# TD 16 : Intégrale et calcul de primitive

## Entrainements

**Exercice 1.** Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \mapsto \cos(3x)$
2. $x \mapsto \cos^3(x)$
3. $x \mapsto \cos(x)\sin^4(x)$
4. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
5. $x \mapsto \tan(x)$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
7. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$
9. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
10. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$
11. $x \mapsto \dfrac{5x-12}{x(x-4)}$

**Correction 1.** On rappelle que les primitives sont toutes définies à une constante près. Ici je ne fais pas apparaître les constantes que je prends toujours égales à 0.

1. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \cos(3x)}$ :**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\boxed{F(x) = \frac{\sin(3x)}{3}}$$
Rqe : primitive usuelle
2. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \cos^3(x)}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\boxed{F(x) = \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3}{4}\sin x = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}}$$
Rqe : Linéarisation ou utilisation du fait que la puissance est impaire pour faire apparaître la forme $u'u^2$.
3. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \cos(x)\sin^4(x)}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\boxed{F(x) = \frac{\sin^5(x)}{5}}$$
Rqe : Reconnaître la forme $u'u^4$.
4. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Il existe donc par exemple $F$ une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (par exemple) :
$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\cos x}}$$
Rqe : on reconnaît une primitive de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$.

5. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x} \mapsto \tan(\mathbf{x}) = \dfrac{\sin \mathbf{x}}{\cos \mathbf{x}}$**

   La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Il existe donc par exemple $F$ une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (par exemple) :

$$\boxed{F(x) = -\ln|\cos x| = -\ln(\cos x)}$$

   Rqe : on reconnaît une primitive de la forme $-\dfrac{u'}{u}$.

6. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}\ln(\mathbf{x})}$**

   La fonction est continue sur $\mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\}$. Il existe donc $F$ une primitive sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in ]1,+\infty[$ (par exemple) :

$$\boxed{F(x) = \ln|\ln x| = \ln(\ln x)}$$

   Rqe : on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{u'}{u}$.

7. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x^2+1}}}$**

   La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2 > 0$. Il existe donc $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{F(x) = \sqrt{1+x^2}}$$

   Rqe : on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

8. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{e^x+1}}$**

   La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes strictements positifs. Il existe donc $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{F(x) = x - \ln|e^x+1| = x - \ln(e^x+1)}$$

   Rqe : On utilise l'astuce $+e^x - e^x$ puis on coupe en deux et on reconnaît sur l'un des deux bouts : $\dfrac{u'}{u}$.

9. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{x-1}}}$**

   La fonction est continue sur $]1,+\infty[$. Il existe donc $F$ une primitive sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in ]1,+\infty[$ :

$$\boxed{F(x) = 2\sqrt{x-1}}$$

   Rqe : on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

10. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x^2+2x-3}}$**

   La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3,1\}$. Il existe donc par exemple $F$ une primitive sur $]-3,1[$ et pour tout $x \in ]-3,1[$ (par exemple) :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x-3| = -\ln(-x^2-2x+3)}$$

   Rqe : on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$.

11. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \dfrac{5x-12}{x(x-4)}}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0,4\}$. Il existe donc $F$ une primitive sur par exemple $]-\infty,0[$ et pour tout $x\in\,]-\infty,0[$ :
$$\boxed{F(x)=3\ln|x|+2\ln|x-4|=3\ln(-x)+2\ln(4-x)}$$
Rqe : on commence par chercher $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\dfrac{5x-12}{x(x-4)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-4}$.

**Exercice 2.** Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$
2. $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+16}$
3. $x\mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
4. $x\mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$
5. $x\mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$
6. $x\mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}$

**Correction 2.**

1. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ :
$$\boxed{F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}$$
: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ en mettant le 3 en facteur au dénominateur.
2. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \dfrac{1}{x^2+16}}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ :
$$\boxed{F(x)=\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}\right)}$$
: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ après avoir mis 16 en facteur au dénominateur.
3. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas comme somme de deux termes strictement positifs. Il existe donc $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ :
$$\boxed{F(x)=\arctan(e^x)}$$
: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$.
4. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ :
$$\boxed{F(x)=\arctan(\sin x)}$$
: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$.

5. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}}$**
La fonction est continue sur $]0,+\infty[$. Il existe donc $F$ une primitive sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in ]0,+\infty[$ :
$$\boxed{F(x) = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)}$$
: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ en écrivant que : $x = (\sqrt{x})^2$ et en remarquant que la dérivée de la racine carrée est bien $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}}$**
La fonction est continue sur $]-\infty, 2\ln 2[$ car : $4 - e^x > 0 \Leftrightarrow 2\ln 2 > x$. Il existe donc $F$ une primitive sur $]-\infty, 2\ln 2[$ et pour tout $x \in ]-\infty, 2\ln 2[$ :
$$\boxed{F(x) = -2\sqrt{4-e^x}}$$
: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

**Exercice 3.** Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \mapsto x^3\cos(6x)$
2. $x \mapsto x\cos^2(x)$
3. $x \mapsto \arctan(x)$
4. $x \mapsto x^2e^{-x}$
5. $x \mapsto x^3e^{-x^2}$

**Correction 3.** Dans tous ces exemples, on ne peut pas calculer directement une primitive... L'idée alors d'exprimer cette primitive sous la forme d'une intégrale pour pouvoir la calculer plus facilement.

1. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto x^3\cos(6x)}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\boxed{F(x) = \int_a^x t^3\cos(6t)dt = \frac{x^3\sin(6x)}{6} + \frac{x^2\cos(6x)}{12} - \frac{x\sin(6x)}{36} - \frac{\cos(6x)}{6^3}}$$
Rqe : Trois IPP en dérivant le polynôme.
2. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto x\cos^2(x)}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\int_a^x t\cos(2t)dt + \frac{x^2}{4} = \frac{x\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x^2}{4}}$$
Rqe : Linéarisation du cosinus carré puis une IPP.
3. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto \arctan(x)}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\boxed{F(x) = \int_a^x \arctan(t)dt = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$
Rqe : 1 IPP en dérivant la fonction arctangente et en intégrant 1 puis on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$.
4. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x \mapsto x^2e^{-x}}$**
La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{F(x)=\int_a^x t^2e^{-t}dt=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}}$$

Rqe : 2 IPP en dérivant le polynôme.

5. **Calcul d'une primitive de : $\mathbf{x\mapsto x^3e^{-x^2}}$**
   La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $F$ une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ :
   $$\boxed{F(x)=\int_a^x t^3e^{-t^2}dt=-\frac{(x^2+1)e^{-x^2}}{2}}$$
   Rqe : 1 IPP en dérivant le polynôme $t\mapsto t^2$ et en intégrant $t\mapsto te^{-t^2}$ où on reconnaît $u'e^u$ (ici on commence par écrire que $t^3=t^2\times t$). Puis dans la nouvelle intégrale de l'IPP, on reconnaît encore la forme $u'e^u$.

**Exercice 4.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x}dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos(x)|dx$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

**Correction 4.**

1. **Calcul de l'intégrale : $\mathbf{I=\int_2^3 \frac{1}{1-x}dx}$**
   La fonction $f:x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ est continue sur $[2,3]$ comme somme et quotient de fonctions continues donc l'intégrale $I$ existe. On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$ et ainsi
   $$\boxed{I=-\ln 2}$$
   .
2. **Calcul de l'intégrale : $\mathbf{I=\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2}dx}$**
   La fonction $f:x\mapsto\dfrac{1}{(1-x)^2}$ est continue sur $[2,3]$ comme somme et quotient de fonctions continues donc l'intégrale $I$ existe. On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ et ainsi
   $$\boxed{I=\frac{1}{2}}$$
   .
3. **Calcul de l'intégrale : $\mathbf{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx}$**
   La fonction $f:x\mapsto\sin(x)\cos(x)$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale $I$ existe. On reconnaît la forme $u'u$ et ainsi
   $$\boxed{I=\frac{1}{2}}$$
   .
4. **Calcul de l'intégrale : $\mathbf{I=\int_0^{\pi} |\cos(x)|dx}$**
   La fonction $f:x\mapsto|\cos(x)|$ est continue sur $[0,\pi]$ comme composée de fonctions donc l'intégrale $I$ existe. On utilise le théorème de Chasles pour couper en deux l'intégrale et ainsi pouvoir enlever la valeur absolue. Ainsi on a :

$$\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(x)dx=2}$$

.

5. **Calcul de l'intégrale : $\mathbf{I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx}$**

   La fonction $f : x\mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc sur $[1,2]$ comme quotient de fonctions continues donc l'intégrale $I$ existe. On reconnaît la forme $u'u$ et ainsi

   $$\boxed{I=\frac{(\ln 2)^2}{2}}$$

   .

6. **Calcul de l'intégrale : $\mathbf{I=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx}$**

   La fonction $f : x\mapsto \dfrac{x^2}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues donc l'intégrale $I$ existe. On utilise alors l'astuce "$-1+1$" et on obtient que :

   $$\frac{x^2}{1+x}=\frac{x^2-1+1}{1+x}=x-1+\frac{1}{1+x}.$$

   Une primitive est alors $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|$ et donc

   $$\boxed{I=-\frac{1}{2}+\ln(2)}$$

   .

