Rozkład Crouta i jego zastosowanie do rozwiązywania równań macierzowych

Oliwia Wójcicka Numer indeksu: 333170

Wstęp

Celem pracy jest przedstawienie algorytmu rozkładu Crouta macierzy A na macierz trójkątną dolną L i trójkątną górną U, oraz jego zastosowanie do rozwiązywania równań macierzowych $AX = B$ oraz $XA = B$. Rozkład Crouta jest szczególnym przypadkiem dekompozycji LU, w którym macierz U jest macierzą trójkątną górną z jedynkami na przekątnej. Zastosowanie tego rozkładu umożliwia efektywne rozwiązywanie układów równań liniowych poprzez eliminację gaussa.

Rozkład Crouta

Rozkład Crouta dla macierzy kwadratowej A polega na jej dekompozycji w postaci:

$$A = L \cdot U,$$

gdzie:

- L jest macierzą dolną trójkątną, z dowolnymi wartościami na przekątnej i poniżej niej,
- U jest macierzą górną trójkątną, z jedynkami na przekątnej i wartościami powyżej niej.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Opis implementacji programu

Program napisano w środowisku MATLAB. Zaimplementowano następujące funkcje:

- `rozklad_crouta`: Funkcja wykonuje rozkład Crouta macierzy A.
  Parametry wejściowe:
  - `A`: macierz kwadratowa $\in \mathbb{R}^{n \times n}$.

  Parametry wyjściowe:
  - `L`: macierz trójkątna dolna.
  - `U`: macierz trójkątna górna z jedynkami na głównej przekątnej.
- `solve_AX_B`: Funkcja rozwiązuje równanie $AX = B$, gdzie L i U są wynikiem rozkładu Crouta.
  Parametry wejściowe:
  - `B`: macierz $\in \mathbb{R}^{n \times m}$.
  - `L`: macierz trójkątna dolna.
  - `U`: macierz trójkątna górna z jedynkami na głównej przekątnej.

  Parametry wyjściowe:
  - `X`: macierz rozwiązania.
- `solve_XA_B`: Funkcja analogiczna do `solve_AX_B`. Rozwiązuje równanie $XA = B$, gdzie $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- `testowy`: Funkcja wypisuje wyniki rozkładu crouta dla danych macierzy A oraz przedstawia rozwiązania równań macierzowych dla danych macierzy A i B.
- `skrypt_testujacy`: Funkcja tworzy dwie tabele. Pierwszą z rozwiązaniami równań $AX = B$ i $XA = B$. Drugą z błędami numerycznymi powstającymi podczas rozwiązywania tych równań (porównane z metodą wbudowaną).
- `metoda_glowna`: Funkcja generuje wykresy obrazujące różnice między błędami numerycznymi wynikającymi z użycia metody crouta względem metody wbudowanej w `skrypt_testujacy`.

Wyniki testów

Przypadek 1:

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozkład Crouta:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Równanie $AX = B$:
Macierz B:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \\ 5 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1.6667 & 2.3333 \\ 3 & 3.6667 & 4.3333 \\ 1 & 1.6667 & 2.3333 \\ 3 & 3.6667 & 4.3333 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Równanie $XA = B$:
Macierz B:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 7 & 9 \\ 11 & 9 & 11 & 13 & 9 \\ 11 & 13 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3.6667 & 1.6667 & 9 \\ 4.3333 & 2.3333 & 3 & 5 & 9 \\ 3 & 5 & 2.3333 & 4.3333 & 13 \end{bmatrix}$$

Komentarz: Jest to przykład pokazujący działanie metody Crouta. Macierz A jest symetryczna i nieosobliwa (wyznacznik różny od 0), dzięki czemu rozkład Crouta jest stabilny, a rozwiązania istnieją i są dobrze określone.

Przypadek 2 - AX = XA:

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Rozkład Crouta:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -7 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -5.4571 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1.6 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8571 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz B - jednostkowa:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie równania $AX = B$:

$$X = \begin{bmatrix} -0.4529 & -0.2932 & 0.2670 & 0.3691 \\ 0.3455 & 0.1832 & -0.0419 & -0.2932 \\ -0.2565 & 0.1518 & -0.1204 & 0.1571 \\ 0.4660 & -0.0105 & -0.0262 & -0.1832 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie równania $XA = B$:

$$X = \begin{bmatrix} -0.4529 & -0.2932 & 0.2670 & 0.3691 \\ 0.3455 & 0.1832 & -0.0419 & -0.2932 \\ -0.2565 & 0.1518 & -0.1204 & 0.1571 \\ 0.4660 & -0.0105 & -0.0262 & -0.1832 \end{bmatrix}$$

Komentarz: Macierz A jest nieosobliwa, dzięki czemu rozkład Crouta działa poprawnie. Ciekawe jest użycie macierzy jednostkowej B, które umożliwia nam znalezienie odwrotności macierzy A w obydwu równaniach.

