Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа №2
По курсу «Математическая статистика»
Тема: Интервальные оценки

Студент: Кондрашова О.П.
Группа: ИУ7-65Б
Вариант: 7

Преподаватели: Власов П.А.
Волков И.К.

Москва, 2020г.

1 Постановка задачи

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы:

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   - вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   - вычисление нижней и верхней границ $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   - вычисление нижней и верхней границ $\overline{\sigma^2}(\vec{X}_n)$, $\underline{\sigma^2}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:
   - на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x_n})$, $y = \overline{\mu}(\vec{x_n})$ и $y = \underline{\mu}(\vec{x_n})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   - на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x_n})$, $z = \overline{\sigma^2}(\vec{x_n})$ и $z = \underline{\sigma^2}(\vec{x_n})$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Теоретическая часть

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Другими словами, γ-доверительная интервальная оценка для параметра θ – такой интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))$ со случайными границами, который накрывает теоретическое (то есть "истинное") значение этого параметра с вероятностью γ.

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

2.2 Формулы для вычисления величин

Оценка математического ожидания

$$\hat{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,.$$

Несмещенная оценка дисперсии

$$S^2(\vec{X}_n) = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\,.$$

Выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

2.3 Формулы для вычисления границ γ- доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ- доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания
$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии
n – объем выборки
γ – уровень доверия

$t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы

Формулы для вычисления границ γ- доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии

n – объем выборки

γ – уровень доверия

$h_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы

3 Практическая часть

3.1 Практическая часть

В листинге 1 представлен текст программы.

```
function lab2()
    X =
       [-1.12,-1.06,0.46,-0.39,0.09,-1.44,-1.64,0.86,-0.24,-1.71,-0.84,...
        -1.19,-0.84,-0.55,-1.11,-1.84,-0.60,-0.92,-0.69,0.23,0.51,-2.41,...
        -0.53,-1.41,-0.23,-0.89,-0.13,-1.50,0.02,0.27,-0.75,-0.06,-0.48,...
        0.14,0.20,-2.22,-1.42,-0.54,0.83,-1.77,-0.10,-0.07,-0.94,-0.13,...
        -1.76,-0.77,-1.26,-0.29,-1.11,-0.56,1.19,-0.92,-2.02,-1.94,-0.36,...
        -2.09,-2.51,-1.82,0.39,-2.08,-0.60,-1.38,-1.12,-0.34,0.77,-1.34,...
        0.24,-0.30,-1.67,-1.50,-0.77,-0.10,-0.39,-0.35,-2.23,-0.84,-0.85,...
        -0.44,-0.20,-1.76,-0.91,-1.30,-2.03,-2.50,1.08,0.19,0.03,1.17,...
        -0.05,-2.88,-1.13,-0.05,-1.37,-0.22,0.88,-1.04,-0.52,-1.64,-0.43,...
        -0.09,-2.44,-0.78,-2.48,-1.16,-0.44,-0.34,-0.60,-0.11,-0.41,...
        -0.04,-1.09,-1.81,-0.74,-1.07,-1.07,-0.68,-0.36,-0.65,-1.72,-0.49];

    % Уровень доверия
    gamma = 0.9;

    % Объем выборки
    n = length(X);

    % Точечная оценка матожидания
    mu = mean(X);

    % Точечная оценка дисперсии
    sigma2 = var(X);

    % Нижняя граница доверительного интервала для матожидания
    muLow = getMuLow(n, mu, sigma2, gamma);

    % Верхняя граница доверительного интервала для матожидания
    muHigh = getMuHigh(n, mu, sigma2, gamma);

    % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
    sigma2Low = getSigma2Low(n, sigma2, gamma);

    % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
    sigma2High = getSigma2High(n, sigma2, gamma);

    fprintf('mu = %.3f\n', mu);
    fprintf('S2 = %.3f\n', sigma2);
    fprintf('muLow = %.3f\n', muLow);
    fprintf('muHigh = %.3f\n', muHigh);
    fprintf('sigma2Low = %.3f\n', sigma2Low);
    fprintf('sigma2High = %.3f\n', sigma2High);

