Metoda Newtona i metoda Halley'a. Porównanie metod przybliżania pierwiastków wielomianów

Oliwia Wójcicka
Numer indeksu: 333170

Wstęp

W niniejszym sprawozdaniu porównano efektywność dwóch metod numerycznych służących do przybliżania pierwiastków wielomianów:

- **Metody Newtona**
- **Metody Halley'a**

Metody te opierają się na iteracyjnym poszukiwaniu pierwiastków wielomianu za pomocą kolejnych przybliżeń, które z każdym krokiem (przy spełnionych założeniach) zbliżają się do pierwiastka. Implementacja opiera się na uogólnionym schemacie Hornera, który jest wydajnym sposobem obliczania wartości wielomianu (w postaci Newtona) i jego pochodnych w danym punkcie.

Wzory iteracyjne

1. **Metoda Newtona**: Kolejne przybliżenie pierwiastka obliczane jest za pomocą wzoru:
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
gdzie $f(x)$ jest wielomianem, a $f'(x)$ jego pochodną.

2. **Metoda Halley'a**: Rozszerzeniem metody Newtona jest metoda Halley'a, w której uwzględniona zostaje druga pochodna:
$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2\left(f'(x_k)\right)^2 - f(x_k)f''(x_k)}.$$

Postać Newtona wielomianu

Podczas wyznaczania pierwiastków wielomianu, metoda Newtona i metoda Halley'a korzystają z postaci Newtona dla wielomianu:

$$w_n(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}),$$

gdzie:

- $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ to kolejne węzły interpolacji,
- $a_0, a_1, \ldots, a_n$ to współczynniki wielomanu w postaci Newtona.

Opis implementacji programu

Program napisano w środowisku MATLAB. Zaimplementowano następujące funkcje:

- `halley_method(xi, c, x0, max_iter, tol)`: Funkcja oblicza przybliżenie pierwiastka metodą Halley'a. Parametry wejściowe:
  - `xi`: węzły interpolacji
  - `c`: współczynniki wielomianu
  - `x0`: przybliżenie początkowe
  - `max_iter`: maksymalna liczba iteracji
  - `tol`: tolerancja błędu

  Parametry wyjściowe: przybliżony pierwiastek, liczba iteracji, lista kolejnych przybliżeń.

- `newton_method(xi, c, x0, max_iter, tol)`: Funkcja analogiczna do `halley_method`, ale wykorzystująca metodę Newtona.

- `horner_method(a, x, c)`: Funkcja oblicza wartość wielomianu oraz jego pierwszej i drugiej pochodnej w punkcie a. Parametry wejściowe:
  - `x`: węzły interpolacji
  - `c`: współczynniki wielomianu
  - `a`: punkt dla którego liczymy wartość

  Parametry wyjściowe: wartości funkcji i jej pochodnych.

- `halley_vs_newton_plot`: Funkcja rysuje wykres porównujący poszczególne przybliżenie pierwiastka wielomianu za pomocą metody Newtona i Halley'a oraz porównuje je z pierwiastkiem obliczonym za pomocą funkcji wbudowanej fzero.
- `newton_to_string`: Funkcja przyjmuje węzły oraz współczynniki wielomianu danego w postaci Newtona i zwraca string z napisanym tym wielomianem.
- `testowy`: Funkcja służy do testowania metod Newtona i Halley'a na różnych zestawach parametrów, takich jak:
  - współczynniki wielomianu,
  - węzły interpolacji,
  - przybliżenie początkowe,
  - maksymalna liczba iteracji,
  - tolerancja zbieżności.
- `halley_comparison`: Główna funkcja porównawcza. Testuje przykłady, generuje wykresy i prezentuje wyniki w postaci tabeli.

Analiza wyników

Przeanalizowano sześć różnych przykładów, które zostały dobrane tak, aby pokazać różnice między metodami oraz znaczenie wyboru przybliżenia początkowego i innych parametrów.

