Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	0 januari 2024
Tid:	00.00-00.00
Hjälpmedel:	Dubbelsidigt A4-blad, handskrivna anteckningar som ej är digitalt framställda eller kopierade. Miniräknare. Kurslitteratur är **ej tillåten.**
Antal uppgifter:	7 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
Antal sidor:	7
Betyg:	Totalt antal poäng är 40. För betyg 3 krävs minst 16 poäng. För betyg 4 krävs minst 24 poäng. För betyg 5 krävs minst 32 poäng.
Examinator:	Björn Morén

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Universitetslärare har roliga och varierande arbetsuppgifter, bland annat föreläsningar, forskningsarbete och handledning av doktorander. Det är mycket som ska hinnas med och en lärare bestämmer sig därför för använda optimering vid planeringen. Läraren har sammanställt en lista med aktiviteter och angivit dels en poäng som speglar hur viktigt det är att aktiviteten genomförs, dels en skattning av tidsåtgången.

Aktivitet nr	Aktivitet	Poäng	Tidsåtgång
1	Konstruktion av en tentauppgift	6	4 timmar
2	Skriva ett avsnitt i en artikel	10	16 timmar
3	Skriva ett avsnitt på en forskningsansökan	15	20 timmar
4	Utförande av en administrativ uppgift	2	1 timme

Läraren har 3 avsnitt kvar att skriva på en artikel och 2 avsnitt kvar på sin forskningsansökan. Läraren har 7 tentauppgifter att göra och 8 administrativa uppgifter. Planeringen gäller den kommande veckan där läraren maximalt vill arbeta 40 timmar, vilket inte kommer att räcka till för att genomföra alla arbetsuppgifterna. För att inte bli splittrad i sitt arbete vill läraren planera in ett helt antal gånger av varje aktivitet under den kommande veckan (exempelvis: läraren vill inte lägga 2 timmar på att påbörja en tentauppgift utan antingen göra hela tentauppgiften, eller spara den till veckan därpå).

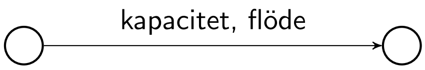
a) Formulera en linjär heltalsmodell som beskriver problemet att maximera den totala poängen under den kommande veckan givet att bivillkoren ovan är uppfyllda. **(3p)**

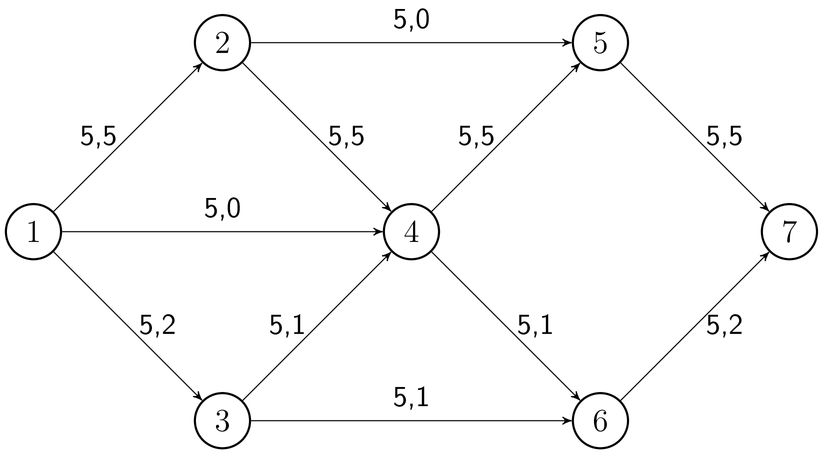
b) Utvidga din modell i uppgift **a)** till att inkludera följande möjlighet: Om läraren gör 4 eller fler av de administrativa uppgifterna samma vecka så gör den en tidsbesparing på 1 timme tack vare de synergieffekter som uppstår. Den resulterande modellen ska fortfarande vara en linjär heltalsmodell. **(2p)**

c) Universitetsläraren funderar på om det verkligen är nödvändigt att alla aktiviteter görs ett helt antal gånger per vecka. Skulle det optimala målfunktionsvärdet troligtvis bli bättre eller sämre om heltalskravet för aktiviteter slopades? **(1p)**

Uppgift 2

Grafen nedan visar ett nätverk med noder och bågar, där bågarna är märkta med kapaciteter och flöde.





a) Använd en standardmetod för att hitta ett maximalt flöde från nod 1 till nod 7 i grafen ovan. Börja med nuvarande flöde i grafen. **(4p)**

b) Ange ett minsnitt i form av vilka bågar som ingår och minsnittets totala kapacitet. **(1p)**

Uppgift 3

Betrakta följande linjära optimeringsproblem.

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\max & z = & 3x_1 & + & 2x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 & (1) \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 & (2) \\
 & & & & x_2 & \leq & 5 & (3) \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Rita ut det tillåtna området, markera alla tillåtna baslösningar samt ange koordinaterna för de tillåtna baslösningarna. **(2p)**

b) Lös problemet med Simplexmetoden. Ange variablernas optimalvärden, det optimala målfunktionsvärdet och dualvariablernas optimalvärden. **(3p)**

c) Om något högerled tillåts öka, för vilket högerled skulle det ge störst ökning i målfunktionsvärde? Motivera. **(1p)**

d) Antag att vi får möjligheten att lägga till en variabel med målfunktionskoefficient 4 och bivillkorskoefficienter (2, 2, 2). Är det lönsamt att använda den ny variabeln? Om ja, räkna ut den nya optimallösningen. Om nej, vad behöver målfunktionskoefficienten vara för att den ska vara lönsam? **(2p)**

Uppgift 4

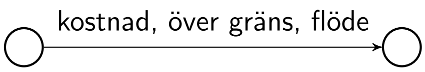
Betrakta följande linjära heltalsproblem.

