Correction - DS1

Exercice 1. A l'aide d'une étude de fonction montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \geq x + 1$$

Correction 1. On considère la fonction $D(x) = e^x - x - 1$. D est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$D'(x) = e^x - 1$$

Ainsi $D'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$ on a ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$D'(x)$		$-$	0	$+$	
$D(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $D(x) \geq D(0) \geq 0$, autrement dit

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} : e^x \geq x + 1}$$

Exercice 2. On considère les deux propositions suivantes :

$$P_1(f) : \text{"}\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x > A,\ f(x) \leq f(A)\text{"}$$

$$P_2(f) : \text{"}\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\text{"}$$

1. Donner les négations de ces propriétés.
2. Dire si ces propositions ou leur négation sont vraies pour les fonctions suivantes :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right. , \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - 1 \end{array} \right. , \quad h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - x^2 \end{array} \right.$$

   On justifiera en donnant une valeur pour les variables quantifiées par le quantificateur $\exists$.

Correction 2.

1. On obtient les négations suivantes :

$$NON(P_1(f)) : \text{"}\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x > A\ f(x) > f(A)\text{"}$$

$$NON(P_2(f)) : \text{"}\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \neq f(x)\text{"}$$

2.
   — $P_1(f)$ est vraie. N'importe quelle valeur de A convient. $A = 28$ par exemple.
   — $NON(P_1(g))$ est vraie. N'importe quelle valeur de $x > A$ fonctionne $x = A+1$ par exemple.
   — $P_1(h)$ est vraie. Il suffit de prendre A tel que la fonction h soit décroissante à partir de A. Par exemple, $A = 0$
   — $NON(P_2(f))$ est vraie. IL suffit de prendre $y \neq 1$, $y = 23$ par exemple.
   — $P_2(g))$ est vraie. Il faut prendre $x = y + 1$.

— $NON(P_2(h))$ est vraie. Il suffit de prendre $y > 1$, par exemple $y = 2$.

Exercice 3. On souhaite résoudre l'équation suivante :

$$(E) \quad : \quad e^{2x} - 2e^{x} + 2e^{-x} \geq 1$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. On pose $X = e^x$. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si X est strictement positif et solution de
$$(E') \quad : \quad X^3 - 2X^2 - X + 2 \geq 0$$
2. Montrer que 1 est racine de $X^3 - 2X^2 - X + 2$.
3. Résoudre (E')
4. En déduire les solutions de (E)

Correction 3.

1. Remarquons que $X = e^x$ implique de X est positif. De plus
$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E) &\iff e^{2x} - 2e^{x} + 2e^{-x} \geq 1 \\ &\iff X^2 - 2X + \frac{2}{X} \geq 1 \\ &\iff X^3 - 2X^2 - X + 2 \geq 0 \quad \text{car } X \text{ est positif} \\ &\iff \ X \text{ solution de } (E') \end{aligned}$$
On obtient bien l'équivalence demandée.
2. Le calcul donne $1^3 - 2 * 1 - 1 + 2 = 0$, donc
$$\boxed{1 \text{ est racine de } X^3 - 2X^2 - X + 2}$$
3. D'après la question précédente on peut factoriser $X^3 - 2X^2 - X + 2$ par $(X - 1)$. On obtient
$$X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X - 1)(X^2 - X - 2)$$
$(X^2 - X - 2)$ admet -1 et 2 comme racines donc
$$X^3 + 3X^2 - 4 = (X - 1)(X - 2)(X + 1)$$
Ainsi
$$(E') \iff (X - 1)(X - 2)(X + 1) \geq 0$$
Les solutions de (E') sont donc
$$\boxed{\mathcal{S}' = [-1, 1] \cup [2, +\infty[}$$
4. x est donc solution de (E) si et seulement si
$$e^x \in [-1, 1] \cup [2, +\infty[$$
Comme e^x est positif, on a $e^x \in]0, 1] \cup [2, +\infty[$ Les solutions de (E) sont donc
$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, 0] \cup [\ln(2), +\infty[}$$

Exercice 4. On note $\Delta(m) = m^2 - 8m + 12$.