**Exercice 5.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n dx,\ n\in\mathbb{N}$
4. $\displaystyle\int_1^t x^n\ln(x)dx,\ n\in\mathbb{N},\ t>0$

**Correction 5.** Je ne donne là encore que les idées de la méthode et le résultat mais toute IPP doit être correctement rédigée, en particulier il faut à chaque fois justifier que les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$.

1. **Calcul de l'intégrale : $\mathbf{I=\int_0^{\pi} x\cos(x)dx}$**

   La fonction $f : x\mapsto x\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,\pi]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale $I$ existe. On dérive le polynôme et on obtient par IPP que :

   $$\boxed{I=-2}$$

   .

2. **Calcul de l'intégrale : $\mathbf{I=\int_0^1 xe^{2x}dx}$**

   La fonction $f : x\mapsto xe^{2x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ dont sur $[0,1]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale $I$ existe. On dérive le polynôme et on obtient par IPP que :

   $$\boxed{I=\frac{e^2+1}{4}}$$

.

3. **Calcul de l'intégrale : $\mathbf{I} = \int_0^1 \mathbf{x(1-x)^n dx}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$**

   La fonction $f : x \mapsto x(1-x)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,1]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale $I$ existe. On dérive le polynôme de degré 1 et on intègre la fonction $x \mapsto (1-x)^n$ dont une primitive est de la forme $F : x \mapsto -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$. On obtient alors par IPP :

   $$\boxed{I = 0 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}}$$

   car une primitive de $x \mapsto (1-x)^{n+1}$ est $F : x \mapsto -\dfrac{(1-x)^{n+2}}{n+2}$.

4. **Calcul de l'intégrale : $\mathbf{I} = \int_1^t \mathbf{x^n \ln(x) dx}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{t > 0}$**

   La fonction $f : x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc sur $[1,t]$ ou $[1,t]$ car $t > 0$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale $I$ existe. On dérive la fonction logarithme népérien et on intègre la fonction $x \mapsto x^n$ dont une primitive est de la forme $F : x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. On obtient alors par IPP :

   $$\boxed{I = \frac{t^{n+1}\ln t}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_1^t x^n dx = \frac{t^{n+1}\ln t}{n+1} - \frac{t^{n+1}-1}{(n+1)^2}}$$

.

**Exercice 6.** Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x) + \tan^3(x))dx \quad (u = \tan x)$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(x)\cos^2(x)dx \quad (u = \cos x)$
3. $\displaystyle\int_0^{a} \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}dt,\ a > 0 \quad (t = a\sin u)$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{2+x}}{1+x}dx \quad (x = u^2 - 2)$

**Correction 6.**

1. **Calcul de $\mathbf{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(\mathbf{x}) + \tan^{\mathbf{3}}(\mathbf{x}))\mathbf{dx}$ :**
   - Existence : la fonction $x \mapsto \tan(x) + \tan^3(x)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme composée et somme de fonctions continues. Donc $I$ existe.
   - Calcul de $I$ grâce à un changement de variable :
     - ⋆ On pose : $\left\|\begin{array}{rcl} t & = & \tan x \\ dt & = & (1+\tan^2(x))dx \\ (\tan(x)+\tan^3(x))dx & = & \tan(x)(1+\tan^2(x))dx \ = \ tdt. \end{array}\right.$
     - ⋆ On a $x = 0 \Rightarrow t = \tan(0) = 0$, et $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.
     - ⋆ On a :
       - ∘ $\varphi : x \mapsto \tan(x)$ est $C^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme fonction usuelle.
       - ∘ $f : t \mapsto t$ est continue sur $[0,1]$.

     Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{I = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}}$$

.

2. **Calcul de $\mathbf{I} = \int_0^{\pi} \sin^3(\mathbf{x})\cos^2(\mathbf{x})\mathbf{dx}$ :**
   - Existence : la fonction $x \mapsto \sin^3(x)\cos^2(x)$ est continue sur $[0,\pi]$ comme composée et produit de fonctions continues. Donc $I$ existe.
   - Calcul de $I$ grâce à un changement de variable :
     - ⋆ On pose : $\left\| \begin{array}{rcl} t &=& \cos x \\ dt &=& -\sin(x)dx \\ \sin^3(x)\cos^2(x)dx &=& -t^2(1-t^2)dt. \end{array} \right.$
     - ⋆ On a $x=0 \Rightarrow t=\cos(0)=1$, et $x=\pi \Rightarrow t=\cos(\pi)=-1$.
     - ⋆ On a :
       - ∘ $\varphi : x \mapsto \cos(x)$ est $C^1$ sur $[0,\pi]$ comme fonction usuelle.
       - ∘ $f : t \mapsto -t^2(1-t^2)$ est continue sur $[-1,1]$.

     Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{I = \int_1^{-1} -t^2(1-t^2)dt = \frac{4}{15}}$$

.

3. **Calcul de $\mathbf{I} = \int_0^{\mathbf{a}} \sqrt{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{t^2}}{\mathbf{a^2}}}\mathbf{dt}$ :**
   - Existence : la fonction $t \mapsto \sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}$ est continue sur $[0,a]$ comme quotient, somme et composée de fonctions continues. Donc $I$ existe.
   - Calcul de $I$ grâce à un changement de variable.
     - ⋆ On pose : $\left\| \begin{array}{rcl} t &=& a\sin u \ \text{ en choisissant } u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ pour avoir } t \in [0,a] \\ dt &=& a\cos(u)du \\ \sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}dt &=& a\cos u|\cos u|du \end{array} \right.$
     - ⋆ On a $t=0 \Leftrightarrow a\sin u = 0 \Leftrightarrow u=0$, et $t=a \Leftrightarrow a\sin u = a \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}$ car on a choisi $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
     - ⋆ On a :
       - ∘ $\varphi : u \mapsto a\sin(u)$ est $C^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme fonction usuelle.
       - ∘ $f : t \mapsto \sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}$ est continue sur $[0,a]$.

     Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos u|\cos u|du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2 u du = \frac{a\pi}{4}}$$

     . On a utilisé ici le fait que le cosinus est positif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a ensuite linéarisé le carré en utilisant le formulaire de trigonométrie.

4. **Calcul de $\mathbf{I} = \int_0^{\mathbf{1}} \mathbf{x^2}\sqrt{\mathbf{1}+\mathbf{x^3}}\mathbf{dx}$ :**
   - Existence : la fonction $x \mapsto x^2\sqrt{1+x^3}$ est continue sur $[0,1]$ comme composée et produit de fonctions continues. Donc $I$ existe.

- Calcul de $I$ grâce à un changement de variable :

  ⋆ On pose : $\left\| \begin{array}{rcl} t & = & 1+x^3 \\ dt & = & 2x^2dx \\ x^2\sqrt{1+x^3}dx & = & \dfrac{\sqrt{t}}{2}dt \end{array} \right.$

  ⋆ On a $x=0 \Rightarrow t=1$, et $x=1 \Rightarrow t=2$.

  ⋆ On a :
    - $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}$ est $C^1$ sur $]0,1]$ comme fonction usuelle.
    - $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{2}$ est continue sur $[1,2]$.

  Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que : $I = \int_1^2 \dfrac{\sqrt{t}}{2}dt = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$.
- On pouvait aussi reconnaître une primitive usuelle.

5. **Calcul de $\mathbf{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathbf{e^x}}{\mathbf{1+e^{2x}}}\mathbf{dx}$ :**

- Existence : la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ est continue sur $[0,1]$ comme composée, somme et produit de fonctions continues. Donc $I$ existe.
- Calcul de $I$ grâce à un changement de variable :

  ⋆ On pose : $\left\| \begin{array}{rcl} t & = & e^x \\ dt & = & e^x dx \\ \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx & = & \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right.$

  ⋆ On a $x=0 \Rightarrow t=1$, et $x=1 \Rightarrow t=e$.

  ⋆ On a :
    - $\varphi : x \mapsto e^x$ est $C^1$ sur $[0,1]$ comme fonction usuelle.
    - $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[1,e]$.

  Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

  $$\boxed{I = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(e) - \frac{\pi}{4}}$$

  .
- On pouvait aussi reconnaître une primitive usuelle.

6. **Calcul de $\mathbf{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\mathbf{2+x}}}{\mathbf{1+x}}\mathbf{dx}$ :**

- Existence : la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{2+x}}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues. Donc $I$ existe.
- Calcul de $I$ grâce à un changement de variable :

  ⋆ On pose : $\left\| \begin{array}{rcl} x & = & u^2-2 \text{ en choisissant } u \in [\sqrt{2},\sqrt{3}] \text{ pour avoir } x \in [0,1] \\ dx & = & 2udu \\ \dfrac{\sqrt{2+x}}{1+x}dx & = & \dfrac{2u|u|}{u^2-1}du = \dfrac{2u|u|}{u^2-1}du \text{ car } u \in [\sqrt{2},\sqrt{3}]. \end{array} \right.$

  ⋆ On a $x=0 \Leftrightarrow u^2-2=0 \Leftrightarrow u=\sqrt{2}$, et $x=1 \Leftrightarrow u^2-2=1 \Leftrightarrow u=\sqrt{3}$ car on a choisi $u \in [\sqrt{2},\sqrt{3}]$.

