TD 17 : Espace vectoriel

Entrainement

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\right\}$
2. $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\right\}$
3. $C = \left\{(x+2y, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
4. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + z = 0\right\}$
2. $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + z = 1\right\}$
3. $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 5y = 2y + z = 0\right\}$
4. $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad y = x^3\right\}$
5. $E = \{(2z, -z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$

Sous-espaces vectoriels engendrés. Familles génératrices

Exercice 3. Trouver une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

1. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\right\}$
2. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0\right\}$
3. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad ax + by + z = 0\right\}$

Exercice 4. Donner l'écriture cartésienne des espaces vectoriels suivants.

1. $E = \text{Vect}(u,v)$ avec $u = (1,2,2)$ et $v = (2,1,3)$.
2. $E = \text{Vect}(u,v)$ avec $u = (1,4,1,1)$ et $v = (-1,2,2,1)$.
3. $E = \left\{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a), \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

Exercice 5. Soit $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - 3y + 2z = 0\right\}$ et $u = (1,3,4)$ et $v = (3,-1,-3)$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que (u,v) est une famille génératrice de E.

Exercice 6. Dans $\mathbb{K}^3$, on considère $u = (2,-4,7)$ et $v = (-1,2,-3)$. Peut-on déterminer a de sorte que $w \in \text{Vect}(u,v)$ dans chacun des 3 cas suivants :

1. $w = (-1, a, 3)$
2. $w = (-1, 2, a)$
3. $w = (-1, -1, a)$

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que $u = (m,1,m)$ appartient à $\text{Vect}(v,w)$ avec $v = (1,1,1)$ et $w = (1,m,-1)$.

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, dire si la famille (u_i) engendre E :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $u_1 = (1,-1,-2)$, $u_2 = (7,10,3)$ et $u_3 = (3,-4,-7)$
2. $E = \mathbb{R}^4$ et $u_1 = (0,0,0,1)$, $u_2 = (0,0,1,1)$ et $u_3 = (0,1,1,1)$, $u_4 = (1,1,1,1)$, $u_5 = (1,1,1,0)$

Familles libres

Exercice 9. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.

1. $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -1)$ et $w = (1, 5, -1)$
2. $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (3, 1, \lambda)$ λ paramètre réel.
3. $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (4, -2, 1)$
4. $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$ et $t = (1, 1, 1)$

Exercice 10. Pour quelles valeurs du réel m la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre dans $\mathbb{R}^4$?

$$u_1 = (1, 1, 0, 0) \quad u_2 = (1, m, 1, 0) \quad u_3 = (1, 0, m, 1) \quad u_4 = (1, 0, 0, m)$$

Base, Dimension

Exercice 11. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Donner une base de F et sa dimension.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 3z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\big\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 4z = 0\big\}$
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \big\{(x + 2y - 2z, -x + 3y - z, x + 7y - 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big\}$
4. $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad 2xy + z - t = 0 \text{ et } x - y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - at = 0\big\}$ avec a un paramètre réel.

Exercice 12. Les familles suivantes sont-elles libres ? Si oui, on les complètera en une base de $\mathbb{R}^3$ et si non, on donnera la relation de liaison. Sont-elle génératrices de $\mathbb{R}^3$? Si oui, on en extraira une base de $\mathbb{R}^3$, si non, on donnera un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'exprime pas en fonction des vecteurs de la famille.

1. $\mathcal{F}_1 = ((2, 4, 3), (1, 5, 7))$
2. $\mathcal{F}_2 = ((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6))$
3. $\mathcal{F}_3 = ((9, 3, -7), (1, 8, 8), (5, -5, 1))$
4. $\mathcal{F}_4 = ((0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1))$

Exercice 13. Soit la famille (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1, 7, 2)$, $v_2 = (3, 5, 9)$ et $v_3 = (2, 4, 6)$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice des coordonnées de $u = (0, -2, -1)$ dans cette base ?

Exercice 14. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u, v) avec $u = (1, -1, 2)$ et $v = (2, 1, 3)$.