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue m :
$$\Delta(m) > 0 \tag{I_1}$$
2. On note $r_+(m) = \frac{m+\sqrt{\Delta(m)}}{4}$ et $r_-(m) = \frac{m-\sqrt{\Delta(m)}}{4}$.
Quel est le domaine de définition de r_+ et r_- ?
3. Résoudre
$$r_+(m) \geq 1 \quad \text{et} \quad r_-(m) \geq 1.$$
4. Résoudre l'inéquation d'inconnue y et de paramétre $m \in \mathbb{R}$
$$\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} \geq m \tag{$I_2(m)$}$$

Correction 4.

1. Le discriminant réduit de $\Delta(m)$ vaut $\delta(m) = 16 - 12 = 4$. Les racines de $\delta(m)$ valent donc $m_1 = 4 - 2 = 2$ et $m_2 = 4 + 2 = 6$. Donc $\Delta(m) = (m-2)(m-6)$ et les solutions de $\Delta(m) > 0$ sont
$$\mathcal{S} =]-\infty, 2[\cup]6, +\infty[.$$
2. Les expressions $r_+(m)$ et $r_-(m)$ sont définies pour $\Delta(m) \geq 0$ soit $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$.
3. Résolvons $r_+(m) \geq 1$ pour $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$.
$$\begin{aligned} & \frac{m+\sqrt{\Delta(m)}}{4} \geq 1 \\ \iff \quad & m + \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 \\ \iff \quad & \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 - m \end{aligned}$$

Si $\underline{(4-m) < 0}$, m est solution car $\sqrt{\Delta(m)} \geq 0$.

Si $\underline{(4-m) \geq 0}$, l'équation $r_+(m) \geq 1$ est équivalente à
$$\begin{aligned} & \Delta(m) \geq (4-m)^2 \\ \iff \quad & m^2 - 8m + 12 \geq m^2 - 8m + 16 \\ \iff \quad & 0 \geq 4 \end{aligned}$$

Donc pour tout $m \leq 4$, m n'est pas solution.

$$\boxed{\text{Finalement, les solutions de } r_+(m) \geq 1 \text{ sont } \mathcal{S}_+ =]-\infty, 2].}$$

Résolvons $r_-(m) \geq 1$ pour $m \in]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$.
$$\begin{aligned} & \frac{m-\sqrt{\Delta(m)}}{4} \geq 1 \\ \iff \quad & m - \sqrt{\Delta(m)} \geq 4 \\ \iff \quad & m - 4 \geq \sqrt{\Delta(m)} \end{aligned}$$

Si $\underline{(m-4) < 0}$, m n'est pas solution car $\sqrt{\Delta(m)} \geq 0$.

Si $\underline{(m-4) \geq 0}$, l'équation $r_-(m) \geq 1$ est équivalente à

$$\begin{aligned} & (m-4)^2 \geq \Delta(m) \\ \iff \quad & m^2 - 8m + 16 \geq m^2 - 8m + 12 \\ \iff \quad & 4 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $m \geq 4$, m est solution.

$$\boxed{\text{Finalement, les solutions de } r_-(m) \geq 1 \text{ sont } \mathcal{S}_- = [6, +\infty[.}$$

4. L'ensemble de définition de $\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1}$ est $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On va résoudre

$$\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} \geq m \qquad (I_2(m))$$

en fonction de $m \in \mathbb{R}$.

Pour tout $y \in D_1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} - \frac{m(y-1)}{y-1} &\geq 0 \\ \frac{2y^2 - \frac{3}{2} - m(y-1)}{y-1} &\geq 0 \\ \frac{2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)}{y-1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $2y^2 - my + (\frac{3}{2} + m)$ vaut

$$m^2 - 4(2)(-\frac{3}{2} + m) = m^2 - 8m + 12.$$

On reconnait l'expression de $\Delta(m)$.
$\underline{\text{Cas } \Delta(m) > 0}$
D'après la question 1, $\Delta(m) > 0$ pour $m \in]-\infty, 2[\cup]6, +\infty[$. Sur cet ensemble le polynôme $2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)$ admet deux racines, $r_-(m)$ et $r_+(m)$. Donc

$$2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m) = 2(y - r_-(m))(y - r_+(m)).$$

Pour $m > 6$, d'après la question 2, on a :

$$r_+(m) \geq r_-(m) \geq 1$$

On note $q(y) = 2y^2 - my + (-\frac{3}{2} + m)$

y	$-\infty$		1		$r_-(m)$		$r_+(m)$		$+\infty$
$q(y)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{q(y)}{y-1}$		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'équation $I_2(m)$ pour $m > 6$,

$$\boxed{S =]1, r_-(m)] \cup [r_+(m), +\infty[}$$

Pour $m < 2$, d'après la question 2, on a :

$$1 \geq r_+(m) \geq r_-(m)$$

y	$-\infty$		$r_-(m)$		$r_+(m)$		1		$+\infty$
$q(y)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$y-1$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$\frac{q(y)}{y-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	

