Correction TD 14 : Polynômes

I Entrainement

Calculs

Exercice 1. On pose $P = X^2 + 3X$, $Q = X^2 + X + 1$, $S = X^2 - 1$.

1. Calculer P^2, $P - Q$ et $P^2 - Q^2$.
2. Calculer $P(X + 1)$.
3. Calculer $S \circ f$ avec $f : t \mapsto \cos(t)$.

Correction 1.

1. Les calculs donnent $P^2 = X^4 + 6X^3 + 9X^2$, $P - Q = 2X - 1$, $P^2 - Q^2 = 4X^3 + 6X^2 - 2X - 1$.
2. On obtient $P(X + 1) = X^2 + 5X + 4$.
3. $S \circ f : t \mapsto -\sin^2(t)$.

Exercice 2. Simplifier le polynôme $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k$.

Correction 2. On cherche à faire apparaître la formule du binôme de Newton. On a :

$$R = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3X)^k [(1 - X)^3]^{n-k} (1 - X)^k$$

car $[(1 - X)^3]^{n-k}(1 - X)^k = (1 - X)^{3n-3k}(1 - X)^k = (1 - X)^{3n-2k}$. On obtient alors :

$$R = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [3X(1 - X)]^k [(1 - X)^3]^{n-k}$$

et sous cette forme on reconnaît la formule du binôme de Newton. Ainsi on obtient : $R = \left(3X(1 - X) + (1 - X)^3\right)^n$, soit : $\boxed{R = (1 - X)^n (X^2 + X + 1)^n}$.

Exercice 3. Dans les deux cas suivants, déterminer tous les polynômes P vérifiant les conditions indiquées

1. $\deg(P) = 3$ et $P(1) = 4,\ P(-1) = 0,\ P(-2) = -5,\ P(2) = 15$.
2. $\deg(P) \leq 2$ et $P^2 = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$.

Correction 3.

1. On sait donc que P est de degré 3 et que -1 est racine de P. Ainsi P est de la forme $P = (X+1)(aX^2+bX+c)$. Puis on utilise le fait que : $P(1) = 4$, $P(-2) = -5$ et $P(2) = 15$. Ces trois conditions permettent d'obtenir le système suivant : $\begin{cases} a + b + c &= 2 \\ 4a - 2b + c &= 5 \\ 4a + 2b + c &= 5 \end{cases}$. La résolution donne : $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$. On a donc ainsi entierement déterminé P : $\boxed{P = (X + 1)(X^2 + 1)}$.

2. Comme $\deg P \leq 2$, on cherche P sous la forme : $P = aX^2 + bX + c$. Les calculs donnent : $P^2 = a^2X^4 + 2abX^3 + (b^2+2ac)X^2 + 2bcX + c^2$. Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on doit résoudre le système suivant : $\begin{cases} a^2 & = & 1 \\ ab & = & 1 \\ b^2 + 2ac & = & -3 \\ bc & = & -2 \\ c^2 & = & 4 \end{cases}$. Comme $a^2 = 1$, on a : $a = -1$ ou $a = 1$. De même comme $c^2 = 4$, on a : $c = -2$ ou $c = 2$. Étudions les 4 possibilités que l'on a :
   - si $a = 1$ et $c = 2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$. Mais comme $bc = -2$, $b = -1$: impossible.
   - si $a = -1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = -1$. Mais comme $bc = -2$, $b = 1$: impossible.
   - si $a = 1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$ et ainsi $bc = -2$. Et on a aussi alors $b^2 + 2ac = -3$.
   - si $a = -1$ et $c = 2$: $b = -1$ vérifie bien $ab = 1$, $bc = -2$ et $b^2 + 2ac = -3$.

   Ainsi il y a deux solutions qui sont : $\boxed{P = -X^2 - X + 2 \text{ et } P = X^2 + X - 2}$.

Exercice 4. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants où n désigne un entier strictement positif et P un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a_n \neq 0$.

1. $(X^4 + 1)^3$
2. $(X + 1)^n - (X - 1)^n$
3. $P^2 - P + 1$
4. $Q = P(X + 1) - P$
5. $\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$.

Correction 4.

1. On a : $(X^4 + 1)^3 = P(Q)$ avec $P = X^3$ et $Q = X^4 + 1$. Ainsi par propriété sur le degré d'une composée de polynômes, on obtient que $\deg (X^4 + 1)^3 = 12$. De plus, en développant avec le binôme de Newton, on obtient que le coefficient dominant est 1.
2. On pose $P = (X + 1)^n - (X - 1)^n = Q - R$. Par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de même degré, on sait que $\deg P \leq \deg Q$, à savoir : $\deg P \leq n$. Pour connaître exactement son degré, il faut regarder les termes de plus haut degré dans Q et R et regarder s'ils s'annulent. Par le binôme de Newton, on sait que : $Q = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$. On commence par regarder les termes en X^n et on obtient : $P = \binom{n}{n} X^n - \binom{n}{n} (-1)^0 X^n + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi les termes devant X^n s'annulent et donc $\deg P \leq n - 1$. On regarde donc maintenant les termes devant X^{n-1} et on obtient $P = \binom{n}{n-1} X^{n-1} - \binom{n}{n-1} (-1)^1 X^{n-1} + T = 2nX^{n-1} + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Comme $2n \neq 0$, on vient de démontrer que $\boxed{\deg P = n - 1 \text{ et son coefficient dominant est } 2n}$.
3. Par propriété sur le degré d'une composée, on sait que $\deg P^2 = 2n$ et par propriété sur le degré d'une somme, on a : $\deg (P + 1) \leq n$. Comme $2n \neq n$ car $n \in \mathbb{N}^\star$, par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de degré différents, on obtient que : $\boxed{\deg (P^2 + P + 1) = 2n}$. Et si a_n est le coefficient dominant de P, alors $\boxed{a_n^2 \text{ est le coefficient dominant de } P^2 + P + 1}$ car a_n^2 est le coefficient dominant de P^2.
4. Par propriété sur le degré d'une composée de polynômes, on sait que $\deg P(X + 1) = \deg P$. Puis par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de même degré, on obtient que : $\deg Q \leq \deg P$. Étudions les termes en X^n pour savoir s'ils s'annulent ou pas. On a : $P = a_nX^n + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi, on obtient que : $Q = a_n(X + 1)^n + T(X + 1) - a_nX^n - T = a_nX^n - a_nX^n + R$ avec $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ en utilisant le binôme de Newton afin de développer le terme en $(X + 1)^n$. Ainsi, on obtient que $Q = R$ et ainsi $\deg Q \leq n - 1$. Il faut donc alors regarder les termes en X^{n-1}. Toujours en utilisant le binôme de Newton et le fait que $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, on obtient que : $Q = a_n(X + 1)^n + a_{n-1}(X + 1)^{n-1} + T(X + 1) - a_nX^n - a_{n-1}X^{n-1} - T = a_n \binom{n}{n-1} X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-1} + T(X + 1) - a_{n-1}X^{n-1} - T = na_nX^{n-1} + R$ avec $R \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Comme $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on a que : $\boxed{na_n \neq 0 \text{ et ainsi } \deg Q = n - 1 \text{ de coefficient dominant } na_n}$.

