Quantitative
&
Financial Modelling
(QFM)

Pratical work : Finite Differencies for the Wave Equation

Advanced Computational Methods I

TINA Djara Olivier
DJOSSOU Djidjoho Isidore Borel

Professor :
Imad ELMAHI

Considérons l'équation d'onde 1D suivante avec des conditions initiales et aux limites

$$(E1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad pour \;\; t > O, -L < x < L \\ u(x,0) = f(x) \qquad pour \;\; -L < x < L \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0; \qquad pour \;\; -L < x < L \\ u(-L,t) = u(L,t) = 0; \qquad t > 0 \end{cases}$$

1. Montrons que la solution de l'équation (E1) est donnée par la somme de deux ondes progressives F et G se propageant respectivement avec les vitesse c et $-c$:

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+xt)$$

Posons $\begin{cases} \alpha = x - ct \\ \beta = x + ct \end{cases}$

Faisons un changement de variables

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ tel que

$$u(x,t) = g(\alpha,\beta)$$

Par suite, on a :

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial g(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \times \frac{\partial \beta}{\partial x}$

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \beta \partial \alpha} + \frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2}$

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial g(\alpha,\beta)}{\partial \beta} \times \frac{\partial \beta}{\partial t}$

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -c\frac{\partial g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} + c\frac{\partial g(\alpha,\beta)}{\partial \beta}$

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -c[\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} \times \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \beta \partial \alpha} \times \frac{\partial \beta}{\partial t}] + c[\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} \times \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2} \times \frac{\partial \beta}{\partial t}]$

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -c[-c\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} + c\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \beta \partial \alpha} + c[-c\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} + c\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2}]$

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} - c^2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \beta \partial \alpha} - c^2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} + c^2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2}$

Or, par hypothèse, g est de classe $\mathcal{C}^2$, donc d'après le théorème de Schwarz on a : $\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \beta \partial \alpha}$

Il s'e suit :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} - 2c^2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} + c^2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial \beta^2}$$

Par ailleurs, on a : $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,$

Donc :

$$c^2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}-2c^2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}+c^2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2}-c^2\Big[\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2}\Big]=0$$

$\Leftrightarrow -4c^2\frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 g(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}=0$, car $c>0$.
$\implies \exists\ K\in\mathcal{C}^1$ tel que $\frac{\partial g(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=K(\beta)$
$\implies g(\alpha,\beta)=\int K(\beta)d\beta+F(\alpha)$
$\implies g(\alpha,\beta)=G(\beta)+F(\alpha)$
Or, $u(x,t)=g(\alpha,\beta)$ avec $\begin{cases}\alpha=x-ct\\ \beta=x+ct\end{cases}$
Ainsi, on a :

$$u(x,t)=G(x+ct)+F(x-ct)$$

où F et G sont des fonctions progressives avec les vitesses respectives c et $-c$.

2. Etudions l'erreur de troncature, l'ordre et la consistancedu schéma numérique (1).

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2}-c^2\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}=0 \qquad (1)$$

On commence par un développement limité

$$u_{j+1}^n=u(x_j+\Delta x,t^n)$$
$$u_{j+1}^n=u(x_j,t^n)+\Delta x\frac{\partial u(x_j,t^n)}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_j,t^n)}{\partial x^2}+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x_j,t^n)}{\partial x^3}+O((\Delta x)^4)$$
$$u_{j+1}^n=u_j^n+\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^n+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_j^n+O((\Delta x)^4) \qquad (2)$$

$$u_{j-1}^n=u(x_j-\Delta x,t^n)$$
$$u_{j-1}^n=u(x_j,t^n)-\Delta x\frac{\partial u(x_j,t^n)}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_j,t^n)}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x_j,t^n)}{\partial x^3}+O((\Delta x)^4)$$
$$u_{j-1}^n=u_j^n-\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^n+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n-\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_j^n+O((\Delta x)^4) \qquad (3)$$