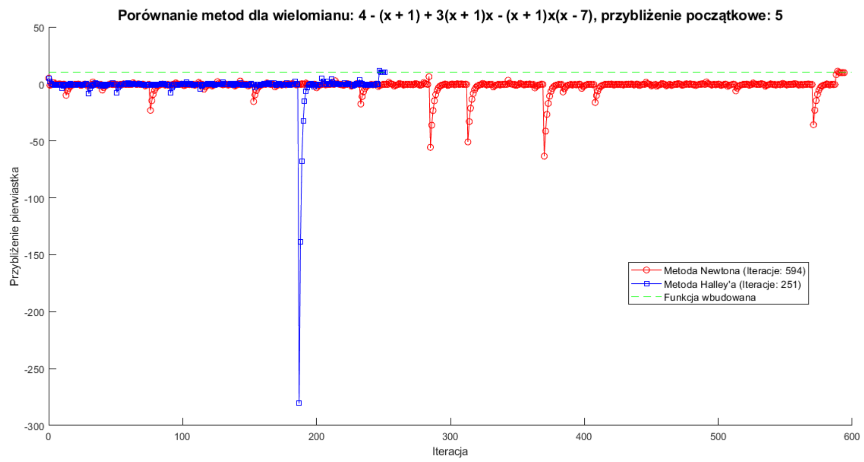
Przykład 1–3:

Funkcja 1:

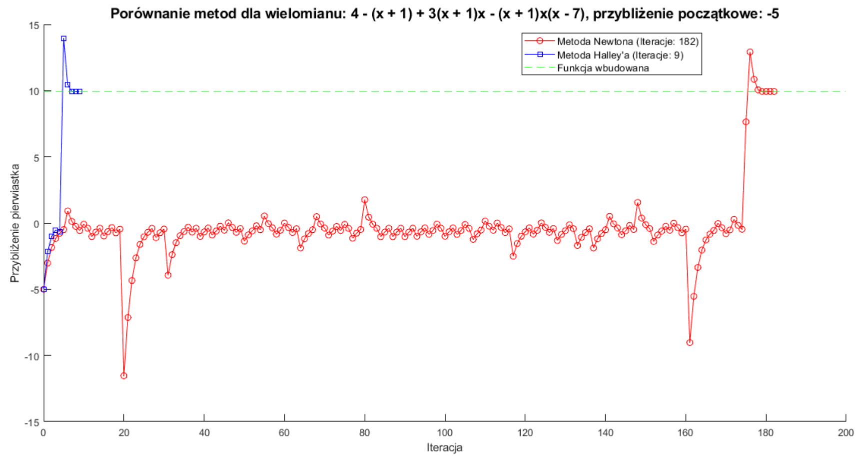
$$f_1(x) = 4 - (x+1) + 3(x+1)x - (x+1)x(x-7)$$

(wykorzystano różne przybliżenia początkowe).

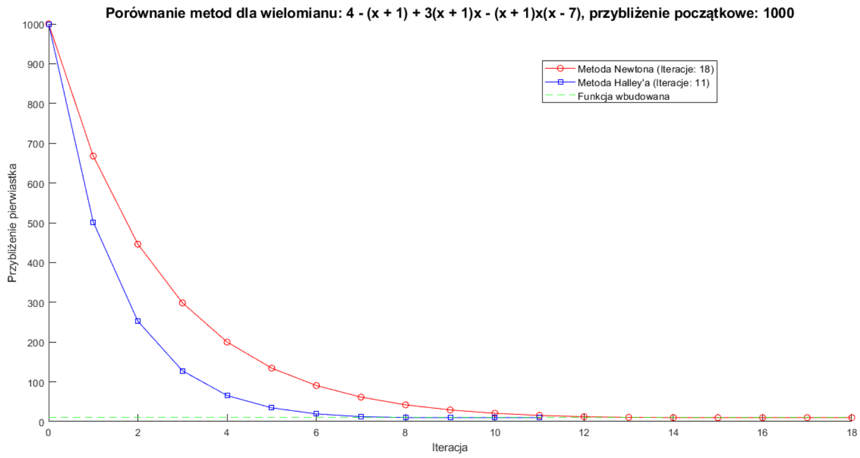
- Przykład 1: $x_0 = 5$
- Przykład 2: $x_0 = -5$
- Przykład 3: $x_0 = 1000$



Rysunek 1: Wykres przedstawiający kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji $f_1(x)$ dla $x_0 = 5$, wyznaczonego metodą Newtona i Halley'a.