  ⋆ On a :

◦ $\varphi : u \mapsto u^2 - 1$ est $C^1$ sur $\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$ comme fonction usuelle.

◦ $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{2+x}}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.

D'après le théorème de changement de variable, on obtient que : $I = 2\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{u^2-1}du = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right.$

$$\boxed{\sqrt{3} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)}$$

.

**Exercice 7.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}dx$

**Correction 7.**

1. **Calcul de** $\mathbf{I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx}$ **:**
   - La fonction $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ (discriminant strictement négatif). Ainsi $I$ existe.
   - On reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u}$ en posant $u(x) = x^2+x+1$.
   - Calcul :
   $$\boxed{I = \left[\ln(|x^2+x+1|)\right]_0^1 = \ln(3)}$$

   .

2. **Calcul de** $\mathbf{I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1}dx}$ **:**
   - La fonction $x \mapsto \dfrac{x+3}{x^2-1}$ est continue sur $[2,3]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $[2,3]$ (les racines étant $1$ et $-1$). Ainsi $I$ existe.
   - On cherche $A$ et $B$ réels tels que : $\dfrac{x+3}{x^2-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$.
   - Calcul :
   $$\boxed{I = \left[2\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|)\right]_2^3 = \ln 3}$$

   .

3. **Calcul de** $\mathbf{I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx}$ **:**
   - La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}$ est continue sur $[0, \ln 2]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ comme somme de trois termes strictement positifs. Ainsi $I$ existe.
   - On commence par faire un changement de variable :
     ⋆ On pose : $\left\|\begin{array}{rcl} u & = & e^x \\ du & = & e^x dx \\ \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx & = & \dfrac{u}{u^2+3u+2}du. \end{array}\right.$

  - ⋆ On a $x=0 \Rightarrow u=1$, et $x=\ln 2 \Rightarrow u=2$.
  - ⋆ On a :
    - ◦ $\varphi : x \mapsto e^x$ est $C^1$ sur $[0, \ln 2]$ comme fonction usuelle.
    - ◦ $f : u \mapsto \dfrac{u}{u^2+3u+2}$ est continue sur $[1,2]$ comme quotient de fonctions polynomiales.

    Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que : $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{u}{u^2+3u+2}du$.

- Calcul de $I$ :
  - ⋆ $\Delta = 1 > 0$ et les deux racines sont : $-2$ et $-1$ et ainsi on cherche deux réels $A$ et $B$ tels que : $\dfrac{u}{u^2+3u+2} = \dfrac{A}{u+2} + \dfrac{B}{u+1}$. On obtient que : $\dfrac{u}{u^2+3u+2} = \dfrac{2}{u+2} - \dfrac{1}{u+1}$
  - ⋆ Ainsi, on a :

$$\boxed{I = 5\ln(2) - 3\ln(3)}$$

.

4. **Calcul de $\mathbf{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathbf{x}}{(\mathbf{x}+\mathbf{1})^2}\mathbf{dx}$ :**

- La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi $I$ existe bien.
- ⋆ On utilise l'astuce du $+1-1$ : $\dfrac{x}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

  ⋆ Ainsi, on a :

$$\boxed{I = \left[\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}}$$

.

**Exercice 8.**

1. Montrer que $\forall x \in [-1,1]$,
$$\frac{x+1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2} \times \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{1}{x^2+4x+5},$$
puis que
$$\frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{(x+2)^2+1}.$$
En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx$

2. Avec la même méthode, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{2x-x^2-4}dx$

**Correction 8.**

1. **Calcul de $\mathbf{I} = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathbf{x}+\mathbf{1}}{\mathbf{x}^2+\mathbf{4x}+\mathbf{5}}\mathbf{dx}$ :**

- La fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+4x+5}$ est continue sur $[-1,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas (discriminant négatif). Ainsi $I$ existe bien.
- On fait apparaître $\dfrac{u'}{u}$ :

  $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{1}{x^2+4x+5}\right)dx = \ln(\sqrt{5}) - \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+5}dx.$

- On fait apparaître la forme canonique au dénominateur :
$I = \ln(\sqrt{5}) - \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+2)^2+1}dx.$
- On fait apparaître la forme $\frac{u'}{1+u^2}$, en posant $u(x) = x+2$.
Ainsi
$$\boxed{I = \ln(\sqrt{5}) - [\arctan(x+2)]_{-1}^{1} = \ln(\sqrt{5}) + \frac{\pi}{4} - \arctan(3)}$$
.

2. **Calcul de $\mathbf{I = \int_0^2 \frac{2x+1}{2x-x^2-4}dx}$ :**
   - La fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{2x-x^2-4}$ est continue sur $[0,2]$ comme quotient de fonctions polynomiales et car $\Delta = -12 < 0$ donc le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Ainsi $I$ existe.
   - On applique alors la méthode suivante.
     - ⋆ On fait apparaître $\frac{u'}{u}$ :
     $I = \int_0^2 \left( -\frac{-2x+2}{-x^2+2x-4} + \frac{3}{-x^2+2x-4} \right) dx = 0 - 3\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x+4}dx.$
     - ⋆ On fait apparaître la forme canonique au dénominateur :
     $I = -3\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2+3}dx.$
     - ⋆ On fait apparaître la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ :
     $I = -\int_0^2 \frac{1}{(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1}dx = -\sqrt{3}\int_0^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1}dx = -\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^2$
     $$\boxed{I = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$
     .

**Exercice 9.** À l'aide du changement de variable indiqué entre parenthèses, calculer une primitive des fonctions d'une variable réelle suivantes.

1. $x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$ $\quad (u = t^2)$
2. $x \mapsto \frac{1}{2+\sqrt{x}}$ $\quad (u = 2+\sqrt{t})$
3. $x \mapsto e^{2x}\sin(e^x)$ $\quad (t = e^t)$
4. $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ $\quad (u = \sqrt{t})$
5. $x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)}$ $\quad (u = \tan(t))$
6. $x \mapsto \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}$ $\quad (u = \sqrt{\sin(t)})$
7. $x \mapsto \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ $\quad (u = e^t)$

**Correction 9.**

1. **Calcul d'une primitive de $\mathbf{f : x \mapsto \frac{x}{1+x^4}}$ :**
   - Existence : la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions continues.
   Donc il existe une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall X \in \mathbb{R},\ F(X) = \int_0^X \frac{x}{1+x^4}dx.$
   - Calcul de $F$ grâce à un changement de variable :

$\star$ On pose : $\left\|\begin{array}{rcl} u & = & x^2 \\ du & = & 2xdx \\ \dfrac{x}{1+x^4}dx & = & \dfrac{du}{2(1+u^2)}. \end{array}\right.$

$\star$ On a $x=0 \Rightarrow u=0$, et $x=X \Rightarrow u=X^2$.

$\star$ On a :

- $\circ$ $\varphi : x \mapsto x^2$ est $C^1$ sur $[0,X]$ comme fonction usuelle.
- $\circ$ $u \mapsto \dfrac{1}{2(1+u^2)}$ est continue sur $[0,X^2]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(X) = \int_0^{X^2} \frac{du}{2(1+u^2)}du = \frac{\arctan(X^2)}{2}}$$

.

2. **Calcul d'une primitive de $\mathbf{f} : \mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{x}}}$ :**

- Existence : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et quotient de fonctions continues.

  Donc il existe une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall X \in \mathbb{R}^+,\ F(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{1}{2+\sqrt{x}}dx$.
- Calcul de $F$ grâce à un changement de variable :

$\star$ On pose : $\left\|\begin{array}{rcl} u & = & 2+\sqrt{x} \\ du & = & \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \\ \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}dx & = & \dfrac{2(u-2)}{u}du. \end{array}\right.$

$\star$ On a $x=0 \Rightarrow u=2$, et $x=X \Rightarrow u=2+\sqrt{X}$.

$\star$ On a :

- $\circ$ $\varphi : x \mapsto 2+\sqrt{x}$ est $C^1$ sur $[0,X]$ comme fonction usuelle.
- $\circ$ $u \mapsto \dfrac{2(u-2)}{u}$ est continue sur $[2, 2+\sqrt{X}]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(X) = 2\int_2^{2+\sqrt{X}} \left(1-\frac{2}{u}\right)du = 2\sqrt{X} - 4\ln\left(1+\frac{\sqrt{X}}{2}\right)}$$

.

