Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1: Kostenfunktion

In den Videos wird die Kostenfunktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$s(t) := \text{sigmoid}(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-t}}$$

eingeführt. Es wird behauptet werden, dass

$$\lim_{t \to \infty} s(t) = 1 \text{ und } \lim_{t \to -\infty} s(t) = 0$$

gelten. Wir wollen dies mathematisch beweisen. Dafür setzen wir als bekannt voraus, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$2^t \leq \mathrm{e}^t \leq 3^t.$$

Beweisen wollen wir, dass für alle $\epsilon > 0$ ein t_ϵ existiert, sodass für alle $t \in (-\infty, t_\epsilon)$ gilt

$$s(t) \leq \epsilon.$$

Für die zweite Behauptung muss für alle $\epsilon > 0$ ein T_ϵ so existieren, dass für alle $t \in (T_\epsilon, \infty)$

$$s(t) \geq 1 - \epsilon$$

gilt.

Dann haben wir die Behauptungen bewiesen. (Ist Euch klar warum?)

(Anmerkung: Wir argumentieren hier genauer als es in der Oberstufe nötig ist, um passend für ein Mathematik-Studium zu argumentieren.)

Aufgabe 2: Ableitungen

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die wir ableiten können. (Mathematisch: Differenzierbare Funktion.) Sei weiter $i \in \{1, ..., n\}$ und

$$e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$$

der i-te Einheitsvektor. Dieser hat an der i-ten Komponente eine Eins und sonst Nullen. Dann ist die partielle Ableitung in die i-te Koordinatenrichtung gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}.$$

Wir setzen

$$\nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^T$$

für den Gradienten. (Eine alternative Notation ist $f'(x)$.)

Eine natürliche Approximation ist nun für festes i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \approx \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}.$$

Mit einem geeignetem $h > 0$.

Bearbeite folgende Aufgaben:

1. Programmiere eine Python-Funktion, die als Eingabe die Funktion und den Punkt, in dem die Ableitung bestimmt werden soll, nimmt. Die Ableitung der Funktion in dem Punkt soll zurückgegeben werden.

2. Probiere verschiedene Werte für h anhand von selbst erstellten Beispielen aus. Gibt es einen sinnvollen Wert für h?

3. Eine weitere mögliche Annäherung für die Bestimmung der Ableitung ist

   $$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(x + he_i) - f(x - he_i)}{2h}.$$

   Programmiere auch diese Variante.

4. Vergleiche beide Varianten zur näherungsweisen Bestimmung der Ableitung. Welche Vorteile und Nachteile haben beide Varianten im Vergleich? (Es kann hier auch sinnvoll sein, viele Berechnungen der Ableitung zu betrachten.)