Complementi di Analisi e Probabilità

Soluzioni proposte agli Esercizi - Foglio 1

Matteo Brunello | 85867, Stefano De Rosa | 914966

7 novembre 2022

Esercizio 1.a

Per il teorema delle probabilità totali si ha che $E[X] = \sum_x E[X \mid X = x]P(X = x)$. Dal problema sappiamo inoltre che $P(X = 1) = p$ e $P(X = -N) = 1 - p$, per cui:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= E[X \mid X = 1]P(X = 1) + E[X \mid X = -N]P(X = -N) \\
&= E[1] \cdot p + E[-N] \cdot (1 - p) \\
&= p - \lambda(1 - p)
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Per cui basta porre $E[X] = 0$ e trovare $\lambda = \frac{p}{1-p}$ $\square$

Esercizio 1.b

Per la definizione di varianza abbiamo che: $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$. Per ottenere il primo termine, seguiamo il ragionamento fatto in precedenza, per cui

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= 1^2 \cdot p + E[(-N)^2] \cdot (1 - p) \\
&= p + E[N^2] \cdot (1 - p)
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Tenendo conto che il secondo momento centrale di una variabile aleatoria $N \sim Poisson(\lambda)$ e' ottenibile mediante il seguente ragionamento

$$
\begin{aligned}
Var[N] &= E[N^2] - E[N]^2 \\
\lambda &= E[N^2] - \lambda^2 \\
E[N^2] &= \lambda + \lambda^2
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

la 2.1 diventa infine

$$
E[X^2] = p + (\lambda + \lambda^2)(1 - p) \tag{2.3}
$$

Per cui, per l'equazione 1.1 e la 2.3 si ottiene

$$Var[X] = [p + (\lambda + \lambda^2)(1 - p)] - [p - \lambda(1 - p)]^2 \quad \square$$

Esercizio 1.c

In questo caso, $Y = \sum_{i=1}^{M} X_i$ e' una *variabile aleatoria composta*, per cui conviene calcolare l'attesa condizionando sul valore di M. Di conseguenza, applicando il teorema della doppia attesa (o *regola della torre*) otteniamo che:

$$\begin{aligned}
E[Y] &= E\left[\sum_{i=1}^{M} X_i\right] \\
&= E\left[E[\sum_{i=1}^{M} X_i|M]\right] && \textit{(teo. doppia attesa)} \\
&= \sum_m E\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i|M = m)\right] P(M = m) && \textit{(teo. attesa totale)} \\
&= \sum_m \sum_{i=1}^{m} E[X_i|M = m]P(M = m) && \textit{(indipendenza)} \\
&= \sum_m \sum_{i=1}^{m} E[X_i]P(M = m) \\
&= \sum_m mE[X_i]P(M = m) \\
&= \sum_m mE[X]P(M = m) \\
&= E[X] \sum_m mP(M = m) \\
&= E[X]E[M] \\
&= (p - \lambda(1 - p))\beta \quad \square
\end{aligned}$$

Esercizio 2.a

Sia $X =$ *numero di passeggeri rimasti sul treno*, per cui si vuole calcolare $P(X \geq 90)$. Notiamo innanzitutto che siccome ogni passeggero ha probabilita' di scendere pari a p, di conseguenza avra' probabilita' $1 - p$ di rimanere sul treno, per cui $X \sim Binom(K, 1 - p)$.
Partiamo con il fare 3 osservazioni:

1. $P(X \geq 90) = 1 - P(X < 90)$
2. $P(X < 90) = \sum_{i=0}^{89} P(X = i)$
3. $P(X = i) = \sum_{k \geq i} P(X = i \mid K = k)P(K = k)$

Partiamo con il calcolare la 3

$$
\begin{aligned}
P(X = i) &= \sum_{k=i}^{\infty} P(X = i \mid K = k) P(K = k) \\
&= \sum_{k=i}^{\infty} \binom{k}{i} (1-p)^i (p)^{k-i} P(K = k) \\
&= \sum_{k=i}^{\infty} \binom{k}{i} (1-p)^i (p)^{k-i} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=i}^{\infty} \binom{k}{i} (1-p)^i (p)^{k-i} \frac{\lambda^i \lambda^{k-i}}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} [\lambda(1-p)]^i \sum_{k=i}^{\infty} \frac{k!}{(k-i)!\, k!} \lambda^{k-i} (p)^{k-i} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} [\lambda(1-p)]^i \sum_{k=i}^{\infty} \frac{[\lambda p]^{k-i}}{(k-i)!} \qquad \textit{(posto m = k-i)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} [\lambda(1-p)]^i \sum_{k=i}^{\infty} \frac{[\lambda p]^{m}}{m!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{i!} [\lambda(1-p)]^i e^{\lambda p} \\
&= \frac{[\lambda(1-p)]^i}{i!} e^{-\lambda + \lambda p} \\
&= \frac{[\lambda(1-p)]^i}{i!} \; e^{-\lambda(1-p)} \qquad \square
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Nota: si può notare che $X \sim Poisson(\lambda = (1-p))$.
Ne segue quindi che il valore del punto 2 e' pari a