$$u_j^{n+1}=u(x_j,t^n+\Delta t)$$
$$u_j^{n+1}=u(x_j,t^n)+\Delta t\frac{\partial u(x_j,t^n)}{\partial t}+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_j,t^n)}{\partial t^2}+\frac{(\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x_j,t^n)}{\partial t^3}+O((\Delta t)^4)$$
$$u_j^{n+1}=u_j^n+\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_j^n+\frac{(\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_j^n+O((\Delta t)^4) \qquad (4)$$

$$
\begin{aligned}
u_j^{n-1} &= u(x_j, t^n - \Delta t)\\
u_j^{n-1} &= u(x_j, t^n) - \Delta t \frac{\partial u(x_j,t^n)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_j,t^n)}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x_j,t^n)}{\partial t^3} + O((\Delta t)^4)\\
u_j^{n-1} &= u_j^n - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_j^n - \frac{(\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_j^n + O((\Delta t)^4) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Par suite, on effectue les opération suivantes :

$(2) + (3) \implies u_{j+1}^n + u_{j-1}^n = 2u_j^n + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n + O((\Delta x)^4)$

Ce qui implique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

$(4) + (5) \implies u_j^{n+1} + u_j^{n-1} = 2u_j^n + (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_j^n + O((\Delta t)^4)$

Ce qui implique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O((\Delta t)^2)$$

Il s'en suit :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) &= \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O((\Delta t)^2) - c^2\Big(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)\Big)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) + O((\Delta t)^2)
\end{aligned}
$$

*** Erreur de troncature**

Soit ET cette erreur,

$$
\begin{aligned}
ET &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Big(\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}\Big)\\
ET &= \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2) + O((\Delta t)^2)\\
&\quad - \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} + c^2\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}\\
ET &= O((\Delta x)^2) + O((\Delta t)^2)
\end{aligned}
$$

**** Ordre**

Notre schéma numérique (1) est d'ordre deux en espace et d'ordre deux en temps.

***** Consistance**

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta t\to 0} ET = \lim_{\Delta x\to 0,\Delta t\to 0}\Big(O((\Delta x)^2)+O((\Delta t)^2)\Big)=0$$

Car $\begin{cases} \Big|O((\Delta x)^2)\Big| < \lambda_1|\Delta x|^2 \to 0 \;\; quand\; \Delta x\to 0 \implies \lim\limits_{\Delta x\to 0} O((\Delta x)^2)=0 \\ \quad et \\ \Big|O((\Delta t)^2)\Big| < \lambda_2|\Delta t|^2 \to 0 \;\; quand\; \Delta t\to 0 \implies \lim\limits_{\Delta t\to 0} O((\Delta t)^2)=0 \end{cases}$

D'où le schéma numérique (1) est consistant.

3. Utilisons l'analyse de Fourier Von-Neumann pour montrer la stabilité du schéma (1) sous la condition

$$c\frac{\Delta t}{\Delta x}\leq 1.$$

Soit

$$u_j^n = C^n e^{i\xi j\Delta x}.$$

Ainsi, on a :

$$\frac{C^{n+1}e^{i\xi j\Delta x}-2C^ne^{i\xi j\Delta x}+C^{n-1}e^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t^2}-c^2\frac{C^ne^{i\xi(j+1)\Delta x}-2C^ne^{i\xi j\Delta x}+C^ne^{i\xi(j-1)\Delta x}}{\Delta x^2}=0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{C^{n+1}-2C^n+C^{n-1}}{\Delta t^2}=c^2\frac{C^ne^{i\xi\Delta x}-2C^n+C^ne^{-i\xi\Delta x}}{\Delta x^2}\\
&\Leftrightarrow \frac{C^{n+1}-2C^n+C^{n-1}}{\Delta t^2}=c^2\frac{C^n(e^{i\xi\Delta x}+e^{-i\xi\Delta x})-2C^n}{\Delta x^2}\\
&\Leftrightarrow \frac{C^{n+1}-2C^n+C^{n-1}}{\Delta t^2}=c^2\frac{2C^n\cos(\xi\Delta x)-2C^n}{\Delta x^2}\\
&\Leftrightarrow \frac{C^{n+1}-2C^n+C^{n-1}}{\Delta t^2}=c^2\frac{2C^n\left(\cos(\xi\Delta x)-1\right)}{\Delta x^2}\\
&\Leftrightarrow C^{n+1}-2C^n+C^{n-1}=c^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(2C^n\left(\cos(\xi\Delta x)-1\right)\right)\\
&\Leftrightarrow C^{n+1}=\left(c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(2C^n\left(\cos(\xi\Delta x)-1\right)\right)+2C^n-C^{n-1}\\
&\Leftrightarrow C^{n+1}=\lambda^2\left(2C^n\left(\cos(\xi\Delta x)-1\right)\right)+2C^n-C^{n-1},\; car\; c\frac{\Delta t}{\Delta x}=\lambda
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(2a)&=\cos^2(a)-\sin^2(a)\\
&=1-\sin^2(a)-\sin^2(a),\; car\; 1=\sin^2(a)+\cos^2(a)\\
\cos(2a)&=1-2\sin^2(a)
\end{aligned}$$

