

## 3.5 Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Doolittle'a ( $LU: L(i,i)=1$ )

---

*Oliwia Masian 127324, Informatyka, Wydział Informatyki, II rok, Elementy Analizy Numerycznej*

### 1. Zastosowanie.

Program rozwiązuje układ równań liniowych w postaci

$$Ax = b$$

gdzie  $A$  oznacza macierz kwadratową stopnia  $n$  oraz  $x, b \in R^n$ , metodą Doolittle'a.

### 2. Opis metody.

#### Rozkład

**LU.**

W wielu zagadnieniach numerycznych dotyczących macierzy kwadratowych  $A$ , poszukujemy takich macierzy trójkątnych  $L$  i  $U$ , że  $A = L \cdot U$ , gdzie  $L$  jest macierzą dolnotrójkątną z jedynkami na diagonalu:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_{n1} & \dots & l_{n\ n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

z kolei  $U$  macierzą górnątrójkątną:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & u_{n-1\ n} \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Metoda Doolittle'a umożliwia wyznaczenie takiego rozkładu, traktując równość  $A = LU$  jako układ  $n^2$  równań z  $n^2$  niewiadomymi  $l_{ij}$  dla  $i > j$  i niewiadomymi  $u_{ij}$  dla  $i \leq j$ . Równania te wygodnie jest rozwiązywać na przemian wierszami i kolumnami, to znaczy raz wyznacza się wiersz macierzy  $U$ , raz kolumnę macierzy  $L$ .

W przypadku ogólnym elementy  $l_{ij}$  oraz  $u_{ij}$  obliczamy następująco:

dla  $i = 1, 2, \dots, n$  obliczamy kolejno:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, j = i, i+1, \dots, n$$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left( a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right), j = i+1, i+2, \dots, n$$

Liczba potrzebnych mnożeń do wykonania rozkładu wynosi  $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$ , a dodawań  $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ .

### Rozwiązanie układu

Po otrzymaniu rozkładu  $LU$  rozwiązujemy układ

$$L \cdot y = b$$

a następnie

$$U \cdot x = y$$

W celu zwiększenia niezawodności metody (zabezpieczenie przed dzieleniem przez 0, gdy  $u_{ii} = 0$ ), metoda ta została rozszerzona o częściowy wybór elementu podstawowego.

### Wybór elementu podstawowego (wybór w kolumnie)

Teoretycznie za element podstawowy można wybrać każdy element na głównej przekątnej  $a_{r1} \neq 0$  (dla pierwszego wiersza). Z uwagi jednak na poprawność rozwiązania (zmniejszenie błędów zaokrągleń) wybiera się

$$|a_{r1}| = \max_{i=1,2,\dots,n} |a_{i1}|$$

Następnie przestawia się wiersz pierwszy z  $i$ -tym, zapamiętuje się tę operację w macierzy permutacji. W przypadku rozkładu  $LU$  konieczna jest też zmiana w macierzy  $L$ , którą można opisać następującym pseudokodem:

```
//i to numer wiersza, który przekształcamy
for(int a = 0; a < i; a++)
{
    long double zamien3 = L[i][a]; //pomocnicza zmienna
    L[i][a] = L[imax][a]; //zamieniamy poszczególne elementy
    L[imax][a] = zamien3;
}
```

Idea polega na niezamienianiu całego wiersza, a jedynie tych elementów, które zostały wyznaczone przez algorytm do momentu wykonywania zamiany.

Analogiczne postępowanie prowadzi się dla pozostałych wierszy.

### 3. Obsługa programu.

The screenshot shows the 'Asian EAN' application window. It has two main sections: 'Macierz współczynników (A):' on the left and 'Prawa strona równania (b):' on the right. The matrix A is a 5x5 grid of input fields. The right side has a single column of input fields. Below the matrix, there are buttons for 'Losuj' (randomize), 'Losuj główną przekątną' (randomize main diagonal), 'Losuj całkowite' (randomize integers), 'Macierz Hilberta' (Hilbert matrix), 'Macierz Boothroyda-Dekkera' (Boothroyda-Dekker matrix), and 'Oblicz!' (calculate). Callouts point to various features: 'Rozmiar macierzy n' points to the matrix size input (5); 'Zakres losowania (maksimum) <-maks,maks>' points to the maximum range input (10); 'Losowanie elementów równoodległych' points to the 'Losuj' button; 'Losowanie macierzy, która posiada elementy na głównej przekątnej dużo większe od pozostałych' points to the 'Losuj główną przekątną' button; 'Losowanie macierzy o współczynnikach całkowitych' points to the 'Losuj całkowite' button; 'Test dla macierzy Hilberta' points to the 'Macierz Hilberta' button; 'Test dla macierzy Boothroyda-Dekkera' points to the 'Macierz Boothroyda-Dekkera' button; 'Wykonanie obliczeń dla wskazanej macierzy' points to the 'Oblicz!' button; and 'Możliwość ręcznego wpisywania wartości dla A i b dla n <= 15' points to the matrix input fields.