Rysunek 2: Wykres przedstawiający kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji $f_1(x)$ dla $x_0 = -5$, wyznaczonego metodą Newtona i Halley'a.



Rysunek 3: Wykres przedstawiający kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji $f_1(x)$ dla $x_0 = 1000$, wyznaczonego metodą Newtona i Halley'a.

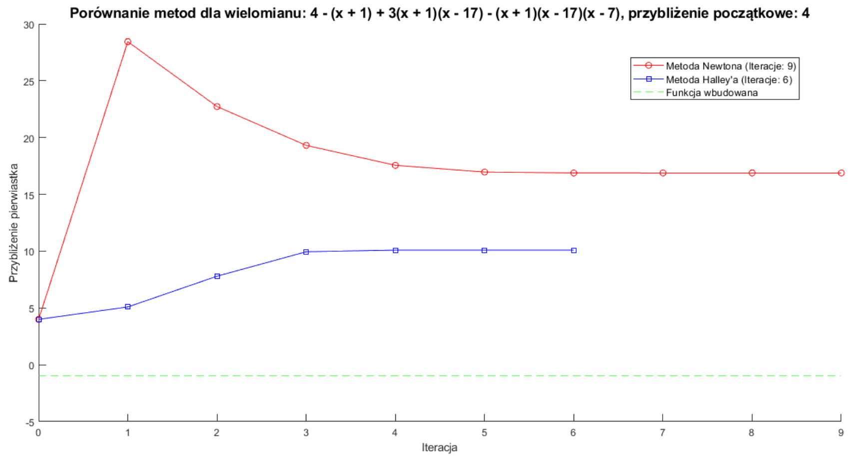
Komentarz: Wyniki pokazują, że wybór przybliżenia początkowego znacząco wpływa na liczbę iteracji wymaganych do osiągnięcia tolerancji. W szczególności, przy $x_0 = 1000$, obie metody zbiegają bardzo szybko. Zaskakujące jest to, że dla przybliżenia początkowego bardzo dalekiego od szukanego pierwiastka, obie metody zbiegają nieporównywalnie szybciej, niż dla przybliżeń początkowych bliskich szukanego pierwiastka. Dodatkowo we wszystkich przypadkach metoda Halley'a zbiega szybciej niż metoda Newtona.

Przykład 4:

Funkcja 2:

$$f_2(x) = 4 - (x+1) + 3(x+1)(x-17) - (x+1)(x-17)(x-7)$$

$(x_0 = 4)$.



Rysunek 4: Wykres przedstawiający kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji $f_2(x)$ dla $x_0 = 4$, wyznaczonego metodą Newtona i Halley'a.

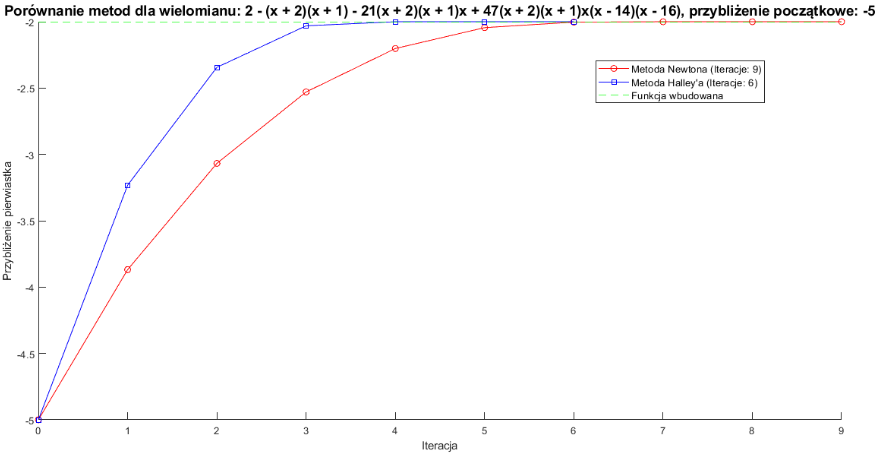
Komentarz: Dla tego przykładu każda z metod znajduje inny pierwiastek wielomianu. Może to wynikać zarówno z różnic w algorytmach metod, jak i ich silnej zależności od wyboru przybliżenia początkowego.

