TD 21 : DL

Entrainements

Négligeabilité

Exercice 1. Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en $+\infty$:

$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=\exp(x),\ f_3(x)=\frac{1}{x},\ f_4(x)=2,\ f_5(x)=\ln(x),\ f_6(x)=\sqrt{x}\ln x,\ f_7(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 2. Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en 0 :

$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=\exp(x^2)-1,\ f_3(x)=\frac{1}{x},\ f_4(x)=x\sqrt{x},\ f_5(x)=\ln(x),\ f_6(x)=\sqrt{x}\ln x,\ f_7(x)=\ln(x+1).$$

Exercice 3. Soit f et g deux fonctions. Montrer que

$$f(x)\underset{g}{\sim}(x) \Longleftrightarrow f(x)-g(x)=o(g(x))$$

Exercice 4. Soit $f(x)=\sqrt{x+1}$ et $g(x)=\sqrt{x}$

1. Montrer que $f(x)\underset{+\infty}{\sim} g(x)$
2. Déterminer $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que
$$f(x)-g(x)=\frac{1}{x^\alpha}+o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

Calculs de développements limités

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre donné :

1. $f(x)=e^x-\dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre 2
2. $f(x)=\exp(\sin x)$ à l'ordre 4
3. $f(x)=\sqrt[3]{1+x+x^2}$ à l'ordre 2
4. $f(x)=\cos\sqrt{x}$ à l'ordre 5
5. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$ à l'ordre 1
6. $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5
7. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2
8. $f(x)=\sin x-x\cos x$ à l'ordre 8
9. $f(x)=2^x-1$ à l'ordre 2
10. $f(x)=e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
11. $f(x)=\tan^2 x$ à l'ordre 6
12. $f(x)=\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4
13. $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ à l'ordre 3
14. $f(x)=\ln(1+\cos(2x))$ à l'ordre 4
15. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+2}$ à l'ordre 3
16. $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4
17. $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{\tan x}\right)$ à l'ordre 4
18. $f(x)=(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3

Exercice 6. Déterminer le développement limité à l'ordre n donné de la fonction f au voisinage de x_0 dans les cas suivants :

— $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x_0 = \frac{1}{4}$ à l'ordre $n = 5$.

— $f(x) = \frac{1}{x}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 5$.

— $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 3$ à l'ordre $n = 4$.

— $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{4}$ à l'ordre $n = 3$.

— $f(x) = x^{\frac{1}{-1+\ln x}}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre $n = 3$.

— $f(x) = e^{x-1}$ au voisinage de $x_0 = 1$ à l'ordre n quelconque.

Exercice 7. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + x + x^2}$. Calculer $f^{(4)}(0)$.

Exercice 8. Oral agro 2001.
Soient un entier $n \geq 1$ et la fonction f d'une variable réelle x définie par

$$f(x) = \ln\left(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\right).$$

1. Montrer que f est définie au voisinage de 0 et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Calculer $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

Recherche de limites et d'équivalents

Exercice 9. Dire si les fonctions suivantes ont une limite au point a et si oui les déterminer.

1. $x \mapsto \dfrac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{\sin x - x}$ en $a = 0$
2. $x \mapsto \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ en $a = 0$
3. $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x - x \ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$ en $a = 0$
4. $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2$ en $a = +\infty$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ en $a = 0$
6. $x \mapsto \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ en $a = 1$
7. $x \mapsto \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$ en $a = +\infty$
8. $x \mapsto (x^6 + x^2 + 1)^{\frac{1}{6}} - (x^4 + 1)^{\frac{1}{4}}$ en $a = +\infty$
9. $x \mapsto \left(\dfrac{3^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\ln x}$ en $a = +\infty$
10. $x \mapsto \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$ en $a = 0$
11. $x \mapsto (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$ en $a = \dfrac{1}{2}$
12. $x \mapsto \left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right] \ln x$ en $a = +\infty$
13. $x \mapsto x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ en $a = +\infty$
14. $x \mapsto \dfrac{\tan x - 1}{\sin(2x) - 1}$ en $a = \dfrac{\pi}{4}$
15. $x \mapsto x^{\frac{1}{1-x}}$ en $a = 1$
16. $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}$ en $a = 1$

Exercice 10. Trouver un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de a :

1. $f(x) = \dfrac{2}{\sin x} - \dfrac{2}{\ln(1+x)}$ au voisinage de $a = 0$
2. $f(x) = \sin(2x) - 2\sin x$ au voisinage de $a = 0$

3. $f(x) = \ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)$ au voisinage de $a = 0$
4. $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) - \frac{1}{x}$ au voisinage de $a = +\infty$
5. $f(x) = (e+x)^e - e^{e+x}$ au voisinage de $a = 0$
6. $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)$ au voisinage de $a = 0$

Étude locale de fonctions

Exercice 11. Dans chacun des cas suivants, étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (s'il y a lieu). On étudiera aussi la position locale de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (s'il y a lieu).

1. $f(x) = (x+1)\exp\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x}$
3. $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
4. $f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$
5. $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$
6. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$

Exercice 12. Soit la fonction f définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.
2. Ce prolongement est-il dérivable ?
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
4. Ce prolongement est-il dérivable ?

Type DS

Exercice 13. Soit la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arctan x + e^x - 1.$$

1. Étudier f et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.
2. Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
3. Soit g la réciproque de la bijection précédente.
   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
   En déduire que g admet, en tout point de I, des développements limités à tout ordre.
4. En utilisant le fait que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$, donner un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.