Table des matières

Chapitre 15 : Probabilites

I Vocabulaire de la théorie des probabilités

I. 1 Expérience aléatoire, univers

Certaines expériences sont régies par des lois déterministes : l'issue est alors parfaitement prévue.

Exemples. Le lancer d'un objet du haut d'un balcon. Le balancement d'un pendule.

Pour d'autres phénomènes, on ne peut pas prédire de manière certaine le résultat de l'expérience. On dit alors que l'expérience est aléatoire.

Exemples. Le lancer d'un dé. Le tirage du loto (malheureusement).

Définition 1. Univers d'une expérience aléatoire :

- L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues (résultats) pouvant être obtenues au cours d'une expérience aléatoire.
- Il est en général noté Ω
- Un élément de cet ensemble Ω est appelé une éventualité.

Exemples.
- Dans un lancer de dé, on note le numéro de la face supérieure.
  - ⋆ Une éventualité de cette expérience est le nombre affiché sur la face du dé, par exemple 3.
  - ⋆ L'univers est $\{1, 2, ..., 6\}$
- On lance deux dés discernables (par exemple de couleurs différentes) et on note les numéros des faces supérieures des deux dés.
  - ⋆ Une éventualité de cette expérience est la paire des deux nombres affichés, par exemple $(1, 3)$
  - ⋆ L'univers est l'ensemble des paires de nombres de $[\![1, 6]\!]$

- On prélève trois cartes dans un jeu de 32 cartes.
  - ⋆ Une éventualité de cette expérience est la donnée des trois cartes (distinctes) par exemple As de coeur, 10 de trefle, et Valet de Carreau.
  - ⋆ L'univers est l'ensemble des sous-ensembles à 3 élements parmi les 32 cartes. Ou autrement dit, les triplets non ordonnés de cartes distinctes.
- Dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5, on tire successivement et sans remise 3 de ces boules et on note les numéros de ces boules dans leur ordre d'apparition.
  - ⋆ Une éventualité de cette expérience est la donnée des 3 nombres par exemple $(4, 1, 3)$
  - ⋆ L'univers est l'ensemble des triplets de nombres distincts de $[\![1, 5]\!]$

Remarque. Dans tous les exemples précédents, l'univers de l'expérience aléatoire est un ensemble fini. Seul les univers finis sont au programme de première année. Vous verrez en deuxième année des univers infinis.

- Les éléments de Ω sont en général notés ω
- Si Ω est un ensemble fini de cardinal n, on pose souvent $\Omega = [\![1, n]\!]$.

I. 2 Événements

Un événement est une propriété rattachée à l'expérience aléatoire et qui peut être vérifiée ou non.

Exemple 1. Un joueur lance deux dés discernables.

- Un événement possible est par exemple 'le nombre est pair'
- Un autre événement possible est par exemple 'le nombre est plus grand que 4'

Définition 2. Événement :

- Un événement est un sous-ensemble de l'univers Ω
- Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec Ω fini est appelé espace probabilisable.

Exercice 1. On prélève trois cartes dans un jeu de 32 cartes. Donner plusieurs exemples d'événements.

Définition 3. Événements incompatibles.
On dit que A et B sont deux événements incompatibles si ....
Interprétation : ....

Traduction du vocabulaire sur les ensembles en terme de vocabulaire probabiliste

Un événement est ainsi un sous-ensemble de Ω. Tout ce que l'on a vu au début de l'année sur les ensembles peut se traduire en terme d'événements avec le vocabulaire des probabilités.

Exercice 2. On lance deux dés à 6 faces et on regarde les résultats donnés par ces dés. On considère les événements suivants :

- E_1 : « aucun dé ne donne 3 ».
- E_2 : « la somme fait moins de 13 ».
- E_3 : « la somme fait 3 ».
- E_4 : « l'un des dés donne 5 ou 6 »

- E_5 : « la somme fait 5 ou plus ».
- E_6 : « la somme fait 4 ou moins ».
- E_7 : « l'un des dés donne 4 ».
- E_8 : « la somme fait 1 ».

1. Exemple d'événement certain : E_2
2. Exemple d'événement impossible : E_8
3. Exemple d'événements contraires : E_5 et E_6
4. Exemple d'événements incompatibles : E_6 et E_7
5. Exemples d'événement impliquant d'autres événements : E_7 implique E_5

Exercice 3. Soit Ω l'univers et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(\Omega)^3$. Traduire les événements suivants :

- A seul se produit : ....
- Les trois simultanément : ....
- Au moins l'un : ....
- Deux au plus : ....
- Un seul : ....
- Aucun des trois : ....