3. **Calcul d'une primitive de $\mathbf{f} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{e^{2x}}\sin(\mathbf{e^x})$ :**

- Existence : la fonction $x \mapsto e^{2x}\sin(e^x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions continues. Donc il existe une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall X \in \mathbb{R},\ F(X) = \displaystyle\int_0^X e^{2x}\sin(e^x)dx$.
- Calcul de $F$ grâce à un changement de variable :

$\star$ On pose : $\left\|\begin{array}{rcl} t & = & e^x \\ dt & = & e^x dx \\ e^{2x}\sin(e^x)dx & = & t\sin(t)du. \end{array}\right.$

$\star$ On a $x=0 \Rightarrow t=1$, et $x=X \Rightarrow t=e^X$.

$\star$ On a :

- $\circ$ $\varphi : x \mapsto e^x$ est $C^1$ sur $[0, X]$ comme fonction usuelle.
- $\circ$ $u \mapsto t\sin(t)$ est continue sur $[1, e^X]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(X) = \int_1^{e^X} u \sin u du = 2\sqrt{X} - 4\ln\left(1 + \frac{\sqrt{X}}{2}\right) = -X\cos X + \sin X + \cos(1) - \sin(1)}$$

, en faisant une IPP.

4. **Calcul d'une primitive de $\mathbf{f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}}$ :**

- Existence : la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme composée et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall X \in \mathbb{R}^+,\ F(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.$
- Calcul de $F$ grâce à un changement de variable :
  - $\star$ On pose : $\left\| \begin{array}{rcl} t &=& \sqrt{x} \\ dt &=& \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \\ \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}dx &=& \dfrac{2t^2}{1+t^2}dt. \end{array} \right.$
  - $\star$ On a $x = 0 \Rightarrow t = 0$, et $x = X \Rightarrow t = \sqrt{X}$.
  - $\star$ On a :
    - $\circ$ $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}$ est $C^1$ sur $[0, X]$ comme fonction usuelle.
    - $\circ$ $t \mapsto \dfrac{2t^2}{1+t^2}$ est continue sur $[0, \sqrt{X}]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

  Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(X) = \int_0^{\sqrt{X}} \frac{2t^2}{1+t^2} dt = 2(\sqrt{X} - \arctan(\sqrt{X}))}$$

, en utilisant l'astuce +1-1.

5. **Calcul d'une primitive de $\mathbf{f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^4(x)}}$ :**

- Existence : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^4(x)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ comme composée et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive $F$ de $f$ sur par exemple l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall X \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ F(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{1}{\cos^4(x)} dx.$
- Calcul de $F$ grâce à un changement de variable :
  - $\star$ On pose : $\left\| \begin{array}{rcl} u &=& \tan(x) \\ du &=& \dfrac{dx}{\cos^2(x)} \\ \dfrac{dx}{\cos^4(x)} &=& (1+u^2)du. \end{array} \right.$
  - $\star$ On a $x = 0 \Rightarrow u = 0$, et $x = X \Rightarrow u = \tan X$.
  - $\star$ On a :
    - $\circ$ $\varphi : x \mapsto \tan(x)$ est $C^1$ sur $[0, X]$ comme fonction usuelle.
    - $\circ$ $u \mapsto 1 + u^2$ est continue sur $[0, \tan(X)]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(X) = \int_0^{\tan(X)} (1+u^2)du = \tan(X) + \frac{1}{3}\tan^3(x)}$$

.

6. **Calcul d'une primitive de f** : $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\sqrt{\sin(\mathbf{x})}}{\cos(\mathbf{x})}$ **:**

   - Existence : la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}$ est continue sur par exemple $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme composée et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive $F$ de $f$ sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall X \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ F(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}dx$.
   - Calcul de $F$ grâce à un changement de variable :
     - ⋆ On pose : $$\left\|\begin{array}{rcl} t &=& \sqrt{\sin(x)} \\ dt &=& \dfrac{\cos(x)dx}{\sqrt{\sin(x)}} \\ \dfrac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}dx &=& \dfrac{2t^2}{1-t^4}dt. \end{array}\right.$$
     - ⋆ On a $x = 0 \Rightarrow t = 0$, et $x = X \Rightarrow t = \sqrt{\sin(X)}$.
     - ⋆ On a :
       - ∘ $\varphi : x \mapsto \sqrt{\sin(x)}$ est $C^1$ sur $[0, X]$ comme fonction usuelle.
       - ∘ $t \mapsto \dfrac{2t^2}{1-t^4}$ est continue sur $[0, \sqrt{\sin(X)}]$.

     Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

     $$\boxed{F(X) = \int_0^{\sqrt{\sin(X)}} \frac{2t^2}{1-t^4}dt = -\arctan(\sqrt{\sin x}) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{\sin(x)}}{1+\sqrt{\sin(x)}}\right),}$$

     en écrivant que $\dfrac{2t^2}{1-t^4} = \dfrac{A}{1-t^2} + \dfrac{B}{1+t^2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-t^2} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+t^2}$ puis en écrivant encore $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{C}{1-t} + \dfrac{D}{1+t}$.

7. **Calcul d'une primitive de f** : $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{e^x + e^{-x}}}$ **:**

   - Existence : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall X \in \mathbb{R},\ F(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx$.
   - Calcul de $F$ grâce à un changement de variable :
     - ⋆ On pose : $$\left\|\begin{array}{rcl} y &=& e^x \\ dy &=& e^x dx \\ \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}dx &=& \dfrac{dy}{1+y^2}. \end{array}\right.$$
     - ⋆ On a $x = 0 \Rightarrow y = 1$, et $x = X \Rightarrow y = e^X$.
     - ⋆ On a :
       - ∘ $\varphi : x \mapsto e^x$ est $C^1$ sur $[0, X]$ comme fonction usuelle.
       - ∘ $y \mapsto \dfrac{1}{1+y^2}$ est continue sur $[1, e^X]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(X) = \int_1^{e^X} \frac{dy}{1+y^2} = \arctan\left(e^X\right) - \frac{\pi}{4}}$$

.

**Exercice 10.**

1. Soit $f$ continue sur $[a, b]$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.
2. Application au calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

**Correction 10.**

1. **Soit f continue sur $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Montrer que : $\displaystyle\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(a+b-x)dx}$.**
   - La fonction $f$ est continue sur $[a, b]$ par hypothèse et ainsi les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(a+b-x)$ sont elles aussi continues sur $[a, b]$ comme composée de fonctions continues pour la deuxième. Ainsi les deux intégrales existent bien.
   - Partons par exemple de $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)dx$ et vérifions en faisant un changement de variable que cette intégrale vaut bien $\displaystyle\int_a^b f(y)dy$.
     - ⋆ On pose : $\left\|\begin{array}{rcl} y &=& a+b-x \\ dy &=& -dx \\ f(a+b-x)dx &=& -f(y)dy. \end{array}\right.$
     - ⋆ On a $x = a \Rightarrow y = b$, et $x = b \Rightarrow y = a$.
     - ⋆ On a :
       - ∘ $\varphi : x \mapsto a+b-x$ est $C^1$ sur $[a, b]$ comme fonction usuelle.
       - ∘ $y \mapsto -f(y)$ est continue sur $[a, b]$ par hypothèse.

       Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

       $$\boxed{\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_b^a -f(y)dy = \int_a^b f(y)dy}$$

       . On obtient bien le résultat cherché.
2. **Application au calcul de $\displaystyle\int_{\mathbf{0}}^{\pi} \frac{\mathbf{x}\sin\mathbf{x}}{\mathbf{1}+\cos^{\mathbf{2}}\mathbf{x}}\mathbf{dx}$ :**

   La fonction $x \mapsto \dfrac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ est bien continue sur $[0, \pi]$ comme composée, somme, produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ existe bien et on est bien sous l'hypothèse du résultat de la question précédente. Ainsi, on obtient en utilisant la question précédente que :

   $$I = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx - I$$

   en utilisant le cercle trigonométrique. Ainsi, on a : $2I = \pi\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$ et on reconnaît alors une primitive usuelle et on obtient donc : $2I = -\pi\left[\arctan(\cos(x))\right]_0^\pi = \dfrac{\pi^2}{2}$. Ainsi, on vient de montrer que

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{4}}$$

.

**Exercice 11.** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ quand :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$
2. $S_n = \displaystyle\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
3. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$
4. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
5. $S_n = \displaystyle\left(\frac{(2n)!}{n!\times n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$
6. $S_n = \displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{\frac{1}{2n}}$

**Correction 11.**

1. 
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on a : $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$.
   - On pose alors $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1+x^2}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :
   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx.$$
   Pour calculer l'intégrale, on utilise la méthode lorsque l'on a un polynôme de degré sur un polynôme de degré 2 qui est ici de discriminant strictement négatif et on obtient que :
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}}$$
   .
2. 
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on a : $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$.
   - On pose alors $f : x\mapsto \sqrt{x}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}.$$
3. 
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on a : $S_n = \displaystyle\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{n}}$. On pose alors pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ : $T_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^3}}$.
   - On pose alors $f : x\mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :
   $$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^1 f(x)dx.$$
   Pour calculer l'intégrale, on reconnaît une primitive usuelle et ainsi on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$.
   - Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ : $S_n = \dfrac{T_n}{\sqrt{n}}$, on a par propriété sur le quotient de limite que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 0}$$

.

4. - Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
   - On pose alors $f : x \mapsto x\sin(\pi x)$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :
   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx.$$
   Pour calculer l'intégrale, on utilise une IPP et on obtient que :
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\pi}}$$
   .

5. - On commence par transformer l'expression. Il faut donc transformer un produit en somme et ainsi une idée assez classique est de poser pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ : $t_n = \ln(w_n)$ : le passage au logarithme népérien permet de transformer un produit en somme.
   On obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ : $t_n = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right) = \dfrac{1}{n}\ln\left(\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n}\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(\dfrac{k}{n})$. On fait alors un changement de variable pour se ramener à une somme de 1 à $n$ qui va nous permettre ainsi d'appliquer le théorème de Riemann à la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. On pose ainsi $j = k-n$ et on obtient que : $t_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\ln(\dfrac{j+n}{n}) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.
   - On pose alors $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :
   $$\lim_{n\to+\infty} t_n = \int_0^1 f(x)dx = 2\ln 2 - 1.$$
   - Comme on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $t_n = \ln(w_n) \Leftrightarrow w_n = e^{t_n}$, on obtient par propriété sur la composition de limite que :
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}}$$
   .

6. - On commence par transformer l'expression. Il faut donc transformer un produit en somme et ainsi une idée assez classique est de poser pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ : $T_n = \ln(S_n)$ : le passage au logarithme népérien permet de transformer un produit en somme.
   On obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ : $T_n = \dfrac{1}{2n}\ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+n)\right) = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(k+n) = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\dfrac{k}{n}) + \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(n) = \dfrac{\ln n}{2} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{2}$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ : $V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{2}$ et on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $T_n = \dfrac{\ln n}{2} + V_n$. On peut alors appliquer le théorème de Riemann à la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
   - On pose alors $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{2}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de Riemann, on a :
   $$\lim_{n\to+\infty} V_n = \int_0^1 f(x)dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$$
   en utilisant la primitive de la fonction logarithme népérien.

- Comme on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $T_n = \dfrac{\ln n}{2} + V_n$, on obtient que $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty$ par propriété sur les sommes et composée de limites. Puis comme on a aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ : $T_n = \ln(S_n) \Leftrightarrow S_n = e^{T_n}$, on obtient par propriété sur la composée de limite que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$$

.

## Études de fonctions définies par des intégrales

**Exercice 12.** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.
Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer $f'$ et étudier les variations de $f$.

**Correction 12. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f(x)} = \displaystyle\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{2x}} \mathbf{e^{-t^2} dt}$. Montrer que f est de classe $\mathbf{C^\infty}$ sur $\mathbb{R}$, calculer $\mathbf{f'}$ et étudier les variations de f.**

- Montrons que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ :
  - ⋆ Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}$.
  - ⋆ La fonction $g : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues. Ainsi il existe une primitive $G$ de $g$ sur $\mathbb{R}$.
  - ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien que : $[x, 2x] \subset \mathbb{R}$ ou $[2x, x] \subset \mathbb{R}$.
- Montrons que la fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ :
  On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f(x) = G(2x) - G(x)$ avec $G$ une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$.
  - ⋆ La fonction $g$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $C^\infty$. Ainsi sa primitive $G$ est elle aussi de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  - ⋆ Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

  Ainsi par composée et somme de fonctions de classe $C^\infty$, la fonction $f$ est bien de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Calcul de sa dérivée :
  La fonction $f$ est donc en particulier dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(2e^{-3x^2} - 1)$.
- Variations de la fonction $f$ :
  Comme une exponentielle est toujours strictement positive, la dérivée est du signe de $2e^{-3x^2} - 1$. Or on a : $2e^{-3x^2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \dfrac{\ln 2}{3}$. On obtient ainsi le tableau des variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$ | | $\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | - | |
| $f$ | $0$ | ↗ | | ↘ | | ↗ | $0$ |

- Limites en $\pm\infty$ :
  - ⋆ Limite en $+\infty$ :
    Comme on a : $x > 0$ car on regarde la limite en $+\infty$, on a :

$$x \leq t \leq 2x \Leftrightarrow x^2 \leq t^2 \leq 4x^2 \Leftrightarrow -4x^2 \leq -t^2 \leq -x^2 \Leftrightarrow e^{-4x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$$

    par composition par les fonctions carrée et inverse respectivement strictement croissante et décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et par multiplication par $-1 < 0$. On a donc

- ◦ Les fonctions $t \mapsto e^{-4x^2}$, $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto e^{-x^2}$ sont continues sur $[x, 2x]$.
  - ◦ $x \leq 2x$ car $x > 0$.
  - ◦ Pour tout $t \in [x, 2x]$ : $e^{-4x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$.

  Ainsi d'après le théorème de croissance de l'intégrale, on obtient que

$$\int_x^{2x} e^{-4x^2} dt \leq f(x) \leq \int_x^{2x} e^{-x^2} dt \iff xe^{-4x^2} \leq f(x) \leq xe^{-x^2}.$$

  On remarque alors que : $\lim_{x \to +\infty} xe^{-4x^2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X^{\frac{1}{2}}}{2e^X} = 0$ par croissance comparée et en ayant posé $X = 4x^2$. De même, on a : $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x^2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X^{\frac{1}{2}}}{e^X} = 0$ par croissance comparée et en ayant posé $X = x^2$. Ainsi on a :
  - ◦ $\lim_{x \to +\infty} xe^{-4x^2} = 0 = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x^2}$
  - ◦ $xe^{-4x^2} \leq f(x) \leq xe^{-x^2}$. Ainsi d'après le théorème des gendarmes, on obtient que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

- ⋆ Limite en $-\infty$ :
  Comme on a : $x < 0$ car on regarde la limite en $-\infty$, on a :

$$2x \leq t \leq x \Leftrightarrow x^2 \leq t^2 \leq 4x^2 \Leftrightarrow -4x^2 \leq -t^2 \leq -x^2 \Leftrightarrow e^{-4x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$$

  par composition par les fonctions carrée et inverse toutes les deux strictement décroissantes sur $\mathbb{R}^{-\star}$ et par multiplication par $-1 < 0$. On a donc
  - ◦ Les fonctions $t \mapsto e^{-4x^2}$, $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto e^{-x^2}$ sont continues sur $[2x, x]$.
  - ◦ $2x \leq x$ car $x < 0$.
  - ◦ Pour tout $t \in [2x, x]$ : $e^{-4x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$.

  Ainsi d'après le théorème de croissance de l'intégrale, on obtient que

$$\int_{2x}^{x} e^{-4x^2} dt \leq -f(x) \leq \int_{2x}^{x} e^{-x^2} dt \iff -xe^{-4x^2} \leq -f(x) \leq -xe^{-x^2} \iff xe^{-x^2} \leq f(x) \leq xe^{-4x^2}.$$

  On remarque alors que : $\lim_{x \to -\infty} xe^{-4x^2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X^{\frac{1}{2}}}{2e^X} = 0$ par croissance comparée et en ayant posé $X = 4x^2$. De même, on a : $\lim_{x \to -\infty} xe^{-x^2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X^{\frac{1}{2}}}{e^X} = 0$ par croissance comparée et en ayant posé $X = x^2$. Ainsi on a :
  - ◦ $\lim_{x \to -\infty} xe^{-4x^2} = 0 = \lim_{x \to -\infty} xe^{-x^2}$
  - ◦ $xe^{-x^2} \leq f(x) \leq xe^{-4x^2}$. Ainsi d'après le théorème des gendarmes, on obtient que : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.

**Exercice 13.** Calculer $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$.

**Correction 13.** **Calculer $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$.**

- On pose $f(x) = \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$. La fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien que la fonction $f$ est continue sur $[1, x]$.

- On pose de plus la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions continues et ainsi elle admet bien une primitive $G$ sur $\mathbb{R}$, primitive qui est alors de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f(x) = G(x) - G(1)$.
- On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ : $h(x) = \dfrac{f(x)}{x-1}$. On remarque alors que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ : $h(x) = \dfrac{G(x) - G(1)}{x-1}$ ce qui correspond au taux d'accroissement de la fonction $G$ en 1.
- Pour calculer la limite de $h$ en 1, il faut donc étudier la dérivabilité de la fonction $G$ en 1. Or la fonction $G$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et ainsi elle est en particulier dérivable en 1. Ainsi la limite de $h$ en 1 existe et vaut $G'(1) = g(1) = \dfrac{1}{2}$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to 1} h(x) = \frac{1}{2}.}$$

**Exercice 14.** Soit $G(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

1. Ensemble de définition de $G$ ?
2. Montrer que $G$ est de classe $C^1$ sur son ensemble de définition.
3. Calculer $G'$. Conclusion ?

