Programme de colle : Semaine 29
Lundi 02 Juin

1 Cours

1. Développements limités
   — Définition d'une fonction admettant un $DL_n(a)$.
   — Notation $o(x^n)$, notion de négligeabilité
   — Formule de Taylor-Young.
   — DL de exp, ln, cos, sin, $(1+x)^\alpha$
   — DL des polynomes et troncatures des DL.
   — Operations sur les DL (sommes, produits, composées)
   — Etudes de limites et d'équivalents
   — DL en un autre point (Changement de variable $X = x - a$
   — Etudes des branches asymptotiques (changement de variable $X = \frac{1}{x}$
   — Révisions : continuité en 1 point, prolongement par continuité, dérivabilité en un point.
2. Python :
   — Tableau numpy, dictionnaires
   — Représentation informatique d'un polynome par une liste (évaluation, racine, dérivation, somme)

2 Exercices Types

1. Soit f et g deux fonctions. Montrer que
$$f(x) \underset{0}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$$
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre donné :
   (a) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre 2
   (b) $f(x) = \sin x - x\cos x$ à l'ordre 8
   (c) $f(x) = \ln(x+1) - e^x$ à l'ordre 2
   (d) $f(x) = \tan^2 x$ à l'ordre 6

   Trouver un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de 0 :
   (a) $f(x) = \dfrac{2}{\sin x} - \dfrac{2}{\ln(1+x)}$
   (b) $f(x) = \sin(2x) - 2\sin x$
   (c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)$
   (d) $f(x) = (e+x)^e - e^{e+x}$
   (e) $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)$
3. Trouver un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de 0 de
$$f(x) = \frac{2}{\sin x} - \frac{2}{\ln(1+x)}$$
4. Soit la fonction f définie sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.

(a) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.
(b) Ce prolongement est-il dérivable ?
(c) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
(d) Ce prolongement est-il dérivable ?

5. Soit la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arctan x + e^x - 1.$$
(a) Étudier f et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.
(b) Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
(c) Soit g la réciproque de la bijection précédente.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
En déduire que g admet, en tout point de I, des développements limités à tout ordre.
(d) En utilisant le fait que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$, donner un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.