1 Алгебры Клиффорда

Алгебра Клиффорда сигнатуры (p,q) **векторного пространства** V **над полем** F $Cl^F(p,q)$ – факторалгебра тензорной алгебры $T(V)$ по идеалу, порождённым $a \otimes b + b \otimes a - 2g(a,b)$, g – метрика на V с матрицей $g = diag(\underbrace{1,...,1}_{p}, \underbrace{-1,...,-1}_{q})$, $F = \mathbb{R}(p,q)$ или $F = (p,q)$. В последнем случае будем писать просто $Cl(p,q)$. Пусть $V = \langle e^1, ..., e^n \rangle, n = p+q$. Тогда $Cl^F(p,q) = \langle e(e^0), e^a, e^{a_1,a_2}, e^{1...n} \rangle$, $e^{a_1}...e^{a_k} = e^{a_1...a_k}$, $a_1 < a_2 < ...$, индексы $a, a_1, a_2, ...$ принимают значения от 1 до n. Как видно, $dim\, Cl^F(p,q) = 2^n$.

Таким образом, элемент алгебры Клиффорда имеет вид $U = u_\alpha e^\alpha$, где α – всевозможные мультииндексы длины от 0 до n. Будем называть элементы вида $U = \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha e^\alpha$ **элементами ранга** k, а элементы $U = \sum_k \sum_{|\alpha|=2k(+1)} u_\alpha e^\alpha$ **(не)чётными элементами**.

Операции, определённые в алгебре Клиффорда:

- **Сложение**
- **Умножение**
- **Коммутатор** $[U,V] = UV - VU$
- **Антикоммутатор** $\{U,V\} = UV + VU$
- **Комплексное сопряжение** $\overline{U}$. Обычное комплексное сопряжение элементов
- **Реверс** $U^\sim$. Обращение порядка множителей в порождающих: $(e^{a_1...a_k})^\sim = e^{a_k...a_1}$
- **Чётностное (grade) сопряжение** $U^\sharp$. Нечётные элементы умножаются на -1
- **Эрмитово** $U^\dagger = U|_{(e^{i_1...i_k})^\dagger = e_{i_k}...e_{i_1}, \lambda^\dagger = \overline{\lambda}}$
- **Псевдоэрмитово сопряжение** $U^\ddagger = \overline{U}^\sim$
- **Клиффордово сопряжение** $\overline{U}^\sharp$
- **След** $Tr(U) = u_0$
- **Скалярное произведение** $(U,V) = Tr(U^\ddagger V)$. Оно евклидово в вещественном случае и эрмитово в комплексном

Следует иметь в виду, что $(UV)^\sim = V^\sim U^\sim$.

Эквивалентные определение эрмитового сопряжения:

$$U^{\dagger} = e_{1...p} U^{\ddagger} e^{1...p}, p = 2k+1$$
$$U^{\dagger} = e_{1...p} U^{\ddagger\sharp} e^{1...p}, p = 2k$$

$$U^{\dagger} = e_{p+1...n} U^{\ddagger} e^{p...n+1}, q = 2k$$
$$U^{\dagger} = e_{p+1...n} U^{\ddagger\sharp} e^{p+1...n}, q = 2k+1$$

Центр алгебры Клиффорда. Теорема утверждает, что центр порождается скаляром при чётном n и скаляром и элементом ранга n при нечётном.

Антицентр алгебры Клиффорда. Теорема утверждает, что антицентр порождается элементом ранга n при чётном n и скаляром и тривиален при нечётном.

1.1 Периодичность Картана-Ботта.

Периодичность Картана-Ботта, она же 8-периодичность, доказываемая ниже, заключается в том, что изменение значения выражения $p-q$ на 8 приводит к изоморфной алгебре Клиффорда. Поэтому иногда под сигнатурой понимают $p-q$.

Имеет место изоморфизм $Cl^{\mathbb{R}}(p+1, q+1) \simeq Mat(2, Cl^{\mathbb{R}}(p,q) \simeq Cl^{\mathbb{R}}(p,q) \otimes Cl^{\mathbb{R}}(1,1) \simeq Cl^{\mathbb{R}}(q+1, p-1) \simeq Cl^{\mathbb{R}}(p-4, q+4)$:

$$Cl^{\mathbb{R}}(p,q) = \langle e^1, ..., e^n \rangle$$

Добавим ещё два порождающих: $(e^+)^2 = e$ и $(e^-)^2 = -e$. Зададим соответствие и видим, что представленные матрицы порождают базис в $Mat(2, Cl^{\mathbb{R}}(p,q)$:

$$e^i \mapsto \begin{pmatrix} e^i & 0 \\ 0 & -e^i \end{pmatrix}, i = 1, ..., n, e^+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}, e^- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{pmatrix}$$

Второй изоморфизм следует из того, что базис $Cl^{\mathbb{R}}(p,q)$ порождается $(e^1)' = e^1 e^+ e^-, ..., (e^n)' = e^n e^+ e^-$, а базис $Cl^{\mathbb{R}}(1,1) - e^+, e^-$. Базис в $Cl^{\mathbb{R}}(q+1, p-1)$ порождается $e^1, ..., e^2 e^1, ..., e^n e^1$, а $Cl^{\mathbb{R}}(p-4, q+4)$ имеет порождённый $e^i e^1 e^2 e^3 e^4, e^j, i = 1, ..., 4, j = 5, ..., n$ базис.