$$
\begin{aligned}
P(X < 90) &= \sum_{i=0}^{89} P(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{89} \frac{[\lambda(1-p)]^i}{i!} \; e^{-\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda(1-p)} \; \sum_{i=0}^{89} \frac{[\lambda(1-p)]^i}{i!}
\end{aligned}
$$

Infine, possiamo ottenere il risultato del problema

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 90) &= 1 - P(X < 90) \\
&= 1 - \left[e^{-\lambda(1-p)} \; \sum_{i=0}^{89} \frac{[\lambda(1-p)]^i}{i!} \right] \qquad \square
\end{aligned}
$$

Esercizio 2.b

$$
\begin{aligned}
E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^{K} X_i\right] \\
&= E\left[E[\sum_{i=1}^{k} X_i \mid K = k]\right] \\
&= \sum_k E\left[\sum_{i=1}^{k} (X_i | K = k)\right] P(K = k) \\
&= \sum_k E\left[\sum_{i=1}^{k} X_i\right] P(K = k) \qquad \textit{(X_i e K sono indipendenti [1])} \qquad (5.1) \\
&= \sum_k k E[X_i] P(K = k) \\
&= \sum_k k E[X] P(K = k) \\
&= E[X] \sum_k k P(K = k) \\
&= E[X] E[K] \\
&= (1 - p)\lambda \quad \square
\end{aligned}
$$

Questo giustifica i risultati ottenuti dall'equazione 4.1.

Esercizio 2.c

Ricordando che X conta il numero di persone che sono salite alla fermata iniziale e che scendono alla fermata finale, abbiamo che il numero medio di persone che scendono alla stazione finale è dato da:

$$
\begin{aligned}
E[X + M] &= E[X] + E[M] \quad \textit{(linearita' attesa)} \\
&= (1 - p)\lambda + \beta \quad \textit{(Eq. 5.1)} \quad \square
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.a

Premessa: Noi tratteremo il caso di variabili aleatorie discrete, ricordiamo che il caso di variabili aleatorie continue è analogo.

Per quanto visto a lezione, $E[X \mid X] = \varphi(X)$ e' una variabile aleatoria con distribuzione

$$
\varphi(X) = \begin{cases}
E[X \mid X = x_1] & P(X = x_1) \\
E[X \mid X = x_2] & P(X = x_2) \\
\vdots & \vdots \\
E[X \mid X = x_n] & P(X = x_n)
\end{cases}
$$

[1] l'indipendenza è dovuta dal fatto che una persona scende o sale indipendentemente da quante persone sono salite inizialmente

Siccome $E[X \mid X = x_i] = E[x_i] = x_i$ (con $i = 0, \dots, n$), allora possiamo riscrivere la distribuzione di $\varphi(X)$ come segue:

$$\varphi(X) = \begin{cases} x_1 & P(X = x_1) \\ x_2 & P(X = x_2) \\ \vdots & \vdots \\ x_n & P(X = x_n) \end{cases} = X$$

In altri termini, $\varphi(X)$ assume valore x_i con probabilita' $P(X = x_i)$. Ma questa e' proprio la definizione di variabile aleatoria X, per cui si conclude che

$$E[X \mid X] = X \tag{7.1}$$

Sfruttando infine l'uguaglianza 7.1 si ottiene la soluzione

$$E[X \mid X] + E[Y \mid Y] = X + Y \quad \square$$

Esercizio 3.b

Si vuole dimostrare che

$$E[X + Y \mid |X| = x] = x + Y \tag{8.1}$$

Siccome si e' a conoscenza solamente del valore assoluto di X, procediamo a fare una dimostrazione per casi. Il primo caso e' in cui $X > 0$, per cui si ottiene facilmente per la linearita' dell'attesa

$$\begin{aligned} E[x + Y \mid X = x] &= E[x] + E[Y \mid X = x] \\ &= x + E[Y \mid X = x] \end{aligned}$$

mentre nel secondo caso, $X < 0$, per cui si ha

$$\begin{aligned} E[Y - x \mid X = -x] &= E[-x] + E[Y \mid X = x] \\ &= E[Y \mid X = x] - x \end{aligned}$$

Si può dunque notare che l'uguaglianza 8.1 e' falsa in generale. Ma, se assumiamo che:

- X e Y siano indipendenti
- $X = |X|$, ovvero che X può assumere valori solo nel semiasse positivo
- $F_Y(y) = \begin{cases} 1 \text{ se } y = y_0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$ per un qualche y_0, così si ha che $Y = E[Y]$

Si ottiene che la seguente uguaglianza è soddisfatta

$$\begin{aligned} E[X + Y \mid |X| = x] &= E[x] + E[Y \mid X = x] \\ &= E[x] + E[Y] && \textit{(per indipendenza)} \\ &= x + Y && \textit{(per } Y \textit{ v.a. costante)} \end{aligned}$$

Esercizio 3.c

Si vuole dimostrare che:

$$\begin{aligned} E[X \mid |X|] &= E[X \mid X] \\ &= X \qquad \textit{(Eq. 7.1)} \end{aligned}$$

E' possibile applicare il teorema dell'attesa totale su tutti i possibili valori che puo' assumere X. Siccome siamo a conoscenza solamente di $|X| = x$, dobbiamo considerare tutti i casi (cioe' $-x$ e x), per cui si ottiene

$$\begin{aligned} E[X \mid |X| = x] &= x \cdot P(X = x \mid |X| = x) + (-x) \cdot P(X = -x \mid |X| = x) \\ &= x\frac{P(X = x)}{P(X = x) + P(X = -x)} - x\frac{P(X = -x)}{P(X = x) + P(X = -x)} \quad \textit{(Bayes)} \\ &= x\frac{P(X = x) - P(X = -x)}{P(X = x) + P(X = -x)} \\ &= x\frac{P(X = x) - P(X = -x)}{P(|X| = x)} \end{aligned}$$

Dall'Esercizio 3.a, sappiamo inoltre che $\varphi(|X|) = E[X \mid |X|]$ è una variabile aleatoria, la cui distribuzione è definita come segue:

$$\begin{aligned} \varphi(|X|) &= E[X \mid |X| = x_i] && \textit{con } P(|X| = x_i) \\ &= x_i\frac{P(X = x_i) - P(X = -x_i)}{P(|X| = x_i)} && \textit{con } P(|X| = x_i) \\ & && (i = 0, \dots, n) \end{aligned}$$

Quindi in generale si ha che $E[X \mid |X|] = |X| \neq X$. Esiste però un caso particolare in cui questa uguaglianza è invece verificata, ovvero quando l'immagine di $X \subseteq \mathbb{R}^+$ (o equivalentemente quando $X = |X|$). Questo è facilmente dimostrabile perchè è conseguenza diretta dell'equazione 7.1.
Per completezza ne daremo di seguito una dimostrazione. Supponiamo che $X = |X|$, per cui abbiamo che $P(X = -x) = 0$ e quindi il rapporto $\frac{P(X=x)-P(X=-x)}{P(|X|=x)}$ si riduce ad essere $\frac{P(X=x)}{P(X=x)} = 1$. Quindi possiamo riscrivere la distribuzione di $\varphi(|X|)$ come:

$$\varphi(|X|) = \begin{cases} x_1 & P(X = x_1) \\ x_2 & P(X = x_2) \\ \vdots & \vdots \\ x_n & P(X = x_n) \end{cases} = X$$

Nel caso invece in cui X sia simmetrica, $E[X \mid |X|] = 0$ sempre.

Esercizio 3.d

Supponendo che X e Y siano indipendenti:

$$\begin{aligned} E[g(X)h(Y) \mid X] &= E[g(X) \mid X] \cdot E[h(Y) \mid X] && (\textit{indipendenza}) \\ &= g(X)E[h(Y) \mid X] && \textit{(stabilità attesa condizionata)} \end{aligned}$$

E' possibile concludere che la relazione risulta vera solo se assumiamo che X e Y siano indipendenti.

Esercizio 3.e

Anche in questo caso e' necessario supporre che X e Y siano indipendenti per poi applicare la linearita' dell'attesa per rendere vera l'uguaglianza.

$$\begin{aligned} E[g(X)h(Y) \mid X = x, Y = y] &= E[g(x)h(y) \mid X = x, Y = y] \\ &= E[g(x) \mid X = x, Y = y] \cdot E[h(y) \mid X = x, Y = y] && \textit{(linearità)} \\ &= E[g(x) \mid X = x] \cdot E[h(y) \mid Y = y] && \textit{(indipendenza)} \\ &= g(x)h(y) && \textit{(attesa di una costante)} \end{aligned}$$

Esercizio 3.f

$$\begin{aligned} E[XY \mid X] &= E[X \mid X]E[Y \mid X] && \textit{(linearità attesa)} \\ &= XE[Y \mid X] && \textit{(Eq. 7.1)} \\ &= XE[Y] && \textit{(indipendenza)} \end{aligned}$$

In conclusione, possiamo affermare che nel caso generale l'uguaglianza proposta non e' vera.