Rozmiar macierzy n

Zakres losowania (maksimum) <-maks,maks>

Losowanie elementów równoodległych

Losowanie macierzy, która posiada elementy na głównej przekątnej dużo większe od pozostałych

Losowanie macierzy o współczynnikach całkowitych

Test dla macierzy Hilberta

Test dla macierzy Boothroyda-Dekkera

Wykonanie obliczeń dla wskazanej macierzy

Możliwość ręcznego wpisywania wartości dla A i b dla  $n \leq 15$

### 4. Typy parametrów.

long double:  $A, x, b$  w arytmetyce zwykłej

Interval <long double>:  $A, x, b$  w arytmetyce przedziałowej

int:  $n$

### 5. Wykorzystane biblioteki.

Projekt został napisany w języku C++, z wykorzystaniem następujących bibliotek:

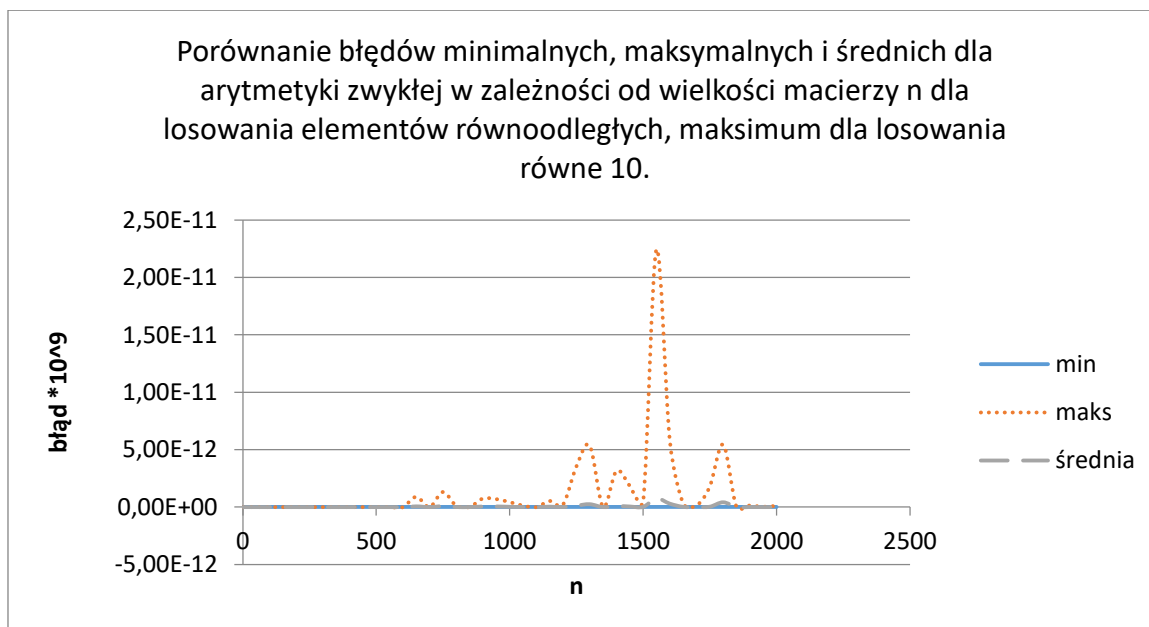
- `#include<mpfr.h>` (GNU MPFR library, GNU GMP library, potrzebne przy konwersji liczby z ciągu znaków na liczbę w arytmetyce przedziałowej, umożliwiając obliczenia w arytmetyce zmiennoprzecinkowej z odpowiednim zaokrągleniem)
- `#include<boost/numeric/interval.hpp>` (z pakietu boost, arytmetyka przedziałowa)
- `#include <boost/lexical_cast.hpp>` (potrzebne przy konwersji liczby z ciągu znaków na liczbę w arytmetyce przedziałowej).

