

# Programme de colle : Semaine 18

## Lundi 9 Février

### 1 Cours

1. Limites et continuité. Savoir calculer des limites reste au programme dès qu'on fait de l'analyse ! C'est comme étudier une fonction, il faut savoir le faire.
2. Dérivabilité
  - Dérivabilité en un point.
  - Equation de la tangente
  - Dérivabilité sur un intervalle : Rolle, TAF.
  - Dérivabilité d'ordre supérieur. Notation  $\mathcal{C}^n$  et  $\mathcal{C}^\infty$
3. Polynômes
  - Définition de  $\mathbb{K}[X]$  comme l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
  - Notion de degré et coefficients dominants.
  - Racine d'un polynôme définition et caractérisation par divisibilité ( $P(a) = 0 \iff P = (X - a)Q$ )
  - Multiplicité d'une racine
  - Un polynôme non nul de degré inférieur à  $n$  a au plus  $n$  racines.
  - Factorisation, théorème de d'Alembert Gauss (Hors programme)
  - Retour sur les racines  $n$ -èmes de l'unité.
4. Python :
  - Correspondance entre polynôme  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$  et la liste  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Evaluation, calcul du degré, de la dérivée.

### 2 Exercices Types

**Exercice 1.** Donner les racines ainsi que leur multiplicité du polynôme  $P = X^6 - X^3$

**Exercice 2.** Factoriser dans  $\mathbb{C}$ ,  $X^n - 1$ .

**Exercice 3.** Donner la formule de  $f^{(n)}(x)$  lorsque  $f : x \mapsto \ln(x)$ .

**Exercice 4.** Soit  $P$  un polynôme admettant deux racines réelles, montrer que la dérivée s'annule sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5.** Montrer en utilisant le TAF que  $\forall x > 0$

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$

**Exercice 6.** Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ? Si oui, le prolongement est-il de classe  $\mathcal{C}^1$

- |  |   |
|--|---|
| 1. $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$      | 8. $f(x) = \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{ x }$      |
| 2. $f(x) = \frac{ x  \ln(1+x)}{e^{2x^2} - 1}.$ | 9. $f(x) = x \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$ |
| 3. $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1).$    | 10. $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$   |
| 4. $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$            | 11. $f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$       |
| 5. $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$    | 12. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$       |
| 6. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{1+x}}$    | 13. $f(x) = x^x$                                |
| 7. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}$      |   |

**Exercice 7. Informatique.** On identifie le polynôme  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  à la liste  $L = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Ecrire une fonction qui prend en argument une liste  $L$  correspondant à un polynôme  $P$  et un flottant  $a$  et retourne la valeur de  $P(a)$ .