Concours blanc

Durée : 3h00

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \ln\left(\frac{u_n + 4}{3}\right)$$

On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+4}{3}\right)$. On note I l'intervalle $I = [0, 1]$.
On rappelle que $e \in]2, 3[$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel a appartenant à I tel que $\varphi(a) = a$
3. Montrer que, pour tout $x \in I, |\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
4. Citer le théorème des accroissements finis appliqués à une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. On fera en particulier attention aux hypothèses précises du théorème.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - a|$.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble $F = \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1))$ et :

$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + z = 0 \text{ et } y + x = z\right\}.$$

On appelle $\mathcal{B}$ la famille $((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1), (-1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

1. Montrer que G est non vide et stable par combinaison linéaire. Qu'en déduisez vous ?
2. Déterminer une base de G puis donner les dimensions de F et G.
3. Expliciter $F \cap G$.
4. Calculer le rang de la famille $\mathcal{B}$.Montrer alors que cette famille est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.
5. En déduire que, si u est un élément de $\mathbb{R}^4$, alors il existe un unique couple (g, h) de $F \times G$ tel que $u = g + h$.

Exercice 3. Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs A et B. Au jour 0, elle va à la fleur A. À chaque nouvelle journée :

— Si elle était sur la fleur A la veille, elle retourne sur la fleur A avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sinon va sur la fleur B.

— Si elle était sur la fleur B la veille, elle va sur la fleur A avec probabilité $\frac{3}{4}$ et sinon retourne sur la fleur B.

Soit X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si l'abeille est sur la fleur A à la journée n et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_0 et X_1.
2. Déterminer $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X_{n+1} = 1) = aP(X_n = 0) + bP(X_n = 1)$$

3. Faire de même avec $P(X_{n+1} = 0)$
4. Soit $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}$. Déduire des questions précédentes que $U_{n+1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} U_n$

   On note A la matrice $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 + 3q^n & 2 - 2q^n \\ 3 - 3q^n & 3 + 2q^n \end{pmatrix}$$

   où $q = -\frac{1}{4}$

6. En déduire la loi de X_n.

Exercice 4. L'objet du problème est l'étude et la modélisation d'un procédé ultra-rapide de greffes de rosiers. Lorsqu'une greffe est opérée, on sait au bout d'une semaine si elle a pris ou non. On suppose que la probabilité qu'une greffe donnée prenne est constante, égale à $p \in]0,1[$. On notera $q = 1 - p$.
On veut greffer R rosiers où R est un entier supérieur ou égal à 1. Pour chacun d'entre eux, on opère une greffe. Chaque semaine, si la greffe ne prend pas, on recommence. Si au bout de N semaines la greffe n'a toujours pas pris, on effectue à la semaine $N+1$ une greffe normale, qui prend avec probabilité 1. Ici N est un entier supérieur ou égal à 1.
On suppose que les R rosiers sont indépendants.

Partie 1 :

On note G le nombre de greffes nécessaires à la prise de la greffe d'un rosier donné.

1. Donner l'univers image de G ainsi que sa loi. *On pourra introduire les événements élémentaires A_i : « la greffe a pris à la semaine i » et on distinguera le cas $P(G = N+1)$.*
2. Calculer pour tout $k \in G(\Omega)$, $P(G \leq k)$
3. Calcul de l'espérance de G.
   (a) Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} x^k$. Calculer $f(x)$ pour $x \neq 1$.
   (b) Pour $x \neq 1$, calculer $f'(x)$ de deux façons différentes, et en déduire que l'on a, pour $x \neq 1$:
   $$\sum_{k=1}^{N} kx^{k-1} = \frac{1-(N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2}.$$
   (c) Calculer l'espérance de G.
   (d) Quelle est la limite de $E(G)$ quand N tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

Partie 2 :

On étudie cette fois les R rosiers. On note G_i le nombre de greffes nécessaires à la prise de la greffe du rosier numéro i, pour $i \in [\![1, R]\!]$. Chacune des variables aléatoires G_i suit donc la loi G étudiée dans la première partie.

4. Soit X le nombre total de greffes nécessaires pour que les greffes prennent sur les R rosiers.
   (a) Donner l'univers image de X.
   (b) Exprimer X en fonction des variables aléatoires G_i. En déduire l'espérance de X.
5. Soit Y le nombre de semaines nécessaires à la prise des greffes sur les R rosiers. Pour chaque rosier, le nombre de semaines nécessaires est égal au nombre de greffes nécessaires. Donc on a $Y = \max(G_1, \ldots, G_R)$.
   (a) Donner l'univers image de Y.
   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on a $P(Y \leq k) = (1-q^k)^R$, et que $P(Y \leq N+1) = 1$.
   (c) En déduire la loi de Y.