5. Par propriété sur le degré d'une dérivée, on sait que : $\deg P^{(k)} = \deg P - k$ si $k \leq \deg P$ ce qui est le cas car la somme va de $k = 0$ à $k = n = \deg P$. Ainsi, on doit trouver le degré d'une somme de polynômes de degré tous différents, et par propriété, on sait alors que le degré correspond au maximum et ainsi on a : $\deg\left(\sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}\right) = \deg P^{(0)} = \deg P = n$. Et le coefficient dominant correspond donc au coefficient dominant de $P^{(0)} = P$, à savoir a_n.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Exprimer de deux façons différentes le coefficient de X^n dans le polynôme : $P = (1+X)^n(1+X)^n$.
2. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Correction 5.

1.
   - On peut par exemple remarquer que $P = (X+1)^{2n}$ et on peut alors utiliser le binôme de Newton qui nous donne : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$. Ainsi le coefficient devant X^n vaut $\binom{2n}{n}$.
   - Mais on peut aussi voir P comme le produit $(X+1)^n \times (X+1)^n$ et en utilisant encore le binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \times \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j \\ &= \left(\binom{n}{0}X^0 + \binom{n}{1}X^1 + \dots + \binom{n}{n}X^n\right) \times \left(\binom{n}{0}X^0 + \binom{n}{1}X^1 + \dots + \binom{n}{n}X^n\right). \end{aligned}$$

   On cherche alors à développer ces deux sommes et à regarder quels sont les termes qui vont faire apparaître du X^n : le X^0 de la première somme doit être multiplié avec du X^n de la deuxième somme, le X de la première somme avec du X^{n-1} de la deuxième somme, ..., le X^{n-1} de la première somme avec le X de la deuxième somme et enfin le X^n de la première somme avec le X^0 de la deuxième somme. Donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le X^k de la première somme doit être multiplié avec le X^{n-k} de la de la deuxième somme. Ainsi, cela nous donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ qui est le terme qui apparaît devant X^n.

   Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.
2. Comme, par symétrie des coefficients binomiaux, on sait que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, la formule précédente devient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 6. Montrer que la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de la forme

$$x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

où P_n esst un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient dominant.

Correction 6. 1. On sait donc que P est de degré 3 et que -1 est racine de P. Ainsi P est de la forme $P = (X+1)(aX^2 + bX + c)$. Puis on utilise le fait que : $P(1) = 4$, $P(-2) = -5$ et $P(2) = 15$. Ces trois conditions permettent d'obtenir le système suivant : $\begin{cases} a+b+c &= 2 \\ 4a - 2b + c &= 5 \\ 4a + 2b + c &= 5 \end{cases}$. La résolution donne : $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$. On a donc ainsi entierement déterminé P : $P = (X+1)(X^2+1)$.

2. Comme $\deg P \leq 2$, on cherche P sous la forme : $P = aX^2 + bX + c$. Les calculs donnent : $P^2 = a^2X^4 + 2abX^3 + (b^2 + 2ac)X^2 + 2bcX + c^2$. Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on doit résoudre le système suivant : $\begin{cases} a^2 & = & 1 \\ ab & = & 1 \\ b^2 + 2ac & = & -3 \\ bc & = & -2 \\ c^2 & = & 4 \end{cases}$. Comme $a^2 = 1$, on a : $a = -1$ ou $a = 1$. De même comme $c^2 = 4$, on a : $c = -2$ ou $c = 2$. Étudions les 4 possibilités que l'on a :

   - si $a = 1$ et $c = 2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$. Mais comme $bc = -2$, $b = -1$: impossible.
   - si $a = -1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = -1$. Mais comme $bc = -2$, $b = 1$: impossible.
   - si $a = 1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$ et ainsi $bc = -2$. Et on a aussi alors $b^2 + 2ac = -3$.
   - si $a = -1$ et $c = 2$: $b = -1$ vérifie bien $ab = 1$, $bc = -2$ et $b^2 + 2ac = -3$.

   Ainsi il y a une deux solutions qui sont : $P = -X^2 - X + 2$ et $P = X^2 + X - 2$.

Racines d'un polynôme

Exercice 7. Trouver toutes les racines de $P = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ dans $\mathbb{C}$.

Correction 7. On peut remarquer que i est racine de P et comme $P \in \mathbb{R}$, on sait donc que $-i$ aussi est racine de P. On peut tout de suite remarquer que i n'est pas racine de P' et donc i et $-i$ sont racines simples de P. On peut aussi remarquer que 2 est racine de P et que $P'(2) \neq 0$. Ainsi 2 est aussi racine simple de P. Ainsi on peut factoriser P par $(X+i)(X-i)(X-2) = (X^2+1)(X-2)$. L'identification des polynômes donne que 3 est racine de P et que P se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme : $\boxed{P = (X-i)(X+i)(X-2)(X-3)}$. On est sûr d'avoir bien trouvé toutes les racines car on a 4 racines et P est un polynôme de degré 4.
Remarque : on peut également trouver la dernière racine en utilisant : $i \times (-i) \times 2 \times x_4 = (-1)^4 \frac{6}{1}$, donc $x_4 = 3$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère les polynômes $A = (X+1)^n - (X-1)^n$ et $B = \left(\sum_{k=0}^{n} X^k\right)^2$.

1. Calculer le degré de ces deux polynômes.
2. Déterminer les racines de ces deux polynômes.

Correction 8.

1. (a) Dans l'exercice ? ? ? on a déjà montré que : $\deg A = n - 1$.
   (b) On a : $B = P^2$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$. On a donc : $\deg B = 2 \deg P$. De plus, $\deg P = n$ donc $\deg B = 2n$.
2. (a) L'idée ici est de se ramener à la résolution d'une équation type racine n-ième de l'unité. On a déjà par définition d'une racine d'un polynôme que : z est racine de A si et seulement si $A(z) = 0$ si et seulement si $(z+1)^n = (z-1)^n$.
   - Comme 1 n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq 1$. Ainsi, on peut bien diviser par $(z-1)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a
   $$(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \Leftrightarrow Z^n = 1$$
   en posant $Z = \frac{z+1}{z-1}$.

- Résolution des racines n-ièmes de l'unité (à savoir faire, cours) : on obtient après calculs que les solutions sont les Z de la forme $Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]$.
- On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\dfrac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. On obtient alors

  $\dfrac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z+1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-1) \Leftrightarrow z\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \Leftrightarrow z\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right).$

  Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :

  $$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = 2k'\pi \Leftrightarrow k = nk'$$

  avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc le seul k qui vérifie cela est $k = 0$.
  - ⋆ Pour $k = 0$, on obtient : $0 = 2$ donc il n'y a pas de solution pour $k = 0$.
  - ⋆ Pour $k \neq 0$, à savoir pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on sait que $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et on peut donc bien diviser. On obtient
  $$z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = -icot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
  en utilisant la méthode de l'angle moitié.
- Les racines de A sont donc $z = -i\cot\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. On les bien toutes trouvées puisque l'on en a $n-1$ et que le polynôme est de degré $n-1$.

(b) On a : z est racine de B si et seulement si $B(z) = 0$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$. Or on reconnaît une somme géométrique et ainsi, on a si $z \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$. On remarque aussi que 1 n'est pas racine car $\sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1 \neq 0$. Donc on peut bien supposer $z \neq 1$. Ainsi, on a : z est racine de B si et seulement si : $\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} = 0 \Leftrightarrow z^{n+1} = 1$. On reconnaît la résolution des racines $n+1$-ième de l'unité. Les calculs donnent : $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ avec $k \in [\![0, n]\!]$. Mais comme $z \neq 1$, on doit enlever le cas $k = 0$ qui donne 1. Ainsi les racines de B sont les complexes de la forme : $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ avec $k \in [\![1, n]\!]$. Et on a bien trouvé toutes les racines puisque l'on en a n et que le degré de P est n.

