DM

Exercice 1. Exercice 1

1. Soient p et $q \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\sin(p) - \sin(q) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{p+q}{2}} 2i\sin(\frac{p-q}{2})\right)$$
2. Trouver une formule similaire pour
$$\cos(p) + \cos(q)$$
3. Soient p et $q \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression
$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q}.$$
4. En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 2. Exercice 2

1. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$. Rappeler la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
2. Montrer que pour tout $(k, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leq k \leq p \leq n$, on a
$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}.$$
3. Énoncer la formule du binôme de Newton.
4. Déduire des questions précédentes que, pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$, on a
$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}2^p.$$
5. On généralise : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}x^k y^{n-k} = \binom{n}{p}y^{n-p}(x+y)^p.$$
6. En déduire que
$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}x^k y^{n-k} = (x+2y)^n$$