# Révisions Pâques

## I Complexes

**Exercice 1.** Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Calculer
$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z}+z\right|, z\in\mathbb{U}\right\}$$
2. Pour tout $z\in\mathbb{C}^*$ on note $\alpha(z)=\frac{1}{\bar{z}}+z$.
   (a) Calculer le module de $\alpha(z)$ en fonction de celui de $z$.
   (b) Montrer que pour tout $x>0$ on a : $\dfrac{1}{x}+x\geq 2$.
   (c) En déduire
$$\inf\{|\alpha(z)|, z\in\mathbb{C}^*\}$$

**Exercice 2.** On considère l'équation suivante , d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ :

$$z^3+z+1=0 \tag{$E$}$$

1. On note $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, la fonciton définie par $f(t)=t^3+t+1$. A l'aide de l'étude de $f$, justifier que l'équation $(E)$ possède une unique solution réelle, que l'on notera $r$. Montrer que $r\in]-1,\frac{-1}{2}[$.
2. On note $z_1$ et $z_2$ les deux autres solutions complexes de $(E)$ qu'on ne cherche pas à calculer. Donner une écriture factoriser de $P$ (à l'aide de $r,z_1$ et $z_2$) puis en déduire que $z_1+z_2=-r$ et $z_1z_2=\frac{-1}{r}$.
3. Justifier l'encadrement : $\frac{1}{2}<|z_1+z_2|<1$.
   De même montrer que $1<|z_1z_2|<2$.
4. Rappeler l'inégalité triangulaire et donner une minoration de $|x-y|$ pour tout $x,y\in\mathbb{C}$.
5. En déduire que
$$|z_1+z_2|>|z_1|-\frac{2}{|z_1|}$$
6. Grâce à un raisonnement par l'absurde montrer que $|z_1|<2$.
7. Conclure que toutes les solutions de $(E)$ sont de modules strictement inférieures à 2.

**Exercice 3.** On considère $S=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=2\}$.

1. Rappeler la nature géométrique de $S$. Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z)=\frac{2z+1}{z+1}$. Déterminer $D_f$ le domaine de définition de $f$. Est elle bien définie pour tous les points de $S$ ?
2. (a) Mettre $f(z)-\frac{7}{3}$ sous la forme d'une fraction.
   (b) Montrer que pour tout $z$ dans l'ensemble de définition de $f$,
$$\left|f(z)-\frac{7}{3}\right|^2=\frac{|z|^2+8\mathfrak{Re}(z)+16}{9(|z|^2+2\mathfrak{Re}(z)+1)}$$
   (c) On note $S_2$ le cercle de centre $7/3$ et de rayon $r_0=\frac{2}{3}$. Montrer que $f(S)\subset S_2$
3. (a) Soit $y=f(z)$, exprimer $z$ en fonction de $y$ quand cela a un sens.

(b) Déterminer l'ensemble $F$ tel que $f : D_f \to F$ soit bijective. Déterminer l'expression de $f^{-1}$

(c) (Difficile) Montrer que pour tout $y \in S_2$, $f^{-1}(y) \in S$.

(d) En déduire $f(S)$.

**Exercice 4.** (Cf DS2) Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On considère $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

1. Calculer $\frac{1}{\omega}$ en fonction de $\overline{\omega}$
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ on a
$$\omega^k = \overline{\omega}^{7-k}.$$
3. En déduire que $\overline{A} = B$.
4. Montrer que la partie imaginaire de $A$ est strictement positive. (On pourra montrer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.)
5. Rappelons la valeur de la somme d'une suite géométrique : $\forall q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ :
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
Montrer alors que $\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$. En déduire que $A + B = -1$.
6. Montrer que $AB = 2$.
7. En déduire la valeur exacte de $A$.

# II Analyse

**Exercice 5.** 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$. On la note $x_n$.

2. Montrer que $x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1 < 0$.
3. En déduite que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Justifier que la suite est minorée par 0 et majorée par 1.
5. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. A l'aide d'un raisonement par l'absurde justifier que cette limite vaut 0.

**Exercice 6.** On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale
$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout $x \in ]1, e[$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a $(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} > 0$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) Calculer $I_1$ a l'aide d'une intégration par partie.
   (b) Démontrer, toujours à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n \leq e$.

(c) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de $nI_n$.

**Exercice 7.** Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$$

1. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de $f$.
2. Calculer la dérivée de $f$ en déduire que le signe de $f'$ dépend de celui de $g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$
3. Donner l'ensemble de définition et de dérivation de $g$ et calculer sa dérivée.
4. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in ]1, +\infty[$ tel que $f'(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]0, \alpha[ \cap D_f$.
5. Donner le tableau de variations complet de $f$.
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ en $e$.

**Exercice 8.** Pour tout réel $t > 0$, on note $P_t$ le polynôme $X^5 + tX - 1 \in \mathbb{R}_5[X]$. Le but de ce problème est d'étudier les racines de $P_t$ en fonction de $t > 0$.

1. On fixe $t > 0$ pour cette question. Prouver que $P_t$ admet une unique racine notée $f(t)$.
2. Montrer que $f(t) \in ]0, 1[$ pour tout $t > 0$.
3. Montrer que $f$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire que $f$ admet des limites finies en $0^+$ et en $+\infty$.
5. Déterminer $\lim_{t\to 0^+} f(t)$.
6. Déterminer $\lim_{t\to +\infty} f(t)$.
7. Montrer que $f(t) \sim_{+\infty} = \frac{1}{t}$
8. Justifier que $f$ est la bijection réciproque de $g : ]0, 1[ \to ]0, +\infty[\ x \mapsto \frac{1-x^5}{x}$
9. (a) Justifier que $f$ est dérivale sur $]0, +\infty[$ et exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ pour tout $t > 0$.

   (b) En déduire la limite de $f'(t)$ en 0. Calculer la limite de $t^2 f'(t)$ en $+\infty$ (Comment noter ce résultat avec le signe équivalent : $\sim$)