

Programme de colle : Semaine 14

Lundi 12 Janvier

1 Cours

1. Matrices

- (a) Calcul matriciel.
- (b) Rang d'une matrice.
- (c) Matrice inversible.
- (d) Lien avec les systèmes linéaires.
- (e) Calcul d'une puissance n -ème.

2. Dénombrement

- (a) Cardinal d'un ensemble (union de deux ensembles, complémentaire.)
- (b) Choix de p objets parmi n .

3. Python :

- (a) Instructions conditionnelles (if/else)
- (b) Fonctions
- (c) Boucles `for`, `while`
- (d) Listes
- (e) Chaînes de caractères.

2 Exercices Types

1. Soient les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer des réels α et β tels que $A = \alpha I_3 + \beta J$. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} &= y_n + z_n \\ y_{n+1} &= x_n + z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n. \end{cases}$$

Calculer x_n , y_n et z_n en fonction de n .

2. Soient les deux matrices suivantes : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer B^3 . B est-elle inversible ?
- (b) Calculer les puissances n -ièmes de C .

Dénombrement :

- 1. Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.
 - (a) On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.
 - i. Donner le nombre de résultats possibles.
 - ii. Combien de ces résultats amènent
 - A. exactement 1 jeton noir ?

B. au moins 1 jeton noir ?

C. au plus un jeton noir ?

D. 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?

(b) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.

(c) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.

Informatique :

1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste et retourne l'indice du maximum de cette liste.
2. Un polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est encodé en python par une liste à trois éléments $L = [c, b, a]$. Ecrire une fonction Python qui prend en argument une liste à trois éléments correspondant à un polynôme du second degré et retourne le nombre de racine réelle de ce polynôme.