Correction DS 1

Exercice 1. Résoudre sur son ensemble de définition l'inéquation

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+2}.$$

Correction 1. Le fomaine de définition est $\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}$. Sur ce domaine l'équation est équivalente à

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x+2} &\leq 0\\ \frac{x+2-x(x+1)}{(x+1)(x+2)} &\leq 0\\ \frac{-x^2+2}{(x+1)(x+2)} &\leq 0\\ \frac{x^2-2}{(x+1)(x+2)} &\geq 0 \geq\\ \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+1)(x+2)} &\geq 0\end{aligned}$$

Tableau de signe. Les solutions sont

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup[-\sqrt{2}, -1[\cup[\sqrt{2}, +\infty[.}$$

Exercice 2. On souhaite résoudre l'équation suivante :

$$(E) \quad : \quad e^{2x} + 3e^{x} - 4e^{-x} \geq 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. On pose $X = e^x$. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si X est strictement positif et solution de
$$(E') \quad : \quad X^3 + 3X^2 - 4 \geq 0$$
2. Montrer que 1 est racine de $X^3 + 3X^2 - 4$.
3. Résoudre (E')
4. En déduire les solutions de (E)

Correction 2.

1. Remarquons que $X = e^x$ implique de X est positif. De plus

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E) &\iff e^{2x} + 3e^x - 4e^{-x} \geq 0 \\ &\iff X^2 + 3X - 4\frac{1}{X} \geq 0 \\ &\iff X^3 + 3X^2 - 4 \geq 0 \quad \text{car } X \text{ est positif} \\ &\iff X \text{ solution de } (E') \end{aligned}$$

   On obtient bien l'équivalence demandée.
2. Le calcul donne $1^3 + 3 \times 1^2 - 4 = 0$, donc

$$\boxed{1 \text{ est racine de } X^3 + 3X^2 - 4}$$

3. D'après la question précédente on peut factoriser $X^3 + 3X^2 - 4$ par $(X - 1)$. On obtient

$$X^3 + 3X^2 - 4 = (X - 1)(X^2 + 4X + 4)$$

   On reconnait une identité remarquable

$$X^3 + 3X^2 - 4 = (X - 1)(X + 2)^2$$

   Ainsi

$$(E') \iff (X - 1)(X + 2)^2 \geq 0$$

   Les solutions de (E') sont donc

$$\boxed{\mathcal{S}' = \{-2\} \cup [1, +\infty[}$$

4. x est donc solution de (E) si et seulement si

$$e^x \in [1, +\infty[$$

   Les solutions de (E) sont donc

$$\boxed{\mathcal{S} = [0, \infty[}$$

Exercice 3. On considère les deux propositions suivantes :

$$P_1(f) : \text{"}\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x > A,\ f(x) = 0\text{"}$$

$$P_2(f) : \text{"}\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{y\}, f(x) = f(y)\text{"}$$

1. Donner les négations de ces propriétés.

2. Dire si ces propositions ou leur négation sont vraies pour les fonctions suivantes :

$$f\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases}0 & \text{si } x < 12, \\ 1 & \text{si } x \geq 12.\end{cases}\end{array}\right. \quad , \quad g\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x)\end{array}\right.$$

On justifiera en donnant une valeur pour les variables quantifiées par le quantificateur $\exists$.

Correction 3.

1. On obtient les négations suivantes :

$$NON(P_1(f)) : \text{"}\exists A \in \mathbb{R},\, \forall x > A\; f(x) \neq 0\text{"}$$

$$NON(P_2(f)) : \text{"}\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \neq y, f(x) \neq f(y)\text{"}$$

2. — $NON(P_1(f))$ est vraie. On prend $A = 12$.
   — $P_1(g)$ est vraie. N'importe quelle valeur de $x > A$ fonctionne $x = A + 1$ par exemple.
   — $P_2(f)$ est vraie. Il suffit de prendre $x = 0$, $y = 1$ par exemple.
   — $P_2(g))$ est vraie. Il suffit de prendre $x = 0$ et $y = \pi$.