Exercice 9. Soit n un entier non nul. Montrer que a donné est racine du polynôme et déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine

1. $a = 2$ et $P = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$
2. $a = 1$ et $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$

Correction 9. On regarde si a est racine de P et ainsi a est au moins racine simple. Puis on regarde jusqu'à quelle dérivée de P, a est-elle encore racine, ce qui donne l'ordre de multiplicité de la racine a.

1. Les calculs donnent que : $P(2) = 0 = P'(2) = P^{(2)}(2)$ et $P^{(3)}(2) \neq 0$. Ainsi 2 est racine triple de P.
2. Les calculs donnent que : $P(1) = 0 = P'(1) = P^{(2)}(1)$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$. Ainsi 1 est racine triple de P.

Exercice 10. Déterminer le nombre a de manière à ce que le polynôme $P = X^5 - aX^2 - aX + 1$ ait -1 comme racine au moins double.

Correction 10. Pour que -1 soit racine au moins double de P, on doit avoir : $P(-1) = 0 = P'(-1)$. Les calculs donnent que : $P(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$ donc -1 est racine au moins simple de P sans condition sur a. On a de plus : $P' = 5X^4 - 2aX - a$. Ainsi, on obtient : $P'(-1) = 0 \Leftrightarrow a = -5$.
Donc $\boxed{-1 \text{ racine au moins double de } P \text{ si et seulement si } a = -5}$.

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et les polynômes

$$P = 1 + X + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{n!} \text{ et } Q = \frac{(X+n)(X+n-1)(X+n-2)\dots(X+1)}{n!}.$$

1. Calculer les degrés de P et de Q ainsi que $P(0)$ et $Q(0)$.
2. Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $Q(i) = \binom{n+i}{i}$.
3. Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $P(i) = \sum_{k=0}^{n} \binom{i+k-1}{k}$.
4. En déduire que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on a : $Q(i) = P(i)$
5. En déduire que $P = Q$.

Correction 11.

Factorisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ et conséquences

Exercice 12. À quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $B = X^2 + X + 1$ divise-t-il le polynôme $A = X^4 + aX^2 + bX + c$?

Correction 12. Les racines de B sont j et j^2. Pour que B divise A, il suffit donc que j et j^2 soient racines de A, c'est-à-dire que l'on ait

$$\left\{\begin{array}{rcl} j^4 + aj^2 + bj + c &=& 0 \\ j^8 + aj^4 + bj^2 + c &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} aj^2 + (b+1)j + c &=& 0 \\ aj + (b+1)j^2 + c &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} aj^2 + (b+1)j + c &=& 0 \\ a(j-j^2) + (b+1)(j^2-j) &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& -a(j^2+j) = -a \\ b &=& a-1 \end{array}\right.$$

On en déduit que les polynômes A doivent être de la forme $A = X^4 + aX^2 + (a-1)X - a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Factoriser dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ lorsque cela a un sens les polynômes suivants :

1. $P = X^3 + 1$
2. $P = (X+i)^n - (X-i)^n$
3. $P = X^6 - 1$
4. $P = X^8 + X^4 + 1$
5. $P = X^4 - 2X^2 - 8$
6. $P = X^n - 1$
7. $P = X^4 + 4$
8. $P = X^5 + 32$
9. $P = (2X-1)^n - (-2X+3)^n$
10. $P = X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ sachant que $i+1$ est racine dans $\mathbb{C}$

Correction 13. On ne donne ici que des indications sur la méthode et le résultat final. On peut remarquer que pour passer de la factorisation dans $\mathbb{C}$ à la factorisation dans $\mathbb{R}$, on a toujours :

$$(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - (z+\overline{z})X + z\overline{z} = X^2 - 2\mathfrak{Re}(z)X + |z|^2.$$

1.
   - Racines complexes de P : on calcule avec la méthode habituelle les racines troisièmes de $-1 = e^{i\pi}$. On obtient -1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{\pi}{3}}$, 3 racines simples.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = (X+1)(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})}$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P = (X+1)(X^2 - X + 1)}$.
2.
   - Racines complexes de P. On résout l'équation $P(z) = 0$:

- $\star$ Comme i n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq i$. Ainsi, on peut diviser par $(z-i)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a

$$(z+i)^n = (z-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow Z^n = 1$$

en posant $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$.

- $\star$ Résolution des racines n-ièmes de l'unité : on obtient (à détailler, voir cours) que les solutions sont les Z de la forme

$$Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

- $\star$ On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\dfrac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. On obtient alors

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z+i = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-i) \Leftrightarrow z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -ie^{\frac{2ik\pi}{n}} - i \Leftrightarrow z\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) = i\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right).$$

Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = 2k'\pi \Leftrightarrow k = nk'$$

avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc le seul k qui vérifie cela est $k = 0$.

  - $\star$ Pour $k = 0$, on obtient : $0 = 2i$ donc il n'y a pas de solution pour $k = 0$.
  - $\star$ Pour $k \neq 0$, à savoir pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on sait que $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et on peut donc bien diviser. On obtient, en utilisant la méthode de l'angle moitié :

$$z = \frac{i\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = \frac{2i\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

- $\star$ Les racines de A sont donc $z = \cot\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$.

- Factorisation dans $\mathbb{C}$: avant de factoriser, on doit trouver le coefficient dominant du polynôme. Pour cela, on utilise la formule du binôme de Newton, et on sort les termes en X^n (qui se simplifient) et en X^{n-1} :

$$\begin{aligned} P = (X+i)^n - (X-i)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k i^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-i)^{n-k} \\ &= X^n + niX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k i^{n-k} - \left(X^n - niX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k (-i)^{n-k}\right) \\ &= 2niX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k (i^{n-k} - (-i)^{n-k}) \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme est de degré $n-1$ (ce qui est cohérent puisqu'on a trouvé $n-1$ racines complexes), et son coefficient dominant est $2ni$. On peut donc factoriser : $\boxed{P = 2ni \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}$.

3. - Racines complexes de P : Racines 6-ièmes de l'unité : -1, 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}$: 6 racines simples pour un polynôme de degré 6.

- Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P=(X-1)(X+1)(X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{i\frac{2\pi}{3}})(X-e^{i\frac{4\pi}{3}})(X-e^{i\frac{5\pi}{3}})}$.
- Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P=(X+1)(X-1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)}$ car $(X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{i\frac{5\pi}{3}})=X^2-X+1$ et $(X-e^{i\frac{2\pi}{3}})(X-e^{i\frac{4\pi}{3}})=X^2+X+1$.

