主成份分析的 线性代数基础

线性代数基础

主成份分析的线性代数基础

王宁宁

广州医科大学

线性代数基础

主成份分析的

线性代数基础

Cauchy-Schwar 不等式

矩阵的谱分解

广义 Cauchy-Schwarz

二次型极大化

单位球面上二次型极 大化

Cauchy-Schwarz 不等式

主成份分析的 线性代数基础

线性代数基础

Cauchy-Schwar 不等式

广义 Cauchy-Schwarz 不等式

→ 次型枚大化単位球面上二次型板→ ル

Cauchy-Schwarz 不等式

设 b 和 d 是两个任意 $p \times 1$ 向量,有:

$$(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{d})^2 \leq (\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b})(\boldsymbol{d}'\boldsymbol{d})$$

则当且仅当对某个常数 c 有 b = cd 时,等号成立。

主成份分析的 线性代数基础

线性代数基础

Cauchy-Schwai 不等式

广义 Cauchy-Schwarz

不等式

単位球面上二次型极

证明

若b和d有一个为零,则结果显然成立。

$$0 \le (\mathbf{b} - x\mathbf{d})'(\mathbf{b} - x\mathbf{d})$$

$$= \mathbf{b}'\mathbf{b} - x\mathbf{d}'\mathbf{b} - \mathbf{b}'(x\mathbf{d}) + x^2\mathbf{d}'\mathbf{d}$$

$$= \mathbf{b}'\mathbf{b} - 2x\mathbf{b}'\mathbf{d} + x^2\mathbf{d}'\mathbf{d} \quad \left(\text{min} \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{d})^2}{\mathbf{d}'\mathbf{d}} \right)$$

$$= \mathbf{b}'\mathbf{b} - \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{d})^2}{\mathbf{d}'\mathbf{d}} + \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{d})^2}{\mathbf{d}'\mathbf{d}} - 2x\mathbf{b}'\mathbf{d} + x^2\mathbf{d}'\mathbf{d}$$

$$= \mathbf{b}'\mathbf{b} - \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{d})^2}{\mathbf{d}'\mathbf{d}} + (\mathbf{d}'\mathbf{d}) \left(x - \frac{\mathbf{b}'\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\mathbf{d}} \right)^2$$

取 $x = \frac{b'd}{d'd}$ 得证。等号显然当对某个常数 c 有 b = cd 时成立

矩阵的谱分解

主成份分析的 线性代数基础

线性代数基础

矩阵的谱分解

/ へ Cauchy-Schwar 不等式

单位球面上二次型极 大化

矩阵的谱分解

设 $B_{p \times p}$ 是任意一个正定矩阵,有:

$$\boldsymbol{B} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1' + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2' + \dots + \lambda_p \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_p'$$

其中 λ_i , e_i , 是 B 的第 i 个特征根及相应的特征向量。

矩阵的谱分解

主成份分析的 线性代数基础

线性代数基础

矩阵的谱分解

矩阵的谱分解

设 $B_{p \times p}$ 是任意一个正定矩阵,有:

$$\boldsymbol{B} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1' + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2' + \dots + \lambda_p \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_p'$$

其中 λ_i , e_i , 是 B 的第 i 个特征根及相应的特征向量。

推论

$$egin{aligned} m{B}^{rac{1}{2}} &= \sqrt{\lambda_1} m{e_1} m{e_1}' + \sqrt{\lambda_2} m{e_2} m{e_2}' + \cdots + \sqrt{\lambda_p} m{e_p} m{e_p}' \ m{B}^{-rac{1}{2}} &= rac{1}{\sqrt{\lambda_1}} m{e_1} m{e_1}' + rac{1}{\sqrt{\lambda_2}} m{e_2} m{e_2}' + \cdots + rac{1}{\sqrt{\lambda_p}} m{e_p} m{e_p}' \end{aligned}$$

广义 Cauchy-Schwarz 不等式

主成份分析的 线性代数基础

线性代数基础 Cauchy-Schwarz ^{不等式}

广义 Cauchy-Schwarz 不等式

单位球面上二次型极

广义 Cauchy-Schwarz 不等式

设 b 和 d 是两个任意 $p \times 1$ 向量, $B_{p \times p}$ 是正定矩阵,有:

$$(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{d})^2 \leq (\boldsymbol{b}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{b})(\boldsymbol{d}'\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d})$$