Exercice 4. On souhaite résoudre l'équation de paramètre $m \in \mathbb{R}$ et d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$|x^2 - (m+1)x + m| \leq m - 1 \quad (E_m)$$

1. Résoudre (E_m) pour $m < 1$.
2. Résoudre (E_1) (autrement dit, quand $m = 1$)

   A partir de maintenant et pour le reste de l'exercice on suppose que $m > 1$.
3. Justifier que pour tout $x \in]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[$ on a :

$$x^2 - (m+1)x + m \geq 0.$$

   On note $I_m =]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[$ et $J_m =]1, m[$ le complémentaire de I_m dans $\mathbb{R}$.
4. On se propose tout d'abord de résoudre E_m sur I_m
   (a) Soit $\Delta(m) = m^2 + 2m - 3$. Etudier le signe de $\Delta(m)$ en fonction de m.

   On note

$$r_-(m) = \frac{m + 1 - \sqrt{\Delta(m)}}{2} \quad \text{et} \quad r_+(m) = \frac{m + 1 + \sqrt{\Delta(m)}}{2}$$

   (b) Justifier que r_- et r_+ sont bien définis pour tout $m > 1$.
   (c) Montrer que pour tout $m > 1$,

$$r_-(m) < 1 \quad \text{et} \quad r_+(m) > m$$

   (d) Conclure en résolvant (E_m) sur I_m pour $m > 1$

5. On va résoudre maintenant (E_m) sur J_m
   (a) Justifier brièvement que J_m est non vide ?
   (b) Montrer que pour tout $x \in J_m$,
   $$(E_m) \iff x^2 - (m+1)x + 2m - 1 \geq 0$$
   Soit $\Gamma(m) = m^2 - 6m + 5$.
   (c) Ecrire en toute lettre le nom de la lettre grecque Γ
   (d) Etudier le signe de $\Gamma(m)$ en fonction de m.
   (e) En déduire pour tout $m \in]1,5]$ les solutions de (E_m) sur J_m.

   On note
   $$s_-(m) = \frac{m+1-\sqrt{\Gamma(m)}}{2} \quad \text{et} \quad s_+(m) = \frac{m+1+\sqrt{\Gamma(m)}}{2}$$
   (f) Justifier que s_- et s_+ sont bien définis pour $m > 5$.
   (g) Montrer que pour tout $m > 5$:
   $$s_-(m) > 1 \quad \text{et} \quad s_+(m) < m$$
   (h) En déduire pour tout $m > 5$ les solutions de (E_m) sur J_m.

6. Dresser un tableau récapitulatif des solutions de (E_m) sur $\mathbb{R}$ en fonction de m. (On pourra réutiliser les notations r_-, r_+, s_-, s_+)
7. Pour $m = 6$ tracer sur un même graphique
   — Le graphe de $f(x) = x^2 - (m+1)x + m$
   — Le graphe de $g(x) = |x^2 - (m+1)x + m|$
   — La droite d'équation $y = m - 1$
   — Les points d'abscisses $r_-(m), r_+(m), s_-(m), s_+(m)$, sur l'axe des abscisses.
   — L'ensemble des solutions de (E_m)

   On ne demande pas forcément quelque chose de très précis, mais quelque chose de propre et qui fait apparaître clairement l'ensemble des solutions de (E_m). Je vous conseille de prendre un peu de place, et de tracer ces graphes entre -1 et 7 sur l'axe des abscisses et entre -7 et 10 sur les ordonnées.

   Si certains graphes se superposent, on pourra utiliser de la couleur et légender le graphique afin de simplifier la lecture.

Correction 4.

1. **Cas** $m < 1$**.** Si $m < 0$, alors $m - 1 < 0$. Or une valeur absolue est positive ou nulle, donc pour tout $m < 1$
   $$\boxed{S_m = \varnothing.}$$
2. **Cas** $m = 1$**.** On a $(E_1) : |x^2 - 2x + 1| \leq 0 \iff (x-1)^2 = 0$. Donc
   $$\boxed{S_1 = \{1\}.}$$
3. Le polynôme $P(x) = x^2 - (m+1)x + m = (x-1)(x-m)$ admet deux racines : $r_1 = 1$ et $r_2 = m$, il est donc positif en dehors de l'intervalle $[1, m]$.

