Table des matières

Chapitre 21 : Développements limités

On s'intéresse ici à la possibilité d'approcher localement une fonction f par une fonction polynôme, c'est-à-dire de pouvoir dire qu'au voisinage d'un point une fonction f se comporte comme un polynôme.

On fait déjà cela lorsque l'on calcule la tangente à une courbe en un point ou lorsque l'on recherche d'éventuelles asymptotes horizontales ou obliques. En effet, la tangente à une courbe en un point d'abscisse x_0 est un polynôme de degré un et correspond en fait à une approximation d'ordre un de la fonction associée au voisinage du point d'abscisse x_0. De même, une asymptote oblique est un polynôme de degré un et correspond cette fois-ci à une approximation d'ordre un de la fonction associée au voisinage de l'infini. Pour avoir des approximations plus précises, il faut augmenter le degré du polynôme.

Dans tout le chapitre f désigne une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$.

I Développement limité en 0 : définition et premières propriétés

I. 1 Négligeabilité

Définition 1.

- Soit f une fonction définie au voisinage de 0, et soit $n \in \mathbb{Z}$. On dit que f est négligeable par rapport à la fonction $x \mapsto x^n$ au voisinage de 0 si et seulement si :

  ....

  On note alors $f(x) =$........ ou lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité : $f(x) =$.........

- Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$, et soit $n \in \mathbb{Z}$. On dit que f est négligeable par rapport à la fonction $x \mapsto x^n$ au voisinage de $\pm\infty$ si et seulement si :

  ....

  On note alors $f(x) =$........ ou lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité : $f(x) =$.........

Definition équivalente $f(x) = g(x) + o(x^n)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^n} = 0$$

Exemple 1. Montrer que : $(1 - \cos x)\sin x = o(x^2)$ au voisinage de 0.

Remarque. Cette notation se généralise : si f et g sont définies au voisinage de 0, et ne s'annulent pas au voisinage de 0, on a $f = o(g)$ si et seulement si : ....

I. 2 Définition

Définition 2. Soit f une fonction définie au voisinage de 0. Soit n un entier naturel. On dit que la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, noté $DL_n(0)$, si :

....

....

- Le terme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ est appelé ....
- Le terme $o(x^n)$ est appelé ....

Remarques. • DL d'ordre 0, 1 et 2 au voisinage de 0 :

⋆ f admet un $DL_0(0) \iff$ ....

⋆ f admet un $DL_1(0) \iff$ ....
On parle alors souvent d'approximation affine.

⋆ f admet un $DL_2(0) \iff$ ....
On parle alors parfois d'approximation quadratique.

- On a : $x^\alpha \underset{0}{=} o(x^\beta) \Longleftrightarrow$ ....

  Or un DL en 0 est d'autant plus précis que le reste $o(x^n)$ est négligeable quand x tend vers 0. Ainsi un DL est d'autant plus précis que ....

I. 3 Premiers exemples

I. 3. a DL et équivalents usuels

- $DL_1(0)$ de la fonction exponentielle :
  - ⋆ Rappel de l'équivalent usuel en 0 : ....
  - ⋆ En déduire que $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$:

- $DL_2(0)$ de la fonction cosinus :
  - ⋆ Rappel de l'équivalent usuel en 0 : ....
  - ⋆ En déduire que $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$:

- $DL_1(0)$ de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$:
  - ⋆ Rappel de l'équivalent usuel en 0 : ....
  - ⋆ En déduire que $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$:

I. 3. b Polynômes

Les polynomes sont déjà sous forme de DL, le terme d'erreur est nul dès que l'on fait un DL à un ordre supérieur au degré.

- Étude sur un cas particulier : soit $P = 2X + X^2 - 6X^3$ un polynôme de degré 3.
  - ⋆ $DL_2(0)$ de P : $P(x) \underset{0}{=}$ ....
  - ⋆ $DL_3(0)$ de P : $P(x) \underset{0}{=}$ ....
  - ⋆ $DL_5(0)$ de P : $P(x) \underset{0}{=}$ ....

- Étude du cas général : soit P un polynôme de degré n : $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ avec $a_n \neq 0$.
  - ⋆ $DL_p(0)$ de P avec $p < n$:
  - ⋆ $DL_n(0)$ de P :
  - ⋆ $DL_p(0)$ de P avec $p > n$:

I. 3. c Série géométrique

Proposition 1. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admettent un DL en 0 à tout ordre. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.
- $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$.