Interfejs użytkownika powstał przy pomocy środowiska Qt Creator (Qt 5.8.0 GCC 64bit), projekt został skompilowany przy użyciu kompilatora GCC, w środowisku linuksowym (openSUSE 64bit).

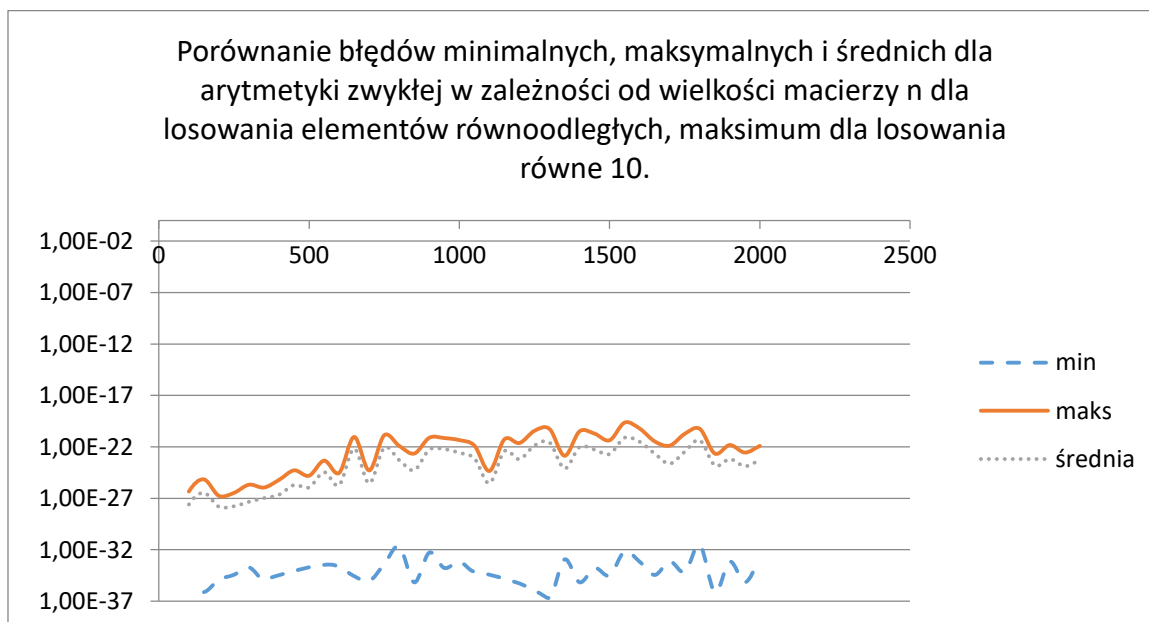
## 6. Wyniki testów.

W celu umożliwienia wizualizacji wyników w programie Excel, błędy zostały przemnożone przez odpowiednie współczynniki, dla których możliwe jest wykonanie wykresów.

Dla arytmetyki zwykłej błąd został obliczony jako różnica między  $b$ -wejściowym z  $b^*$ -obliczonym (na podstawie otrzymanego  $x$ ) podniesiona do kwadratu. Dla arytmetyki zwykłej błąd utożsamiany jest z szerokością przedziału.