Эти изоморфизмы дают пять нижеприведённых важнейших изоморфизмов:

$$Cl^{\mathbb{R}}(0,0) \simeq \mathbb{R}$$
$$Cl^{\mathbb{R}}(1,0) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$
$$Cl^{\mathbb{R}}(0,1) \simeq \mathbb{C}$$
$$Cl^{\mathbb{R}}(0,2) \simeq \mathbb{H}$$
$$Cl^{\mathbb{R}}(0,3) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$$
$$e \mapsto (1,1), e^1 \mapsto (i, -i), e^2 \mapsto (j, -j), e^3 \mapsto (k, -k)$$

1.2 Представления алгебр Клиффорда и приложения

Наиболее ценны для физики алгебры Клиффорда $Cl(3,0)$ (порождающие отвечают пространственным координатам) и $Cl(1,3)$ (e^1 соответствуют времени, а e^2, e^3, e^4 – пространственным координатам).

Матрицы Паули – представление $Cl(3,0)$:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \text{-}i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e^i \mapsto \sigma^i, i = 0,1,2,3$$

Матрицы Дирака – представление $Cl(1,3)$:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, e \mapsto E_4, e^i \mapsto \gamma^i, i = 1,2,3$$

Рекуррентный метод построения представлений. Вначале рассмотрим алгебру Клиффорда $Cl(n,0)$. Очевидно, $e \mapsto E$. При $n = 1$ $e^1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а при $n = 2$ $e^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Пусть для $n = 2k$ построено представление $e^i \mapsto \gamma^i, i = 1, ..., n$. Тогда в случае $n + 1 = 2k + 1$

$$e^i \mapsto \begin{pmatrix} \gamma^i & 0 \\ 0 & \gamma^i \end{pmatrix}, i = 1, ..., n, e^{n+1} \mapsto \begin{pmatrix} i^k\gamma^1...\gamma^n & 0 \\ 0 & -i^k\gamma^1...\gamma^n \end{pmatrix},$$

а при $n + 2 = 2k + 2$ появляется ещё $e^{n+2} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

У $Cl(n,0)$ такое же представление, только порождающим с номерами больше p сопоставляются умноженные на i те же матрицы. Это и показывает важное свойство комплексных алгебр Клиффорда: $Cl(p+q,0) \simeq Cl(p,q)$.

2 Соответствие алгебраических и физических понятий

Состояние физической системы – Прямая в бесконечномерном комплексном гильбертовом пространстве
Скалярная физическая величина – Самосопряжённый оператор
Одновременно измеримые величины – Коммутирующие операторы
Величина с точным значением λ в состоянии ϕ – Оператор с собственным значением λ, отвечающим собственному вектору ϕ
Множество значений величины, которое можно получить измерением – Спектр оператора
Вероятность перехода из состояния ϕ в ψ – $|(\phi,\psi)|$, $|\phi| = |\psi| = 1$

Согласно данной концепции, состояния, не переходящие друг в друга, считаются ортогональными. Потому естественно считать, что они преобразуются согласно различным неприводимым представлениям алгебры преобразований.

3 Антисимметричный тензор электромагнитного поля

Даны электрическое поле $E = (E_1, E_2, E_3)$ и магнитное $V = (V_1, V_2, V_3)$. c – скорость света в вакууме. Тогда **антисимметричный тензор** есть следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} 0 & -B_3 & B_2 & E_1/c \\ B_3 & 0 & -B_1 & E_2/c \\ -B_2 & B_1 & 0 & E_3/c \\ -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c & 0 \end{pmatrix}$$

Так два вектора поля объединяются в один объект и в алгебраическом смысле.

4 Заключение

Изоморфизм комплексных алгебр Клиффорда одной размерности делает возможным их применение в теории относительности, где время неабсолютно. Более того, это позволяет рассматривать время на равных с пространственными координатами, т. е. не просто иметь дело с упорядоченным набором объектов – координат и времени.

Идея с антисимметричным тензором может быть обобщена на случай гравитационного взаимодействия. Квантовая гравитация вполне может описываться последовательностью характеристик, имеющих в пределе классический случай. Алгебраически это позволит сделать алгебру Клиффорда бесконечномерной. В таком случае множество преобразований пространства будет совпадать с самим пространством (алгеброй Клиффорда). Что оставит в силе двойственность.

Алгебра Клиффорда обобщает понятия поля, кватернионов, внешнего произведения, метрического пространства.

5 Источники

1. Широков Д. С. Алгебры Клиффорда и спиноры. МИАН имени В. А. Стеклова. 10.11.2011

2. Pertti Lounesto. Clifford Algebras and Spinors. London Mathematical Society Lecture Note Series. 286. Second edition 2001

3. И. Р. Шафаревич. Основные понятия алгебры. 1999