I. 4 Premières propriétés

Proposition 2. Si f possède un DL d'ordre n en 0, alors il est unique.

Corollaire 3. Soit f une fonction admettant au voisinage de 0 un DL d'ordre n : $f(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \circ(x^n)$.

- Si f est paire alors la partie régulière est paire.
- Si f est impaire alors la partie régulière est impaire.

Exercice 1. Soit f une fonction qui admet au voisinage de 0 le $DL_5(0)$ suivant : $f(x) \underset{0}{=} 3 - x + \dfrac{x^2}{5} - 2x^3 - \dfrac{x^4}{6} - x^5 + o(x^5)$. Admet-elle un $DL_3(0)$ et si oui, que vaut-il ? Même question avec $DL_0(0)$.

Proposition 4. Si f admet un DL d'un ordre n donné au voisinage de 0, alors f admet des DL pour tous les ordres inférieurs à n.

Plus précisemment, si f admet le $DL_n(0)$ suivant : $f(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$. Alors, pour tout $p \leq n$, f admet un DL d'ordre p en 0 et

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p).$$

II Méthodes pour obtenir des DL

II. 1 Dérivée d'ordre supérieure

Définition 3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On note $f^{(0)} = f$ (dérivée d'ordre 0 de f).
- Les dérivées successives de f sont alors définies par récurrence.
  La fonction f est $n+1$ fois dérivable sur I si
  - $\star$ ....
  - $\star$ ....

  Dans ce cas, on note ....

⚠ Ne pas confondre $f^{(k)}$ la dérivée k-iéme (ou d'ordre k) et f^k. Cette dernière notation peut avoir deux sens selon le contexte !

f^k peut désigner la puissance k-ième c'est-à-dire : $f^k = f \times f \times \cdots \times f$ k fois. Mais ....

f^k peut désigner parfois la composée k-ième, c'est-à-dire $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ k fois.

Souvent quand on parle de fonctions réelles et qu'on utilise f^k on parle de la puissance k-ième. En revanche quand on parle d'application linéaire (cf chapitre suivant) quand on utilise f^k on parle systèmatiquement de la composé k-ième.

Exercice 2. Calculer la dérivée première, seconde, troisième et quatrième du cosinus et de l'exponentielle.

Définition 4. Fonctions de classe C^n et C^∞ :

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si
  - ⋆ ....
  - ⋆ ....

  On note alors .... l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions ....
- $\mathcal{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions ....
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ....

  On note .... l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

II. 2 Formule de Taylor-Young

Théorème 5. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0.
Alors la fonction f admet un DL d'ordre n en 0 donné par :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

Remarques.

- Ce théorème assure que toute fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0 admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 et la formule de Taylor-Young permet de calculer ce DL dès lors que l'on sait calculer les dérivées successives de la fonction f en 0. Cela va ainsi nous permettre de calculer tous les DL des fonctions usuelles.
- ⚠ Il n'y a pas équivalence : une fonction peut très bien admettre un DL à l'ordre n en 0 et ne pas admettre de dérivées d'ordre k en 0 pour $2 \leq k \leq n$.

  Exemple 2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

  - Montrer qu'elle admet bien un $DL_2(0)$ qui vaut : $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$:
  - Montrer que la fonction f est continue et dérivable en 0.
  - Montrer que pour autant $f''(0)$ n'existe pas, à savoir la fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0.

II. 2. a DL des fonctions usuelles

La fonction exponentielle :

- Existence d'un DL : ....
- Calcul des dérivées k-ième en 0 : ....
- Obtention du DL :

$$\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\exp(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

La fonction cosinus :

- Existence d'un DL : ....
- Calcul des dérivées k-ième en 0 : ....
- Obtention du DL :

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

Ici on a écrit les DL d'ordre $2n$ et non n car il est beaucoup plus simple à écrire sous forme de somme. Mais évidemment si on souhaite le DL d'ordre 4 il suffit de prendre $n = 2$

La fonction sinus :

- Existence d'un DL : ....
- Calcul des dérivées k-ième en 0 : ....
- Obtention du DL :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Ici on a écrit les DL d'ordre $2 + 1n$ et non n car il est beaucoup plus simple à écrire sous forme de somme. Mais évidemment si on souhaite le DL d'ordre 3 il suffit de prendre $n = 1$

