Limites !

Exercice 1. Donner les limites et un équivalent simple aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions suivantes. Pour f_5, f_6, f_{11}, f_{25}, f_{36} et f_{37}, on se limitera à l'étude au voisinage de 0.

$$f_1(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \qquad f_2(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{3x} \qquad f_3(x) = \ln(x)\,\ln(x+1)\,\ln(x+2)$$

$$f_4(x) = x + 2e^x + 3e^{-x} \qquad f_5(x) = (x^5+2x)^7\tan(x\ln x) \qquad f_6(x) = \frac{x\sin(e^{-x})}{x+7e^x}$$

$$f_7(x) = \frac{e^x\sqrt{3x^4-x^3+x^2}}{e^x-1} \qquad f_8(x) = \ln\left(x+\frac{x^2}{2}\right) \qquad f_9(x) = x^{2025}+1$$

$$f_{10}(x) = \cos x \qquad f_{11}(x) = \tan x \qquad f_{12}(x) = \sqrt{e^{2x}+1} - e^x$$

$$f_{13}(x) = \ln(e^x + e^{-x}) \qquad f_{14}(x) = \frac{\ln(1+4x)}{x} \qquad f_{15}(x) = x^4 e^{-\sqrt{x}}$$

$$f_{16}(x) = \frac{e^{3x^2}}{x^5} \qquad f_{17}(x) = (x-2)\ln(x-2) \qquad f_{18}(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

$$f_{19}(x) = \frac{x^2-x+1}{2x^2+5} \qquad f_{20}(x) = x^2\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \qquad f_{21}(x) = \frac{1+x^3-x^2-\cos x}{x^2}$$

$$f_{22}(x) = \frac{x^3-x^2+x}{x^2+2x} \qquad f_{23}(x) = \frac{\ln(1+x\sqrt{x})}{x^2} \qquad f_{24}(x) = \frac{x}{e^{x^2}-1}$$

$$f_{25}(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f_{26}(x) = \frac{x^n-1}{x^p-1} \qquad f_{27}(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$f_{28}(x) = \frac{x^3-x^2+1}{x+e^x} \qquad f_{29}(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad f_{30}(x) = \left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^{x^3}$$

$$f_{31}(x) = \frac{x^3-x^2+1+\ln x}{x^5+1} \qquad f_{32}(x) = \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x} \qquad f_{33}(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}$$

$$f_{34}(x) = \frac{\sin(x^2\ln x)}{x} \qquad f_{35}(x) = \frac{x}{x-1}\sin(2x^2) \qquad f_{36}(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x}$$

$$f_{37}(x) = \frac{\cos x - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2 x} \qquad f_{38}(x) = (e^x + x)^{1/x} \qquad f_{39}(x) = \frac{e^{x^2}-e^{ax}}{x-a}$$

$$f_{40}(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Correction 1. (Méfiez vous, y a peut être des erreurs qui traînent, si jamais vous en voyez, n'hésitez pas à me les signaler)

f_1 $\quad f_1(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Domaine : $\mathbb{R}_+^*$.

En 0^+ :

$$f_1(x) = x\ln(\sqrt{x}+1) - x\ln(\sqrt{x}).$$

On a $x\ln(\sqrt{x}+1) \to 0$ (car $\ln(\sqrt{x}+1) \to 0$) et $x\ln(\sqrt{x}) \to 0$ (croissances comparées : $x^\alpha|\ln x| \to 0$ quand $x \to 0^+$, $\alpha > 0$).

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = 0$.

En $+\infty$: comme $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ et $\ln(1+u) \sim_0 u$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad\Longrightarrow\quad f_1(x) \sim_{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x},$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.

f_2 $\quad f_2(x) = \dfrac{1-\cos(x^2)}{3x}$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

<u>En 0 :</u> $1-\cos t \sim_0 \dfrac{t^2}{2}$ avec $t = x^2$, donc

$$1-\cos(x^2) \sim_0 \frac{x^4}{2} \quad \Longrightarrow \quad f_2(x) \sim_0 \frac{x^4/2}{3x} = \frac{x^3}{6} \to 0.$$

<u>En $\pm\infty$:</u> $0 \leq 1-\cos(x^2) \leq 2$, donc

$$|f_2(x)| \leq \frac{2}{3|x|} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0.$$

f_3 $\quad f_3(x) = \ln x \, \ln(x+1) \, \ln(x+2)$.

