Simplex: (löst exempel)

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/2	5/2	0	22
x_1	0	1	0	1/2	1/2	0	6
x_2	0	0	1	-1/2	1/2	0	2
x_5	0	0	0	1/2	-1/2	1	3

- Optimala mål.funk-värde: $z = 22$
- Variablernas opt.värden: $x = (6,2)$
- Dualvariablernas opt-vär.: $y = (1/2, 5/2, 0)$
- Unik lösn.? om icke-basvar. $\neq 0$.
- Aktiva bivillkor? Om slack-var $= 0$.
- Duallösning: slackvar värde i målfunc.
- Öka bivillkor? Det skuggpris (duallösn.) med störst värde är mest lönsamt.
- Ny variabel: Räkna red. kost.

$\hat{c}_{ny} = c_{ny} - a_{ny}^T y^*$ där $\begin{cases} c_{ny} = \text{målfunc.koeff ny var} \\ a_{ny} = \text{koef.vec. ny var. (bivillkor)} \\ y^* - \text{duallösn.} \end{cases}$

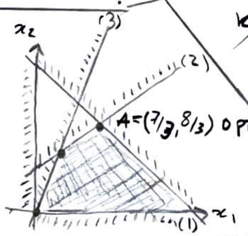
>0 = Ja
<0 = Nej
$=0$ = samma

- Pivotelement (utg.) alltid minsta kvoten

Land-doig-Dakins

$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$

då
$x_1 + x_2 \leq 5$ (1)
$-x_1 + 2x_2 \leq 5$ (2)
$2x_1 - x_2 \geq 0$ (3)
$x_1, x_2 \geq 0$, heltal



P1 $z^*(7/3, 8/3) = 12{,}6667$; $\bar{z} = \lfloor 12{,}6667 \rfloor = 12$
$x^* = (2{,}333, 2{,}6667)$; $P_2: x_1 \leq \lfloor 2{,}333 \rfloor = 2$
$P_3: x_1 \geq \lceil 2{,}333 \rceil = 3$

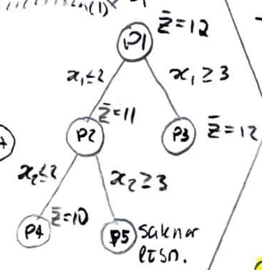
P2 Bivillkor: $x_1 \leq 2 \overset{x_1=2}{\Longrightarrow}$ (1) $x_2 \leq 3$
(2) $x_2 \leq 2{,}5$ ← Strängast begräns.
(3) $x_2 \leq 4$

$z^*(2; 2{,}5) = 11{,}5$ $\bar{z} = 11$
$P_4: x_2 \leq 2$ $P_5: x_2 \geq 3$

P4 $x_2 \leq 2 \overset{x_2=2}{\Longrightarrow}$ (1) $x_1 \leq 3$ ← Tidigare begr. $x_1 \leq 2$
(2) $x_1 \geq 1$
(3) $x_1 \geq 1$
$z^* = 10$; $\bar{z} = 10$
Heltal, bryter gren

P5 $x_1 \leq 2$ & $x_2 \geq 3$ funkar ej i (2)

P3 $x_1 \geq 3 \overset{x_1=3}{\Longrightarrow}$ (1) $x_2 \leq 2$ ← Begränsande
(2) $x_2 \leq 5$
(3) $x_2 \leq 6$
$z^* = 12$, $\bar{z} = 12$
heltal. Bryter.



Svar: $\bar{z} = \underline{z} = 12$; $z^* = 12$ med $x_1^* = 3$; $x_2^* = 2$

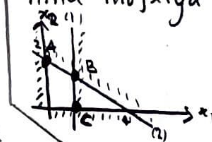
- Om övre gräns sammanfaller med undre behöver vi inte lösa resten
- Om $z^* = 12{,}5$: $\bar{z} = \lceil 12{,}5 \rceil = 13$ (min prob)
- Dubbelchecka alltid bivillkor genom iterationerna.