4. - Racines complexes de P : il faut remarquer que : $P=Q(X^4)$ avec $Q=Y^2+Y+1$. Les racines de Q sont $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ainsi, z est racine de P si seulement si $Q(z^4)=0\Leftrightarrow z^4=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z^4=e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Il faut donc calculer les racines quatrièmes des nombres complexes $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. On obtient : $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{8\pi}{12}}$, $e^{i\frac{14\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{20\pi}{12}}$ pour les racines quatrièmes du nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{i\frac{8\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{11\pi}{6}}$ pour les racines quatrièmes du nombre complexe $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. On a ainsi bien obtenu 8 racines simples distinctes.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$:
$$\boxed{P=(X-e^{i\frac{\pi}{6}})(X-e^{i\frac{2\pi}{3}})(X-e^{i\frac{7\pi}{6}})(X-e^{i\frac{5\pi}{3}})(X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{i\frac{5\pi}{6}})(X-e^{i\frac{4\pi}{3}})(X-e^{i\frac{11\pi}{6}})}.$$
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: on regroupe ensemble les racines conjuguées et on obtient :
$$\boxed{P=(X^2-X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)\left(X^2+X+1\right)}.$$

5. - Racines complexes de P : il faut remarquer que : $P=Q(X^2)$ avec $Q=Y^2-2Y-8$. Les racines de Q sont -2 et 4. Ainsi, z est racine de P si seulement si $Q(z^2)=0\Leftrightarrow z^2=-2$ ou $z^2=4$. Il faut donc calculer les racines seconde des nombres $-2=2e^{i\pi}$ et 4. On obtient : -2, 2, $-\sqrt{2}i$ et $\sqrt{2}i$.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P=(X-2)(X+2)(X-\sqrt{2}i)(X+\sqrt{2}i)}$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P=(X-2)(X+2)(X^2+2)}$.

6. - Racines complexes de P : Racines n-ièmes de l'unité. On obtient $z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k\in[\![0,n-1]\!]$.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: A ne pas faire.

7. - Racines complexes de P : Racines quatrièmes de -4 : $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}$ et $\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}}$: 4 racines simples pour un polynôme de degré 4.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P=(X-\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}})}$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P=(X^2-2X+2)(X^2+2X+2)}$.

8. - Racines complexes de P : Racines cinquièmes du nombre $-32=32e^{i\pi}$. Les racines sont : -2, $2e^{i\frac{\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{7\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{9\pi}{5}}$: 5 racines simples pour un polynôme de degré 5.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P=(X+2)(X-2e^{i\frac{\pi}{5}})(X-2e^{i\frac{3\pi}{5}})(X-2e^{i\frac{7\pi}{5}})(X-2e^{i\frac{9\pi}{5}})}$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $\boxed{P=(X+2)\left(X^2-4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)X+4\right)\left(X^2-4\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)X+4\right)}$.

9. - Racines complexes de P : z est racine de P si et seulement si $(2z-1)^n=(-2z+3)^n$. Le but est alors de se ramener à la résolution des racines n-ième de l'unité.
     - ⋆ Comme $\frac{3}{2}$ n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z\neq\frac{3}{2}$. Ainsi, on peut bien diviser par $(-2z+3)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a
$$(2z-1)^n=(-2z+3)^n\Leftrightarrow\left(\frac{2z-1}{-2z+3}\right)^n=1\Leftrightarrow Z^n=1$$
en posant $Z=\frac{2z-1}{-2z+3}$.

- ⋆ Résolution des racines n-ièmes de l'unité : on obtient que les solutions sont les Z de la forme
$$Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$
- ⋆ On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\dfrac{2z-1}{-2z+3} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. On obtient alors
$$\frac{2z-1}{-2z+3} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow 2z-1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(-2z+3) \Leftrightarrow 2z\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = 3e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1.$$
Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :
$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = \pi + 2k'\pi \Leftrightarrow k = \frac{n}{2} + nk'$$
avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc le seul k qui pourrait vérifier cela est $k = \dfrac{n}{2}$. Ainsi on doit distinguer deux cas selon que n est pair ou impair :
  - ∘ Si n est pair alors $\dfrac{n}{2}$ est bien un nombre entier et on doit donc prendre $k \neq \dfrac{n}{2}$ si on veut diviser.
  - ∘ Si n est impair alors $\dfrac{n}{2}$ n'est pas un nombre entier et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a bien $e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1 \neq 0$.

  On peut alors finir la résolution :
  - ∘ Pour n pair, on obtient : z racine de P si et seulement si : $z = \dfrac{3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{2(e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1)} = \dfrac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $k \neq \dfrac{n}{2}$. On obtient ainsi $n-1$ racines complexes distinctes et P est bien un polynôme de degré $n-1$ quand n est pair car le terme en X^n s'annule.
  - ∘ Pour n impair, on obtient : z racine de P si et seulement si : $z = \dfrac{3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{2(e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1)} = \dfrac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. On obtient ainsi n racines complexes distinctes et P est bien un polynôme de degré n quand n est impair car le terme en X^n ne s'annule pas.

- • Factorisation dans $\mathbb{C}$: Il faut connaître le coefficient dominant. On utilise pour cela le binôme de Newton et on regarde le terme en X^n pour n impair et le terme en X^{n-1} pour n pair. On a : $P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}2^k X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}3^{n-k}(-2)^k X^k$. Ainsi le terme en X^n est $2^n - (-2)^n$ qui s'annule bien quand n est pair et qui vaut 2^{n+1} si n est impair. Et le terme en X^{n-1} vaut lorsque n est pair à savoir $n-1$ impair : $-n2^{n-1} - 3n(-2)^{n-1} = n2^n$.
  - ⋆ Cas 1 : n pair :

    On obtient : $\boxed{P = n2^n \prod_{k=0,\ k\neq\frac{n}{2}}^{n} \left(X - \dfrac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}$.
  - ⋆ Cas 2 : n impair :

    On obtient : $\boxed{P = 2^{n+1} \prod_{k=0}^{n} \left(X - \dfrac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}$.
- • Factorisation dans $\mathbb{R}$: à ne pas faire.

10. • Racines complexes de P : On sait que $1+i$ est racine complexe de P. Comme $P \in \mathbb{R}$, on a donc aussi que $1-i$ est racine complexe de P. Ainsi $P = (X-(1+i))(X-(1-i))Q = (X^2-2X+2)Q$ avec Q polynôme de degré 2. En cherchant Q sous la forme $Q = aX^2 + bX + c$ et par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient : $Q = X^2 + 5X - 6$. Le discriminant vaut $\Delta = 7$ et les racines sont 1 et -6. Ainsi on a trouvé 4 racines pour un polynôme de degré 4, on les a toutes.

- Factorisation dans $\mathbb{C}$: $P = (X-1)(X+6)(X-(1+i))(X-(1-i))$.
- Factorisation dans $\mathbb{R}$: $P = (X-1)(X+6)(X^2-2X+2)$.

Exercice 14. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et le polynôme $P = X^4 + aX^2 + bX + 1$.

1. Trouver a et b de telle sorte que $1-i$ soit racine de P.
2. Dans ce cas, trouver toutes les autres racines complexes de P.
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

Correction 14.

