Chapitre 0 : Résolution d'équations

I Equations polynomiales

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(E_1)\quad x^2+3x+2=0 \qquad (E_3)\quad x^2+3x+2\geq 0 \qquad (E_5)\quad x^2+2x+1\leq 0$$

$$(E_2)\quad x^2+2x+1=0 \qquad (E_4)\quad x^2+2x+1\geq 0 \qquad (E_6)\quad x^2+2x+2<0$$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(P_1):\quad x^3+3x^2+2x=0,\quad (P_2)\quad x^3-3x+2=0,\quad (P_3)\quad x^4+2x+1\geq 0$$

Points à retenir

— La formule du discriminant et des racines.

— La factorisation quand on obtient une racine.

— L'écriture des solutions sous forme d'intervalles ou d'ensembles.

II Equations rationnelles

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(Q_1):\quad \frac{-2}{x+3}=x,\quad (Q_2):\quad \frac{-2}{x+3}\leq x,\quad (Q_3):\quad \frac{x+1}{x-1}<\frac{x-3}{x+2}$$

Points à retenir

— La condition pour multiplier une inéquation. (signe)

— Les règles de calculs sur les fractions.

— La mise au même dénominateur.

III Equations avec des radicaux

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(R_1):\quad \sqrt{x}=x \qquad (R_4):\quad \sqrt{x}<2x+1 \qquad (R_7):\quad \sqrt{x^2+x}<\sqrt{x-1}$$

$$(R_2):\quad \sqrt{x+2}=x \qquad (R_5):\quad \sqrt{x-2}\geq x \qquad (R_8):\quad \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\leq x$$

$$(R_3):\quad \sqrt{x+1}=-x+1 \qquad (R_6):\quad \sqrt{x^2-1}\geq x \qquad (R_9):\quad \frac{1}{\sqrt{x+1}}>x$$

Points à retenir

- Les implications et les équivalences entre deux propositions.
- Les disjonctions de cas.
- La condition pour mettre au carré. (signe)
- Les règles de calculs sur les racines.
- Les identités remarquables.

IV Valeurs absolues

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(V_1): \quad |x| = 1, \quad (V_2): \quad |x+1| = -1, \quad (V_3): \quad |x+1| = \sqrt{x}.$$

$$(V_4): \quad |x-1| \leq 1-2x, \quad (V_5): \quad |x+1| \leq |1-2x|, \quad (V_6): \quad ||x|-5| \geqslant ||3x|-3|.$$

Points à retenir

- La définition de la valeur absolue, son graphe.
- Les disjonctions de cas.

V Changement de variables

Exercice 6. Résoudre

$(CV_1): \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$ $\qquad (CV_3): \quad x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0$ $\qquad (CV_5): \quad \frac{1}{\ln(x)-1} \leq \ln(x)+1$

$(CV_2): \quad x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ $\qquad (CV_4): \quad \frac{1}{e^x-1} \leq e^x$ $\qquad (CV_6): \quad (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + 1 = 0$

Points à retenir

- Savoir trouver un changement de variable.
- Passer des solutions de l'équation originale à celle où l'on a changé la variable.

VI Paramètres

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$(P_1): \quad \lambda x^2 + 2x + 1 = 0$ $\qquad (P_3): \quad x - 1 = 2\lambda x + 1$ $\qquad (P_5): \quad |x-\lambda| = \frac{1}{2}x + 1$

$(P_2): \quad \frac{1}{x+\lambda} \geq x - \lambda$ $\qquad (P_4): \quad x - 1 < 2\lambda x + 1$ $\qquad (P_6): \quad \exp(2x) + \lambda\exp(x) + 1 = 0$

Points à retenir

- Résoudre une équation à paramètre c'est résoudre beaucoup d'équations à la fois. On donne pour chaque valeur du paramètre l'ensemble des solutions.
- Ne pas confondre le paramètre avec l'inconnue !

VII Par étude de fonctions

Exercice 8. Résoudre les inéquations suivantes à l'aide d'une étude de fonction

(I_1) : $\ln(x+1) \leq x$

(I_2) : $e^x - 1 \geq x$

(I_3) : $\sin(x) \leq x$

(I_4) : $\sin(x) \geq \frac{\pi x}{2}$

Points à retenir

— Montrer une inégalité sur un ensemble I revient à résoudre une inéquation et montrer que l'ensemble des solutions est tout l'ensemble I.

— Etudier la différence des membres d'une inégalité afin de comparer à 0

VIII Un peu de tout

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x

(T_1) : $(x^2-1)e^x - (x^2-1)e^{(x^2)} \geq 0$

(T_2) : $\dfrac{2x-1}{x^2-x+1} - 1 \leq 0$

(T_3) : $xe^x - x \leq 0$

(T_4) : $\dfrac{e^x(e^{2x}+1) - e^x(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} \geq 0$

Exercice 10. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq x+1$.

— Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$e^{2x} - x \geq 0.$$

— Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$e^x - 2x \geq 0.$$