KKT-villkoren (optimalitet)

$f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 12x_1 - 8x_2$

Konvexitet: $H = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(H - \lambda I) = \begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$
$\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$ > 0 strikt konvex.

Hitta möjliga punkter.



Bivillkor:
$x_1 \leq 1$ (1)
$x_1 + 2x_2 \leq 4$ (2)
$x_1 \geq 0$ (3)
$x_2 \leq 0$ (4)

A (0,2)
B (1, 3/2)
C (1, 0)

Gradient (lutning)
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_1 - 12 \\ 4x_2 - 8 \end{pmatrix}$

Bivillkor på $\leq$-form:
$\begin{cases} g_1(x) = x_1 - 1 \leq 0 \\ g_2(x) = x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0 \\ g_3(x) = -x_1 \leq 0 \\ g_4(x) = -x_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla g_1(x) = g(x)'_{x_1} = \binom{1}{0} \\ \nabla g_2(x) = \binom{1}{2} \\ \nabla g_3(x) = \binom{-1}{0} \\ \nabla g_4(x) = \binom{0}{-1} \end{cases}$

Punkt A (0,2)
KKT1: Tillåten (kollar $g_i(x)$)
KKT2: Bivillkor 2/3 aktiva $= 0$ (u_1 & $u_4 = 0$)
KKT3: $\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \nabla f(0,2) + u_2 \nabla g_2(\hat{x}) + u_3 \nabla g_3(\hat{x}) = 0$
$\binom{-12}{0} + u_2 \binom{1}{2} + u_3 \binom{-1}{0} = 0 \Leftrightarrow$
$u_2 = 0$
$u_3 = -12$ | KKT4: $u_3 < 0 \Rightarrow$ ej KKT-punkt.

Punkt B (1, 3/2) (strunta visa 1 & 2)
KKT3: $\nabla f(1, 3/2) + u_1 \nabla g_1(x) + u_2 \nabla g_2(x) = 0$
$\Rightarrow \binom{-4}{-2} + u_1 \binom{1}{0} + u_2 \binom{1}{2} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u_1 = 2$, $u_2 = 2$ | KKT4: $u_1, u_2 > 0$
$\Rightarrow$ KKT-punkt.

Punkt C (1,0)
KKT3: $\nabla f(1,0) + u_1 \nabla g_1(x) + u_4 \nabla g_4(x) = 0$
$\Rightarrow \binom{-4}{-8} + u_1 \binom{1}{0} + u_4 \binom{0}{-1} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u_1 = 4$, $u_4 = -8$ | KKT4: $u_4 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ej KKT-punkt

Svar: punkten är ett globalt (ty, konvext problem) optimum (1, 3/2).

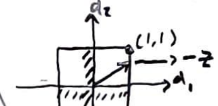
Zoutendijks metod ($x^{(1)} = (0,0)$). (samma exempel)

Punkter (1,0), (0,2), (1, 3/2)

$x^{(1)} = (0,0) \Rightarrow$ aktiva bivillkor: (3), (4).
$\nabla f(x^{(1)}) = \binom{-12}{-8}$ lutning i $x^{(1)}$

Hitta förbättringsriktningar

$\min\ z = -12d_1 - 8d_2$ → Brantast neds stig.
$d_1 \geq 0$ söker så stora
$d_2 \geq 0$ d som möjligt
$-1 \leq d_1 \leq 1$ $\Rightarrow \min \Rightarrow$
$-1 \leq d_2 \leq 1$ väljer då $d_1 = 1$, $d_2 = 1$

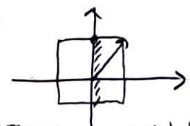


$z^* = -12 - 8 = -20$ (ej opt). $x^{(2)} = x^{(1)} + td \Rightarrow$
$x^{(2)} = (0,0) + t(1,1) = (t,t)$. Prova nu i ej aktiva bivillkor.
(1): $x_1 \leq 1 \Rightarrow t \leq 1$; (2): $x_1 + 2x_2 \leq 4 \Rightarrow t \leq 4/3 \Rightarrow t \leq 1$

Linjesökning: $f(x^{(1)}) = 4t^2 + 2t^2 - 12t - 8t = 6t^2 - 20t$; $f'(x^{(1)}) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 12t - 20 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{3} > 1$ (t är steglängden, linjesökning hittar det största tillåtna värdet på t som fortfarande minskar $f(x)$ och håller sig inom bivillkoren) $\Rightarrow$ avgränsas av (1): $t \leq 1$. Sätt $t = 1$.