E' possibile pero' renderla vera nel caso in cui Y abbia distribuzione $F_Y(y) = \begin{cases} 1 \text{ se } y = y_0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$ per qualche y_0.

Esercizio 4.a

Sapendo che la distribuzione condizionale *(la cui dimostrazione e' consultabile all'Appendice A)*

$$X \mid Y = y \sim \mathcal{N}\left(\mu_X + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\rho(y - \mu_Y),\ (1 - \rho^2)\sigma_X^2\right) \tag{13.1}$$

Se poniamo che $Z = X + Y$, vorremmo calcolare $P(Z \leq z \mid Y = y)$.

$$\begin{aligned} P(Z \leq z \mid Y = y) &= \int_{-\infty}^{z-y} f_{X|Y}(u, y) du \\ &= \int_{-\infty}^{z-y} \frac{1}{(1 - \rho^2)\sigma_X^2\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{u - \left(\mu_X + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\rho(y - \mu_Y)\right)}{(1 - \rho^2)\sigma_X^2}\right)^2 du \end{aligned}$$

Esercizio 4.b

$$
\begin{aligned}
E[X^2 + Y^2 \mid X = x, Y = y] &= E[X^2 \mid X = x, Y = y] + E[Y^2 \mid X = x, Y = y] \quad \textit{(linearita' attesa)} \\
&= E[x^2] + E[y^2] \\
&= x^2 + y^2
\end{aligned}
$$

Esercizio 4.c

I due punti richiesti da questo esercizio si risolvono applicando la definizione 13.1 come segue:

1.
$$
\begin{aligned}
E[X \mid Y = y] &= \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y) \\
&= \mu_X + \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y) \\
&= \mu_X + \frac{C_{XY}}{\sigma_Y^2}(y - \mu_Y)
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
Var[X \mid Y = y] &= (1 - \rho^2)\, \sigma_X^2 \\
&= \left(1 - \left(\frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\right)^2\right) \sigma_X^2
\end{aligned}
$$

A Gaussiana Bivariata Condizionale [1]

Dalla definizione di Gaussiana Bivariata [2], si ha che

$$f_{X,Y} = c \cdot e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}$$

dove (per semplicita' notazionale):

$$c = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho)^2}}$$

$$\begin{aligned}
Q(x,y) &= \frac{1}{(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\rho\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] \\
&= \frac{\left(x-\mu_X+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)\right)^2}{(1-\rho^2)\sigma_X^2} + \frac{(y-\sigma_Y)^2}{\sigma_Y^2}
\end{aligned}$$

Per la definizione di distribuzione condizionale

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Sapendo che $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$, sappiamo che

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}exp\left(-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y}\right)
\end{aligned}$$

Avendo tutti gli elementi necessari, non resta che applicare la formula per ottenere la distribuzione condizionale

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x,y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{(2\pi\sigma_X\sigma_Y)^{-1}}{(\sqrt{2\pi}\sigma_Y)^{-1}}\frac{exp\left(-\frac{1}{2}Q(x,y)\right)}{exp\left(-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y}\right)} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sqrt{(1-\rho^2)}}exp\left(-\frac{1}{2}Q(x,y) + \frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sqrt{(1-\rho^2)}}exp\left(\frac{\left(x-\mu_X+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_X^2} - \frac{(y-\sigma_Y)^2}{2\sigma_Y^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sqrt{(1-\rho^2)}}exp\left(\frac{\left(x-\mu_X+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_X^2}\right)
\end{aligned}$$

Ponendo $\sigma_{X|Y} = \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$ e $\mu_{X|Y} = (1-\rho^2)\sigma_X^2$, troviamo che

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sqrt{(1-\rho^2)}} exp\left(\frac{\left(x - \mu_{X|Y}\right)^2}{\sigma_{X|Y}^2}\right)$$

in altri termini, abbiamo che

$$X \mid Y = y \sim \mathcal{N}\left(\mu_X + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\rho(y - \mu_Y),\, (1-\rho^2)\sigma_X^2\right) \quad \square$$

Riferimenti bibliografici

[1] Andrew J. Baczkowski. *MATH2715 Statistical Methods - Course Notes.* [Online]. URL: http://www1.maths.leeds.ac.uk/~sta6ajb/math2715/lec19-20.pdf.

[2] Wikipedia contributors. *Multivariate normal distribution - Bivariate case.* [Online]. 2004. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution#Bivariate_case.