**Correction 14. Soit $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathbf{x}}}^{\mathbf{x}} \frac{\ln \mathbf{t}}{\mathbf{1}+\mathbf{t}^2} \mathbf{dt}$.**

1. **Ensemble de définition de G ?**
   On pose la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$. On a :
   - La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$. Ainsi le domaine de définition de $G$ est déjà forcément inclus dans $\mathbb{R}^\star$.
   - La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme et quotient de fonctions continues.
   - Comme on veut que pour tout $x \in \mathcal{D}_G$ : $\left[\dfrac{1}{x}, x\right] \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\left[x, \dfrac{1}{x}\right] \subset \mathbb{R}^{+\star}$, on doit imposer que $x > 0$.

   Ainsi, on obtient que :

$$\boxed{\mathcal{D}_G = \mathbb{R}^{+\star}.}$$

2. **Montrer que G est de classe $\mathbf{C^1}$ sur son ensemble de définition.**
   - La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ainsi il existe une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. De plus cette primitive est alors de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
   - On a alors pour tout $x > 0$ : $G(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   - $\boxed{\text{La fonction } G \text{ est alors de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+\star}}$

   comme composée et somme de fonctions de classe $C^1$.
3. **Calculer $\mathbf{G'}$. Conclusion ?**
   - Comme la fonction $G$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$, elle est en particulier dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
   - Et pour tout $x > 0$, on a : $G'(x) = F'(x) + \dfrac{1}{x^2} F'\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x) + \dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{-\ln x}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\ln x}{1+x^2} - \dfrac{\ln x}{1+x^2} = 0$.

- Comme la dérivée est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+\star}$, la fonction $G$ est donc constante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. En prenant par exemple $x=1$, on a : $G(1)=\int_1^1 f(t)dt=0$. Et ainsi pour tout $x>0$ : $G(x)=0$.

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est la fonction nulle.}}$$

**Exercice 15.** On pose $f(t)=te^{-\frac{1}{t}}$ si $t\neq 0$ et $f(0)=0$. Étudier $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

**Correction 15. On pose $\mathbf{f(t)=te^{-\frac{1}{t}}}$ si $\mathbf{t\neq 0}$ et $\mathbf{f(0)=0}$. Étudier $\lim_{\mathbf{x}\to 0^+}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{f(t)dt}$.**

On pose $g$ la fonction définie par : $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

- Étude du domaine de définition de $g$ :
  - ⋆ La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. Étude de la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$ :
    La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme produit et composée de fonctions continues. Étude de la continuité à droite en 0 : On a par propriété sur les quotient, composée et produit de limites que : $\lim_{t\to 0^+} f(t)=0$. Ainsi $f$ est continue à droite en 0. En particulier, la fonction $f$ est continue sur $[0,+\infty[$.
    Ainsi il existe bien une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ si on prend la primitive qui s'annule en 0.
  - ⋆ Ainsi, on a que $g(x)=\frac{F(x)}{x}$ et ainsi la fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}^\star$.
- Étude de la limite de $g$ en $0^+$ :
  On remarque que pour tout $x>0$, on a : $g(x)=\frac{F(x)}{x}$. Or $F(0)=0$ et ainsi on a pour tout $x>0$ : $g(x)=\frac{F(x)-F(0)}{x}$. Ainsi $g$ se met sous la forme du taux d'accroissement à droite en 0 de $F$. Il nous faut donc étudier la dérivabilité à droite en 0 de $F$. Mais on a montré que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc sa primitive $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et en particulier elle est bien dérivable à droite en 0. Ainsi la limite de $g$ à droite en 0 existe et on a : $\lim_{x\to 0^+} g(x)=F'(0)$. Or on a : $F'=f$ ainsi on obtient que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x)=f(0)=0.}$$

## Type DS

**Exercice 16.** Intégrales de Wallis (on ne peut pas trouver d'exercice plus classique que celui-là....)

Soit $n$ un entier naturel et $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)dt$.

1. (a) Calculer $I_0,\ I_1,\ I_2$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ?
2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n.$$
   (b) En déduire que, pour $p\in\mathbb{N}^\star$, on a
   $$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)}\times\frac{\pi}{2}\\ I_{2p+1} &= \frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p+1)}.\end{aligned}$$

(c) Calculer $nI_nI_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{I_n}{I_{n-2}} \leq \dfrac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$.

   (b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = 1$.

**Correction 16. Soit $n$ un entier naturel et $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.**

1. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $I_n$ existe bien.

   (a) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

   (b) Etude de la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

   - Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a
   $$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(\sin(t) - 1)dt.$$
   On utilise alors le théorème de positivité de l'intégrale pour conclure. On a en effet :
     - ⋆ $t \mapsto \sin^n(t)(\sin(t) - 1)$ continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
     - ⋆ $0 \leq \frac{\pi}{2}$
     - ⋆ Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\sin^n(t) \geq 0$ et $\sin(t) \leq 1$. Ainsi, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\sin^n(t)(\sin(t) - 1) \leq 0$.

   Ainsi, d'après le théorème de positivité de l'intégrale, on obtient :
   $$I_{n+1} - I_n \leq 0 \Leftrightarrow I_{n+1} \leq I_n.$$
   Ainsi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - Montrons que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 :
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on utilise encore le théorème de positivité de l'intégrale :
     - ⋆ $t \mapsto \sin^n(t)$ continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
     - ⋆ $0 \leq \frac{\pi}{2}$
     - ⋆ Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\sin^n(t) \geq 0$.

   Ainsi, d'après le théorème de positivité de l'intégrale, on obtient : $I_n \geq 0$. Ainsi, on vient bien de montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
   - La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi décroissante et minorée par 0, d'après le théorème sur les suites monotones, elle est donc convergente.
   - On peut aussi remarquer que le théorème de séparation permet aussi de montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a même : $I_n > 0$. Vérifions cela :
     - ⋆ $f_n : t \mapsto \sin^n(t)$ continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
     - ⋆ $0 \leq \frac{\pi}{2}$
     - ⋆ Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\sin^n(t) \geq 0$.
     - ⋆ $f_n \not\equiv 0$

   Ainsi, d'après le théorème de séparation de l'intégrale, on obtient : $I_n > 0$.

2. (a) Dés que l'on veut une relation de récurrence sur une suite définie par une intégrale, il faut penser à utiliser une IPP. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a ici :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1-\cos^2(t))dt = I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)dt.$$

On fait alors une IPP sur le deuxième terme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)dt$ en essayant de faire apparaître $I_{n+2}$. On pose

$$\begin{cases} u(t) = \cos(t) & u'(t) = -\sin(t) \\ v'(t) = \sin^n(t)\cos(t) & v(t) = \dfrac{\sin^{n+1}(t)}{n+1}. \end{cases}$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et ainsi, le théorème d'intégration par partie assure que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)dt = [\cos(t)\frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)dt = \frac{1}{n+1}I_{n+2}.$$

Ainsi, on obtient au final :

$$I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1}I_{n+2} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1}I_{n+2} = I_n \Leftrightarrow (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(b) A faire par récurrence. Il faut aussi savoir retrouver ces formules tout seul, sans qu'elles soient données, par itération de la formule de récurrence démontrée ci-dessus. De plus, il faut aussi savoir obtenir ces formules sous forme factorielle. On le fait pour $I_{2p}$. L'idée est toujours la même : on multiplie les nombres impairs par tous les nombres pairs manquant afin de faire apparaître une factorielle :

$$\begin{aligned} \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)} &= \frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times\cdots\times(2p-2)\times(2p-1)\times(2p)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)\times 2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)} \\ &= \frac{(2p)!}{(2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p))^2}. \end{aligned}$$

Ensuite, il reste à faire apparaître des factorielles au dénominateur aussi. Ici, l'idée est d'utiliser le fait que tous les termes sont pairs :

$$2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p) = (2.1)\times(2.2)\times(2.3)\times\cdots\times(2.p) = 2^p\times(1\times 2\times 3\times\cdots\times p) = 2^p\times(p)!.$$

Ainsi, au final, on obtient

$$\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\times(p!)^2}.$$

Puis, on obtient alors : $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\times(p!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}$.

(c) Ici il faut utiliser les deux formules démontrées précedemment en distinguant deux cas : $n$ pair et $n$ impair :

- Cas $n$ pair : $n = 2p$ :
  On obtient :

$$nI_nI_{n-1} = (2p)I_{2p}I_{2p-1} = 2p\times\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p-2)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)} = (2p)\times\frac{1}{2p}\times\frac{\pi}{2}.$$

  Ainsi, on a : $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ dans le cas $n$ pair.

- Cas $n$ impair : $n = 2p+1$ :
  On obtient

$$\begin{aligned} nI_nI_{n-1} = (2p+1)I_{2p+1}I_{2p} &= (2p+1) \times \frac{2\times 4\times 6\times \cdots \times (2p)}{1\times 3\times 5\times \cdots \times (2p+1)} \frac{1\times 3\times 5\times \cdots \times (2p-1)}{2\times 4\times 6\times \cdots \times (2p)} \times \frac{\pi}{2} \\ &= (2p+1)\times \frac{1}{2p+1} \times \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

  Ainsi, on a : $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ dans le cas $n$ impair.

