Werkzeuge der empirischen Forschung

Abgabe: 06.05.2019
Blatt 3
Pohl, Oliver
577878
pohloliq

Aufgabe 5b.

Berechnung der Varianz von X Bi(n,p)

Zunächst einmal muss gezeigt werden, das E(X)=n*p:

$$\begin{aligned}
E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k} \\
&= n \cdot p \cdot (p + (1-p))^{n-1} \\
&= n \cdot p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 &= E(X^2) + E(X) - E(X) - E(X)^2 \\
&= E(X \cdot (X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \cdot (k-1) \cdot Bi(n,p) + n \cdot p - (n \cdot p)^2 \\
&= \sum_{k=2}^{n} n \cdot (n-1) \cdot \binom{n-2}{k-2} \cdot p^{k-2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-k} + n \cdot p - (n \cdot p)^2 \\
&= p^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-2} n \cdot (n-1) \cdot \binom{n-2}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-2-k} n \cdot p - (n \cdot p)^2 \\
&= p^2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-2-k} n \cdot p - (n \cdot p)^2 \\
&= p^2 \cdot n \cdot (n-1) + n \cdot p - (n \cdot p)^2 \\
&= p^2 \cdot n^2 - p^2 \cdot n + n \cdot p - n \\
&= n \cdot (1-p) \cdot p
\end{aligned}$$