Table des matières

Chapitre 12 : Limites et Continuite

I Limites

I. 1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 (Limite en un point)**.** Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 un point de D ou une borne, et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite ℓ en x_0, et on note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D,\ \big(0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big).$$

Définition 2 (Limite à gauche et à droite)**.** Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 un point de D ou une borne de D, et $\ell \in \mathbb{R}$.

— On dit que f admet pour limite à gauche ℓ en x_0, et on note $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D,\ \big(x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big).$$

— On dit que f admet pour limite à droite ℓ en x_0, et on note $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D,\ \big(x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big).$$

Proposition 1. Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et x_0 un point de D ou une borne de D. La limite de f en x_0 existe et vaut ℓ si et seulement si les limites à gauche et à droite en x_0 existent et sont égales à ℓ.

Définition 3 (Limite en $+\infty$ et $-\infty$)**.** Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

— On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$, et on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in D,\ \big(x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big).$$

— On dit que f admet pour limite ℓ en $-\infty$, et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in D,\ \big(x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\big).$$

I. 2 Notation de Landau et équivalents

Définition 4 (Petit o)**.** Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que

$$f(x) =_a o\big(g(x)\big)$$

lorsque $x \to a$ si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Cette notation signifie que, lorsque x tend vers a, la fonction $f(x)$ est très petite devant $g(x)$: le rapport $f(x)/g(x)$ tend vers 0. Elle permet de comparer la vitesse de convergence de fonctions vers 0, ou plus généralement leur ordre de grandeur relatif.

Définition 5. Plus généralement $f(x) =_0 g(x) + o\big(h(x)\big)$ signifie que

$$f(x) - g(x) =_0 o\big(h(x)\big).$$

Autrement dit,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} = 0.$$

Interprétation de l'écriture $f(x) =_0 g(x) + o\big(h(x)\big)$ Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage de 0, avec $h(x) \neq 0$ au voisinage de 0.

On définit alors, pour x suffisamment proche de 0,

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - g(x)}{h(x)}.$$

Par construction, la fonction $\varepsilon(x)$ est définie au voisinage de 0 et vérifie

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On peut donc réécrire

$$f(x) - g(x) = h(x)\,\varepsilon(x),$$

ce qui conduit à l'écriture équivalente

$$f(x) = g(x) + h(x)\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Réciproquement, si l'on peut écrire

$$f(x) = g(x) + h(x)\varepsilon(x), \quad \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

alors

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} = \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

ce qui montre que

$$f(x) - g(x) =_0 o\big(h(x)\big),$$

et donc

$$f(x) =_0 g(x) + o\big(h(x)\big).$$

Ainsi, l'écriture avec le petit-o et l'écriture $h(x)\varepsilon(x)$ sont strictement équivalentes : la notation $o\big(h(x)\big)$ encode précisément un terme qui est égal à $h(x)$ multiplié par une fonction tendant vers 0.

Exemples.

— Lorsque $x \to 0$, on a

$$x^2 =_0 o(x), \qquad x^3 =_0 o(x^2),$$

car $\frac{x^2}{x} = x \to 0$ et $\frac{x^3}{x^2} = x \to 0$.

— Lorsque $x \to +\infty$,

$$\ln x =_{+\infty} o(x),$$

car $\frac{\ln x}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

— Lorsque $x \to +\infty$,

$$e^{-x} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

C'est une autre facon de décrire la croissance comparée entre exp et un polynome.

Règles de calcul.

Soient f_1, f_2, g, g_1, g_2 des fonctions définies au voisinage de a.

Proposition 2. On a les propriétés suivantes :

1. Si $f_1 =_a o(g)$ et $f_2 =_a o(g)$, alors
$$f_1 + f_2 =_a o(g).$$
2. Si $f =_a o(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors
$$fh =_a o(g).$$
3. Si $f =_a o(g)$ et $g =_a o(h)$, alors
$$f =_a o(h).$$

Exemple On cherche
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)}.$$

On utilise des développements usuels écrits avec la notation de Landau au voisinage de 0.

1) Numérateur. On sait que, lorsque $x \to 0$,
$$\cos x =_0 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

2) Dénominateur. On sait que, lorsque $u \to 0$,
$$\ln(1+u) =_0 u + o(u).$$
En prenant $u = x^2$ (et $x \to 0 \Rightarrow x^2 \to 0$), on obtient
$$\ln(1+x^2) =_0 x^2 + o(x^2).$$

On factorise x^2 dans les deux termes :
$$\frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)} =_0 \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} =_0 \frac{x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)}{x^2\,(1 + o(1))}.$$
Pour $x \neq 0$ on simplifie par x^2 :
$$\frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)} =_0 \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}.$$
Or, si $\varepsilon(x) \to 0$ et $\eta(x) \to 0$, alors
$$\frac{a + \varepsilon(x)}{1 + \eta(x)} \longrightarrow a.$$
Ici $a = -\frac{1}{2}$. Donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)} = -\frac{1}{2}.$$
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)} = -\frac{1}{2}.}$$

La notation $o(\,\cdot\,)$ permet ainsi de simplifier les expressions asymptotiques en ne conservant que les termes dominants, ce qui en fait un outil essentiel pour l'étude locale des fonctions et les calculs de limites.