Domaine : $\mathbb{R}_+^*$.

<u>En 0^+ :</u> $\ln(1+x) \sim_0 x$ et $\ln(x+2) \to \ln 2$, donc

$$f_3(x) \sim_{0^+} (\ln x)\, x \, \ln 2 \to 0 \quad (\text{car } x \ln x \to 0).$$

<u>En $+\infty$:</u> $\ln(x+a) \sim_{+\infty} \ln x$, donc $f_3(x) \sim (\ln x)^3 \to +\infty$.

f_4 $\quad f_4(x) = x + 2e^x + 3e^{-x}$.

Domaine : $\mathbb{R}$.

<u>En $+\infty$:</u> e^x domine (factorisation + C.C.) x et e^{-x}, donc $f_4(x) \sim 2e^x \to +\infty$.

<u>En $-\infty$:</u> $e^{-x} = e^{|x|}$ domine $|x|$ et e^x, donc $f_4(x) \sim 3e^{-x} \to +\infty$.

f_5 $\quad f_5(x) = (x^5+2x)^7 \tan(x \ln x)$.

Domaine : $\{x > 0 : \ x \ln x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

<u>Au voisinage de 0^+ :</u> $(x^5+2x)^7 \sim (2x)^7$ et $\tan u \sim_0 u$ avec $u = x \ln x$,

$$f_5(x) \sim_{0^+} (2x)^7 \, (x \ln x) = 128\, x^8 \ln x \to 0 \quad (\text{car } x^\alpha \ln x \to 0, \ \alpha > 0).$$

f_6 $\quad f_6(x) = \dfrac{x \sin(e^{-x})}{x + 7e^x}$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ où α est l'unique solution de $x + 7e^x = 0$ (avec $\alpha < 0$).

<u>Au voisinage de 0 :</u> $e^{-x} \to 1$ donc $\sin(e^{-x}) \to \sin 1$ et $x + 7e^x \to 7$,

$$f_6(x) \sim_0 \frac{x \sin 1}{7} \to 0.$$

f_7 $\quad f_7(x) = \dfrac{e^x \sqrt{3x^4 - x^3 + x^2}}{e^x - 1}$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (car $3x^4 - x^3 + x^2 = x^2(3x^2 - x + 1) \geq 0$).

<u>En $0^\pm$:</u> $\sqrt{3x^4 - x^3 + x^2} = |x|\sqrt{3x^2 - x + 1} \sim |x|$ et $e^x - 1 \sim x$, donc

$$f_7(x) \sim \frac{|x|}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} f_7(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} f_7(x) = -1.$$

<u>En $+\infty$:</u> $\dfrac{e^x}{e^x-1} \to 1$ et $\sqrt{3x^4 - x^3 + x^2} \sim \sqrt{3}\, x^2$, donc $f_7(x) \sim \sqrt{3}\, x^2 \to +\infty$.

<u>En $-\infty$:</u> $e^x \to 0$ et $e^x - 1 \to -1$ tandis que $\sqrt{3x^4 - x^3 + x^2} \sim \sqrt{3}\, x^2$, donc $f_7(x) \sim \frac{\sqrt{3}x^2 e^{-x}}{-1} \to 0$ (C.C.) .

f_8 $f_8(x) = \ln\left(x + \dfrac{x^2}{2}\right)$.

Domaine : $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

<u>En 0^+ :</u> $x + \dfrac{x^2}{2} \sim x$, donc $f_8(x) \to -\infty$.

<u>En $(-2)^-$:</u> $x + \dfrac{x^2}{2} = x\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) \to 0^+$, donc $f_8(x) \to -\infty$.

<u>En $\pm\infty$:</u> $\ln(x + \dfrac{x^2}{2}) = \ln\left(\dfrac{x^2}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{x} + 1\right)$, donc $f_8(x) \sim \ln\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = 2\ln|x| - \ln 2 \to +\infty$.

f_9 $f_9(x) = x^{2025} + 1$.

Domaine : $\mathbb{R}$.

<u>En $+\infty$:</u> $f_9(x) \to +\infty$. <u>En $-\infty$:</u> $f_9(x) \to -\infty$.

f_{10} $f_{10}(x) = \cos x$.

Domaine : $\mathbb{R}$.