则当且仅当对某个常数 c 有 $b = cB^{-1}d$ 时,等号成立。

广义 Cauchy-Schwarz 不等式

主成份分析的 线性代数基础

找性代数基础

广义 Cauchy-Schwarz 不等式

广义 Cauchy-Schwarz 不等式

设 b 和 d 是两个任意 $p \times 1$ 向量, $B_{p \times p}$ 是正定矩阵,有:

$$(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{d})^2 \leq (\boldsymbol{b}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{b})(\boldsymbol{d}'\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d})$$

则当且仅当对某个常数 c 有 $b = cB^{-1}d$ 时,等号成立。

证明

只需注意到:

$$b'd = b'Id = b'B^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}}d = (B^{\frac{1}{2}}b)'(B^{-\frac{1}{2}}d)$$

用 $B^{\frac{1}{2}}b, B^{-\frac{1}{2}}d$ 替换 b, d 利用 Cauchy-Schwarz 不等式即得。

二次型极大化

二次型极大化

设 $B_{p\times p}$ 是任意一个正定矩阵, $d_{p\times 1}$ 是任意给定的向量,对 任意 $x_{p\times 1}$ 有:

$$\max \frac{(x'd)^2}{x'Bx} \le b'B^{-1}d$$

则当且仅当对某个常数 c 有 $\mathbf{x} = c\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}$ 时,等号成立。

二次型极大化

主成份分析的 线性代数基础

二次型极大化

设 $B_{p\times p}$ 是任意一个正定矩阵, $d_{p\times 1}$ 是任意给定的向量,对任意 $x_{p\times 1}$ 有:

$$\max \frac{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}'\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}$$

则当且仅当对某个常数 c 有 $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}$ 时,等号成立。

证明

利用广义 Cauchy-Schwarz 不等式有:

$$(\mathbf{x}'\mathbf{d})^2 \le (\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x})(\mathbf{b}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d})$$

利用 x'Bx 除以上式两边即得结论,而且当 $x = cB^{-1}d$ 时,达到上界。

单位球面上二次型极大化

主成份分析的 线性代数基础

单位球面上二次型极大化

设 $B_{p \times p}$ 是任意一个正定矩阵,其特征值为

 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$,相应的特征向量为 e_1, e_2, \cdots, e_p ,对任意单位向量 $x_{p\times 1}$ 有:

$$\max_{m{x}
eq 0} rac{m{x}' m{B} m{x}}{m{x}' m{x}} = \lambda_1$$
 当 $m{x} = m{e}_1$ 时达到 $\min_{m{x}
eq 0} rac{m{x}' m{B} m{x}}{m{x}' m{x}} = \lambda_p$ 当 $m{x} = m{e}_p$ 时达到

特别的:

$$\max_{m{x}\perp e_1,\cdots,e_k}rac{m{x}'m{B}m{x}}{m{x}'m{x}}=\lambda_{k+1}$$
 当 $m{x}=m{e}_{k+1}$ 时达到

半位球曲上二次型极 大化

证明

只证第一式: 设 $B^{\frac{1}{2}} = P \Lambda P', y = P'x$, 其中 P 是正交阵

$$\max_{\boldsymbol{x} \neq 0} \frac{\boldsymbol{x}' \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}' \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}' \boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}' \boldsymbol{P} \boldsymbol{P}' \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}' \boldsymbol{P} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{P}' \boldsymbol{P} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{P}' \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}' \boldsymbol{y}}$$
$$= \frac{\boldsymbol{y}' \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}' \boldsymbol{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i} y_{i}^{2}}{\sum_{i=1}^{p} y_{i}^{2}} \leq \lambda_{1} \frac{\sum_{i=1}^{p} y_{i}^{2}}{\sum_{i=1}^{p} y_{i}^{2}} = \lambda_{1}$$

当 $x = e_1$ 时:

$$\frac{e_1'Be_1}{e_1'e_1} = e_1'Be_1 = \lambda_1$$

不等式

单位球面上二次型极