Przykład 5:

Funkcja 3:

$$f_3(x) = 2-(x+2)(x+1)-21(x+2)(x+1)x+47(x+2)(x+1)x(x-14)(x-16)$$

$(x_0 = -5)$.



Rysunek 5: Wykres przedstawiający kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji $f_3(x)$ dla $x_0 = -5$, wyznaczonego metodą Newtona i Halley'a.

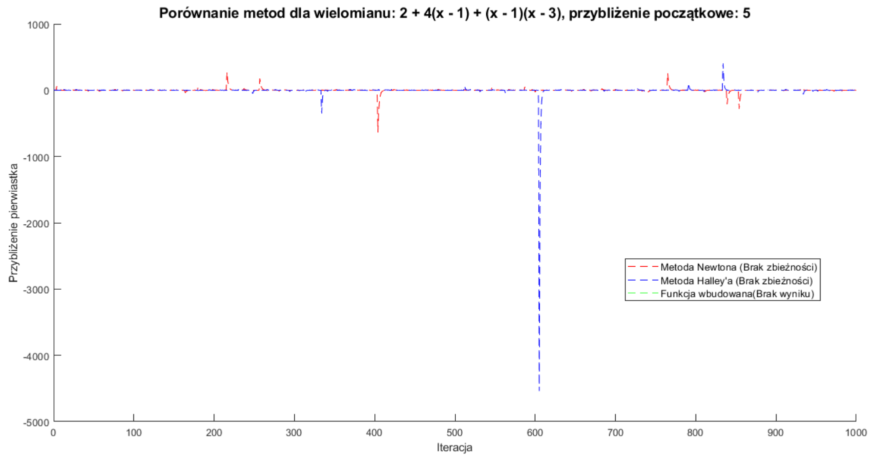
Komentarz: Wyniki pokazują, że wysoki stopień wielomianu niekoniecznie wpływa negatywnie na szybkość zbieżności obu metod.

Przykład 6:

Funkcja 4:

$$f_4(x) = 2 + 4(x - 1) + (x - 1)(x - 3)$$

$(x_0 = 5)$.



Rysunek 6: Wykres przedstawiający kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji $f_4(x)$ dla $x_0 = 5$, wyznaczonego metodą Newtona i Halley'a.

Komentarz: Obie metody wykazują brak zbieżności, co potwierdza, że wielomian nie ma rzeczywistego pierwiastka.

Tabela wyników

Pierwiastki i iteracje

Przykład	Pierwiastek Newtona	Iteracje Newtona	Pierwiastek Halley'a	Iteracje Halley'a	Pierwiastek Wbudowanej
1	9.9361684346	594	9.9361684346	251	9.9361684346
2	9.9361684346	182	9.9361684346	9	9.9361684346
3	9.9361684346	18	9.9361684346	11	9.9361684346
4	16.8872736347	9	10.0925666780	6	-0.9798403126
5	-2.0000739803	9	-2.0000739803	6	-2.0000739803
6	NaN	1000	NaN	1000	NaN

Tabela 1: Tabela z wynikami pierwiastków.

Błędy numeryczne

Przykład	Błąd Newtona	Błąd Halley'a
1	0.0000000000e+00	0.0000000000e+00
2	0.0000000000e+00	0.0000000000e+00
3	0.0000000000e+00	0.0000000000e+00
4	1.7867113947e+01	1.1072406991e+01
5	4.4408920985e-16	4.4408920985e-16
6	NaN	NaN

Tabela 2: Tabela z błędami numerycznymi.

Podsumowanie

Metoda Halley'a okazuje się bardziej efektywna w większości testowanych przykładów, szczególnie gdy wielomian ma duże współczynniki lub gdy wybór przybliżenia początkowego jest mniej korzystny. Niemniej jednak metoda Newtona jest prostsza w implementacji i sprawdza się w większości przypadków.