Programme de colle : Semaine 24
Lundi 7 avril

1 Cours

1. Equation différentielle.
   — Retour sur les équations différentielles mais cette fois à coefficients pas nécessairement constant.
2. Espaces vectoriels
   — Définition d'un espace vectoriel. On se contentera de travailler sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.
   — Définition d'un sous espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev.
   — Famille de vecteurs, combinaisons linéaires et espace vectoriel engendré.
   — Famille génératrice d'un sev F. Famille libre. Bases.
   — Dimension, rang d'une famille de vecteurs (défini comme la dimension de l'espace vectoriel engendré).
   — Proposition reliant cardinal d'une famille de vecteur, famille génératrice, famille libre et base.
3. Python :
   — Tableau numpy, dictionnaires
   — Représentation informatique d'un polynome par une liste (évaluation, racine, dérivation, somme)

2 Exercices Types

1. (a) i. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{a}{1+x^2} + b$
   ii. A l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive de $x \mapsto 2x \arctan(x)$
   (b) Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$
   $$y' + \frac{1}{x}y = 2\arctan(x)$$
2. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes
   (a) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
   (b) $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2}y = 1$
   (c) $y' - y = x^2(e^x + e^{-x})$
   (d) $xy' + (1 - 2x)y = 1$
   (e) $x^3y' + 4(1 - x^2)y = 0$
   (f) $(1 - x^2)y' - 2xy = 1$
   (g) $(\tan x)y' + y - \sin x = 0$
   (h) $y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x$
   (i) $x^2y' - y = x^2 - x + 1$. On pourra chercher une solution particulière polynomiale.
3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
   (a) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\right\}$
   (b) $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\right\}$
   (c) $C = \left\{(x + 2y, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
   (d) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}$
4. Dans $\mathbb{K}^3$, on considère $u = (2, -4, 7)$ et $v = (-1, 2, -3)$. Peut-on déterminer a de sorte que $w \in \text{Vect}(u, v)$ dans chacun des 3 cas suivants :
   (a) $w = (-1, a, 3)$ (b) $w = (-1, 2, a)$ (c) $w = (-1, -1, a)$
5. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.
   (a) $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -1)$ et $w = (1, 5, -1)$
   (b) $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (3, 1, \lambda)$ λ paramètre réel.
   (c) $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (4, -2, 1)$
   (d) $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$ et $t = (1, 1, 1)$

6. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Donner une base de F et sa dimension.
   (a) $E=\mathbb{R}^3$ et $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad x-y+3z=0 \text{ et } 2x-y+z=0\right\}$
   (b) $E=\mathbb{R}^3$ et $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad x-y+4z=0\right\}$
   (c) $E=\mathbb{R}^3$ et $F=\left\{(x+2y-2z,-x+3y-z,x+7y-5z),\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$
   (d) $E=\mathbb{R}^4$ et $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\quad 2xy+z-t=0 \text{ et } x-y+z+t=0 \text{ et } x+2y-at=0\right\}$ avec a un paramètre réel.
7. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par
$$u_0=1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=3sin(u_n)+2$$
8. Représenter informatiquement un polynome (liste) et donner une fonction qui permet de faire la somme de deux polynomes.