

Samedi 3 Janvier

Exercice 11. 1. Résoudre

$$|x+1| \leq |x^2-2x|$$

2. Résoudre le système suivant d'inconnues (x,y) et de paramètre λ

$$\begin{cases} x & +y & = \lambda x \\ 3x & -y & = \lambda y \end{cases}$$

3. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$$

Correction 11.

1. Sur $]-\infty,-1[$:

$$\mathcal{S}_1 =]-\infty,-1[$$

Sur $]-1,0[$:

$$\mathcal{S}_2 =]-1, \frac{3-\sqrt{13}}{2}[$$

Sur $]0,2[$:

$$\mathcal{S}_3 = \emptyset$$

Sur $]2,+\infty[$:

$$\mathcal{S}_4 =]\frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty[$$

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, \tfrac{3-\sqrt{13}}{2}[\cup]\tfrac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty[}$$

2. Si $\lambda \neq \{-2,2\}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(0,0)\}}$$

Si $\lambda = 2$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(x,x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}}$$

Si $\lambda = -2$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(x,-3x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}}$$

3. Soit $f(x) = \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$ On a alors

$$f'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi}$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$sgn(f''(x))$		$-$		$-$	
$f'(x)$	$1-\frac{2}{\pi}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$
$sgn(f'(x))$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

(Petit problème d'alignement sur $f'(x)$ que je n'arrive pas à corriger.)
On voit donc que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, autrement dit

$$\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$$