Complementi di Analisi e Probabilità

Soluzioni proposte agli Esercizi - Foglio 2

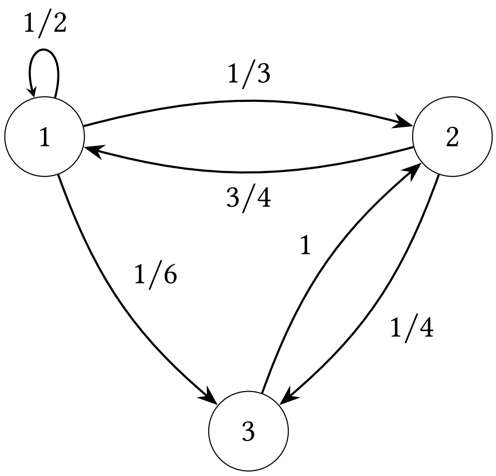
Matteo Brunello
matteo.brunello@edu.unito.it

Stefano De Rosa
stefano.derosa@edu.unito.it

30 novembre 2022

Esercizio 1.a

Per capire se si tratta di una catena irreducibile o meno dobbiamo vedere se la catena ha una sola classe di stati.



Dalla rappresentazione grafica della catena data in Fig. 1 è possibile notare immediatamente che $1 \leftrightarrow 2$ e $2 \leftrightarrow 3$. Inoltre, per la proprieta' transitiva sappiamo che $1 \leftrightarrow 3$. Ne segue che esiste una sola classe di stati $\{1, 2, 3\}$, per cui possiamo concludere che la catena è irreducibile.

Esercizio 1.b

Sapendo che $P^{(n)}_{i,i} = P^{n}_{i,i}$, è sufficiente calcolare P^2 per ottenere il risultato

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

per cui $P^{(2)}_{1,3} = \frac{1}{6}$.

Esercizio 1.c

Sapendo che la catena è irreducibile, per il teorema della distribuzione limite π esiste ed è la soluzione del sistema lineare

$$\pi = \pi P$$

con $\sum_i \pi_i = 1$. Risolvendo quindi il sistema seguente

$$\begin{cases} \pi_1 = & \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_2 \\ \pi_2 = & \frac{1}{3}\pi_1 + \pi_3 \\ \pi_3 = & \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 \\ 1 = & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases} = \begin{cases} \pi_1 = & \frac{3}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = & 2\pi_3 \\ \pi_3 = & \frac{1}{2}\pi_2 \\ 1 = & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases} = \begin{cases} \pi_1 = & \frac{3}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = & 2\pi_3 \\ \pi_3 = & \frac{1}{2}\pi_2 \\ 1 = & \frac{3}{2}\pi_2 + \pi_2 + \frac{1}{2}\pi_2 \end{cases} = \begin{cases} \pi_1 = & \frac{1}{2} \\ \pi_2 = & \frac{1}{3} \\ \pi_3 = & \frac{1}{6} \\ \pi_2 = & \frac{1}{3} \end{cases}$$

possiamo concludere che la distribuzione limite è data dal vettore $\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

Esercizio 2.a

Per determinare la distribuzione degli intertempi è necessario determinare in primo luogo la funzione di distribuzione $P(M(t) = k)$.

$$\begin{aligned} P(M(t) = k) &= P(N_1(t) + N_2(t) = k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P(N_1(t) = k - i \mid N_2(t) = i) P(N_2(t) = i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} e^{-\mu_1 t} \frac{(\mu_1 t)^{k-i}}{(k-i)!} \cdot e^{-\mu_2 t} \frac{(\mu_2 t)^i}{i!} \\ &= e^{-t(\mu_1+\mu_2)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \cdot (\mu_1 t)^{k-i} (\mu_2 t)^i \\ &= e^{-t(\mu_1+\mu_2)} \frac{t^k (\mu_1 + \mu_2)^k}{k!} \end{aligned}$$

Sapendo quindi che il processo di Poisson $M(t) \sim Poisson(\mu_1 + \mu_2)$, possiamo concludere che gli interarrivi $\{T_i\}$ saranno distribuiti come $T_i \sim Exp(\mu_1 + \mu_2)$.

Esercizio 2.b

Si vuole trovare $P(N_1 = n \mid N_1(t) + N_2(t) = 1)$, con $n \in \{0, 1\}$, per cui

$$\begin{aligned} P(N_1(t) = n \mid N_1(t) + N_2(t) = 1) &= P(N_1(t) = n \mid N_1(t) + N_2(t) = 1) \\ &= \frac{P(N_1(t) = n, N_2(t) = 1 - n)}{P(N_1(t) + N_2(t) = 1)} \\ &= \frac{P(N_1(t) = n) P(N_2(t) = 1 - n)}{P(N_1(t) + N_2(t) = 1)} && (indipendenza) \\ &= \frac{P(N_1(t) = n) P(N_2(t) = 1 - n)}{P(N_1(t) + N_2(t) = 1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\mu_1 t}(\mu_1 t)^n}{n!} \cdot \frac{e^{-\mu_2 t}(\mu_2 t)^{(1-n)}}{(1-n)!} \cdot \frac{1}{e^{-(\mu_1+\mu_2)t}([\mu_1+\mu_2]t)^n}$$

$$= \frac{1}{n!(1-n)!}\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^n\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^{1-n}$$

$$= \left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^n\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^{1-n} \qquad \square$$

Dal risultato si può affermare che la distribuzione $P(N_1(t) \mid M(t) = 1) \sim Bernoulli\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)$.