$x^{(2)} = \binom{1}{1}$; $\nabla f(x^{(2)}) = \binom{-4}{-4}$ Bivillkor $x_1 \leq 1$ aktivt.

$\min\ z = -4d_1 - 4d_2$
$d_1 \leq 0$
$-1 \leq d_1 \leq 1$
$-1 \leq d_2 \leq 1$



$d_1^* = 0$
$d_2^* = 1$
$z^* = -4 < 0$ ej opt.

$x^{(3)} = \binom{1}{1} + t\binom{0}{1} \Rightarrow$ (2) $x_1 + 2x_2 \leq 4$ (3) $x_1 \geq 0$ (4) $x_2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $t \leq \frac{1}{2}$, $1 \geq 0$, $t \geq -1$ $\Rightarrow t \leq \frac{1}{2}$
$x^{(3)} = (1, 1+t)$

för stort $t \leq \frac{1}{2}$

Linjesökning: $f(x^{(3)}) = 2t^2 - 4t - 14$; $f'(x^{(3)}) = 0 \Leftrightarrow 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$
Sätter $t = 1/2 \Rightarrow x^{(3)} = \binom{1}{3/2}$; $\nabla f(x^{(3)}) = \binom{-4}{-2}$ villkor (1)(2) aktiva.

$\min\ z = -4d_1 - 2d_2$
$d_1 \leq 0$
$d_1 + 2d_2 \leq 0$
$-1 \leq d_1 \leq 1$
$-1 \leq d_2 \leq 1$

$d_1^* = 0$; $d_2^* = 0$, $z = 0 \Rightarrow$ optimum.
$x^{(3)} = \binom{1}{3/2}$ är optimum och även globalt då problemet är konvext.

Dualitet:

$\min\ z = 14x_1 + 20x_2 + 18x_3$
då
$5x_1 + 3x_3 \geq 20$
$2x_2 + 5x_3 \geq 7$
$10x_2 + 3x_3 \geq 8$
$5x_2 + 3x_3 \geq 9$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

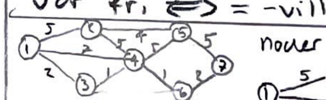
$\Rightarrow$

$\max\ z = 20y_1 + 7y_2 + 8y_3 + 9y_4$
$5y_1 \leq 14$
$2y_2 + 10y_3 + 5y_4 \leq 20$
$3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 3y_4 \leq 18$
$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

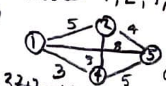
Max-problem		Min-problem
$\leq$ - villkor	$\Leftrightarrow$	var. ≥ 0
$\geq$ - villkor	$\Leftrightarrow$	var. ≤ 0
$=$ - villkor	$\Leftrightarrow$	var. fri
var. ≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$ - villkor
var. ≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$ - villkor
var fri	$\Leftrightarrow$	$=$ - villkor

Chinease Postman Prob.

- Identifiera noder med udda valenser.
- Lägg till bågar så alla noder får jämn valens. (några bågar används dubbelt) Gör på billigast sätt.
- Hitta en cykel som passerar alla bågar i nya.



Noder 1, 2, 4, 5 - udda.



1-5 motsvarar: 1-3-4-5.
1-4 & 2-5 Billigast matching: 7.
använd 1-3, 3-4, 2-5 dubbelt.

Total kostnad: 37+7 = 44.

Brevbärartur (tex): 1-2-5-7-6-4-3-1-4-2-5-4-3-1.