Correction du DS 4 - Mathématiques

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2,$$

et (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Donner le tableau de variations de f.
2. Déterminer $f([0,2])$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,2]$.
4. Résoudre sur $[0,+\infty[$, l'inéquation $f(x) - x \geq 0$.
5. En déduire le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et déterminer sa limite.

Correction 1.

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x - 1$. Donc f admet pour tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Le tableau de variations nous donne $f([0,2]) = [\frac{3}{2}, 2]$
3. On pose $P(n) =:$ "$u_n \in [0,2]$" pour $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation
   Pour $n = 0$, $u_0 = 1$, d'aprés l'énoncé, donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq 2$. Alors $f(u_n) \in f([0,2])$. Or $f([0,2]) = [\frac{3}{2}, 2] \subset [0,2]$. Donc
   $$u_{n+1} \in [0,2]$$
   Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2].}$$
4.
$$\begin{aligned} f(x) - x \geq 0 &\iff \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \geq 0 \\ &\iff x^2 - 4x + 4 \geq 0 \\ &\iff (x-2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$
   Ainsi pour tout $x \in [0,\infty[$, $f(x) - x \geq 0$.

5. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ d'après la question précédente. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (Q5) et majorée (par 2, Q3), donc d'après le théorème de convergence des suites monotones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
   En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient $\ell = f(\ell)$ par continuité de f. D'après la question 4, $f(x) = x \iff x = 2$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre λ.

$$(S_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & \lambda x \\ x & + & y & + & z & = & \lambda y \\ x & + & y & + & z & = & \lambda z \end{array} \right.$$

1. Échelonner le système.
2. Déterminer le rang de S_λ en fonction de λ.
3. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
4. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ.
5. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$.

Correction 2.

1.

$$(S_\lambda) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$L_3 \leftrightarrow L_1$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & -\lambda y & + & \lambda z & = & 0 \\ & & \lambda y & + & (1-(1-\lambda)^2)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_3$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & -\lambda y & + & \lambda z & = & 0 \\ & & & & (1-(1-\lambda)^2+\lambda)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & -\lambda y & + & \lambda z & = & 0 \\ & & & & \lambda(3-\lambda)z & = & 0 \end{array} \right.$$

2. Tout d'abord remarquons que $\lambda(3-\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{0, 3\}$
   On a donc trois cas :
   Si $\lambda = 0$

$$S_\lambda \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 1}}$$

<u>Si $\lambda = 3$</u>

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x & + & y & + & -2z & = & 0 \\ & & -3y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 2}}$$

<u>Si $\lambda \notin \{0, 3\}$</u>

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & -y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 3}}$$

3. Le système n'est pas de Cramer pour $\lambda in\{0, 3\}$

$$\boxed{\Sigma = \{0, 3\}}$$

4. <u>Si $\lambda = 0$</u> L'ensemble des solutions de S_λ est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(-y-z, y, z) | (y, z) \in \mathbb{R}^2\}}$$

<u>Si $\lambda = 3$</u>

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x & & = & z \\ & y & = & z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de S_λ est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(z, z, z) | z \in \mathbb{R}\}}$$

5. <u>Si $\lambda \notin \{0, 3\}$</u>
Le système est de Cramer, de plus il est homogène donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}}$$

Exercice 3. Pour tout réel $t > 0$, on note P_t le polynôme $x \to x^5 + tx - 1$. Le but de ce problème est d'étudier les racines de P_t en fonction de $t > 0$.

1. On fixe $t > 0$ pour cette question. Prouver que P_t admet une unique racine réelle notée $f(t)$.
2. Montrer que $f(t) \in]0, 1[$ pour tout $t > 0$.
3. Soit g la fonction $g :]0, 1[\to]0, +\infty[$ $x \mapsto \frac{1-x^5}{x}$ montrer que g est bijective.
4. Justifier que f est la bijection réciproque de g
5. (a) Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ pour tout $t > 0$.
   (b) En déduire le sens de variations de f.

Correction 3.

1. On considère la dérivée de la fonction polynomiale. On a $P_t'(x) = 5x^4 + t$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t > 0$ $P_t'(x) \geq 0$. La fonction polynomiale $x \mapsto P_t(x)$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par ailleurs elle est continue. On peut appliquer le théorème de la bijection à P_t pour la valeur $0 \in]\lim_{x\to+\infty} P_t(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} P_t(x) = -\infty[$. Il existe donc une unique valeur, notée $f(t)$ par l'énoncé, telle que $P_t'(f(t)) = 0$.