<u>En $\pm\infty$:</u> pas de limite (fonction oscillante).

f_{11} $f_{11}(x) = \tan x$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

<u>Au voisinage de 0 :</u> $\tan x \sim_0 x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_{11}(x) = 0$ et $f_{11}(x) \sim_0 x$.

f_{12} $f_{12}(x) = \sqrt{e^{2x}+1} - e^x$.

Domaine : $\mathbb{R}$.

<u>En $+\infty$:</u> "quantité conjuguée" :

$$f_{12}(x) = \frac{(e^{2x}+1) - e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1} + e^x} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1} + e^x} \sim_{+\infty} \frac{1}{2e^x} \to 0.$$

<u>En $-\infty$:</u> $e^{2x} \to 0$ et $e^x \to 0$, donc $f_{12}(x) \to \sqrt{1} - 0 = 1$.

f_{13} $f_{13}(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

Domaine : $\mathbb{R}$.

$f_{13}(x) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x})$ <u>En $+\infty$:</u> donc $f_{13}(x) \sim x \to +\infty$.
$f_{13}(x) = \ln(e^{-x}) + \ln(e^{2x} + 1)$ <u>En $-\infty$:</u> donc $f_{13}(x) \sim -x \to +\infty$.

f_{14} $f_{14}(x) = \dfrac{\ln(1+4x)}{x}$.

Domaine : $\left]-\frac{1}{4}, +\infty\right[\setminus \{0\}$.

<u>En 0 :</u> $\ln(1+u) \sim_0 u$ avec $u = 4x$, donc $f_{14}(x) \to 4$.
<u>En $(-\frac{1}{4})^+$:</u> $\ln(1+4x) \to -\infty$ et $x \to -\frac{1}{4}$, donc $f_{14}(x) \to +\infty$.

<u>En $+\infty$:</u> $\ln(1+4x) \sim \ln x$ (factorisation) et $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ (C.C.), donc $f_{14}(x) \to 0$.

f_{15} $f_{15}(x) = x^4 e^{-\sqrt{x}}$.

Domaine : $[0, +\infty[$.

<u>En 0^+ :</u> $f_{15}(x) \to 0$.
<u>En $+\infty$:</u> $f_{15}(x) = \sqrt{x}^8 e^{-\sqrt{x}} \to 0$ (C.C.).

f_{16} $f_{16}(x) = \dfrac{e^{3x^2}}{x^5}$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

En $0^\pm$: $e^{3x^2} \to 1$, donc $f_{16}(x) \sim \dfrac{1}{x^5}$:

$$\lim_{x\to 0^+} f_{16}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f_{16}(x) = -\infty.$$

En $+\infty$: $f_{16}(x) \to +\infty$ (C.C.)
En $-\infty$: $f_{16}(x) \to -\infty$ (C.C).

f_{17} $f_{17}(x) = (x-2)\ln(x-2)$.
Domaine : $]2, +\infty[$.
En 2^+ : avec $t = x-2 \to 0^+$, $t\ln t \to 0$, donc $f_{17}(x) \to 0$.
En $+\infty$: $(x-2)\ln(x-2) \to +\infty$.

f_{18} $f_{18}(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$.
Domaine : $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
En 0^+ : $\ln x \to -\infty$ et $x-1 \to -1$, donc $f_{18}(x) \to +\infty$.
En 1 : $\ln x \sim_1 x-1$, donc $f_{18}(x) \to 1$.
En $+\infty$: $\dfrac{\ln x}{x-1} \sim \dfrac{\ln x}{x} \to 0$.

f_{19} $f_{19}(x) = \dfrac{x^2-x+1}{2x^2+5}$.
Domaine : $\mathbb{R}$.
En $\pm\infty$: quotient de polynômes : $f_{19}(x) \to \dfrac{1}{2}$.

f_{20} $f_{20}(x) = x^2 \left\lfloor \dfrac{3}{x} \right\rfloor$.
Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
En $0^\pm$: $\dfrac{3}{x} - 1 < \left\lfloor \dfrac{3}{x} \right\rfloor \leq \dfrac{3}{x}$, donc

$$3x - x^2 < x^2 \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq 3x \quad \Longrightarrow \quad f_{20}(x) \to 0.$$

