Règles de calculs

I Fractions et puissances

Proposition 1. Soit $(a,b,c,d) \in (\mathbb{R}^*)^4$.On a

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$c\frac{a}{b} = \frac{ac}{b} \quad \text{et} \quad \frac{ca}{cb} = \frac{c}{c}\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \quad \text{et} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \quad \text{et} \quad \frac{a\frac{1}{c}}{b\frac{1}{c}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$$

$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$.... c'est très faux...

Proposition 2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, non nuls si besoin, pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$ on a :

- $(xy)^n = x^n y^n$
- $x^n \times x^m = x^{n+m}$ et $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

II Factorisations

Proposition 3. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Ces égalités sont souvent appelées identités remarquables.

Proposition 4.

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (bc+ad)x + bd$$

$$ax + b(cx+d) = ax + bcx + bd$$

$$(ax+b)cx + d = acx^2 + bcx + d$$

$$c(ax+b) = acx + bc$$

$$cax + b = acx + b$$

$$c - (ax+b) = c - ax - b$$

$$c - ax + b = c - ax + b$$

Proposition 5. Si $x \mapsto P(x)$ est une fonction polynomiale et r une racine de P (ie. $P(r)=0$) alors on peut factoriser $P(x)$ par $(x-r)$.

Autrement dit il existe une fonction polynomiale Q (de degré 1 de moins que celui de P) tel que $P(x)=(x-r)Q(x)$

III Exercices

Les exercices sont tirés du très bon Cahier de calculs [1]

Exercice 1. Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible

- $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$
- $\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$
- $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

Exercice 2. Soit $k\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a+\frac{b}{X}$ avec a et b entiers et $X\in\mathbb{R}$.

$$A=\frac{29}{6}\quad \text{et}\quad B=\frac{k}{k-1}\quad \text{et}\quad C=\frac{3x-1}{x-2}$$

Exercice 3. Soit $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On donne $A=\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B=\left(1+t^2\right)(1+t)^2$. Simplifier AB autant que possible.

Exercice 4. Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

- $(x-2)^2\left(-x^2+3x-1\right)-(2x-1)\left(x^3+2\right)$
- $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$
- $\left((x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)+1\right)x-x^6-x^5+2$
- $(x+1)(x-1)^2-2\left(x^2+x+1\right)$
- $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$
- $\left(x^2+x+1\right)^2$

Exercice 5. Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

- $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$
- $25-(10x+3)^2$
- $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$
- $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$

Exercice 6. Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- $(x+y)^2-z^2$
- $xy-x-y+1$
- $x^2+6xy+9y^2-169x^2$
- $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$
- $y^2\left(a^2+b^2\right)+16x^4\left(-a^2-b^2\right)$

1. A retrouver sur https://colasbd.github.io/cdc/