1. On cherche donc a et b tels que $P(1-i) = 0$. On doit donc trouver a et b tels que : $(1-i)^4 + a(1-i)^2 + b(1-i) + 1 = 0$. On développe et on identifie la partie réelle et la partie imaginaire qui doivent donc être toutes les deux nulles. On obtient que $b = 3$ et $a = -\frac{3}{2}$. Ainsi $P = X^4 - \frac{3}{2}X + 3X + 1$.
2. Comme $P \in \mathbb{R}$ et que $1-i$ est racine de P, on sait aussi que $1+i$ est racine de P et ainsi P se factorise sous la forme : $P = (X-(1+i))(X-(1-i))(aX^2+bX+c) = (X^2-2X+2)(aX^2+bX+c)$. On développe et on identifie et on obtient : $P = (X-(1+i))(X-(1-i))(X^2+2X+\frac{1}{2})$. Le discriminant de $X^2+2X+\frac{1}{2}$ vaut : $\Delta = 2$ et les deux racines sont $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
3.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $P = (X-(1+i))(X-(1-i))(X-(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}))(X+1+\frac{1}{\sqrt{2}})$.
   - Factorisation dans $\mathbb{R}$: $P = (X^2-2X+2)(X-(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}))(X+1+\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Exercice 15. Soient trois scalaires $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ et le polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.
On suppose que u, v, w sont les trois racines complexes de P. Montrer que

$$u+v+w = -a \qquad uv+vw+uw = b \qquad \text{et} \qquad uvw = -c.$$

Correction 15. Idée : relation coefficients-racines :
On sait que $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ et on sait aussi que u, v et w sont les racines complexes de P ainsi P se factorise sous la forme : $P = (X-u)(X-v)(X-w)$. Il s'agit alors de développer le produit $(X-u)(X-v)(X-w)$ et d'utiliser ensuite l'unicité des coefficients d'un polynôme. On obtient : $(X-u)(X-v)(X-w) = X^3 - (u+v+w)X^2 + (uv+uw+vw)X - uvw$. Ainsi par identification, on a :

$$u+v+w = -a \qquad uv+uw+vw = b \qquad uvw = -c.$$

Exercice 16. Soit $n \geq 2$, on pose $P = (X+1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.
2. On note Q le polynôme de $\mathbb{C}$ tel que : $P = XQ$. À l'aide des racines de Q, déterminer la valeur de :

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Correction 16.

1. On cherche les racines complexes, soi $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)^n = 1 \Leftrightarrow z+1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}, \quad \text{avec } k \in [\![0, n-1]\!].$$

   On a utilisé en particulier l'expression des racines n-ièmes de l'unité et la méthode de l'angle moitié. Comme le coefficient dominant de P vaut 1, on en déduit la factorisation suivante :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$$

2. $\star$ En prenant $k=0$, on remarque que 0 est racine de P, et que P se factorise sous la forme

$$P = X\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = XQ,$$

et les racines de Q sont donc : $2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$.
On en déduit que le produit des racines de Q vaut :

$$\begin{aligned} B = \prod_{k=1}^{n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}} &= 2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi}{n}(1+\cdots+(n-1))} \times A \\ &= 2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi n(n-1)}{2n}} \times A \\ &= 2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} \times A \\ &= 2^{n-1}(i)^{n-1}(i)^{n-1} \times A = 2^{n-1}(-1)^{n-1}A. \end{aligned}$$

$\star$ De plus, en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient que :

$$P = X^n + nX^{n-1} + \cdots + nX + 1 - 1 = X\left(X^{n-1} + nX^{n-2} + \cdots + n\right)$$

et ainsi $Q = X^{n-1} + nX^{n-2} + \cdots + n$.
$\star$ Les relations coefficients-racines appliquées au polynôme Q donnent alors que :

$$\begin{aligned} B &= \frac{(-1)^{n-1}\text{coeff constant de } Q}{\text{coeff dominant de } Q} \\ \Leftrightarrow & \prod_{k=1}^{n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}} = (-1)^{n-1}n \\ \Leftrightarrow & \ 2^{n-1}(-1)^{n-1}A = (-1)^{n-1}n. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que $\boxed{A = \frac{n}{2^{n-1}}}$.

Exercice 17. Soit a un réel, n un entier naturel non nul et

$$Z = \prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{4ki\pi}{n}} - 2\cos(a)e^{\frac{2ki\pi}{n}} + 1\right).$$

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$: $P(X) = X^2 - 2\cos(a)X + 1$.
2. En déduire une factorisation de Z.
3. Simplifier Z.

Correction 17. 1. Le discriminant vaut $\Delta = -4\sin^2(a)$. Ainsi $\sqrt{\Delta} = 2i|\sin a|$. Les racines sont alors après étude de cas pour enlever la valeur absolue : e^{ia} et e^{-ia}.

2. On remarque qu'en posant $X = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, on a : $Z = \prod_{k=0}^{n}(X^2 - 2\cos aX + 1) = \prod_{k=0}^{n}(X - e^{ia})(X - e^{-ia}) = \prod_{k=0}^{n}(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{ia})(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{-ia})$.

3. On utilise alors la méthode de l'angle moitié afin de simplifier l'expression ci-dessus et on obtient :

$$Z=\prod_{k=0}^{n} e^{\frac{ik\pi}{n}+\frac{ia}{2}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}-\frac{ia}{2}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}+\frac{ia}{2}}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}-\frac{ia}{2}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}+\frac{ia}{2}}-e^{-(\frac{ik\pi}{n}+\frac{ia}{2})}\right)=\prod_{k=0}^{n}-4e^{\frac{i2k\pi}{n}}\sin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{a}{2}\right)$$

Il s'agit alors de remarquer que : $\prod\limits_{k=0}^{n} e^{\frac{i2k\pi}{n}}=e^{\frac{2i\pi}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}k}=e^{i(n-1)\pi}=(-1)^{n-1}$. Ainsi, on obtient que :

$$Z=4^n(-1)^n(-1)^{n-1}\prod_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{a}{2}\right)=-4^n\prod_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{a}{2}\right).$$

Résolutions d'équations avec des polynômes

Exercice 18. Expression de sommes.

1. Trouver un polynôme P de degré 3 tel que : $P-P(X+1)=X^3$.

   En déduire la valeur de : $\sum\limits_{k=0}^{n}k^3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré 4 tel que : $P(X+1)-P=X(X-1)(X-2)$

   En déduire pour tout $n\geq 1$ une expression simple de $S=\sum\limits_{k=1}^{n}k(k-1)(k-2)$.

Correction 18. 1. • On cherche donc P sous la forme $P=aX^4+bX^3+cX^3+dX+e$ vérifiant : $P-P(X+1)=X^3$. On commence par calculer $P-P(X+1)$ et on obtient : $P-P(X+1)=-4aX^3+(-6a-3b)X^2+(-4a-3b-2c)X-a-b-c-d$. Comme on veut $P-P(X+1)=X^3$, par unicité des coeficients d'un polynôme, on obtient le système suivant à résoudre : $\begin{cases}-4a & = & 1\\ -6a-3b & = & 0\\ -4a-3b-2c & = & 0\\ -a-b-c-d & = & 0\end{cases}$ La résolution donne : $a=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{4}$ et $d=0$. Il n'y a pas de condition sur e que l'on prend donc égal à 0. Ainsi, on a : $P=-\frac{1}{4}X^4+\frac{1}{2}X^3-\frac{1}{4}X^2$.

   • Comme l'égalité démontrée ci-dessus est une égalité entre deux polynômes, elle est en particulier vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$, à savoir : $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)-P(x+1)=x^3$. En particulier elle est aussi vraie pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, à savoir : $P(k)-P(k+1)=k^3$. Ainsi, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n}k^3=\sum\limits_{k=0}^{n}P(k)-P(k+1)=\sum\limits_{k=0}^{n}P(k)-\sum\limits_{k=0}^{n}P(k+1)$ par linéarité. On reconnaît alors une somme télescopique et on obtient : $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2=\sum\limits_{k=0}^{n}P(k)-\sum\limits_{k=1}^{n+1}P(k)=P(0)-P(n+1)$. Mais on connaît aussi l'expression de P et ainsi, on obtient : $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2=\frac{1}{4}(n+1)^4-\frac{1}{2}(n+1)^3+\frac{1}{4}(n+1)^2=\frac{(n+1)^2}{4}\left((n+1)^2-2(n+1)+1\right)=\frac{(n(n+1))^2}{4}$. On retrouve ainsi l'expression connue.

