

Werkzeuge der empirischen Forschung

Abgabe: 01.07.2019

Blatt 11

Pohl, Oliver

577878

pohloliq

Aufgabe 31.

 H_0 : Merkmale sind unabhängig $H_1: \neg H_0$

Beobachtete Werte:

n_0	ländlich	städtisch	
Küstentiefland	6	7	13
Inneres Hochland	9	8	17
	15	15	30

Erwartete Werte:

n_e	ländlich	städtisch	
Küstentiefland	6.5	6.5	13
Inneres Hochland	8.5	8.5	17
	15	15	30

Freiheitsgrade: $df=1$, Vergleichswert = 3.84

Chiquadrat-Teststatistik berechnen:

$$\begin{aligned}
 \chi^2 &= \frac{(6 - 6.5)^2}{6.5} + \frac{(7 - 6.5)^2}{6.5} + \frac{(9 - 8.5)^2}{8.5} + \frac{(8 - 8.5)^2}{8.5} \\
 &= 0.0384 + 0.0384 + 0.0294 + 0.0294 \\
 &= 0.1356
 \end{aligned}$$

Da $0.1356 < 3.84$ wird die Nullhypothese angenommen . Die beiden Merkmale sind unabhängig mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05.

Werkzeuge der empirischen Forschung

Abgabe: 01.07.2019

Blatt 11

Pohl, Oliver

577878

pohloliq

Aufgabe 32a.

Folgende fiktive Beobachtungen sind gegeben:

$X :$	1	1	1	1	1
$Y :$	1	1	1	1	2

Vergleich anhand eines Wilcoxon-Tests:

Zusammenfassen der Beobachtungen zu einer Stichprobe:

[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]

Rangzahlen bilden:

[5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 10]

Berechnung der Summe der Ränge für Stichprobe X:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1}^5 R_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^5 R_{1j} = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 \\ &= \sum_{j=1}^5 R_{1j} = 25 \end{aligned}$$

Berechnung der Erwartungswerte(unter H_0):

$$\begin{aligned} E(S_1) &= \frac{5 \cdot (5 + 5 + 1)}{2} \\ &= 27.5 \end{aligned}$$

Berechnung der Varianzen:

$$\begin{aligned} Var(S_1) &= \frac{5 \cdot 5 \cdot (5 + 5 + 1)}{12} \\ &= 22.91667 \end{aligned}$$

Berechnung der Teststatistik des Wilcoxon-Test:

Werkzeuge der empirischen Forschung

Abgabe: 01.07.2019

Blatt 11

Pohl, Oliver

577878

pohloliq

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{var} S}} \\
 &= \frac{25 - 27.5}{\sqrt{22.92}} \\
 &= -0.52
 \end{aligned}$$

Berechnung des p-Wertes:

$$\begin{aligned}
 p &= 2 \cdot \text{pnorm}(-0.52) \\
 &= 2 \cdot 0.302 \\
 &= 0.604
 \end{aligned}$$

Da der p-Wert $= 0.604 > 0.05$ nehmen wir die Nullhypothese an.
 Folgende fiktive Beobachtungen sind gegeben:

$X :$	1	1	1	1	1
$Y :$	1	1	1	1	5

Vergleich anhand eines Wilcoxon-Tests:

Zusammenfassen der Beobachtungen zu einer Stichprobe:

[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5]

Rangzahlen bilden:

[5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 10]

Berechnung der Summe der Ränge für Stichprobe Y:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{j=1}^5 R_{1j} \\
 &= \sum_{j=1}^5 R_{1j} = 5 + 5 + 5 + 5 + 10 \\
 &= \sum_{j=1}^5 R_{1j} = 30
 \end{aligned}$$

Berechnung der Erwartungswerte(unter H_0):

Werkzeuge der empirischen Forschung

Abgabe: 01.07.2019

Blatt 11

Pohl, Oliver

577878

pohloliq

$$\begin{aligned} E(S_1) &= \frac{5 \cdot (5 + 5 + 1)}{2} \\ &= 27.5 \end{aligned}$$

Berechnung der Varianzen:

$$\begin{aligned} Var(S_1) &= \frac{5 \cdot 5 \cdot (5 + 5 + 1)}{12} \\ &= 22.91667 \end{aligned}$$

Berechnung der Teststatistik des Wilcoxon-Test:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{S - E(S)}{\sqrt{varS}} \\ &= \frac{30 - 27.5}{\sqrt{22.92}} \\ &= 0.52 \end{aligned}$$

Berechnung des p-Wertes:

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot pnorm(-0.52) \\ &= 2 \cdot 0.302 \\ &= 0.604 \end{aligned}$$

Da der p-Wert = 0.604 > 0.05 nehmen wir die Nullhypothese an.
Folgende fiktive Beobachtungen sind gegeben:

X :	1	1	1	1	1
Y :	1	1	1	1	10

Vergleich anhand eines Wilcoxon-Tests:

Zusammenfassen der Beobachtungen zu einer Stichprobe:

[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5]

