Correction - Interro 4

Exercice 1. Donner en fonction de $n \in \mathbb{N}$ la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{n} k$$

Correction 1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$3^n \geq n$$

Correction 2. On pose $P(n) =: "3^n \geq n"$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation

Pour $n = 1$, $3^1 = 3 \geq 1$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $3^n \geq n$. Alors :

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq 3n.$$

Or, pour tout $n \geq 1$, $3n \geq n+1$ (car $3n - (n+1) = 2n - 1 \geq 1$).
Ainsi $3^{n+1} \geq n+1$, donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3^n \geq n.}$$