4. **Résolution sur I_m.**
   (a) $\Delta(m) = m^2 + 2m - 3 = (m-1)(m+3)$. Donc
   $$\boxed{\forall m \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[, \quad \Delta(m) > 0}$$
   (b) Pour tout $m > 1$, on vient de voir que $\Delta(m) > 0$ donc
   $$\boxed{r_- \text{ et } r_+ \text{ sont bien définies pour } m > 1.}$$
   (c) Résolvons tout d'abord $r_-(m) < 1$. On a
   $$\begin{aligned} r_-(m) < 1 &\iff \frac{m+1-\sqrt{\Delta(m)}}{2} < 1 \\ &\iff m+1-\sqrt{\Delta(m)} < 2 \\ &\iff \sqrt{\Delta(m)} > m-1 \end{aligned}$$
   Les deux membres sont positifs car $m > 1$ et la fonction racine est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc
   $$\begin{aligned} r_-(m) < 1 &\iff \Delta(m) > (m-1)^2 \\ &\iff m^2 + 2m - 3 > m^2 - 2m + 1 \\ &\iff 4m > 4 \\ &\iff m > 1 \end{aligned}$$
   Ainsi pour tout $m > 1$ on a bien
   $$\boxed{r_-(m) < 1}$$
   Résolvons maintenant $r_+(m) > m$. On a
   $$\begin{aligned} r_+(m) > m &\iff \frac{m+1+\sqrt{\Delta(m)}}{2} > m \\ &\iff m+1+\sqrt{\Delta(m)} > 2m \\ &\iff \sqrt{\Delta(m)} > m-1 \end{aligned}$$
   On a montré que cette dernière inégalité était vérifiée pour tout $m > 1$, ainsi on a bien
   $$\boxed{r_+(m) > m}$$
   (d) Pour $m > 1$, les solutions de (E_m) sur I_m sont
   $$\boxed{[r_-(m), 1] \cup [m, r_+(m)]}$$
5. **Résolution sur J_m.**
   (a) $J_m =]1, m[$ est non vide car $m > 1$.
   (b) Pour tout $x \in J_m$, on a $x^2 - (m+1)x + m < 0$ donc
   $$\begin{aligned} (E_m) &\iff -(x^2 - (m+1)x + m) \leq m - 1 \\ &\iff -x^2 + (m+1)x - m \leq m - 1 \\ &\iff -x^2 + (m+1)x - 2m + 1 \leq 0 \end{aligned}$$
   En multipliant par -1 on obtient

$$\boxed{(E_m) \iff x^2-(m+1)x+2m-1 \geq 0}$$

(c) Γ se lit Gamma.

(d) Pour tout $m \in \mathbb{R}$ on a :
$$\Gamma(m) = (m-1)(m-5)$$
donc
$$\begin{cases} \Gamma(m) < 0 & \text{si } m \in]1,5[\\ \Gamma(m) = 0 & \text{si } m \in \{1,5\} \\ \Gamma(m) > 0 & \text{si } m \in]-\infty, 1[\cup]5, +\infty \end{cases}$$

(e) Le discriminant de $x^2-(m+1)x+2m-1$ vaut $\Gamma(m)$ (faire le calcul). Ainsi pour tout $m \in [1,5]$ $\Delta(m) \leq 0$ et ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$x^2-(m+1)x+2m-1 \geq 0$$
Pour tout $m \in [1,5]$ les solutions de (E_m) sur J_m sont donc
$$\boxed{J_m}$$

(f) Pour tout $m > 5$ on a vu que $\Gamma(m) > 0$ donc les racines sont bien définies et ainsi s_- et s_+ sont bien définies.

(g) Résolvons tout d'abord $s_-(m) > 1$. On a
$$\begin{aligned} s_-(m) > 1 &\iff \frac{m+1-\sqrt{\Gamma(m)}}{2} > 1 \\ &\iff m+1-\sqrt{\Gamma(m)} > 2 \\ &\iff \sqrt{\Gamma(m)} < m-1 \end{aligned}$$
Les deux membres sont positifs car $m > 1$ et la fonction racine est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc
$$\begin{aligned} s_-(m) > 1 &\iff \Gamma(m) < (m-1)^2 \\ &\iff m^2-6m+5 < m^2-2m+1 \\ &\iff 4m > 4 \\ &\iff m > 1 \end{aligned}$$
Ainsi pour tout $m > 1$ on a l'inégalité demandée et donc en particulier pour $m > 5$ on a :
$$\boxed{s_-(m) > 1}$$
Résolvons maintenant $s_+(m) < m$. On a
$$\begin{aligned} s_+(m) < m &\iff \frac{m+1+\sqrt{\Gamma(m)}}{2} < m \\ &\iff m+1+\sqrt{\Gamma(m)} < 2m \\ &\iff \sqrt{\Gamma(m)} < m-1 \end{aligned}$$
On a montré que cette dernière inégalité était vérifiée pour tout $m > 1$, ainsi on a bien pour tout $m > 5$
$$\boxed{s_+(m) < m}$$

