Fiche Chapitre 4 - Nombres Complexes

Définition 1. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres :

$$\mathbb{C} := \{x + iy \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

où i est un élément vérifiant $i^2 = -1$.

Définition 2. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On note

$$\mathfrak{Re}(z) = x \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(z) = y$$

On appelle respectivement ces nombres, **partie réelle** et **partie imaginaire** de z.

Définition 3. Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe. On définit le conjugué de z par :

$$\overline{z} = x - iy.$$

Proposition 1.

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z + \lambda z'} = \overline{z} + \overline{\lambda z'}, \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

Proposition 2.

$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

Définition 4. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit le module de z par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposition 3. $\forall z, z' \in \mathbb{C}^2$, $|zz'| = |z||z'|$ et pour $z' \neq 0$: $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Proposition 4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z\overline{z} = |z|^2 \quad \text{et} \quad |\overline{z}| = |z|.$$

Proposition 5. Inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'| \leq |z| + |z'|.$$

Définition 5. Pour nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}$, on définit son argument comme l'argument de $\frac{z}{|z|}$.

Proposition 6. Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument.

Définition 6. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on note

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Proposition 7.

1. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},\ e^{i\theta + 2k\pi} = e^{i\theta}$
2. $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}^2,\ e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$
3. $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
4. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
5. $\forall \theta \in \mathbb{R},,\ |e^{i\theta}| = 1$

Définition 7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on pose :

$$e^{\lambda + i\theta} = e^{\lambda}e^{i\theta}.$$

Proposition 8. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ on a

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(e^z)^n = e^{zn}.$$

Théorème 9. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \rho e^{i\theta}$$

avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. Cette écriture s'appelle la forme exponentielle de z.

Proposition 10. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}^*$:

$$\arg(zz') = \arg(z) + arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - arg(z') \quad [2\pi]$$

Théorème 11. Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ un polynome de degré 2 (ie $a \neq 0$) à coefficients réels. P posséde 2 racines (avec multiplicité) dans $\mathbb{C}$. Plus précisément on a la trichotomie suivante, selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

— Si $\underline{\Delta > 0}$ Alors P admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\underline{\Delta = 0}$ Alors P admet une racine réelle (double)

$$r = \frac{-b}{2a}$$

— Si $\underline{\Delta < 0}$ Alors P admet deux racines complexes distinctes :

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Théorème 12 (D'alembert Gauss)**.** Soit P un polynôme de degré n à coefficients complexes. Alors P admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (compter avec multiplicité).

En particulier, tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Proposition 13. $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta) = \mathfrak{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \mathfrak{Im}(e^{i\theta}).$$

Proposition 14 (Formule d'Euler)**.** $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}).$$

Angle moitié $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ simplifier l'expression $\frac{1-e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$

Proposition 15 (Formule de Moivre)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(\theta)$$

Linéarisation La formule de Moivre permet de *linéariser* les formules avec sin et cos, c'est-à-dire passer de $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$ à une somme contenant que des termes de la forme $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.

- On utilise la formule d'Euler :

$$\cos^p(\theta)\sin^q(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^p \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^a.$$

- On développe avec la formule du binôme de Newton.
- On rassemble les termes de même exposant pour retrouver des sin et cos.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^5(\theta)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^2(\theta)\cos^3(\theta)$.

Délinéarisation Si on cherche à faire l'opération inverse, passer d'une formule avec des somme de $sin(n\theta)$ et $\cos(n\theta)$ a des produits. (C'est plus rare de vouloir faire ca)

. 1 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

I Racine n-eme de l'unité (Hors Programme)

Hors programme mais tellement classique.

Définition 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité, tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^n = 1.$$

Exemples

1. Les racines secondes de 1 sont les nombres $z = 1$ et $z = -1$.
2. Les racines troisièmes de 1 sont les nombres $z = 1$ et $z = j$ et $z = j^2$.

Théorème 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité. Elles sont données par

$$U_n = \{\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

Démonstration. □

Pour tout $n \geq 2$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \xi_k = (-1)^{n-1}.$$