La fonction puissance : $f(x) = (1+x)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$

- Existence d'un DL : ....
- Calcul des dérivées k-ième en 0 : ....
- Obtention du DL :

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

On n'utilisera que très rarement ce DL dans un autre cadre que $\alpha = -1$ ou $\alpha = \frac{1}{2}$. Dans ce dernier cas, on n'utilisera que très rarement la formule générale au delà de l'ordre 2.
En particulier, on retrouve bien les DL en 0 des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

Remarque. La formule de Taylor-Young permet d'affirmer l'existence d'un DL à l'ordre n si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0. Mais le calcul des dérivées successives d'une fonction s'avère souvent difficile. Ainsi, en pratique, la formule de Taylor-Young sert assez peu, on l'utilise presque exclusivement pour obtenir le DL des fonctions usuelles vues ci-dessus. En pratique, on obtient plutôt les DL comme primitives, sommes, produit, quotient, composée des DL des fonctions usuelles.

II. 3 Intégration des DL

Proposition 6. Soit I un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et possédant un DL à l'ordre n au voisinage de 0 : $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.
Alors si F est une primitive de f sur I, F possède un DL à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 donné par :

$$F(x) \underset{0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{k+1} x^{k+1}$$

Le DL de F s'obtient simplement en intégrant terme à terme celui de f.

⚠On ne peut pas dériver terme à terme un DL, seule l'intégration d'un DL est permise.
Contre-exemple : $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x^2})$
En revanche si la fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ cela ne pose pas de problème, grâce à la formule de Taylor-Young
⚠Ne pas oublier le terme $F(0)$.
Applications : DL des fonctions usuelles

1. **La fonction logarithme népérien :**

- $\ln(1+x) \underset{0}{=}$

- $\ln(1-x) \underset{0}{=}$

2. **La fonction arctangente :**

$\arctan(x) \underset{0}{=}$

II. 4 Opérations algébrique sur les DL

II. 4. a Somme et multiplication par un scalaire

C'est là que l'on gagne par rapport à un simple équivalent. On peut additionner des DL.

Proposition 7. Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et admettant un DL en 0 d'ordre n de partie régulière P et Q respectivement. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $f + g$ ....

- λf ....

Exercice 3. Calculer les DL suivants : $DL_4(0)$ de $f(x) = \sin x + 2\cos x$ et $DL_5(0)$ de $f(x) = -3e^x + 2\ln(1+x)$.

⚠PROBLÈME D'ORDRE : La somme d'un DL d'ordre 3 et d'un DL d'ordre 4 par exemple donne un DL d'ordre .... Plus généralement, la somme de deux DL d'ordre différents ne donne qu'un DL à l'ordre minimum. Calculer par exemple, la somme du $DL_4(0)$ de sinus et du $DL_2(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$:

II. 4. b Produit

Proposition 8. Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et admettant un DL en 0 d'ordre n de partie régulière P et Q respectivement. Alors :
fg ....

....

Exercice 4. Calculer les DL suivants : $DL_2(0)$ de $x \mapsto e^x \cos x$ et $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\cos x}{1-x}$.

⚠PROBLÈME D'ORDRE : Comme pour la somme de deux DL, le produit de deux DL d'ordre différents ne donne en général qu'un DL à l'ordre minimum. Par exemple le produit d'un $\mathrm{DL}_2(0)$ et d'un $\mathrm{DL}_3(0)$ ne donne pas un $\mathrm{DL}_3(0)$, ni un $\mathrm{DL}_6(0)$ mais un $\mathrm{DL}_2(0)$. Lorsque l'on cherche un DL à l'ordre n d'une fonction qui peut être vue comme produit de fonctions usuelles, il faut donc écrire le DL de chaque fonction usuelle à l'ordre n.

II. 4. c Composition

Proposition 9. Soit $f: \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL en 0 d'ordre n et vérifiant $\mathbf{f(0) = 0}$. Soit $g: \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ une fonction admettant en 0 un DL d'ordre n. On suppose que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. On note P et Q les parties régulières respectivement de f et de g. Alors :
$g \circ f$ ....

....