Les solutions de l'équation $I_2(m)$ pour $m < 2$ sont

$$\boxed{S = [r_-(m), r_+(m)] \cup]1, +\infty[.}$$

Cas $\Delta(m) = 0$ c'est-à-dire $m \in 2, 6$.
Pour $m = 2$, on a $r_+(2) = r_-(2) = \frac{1}{2}$ et

$$2y^2 - 2y + (-\frac{3}{2} + 2) = 2(y - \frac{1}{2})^2$$

et les solutions de $I_2(m)$ sont donc

$$\boxed{S = \{\tfrac{1}{2}\} \cup]1, +\infty[.}$$

Pour $m = 6$, on a $r_+(6) = r_-(6) = \frac{3}{2}$ et

$$2y^2 - 6y + (-\frac{3}{2} + 6) = 2(y - \frac{3}{2})^2$$

et les solutions de I_2 sont donc

$$\boxed{S =]1, +\infty[.}$$

Cas $\Delta(m) < 0$ c'est-à-dire $m \in]2, 6[$.
Le polynome q n'a pas de racine réelle. Il est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$. Les solutions de $I_4(m)$ sont donc

$$\boxed{S =]1, +\infty[.}$$

Exercice 5. On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$. On rappelle que pour tout réel y on note $\sqrt[3]{y}$ l'unique solution de l'équation $x^3 = y$ d'inconnue x.

Le but de l'exercice est de donner des expressions simplifiées de α et β.

1. (a) Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
   (b) Vérifier que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
   (c) En déduire que $(\alpha + \beta)^3 = 4 - 3(\alpha + \beta)$

2. On pose $u = \alpha + \beta$ et on considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + 3x - 4$.
   (a) A l'aide de la question précédente montrer que u est une racine de P.
   (b) Trouver une autre racine « évidente » de P.
   (c) Trouver trois nombres réels a, b, et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
   (d) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (e) En déduire la valeur de u.
3. On considère la fonction polynomiale $Q : x \mapsto Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$
   (a) A l'aide des questions précédentes, développer et simplifier $Q(x)$ pour tout nombre réel x.
   (b) En déduire des expressions plus simples de α et β.

Correction 5.

1. (a)

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \\ &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}} \\ &= \sqrt[3]{4-5} \\ &= \sqrt[3]{-1} \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha\beta = -1 \text{ et } \alpha^3 + \beta^3 = 4}$$

   (b)

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.}$$

   (c)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ &= \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 4 - 3\alpha\beta\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}P(u) &= P(\alpha+\beta) \\ &= (\alpha+\beta)^3 + 3\alpha\beta - 4 \\ &= 0 \quad \text{d'après la question précédente}\end{aligned}$$

$$\boxed{u \text{ est racine de } P}$$

3. 1 est aussi racine de P, en effet : $P(1) = 1 + 3 - 4 = 0$

$$\boxed{\text{1 est racine de } P}$$

4. Développons $(x-1)(ax^2+bx+c)$ on obtient

$$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

En identifiant avec P, on a : $a = 1, b - a = 0, c - b = 3, -c = -4$ c'est à dire

$$\boxed{a = 1,\ b = 1 \text{ et } c = 4}$$

5. D'après la question précédente $P(x) = (x-1)(x^2+x+4)$ Le discriminant de x^2+x+4 est $\Delta = 1 - 4 * 4 = -15 < 0$ $x^2 + x + 4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $P(x) = 0$ admet pour unique solution

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$$

6. 1 est racine de P, c'est la seule. Comme u est aussi racine,

$$\boxed{u = 1}$$

7. (a) Développons Q :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-\alpha)(x-\beta) \\ &= x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta \\ &= x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ Q(x) = x^2 - x - 1}$$

(b) L'expression $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ montre que les racines de Q sont α et β.
D'autre part, on connait une autre expression des racines de Q à l'aide du discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, les racines de Q sont

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Remarquons que $r_1 < r_2$ et on a $\alpha < \beta$ donc

$$\boxed{\alpha = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$