Przypadek 3 - $\det(A) = 0$:

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{bmatrix}$$

Rozkład Crouta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \mathrm{NaN} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \mathrm{NaN} & \mathrm{NaN} & 0 \\ 5 & 0 & \mathrm{NaN} & \mathrm{NaN} & \mathrm{NaN} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \mathrm{NaN} & \mathrm{NaN} & \mathrm{NaN} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{NaN} & \mathrm{NaN} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{NaN} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Komentarz: Macierz A jest macierzą osobliwą, co oznacza, że jej wyznacznik wynosi 0. Taka macierz nie ma odwrotności, więc nie można wyznaczyć jej rozkładu Crouta ani użyć metody wbudowanej do rozwiązania równań $AX = B$ lub $XA = B$. W przypadku macierzy osobliwej żadne z tych równań nie posiada jednoznacznego rozwiązania. Wartości NaN w macierzach L i U wskazują na to, że rozkład nie może być poprawnie wykonany.

Przypadek 4:

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozkład Crouta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Równanie $AX = B$:

Macierz B:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 \\ 16 & 18 & 20 \\ 22 & 24 & 26 \\ 28 & 30 & 32 \\ 34 & 36 & 38 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 \\ 16 & 18 & 20 \\ 22 & 24 & 26 \\ 28 & 30 & 32 \\ 34 & 36 & 38 \end{bmatrix}$$

Równanie $XA = B$:
Macierz B:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 16 & 6 & 12 & 18 \\ 8 & 14 & 20 & 10 & 16 & 22 \\ 12 & 18 & 24 & 14 & 20 & 26 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie $XA = B$:

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 16 & 6 & 12 & 18 \\ 8 & 14 & 20 & 10 & 16 & 22 \\ 12 & 18 & 24 & 14 & 20 & 26 \end{bmatrix}$$

Komentarz: W przypadku, gdy macierz A jest macierzą jednostkową, rozkład LU daje macierze L i U, które również są macierzami jednostkowymi. Dzięki temu oba równania prowadzą do rozwiązania, w którym macierz X jest równa macierzy B.

Przypadek 5 - Macierz o dużych wartościach:

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1000000 & 100000 & 10000 & 1000 & 100 & 10 \\ 100000 & 1000000 & 10000 & 1000 & 100 & 10 \\ 10000 & 10000 & 1000000 & 1000 & 100 & 10 \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1000000 & 100 & 10 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 1000000 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 1000000 \end{bmatrix}$$

Rozkład Crouta:

$$L = \begin{bmatrix} 1000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100000 & 990000000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1000000 & 90000 & 999800000 & 0 & 0 & 0 \\ 10000 & 900 & 10000 & 1000000 & 0 & 0 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 1000000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000000 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 1 & 0.0091 & 0.0009 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.001 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Równanie $AX = B$:
Macierz B:

$$B = \begin{bmatrix} 2000000 & 3000000 & 4000000 \\ 3000000 & 4000000 & 5000000 \\ 4000000 & 5000000 & 6000000 \\ 5000000 & 6000000 & 7000000 \\ 6000000 & 7000000 & 8000000 \\ 7000000 & 8000000 & 9000000 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$X = \begin{bmatrix} 1.6761 & 2.5753 & 3.4745 \\ 2.7872 & 3.6864 & 4.5856 \\ 3.9497 & 4.9306 & 5.9115 \\ 4.9909 & 5.9880 & 6.9851 \\ 5.9986 & 6.9982 & 7.9978 \\ 6.9998 & 7.9998 & 8.9997 \end{bmatrix}$$