Exercice 5. Calculer les DL suivants :

- Cas 1 : cas où $f(0) = 0$:
  $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto e^{x+x^2}$, $DL_4(0)$ de la fonction $x \mapsto e^{\sin x}$ et $DL_6(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(1+\sin(x^2))$.
- Cas 2 : cas où $f(0) \neq 0$: S'y ramener :
  $DL_4(0)$ de la fonction $x \mapsto e^{\cos x}$, $DL_4(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(2+\sin(x))$ et $DL_6(0)$ de la fonction $x \mapsto \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Méthodes pour obtenir un DL en 0 à l'ordre n :

- On écrit tous les DL usuels en 0 à l'ordre n qui vont intervenir.
- On utilise alors les opérations sur les DL de même ordre :
  - ⋆ on peut ajouter deux DL de même ordre en additionnant les parties régulières.
  - ⋆ on peut multiplier deux DL de même ordre :
    on multiplie les parties régulières en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.
  - ⋆ on peut composer deux DL de même ordre :
    on compose les parties régulières en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.
  - ⋆ on peut intégrer un DL :
    on intègre la partie régulière en faisant attention de ne pas oublier la valeur en 0 de la primitive
    on intègre aussi le $o()$: $o(x^n)$ devient $o(x^{n+1})$.
  - ⋆ tout dénominateur doit être remonté au numérateur en utilisant une puissance négative

Remarque. ⚠Vérifier que le terme f que l'on compose par g dans $g \circ f$ tend bien vers 0. Sinon, il faut s'y ramener en s'inspirant des exemples suivants : on suppose que y tend bien vers 0, on a :

$\rightsquigarrow$ $e^{1+y} = e \times e^y$

$\rightsquigarrow$ $\ln(2+y) = \ln\left(2\left(1+\dfrac{y}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\dfrac{y}{2}\right)$ et $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{2} = 0$

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt{4+y}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1+\dfrac{y}{4}}} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{y}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ et $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{4} = 0$

$\rightsquigarrow$ $\sin\left(y+\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos y \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \sin y \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos y + \dfrac{1}{2}\sin y$

$\rightsquigarrow$ $\cos\left(y+\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos y \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - \sin y \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\cos y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin y$

Remarque. ⚠ il est important que les DL soient au même ordre.
Ainsi, le produit d'un $\mathrm{DL}_2(0)$ et d'un $\mathrm{DL}_3(0)$ ne donne pas un $\mathrm{DL}_3(0)$, ni un $\mathrm{DL}_6(0)$ mais un $\mathrm{DL}_2(0)$.

II. 4. d Quotient

⚠ Tout dénominateur doit être remonté au numérateur en utilisant le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ ou de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha < 0$.

Exercice 6. Calculer les DL suivants : $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$, $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+\cos x}$, $DL_5(0)$ de $x \mapsto \tan x$ et $DL_1(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$.

III Utilisation des développements limités

III. 1 Calculs de limites et d'équivalents

Les DL permettent de calculer les limites d'expressions comportant une forme indéterminée lorsque les équivalents ne suffisent pas ou ne peuvent pas être utilisés (lorsque l'expression comporte par exemple des sommes ou des composées). Ils permettent même d'obtenir l'équivalent.

- La fonction est équivalente en x_0 au terme de plus bas degré NON NUL de la partie régulière du DL en x_0.
- La limite en x_0 s'en déduit alors automatiquement.
- Méthode : Calculer le DL en x_0 suffisamment loin pour obtenir un terme non nul.

Toute la difficulté est de savoir à quel ordre on doit effectuer le DL afin d'obtenir un terme non nul : il faut ainsi aller suffisamment loin pour que le DL permette de conclure, mais pas trop loin pour éviter de longs calculs inutiles. L'intuition se forge avec l'expérience : il faut se lancer et rectifier le tir si besoin.

Exercice 7. Répondre aux questions en calculant des DL :

1. Limite en 0 de $\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x - \sin x}$.
2. Limite en 0 de la fonction $g(x) = \dfrac{\sin x - e^x + 1}{\ln(1+x) - x}$.
3. Limite en 1 de la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$.
4. Équivalent en 0 de $f(x) = (1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x$.
5. Limite quand x tend vers $+\infty$ de $f(x) = \left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

III. 2 Développement limité en x_0

On peut définir de même un DL en un point fini autre que 0.

Définition 5. Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel.
On dit que la fonction f admet un DL d'ordre n au voisinage de x_0, noté $DL_n(x_0)$, si :

....

....

- Le terme $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ est appelé ....
- Le terme $o((x - x_0)^n)$ est appelé ....