Werkzeuge der empirischen Forschung

Abgabe: 01.07.2019

Blatt 11

Pohl, Oliver

577878

pohloliq

Rangzahlen bilden:

[5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 10]

Berechnung der Summe der Ränge für Stichprobe Y:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1}^5 R_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^5 R_{1j} = 5 + 5 + 5 + 5 + 10 \\ &= \sum_{j=1}^5 R_{1j} = 30 \end{aligned}$$

Berechnung der Erwartungswerte(unter H0):

$$\begin{aligned} E(S_1) &= \frac{5 \cdot (5 + 5 + 1)}{2} \\ &= 27.5 \end{aligned}$$

Berechnung der Varianzen:

$$\begin{aligned} Var(S_1) &= \frac{5 \cdot 5 \cdot (5 + 5 + 1)}{12} \\ &= 22.91667 \end{aligned}$$

Berechnung der Teststatistik des Wilcoxon-Test:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{S - E(S)}{\sqrt{varS}} \\ &= \frac{30 - 27.5}{\sqrt{22.92}} \\ &= 0.52 \end{aligned}$$

Berechnung des p-Wertes:

$$p = 2 \cdot pnorm(-0.52)$$

Werkzeuge der empirischen Forschung

Abgabe: 01.07.2019

Blatt 11

Pohl, Oliver

577878

pohloliq

$$= 2 \cdot 0.302$$

$$= 0.604$$

Da der p-Wert $= 0.604 > 0.05$ nehmen wir die Nullhypothese an.

Interpretation der Ergebnisse:

Egal wie groß der Ausreißer von der Stichprobe Y ist, der p-Wert ist immer derselbe. Man kann an diesem Beispiel die Robustheit des Wilcoxon-Test sehen.

Werkzeuge der empirischen Forschung

Abgabe: 01.07.2019

Blatt 11

Pohl, Oliver

577878

pohloliq

Aufgabe 32b.

Folgende fiktive Beobachtungen sind gegeben:

$X :$	1	2	3
$Y :$	0	0	0

Vergleich anhand eines Wilcoxon-Tests:

Zusammenfassen der Beobachtungen zu einer Stichprobe:

[0, 0, 0, 1, 2, 3]

Rangzahlen bilden:

[2, 2, 2, 4, 5, 6]

Berechnung der Summe der Ränge für Stichprobe X:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1}^3 R_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^3 R_{1j} = 4 + 5 + 6 \\ &= \sum_{j=1}^3 R_{1j} = 15 \end{aligned}$$

Berechnung der Erwartungswerte(unter H_0):

$$\begin{aligned} E(S_1) &= \frac{3 \cdot (3 + 3 + 1)}{2} \\ &= 10.5 \end{aligned}$$

Berechnung der Varianzen:

$$\begin{aligned} Var(S_1) &= \frac{3 \cdot 3 \cdot (3 + 3 + 1)}{12} \\ &= 5.25 \end{aligned}$$

Berechnung der Teststatistik des Wilcoxon-Test:

Werkzeuge der empirischen Forschung

Abgabe: 01.07.2019

Blatt 11

Pohl, Oliver

577878

pohloliq

$$\begin{aligned} Z &= \frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{var}S}} \\ &= \frac{15 - 10.5}{\sqrt{5.25}} \\ &= 1.97 \end{aligned}$$

Berechnung des p-Wertes:

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot \text{pnorm}(1.97) \\ &= 2 \cdot 0.02 \\ &= 0.04 \end{aligned}$$

Da der p-Wert $= 0.04 < 0.05$ lehnen wir die Nullhypothese ab.

Folgende fiktive Beobachtungen sind gegeben:

$X :$	1	2	3	10
$Y :$	0	0	0	

Vergleich anhand eines Wilcoxon-Tests:

Zusammenfassen der Beobachtungen zu einer Stichprobe:

[0, 0, 0, 1, 2, 3, 10]

Rangzahlen bilden:

[2, 2, 2, 4, 5, 6, 7]

Berechnung der Summe der Ränge für Stichprobe Y:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1}^3 R_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^3 R_{1j} = 2 + 2 + 2 \\ &= \sum_{j=1}^3 R_{1j} = 6 \end{aligned}$$

Werkzeuge der empirischen Forschung

Abgabe: 01.07.2019

Blatt 11

Pohl, Oliver

577878

pohloliq

Berechnung der Erwartungswerte(unter H_0):

$$\begin{aligned} E(S_1) &= \frac{3 \cdot (3 + 4 + 1)}{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Berechnung der Varianzen:

$$\begin{aligned} Var(S_1) &= \frac{3 \cdot 4 \cdot (3 + 4 + 1)}{12} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Berechnung der Teststatistik des Wilcoxon-Test:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{S - E(S)}{\sqrt{varS}} \\ &= \frac{6 - 12}{\sqrt{8}} \\ &= -2.12 \end{aligned}$$

Berechnung des p-Wertes:

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot pnorm(-2.12) \\ &= 2 \cdot 0.017 \\ &= 0.034 \end{aligned}$$

Da der p-Wert = $0.034 < 0.05$ lehnen wir die Nullhypothese ab.