2. C'est exactement la même chose. A faire.

Exercice 19. Pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P)=(3X+1)P-X(X-1)P'.$$

1. Vérifier que φ définit bien une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\varphi\left(\mathbb{R}_n[X]\right) \subset \mathbb{R}_n[X]$?
   (b) Pour ces valeurs de n, déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\varphi(P) = X^2$.

Correction 19.

1. Soit $P \in \mathbb{R}$, on a alors que : $\varphi(P) = (3X+1)P - X(X+1)P'$. Comme P est un polynôme et que la dérivée d'un polynôme est un polynôme, on sait que $P' \in \mathbb{R}$. De plus $3X+1$ et $X(X+1)$ sont aussi des polynômes et ainsi $\varphi(P)$ est un polynôme comme produit et somme de polynômes. Donc si $P \in \mathbb{R}$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.
2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on cherche à savoir sous quelles conditions, on a aussi $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Il faut donc étudier le degré de $\varphi(P)$ sachant que $P = a_nX^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $a_n \neq 0$. Par définition de $\varphi(P)$, on a : $\deg \varphi(P) \leq n+1$. En effet, par propriété sur le degré d'un produit, d'une dérivée et d'une somme de polynômes de même degré, on a : $\deg (3X+1)P = n+1$, $\deg X(X-1)P' = n+1$ et ainsi $\deg \varphi(P) \leq n+1$. On obtient que : $\varphi(P) = (3X+1)(a_nX^n + Q) - X(X-1)(na_nX^{n-1} + Q')$. Étudions le terme en X^{n+1} afin de voir sous quelle condition le coefficient devant ce terme s'annule. On a : $\varphi(P) = 3a_nX^{n+1} - na_nX^{n+1} + R$ avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour que $\deg \varphi(P) \leq n$, on doit donc avoir : $(3-n)a_n = 0$. Comme $a_n \neq 0$, cela impose que $n = 3$ et ainsi cela impose que le degré de P soit 3. Ainsi $\varphi\left(\mathbb{R}_n[X]\right) \subset \mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $n = 3$.
   (b) P est donc un polynôme de degré 3 et ainsi il est de la forme : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On cherche alors à résoudre $\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow (3X+1)P - X(X-1)P' = 0$. Les calculs donnent : $(b+4a)X^3 + (2c+3b)X^2 + (3d+2c)X + d = 0$. Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient : $a = b = c = d = 0$ et ainsi seul le polynôme nul convient.
3. Les deux questions précédentes ont permis de montrer que si $n \neq 3$ et $\deg P = n$ alors $\deg(\varphi(P)) = n+1$ et si $n = 3$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Ainsi pour que $\varphi(P) = X^2$, il faut soit que $\deg P = 1$, soit que $\deg P = 3$. On étudie ainsi chacun de ces cas :
   - Cas 1 : si $n = 1$: $P = aX + b$:
     On doit donc avoir : $(3X+1)(aX+b) - X(X-1)a = X^2$ et en développant le terme de gauche et par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient le système linéaire suivant à résoudre : $\begin{cases} 2a & = 1 \\ 2a + 3b & = 0 \\ b & = 0 \end{cases}$. Ce système est incompatible et ainsi il n'existe aucun P de degré 1 vérifiant $\varphi(P) = X^2$.
   - Cas 2 : si $n = 3$: $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$:
     En reprenant les mêmes calculs que dans la questions 2(a), on a : $(b+4a)X^3 + (2c+3b)X^2 + (3d+2c)X + d = X^2$ et on doit donc résoudre le système suivant : $\begin{cases} b + 4a & = 0 \\ 2c + 3b & = 1 \\ 3d + 2c & = 0 \\ d & = 0 \end{cases}$. La résolution donne : $a = -\dfrac{1}{12}$, $b = \dfrac{1}{3}$ et $c = d = 0$. Ainsi on obtient qu'il existe un seul polynôme P vérifiant $\varphi(P) = P^2$, le polynôme : $P = -\dfrac{1}{12}X^3 + -\dfrac{1}{3}X^2$.

Exercice 20. On cherche ici à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P$. Quel est son degré ?
2. Déterminer P à l'aide d'une identification des coefficients.
3. Retrouver l'expression de P en déterminant ses racines.

Correction 20.

1. On suppose que $P \in \mathbb{R}$ vérifie $P(X^2) = (1+X^2)P$. Condition sur le degré : Le polynôme nul convient bien. Sinon, si P est de degré n, alors on a : $\deg P(X^2) = 2n$ et $\deg\left((1+X^2)P\right) = 2+n$ par propriétés sur le degré d'un produit et d'une composée. Ainsi, on doit avoir : $2n = n+2 \Leftrightarrow n = 2$. Ainsi P est un polynôme de degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.
2. Identification des coefficients : On a donc d'un côté : $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$ et de l'autre côté : $(1+X^2)P = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$. Par identification des coefficents d'un polynôme, on obtient que : $\begin{cases} a &= a \\ b &= 0 \\ a+c &= b \\ c &= c \end{cases}$. Ainsi, on obtient que $b = 0$ et $a = -c$ et P est de la forme $P = aX^2 - a = a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   Synthèse : soit $P = a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Il vérifie bien $P(X^2) = (1+X^2)P$. Ainsi les polynômes vérifiant la relation sont exactement les polynômes de type $a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. On veut retrouver ce résultat d'une autre manière. On cherche donc les deux racines de P : montrons que 1 et -1 conviennent. On a :
$$P(1^2) = (1^2+1)P(1) \;\Rightarrow\; P(1) = 2P(1) \;\Rightarrow\; P(1) = 0,$$
   donc 1 est bien racine de P. De même :
$$P((-1)^2) = ((-1)^2+1)P(-1) \;\Rightarrow\; P(1) = 2P(-1) \;\Rightarrow\; P(-1) = \frac{P(1)}{2} = 0,$$
   donc -1 est bien racine de P. On sait que P est de degré 2, donc on a trouvé toutes les racines, et P peut donc s'écrire $P = a(X-1)(X+1)$, avec $a \in \mathbb{R}^\star$. On retrouve bien que les solutions sont les polynômes de la forme $\boxed{P = a(X^2-1), \text{ avec } a \in \mathbb{R}^\star}$.

II Type DS

Exercice 21. Polynômes de Tchebychev de première espèce :
On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ par
$$\begin{cases} P_0 = 1 \quad P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n. \end{cases}$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4. Déterminer également les racines de ces trois polynômes.
2. Déterminer pour tout $n \geq 0$ le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P_n(1)$.
4. Soit $n \geq 0$.
   (a) Montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos t) = \cos(nt).$$
   (b) Réciproquement, montrer que si Q_n est un polynôme tel que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q_n(\cos t) = \cos(nt)$$
   alors $P_n = Q_n$.
5. Etudier la parité de P_n. On pourra s'intéresser au polynôme $Q = P_n(-X) - (-1)^n P_n$.
6. Soit $n \geq 0$.
   (a) Déterminer les racines de P_n sur $[-1, 1]$.
   (b) En déduire toutes les racines de P_n.