```

```
    muArray = zeros(1, n);
    sigma2Array = zeros(1, n);

    muLowArray = zeros(1, n);
    muHighArray = zeros(1, n);
    sigma2LowArray = zeros(1, n);
    sigma2HighArray = zeros(1, n);

    for i = 1 : n
        mu = mean(X(1:i));
        sigma2 = var(X(1:i));
        muArray(i) = mu;
        sigma2Array(i) = sigma2;
        muLowArray(i) = getMuLow(i, mu, sigma2, gamma);
        muHighArray(i) = getMuHigh(i, mu, sigma2, gamma);
        sigma2LowArray(i) = getSigma2Low(i, sigma2, gamma);
        sigma2HighArray(i) = getSigma2High(i, sigma2, gamma);
    end

    figure
    hold on;
    plot([1,n], [mu, mu]);
    plot((1:n), muArray);
    plot((1:n), muLowArray);
    plot((1:n), muHighArray);
    xlabel('n');
    ylabel('y');
    legend('mu(x_N)','mu(x_n)','muLow(x_n)','muHigh(x_n)');
    grid on;
    hold off;

    figure
    hold on;
    plot((1:n), (zeros(1, n) + sigma2));
    plot((1:n), sigma2Array);
    plot((1:n), sigma2LowArray);
    plot((1:n), sigma2HighArray);
    xlabel('n');
    ylabel('z');
    legend('sigma(x_N)','sigma(x_n)','sigmaLow(x_n)','sigmaHigh(x_n)');
    grid on;
    hold off;

    function muLow = getMuLow(n, mu, s2, gamma)
        muLow = mu - sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
    end

    function muHigh = getMuHigh(n, mu, s2, gamma)
        muHigh = mu + sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
    end
```

```

    function sigma2Low = getSigma2Low(n, s2, gamma)
        sigma2Low = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
    end

    function sigma2High = getSigma2High(n, s2, gamma)
        sigma2High = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
    end

end
```

3.2 Результаты расчетов

mu = -0.771
S2 = 0.753
muLow = -0.902
muHigh = -0.640
sigma2Low = 0.616
sigma2High = 0.945