En $+\infty$: pour $x > 3$, $\left\lfloor \dfrac{3}{x} \right\rfloor = 0$, donc $f_{20}(x) \to 0$.
En $-\infty$: pour $x < -3$, $\dfrac{3}{x} \in (-1, 0)$ donc $\left\lfloor \dfrac{3}{x} \right\rfloor = -1$ et $f_{20}(x) = -x^2 \to -\infty$.

f_{21} $f_{21}(x) = \dfrac{1 + x^3 - x^2 - \cos x}{x^2}$.
Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
En 0 : écrire

$$f_{21}(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} = x - 1 + \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Or $1 - \cos x \sim_0 \dfrac{x^2}{2}$, donc $\dfrac{1-\cos x}{x^2} \to \dfrac{1}{2}$ et ainsi

$$\lim_{x\to 0} f_{21}(x) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

En $\pm\infty$: $f_{21}(x) = x - 1 + \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ et $\left| \dfrac{1-\cos x}{x^2} \right| \leq \dfrac{2}{x^2} \to 0$, donc $f_{21}(x) \sim x$: $\lim_{x\to+\infty} f_{21}(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f_{21}(x) = -\infty$.

f_{22} $\quad f_{22}(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x}{x^2 + 2x}$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. Pour $x \neq 0$, $f_{22}(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 2}$.

<u>En 0 :</u> $f_{22}(x) \to \dfrac{1}{2}$.

<u>En $(-2)^{\pm}$:</u> numérateur $\to 7$ et dénominateur $\to 0$, donc $\lim_{x \to -2^-} f_{22}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -2^+} f_{22}(x) = +\infty$.

<u>En $\pm\infty$:</u> $\dfrac{x^2 - x + 1}{x + 2} = x - 3 + \dfrac{7}{x + 2}$, donc $f_{22}(x) \sim x$.

f_{23} $\quad f_{23}(x) = \dfrac{\ln(1 + x\sqrt{x})}{x^2}$.

Domaine : $\mathbb{R}_+^*$.

<u>En 0^+ :</u> $\ln(1 + u) \sim_0 u$ avec $u = x^{3/2}$, donc $f_{23}(x) \sim \dfrac{x^{3/2}}{x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$.

<u>En $+\infty$:</u> $\ln(1 + x^{3/2}) \sim \ln(x^{3/2}) = \dfrac{3}{2} \ln x$, donc $f_{23}(x) \to 0$.

f_{24} $\quad f_{24}(x) = \dfrac{x}{e^{x^2} - 1}$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

<u>En $0^{\pm}$:</u> $e^{x^2} - 1 \sim_0 x^2$, donc $f_{24}(x) \sim \dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{x \to 0^+} f_{24}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} f_{24}(x) = -\infty.$$

<u>En $\pm\infty$:</u> $f_{24}(x) = \dfrac{x}{e^{x^2}} \cdot \dfrac{1}{1 - e^{-x^2}} \to 0$ (C.C.)

f_{25} $\quad f_{25}(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

<u>Au voisinage de 0 :</u> $|\sin(1/x)| \leq 1$ donc $|f_{25}(x)| \leq |x|$, d'où $\lim\limits_{x \to 0} f_{25}(x) = 0$ (encadrement).

f_{26} $\quad f_{26}(x) = \dfrac{x^n - 1}{x^p - 1}$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{x : \ x^p = 1\}$ (en particulier $x \neq 1$, et aussi $x \neq -1$ si p est pair).

<u>En 1 :</u> $x^k - 1 \sim_1 k(x - 1)$, donc $\lim\limits_{x \to 1} f_{26}(x) = \dfrac{n}{p}$.

<u>En $+\infty$:</u> $f_{26}(x) \sim x^{n-p}$ (donc 0 si $n < p$, 1 si $n = p$, $+\infty$ si $n > p$).

<u>En $-\infty$:</u> $f_{26}(x) \sim x^{n-p}$ (signe selon la parité de $n - p$).

f_{27} $\quad f_{27}(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

<u>En $0^{\pm}$:</u> $e^{-x} \to 1$, donc $f_{27}(x) \sim \dfrac{1}{x}$: $\lim_{x \to 0^+} f_{27}(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f_{27}(x) = -\infty$.

<u>En $+\infty$:</u> $\dfrac{e^{-x}}{x} \to 0$.

<u>En $-\infty$:</u> $e^{-x} = e^{|x|}$ et $x \to -\infty$, donc $f_{27}(x) \to -\infty$.

f_{28} $\quad f_{28}(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x + e^x}$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{\beta\}$ où β est l'unique solution de $x + e^x = 0$ (avec $\beta < 0$).