Correction 21. Polynômes de Tchebychev de première espèce :
Dans cet exercice très classique, il y a deux idées importantes :

- Les polynômes étant définis par une relation de récurrence d'ordre deux, beaucoup de propriétés vont se démontrer par une récurrence double.
- L'idée selon laquelle deux polynômes sont égaux dès qu'ils sont égaux pour une infinité de valeurs ou ce qui revient au même : un polynôme est nul dès qu'il a une infinité de racines.

1. - Le calcul donne : $P_2 = 2X^2 - 1$ et les racines sont : $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
   - Le calcul donne : $P_3 = 2^2X^3 - 3X$ et les racines sont : 0, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   - Le calcul donne : $P_4 = 2^3X^4 - 8X^2 + 1$.
2. On peut conjecturer que le degré de P_n est n et son coefficient dominant : 2^{n-1} pour $n \geq 1$.
   - On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\deg P_n = n$ et $a_n = 2^{n-1}$ avec a_n le coefficient dominant de P_n.
   - Initialisation : pour $n = 1$ et $n = 2$:
     Par définition de la suite des polynômes, on a : $P_1 = X$ et les calculs ont donné $P_2 = 2X^2 - 1$. Ainsi on a bien $\deg P_1 = 1$ et $\deg P_2 = 2$. De plus on a : $a_1 = 1$ et $2^0 = 1$ et $a_2 = 2$ et $2^1 = 2$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on veut montrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Ainsi par hypothèse de récurrence, on sait que $P_n = 2^{n-1}X^n + T$ et $P_{n+1} = 2^nX^{n+1} + S$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $S \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme par définition de la suite de polynômes, on a : $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$, on obtient :
     $$P_{n+2} = 2X(2^nX^{n+1} + S) - 2^{n-1}X^n - T = 2^{n+1}X^{n+2} + 2XS - 2^{n-1}X^n - T = 2^{n+1}X^{n+2} + R$$
     avec $R = 2XS - 2^{n-1}X^n - T \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ par propriétés sur le degré de produits et de sommes de polynômes. Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1}.
3. On remarque que $P_0(1) = P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = P_4(1)$. Ainsi on peut conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :$P_n(1) = 1$.
   - On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $P_n(1) = 1$.
   - Initialisation : pour $n = 0$ et $n = 1$:
     Par définition de la suite des polynômes, on a : $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. Ainsi on a bien $P_0(1) = 1$ et $P_1(1) = 1$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on veut montrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Ainsi par hypothèse de récurrence, on sait que $P_n(1) = 1$ et $P_{n+1}(1) = 1$. Comme par définition de la suite de polynômes, on a : $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$, on obtient : $P_{n+2}(1) = 2P_{n+1}(1) - P_n(1) = 2 - 1 = 1$. Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P_n(1) = 1$.
4. (a) - On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall t \in \mathbb{R},\ P_n(\cos t) = \cos(nt)$.
   - Initialisation : pour $n = 0$ et $n = 1$:
     Par définition de la suite des polynômes, on a : $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $P_0(\cos(t)) = 1$ et $P_1(\cos t) = \cos(t)$. Comme on a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\cos(0 \times t) = \cos(0) = 1$ et $\cos(1 \times t) = \cos t$, on a bien $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ vraies.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on veut montrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Ainsi par hypothèse de récurrence, on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos t) = \cos(nt)$ et $P_{n+1}(\cos(t)) = \cos((n+1)t)$. Comme par définition de la suite de polynômes, on a : $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$: $P_{n+2}(\cos(t)) = 2\cos(t)P_{n+1}(\cos(t)) - P_n(\cos(t)) =$

$2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos(nt)$. On utilise alors le formulaire de trigonométrie qui donne que : $2\cos(t)\cos((n+1)t) = \cos((n+2)t) + \cos(nt)$. Ainsi on obtient bien que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $P_{n+2}(\cos(t)) = \cos((n+2)t)$. Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $P_n(\cos t) = \cos(nt)$.

(b) Soit Q_n qui vérifie la relation : $\forall t \in \mathbb{R},\ Q_n(\cos t) = \cos(nt)$.

- On obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_{n+2}(\cos t) = \cos((n+2)t)$ par hypothèse. En utilisant alors la relation obtenue dans le raisonnement par récurrence fait ci-dessus, on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\cos((n+2)t) = 2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos(nt)$. Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_n(\cos t) = 2\cos(t)Q_{n+1}(\cos t) - Q_n(\cos t)$ car par hypothèse, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $Q_n(\cos t) = \cos(nt)$.
  On obtient aussi pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_0(\cos t) = \cos(0 \times t) = 1$ et $Q_1(\cos(t)) = \cos(1 \times t) = \cos(t)$.
- La première chose à remarquer est que lorsque t parcourt $\mathbb{R}$ tout entier, $\cos t$, lui, parcourt $[-1,1]$ tout entier.
  - ⋆ Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_0(\cos t) = 1$, les deux polynômes Q_0 et 1 sont donc égaux sur tout l'intervalle $[-1,1]$. Ainsi on a deux polynômes qui sont égaux pour une infinité de points (tous les réels compris entre -1 et 1), ainsi les deux polynômes sont égaux. Donc $Q_0 = 1$.
  - ⋆ De même, comme pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_1(\cos t) = \cos t$, les deux polynômes Q_0 et X sont donc égaux sur tout l'intervalle $[-1,1]$. Ainsi on a deux polynômes qui sont égaux pour une infinité de points (tous les réels compris entre -1 et 1), ainsi les deux polynômes sont égaux. Donc $Q_1 = X$.
  - ⋆ De même, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q_{n+2}(\cos t) = 2\cos t Q_{n+1}(\cos t) - Q_n(\cos t)$, les deux polynômes Q_{n+2} et $2XQ_{n+1} - Q_n$ sont donc égaux sur tout l'intervalle $[-1,1]$. Ainsi on a deux polynômes qui sont égaux pour une infinité de points (tous les réels compris entre -1 et 1), ainsi les deux polynômes sont égaux. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - Q_n$.
- On a ainsi montré que les polynômes Q_n sont aussi définis par : $\begin{cases} Q_0 = 1 \quad Q_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - Q_n. \end{cases}$.
  Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Q_n = P_n$.

On a donc démontré que l'égalité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos t) = \cos(nt)$ détermine de façon unique les polynômes et est équivalente à la définition par récurrence de la suite de polynômes.