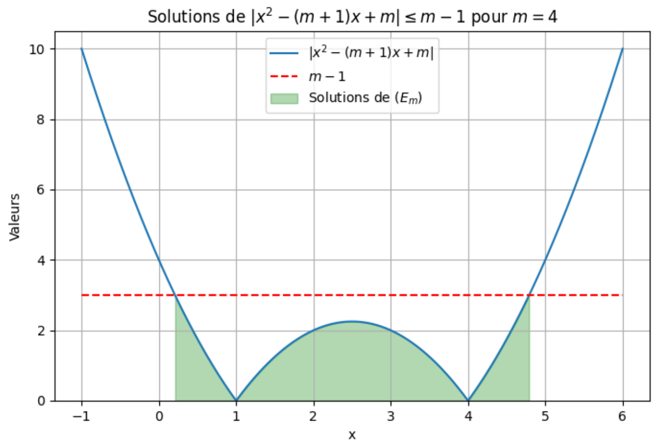
(h) Pour tout $m > 5$ les solutions de E_m sur J_m sont

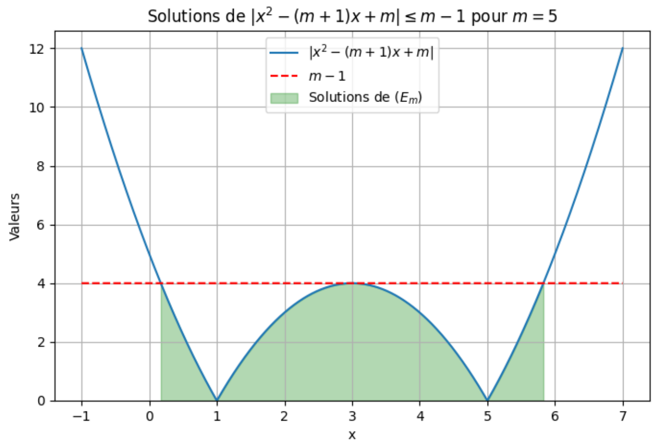
$$\boxed{]1, s_-(m)] \cup [s_+(m), m[}$$

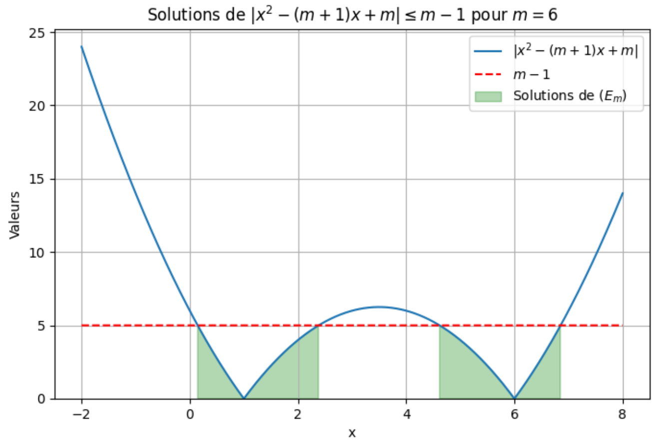
6. **Bilan des solutions.**

$$S_m = \begin{cases} \varnothing & \text{si } m < 1, \\ \{1\} & \text{si } m = 1, \\ [r_-(m), r_+(m)] & \text{si } 1 < m \leq 5, \\ [r_-(m), s_-(m)] \cup [s_+(m), r_+(m)] & \text{si } m > 5. \end{cases}$$

7.







Solutions de $|x^2-(m+1)x+m| \leq m-1$ pour $m=6$
$|x^2-(m+1)x+m|$
$m-1$
Solutions de (E_m)
Valeurs
x