<u>En $+\infty$:</u> $x + e^x \sim e^x$ (facto + C.C.) donc $f_{28}(x) \sim \dfrac{x^3}{e^x} \to 0$.

En $-\infty$: $x+e^x \sim x$ (facto + C.C.) donc $f_{28}(x) \sim \dfrac{x^3}{x} = x^2 \to +\infty$.
En $\beta^\pm$: $x+e^x \to 0$ et le numérateur tend vers $\beta^3-\beta^2+1$ (non nul), donc $f_{28}(x) \to \pm\infty$.

f_{29} $f_{29}(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
Domaine : $\mathbb{R}_+^*$.
En 0^+ : $\dfrac{\ln x}{x} \to -\infty$.
En $+\infty$: $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$.

f_{30} $f_{30}(x) = \left(1+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^{x^3}$.
Domaine : $\mathbb{R}_+^*$.
En 0^+ :

$$\ln f_{30}(x) = x^3 \ln\Big(1+x^{-3/2}\Big).$$

Comme $x^{-3/2} \to +\infty$, $\ln(1+v) \sim \ln v$, donc

$$\ln f_{30}(x) \sim x^3 \ln(x^{-3/2}) = -\frac{3}{2}x^3 \ln x \to 0 \quad \Rightarrow \quad f_{30}(x) \to 1.$$

En $+\infty$: $x^{-3/2} \to 0$ et $\ln(1+u) \sim u$, donc

$$\ln f_{30}(x) \sim x^3 \cdot x^{-3/2} = x^{3/2} \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f_{30}(x) \to +\infty.$$

f_{31} $f_{31}(x) = \dfrac{x^3-x^2+1+\ln x}{x^5+1}$.
Domaine : $\mathbb{R}_+^*$.
En 0^+ : le numérateur $\to -\infty$ (à cause de $\ln x$) et le dénominateur $\to 1$, donc $f_{31}(x) \to -\infty$.
En $+\infty$: $f_{31}(x) \sim \dfrac{x^3}{x^5} = \dfrac{1}{x^2} \to 0$.

f_{32} $f_{32}(x) = \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x}$.
Domaine : $(-1,+\infty) \setminus \{0\}$.
En 0 : équivalent usuel $\ln(1+x)-x \sim_0 -\dfrac{x^2}{2}$. Alors

$$x-(1+x)\ln(1+x) = -x^2-(1+x)\big(\ln(1+x)-x\big) \sim -x^2+\frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2},$$

donc $f_{32}(x) \sim -\dfrac{x}{2} \to 0$.
En $(-1)^+$: poser $t=1+x \to 0^+$, alors $x=t-1$ et

$$f_{32}(x) = \frac{(t-1)-t\ln t}{t-1} = 1-\frac{t\ln t}{t-1} \to 1 \quad (\text{car } t\ln t \to 0).$$

En $+\infty$: $x-(1+x)\ln(1+x) \sim -x\ln x$, donc $f_{32}(x) \sim -\ln x \to -\infty$.

f_{33} $f_{33}(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}$.
Domaine : $[-1,1] \setminus \{0\}$.

En 0 : $\sqrt{1+u}-1 \sim_0 \dfrac{u}{2}$, donc

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} = \left(\sqrt{1+x}-1\right)-\left(\sqrt{1-x}-1\right) \sim \frac{x}{2}-\frac{-x}{2} = x.$$

Et $e^x - 1 \sim_0 x$, donc $f_{33}(x) \to 1$.

f_{34} $\quad f_{34}(x) = \dfrac{\sin(x^2 \ln x)}{x}$.

Domaine : $\mathbb{R}_+^*$.

En 0^+ : $x^2 \ln x \to 0$ et $\sin u \sim_0 u$, donc $f_{34}(x) \sim \dfrac{x^2 \ln x}{x} = x \ln x \to 0$.

En $+\infty$: $|\sin(\cdot)| \leq 1$ donc $|f_{34}(x)| \leq \dfrac{1}{x} \to 0$.

f_{35} $\quad f_{35}(x) = \dfrac{x}{x-1}\sin(2x^2)$.