Définition 4. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
On appelle système complet d'événements, toute famille finie $A_1, \ldots, A_n$ d'événements telle que

- $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$

Exemples.

- Pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, ...
- Pour tout univers fini $\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}$, ...

Exercice 4. On prélève 4 cartes dans un jeu de 32 cartes. Donner deux exemples de systèmes complets d'évenements :

- ....
- ....

Vocabulaire des ensembles	**Vocabulaire des probabilités**
L'ensemble Ω en entier	Evénement certain
L'ensemble vide	Evénement impossible
Un élément de Ω	Une éventualité
Un singleton de Ω	Un événement élémentaire
Un sous-ensemble de Ω	Un événement
Le complémentaire de la partie A	Evénement contraire
La partie A est incluse dans la partie B	L'évement A implique B
L'intersection de deux parties A et B	Les deux évenements sont réalisés
La réunion de deux parties A et B	L'un des événements est réalisé
Les ensembles A et B sont disjoints	Evénements incompatibles

I. 3 Probabilité

Lorsqu'on s'intéresse à une expérience aléatoire, on cherche à mesurer la "chance" d'obtenir l'événement A. Pour cela, on associe à chaque événement un nombre $P(A)$ appelé sa probabilité.

Définition 5. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.

- On appelle probabilité, toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ qui vérifie les propriétés suivantes :
  - ⋆ Si A et B sont disjoints, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$.
  - ⋆ $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
- Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé espace probabilisé.

⚠ Toute probabilité est à valeurs dans $[0,1]$. Ainsi, si on trouve comme résultat d'une probabilité un nombre soit supérieur strict à 1, soit strictement négatif, on sait qu'un tel résultat est faux.

Exemples.

- Donner l'espace probabilisé fini associé à l'expérience aléatoire "lancer une pièce de monnaie équilibrée" :
- Donner l'espace probabilisé fini associé à l'expérience aléatoire "lancer une pièce de monnaie truquée dont le côté face a deux fois plus de chance d'être le résultat obtenu" :
- Donner l'espace probabilisé fini associé à l'expérience aléatoire "lancer un dé équilibré" :

Proposition 1. Propriétés de base :

- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$
- Pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$
- Pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Proposition 2. Inclusion : Pour tout couple d'événements vérifiant $A \subset B$:

$$P(A) \leq P(B)$$

Proposition 3. Union :

- **Cas d'évenements deux à deux incompatibles :**
  Pour toute famille finie $A_1, \ldots, A_n$ d'évenements deux à deux incompatibles :

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- **Cas de deux évenements quelconques :**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Lorsqu'il est nécessaire de faire plusieurs cas, on utilise la formule des probabilités totales.

Proposition 4. Formule des probabilités totales :

- Pour tout système complet d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$ et pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

- Cas particulier : Pour tous événements A et B :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

I. 4 Exemples classiques de probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini avec $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Une probabilité P sur cet espace probabilisable est alors entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des événements élémentaires, à savoir par la donnée de tous les $P(\{w_i\})$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Proposition 5. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, et soient $(p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des réels vérifiant :

- $p_i > 0$
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Il existe alors une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $P(\{\omega_i\}) = p_i$.

Exemples.

- Modélisation d'un lancer d'une pièce de monnaie truquée :
$$P(\{\text{pile}\}) = p \quad \text{et} \quad P(\{\text{pile}\}) = q$$
avec $p + q = 1$
- Modélisation d'un lancer de dé truqué :
On lance un dé truqué. On suppose que la probabilité d'obtenir $k \in [\![1, 6]\!]$ est proportionnelle à k. Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire puis la probabilité d'obtenir un nombre pair.
Notons p_i la probabilité d'obtenir le nombre i. D'après l'énoncé il existe $\alpha > 0$ tel que $p_i = \alpha i$. Pour que p_i représente bien une probabilité il faut que
$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$$
D'où $\sum_{i=1}^{6} \alpha i = 1$ soit $\alpha \frac{6\times 7}{2} = 1$. Donc $\alpha = \frac{1}{21}$
La probabilité d'obtenir un nombre pair est égale à $p_2 + p_4 + p_6 = (2 + 4 + 6)\alpha = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

Proposition 6. Probabilité uniforme :

- Sur tout espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ où Ω est un ensemble fini non vide de cardinal n, il existe une unique probabilité P prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires.
- Si $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{w_i\}) = \frac{1}{n}$
- Pour tout événement A, $P(A) = \frac{Card(A)}{n}$

Cette probabilité est appelée probabilité uniforme sur Ω.

