DS3

2h15

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Détermination de la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

1. (a) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E) : 4x^2 + 2x - 1 = 0$.
   (b) Décrire les solutions de $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$.

2. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
   (a) Quelle est la valeur de $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$?
   (b) Montrer que $\omega^4 = \overline{\omega}$ et que $\omega^3 = \overline{\omega^2}$.
   (c) En déduire que
   $$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$
   (d) Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est une solution de l'équation (E). En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 2. On considère la relation de récurrence :

$$(R) : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n + 3n - 3.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui vérifie (R) et de plus :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3.$$

Le but de l'exercice est de déterminer une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une suite (v_n) vérifiant (R) de la forme $v_n = an + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
2. On pose alors $w_n = u_n - v_n$. Montrer que (w_n) vérifie :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = 2w_{n+1} - 4w_n.$$
3. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
4. Donner alors l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3. On se propose dans ce problème de calculer la limite de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est appelée la série harmonique alternée.

Préliminaires

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Montrer que pour tout $x > -1$,
   $$\ln(x + 1) \leq x. \quad (I_1)$$

Étude de la série harmonique

On définit $(H_n)_{n\geq 1}$ par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La suite $(H_n)_{n\geq 1}$ est appelée la série harmonique.

3. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k).$$

   (b) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n \geq \ln(n+1).$$

   (c) Donner la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Constante d'Euler

On définit pour tout $n \geq 2$, par

$$A_n = H_{n-1} - \ln(n) \quad \text{et} \quad B_n = H_{n-1} - \ln(n-1)$$

4. (a) Montrer que $(A_n)_{n\geq 2}$ est croissante.
   (b) Montrer que $(B_n)_{n\geq 2}$ est décroissante (on pourra utiliser (I_1) pour un x bien choisi)
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} A_n - B_n$
5. En déduire que la suite $(A_n)_{n\geq 2}$ converge vers une limite, que l'on notera γ (appelée *constante d'Euler*).

Convergence de la série harmonique alternée

6. (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$S_{2n} + H_{2n} = H_n.$$

   (b) (Difficile) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = -\ln(2).$$

   (c) Justifier que S_{2n+1} a la même limite que S_{2n}.
   (d) Conclure sur la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.