Définition 6 (Équivalence)**.** Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, avec $g(x) \neq 0$ au voisinage de a. On dit que f est équivalente à g en a, et on note

$$f(x) \sim_a g(x),$$

si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Équivalents usuels : on dispose notamment des équivalents classiques en 0,

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x. \quad \sqrt{x+1} - 1 \sim \frac{1}{2}x$$

Lien entre petit-o et équivalence Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, avec $g(x) \neq 0$ au voisinage de a.

Proposition 3. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f(x) \sim_a g(x)$,
2. $f(x) = g(x) +_a o\big(g(x)\big)$,
3. $\dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Ainsi, dire que f est équivalente à g en a revient à dire que la différence $f(x) - g(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a. En pratique, cela signifie que $g(x)$ fournit une excellente approximation de $f(x)$ près de a.

Exemples.

— Lorsque $x \to 0$,

$$\sin x = x +_0 o(x),$$

ce qui est équivalent à $\sin x \sim_0 x$.

— Lorsque $x \to 0$,

$$\ln(1+x) = x +_0 o(x),$$

d'où $\ln(1+x) \sim_0 x$.

— Lorsque $x \to +\infty$,

$$x + 1 = x +_{+\infty} o(x),$$

ce qui exprime que $x + 1 \sim_{+\infty} x$.

Dans tout ce qui suit, les fonctions considérées sont des fonctions numériques.
f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Son domaine de définition noté $\mathcal{D}_f$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Ainsi pour l'instant on a trois notations pour dire à peu prés la même chose !

Proposition 4 (Limites usuelles en 0)**.** Lorsque $x \to 0$, on a les limites suivantes :

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, \qquad \frac{e^x - 1}{x} \to 1, \qquad \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1,$$

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} \to -\frac{1}{2}, \qquad \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \to \frac{1}{2}.$$

Proposition 5 (Développements usuels en 0 (avec reste en petit-o)). Lorsque $x \to 0$, on dispose des développements suivants :

$$\sin x =_0 x + o(x), \qquad e^x =_0 1 + x + o(x), \qquad \ln(1+x) =_0 x + o(x),$$

$$\cos x =_0 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \sqrt{1+x} =_0 1 + \frac{x}{2} + o(x).$$

Proposition 6 (Équivalents usuels en 0). Lorsque $x \to 0$, on a les équivalents suivants :

$$\sin x \sim_0 x, \qquad e^x - 1 \sim_0 x, \qquad \ln(1+x) \sim_0 x,$$

$$\cos x - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}, \qquad \sqrt{1+x} - 1 \sim_0 \frac{x}{2}.$$

II Continuité en un point

II. 1 Définition de la continuité en un point :

Définition 7. Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que la fonction f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ \big(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big).$$

Exercice 1.

1. Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2. Étudier la continuité en 1 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0,\ x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

II. 2 Continuité à droite et à gauche en un point

Lorsque la fonction se comporte de façon différente à droite et à gauche de $x_0 \in \mathcal{D}_f$, on doit regarder la continuité à droite et à gauche en x_0.

Exemple type : les fonctions définies par des raccords.

Définition 8. Soit f une fonction définie en x_0. On suppose que x_0 n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$.

- On dit que la fonction f est continue à droite en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ \big(x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big).$$

- On dit que la fonction f est continue à gauche en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ \big(x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big).$$

Exercice 2. Étudier la continuité en 0 à droite et à gauche de la fonction partie entière.

II. 3 Lien entre continuité à droite, à gauche et continuité en un point

Proposition 7. Soit f une fonction définie en x_0, où x_0 n'est pas une extrémité de $\mathcal{D}_f$. On a alors :

f continue en $x_0 \iff$ f continue à droite en x_0 **et** f continue à gauche en $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 1. Étudier la continuité en 0 de la fonction partie entière.

Exercice 3. Étudier la continuité au point de raccord des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1-x} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

III Continuité sur un intervalle

III. 1 Définition de la continuité sur un intervalle

Définition 9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

- Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I.
- L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathcal{C}(I)$ ou $C^0(I)$.
- On dit que f est une *fonction continue sur I* (ou une *application continue sur I*).

III. 2 Continuité des fonctions usuelles

En repassant par la définition, on peut ainsi démontrer la continuité des fonctions usuelles suivantes :

.... fonctions polynômes

fonctions rationnelles sur leur domaine de définition, $\sqrt{}$, ln, exp, sin, cos, tan sur leurs domaines.

