

DS7

3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené-e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Calculer la limite de la somme suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$$

Exercice 2. Les familles suivantes sont-elles libres, génératrices dans \mathbb{R}^3 ?

- $F_u = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 2)$.
- $F_v = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2)$, $v_3 = (1, 2, 2)$.
- $F_w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ avec $w_1 = (1, 1, 1)$, $w_2 = (2, 1, 2)$, $w_3 = (1, 2, 2)$, $w_4 = (1, 0, 0)$.

Exercice 3. On considère les ensembles suivants :

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$$

$$F = \text{Vect}(u_1 = (1, 3, 0, 2), u_2 = (2, 7, -3, 6), u_3 = (1, 1, 6, -2))$$

1. (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
(b) Déterminer une base \mathcal{B}_E de E . Quelle est la dimension de E ?
2. Déterminer une base \mathcal{B}_F de F . Quelle est la dimension de F ?
3. Déterminer une représentation cartésienne de F
4. Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
5. (a) On considère la famille de vecteurs \mathcal{F} formée des vecteurs de \mathcal{B}_E et de \mathcal{B}_F . Montrer que la famille \mathcal{F} est libre.
(b) Justifier que \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^4 et en déduire que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F})$
6. Soit $G = \{u+v \mid u \in E, v \in F\}$, montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et déterminer sa dimension.

Exercice 4. On cherche à démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$$

I. Preuve de la convergence

On note $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n(n!)}$

1. Etudier la monotonie des suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Justifier que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

II. Représentation intégrale

3. On note $I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} I_n$$

(On rappelle que par convention $0! = 1$)

III. Conclusion

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq I_n \leq e$$

6. Conclure

Exercice 5. On considère deux urnes U et V . L'urne U contient 20 jetons rouges et 40 jetons noirs. L'urne V contient 30 jetons rouges et 30 jetons noirs. On effectue une succession de tirages avec remise dans ces deux urnes selon le protocole suivant :

- On choisit une urne au hasard au départ et on tire un jeton.
- A chaque fois que l'on tire un jeton rouge, on change d'urne pour effectuer le tirage suivant. En revanche, si on tire un jeton noir, on reste dans la même urne pour le tirage suivant.

On cherche à modéliser cette expérience à l'aide de fonctions Python. On représentera une urne par une liste contenant des chaîne de caractères 'R' et 'N' pour rouge et noire.

Par exemple la liste ['R', 'N', 'N', 'N'] représente une urne avec 1 boule rouge et 3 boules noires

1. Quelle bibliothèque Python permet de simuler des expériences aléatoires ?
2. Ecrire un script qui permet de créer deux listes `UrneU` et `UrneV` constituées des caractères 'R' et 'N' représentant les deux compositions d'urnes.
3. Définir une fonction `tirage(L)` prenant comme argument une liste L et retourne au hasard un élément de cette liste.
4. Définir une fonction `tirage_Urne(nom)` prenant comme argument une chaîne de caractères `nom` simulant un tirage dans l'urne U si `nom=='U'` et dans V si `nom=='V'`. Si `nom` est différent de 'U' ou 'V', le programme renverra un message d'erreur.
5. Compléter (en recopiant sur votre copie) le script suivant, de sorte qu'il renvoie la liste des n premiers résultats de tirages effectués selon la règle donnée précédemment.

```
1  def experience(n):
2      #Premier tirage
3      p=..... #choix aléatoire de la première urne
4      if p==0:
5          urne='U'
6      else:
7          urne='V'
8      resultat=tirage_Urne(urne)
9      liste=[resultat]
10
11     #Autres tirages
12     for i in range(n-1):
13         # On change d'urne si on a pioché une rouge :
14         if resultat=='R':
15             if urne=='V'
16                 urne=....
17             else:
18                 urne=....
19         #on pioche au hasard dans l'urne
20         resultat=.....
21         liste=.....
22     return liste
```

Tournez SVP

Exercice 6. Dans le cadre d'une étude sur la biodiversité et l'impact des changements climatiques sur les populations animales, un projet de recherche mené par une équipe de biologistes a enregistré dans une base de données la répartition des espèces animales dans différents habitats. Cette base de données contient les trois tables suivantes :

- **Especes** (id_esp, nom, famille, id_hab)
- **Observations** (id_obs, année, id_esp, lieu, nombre_individus)
- **Habitats** (id_hab, nom, type, region)

Elle est conçue pour stocker et gérer des informations sur les espèces animales observées dans différents habitats.

- **Especes** (id_esp, nom, famille, id_hab) : Cette table recense les espèces animales, identifiées par un identifiant unique (id_esp). Elle contient le **nom** scientifique de l'espèce, sa **famille** biologique et un identifiant (id_hab) faisant référence à son habitat principal. *Exemple : (1, "Panthera leo", "Felidae", 3)*
- **Observations** (id_obs, date, id_esp, lieu, nombre_individus) : Cette table enregistre les observations d'espèces effectuées sur le terrain. Chaque observation est identifiée par id_obs, associée à une **année**, une espèce observée (id_esp), un **lieu** précis et le **nombre_individus** comptés. *Exemple : (101, "2024", 1, "Parc Kruger", 5)*
- **Habitats** (id_hab, nom, type, region) : Cette table décrit les habitats naturels des espèces. Chaque habitat a un identifiant unique (id_hab), un **nom**, un **type** (forêt, savane, zone humide, etc.) et une **region** géographique. *Exemple : (3, "Savane africaine", "Savane", "Afrique de l'Est")*

Questions :

1. Sélectionnez le nom de toutes les espèces de cette base de données.
2. Sélectionnez le lieu de toutes les observations faites en 2024.
3. Sélectionnez la famille des espèces vivant dans un habitat de type "récif corallien".
4. Affichez le nom de l'habitat qui contient le plus d'espèces.
5. Trouvez les observations faites après l'année 2020 et affichez le lieu de l'observation ainsi que le nom de l'espèce observée et le nom de l'habitat correspondant.
6. Affichez le nombre total d'observations par espèce, trié par ordre décroissant. (on affichera le nom de l'espèce et le nombre total d'observations pour chaque espèce)
7. Sélectionnez les espèces ayant été observées au moins 10 fois.