Równanie $XA = B$:
Macierz B:

$$B = \begin{bmatrix} 2000000 & 3000000 & 4000000 & 3000000 & 4000000 & 5000000 \\ 4000000 & 5000000 & 6000000 & 5000000 & 6000000 & 7000000 \\ 6000000 & 7000000 & 8000000 & 7000000 & 8000000 & 9000000 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$X = \begin{bmatrix} 1.6781 & 2.7892 & 3.9519 & 2.9911 & 3.9988 & 4.9998 \\ 3.4765 & 4.5876 & 5.9137 & 4.9854 & 5.9980 & 6.9998 \\ 5.2748 & 6.3859 & 7.8755 & 6.9796 & 7.9973 & 8.9997 \end{bmatrix}$$

Komentarz: Macierz A zawiera duże liczby. Pomimo tego metoda Crouta działa poprawnie, umożliwiając obliczenie rozkładów L i U. Duże wartości w macierzy A wpływają jednak na dokładność numeryczną wyników, co widać w zaokrągleniach podczas rozwiązywania równań oraz w umieszczonej niżej tabeli z błędami numerycznymi.

Przypadek 6 - Macierz o małych wartościach:

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0010 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0010 & 0.0100 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0010 & 0.0100 & 0.1000 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0010 & 0.0100 & 0.1000 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

Rozkład Crouta:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0007 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0.0067 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.0667 & 0 & 0 & \text{NaN} & 0 \\ 0.1 & 0.6667 & 0 & 0 & \text{NaN} & \text{NaN} \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0003 & 0.0033 & 0.0333 & 0.3333 & 3.3333 \\ 0 & 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0.0008 & 0.0064 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & \text{NaN} & \text{NaN} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & \text{NaN} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

Komentarz: W przypadku macierzy A o bardzo małych wartościach, metoda Crouta nie działa poprawnie i nie pozwala wyznaczyć rozkładu LU, a co za tym idzie rozwiązań równań. Jest to spowodowane problemami numerycznymi związanymi z bliską zeru wartością wyznacznika A (macierz bliska osobliwej). Natomiast metoda wbudowana potrafi znaleźć przybliżone rozwiązania, choć wyniki są bardzo duże i mogą być obarczone błędem.

Równanie $AX = B$:

Macierz B:

$$B = \begin{bmatrix} 1.0 \cdot 10^{-7} & 2.0 \cdot 10^{-7} & 3.0 \cdot 10^{-7} \\ 2.0 \cdot 10^{-7} & 3.0 \cdot 10^{-7} & 4.0 \cdot 10^{-7} \\ 3.0 \cdot 10^{-7} & 4.0 \cdot 10^{-7} & 5.0 \cdot 10^{-7} \\ 4.0 \cdot 10^{-7} & 5.0 \cdot 10^{-7} & 6.0 \cdot 10^{-7} \\ 5.0 \cdot 10^{-7} & 6.0 \cdot 10^{-7} & 7.0 \cdot 10^{-7} \\ 6.0 \cdot 10^{-7} & 7.0 \cdot 10^{-7} & 8.0 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix},$$

Rozwiązanie (wbudowana):

$$X = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.2622 \cdot 10^{15} & -3.0170 \cdot 10^{15} & -3.7718 \cdot 10^{15} \\ -2.4000 \cdot 10^{15} & -3.4877 \cdot 10^{15} & -4.5754 \cdot 10^{15} \\ 0.0556 \cdot 10^{15} & 0.0763 \cdot 10^{15} & 0.0971 \cdot 10^{15} \\ -0.0055 \cdot 10^{15} & -0.0075 \cdot 10^{15} & -0.0095 \cdot 10^{15} \\ 0.0026 \cdot 10^{15} & 0.0038 \cdot 10^{15} & 0.0049 \cdot 10^{15} \end{bmatrix}.$$

Równanie $XA = B$:
Macierz B:

$$B = \begin{bmatrix} 1.0 \cdot 10^{-7} & 2.0 \cdot 10^{-7} & 3.0 \cdot 10^{-7} & 2.0 \cdot 10^{-7} & 3.0 \cdot 10^{-7} & 4.0 \cdot 10^{-7} \\ 3.0 \cdot 10^{-7} & 4.0 \cdot 10^{-7} & 5.0 \cdot 10^{-7} & 4.0 \cdot 10^{-7} & 5.0 \cdot 10^{-7} & 6.0 \cdot 10^{-7} \\ 5.0 \cdot 10^{-7} & 6.0 \cdot 10^{-7} & 7.0 \cdot 10^{-7} & 6.0 \cdot 10^{-7} & 7.0 \cdot 10^{-7} & 8.0 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie (wbudowana):

