

Programme de colle : Semaine 16

Lundi 26 Janvier

1 Cours

1. Limites et continuité.

- (a) Définition des limites ($a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) avec les quantificateurs. J'ai pris comme définition de la limite une limite épointée :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \setminus \{x_0\} \cap D_f, \quad |f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

- (b) limites à gauche limites à droites.
- (c) Taux d'accroissement et limites usuelles
- (d) Croissances comparées
- (e) Notation $f(x) = o(g(x))$ et $f(x) \sim g(x)$
- (f) Règles de calcul sur les équivalents.
- (g) Définition de la continuité, continuité à gauche à droite en un point.
- (h) Définition de la continuité sur un intervalle de \mathbb{R} .
- (i) Définition de la fonction partie entière
- (j) Fonction continues, limites et suites (théorèmes de compositions)
- (k) Théorème : TVI, bijection.
- (l) Théorème : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

2. Dérivabilité

- Dérivabilité en un point.
- Équation de la tangente

3. Python :

- (a) Instructions conditionnelles (if/else)
- (b) Fonctions
- (c) Boucles `for`, `while`
- (d) Listes
- (e) Chaînes de caractères.

2 Exercices Types

Exercice 1. Donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition et un équivalent simple

$$f_1(x) = \frac{\cos(1/x)}{x}$$

$$f_7(x) = \frac{x+1}{2x}$$

$$f_{13}(x) = \ln(2^x + x)$$

$$f_2(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$f_8(x) = \frac{3^x - 4^x}{3^x + 4^x}$$

$$f_{14}(x) = x^{1/x}$$

$$f_3(x) = \ln(x+1) - \ln(x^2)$$

$$f_9(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$f_{15}(x) = (\ln x)^x$$

$$f_4(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$$

$$f_{10}(x) = \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x)}{x}$$

$$f_{16}(x) = \frac{x^3 + 2^x}{3^x}$$

$$f_5(x) = \frac{2^x + x}{2^x}$$

$$f_{11}(x) = x^2 - x \cos x + 2$$

$$f_{17}(x) = (x^2 + x + 1)^{1/x}$$

$$f_6(x) = \frac{x + (-1)^x}{x - \ln(x^3)}$$

$$f_{12}(x) = \frac{\ln(x^2 + x - 2)}{x - 1}$$

$$f_{19}(x) = x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 \right)$$

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ?

$$1. \ f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$2. \ f(x) = \frac{|x| \ln(1+x)}{e^{2x^2} - 1}.$$

$$3. \ f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1).$$

$$4. \ f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$

$$5. \ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

$$6. \ f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}}$$

$$7. \ f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$8. \ f(x) = \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{|x|}$$

$$9. \ f(x) = x \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$$

$$10. \ f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$11. \ f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$$

$$12. \ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

$$13. \ f(x) = x^x$$

Informatique :

1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste et retourne l'indice du maximum de cette liste.

2. Un polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est encodé en python par une liste à trois éléments $L = [c, b, a]$.

Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste à trois éléments correspondant à un polynôme du second degré et retourne le nombre de racine réelle de ce polynôme.