Définition 10. Soit $x \in \mathbb{R}$. La *partie entière* de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leq x < n+1.$$

III. 3 Continuité et opérations algébriques

Proposition 8. Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{C}(I)$ alors

- $f + g \in \mathcal{C}(I)$.
- $\lambda f \in \mathcal{C}(I)$.
- $fg \in \mathcal{C}(I)$.
- si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}(I)$.

III. 4 Continuité et composition entre deux fonctions

Proposition 9. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Si $f \in \mathcal{C}(I)$ et $g \in \mathcal{C}(J)$ avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I)$.

Méthode pour montrer la continuité sur un intervalle :

Par somme, produit, composée, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions usuelles.

Exercice 4. Étudier la continuité sur $\mathcal{D}_f$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$
2. $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$
3. $f(x) = \ln\left(e^{-x^4}+3\right)$
4. $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{\tan(\pi x)} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

IV Prolongement par continuité

La fonction f est définie au voisinage de x_0 MAIS PAS en x_0 : $\boxed{x_0 \notin \mathcal{D}_f}$. On calcule donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pour savoir si on peut prolonger par continuité la fonction en x_0.

IV. 1 Prolongement par continuité

Définition 11. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction f telle que : $\begin{cases} \boxed{f \text{ non définie en } x_0} \\ f \text{ admet une limite finie en } x_0 \text{ notée } l. \end{cases}$

Alors la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f, \\ l & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0. Par abus de notation, on la note encore f.

IV. 2 Prolongement par continuité à droite et à gauche

Lorsque la limite en x_0 n'existe pas, cela vient le plus souvent du fait que les limites en x_0 à droite et à gauche ne sont pas les mêmes. On peut alors regarder si la fonction est prolongeable par continuité à droite ou à gauche.

Proposition 10. Existence du prolongement par continuité à droite ou à gauche :
Soit f une fonction non définie en x_0.

- Prolongement par continuité à droite :
  - ⋆ f admet un prolongement par continuité à droite en x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existe et est finie.
  - ⋆ Dans ce cas, le prolongement $\tilde{f}$ est défini par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > x_0 \text{ (et } x \in \mathcal{D}_f), \\ \ell_+ & \text{si } x = x_0, \end{cases} \qquad \text{où } \ell_+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

- Prolongement par continuité à gauche :
  - ⋆ f admet un prolongement par continuité à gauche en x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existe et est finie.
  - ⋆ Dans ce cas, le prolongement $\tilde{f}$ est défini par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < x_0 \text{ (et } x \in \mathcal{D}_f), \\ \ell_- & \text{si } x = x_0, \end{cases} \qquad \text{où } \ell_- = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

V Théorèmes sur les fonctions continues définies sur un intervalle

V. 1 Composition entre une fonction et une suite, application aux suites récurrentes :

On rappelle le résultat vu lors du chapitre sur les suites.

Proposition 11. Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si

- $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \mathcal{D}_f$,
- f est continue en ℓ,

Alors

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\ell).$$

V. 2 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème

Théorème 12. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Si on a :

- f est continue sur $[a, b]$,
- $y \in \mathbb{R}$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

V. 3 Théorème de la bijection

Théorème de la bijection et fonction réciproque

Théorème 13. Soient $f : I \to \mathbb{R}$. Si on a :

- f est continue sur I,
- f est strictement monotone sur I,

alors :

- f est bijective de I sur $J = f(I)$,
- sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ existe,
- f^{-1} est continue sur J et strictement monotone (de même sens) sur J.

Fonction arctangente

Proposition 14. La fonction tangente est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.
Sa fonction réciproque est la fonction arctangente, définie de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et notée arctan. On a de plus :

- Monotonie : la fonction arctangente est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Parité : la fonction arctangente est impaire.

V. 4 Fonction continue sur un segment

Définition 12. Définition d'un segment de $\mathbb{R}$:

Un segment de $\mathbb{R}$ est un intervalle fermé et borné, c'est-à-dire un intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a \leq b$.

Exemples.

- Exemples de segment de $\mathbb{R}$: $[0, 1]$, $[-2, 5]$, $[a, b]$ avec $a < b$.

- Exemples d'intervalles de $\mathbb{R}$ non segment : $\mathbb{R}$, $]0,1[$, $]-\infty,2]$, $[0,+\infty[$.

Théorème 15. Théorème d'une fonction continue sur un segment :

- Toute fonction continue sur un segment est bornée.

  De plus, elle atteint ses bornes (elle admet un maximum et un minimum).

- Plus précisement, si f est continue sur $[a,b]$ alors :

$$\exists x_m, x_M \in [a,b],\ \forall x \in [a,b],\ f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$