D'où

$$\cos(2a)-1=-2\sin^2(a).$$

Remarquons que

$$2a = \xi \Delta x \Leftrightarrow a = \frac{\xi \Delta x}{2}.$$

Il s'en suit que :

$$\frac{C^{n+1}e^{i\xi j\Delta x} - 2C^n e^{i\xi j\Delta x} + C^{n-1}e^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - 2C^n e^{i\xi j\Delta x} + C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}}{\Delta x^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow C^{n+1} = \lambda^2 \left(2C^n \left(-2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right)\right) + 2C^n - C^{n-1} \\
&\Leftrightarrow C^{n+1} = -4\lambda^2 C^n \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 2C^n - C^{n-1} \\
&\Leftrightarrow C^{n+1} = -2C^n \left(2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1\right) - C^{n-1} \\
&\Leftrightarrow C^{n+1} + 2C^n \left(2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1\right) + C^{n-1} = 0
\end{aligned}$$

L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente est :

$$r^2 + 2r\left(2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1\right) + 1 = 0.$$

Ainsi, nous allons calculer le discriminant Δ de cette équation.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left[2\left(2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1\right)\right]^2 - 4(1)(1) \\
&= \left[4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 2\right]^2 - 4(1)(1) \\
&= 16\lambda^4 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 16\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 4 - 4 \\
&= 16\lambda^4 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 16\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \\
\Delta &= 16\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\left[\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1\right]
\end{aligned}$$

Le terme général de la suite $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit alors :

$$C^n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Maintenant, nous allons calculer les racines r_1 et r_2.

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{-4\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)+2-\sqrt{16\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\left[\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)-1\right]}}{2}\\
&= \frac{-4\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)+2-4\lambda\sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)-1}}{2}\\
r_1 &= -2\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)+1-2\lambda\sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= \frac{-4\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)+2+\sqrt{16\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\left[\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)-1\right]}}{2}\\
&= \frac{-4\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)+2+4\lambda\sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)-1}}{2}\\
r_2 &= -2\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)+1+2\lambda\sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)-1}
\end{aligned}$$

Pour avoir la stabilité c'est-à-dire la suite $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\forall\ n \in \mathbb{N}$ il faut et il sut que les racines de l'équation caractéristique soient toutes les deux de module inférieur ou égale à 1.

— Si $\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)-1 \leq 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
r_1 &= -2\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)+1-2\lambda\sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{-\left(1-\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right)}\\
r_1 &= -2\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)+1-2i\lambda\sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)},\ car\ i^2=-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= -2\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)+1+2\lambda\sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{-\left(1-\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right)}\\
r_2 &= -2\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)+1+2i\lambda\sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)},\ car\ i^2=-1
\end{aligned}$$

Nous allons calculer à présent les modules des racines r_1 et r_2.