Remarques.

- Lorsque l'on munit l'univers fini Ω de la probabilité uniforme, les calculs de probabilité se ramènent en fait à des calculs de dénombrement.

Exercice 5. D'un jeu de 52 cartes, 5 cartes sont distribuées à un joueur.

1. Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main exactement trois cartes de carreau ?
2. Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main au moins une paire, à savoir deux cartes de même valeur ?

Exercice 6. On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules rouges.

1. On tire simultanément trois boules dans l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur ?
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?
2. Mêmes questions si on fait des tirages successifs avec remise.
3. Mêmes questions si on fait des tirages successifs sans remise.

II Probabilité conditionnelle

II. 1 Définition

Proposition 7. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.
Soit B un événement fixé tel que $P(B) \neq 0$.
L'application P_B définie par : $P_B : \left| \begin{array}{ccc} P(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \to & \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{array} \right.$
est une loi de probabilité sur Ω.

Définition 6. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.
Soit B un événement fixé tel que $P(B) \neq 0$.

- On appelle P_B probabilité conditionelle.
- Pour tout événement A, $P_B(A)$ est la probabilité de A sachant B. On la note aussi $P(A|B)$

⚠La notation $P(A|B)$ peut être dangereuse car elle peut laisser penser qu'il existe un événement $A|B$ dont on calculerait la probabilité. Or C'EST FAUX. Il n'existe pas d'événement conditionnel, c'est juste une notation, il n'existe que des probabilités conditionnelles.

⚠L'existence de toute probabilité conditionnelle doit être justifiée. Avant de pouvoir utiliser P_B, il faut avoir vérifié que $P(B) \neq 0$.

Remarques. Puisque P_B est une probabilité, elle possède toutes les propriétés des probabilités. En particulier :

- $P_B(\Omega) = 1$
- $P_B(A) \in [0,1]$
- Si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ on a $P_B(E_1 \cup E_2) = P_B(E_1) + P_B(E_2)$

II. 2 Formule des probabilités composées

Proposition 8. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Pour tous événements A et B, on a si $P(A) \neq 0$:

$$P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$$

Exercice 7. Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

Proposition 9. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et n un entier naturel, $n \geq 2$.
Pour toute famille finie d'événements $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ vérifiant $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_m|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Exercice 8. Une urne contient n boules dont b blanches et r rouges, indiscernables au toucher avec $r \geq 5$. On tire 4 boules successivement et sans remise de cette urne. Quelle est la probabilité que les 4 boules tirées soient rouges ?

Penser à cette formule lorsque les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- On doit calculer la probabilité d'une intersection
- L'expérience aléatoire comporte plusieurs étapes
- Le résultat final dépend des résultats des étapes précédentes : phénomène évolutif.

II. 3 Formule de Bayes

Proposition 10. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, et A et B deux évenements. Si $P(B)P(A) \neq 0$ alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

Exercice 9. Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont m réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse à la question, soit il choisit au hasard la réponse parmi les m proposées. La probabilité que cet étudiant connaisse la réponse à la question est p avec p réel de $]0,1[$.
Sachant que l'étudiant a répondu correctement à la question posée, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

Cette formule permet de remonter le temps. Si on veut calculer $P_B(A)$ alors que l'événement B s'est en fait produit après l'événement A, la formule nous permet le calcul en utilisant la probabilité $P_A(B)$, qui, elle respecte la chronologie. Y penser dès que l'on veut vous faire calculer $P_B(A)$ avec B postérieur à A.

Penser à cette formule lorsqu'il y a inversion de chronologie.

II. 4 Formule des probabilités totales avec des probabilités conditionnelles

On peut donner une deuxième version de la formule des probabilités totales :

Proposition 11. Formule des probabilités totales avec des probabilités conditionnelles.

- Pour tout système complet d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$ tel que $P(A_i) \neq 0$ et pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

- Cas particulier : pour tout événement A tel que $P(A) \neq 0, 1$ et pour tout événement B, on a :

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$

Exercice 10. Une compagnie d'assurance estime que ses clients se divisent en deux catégories : les clients enclins aux accidents représentant 20% de la population et ceux qui ont peu d'accidents. Pour la première catégorie, la probabilité d'avoir au moins un accident par an est 0.5 ; pour la deuxième catégorie, cette probabilité est 0.1.
Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat ?

