# Fiche Chapitre 1 - Etude de fonctions

**Définition 1.** Définition de la dérivée : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

**Définition 2.** $f$ est croissante sur un intervalle $I$ si pour tout $x, y \in I$, $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

**Proposition 1.** Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables

— $(u+v)' = u' + v'$

— $(uv)' = u'v + uv'$

— $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

**Proposition 2.** <u>Si $f$ est dérivable</u> alors

- $f$ est croissante sur $I \Longleftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.

**Définition 3.** Composée de deux fonctions : $g \circ f(x) = g(f(x))$

**Proposition 3.** On a $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g' \circ f(x) = f'(x)g'(f(x))$

**Proposition 4.** Limites usuelles

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

**Proposition 5.**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & = & y_0 \\ \lim\limits_{y \to y_0} g(y) & = & \ell \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell.$$

**Théorème 6.** Théorème des croissances comparées. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^b}{x^a} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a (\ln x)^b = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{e^{bx}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^a e^{bx} = 0$

**Proposition 7.** Taux d'accroissements en 0

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = 1$

**Théorème 8.** (TVI + bijection) Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

Si de plus la fonction est strictement monotone alors le réel $c$ est unique