3.3 Графики

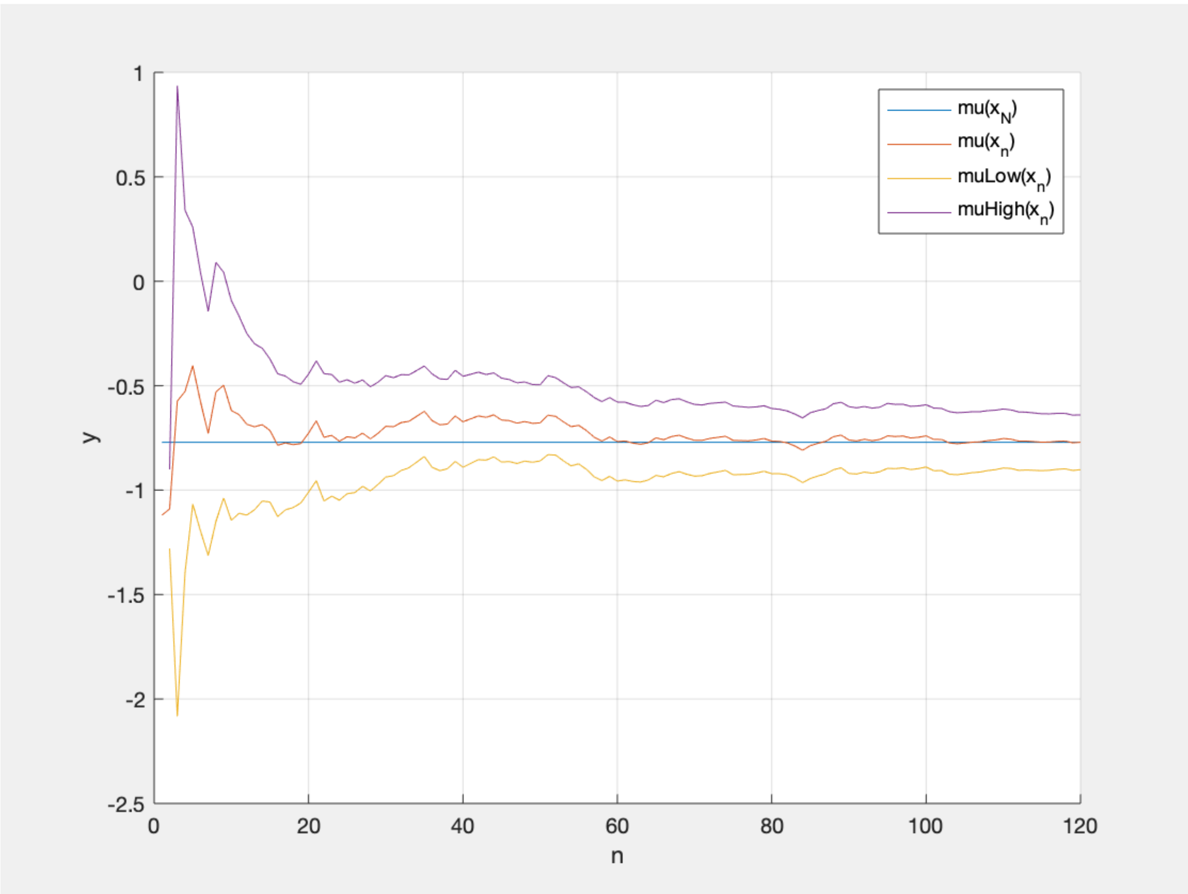

Рис. 1: Оценка для математического ожидания

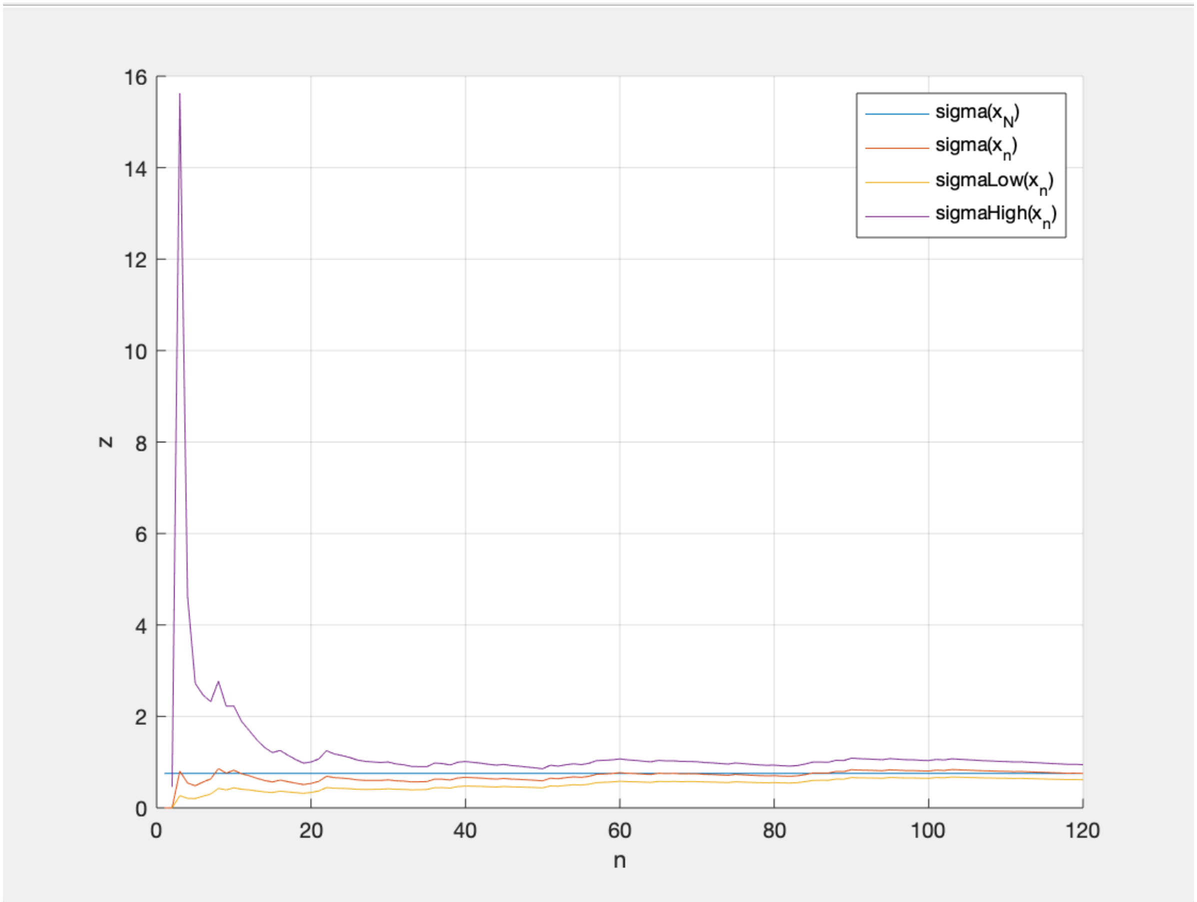

Рис. 2: Оценка для дисперсии