$$
\begin{aligned}
|r_1|^2 &= \left| -2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 - 2i\lambda \sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)}\right|^2 \\
&= \left(-2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1\right)^2 + \left(-2\lambda \sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)}\right)^2 \\
&= 4\lambda^4 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 + 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\left(1-\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right) \\
&= 4\lambda^4 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 + 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 4\lambda^4 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \\
|r_1|^2 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|r_2|^2 &= \left| -2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 + 2i\lambda \sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)}\right|^2 \\
&= \left(-2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1\right)^2 + \left(2\lambda \sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)}\right)^2 \\
&= 4\lambda^4 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 + 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\left(1-\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right) \\
&= 4\lambda^4 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 + 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 4\lambda^4 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \\
|r_1|^2 &= 1
\end{aligned}
$$

Le schéma est donc stable.

— Si $\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1 > 0$, alors on a :

$$
r_1 = -2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 - 2\lambda \sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1}
$$

et

$$
r_2 = -2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 + 2\lambda \sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{\lambda^2\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1}
$$

Calculons le produit de r_1 et r_2.

$$\begin{aligned}
r_1 \times r_2 &= \left[-2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 - 2\lambda \sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1}\right] \times \\
&\quad \left[-2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 + 2\lambda \sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1}\right] \\
&= \left(-2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1\right)^2 - \left(2\lambda \sin\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\sqrt{\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1}\right)^2 \\
&= 4\lambda^4 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 - 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\left(\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1\right) \\
&= 4\lambda^4 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 1 - 4\lambda^4 \sin^4\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) + 4\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$r_1 \times r_2 = 1$$

Donc l'une des deux racines r_1 ou r_2 a un module > 1. Le schéma est donc instable.

Par conséquent, la stabilité est donc vérifiée si et seulement si $\forall \xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) - 1 \leq 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left(\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)\right) \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \lambda^2 \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \lambda \leq 1,\ car \lambda > 0 \\
&\Leftrightarrow c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1
\end{aligned}$$

D'où le schéma (1) est stable sous la condition

$$c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

4. Mettons en œuvre l'algorithme numérique et effectuons les simulations sur les deux cas de figure suivants, en utilisant un maillage avec $N = 100$ nœuds (Voir code en python qu'on a joint à ce fichier pdf).
   (i) **<u>Cas du test 1 :</u>**
   - $L = 10m, c = 1m/s, f(x) = e^{-x^2}$
   - Représentons les résultats aux moments physiques $t_0 = 0s, t_1 = 1s, t_2 = 4s\ et\ t_3 = 7s$

   (ii) **<u>Cas du test 2 :</u>**
   - $L = 1m, c = 1m/s, f(x) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\frac{x}{L}\right)\ avec\ k = 3.$
   - Représentons les résultats aux moments physiques $t_0 = 0s, t_1 = \frac{T}{5}, t_2 = \frac{2T}{3}\ avec\ T = \frac{4L}{(2k+1)c}.$

Considérons l'équation d'onde 2D suivante avec des conditions initiales et aux limites

$$(E2)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \quad pour \;\; t > 0, \;\; (x,y) \in \mathring{\Omega} \\ u(x,y,0) = f(x,y) \qquad pour \;\; (x,y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 0; \qquad pour \;\; (x,y) \in \Omega \\ u(-L,t) = u(L,t) = 0; \qquad t > 0, (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

5. En se basant sur le schéma (1) pour l'équation d'onde 1D (E1), proposons un schéma de différences finie pour l'équation d'onde 2D (E2). Au niveau de 1D, le schéma de différences finie qu'on a utilisé est le schéma de différence finie centré dans l'espace et le temps qui s'écrit comme suit :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

Ainsi en se basant sur ça, proposons un schéma de différences finie en 2D.

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_j^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} + O((\Delta y)^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O((\Delta t)^2)$$

Par suite, on a :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2 \left[\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_j^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] = 0$$

6. **<u>Cas du test :</u>**
   - $L_x = L_y = 10m, c = 1m/s, f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, N_x = N_y = 30$
   - Représentons les courbes de niveau de u aux temps $t_0 = 0s, t_1 = 1s, t_2 = 4s \; et \; t_3 = 7s$