Esercizio 2.c

Avendo già a disposizione la simulazione della traiettoria di N_1, un possibile metodo simulativo per ottenere la traiettoria di M potrebbe essere il seguente:

- Simuliamo in primo luogo il processo N_2. Otteniamo il numero totale di eventi $N_2(t) = n_2$ campionando da una distribuzione $P \sim Pois(t\mu_2)$, per poi campionare i singoli tempi di arrivo S_i^2 da una distribuzione $U \sim Uniform(0, t)$. Infine, si riordinano i tempi di arrivo in ordine non decrescente. [1]
- Siano S^1, S^2 l'insieme dei tempi di arrivo rispettivamente dei processi N_1 e N_2, allora l'insieme $S^m = \{S^1, S^2\}$ contiene tutti i tempi di arrivo degli eventi che si verificano nel processo $M(t)$. Riordinando infine l'insieme S^m in ordine non decrescente possiamo definire la traiettoria per $M(t)$.

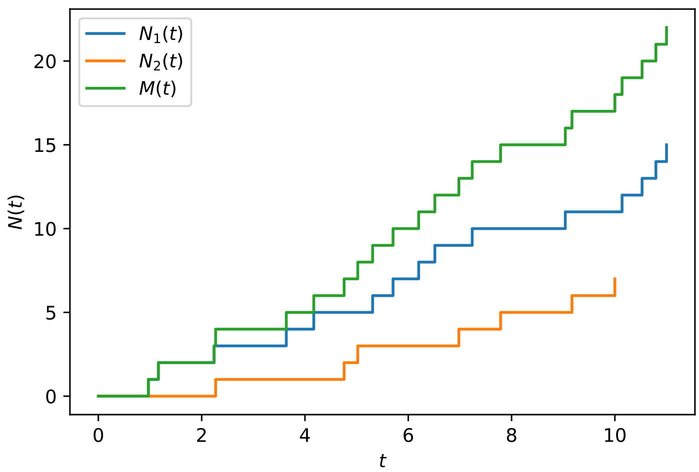


Figura 1: Traiettoria di $M(t)$ prodotta dal listato 1.1 con parametri $\mu_1, \mu_2 = 1$

Esercizio 3.a

Secondo il testo dell'esercizio, $X_i \equiv$ *"Tempo di vita dello schermo i-esimo"*, in cui $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ con $i = 1, \ldots, 6$. Sia $X_{(i)} \equiv$ *"Tempo dopo che se ne rompono i"*, per rispondere al primo quesito

[1] Se si volesse ottenere solamente la traiettoria di $M(t)$, l'ordinamento può essere rimandato al punto successivo per questioni di efficienza. Per ulteriori dettagli implementativi si veda il listato X

si vorrebbe trovare la distribuzione del tempo di rottura del primo schermo, cioè $P(X_{(1)} > t)$, dove per definizione $X_{(1)} = min(X_1, \dots, X_6)$. Notiamo innanzitutto che per la definizione di minimo si ha che se $X_{(1)} > t$, allora $X_i > t$ per ogni $i = 1, \dots, 6$. Quindi:

$$\begin{aligned}
P(X_{(1)} > t) &= P(X_1 > t, \dots, X_6 > t) \\
&= \prod_{i=1}^{6} P(X_i > t) \\
&= \prod_{i=1}^{6} e^{-\lambda_i t} \\
&= exp\left\{ -\left(\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \right) t \right\}
\end{aligned}$$

Possiamo concludere che $X_{(1)}$ è ancora un'esponenziale con attesa

$$\mathbb{E}[X_{(1)}] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{6} \lambda_i}$$

Per rispondere al secondo quesito, definiamo innanzitutto $I =$ *"indice del monitor che fallisce per primo"*.
A questo punto, sapendo che j è il primo monitor a fallire al tempo $X_{(1)}$, allora $X_{(2)} = \min_{i \neq j}(X_i)$.
In altri termini vogliamo trovare:

$$\begin{aligned}
P(X_{(2)} > t) &= P(\min_{i \neq j}(X_i) > t, I = j) \\
&= \sum_{j=1}^{6} P(\min_{i \neq j}(X_i) > t) \cdot P(I = j) \\
&= \sum_{j=1}^{6} e^{-\sum_{i \neq j}^{6} \lambda_i} \cdot \frac{\lambda_j}{\sum_{i}^{6} \lambda_i}
\end{aligned}$$

