Aufgabenblatt 1

Matrix-Vektor-Multiplikation

Seien Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ gegeben. Die Matrix-Vektor-Multiplikation ist gegeben durch

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \text{ for all } i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., k\}. \tag{1}$$

Aufgabe 1

Berechne folgende Aufgaben per Hand:

1. AB mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Ax mit A wie in 1. und $x := (2, 4, 5)^T$. Hier bedeutet das hoch T, dass der Vektor transponiert ist, also

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. Die Matrix-Matrix-Multiplikation ist nicht kommutativ. Das heißt für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt nicht immer

$$AB = BA.$$

   Beweise dies, indem Du ein Beispiel findest mit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und

$$AB \neq BA.$$

   Die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ kann hier passend gewählt werden.

Aufgabe 2

Wir wollen nun Eigenschaften von Matrizen und Vektoren als Funktionen näher betrachten. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = Ax$$

Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ f(cx) = cf(x).$$

(Eine solche Abbildung heißt in der linearen Algebra `lineare Abbildung` und hat einige interessante Eigenschaften. Siehe Vorlesungen des ersten und zweiten Semesters des Mathematikstudiums oder eines Studiums mit vielen Mathematikinhalten.)

Aufgabe 3

1. Programmiere die Matrix-Vektor-Multiplikation per Hand.
2. Programmiere eine zweite Version mit vertauschter Schleifenreihenfolge.
3. Nutze numpy für die Matrix-Vektor-Multiplikation.