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

En $1^{\pm}$: $\sin(2x^2) \to \sin 2 \neq 0$ et $\dfrac{x}{x-1} \to \pm\infty$, donc $\lim_{x\to 1^-} f_{35}(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1^+} f_{35}(x) = +\infty$ (car $\sin 2 > 0$).

En $\pm\infty$: $\dfrac{x}{x-1} \to 1$ mais $\sin(2x^2)$ oscille, donc pas de limite.

f_{36} $\quad f_{36}(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$.

Domaine : $\{x \neq 0 : \ \cos x > 0\} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \setminus \{0\}$.

Au voisinage de 0 : $\cos x \to 1$ et $\ln(1+u) \sim_0 u$ avec $u = \cos x - 1$. Or $1-\cos x \sim_0 \dfrac{x^2}{2}$ donc $\cos x - 1 \sim_0 -\dfrac{x^2}{2}$, d'où

$$\ln(\cos x) = \ln(1+(\cos x - 1)) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2},$$

et ainsi $f_{36}(x) \sim -\dfrac{x}{2} \to 0$.

f_{37} $\quad f_{37}(x) = \dfrac{\cos x - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2 x}$.

Domaine : $\{x : \ \sin x \neq 0 \text{ et } \cos(2x) \geq 0\}$.

Au voisinage de 0 : $1-\cos x \sim_0 \dfrac{x^2}{2}$ et $\sin x \sim_0 x$.

De plus, avec l'équivalent usuel $1-\sqrt{1-v} \sim_0 \dfrac{v}{2}$ (quand $v \to 0$), et $v = 1-\cos(2x) \sim_0 2x^2$, on obtient

$$1-\sqrt{\cos(2x)} = 1-\sqrt{1-(1-\cos(2x))} \sim \frac{1-\cos(2x)}{2} \sim x^2.$$

Donc $\sqrt{\cos(2x)} \sim 1-x^2$ et $\cos x \sim 1-\dfrac{x^2}{2}$, Comme $\sin^2 x \sim x^2$, on obtient

$$f_{37}(x) \to \frac{1}{2}.$$

f_{38} $\quad f_{38}(x) = (e^x + x)^{1/x}$.

Domaine : $\{x \neq 0 : \ e^x + x > 0\} = (\gamma, 0) \cup (0, +\infty)$ où γ est l'unique solution de $e^x + x = 0$ (avec $\gamma < 0$).

En 0 : poser $g(x) = f_{38}(x)$, alors $\ln g(x) = \dfrac{1}{x}\ln(e^x + x)$.

Or $e^x - 1 \sim_0 x$, donc $e^x = 1 + x + o(x)$ au sens des équivalents usuels, et ainsi $e^x + x = 1 + 2x + o(x)$; puis $\ln(1+u) \sim_0 u$ donne $\ln(e^x + x) \sim 2x$.
Donc $\ln g(x) \to 2$ et $g(x) \to e^2$.
<u>En $+\infty$:</u> $e^x + x \sim e^x$, donc $f_{38}(x) \sim (e^x)^{1/x} = e$.
<u>En γ^+ :</u> $e^x + x \to 0^+$ et $\dfrac{1}{x} \to \dfrac{1}{\gamma} < 0$, donc $(e^x + x)^{1/x} \to +\infty$.

f_{39} $f_{39}(x) = \dfrac{e^{x^2} - e^{ax}}{x - a}$.
Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
<u>En a :</u> c'est un taux d'accroissement de $\varphi(x) = e^{x^2} - e^{ax}$, donc

$$\lim_{x \to a} f_{39}(x) = \varphi'(a) = 2a\, e^{a^2} - a\, e^{a^2} = ae^{a^2}.$$

<u>En $+\infty$:</u> e^{x^2} domine e^{ax}, donc $f_{39}(x) \sim \dfrac{e^{x^2}}{x} \to +\infty$.
<u>En $-\infty$:</u> $f_{39}(x) \sim \dfrac{e^{x^2}}{x} \to -\infty$.

f_{40} $f_{40}(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.
Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
<u>En 0 :</u> $1 - \cos x \sim_0 \dfrac{x^2}{2}$, donc

$$f_{40}(x) = -\frac{1 - \cos x}{x^2} \to -\frac{1}{2}.$$

<u>En $\pm\infty$:</u> $|\cos x - 1| \leq 2$, donc $|f_{40}(x)| \leq \dfrac{2}{x^2} \to 0$.