Exercice 11. Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an.
Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose est de $\frac{3}{4}$, celle de donner une fleur blanche est de $\frac{1}{4}$.
Puis, les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$, elle donnera une fleur rose.
- si l'année n, la plante a donné une fleur blanche, alors l'année $n+1$ elle donnera de façon équiprobable une fleur rose ou blanche.

On note p_n la probabilité de l'événement « la plante a donné une fleur rose l'année n ».

1. Montrer que : $\forall n \geq 1, \quad p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$.
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de n. Calculer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 12. Soit n un entier naturel non nul. Une urne $\mathcal{U}$ contient des jetons numérotés : 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2, ..., n jetons numérotés n. On dispose de plus de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires. On tire un jeton dans $\mathcal{U}$: si le jeton tiré porte le numéro i, alors on prélève une boule dans l'urne i.
Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit blanche ?

II. 5 Arbre de probabilité

On illustre souvent les probabilités conditionnelles à l'aide d'arbres de probabilité appelés aussi arbres pondérés.

Exercice 13. On considère une urne contenant quatre boules blanches et trois boules noires. On tire une à une et sans remise trois boule de l'urne. Construire l'arbre correspondant à cette expérience aléatoire. Quel est la probabilité de l'événement : « on tire deux boules noires » ?

III Notion d'indépendance

III. 1 Deux événements indépendants

Définition 7. Événements indépendants.

On dit que A et B sont deux événements indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Proposition 12. Caractérisation avec des probabilités conditionnelles.

Si $P(B) \neq 0$, les événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A|B) = P(A)$$

Remarque. Si $P(A) \neq 0$, les événements A et B sont indépendants si la probabilité de B et la probabilité de B sachant A sont égales : la réalisation ou pas de l'événement A n'influe en rien sur celle de B.

Exercice 14. On lance deux dés équilibrés de couleurs différentes. On considère les événements A : « le premier dé donne un numéro pair » et B : « le deuxième dé donne 3 ». Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$, et en déduire que ces événements sont bien indépendants.

⚠Ne pas confondre les notions d'indépendance et d'incompatibilité. Cela n'a rien à voir.

- Il existe des événements indépendants mais pas incompatibles, par exemple :
  ....
- Il existe des événements incompatibles mais pas indépendants, par exemple :
  ....
- Il existe des événements ni incompatibles, ni indépendants, par exemple :
  ....
- Il existe des événements incompatibles et indépendants, par exemple :
  ....

III. 2 Événements mutuellement indépendants

Définition 8. Des événements $(A_1, \dots, A_n)$ de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ sont dits mutuellement indépendants si, pour tout sous-ensemble non vide I de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Exemple 2. Trois événements (A, B, C) sont mutuellement indépendants si : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ ET $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

- Le plus souvent, la notion de mutuelle indépendance des évenements est une donnée de l'exercice.
- On l'utilise alors pour calculer la probabilité d'une intersection : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)$.

⚠Ne pas confondre la notion d'évenements deux à deux indépendants et la notion d'évenements mutuellement indépendants.

Des événements $(A_1, \dots, A_n)$ de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ sont dits deux à deux indépendants si :

....

La notion d'événements deux à deux indépendants ne suffit pas pour calculer la probabilité d'une intersection d'évenements.

Exercice 15. On lance deux dés équilibrés à 6 faces de couleurs différentes. Soient les événements suivants : A : « la somme fait 7 », B : « le premier dé donne 4 » et C : « le second dé donne 3 ». Montrer que ces 3 évenements sont deux à deux indépendants mais qu'ils ne sont pas mutuellement indépendants.

III. 3 Expériences aléatoires indépendantes

Définition 9. Soient $\mathcal{E}_1, \dots \mathcal{E}_n$ des expériences aléatoires.

- Elles sont dites indépendantes si chacune de ces expériences se déroule de la même façon quels qu'aient été les résultats des expériences précédentes.
- Dans ce cas, si $A_1, \dots A_n$ sont des événements liés respectivement aux expériences $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$, ces événements sont mutuellements indépendants.

Cas particulier classique d'expériences aléatoires indépendantes :
On répéte n fois la même expérience aléatoire dans les mêmes conditions, on obtient n expériences aléatoires identiques et indépendantes.

Exercice 16. On lance une pièce de monnaie truquée n fois de suite. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. Calculer la probabilité des événements suivants : A « on obtient exactement n piles », B « on obtient dans cet ordre k piles et $n-k$ faces » et C « pile est apparu k fois au cours des n tirages ».