DS9

3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à son vecteur nul. On s'intéresse aux endomorphismes[1] f de E tel qu'il existe $p \geq 1$

$$f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad (*)$$

Premier exemple On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x-y, 9x-3y) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $g \circ g$ et vérifier que g est solution de $(*)$ pour $p = 2$.
3. Soit $F = \ker(g)$ donner une base de F.
4. Soit $u = (1,2)$, calculer $v = g(u)$, et montrer que $B = (u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
5. Déterminer la matrice N de g dans la base B

Deuxième exemple On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-4x+2y+2z, -2x+y+z, -6x+3y+3z) \end{array} \right.$$

On admet que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

1. Donner la matrice M de g dans la base canonique et calculer M^2.
2. En déduire que g est solution de $(*)$ pour $p = 2$
3. Soit $F = \ker(g)$ donner une base de F et sa dimension.
4. Soit $u = (0,1,0)$, calculer $v = g(u)$ et montrer que $B = (u,v)$ est libre.
5. Déterminer $w \in \ker(f)$ tel que $B = (u,v,w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$
6. Déterminer la matrice N de g dans la base B

Etude générale On se place désormais dans le cas général et on s'intéresse à l'équation $(*)$. Soit $p \geq 1$ et f une solution de $(*)$

1. Montrer que f n'est pas bijective.
2. Déterminer le noyau de f^p.
3. Soit $x \in E \setminus \ker(f^{p-1})$. Montrer que $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est une famille libre. *On pourra composer par f^{p-1} la relation de liberté d'une famille de vecteurs...*
   On suppose désormais que E est de dimension finie et on note $n = \dim(E)$, $(n \in \mathbb{N}^*)$
4. Montrer que $p \leq n$.
5. **Cas 1 :** $p = n$
   On suppose que f est solution de $(*)$ avec $p = n$. C'est-à-dire :
   $$f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^n = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad (*)$$
   (a) Justifier que $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base précédente.
6. **Cas 2 :** $p < n$. Cas bien plus compliqué et pas vraiment accessible avec le programme de BCPST1 !

1. On dit qu'un tel endomorphisme est *nilpotent d'ordre p*

Exercice 2. On considère une urne contenant 1 boule blanche et 1 boule noire indiscernables au toucher.

On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne que l'on remet avec une autre boule de la couleur obtenue.

À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc 3 boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc 4 boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.

Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la n-ième expérience.

Pour tout n non nul, on note B_n l'évènement "la boule tirée lors de la n-ième expérience est blanche".

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Y_n le nombre de boules noires dans l'urne à l'issue de la n-ième expérience.
   (a) Exprimer Y_n, en fonction de X_n et de n seulement.
   (b) Donner l'univers image de la variable aléatoire X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Soit $k \in X_{n+1}(\Omega)$ fixé. Déduire de la question précédente l'expression de la probabilité conditionnelle $P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k)$, en distinguant des cas selon si $i \in k-1, k$ ou non.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
   On pourra faire une récurrence et utiliser le système complet $([X_n = i])_{1 \leq i \leq n+1}$ *pour déterminer la loi de* X_{n+1}.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_{n+1}.
   On pourra utiliser la question précédente et la formule des probabilités totales.
6. Pour tout entier n non nul, on considère la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - 1}{n}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de Z_n.
   (b) Soit $x \in [0, 1]$. Donner le cardinal de l'ensemble $\left\{k \in [\![0, n]\!] \text{ tels que } \dfrac{k}{n} \leq x\right\}$.
   (c) Prouver que, pour tout entier n, on a $P(Z_n \leq x) = \frac{1}{n+1}\lfloor nx+1 \rfloor$, où l'on note $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière.
   (d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.
   Déduire de ce qui précède, que pour tout réel x, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = x$.