Per cui otteniamo la distribuzione cumulativa $P(X_{(2)} \leq t) = 1 - P(X_{(2)} > t)$. Inoltre è evidente che $P(X_{(2)} > t)$ ha una distribuzione Iperesponenziale, per cui l'attesa è

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{(2)}) &= \sum_{j=1}^{6} \frac{P(I = j)}{P(\min_{i \neq j})} \\
&= \sum_{j=1}^{6} \frac{\lambda_j}{e^{-t \sum_{i \neq j} \lambda_i} \cdot \sum_{i \neq j} \lambda_i}
\end{aligned}$$

Esercizio 3.b

Seguendo il ragionamento fatto per i punti precedenti, abbiamo che il tempo in cui tutti si rompono è pari al tempo in cui l'ultimo si rompe, cioè

$$\begin{aligned}
P(X_{(n)} \leq t) &= P(max_i(X_i) \leq t) \\
&= \prod_{i=1}^{6} P(X_i \leq t)
\end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^{6} 1 - e^{\lambda_i t}$$

L'attesa applichiamo la definizione per ottenere

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[P(X_{(n)} \le t)] &= \int_0^\infty t \cdot P(X_{(n)} \le t) \\ &= \int_0^\infty t \cdot P(X_{(n)} \le t)\end{aligned}$$

Esercizio 4.a

Considerando uno scenario in cui le due code sono inizialmente vuote, è pur sempre probabile che entri un cliente nella coda 1 prima che ne entri uno nella coda 2, per cui non è possibile affermare che *sicuramente* ci siano sempre meno clienti in attesa nella prima coda.

Esercizio 4.b

Definendo L_i come il numero di elementi in una generica coda i, il valore atteso di elementi presenti nella coda può essere ricavato come $E[L_i] = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ [1], dove ρ è il tasso di utilizzo del servitore calcolato come $\frac{\lambda}{\mu}$. Il problema può essere riformulato chiedendosi se $E[L_1] < E[L_2]$.

$$E[L_1] < E[L_2] = \frac{\lambda_1^2}{\mu(\mu - \lambda_1)} < \frac{\lambda_2^2}{\mu(\mu - \lambda_2)}$$

Questa disuguaglianza è soddisfatta per $\lambda_1 < \lambda_2$. Questo risultato rispecchia i dati del problema. Di conseguenza è possibile affermare che in media nella coda 1 saranno presenti meno elementi rispetto alla coda 2. Possiamo confermare ulteriormente la soluzione ottenuta in quanto, intuitivamente, è possibile notare che, siccome il tasso con cui arrivano gli elementi della coda 1 è minore rispetto al tasso con cui arrivano nella coda 2, saranno presenti in media più elementi nella coda 2 rispetto alla coda 1.

A Codice Python

```python
import numpy as np
P = np.array([[1/2, 1/3, 1/6],[3/4, 0, 1/4], [0,1,0]])
P = np.matmul(P,P)
P[0,2]
```

Listing 1: Calcolo di $P^{(2)}_{1,3}$

```python
import numpy as np
P = np.array([[-1/2, 1/3, 1/6],[3/4, -1, 1/4], [0,1,-1]]).T
A = np.vstack((P,[1,1,1]))
np.linalg.lstsq(A, np.array([0,0,0,1]), rcond=-1)
```

Listing 2: Calcolo della distribuzione stazionaria π

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Given a timespan t and the mean number of realizations (per timespan),
# returns a pair containing t and N(t) coordinates that correspond to the
# realization of the resulting Poisson process.
def simulate(t, mu):
  # Compute N(t), the number of total realizations of the process
  # in the timespan t
  n = np.random.poisson(t * mu)
  # Draw n samples from a uniform distribution between 0 and t
  # this represents the time intervals between realizations
  # (we must also include extremes like 0 and t)
  ts = np.concatenate(([0], np.random.uniform(0, t, n), [t]))
  # Since time must increase, sort them on increasing order
  ts.sort()
  # Generate the number of realizations (simply a list between 0 and n)
  Nt = np.arange(len(ts))
  return ts, Nt

# Simulate 2 processes with both mu_1 and mu_2 equals to 1
ts_1, Nt_1 = simulate(11, 1)
ts_2, Nt_2 = simulate(10, 1)

# Given the 2 processes, get their "sum" process
ts_sum = np.unique(np.concatenate((ts_1, ts_2)))
Nt_sum = np.arange(len(ts_sum))

# Plot
plt.xlabel('$t$')
plt.ylabel('$N(t)$')
plt.step(ts_1, Nt_1, label='$N_1(t)$', where='post')
plt.step(ts_2, Nt_2, label='$N_2(t)$', where='post')
plt.step(ts_sum, Nt_sum, label='$M(t)$', where='post')
plt.legend()
```

Listing 3: Simulazione dei processi di Poisson $N_1(t)$-$N_2(t)$-$M(t)$

Riferimenti bibliografici

[1] Sheldon M. Ross. *Introduction to Probability Models. The Science of Microfabrication.* Academic Press is an Imprint of Elsevier, 2014.