Задача 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переносим обратно — поворот на угол ϕ — переносим в начало координат

Задача 2.

угол ϕ, прямая с направляющим вектором (l, m, n) через точку $A(a, b, c)$

1. Перенесем в начало координат

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Сделаем так, чтобы ось вращения совпадала с осью z, для этого сделаем два поворота - вокруг оси x и вокруг оси y

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, где α - угол поворота

Чтобы найти α, посмотрим на угол между проекцией (l, m, n) на xz и осью z

Проекция = $lx + nz$, где $x,\ z\ -$ направляющие векторы соответствующих осей

Соответственно, $\alpha\ =\ arccos\dfrac{\langle lx + nz,\ z\rangle}{l^2\ +\ n^2}$

Аналогично можно найти β, на который надо повернуть вокруг оси y

$$M_3 = \begin{pmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Повернем вокруг оси z на нужный угол

$$M_4 = \begin{pmatrix} cos\phi & -sin(\phi) & 0 & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Вернуть все обратно

Итоговое преобразование: $M_1^{-1}M_2^{-1}M_3^{-1}M_4M_3M_2M_1$

Задача 3.

первый поворот - вокруг x на $\frac{\pi}{2}$

второй - вокруг y на $\frac{\pi}{2}$

$v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (0, 1, 0),$ т. е. $\langle v_1,\ v_2\rangle = 0,\ [v_2, v_1] = (0, 0, -1) =: v_3$

$$q_1 = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + v_1 sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$q_2 = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + v_2 sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$q_2 q_1 = \left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + v_2 sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + v_1 sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + v_1 sin\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ v_2 sin\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + v_2 v_1 sin\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \langle v_2, v_1\rangle sin\left(\frac{\pi}{4}\right)sin\left(\frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ v_1 sin\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + v_2 sin\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + [v_2,\ v_1] sin\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =: cos(\alpha/2) + v sin(\alpha/2)$$

левая часть последнего равенства $= \frac{1}{2} + v_1\frac{1}{2} + v_2\frac{1}{2} + v_3\frac{1}{2}$

$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \Longrightarrow sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$