Ainsi, dans tous les cas, on obtient que : $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

3. (a) On peut tout de suite commencer par remarquer que l'on peut bien diviser par $I_{n-2}$ et $I_{n-1}$ car on a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $I_n > 0$.
   On sait de plus que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, ainsi, on a :

$$I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}.$$

   La première inégalité donne, en divisant des deux côtés par $I_{n-1} > 0$ : $I_n \leq I_{n-1} \Rightarrow \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$. La deuxième inégalité donne en passant à l'inverse, les deux termes étant strictement positifs : $\frac{1}{I_{n-2}} \leq \frac{1}{I_{n-1}}$. Puis en multipliant par $I_n > 0$, on obtient bien que : $\frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}}$. On a bien obtenu l'inégalité voulue, à savoir :

$$\frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1.$$

   (b) On connaît la valeur de $\frac{I_n}{I_{n-2}}$ car la relation de récurrence obtenue à la question 2 donne le lien entre $I_n$ et $I_{n-2}$. On obtient ainsi : $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ et ainsi : $\frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n}$. On obtient donc :

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1.$$

   Ainsi, on a, en utilisant le théorème des monômes de plus haut degré :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1 = \lim_{n\to+\infty} 1.$$

   Le théorème des gendarmes assure alors que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$. Ce qui est équivalent au fait que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$.

   (c) On peut toujours multiplier des équivalents. Ainsi, comme on sait que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$, on obtient : $nI_n^2 \underset{+\infty}{\sim} nI_{n-1}I_n$. On peut alors utiliser la relation : $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que : $nI_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$. Puis, en divisant par $n$ et en passant à la racine carrée (pour rappel : on ne peut pas composer des équivalents sauf pour des puissances, donc on peut passer à la racine carrée), on obtient :

$$\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

**Exercice 17.** Soit $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f$, et étudier sa parité.

2. Montrer que $f$ est dérivable et que $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{16x^4+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$

3. Étudier les variations de $f$.

4. À l'aide d'un encadrement, déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**Correction 17.** **Soit $\mathbf{f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}}$.**

1. **Déterminer le domaine de définition de f.**
   - Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée et quotient de fonctions continues car $1 + t^4 > 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien que : $[x, 2x] \subset \mathbb{R}$ ou $[2x, x] \subset \mathbb{R}$.

   Ainsi on a :
   $$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$$

2. **Étudier la parité de f.**
   - Le domaine de définition est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$.
     On pose alors le changement de variable suivant :
     $$\left\| \begin{array}{ccc} u & = & -t \\ du & = & -dt \\ \dfrac{dt}{\sqrt{t^4+1}} & = & \dfrac{-du}{\sqrt{u^4+1}} \end{array} \right.$$
     On a $t = -x \Rightarrow u = x$ et $t = -2x \Rightarrow u = 2x$. De plus :
     - $\varphi : t \mapsto -t$ est bien de classe $C^1$ sur $[-x, -2x]$.
     - $u \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{u^4+1}}$ est bien continue sur $[2x, x]$.

     Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on a : $f(-x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{u^4+1}} = -\int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4+1}} = -f(x)$ car la variable d'intégration est muette. Donc
     $$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire}}$$
     et il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

   — **Étudier les variations de f.**
     - Si on note $G$ la primitive de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ qui existe bien sur $\mathbb{R}$ car $g$ est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f(x) = G(2x) - G(x)$.
     - De plus la fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sa primitive $G$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et ainsi elle est en particulier dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables.
     - De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{16x^4+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$.
       On met alors tout au même dénominateur puis on utilise la quantitée conjuguée et on obtient alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f'(x) = \dfrac{3(1-2x^2)(1+2x^2)}{\sqrt{16x^4+1}\sqrt{x^4+1}(\sqrt{16x^4+1}+\sqrt{x^4+1})}$. Cette dérivée est alors du signe de $1 - 2x^2$ car tous les autres termes sont positifs. Ainsi on obtient le tableau des variations suivants :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f$ | 0 | ↘ | | ↗ | | ↘ | 0 |

— **À l'aide d'un encadrement, déterminer la limite de f en $+\infty$.**

- Encadrement de la fonction $f$ :
  On remarque que, si $x \geq 0$ : $x \leq t \leq 2x \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{16x^4+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ en utilisant le fait que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
  Ainsi on a donc :
  - ⋆ Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{16x^4+1}}$, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ sont continues sur $[x, 2x]$.
  - ⋆ $x \leq 2x$ car $x \geq 0$.
  - ⋆ Pour tout $t \in [x, 2x]$ : $\dfrac{1}{\sqrt{16x^4+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$.

  Ainsi d'après le théorème de croissance de l'intégrale, on obtient que : $\dfrac{x}{\sqrt{16x^4+1}} \leq f(x) \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$.
- On a ainsi
  - Pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{x}{\sqrt{16x^4+1}} \leq f(x) \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$.
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{16x^4+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}} = 0$ en écrivant que : $\dfrac{x}{\sqrt{16x^4+1}} = \dfrac{x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}$ puis par composée, somme et quotient de limites.

  Ainsi d'après le théorème des gendarmes, on a :
  $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$
  et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
- Par imparité de la fonction, on obtient aussi que
  $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0}$$
  et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

**Exercice 18.** On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$
2. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge quand $n$ tend vers l'infini et calculer sa limite.
3. Calculer $I_0$ et $I_1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$I_n = \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi^2} I_{n-2}.$$

**Correction 18.**

1. • Montrons que la suite est bien définie :
   Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n \sin(\pi x)$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale $I_n$ existe. Ainsi la suite est bien définie.
   • Encadrement de $I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $-1 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ et comme $x \in [0,1]$, on a : $x^n \geq 0$ et ainsi, on obtient que : $-x^n \leq x^n \sin(\pi x) \leq x^n$.
   On a ainsi :
     ⋆ Les fonctions $x \mapsto -x^n$, $x \mapsto x^n \sin(\pi x)$ et $x \mapsto x^n$ sont continues sur $[0,1]$.
     ⋆ $0 \leq 1$.
     ⋆ Pour tout $x \in [0,1]$, $-x^n \leq x^n \sin(\pi x) \leq x^n$.
   Ainsi d'après le théorème de croissance de l'intégrale, on a :
$$\int_0^1 -x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow \left[-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] \leq I_n \leq \left[-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
   • On a ainsi :
     ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
     ⋆ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ par propriété sur les quotients de limites.
   Ainsi d'après le théorème des gendarmes, on obtient que la suite converge et que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. • $I_0 = \int_0^1 \sin(\pi x)dx = \left[\dfrac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right[_0^1 = \dfrac{-2}{\pi}$.
   • $I_1 = \int_0^1 x\sin(\pi x)dx$.
     ⋆ On pose
$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & \qquad & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & \sin(\pi x) & & v(x) & = & -\dfrac{\cos(\pi x)}{\pi}. \end{array}$$
     ⋆ Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0,1]$ comme fonctions usuelles et ainsi par intégration par partie, on obtient que :
$$I_1 = \left[-\frac{x\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}.$$

3. Dès que l'on veut une relation de récurrence pour une suite définie par une intégrale, on fait une IPP.
   • On pose
$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^n & \qquad & u'(x) & = & nx^{n-1} \\ v'(x) & = & \sin(\pi x) & & v(x) & = & -\dfrac{\cos(\pi x)}{\pi}. \end{array}$$
   • Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0,1]$ comme fonctions usuelles et ainsi par intégration par partie, on obtient que :
$$I_n = \left[-\frac{x^n\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{n}{\pi}\int_0^1 x^{n-1}\cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 x^{n-1}\cos(\pi x)dx.$$
   On refait alors une IPP.
   • On pose
$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^{n-1} & \qquad & u'(x) & = & (n-1)x^{n-2} \\ v'(x) & = & \cos(\pi x) & & v(x) & = & \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}. \end{array}$$

- Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0,1]$ comme fonctions usuelles et ainsi par intégration par partie, on obtient que :
$$I_n = \frac{1}{\pi} + \frac{n}{\pi}\left(\left[\frac{x^{n-1}\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 - \frac{n-1}{\pi}\int_0^1 x^{n-2}\sin(\pi x)dx\right) = \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi^2}I_{n-2}.$$

Ainsi on a bien trouvé une relation de récurrence qui nous permettrait de calculer $I_n$ en fonction de $I_1$ si $n$ impair ou $I_0$ si $n$ pair.

**Exercice 19.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$
2. En déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quand $n$ tend vers l'infini et calculer sa limite.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$J_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{e}$$
4. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$
5. Trouver un équivalent simple de $J_n$ quand $n$ tend vers l'infini.

