TD : Équation différentielle

Entrainements

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué

1. $y' - 2y = x + x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $3y' - 2y = x$ sur $\mathbb{R}$
3. $y' = y + 1$ sur $\mathbb{R}$
4. $y' = -y + e^x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué

1. $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
3. $xy' - (1 + 2x)y = -x^2e^x$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
4. $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$
5. $y' - \dfrac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}y = 2$
6. $y' + \cos^3(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$
7. $y' + \dfrac{2}{x^2 - 1}y = x$ sur $]1, +\infty[$

Exercice 3. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes

1. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
2. $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2}y = 1$
3. $y' - y = x^2(e^x + e^{-x})$
4. $xy' + (1 - 2x)y = 1$
5. $x^3y' + 4(1 - x^2)y = 0$
6. $(1 - x^2)y' - 2xy = 1$
7. $(\tan x)y' + y - \sin x = 0$
8. $y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x$
9. $x^2y' - y = x^2 - x + 1$. On pourra chercher une solution particulière polynomiale.

Exercice 4. Problèmes de raccords de solutions définies sur des intervalles disjoints :

1. On considère l'équation différentielle (E) : $xy' + y = 1$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ puis sur $\mathbb{R}^{-\star}$. Montrer que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'équation différentielle (E) : $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$. Résoudre (E) sur chaque intervalle où cela a un sens, puis étudier les éventuels raccords.
3. On considère l'équation différentielle (E) : $(x \ln x)y' - y = 0$. Résoudre (E) sur chaque intervalle où cela a un sens, puis étudier les éventuels raccords.
4. Étude des solutions sur $\mathbb{R}^{+\star}$, $\mathbb{R}^{-\star}$ et sur $\mathbb{R}$ de (E) : $xy' + 2y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Exercice 5. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants en précisant à chaque fois l'intervalle de travail (mais sans étudier les problèmes de raccord) :

1. $y' \cos x - y \sin x = 0$ et $y(0) = 1$
2. $y' + xy = 2x$ et $y(0) = 1$

Exercice 6. Trouver toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

Exercice 7. Soit m un réel. On considère l'équation différentielle (E) : $mxy' - y = y^2 - x^2$.

1. Donner une condition sur m pour qu'il existe une solution polynomiale notée y_0.
2. On suppose ici que $m = 1$. On cherche les solutions de (E) de la forme $y = y_0 + \dfrac{1}{z}$. Déterminer une équation différentielle (E') simple vérifiée par z.
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Type DS

Exercice 8. Un mobile (assimilé à un point) tombe verticalement dans l'atmosphère à une vitesse $v(t) > 0$ (les vitesses sont orientées positivement vers le bas).
Les seules forces auxquelles le mobile est soumis sont son poids (constant dirigé vers le bas) et le frottement exercé par l'air (dirigé vers le haut, proportionnel à v^2).
L'équation vérifiée par v est ainsi la suivante :

$$(E) \quad mv' = -kv^2 + mg$$

avec m masse du solide, k est la constante de résistance du milieu et g est l'accélération de la pesanteur ($m,\ k,\ g$ sont des constantes strictement positives).

1. Déterminer une solution constante (E). On la note v_0.
2. On suppose maintenant que v ne prend pas la valeur v_0. On pose $Z = \dfrac{1}{v - v_0}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par Z et la résoudre.
3. On suppose qu'initialement (à $t = 0$), la vitesse du mobile est $v_i > 0$. Donner pour $t \geq 0$, l'expression de $v(t)$ en fonction de t et v_i.
4. Etudier les variations de v sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'allure de la courbe de v sur un même graphique. On étudiera deux cas : $0 < v_i < v_0$ et $v_i > v_0$.

Exercice 9. 1. (a) Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{a}{1+x^2} + b$

(b) A l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive de $x \mapsto 2x(x)$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$

$$y' + \frac{1}{x}y = 2(x)$$