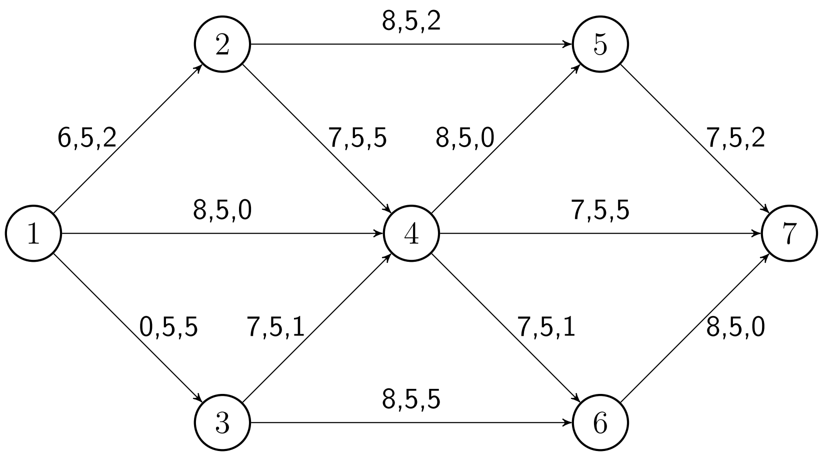
$$
\begin{array}{llrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & (1) \\
 & & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 & (2) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & \geq & 0 & (3) \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0, \text{ heltal} &
\end{array}
$$

Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. Förgrena över den variabel som har lägst index och avsök $\leq$-grenen först. Om det finns flera noder att välja på, använd strategin djupaste först (längst ner i trädet). LP-problem får lösas grafiskt. **(4p)**

Uppgift 5

En firma levererar vackert papper att slå in presenter med. I december upplever man en oförklarlig ökning av efterfrågan. Därför passar man på att fylla lagren innan dess. I nedanstående nätverk motsvarar noderna 1, 2 och 3 produktionsplatser och noderna 6 och 7 kunder. Kunden i nod 6 har behov av 6 containrar presentpapper och kunden i nod 7 har behov av 7 containrar. I nod 1 kan man producera upp till 9 containrar, i nod 2 upp till 5 och i nod 3 upp till 6. Bågarna är märkta med kostnad per container och kapacitet, samt ett föreslaget flöde (baserat på förra årets plan.)





a) Total produktionskapacitet är större än total efterfrågan. Modifiera nätverket genom att addera en nod och några bågar så att överskottet hanteras på optimalt (inte förutbestämt) sätt. Ange kostnad, kapacitet och flöde på de tillagda bågarna. **(2p)**

b) Betrakta problemet ovan, **med** modifieringen i uppgift **a)**. Kontrollera om lösningen som anges i nätverket är optimal. Om inte, finn en optimal lösning med simplexmetoden för nätverk. Starta med angivet flöde. Ange optimal totalkostnad. **(4p)**

Uppgift 6

Firman Liubygg AB ska gjuta grunden till ett nytt hus, och funderar på hur mycket tillsatser man ska använda, dels tensider för att göra betongen frostbeständig och dels plastfibrer för att undvika explosion vid brand. Låt x_1 stå för mängden tensider och x_2 mängden plastfibrer. Man har efter mycket forskning kommit fram till att andelen hålrum i betongen (vilket ger sämre kvalitet) ges av följande funktion: $f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 12x_1 - 8x_2$. Man vill därför finna en blandning som minimerar denna funktion. Som bivillkor har man $x_1 \leq 1$ samt $x_1 + 2x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

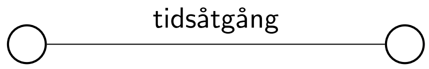
a) Avgör om problemet är konvext eller inte. **(1p)**

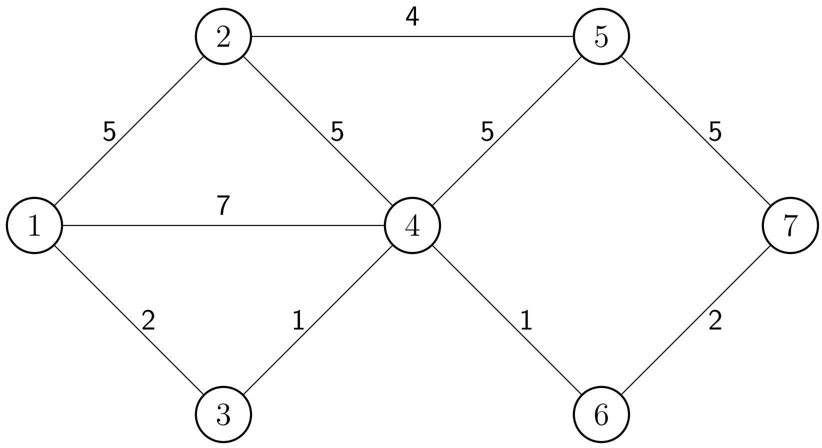
b) Använd KKT-villkoren för att kontrollera varje extrempunkt i det tillåtna området (förutom origo) avseende optimalitet. **(3p)**

c) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i $x^{(1)} = (0, 0)$. **(4p)**

Uppgift 7

Efter ett massivt snöfall så är det bråttom att ploga stadens vägar. Det är viktigt att alla vägar är plogade så snabbt som möjligt. Fordonet ska börja och sluta i nod 1.





Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden. Ange rundtur och totalt avstånd. Vilka vägar kommer att passeras mer än en gång? **(3p)**