Programme de colle : Semaine 23
Lundi 31 mars

1 Cours

1. Espaces vectoriels
   - Définition d'un espace vectoriel. On se contentera de travailler sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.
   - Définition d'un sous espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev.
   - Famille de vecteurs, combinaisons linéaires et espace vectoriel engendré.
   - Famille génératrice d'un sev F. Famille libre. Bases.
   - Dimension, rang d'une famille de vecteurs (défini comme la dimension de l'espace vectoriel engendré).
   - Proposition reliant cardinal d'une famille de vecteur, famille génératrice, famille libre et base.
2. Intégration
   - Définition des primitives et de l'intégrale (comme différence des valeurs d'une primitive)
   - Propriétés sur les intégrales (Chasles, linéarité, positivité, croissance)
   - Primitives usuelles
   - IPP, changement de variable
   - Sommes de Riemann.
3. Python :
   - Tableau numpy, dictionnaires
   - Représentation informatique d'un polynome par une liste (évaluation, racine, dérivation, somme)

2 Exercices Types

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
   (a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\right\}$
   (b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\right\}$
   (c) $C = \left\{(x+2y, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
   (d) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}$
2. Dans $\mathbb{K}^3$, on considère $u = (2,-4,7)$ et $v = (-1,2,-3)$. Peut-on déterminer a de sorte que $w \in \text{Vect}(u,v)$ dans chacun des 3 cas suivants :
   (a) $w = (-1, a, 3)$ (b) $w = (-1, 2, a)$ (c) $w = (-1, -1, a)$
3. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.
   (a) $u = (1,-1,0)$, $v = (2,1,-1)$ et $w = (1,5,-1)$
   (b) $u = (1,1,2)$, $v = (2,1,0)$ et $w = (3,1,\lambda)$ λ paramètre réel.
   (c) $u = (1,0,-2)$, $v = (2,3,1)$ et $w = (4,-2,1)$
   (d) $u = (1,1,-1)$, $v = (1,-1,1)$, $w = (-1,1,1)$ et $t = (1,1,1)$
4. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Donner une base de F et sa dimension.
   (a) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 3z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\right\}$
   (b) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 4z = 0\right\}$
   (c) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x+2y-2z, -x+3y-z, x+7y-5z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$
   (d) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad 2xy + z - t = 0 \text{ et } x - y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - at = 0\right\}$ avec a un paramètre réel.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$

(b) En déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{e}$$

(d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

(e) Trouver un équivalent simple de J_n quand n tend vers l'infini.

6. Trouver un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$

7. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}dt.$

   Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, calculer f' et étudier les variations de f.

8. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3sin(u_n) + 2$$

9. Représenter informatiquement un polynome (liste) et donner une fonction qui permet de faire la somme de deux polynomes.