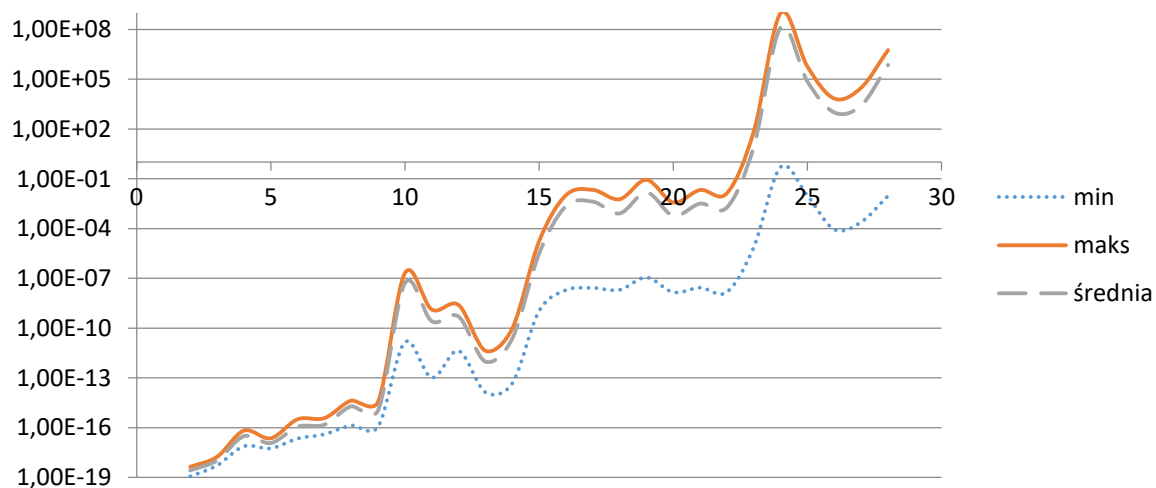


Ten sam wykres w skali logarytmicznej:



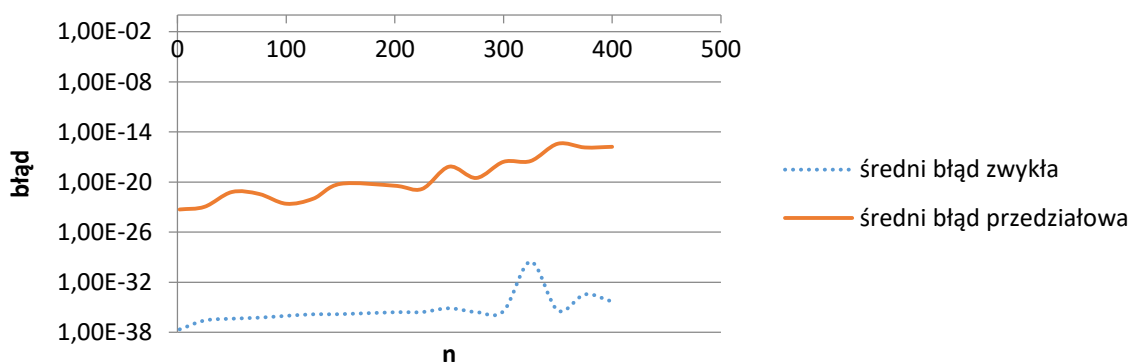
Skala liniowa- widzimy duże wahania dla maksymalnego błędu.

Porównanie błędów minimalnych, maksymalnych i średnich dla arytmetyki przedziałowej w zależności od wielkości macierzy  $n$  dla losowania elementów równoodległych, maksimum dla losowania równe 10.