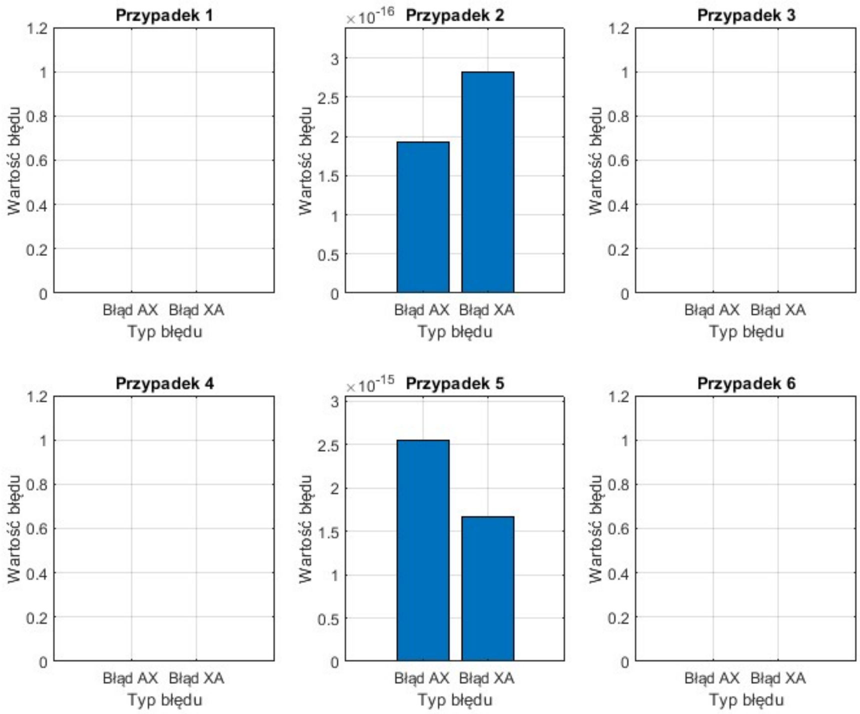
$$X = \begin{bmatrix} 0.0000 & -2.5058 \cdot 10^{15} & -2.2935 \cdot 10^{15} & 0.0632 \cdot 10^{15} & 0.0020 \cdot 10^{15} & 0.0017 \cdot 10^{15} \\ 0.0000 & -4.1734 \cdot 10^{15} & -4.3152 \cdot 10^{15} & 0.1044 \cdot 10^{15} & 0.0032 \cdot 10^{15} & 0.0034 \cdot 10^{15} \\ 0.0000 & -5.8410 \cdot 10^{15} & -6.3369 \cdot 10^{15} & 0.1456 \cdot 10^{15} & 0.0045 \cdot 10^{15} & 0.0050 \cdot 10^{15} \end{bmatrix}.$$

Tabela błędów

Przypadek	**Błąd** $AX = B$	**Błąd** $XA = B$
1	0	0
2	$1.9265 \cdot 10^{-16}$	$2.8256 \cdot 10^{-16}$
3	NaN	NaN
4	0	0
5	$2.5511 \cdot 10^{-15}$	$1.6616 \cdot 10^{-15}$
6	NaN	NaN

Tabela 1: Tabela błędów numerycznych dla metody Crouta.

Wizualizacja graficzna błędów



Rysunek 1: Wizualizacja błędów numerycznych dla metody Crouta.

Podsumowanie

Metoda Crouta jest wartościowym narzędziem do rozwiązywania równań liniowych, szczególnie dla macierzy dobrze uwarunkowanych i nieosobliwych, co potwierdzają wyniki w przypadkach 1, 2, 4 oraz 5. W przypadku 3 (macierz osobliwa, $\det(A) = 0$) metoda Crouta nie jest w stanie obliczyć rozkładu LU, co uniemożliwia rozwiązanie równań. Taka macierz nie posiada jednoznacznego rozwiązania. W przypadku 6 (macierz o bardzo małych wartościach) metoda Crouta również zawodzi, generując wyniki NaN z powodu problemów numerycznych wynikających z bliskości wyznacznika A do zera. W zastosowaniach wymagających wysokiej precyzji lub z macierzami problematycznymi (np. osobliwymi) zaleca się stosowanie bardziej zaawansowanych metod numerycznych. Wyniki przedstawione w pracy podkreślają znaczenie analizy uwarunkowania macierzy przed wyborem odpowiedniej metody rozwiązywania układów równań liniowych.