5. Maintenant on a deux définitions possibles pour la suite de polynômes P_n : soit celle par récurrence, soit celle avec le cosinus. Cela nous donne donc deux types de raisonnement possibles pour obtenir des propriétés sur P_n : soit par récurrence double, soit avec l'idée d'obtenir une infinité de racines : tout l'intervalle $[-1,1]$.
   - On commence par calculer $Q(\cos(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q(\cos(t)) = P_n(-\cos t) - (-1)^n P_n(\cos t) = P_n(\cos(t+\pi)) - (-1)^n \cos(nt)$ en utilisant le formulaire de trigonométrie et la caractérisation de P_n avec le cosinus. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a aussi : $P_n(\cos(t+\pi)) = \cos(nt + n\pi) = (-1)^n \cos(nt)$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Q(\cos t) = 0$.
   - Ainsi on a montré que pour tout $x \in [-1,1]$, on a : $Q(x) = 0$. En effet, on sait que lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, $\cos t$ parcourt $[-1,1]$. Ou encore on sait que la fonction cosinus est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$ ce qui assure que pour tout $x \in [-1,1]$, il existe bien $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos t$. Si on veut l'unicité du t, il faut prendre $t \in [0,\pi]$ par exemple car la fonction cosinus est bijective de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. Comme pour tout $x \in [-1,1]$, on a : $Q(x) = 0$, le polynôme Q a donc une infinité de racines et ainsi $Q = 0$.
   - On vient donc de montrer que : $P_n(-X) = (-1)^n P_n$. Ainsi si n est pair, P_n est une fonction paire, tandis que si n est impair, P_n est une fonction impaire ($\mathbb{R}$ est bien centré en 0 et les polynômes sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier).
6. (a) $x \in [-1,1]$ est racine de P_n si et seulement si $P_n(x) = 0$. Mais comme $x \in [-1,1]$, on sait qu'il existe un unique $t \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos t$. Ainsi on a : $x = \cos t \in [-1,1]$ est racine de P_n si et seulement si $P_n(x) = 0 = P_n(\cos(t)) = \cos(nt)$. On doit donc résoudre $\cos(nt) = 0$ avec $t \in [0,\pi]$. On obtient :

$\cos(nt) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ nt = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ t = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$. De plus, on veut, afin que toutes les racines soient bien distinctes, que $t \in [0, \pi]$. On doit donc résoudre : $0 \leq \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} + k \leq n \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2}$. Comme de plus k est un entier, on obtient que $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ainsi, on a obtenu que $x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont n racines distinctes de P_n toutes dans $[-1, 1]$.

(b) On vient de trouver n racines distinctes. Or on sait de plus que P_n est un polynôme de degré n, ainsi on les a toutes trouvées.

Exercice 22. On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} P_0 = 1,\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} + \left(1 - \frac{X^2}{4}\right) P_n. \end{cases}$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré inférieur ou égal à n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le coefficient d'indice n de P_n.
   (a) Donner les valeurs de $a_0,\ a_1,\ a_2$ et a_3.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{a_n}{4}$.
   En déduire une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis le degré du polynôme P_n.

Correction 22.

1. On obtient $P_2 = \frac{3}{4}X^2 + 1$ et $P_3 = \frac{1}{2}X^3 + 2X$.
2. Montrons par recurrence double la propriété H_n : $\deg(P_n) \leq n$.
   - Initialisation : On a $\deg(P_0) = 0 \leq 0$ et et $\deg(P_1) = 1 \leq 1$, donc H_0 et H_1 sont vraies.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose H_n et H_{n+1} vraies, montrons que H_{n+2} est vraie.
   D'après H_n et H_{n+1}, et peut écrire $P_n = a_nX^n + R$ et $P_{n+1} = a_{n+1}X^{n+1} + S$ avec $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $S \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc on obtient, par définition de la suite :

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= X(a_{n+1}X^{n+1} + S) + \left(1 - \frac{X^2}{4}(a_nX^n + R\right) \\ &= \left(a_{n+1} - \frac{a_n}{4}\right) X^{n+2} + XS + a_nX^n - \frac{X^2R}{2}. \end{aligned}$$

   Or par somme et produit de polynômes, on a $\deg(XS) \leq 1 + n = n + 1$, $\deg(a_nX^n) = n$ et $\deg(X^2R) \leq 2 + n - 1 = n + 1$. Donc finalement le degré de P_{n+2} est inférieur ou égal à $n + 2$, et le coefficient de X^{n+2} vaut $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{a_n}{4}$ (ce coefficient pourrait s'annuler).

   Par principe de récurrence, on a donc $\boxed{\deg(P_n) \leq n}$.

3. (a) D'après les calculs précédents, on a $\boxed{a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{1}{2}}$.
   (b) D'après la question 2), on a bien $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{a_n}{4}$.
   On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire double. On calcule alors son terme général grâce à la méthode vue en cours, et on obtient $\boxed{a_n = (1+n)\frac{1}{2^n}}$. On en déduit que le coefficient d'indice n est non nul, donc $\boxed{P_n \text{ est bien de degré } n}$.

Exercice 23. On considère l'équation suivante , d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + z + 1 = 0 \tag{E}$$

1. On note $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la fonciton définie par $f(t) = t^3 + t + 1$. A l'aide de l'étude de f, justifier que l'équation (E) possède une unique solution réelle, que l'on notera r. Montrer que $r \in]-1, \frac{-1}{2}[$.
2. On note z_1 et z_2 les deux autres solutions complexes de (E) qu'on ne cherche pas à calculer. On sait alors que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ se factorise de la manière suivante :
$$P(X) = (X - r)(X - z_1)(X - z_2).$$
En déduire que $z_1 + z_2 = -r$ et $z_1 z_2 = \frac{-1}{r}$.
3. Justifier l'encadrement : $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$.
De même montrer que $1 < |z_1 z_2| < 2$.
4. Rappeler l'inégalité triangulaire et donner une minoration de $|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{C}$.
5. En déduire que
$$|z_1 + z_2| > |z_1| - \frac{2}{|z_1|}$$
6. Grâce à un raisonnement par l'absurde montrer que $|z_1| < 2$.
7. Conclure que toutes les solutions de (E) sont de modules strictement inférieures à 2.

Correction 23.

1. Comme $f(-1) = -1 < 0$ et $f(\frac{-1}{2}) = \frac{3}{8} > 0$, le théoréme des valeurs intermédiaires assure qu'il existe une solution a $f(t) = 0$ dans l'intervalle $]-1, \frac{-1}{2}[$. De plus $f'(t) = 2t^2 + 1$ donc $f' > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc f est strictement croissante et cette racine est unique.
2. En développant on obtient
$$P(X) = X^3 + (-r - z_1 - z_2)X^2 + \alpha X - z_1 z_2 r$$
On n'est pas obligé de calculer α. Par identification on obtient :
$$-r - z_1 - z_2 = 0 \quad \text{et} \quad z_1 z_2 r = -1$$
$$z_1 + z_2 = -r \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{-1}{r}$$
$(r \neq 0)$
3. On a $\frac{1}{2} < -r < 1$ et $|z_1 + z_2| = |-r| = -r$. D'où
$$\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1.$$
On a $1 < \frac{-1}{r} < 2$ et $|z_1 z_2| = \left|\frac{-1}{r}\right| = \frac{-1}{r}$. D'où
$$1 < |z_1 z_2| < 2.$$
4. L'inégalité triangulaire 'inversée' donne
$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$
5. On a donc
$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$
Or $|z_1 z_2| < 2$, donc $|z_2| < \frac{2}{|z_1|}$ D'où $-|z_2| > -\frac{2}{|z_1|}$. On obtient donc l'inégalité voulue.
6. Supposons par l'absurde que $|z_1| \geq 2$. On a alors d'après la questions précédente
$$|z_1 - z_2| > 2 - 1 = 1$$
Ceci est en contradiction avec le résultat de la question 3. Donc
$$|z_1| \leq 2.$$
7. Le raisonnement de la question 5 et 6 s'applique de façon similaire à z_2. Comme $|r| \leq 1$, toutes les racines de P sont bien de module strictement inférieur à 2.