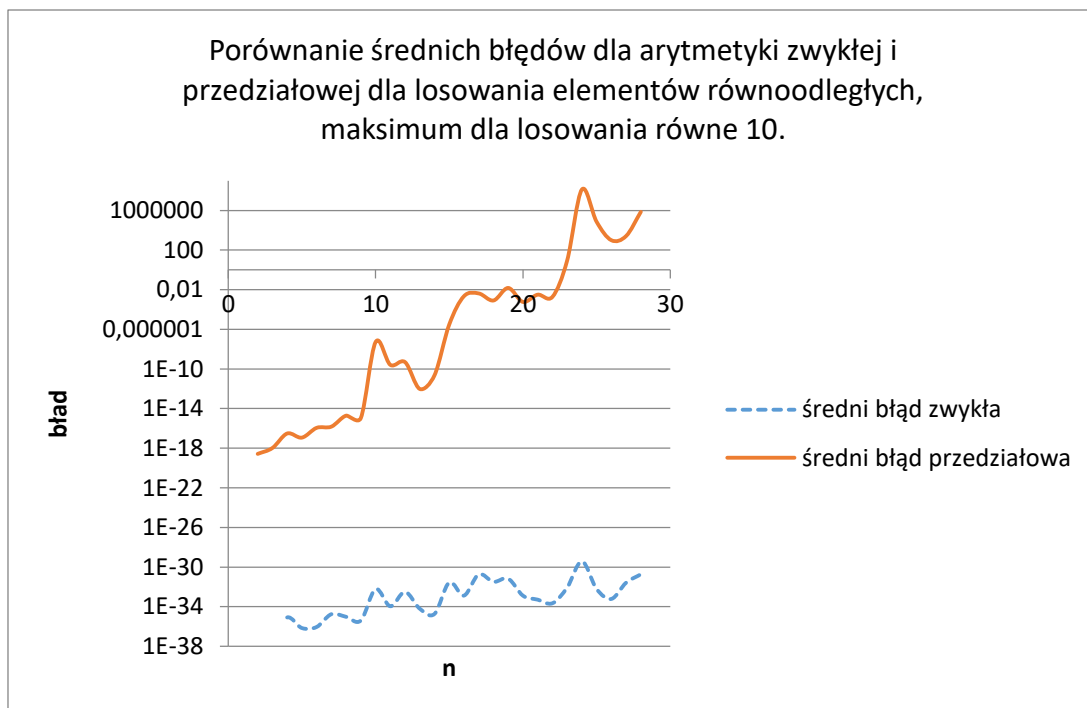


Skala logarytmiczna- wraz ze wzrostem wymiaru macierzy obserwujemy wzrost wszystkich rodzajów błędów. Maksymalny błąd zbliżony do średniego.

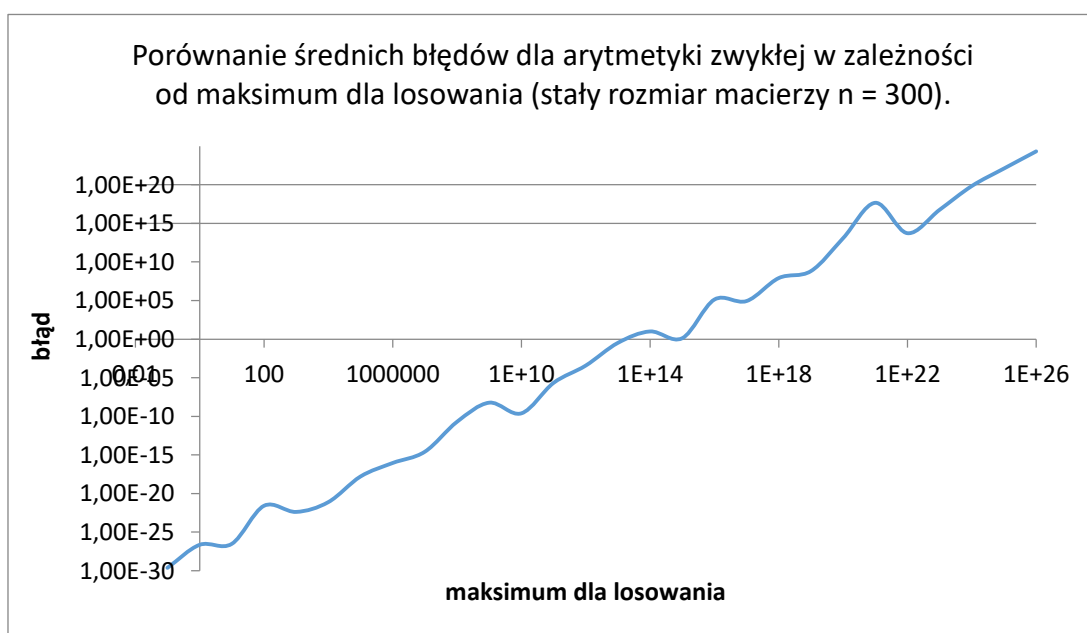
Porównanie średnich błędów dla arytmetyki zwykłej i przedziałowej w zależności od wielkości macierzy  $n$  dla losowania charakteryzującego się dużymi liczbami na głównej przekątnej.