Tout ce qui a été dit sur les DL au voisinage de 0 s'appliquent pour les DL au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$: unicité, troncature,. . ..
En particulier la formule de Taylor-Young est vrai aussi au point x_0 :

Théorème 10. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et soit x_0 un élément de I.
Alors la fonction f admet un DL d'ordre n en x_0 donné par :

$$f(x) \underset{x_0}{=}$$

$$\underset{x_0}{=}$$

La seule méthode est de se ramener en 0 en posant un changement de variable.
Méthode pour obtenir un DL en $x_0 \in \mathbb{R}^\star$ à l'ordre n :

- On pose le changement de variable : $X = x - x_0 \Leftrightarrow x = X + x_0$ et ainsi $\lim\limits_{x \to x_0} X = 0$.
- On remplace tous les x par des $X + x_0$ pour obtenir une expression ne contenant que X.
- On calcule le DL à l'ordre n en 0 par rapport à la variable X.
- On remplace alors tous les X par $x - x_0$ SANS DEVELOPPER.

Exercice 8. Calculer les DL suivants : $DL_2(2)$ de la fonction $x \mapsto \ln(x)$, $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ et $DL_4(2)$ de $x \mapsto (x - 2)\ln(x - 1)$.

III. 3 Développement limité ou développement asymptotique en $\pm\infty$

La seule méthode est de se ramener en 0 en posant un changement de variable.
Méthode pour obtenir un DL en $\pm\infty$ à l'ordre n :

- On pose le changement de variable : $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$ et ainsi $\lim\limits_{x \to \pm\infty} X = 0$.
- On remplace tous les x par des $\frac{1}{X}$ pour obtenir une expression ne contenant que X.
- On calcule le DL à l'ordre n en 0 par rapport à la variable X.
- On remplace alors tous les X par $\frac{1}{x}$.

Exercice 9. Études de fonctions en $+\infty$:

- Donner le développement asymptotique d'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
- Donner le développement asymptotique d'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de g définie par $g(x) = xe^{\frac{2}{x}}$ en $+\infty$:

III. 4 Applicaiton des cacluls de limites

Savoir calculer des limites permet de connaitre beaucoup de choses sur les fonctions, mais ce n'est pas propre à l'étude des DL, mais au calcul de limite.

III. 4. a Étude locale en un point fini : tangente

- Le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0 donne l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0.
- Le terme non nul suivant dans le DL donne la position de la tangente par rapport à la courbe LOCALEMENT au voisinage de x_0.

Exercice 10. 1. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2(x-1)}\ln(x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\setminus\{1\} \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente localement au voisinage de 1.

2. Mêmes questions avec la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

III. 4. b Étude locale en $\pm\infty$: asymptote

Un développement limité ou un développement asymptotique de f au voisinage de $\pm\infty$ permet de préciser le comportement de f en l'infini et notamment d'étudier :

- l'existence d'éventuelles asymptotes à la courbe de f
- la position relative de ses asymptotes par rapport à la courbe LOCALEMENT au voisinage de l'infini.

Exercice 11. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes ainsi que la position relative de leur courbe par rapport aux éventuelles branches infinies localement au voisinage de $\pm\infty$: $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ et $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^4}{1+x^2}}$.

III. 4. c Étude de la continuité ou de la dérivabilité d'une fonction en un point

❶ **DL d'ordre 0 au voisinage de x_0 :**

> **Proposition 11.** Soit f une fonction qui admet un DL d'ordre 0 en x_0 : $f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + o(1)$.
> • Si f n'est pas définie en x_0, alors ....
>
> • Si f est bien définie en x_0, alors : ....

❷ **DL d'ordre 1 au voisinage de x_0 :**
On se place maintenant dans le cas où f est bien continue en x_0 avec $a_0 = f(x_0)$.

> **Proposition 12.** f admet un $DL_1(x_0) \iff$ ....
>
> Dans ce cas, on a : $f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$ avec $\begin{cases} f(x_0) = \\ f'(x_0) = \end{cases}$

Exercice 12. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $f(0) = 0$. Démontrer que la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

❸ **DL d'ordre supérieur au voisinage de x_0 :**
⚠FAUX pour les ordres supérieurs. Par exemple, l'existence d'un $DL_2(0)$ pour f ne garantie pas l'existence de $f''(0)$. On a vu comme contre-exemple la fonction définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. L'équivalence exprimée ci-dessus n'est vraie que pour les ordres 0 et 1.