1. Montrer que (u, v) est une base de E
2. Vérifier que le vecteur $(3, 3, 4)$ appartient bien à E et déterminer ses coordonnées dans la base (u, v).

Exercice 15. On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$. On considère les parties suivantes de E :

$$F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, \quad x + iy - z = 0\big\} \qquad G = \big\{(a + ib, a - ib, a + b), \ (a, b) \in \mathbb{C}^2\big\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sev de E. Donner une base pour chacun de ces sev.
2. Donner une équation cartésienne de G.
3. Donner un système d'équations cartésiennes et une base pour $H = F \cap G$.
4. Donner une base de E composé d'un vecteur de F, d'un vecteur de G et d'un vecteur quelconque.

Exercice 16. Donner la dimension de $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec $v_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, -2, 0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0, -2)$ et $v_4 = (-1, -5, 1, 2, 5)$.

Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un système linéaire

Exercice 17. Pour chaque famille de vecteurs, donner le rang et une base du sev engendré :

1. $E = \mathbb{R}^4$ et $u = (1, 1, 0, 0),\ v = (3, -1, 3, -1),\ w = (0, 1, 0, 1),\ x = (-1, 5, -1, 5)$
2. $E = \mathbb{C}^2$ et $u = (1, i),\ v = (i, -1)$
3. $E = \mathbb{R}^4$ et $u = (1, 0, 0, -1),\ v = (2, 1, 0, 1),\ w = (1, -1, 1, -1),\ x = (7, 2, 0, 1),\ y = (-2, -3, 1, 0)$.

Exercice 18. Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) avec $u_1 = (\lambda, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, \lambda, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, \lambda, 1)$ et $u_4 = (1, 1, 1, \lambda)$. Discuter selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants définis par

1. $E = \text{Vect}((1, 1, -2), (2, 1, -3), (0, 1, -1))$
2. $F = \text{Vect}((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$

Type DS

Exercice 20. On considère les ensembles suivants :

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\}$$
$$F = \text{Vect}\,(u_1 = (1, 3, 0, 2), u_2 = (2, 7, -3, 6), u_3 = (1, 1, 6, -2))$$

1. (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}_E$ de E. Quelle est la dimension de E ?
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_F$ de F. Quelle est la dimension de F ?
3. Déterminer une représentation cartésienne de F
4. Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
5. (a) On considère la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ formée des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ et de $\mathcal{B}_F$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre. (En étant astucieux et en utilisant la question 4, c'est assez rapide)
   (b) Justifier que $\mathcal{F}$ est une base et en déduire que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F})$
6. On considère le vecteur $u = (2, 3, 1, 2)$. Donner les coordonnées de u dans la base $\mathcal{F}$.
7. Soit $u \in \mathbb{R}^4$. Déduire des résultats précédents qu'il existe un unique vecteur $e \in \mathcal{E}$ et un unique vecteur $\mathrm{f} \in \mathcal{F}$ tels que $u = e + \mathrm{f}$. Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^4$, cet unique vecteur $e \in \mathcal{E}$ est appelé le projeté de u sur $\mathcal{E}$ parallèlement à $\mathcal{F}$. On le note $p(u)$ pour les questions suivantes.
8. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer les composantes de $p(u)$ en fonction de x, y, z et t.
9. Vérifier que :
   (a) $\forall u \in \mathcal{E}, p(u) = u$,
   (b) $\forall u \in \mathcal{F}, p(u) = 0$.

Bonus pour l'année prochaine

Exercice 21. On admet que l'ensemble E des suites réelles est un espace vectoriel. Montrer que l'ensemble des suites bornées est un sev de E.

Exercice 22. On admet que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $S_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Soit $E_{i,j}$ la matrice n'ayant que des 0 sauf le coefficient (i,j) qui vaut 1. Montrer que la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,3} + E_{3,2})$ forme une base de $S_3(\mathbb{R})$. et en déduire sa dimension.
3. Montrer que l'ensemble des matrices anti-symétriques $A_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Trouver une base de $A_3(\mathbb{R})$ et en déduire sa dimension.
5. Que pouvez-vous conjecturer pour la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ et de $A_n(\mathbb{R})$?