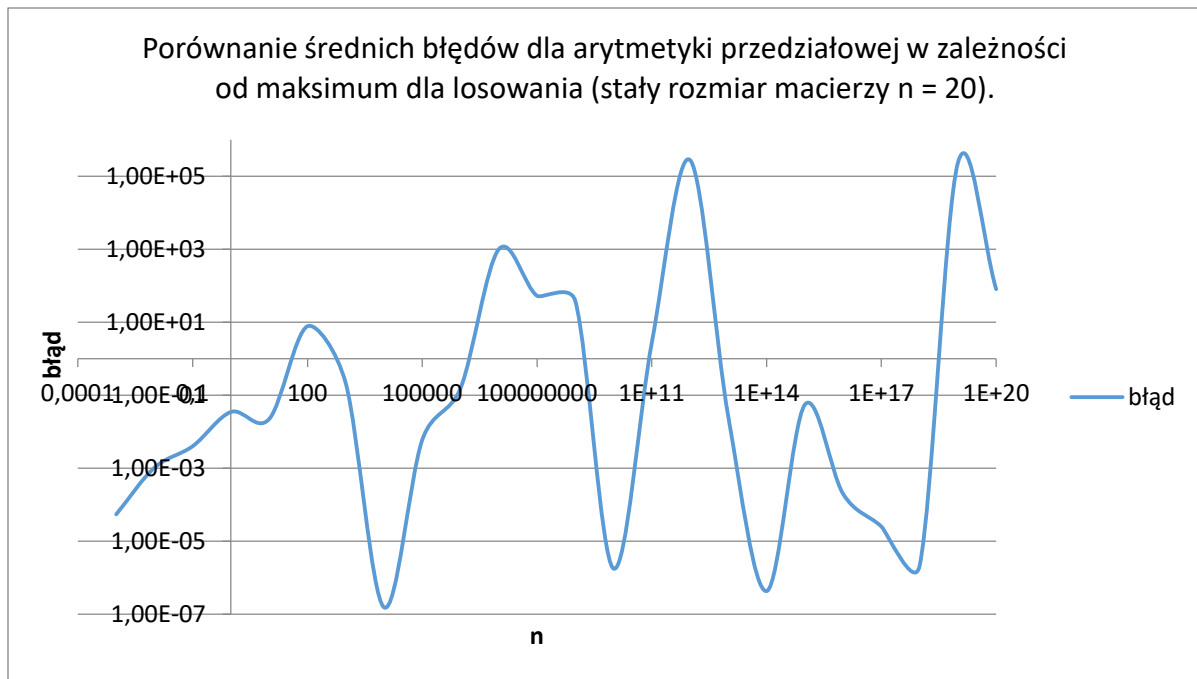
Obserwujemy różnice w błędach o kilkadziesiąt rzędów jedności, niemniej jednak istnieje wspólna prawidłowość- błędy w obydwu przypadkach średnio rosną przy zwiększaniu wymiaru macierzy.



Dla zwykłego losowania możliwe było przeprowadzenie testów dla  $n < 30$ .



Wraz ze wzrostem maksimum losowania, średni błąd zwiększa się.



Wykres przypomina szum- zbyt duże wahania błędów uniemożliwiają wyciągnięcie wniosków.

## 7. Wnioski.

- Rzędy wielkości błędów w arytmetyce zwykłej są dużo mniejsze od tych w arytmetyce przedziałowej. Należy jednak wziąć pod uwagę fakt, że w arytmetyce zwykłej błędy także są obarczone pewnym błędem przybliżenia. Tylko arytmetyka przedziałowa pozwala na wskazanie dokładnego przedziału, w jakim zawiera się wynik.
- Błędy w arytmetyce przedziałowej bardzo szybko rosną wraz ze wzrostem wymiaru macierzy, dla arytmetyki zwykłej odbywa się to dużo wolniej.
- Maksimum dla losowania wpływa na błędy. Widoczne jest to w zwykłej arytmetyce (niestety w arytmetyce przedziałowej nie jest możliwe przeprowadzenie takiej obserwacji ze względu na zbyt dużą wariancję błędów). Wraz ze wzrostem maksimum dla losowania, rośnie błąd rozwiązania. Wynika to z tego, że odległości pomiędzy kolejnymi liczbami w reprezentacji maszynowej na komputerze są większe dla dużych liczb.
- W przypadku losowania macierzy, której elementy na głównej przekątnej są dużo większe od pozostałych (zastosowano wzór  $(A[i][j] \cdot 100 + 100)^2$ , gdzie  $A[i][j]$  jest losową wartością ograniczoną maksimum dla losowania). Dla takiej macierzy możliwe są obliczenia w arytmetyce przedziałowej nawet dla  $n > 500$ , czego przy standardowym losowaniu nie udaje się zrealizować.

## 8. Źródła.

- Fortuna, Macukow, Wąsowski, Metody numeryczne, WNT, Warszawa
- Andrzej Marciniak, Dorota Gregulec i Jan Kaczmarek, Podstawowe procedury numeryczne w języku Turbo Pascal, 1997