**Correction 19.**

1. - Montrons que la suite est bien définie :
   Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ comme composée et produit de fonctions continues. Donc $J_n$ existe et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite est bien définie.
   - Pour montrer en même temps que la suite est convergente et trouver sa limite, on utilise pour cela le théorème des gendarme. Ainsi on commence par encadrer l'intégrale en utilisant le théorème de croissance.
     - ⋆ Encadrement de la fonction à l'intérieure de l'intégrale :
       On a :
       $$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow x^n e^{-1} \leq f_n(x) \leq x^n.$$
       Ici on a utilisé le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et le fait que $x^n > 0$.
     - ⋆ On a donc :
       - Les fonctions $f_n$, $x \mapsto x^n e^{-1}$ et $x \mapsto x^n$ sont continues sur $[0,1]$.
       - $0 \leq 1$.
       - Pour tout $x \in [0,1]$ : $x^n e^{-1} \leq f_n(x) \leq x^n$.

       Ainsi d'après le théorème de croissance de l'intégrale, on a :
       $$\int_0^1 x^n e^{-1}dx \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow \frac{e^{-1}}{n+1} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
     - ⋆ Utilisation du théorème des gendarmes : on a :
       - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\dfrac{e^{-1}}{n+1} \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
       - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-1}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ par propritété sur les quotient s de limites.

       Ainsi d'après le théorème des gendarmes, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

2. Dès que l'on cherche une relation de récurrence avec une suite définie par une intégrale, il faut penser à faire une ou plusieurs intégrations par partie.
   - On pose
   $$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^n & \quad & u'(x) & = & nx^{n-1} \\ v'(x) & = & e^{-x} & \quad & v(x) & = & -e^{-x}. \end{array}$$
   - Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0,1]$ comme fonctions usuelles et ainsi par intégration par partie, on obtient que :
   $$J_n = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^1 + n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx = nJ_{n-1} - \frac{1}{e}.$$
   Comme cela est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi : $J_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{e}$.
3. - Comme il y a écrit en déduire dans la question, on sait qu'il va falloir utiliser l'égalité précédente. Et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $J_n - \frac{1}{e(n+1)} = \frac{J_{n+1}}{n+1}$. Ainsi pour encadrer $J_n - \frac{1}{e(n+1)}$, il suffit d'encadrer $\frac{J_{n+1}}{n+1}$. On peut alors utiliser l'encadrement obtenu dans la première question et on a : $\frac{e^{-1}}{n+2} \leq J_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$. Comme $n+1 > 0$, on obtient alors que : $\frac{e^{-1}}{n+2} \leq \frac{J_{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$. Comme de plus, on a : $0 \leq \frac{e^{-1}}{n+2}$, on a : $0 \leq \frac{e^{-1}}{n+2} \leq \frac{J_{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$ et donc en particulier on a bien que : $0 \leq \frac{J_{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$, à savoir : $0 \leq J_n - \frac{1}{e(n+1)} \leq \frac{1}{n+2}$, ce qui est bien le résultat demandé.
   - L'inégalité démontrée ci-dessus est équivalente à : $\frac{1}{(n+1)e} \leq J_n \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)e}$. Ainsi, on a : $1 \leq (n+1)eJ_n \leq 1 + \frac{e}{n+2}$.
   Ainsi on a :
     - ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $1 \leq (n+1)eJ_n \leq 1 + \frac{e}{n+2}$.
     - ⋆ $\lim_{n\to+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{e}{n+2} = 1$ par propriété sur les quotients de limites.

   Ainsi d'après le théorème des gendarmes, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty}(n+1)eJ_n = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{J_n}{\frac{1}{e(n+1)}}$. Ainsi, on vient de montrer que : $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e(n+1)}$, soit
   $$\boxed{J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{en}}$$
   .

**Exercice 20.** On considère la suite d'intégrales $J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}dx$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$. Exprimer $J_0$ en fonction de $I$ et en déduire la valeur de $J_0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
$$0 \leq J_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$$
3. En déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quand $n$ tend vers l'infini et calculer sa limite.
4. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire sans calcul supplémentaire que : $\frac{1}{2}(J_n + J_{n+1}) \leq J_n \leq \frac{1}{2}(J_n + J_{n-1})$.

5. Calculer la valeur de $J_n + J_{n+1}$ en fonction de $n$.
6. En déduire la limite de la suite $(nJ_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Correction 20.**

1. 
   - La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme somme et quotient de fonctions continues. Ainsi l'intégrale $I$ existe. De même, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme somme et quotient de fonctions continues. Ainsi l'intégrale $J_0$ existe.
   - On remarque que pour tout $x \in [0,1]$ : $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{e^x+1}$. Ainsi en intégrant cette égalité, les 3 fonctions étant bien continues et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient que : $J_0 = \int_0^1 dx - I$.
   - Calcul de $I$ : on reconnaît une primitive usuelle de la forme $\dfrac{u'}{u}$ et ainsi on obtient que : $I = [\ln|1+e^x|]_0^1 = \ln 2 - \ln(1+e)$.
   - Calcul de $J_0$ : On obtient alors que $J_0 = 1 - \ln 2 + \ln(1+e)$.
2. 
   - Montrons que la suite est bien définie :
     Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{e^x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues. Donc $J_n$ existe et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite est bien définie.
   - Pour montrer en même temps que la suite est convergente et trouver sa limite, on utilise pour cela le théorème des gendarme. Ainsi on commence par encadrer l'intégrale en utilisant le théorème de croissance.
     - ⋆ Encadrement de la fonction à l'intérieur de l'intégrale :
       On a :
       $$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq e^x + 1 \leq e + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{-nx}}{e+1} \leq f_n(x) \leq \frac{e^{-nx}}{2}.$$
       Ici on a utilisé le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et le fait que $e^{-nx} > 0$.
     - ⋆ On a donc :
       - Les fonctions $f_n$, $x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{e+1}$ et $x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{2}$ sont continues sur $[0,1]$.
       - $0 \leq 1$.
       - Pour tout $x \in [0,1]$ : $\dfrac{e^{-nx}}{e+1} \leq f_n(x) \leq \dfrac{e^{-nx}}{2}$.

       Ainsi d'après le théorème de croissance de l'intégrale, on a :
       $$\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e+1} dx \leq J_n \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{2} dx \Leftrightarrow \frac{1-e^{-n}}{n(e+1)} \leq J_n \leq \frac{1-e^{-n}}{2n}.$$
     - ⋆ Utilisation du théorème des gendarmes : on a :
       - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\dfrac{1-e^{-n}}{n(e+1)} \leq J_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{2n}$.
       - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n(e+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{2n} = 0$ par propriété sur les composées, somme, produits et quotients de limites.

       Ainsi d'après le théorème des gendarmes, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.
3. 
   - Pour étudier la monotonie d'une suite définie par récurrence, on calcule toujours $J_{n+1} - J_n$ et on étudie son signe en utilisant le théorème de positivité de l'intégrale.

- ⋆ Ainsi on a : $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}-1)}{e^x+1}dx$. De plus comme une exponentielle est toujours strictement positive, on sait que $e^{-nx} > 0$ et que $e^x + 1 > 0$ comme somme de deux termes strictement positifs. Ainsi il reste à étudier le signe de $e^{-x} - 1$. Or on a : $e^{-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$ en utilisant le fait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Or on est sur $[0,1]$ donc on a : $e^{-x} - 1 \leq 0$.
- ⋆ On a donc :
  - ◦ La fonction $x \mapsto \frac{e^{-nx}(e^{-x}-1)}{e^x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme composée, somme, produit et quotient de fonctions continues.
  - ◦ $0 \leq 1$.
  - ◦ Pour tout $x \in [0,1]$ : $\frac{e^{-nx}(e^{-x}-1)}{e^x+1} \leq 0$.

  Ainsi d'après le théorème de négativité de l'intégrale, on obtient que : $J_{n+1} - J_n \leq 0 \Leftrightarrow J_{n+1} \leq J_n$. Ainsi la suite est bien décroissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme la suite est décroissante, on a : $J_{n+1} \leq J_n \leq J_{n-1}$. Et ainsi, on a : $J_{n+1} + J_n \leq 2J_n \leq J_n + J_{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(J_{n+1} + J_n) \leq J_n \leq \frac{1}{2}(J_n + J_{n-1})$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a par linéarité de l'intégrale que : $J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx-x} + e^{-nx}}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}(1+e^x)}{e^x+1}dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}dx$. Et on sait alors calculer cette intégrale et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $J_n + J_{n+1} = \frac{1-e^{-(n+1)}}{n+1}$.
5. On utilise ici les deux dernières questions. On obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ :

$$\frac{1-e^{-(n+1)}}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1-e^{-n}}{2n} \Leftrightarrow \frac{n(1-e^{-(n+1)})}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1-e^{-n}}{2}$$

car $n > 0$.

On utilise alors le théorème des gendarmes et on a :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ : $\frac{n(1-e^{-(n+1)})}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1-e^{-n}}{2}$.
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(1-e^{-(n+1)})}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{2} = \frac{1}{2}$ par propriété sur les composées, sommes, produit et quotient de limites.

Ainsi d'après le théorème des gendarmes, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{J_n}{\frac{1}{2n}} = 1$ et donc $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.