Cahier de vacances

lundi 22 décembre

Exercice 1. 1. Résoudre $\ln(x+1) - \ln(x) \geq \ln(3x+1)$

2. Calculer le produit AB deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Etudier la fonction

$$f(x) = x\exp(x)$$

4. Ecrire une fonction Python `reverse` qui prend en argument une liste et retourne la liste parcourue dans l'autre sens. eg `reverse([1,4,12]` retourne `[12, 4, 1]`

Mardi 23 décembre

Exercice 2.

1. Etudier la fonction $f(x) = e^{2x+1} - x$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$z^2 + z + 1 = 0$$
donner la forme exponentielle des solutions.
3. Ecrire une fonction Python `somme` qui prend en argument une liste de nombres et retourne la somme des éléments de cette liste.

Mercredi 24 décembre

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^x + e^{-x} = 2$
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2n+3}{2} \end{cases}$$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$

3. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^n + n}{\sqrt{e^{2n} - 1}}$$

Jeudi 25 décembre

Joyeux Noêl

Vendredi 26 décembre

Exercice 4.

1. Déterminer la valeur de u_n, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}\, u_{n+1} = 2u_n + 1$$
2. Résoudre $y'' + y = 1$
3. Déterminer le projeté orthogonal du point A de coordonnées $(1, 2)$ sur la droite D dirigée par $\vec{u} = (2, 1)$ et passant par $B = (0, 1)$
4. Ecrire une fonction Python `est_sym` qui prend en argument une liste de listes représentant une matrice et retourner `True` si la matrice correspondante est symétrique et `False` sinon.

Samedi 27 décembre

Exercice 5. 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$,

$$z + \overline{2z + i} = 1 - i$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^4 = -z^2$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$$

   Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

4. Ecrire une fonction Python `compte_element` qui prend en argument une liste de nombre et une valeur, et retourne le nombre de fois où la valeur est présente dans la liste.

   `compte_element([1,4,2,4,3,4], 4)` va retourner 3 et `compte_element([1,4,2,4,3,4], 12)` va retourner 0.

Dimanche 28 décembre

Exercice 6.

1. Etudier la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

2. Résoudre l'équation de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$e^{\lambda x+1} \leq 2e^{x-\lambda}$$

3. Résoudre le problème de Cauchy suivant (sur $]1, +\infty[$:

$$\begin{cases} y' + y & = 1 \\ y(2) & = 1 \end{cases}$$

Lundi 29 Décembre

Exercice 7.

1. Soit $a \geq 0$ Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$

$$(1+a)^n \geq 1 + an$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_1 = \frac{1}{3}$ et $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}u_n$. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n}{3^n}$
3. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n définie par

$$u_0 = 1$$

et pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

(il faudra garder en mémoire dans une liste toutes les valeurs de u_0 à u_{k-1} pour calculer u_k...)

Mardi 30 Décembre

Exercice 8.

1. Etudier la fonction

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$$

2. Résoudre l'équation de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'inconnue x

$$\ln(x^2 + x) \geq \ln(\lambda x - 1)$$

   On fera attention à l'ensemble de définition (qui dépend de λ)

3. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} n(\ln(n+1) - \ln(n))$$

4. Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j}$$

Mercredi 31 Décembre

Exercice 9. 1. On associe à un polynôme la liste de ces coefficients : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ on associe $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$

Ecrire une fonction Python `evaluation` qui prend en argument une liste qui correspond à un polynôme P et un flottant x et retourne la valeur de P(x)

eg. `evaluation([1,2,0,1], 2)` retournera $1 + 2 \times 2 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 13$

2. Ecrire une fonction `somme` qui prend en argument deux listes correspondant à deux polynômes P et Q et retourne une liste correspondant à la somme des deux polynômes.

   eg `somme([1,2,3],[2,3,1]` retournera `[3,5,4]`. Attention au degré des polynômes :
   `somme([1,2,3],[2,3,1,3]` retournera `[3,5,4,3]`.

3. Ecrire une fonction `derivation` qui prend en argument une liste correspondant à un polynôme P et retourne une liste correspondant au polynôme dérivé.

   eg. La liste [4,3,1,2] correspond à $P(x) = 4 + 3x + x^2 + 2x^3$ sa dérivée vaut $P'(x) = 3 + 2x + 6x^2$ donc `derivation([4,3,1,2]` retournera [3, 2, 6]

Bonne année !

Vendredi 2 Janvier

Exercice 10.

1. Résoudre $\ln(x^2) + \ln(x) = 3$
2. Résoudre $\frac{\ln(x)+1}{2\ln(x)-1} \leq 1$
3. Résoudre $\sqrt{3e^x - 2} \leq e^x$

Samedi 3 Janvier

Exercice 11.

1. Résoudre
$$|x+1| \leq |x^2 - 2x|$$

2. Résoudre le système suivant d'inconnues (x, y) et de paramètre λ
$$\begin{cases} x & +y & = \lambda x \\ 3x & -y & = \lambda y \end{cases}$$

3. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$$\sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x$$