2. Par définition de P_t on a $P_t(0) = -1 < 0$ et $P_t(1) = t > 0$. Comme $x \mapsto P_t(x)$ est strictement croissante et $P_t(f(f)) = 0$ on obtient $f(t) \in]0,1[$.
3. g est dérivable sur $]0,1[$ et $g'(x) = \frac{-1}{x^2} - 3x^4 < 0$ donc g est <u>strictement décroissante</u>.
   De plus, g est <u>continue</u>.
   Et $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$.
   Ainsi, le théorème de la bijection assure que g réalise bien une bijection de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$.
4. Par définition de f on a $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$ Donc $tf(t) = -f(t)^5 + 1$. Comme $f(t) > 0$, on a :
$$t = \frac{1 - f(t)^5}{f(t)}$$
   Soit $g(x) = \frac{1-x^5}{x}$ on a bien $g(f(t)) = t$ Donc $g \circ f = \mathrm{Id}$. Ainsi la réciproque de f est bien la fonction $g :]0,1[\to]0,\infty[$.
5. (a) g est dérivable et pour tout $x \in]0,1[$
$$g'(x) = \frac{-1-4x^5}{x^2}.$$
   $g'(x)$ est différent de 0 car $-1-4x^5$ est différent de 0 sur $]0,1[$, donc f est dérivable et
$$f'(t) = \frac{1}{g'(f(t))} = \frac{f(t)^2}{-1-4f(t)^5}.$$
   (b) Comme $f(t)^2 \geq 0$ on a $f'(t) \leq 0$. Ainsi f est décroissante.

Exercice 4. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telles que :
$$f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[,\ f(1) = 1 \text{ et } \forall t > 0,\ f'(t) = f(1/t)$$
On fixe une fonction $f \in \mathcal{S}$.

1. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Rappeler la formule de dérivation d'une composée de fonctions $u \circ v$.
2. Justifier que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde en fonction de f.

   On définit maintenant g par
$$g(x) = f(e^x)$$
3. Donner l'ensemble de définition de g.
4. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est solution de l'équation différentielle suivante :
$$y'' - y' + y = 0 \quad (E)$$
5. Résoudre (E).
6. En déduire que f est de la forme
$$f(t) = A\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + B\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$
   où (A, B) sont deux constantes réelles.
   On appelle $f_1(t) = \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$ et $f_2(t) = \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$
7. Calculer les dérivées premières de f_1 et f_2
8. Déterminer les valeurs de A et B.

Correction 4.

1. $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u' \circ v(x)$
2. Remarquons qu'étant donné que f est dérivable et $t \mapsto \frac{1}{t}$ est aussi dérivable, la fonction f' est dérivable par composée de fonctions dérivables. Ainsi f est dérivable deux fois sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\boxed{f''(t) = \frac{-1}{t^2} f'(1/t) = \frac{-1}{t^2} f(t)}$$

3. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et $exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$, de nouveau par composition, g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.
   Calculons les dérivées successives de g en fonction de celles de f :

$$g'(x) = e^x f'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$$

   On a donc

$$\begin{aligned} g''(x) - g'(x) + g(x) &= e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x) - e^x f'(e^x) + f(e^x) \\ &= e^{2x} f''(e^x) + f(e^x) \end{aligned}$$

   On utilise alors la relation vérifiée par f : $f'(x) = f(1/x)$, on a par dérivation $f''(x) = \frac{-1}{x^2} f'(1/x) = \frac{-1}{x^2} f(x)$, d'où

$$f''(e^x) = \frac{-1}{e^{2x}} f(e^x) = -e^{-2x} f(e^x)$$

   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g''(x) - g'(x) + g(x) &= -e^{2x} e^{-2x} f(e^x) + f(e^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc solution de l'équation différentielle } g'' - g' + g = 0.}$$

4. Résolvons (E) avec la méthode vue en cours. Le polynôme caractéristique est $X^2 - X + 1$ qui admet comme discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et donc deux racines complexes : $r_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de (E) sont donc de la forme

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto e^{x/2} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right) \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}}$$

5. On vient de voir que $f(e^x)$ est de la forme $e^{x/2}(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right))$, donc $f(t)$ est de la forme

$$f(t) = A\sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) + B\sqrt{t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right)$$

   avec A, B deux constantes réelles. Ceci est bien la forme demandée par l'énoncé, avec

$$f_1(t) = \sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right)$$

   et

$$f_2(t) = \sqrt{t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right)$$

6. Calculons les dérivées des fonctions f_1 et f_2. On a

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) - \sqrt{t} \frac{\sqrt{3}}{2t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) \end{aligned}$$

De même

$$f_2'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

7. Pour $t = 1$ on obtient d'une part

$$\begin{aligned} f(1) &= A\sqrt{1}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1)\right) + B\sqrt{1}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1)\right) \\ &= A \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} f'(1) &= Af_1'(1) + Bf_2'(1) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Par ailleurs, $f'(1) = f(1/1) = f(1) = 1$,
Ainsi on obtient $A = 1$ et $\frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} = 1$ D'où après calcul

$$A = 1 \quad \text{et} \quad B = \frac{\sqrt{3}}{3}$$