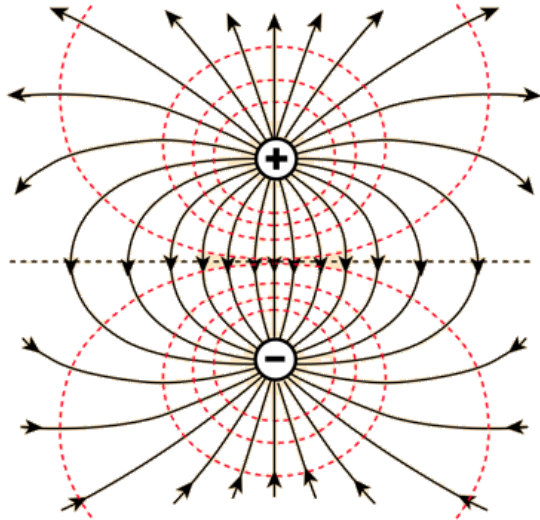




Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias



Proyecto Computación

Potencial eléctrico y campo eléctrico de un dipolo.

Descripción:

Proyecto de la materia de Computación de la Facultad de Ciencias, UNAM.

- Briones Andrade Joshua
- Martínez Ibarra Hugo

Semestre 2018-1

Objetivo

Explicar y exhibir de manera concreta la derivación de la expresión matemática del campo eléctrico a partir de la expresión del potencial eléctrico, debidos a un dipolo eléctrico. Y graficar la representación de ambos conceptos.

Motivación

El interés por representar gráficamente el potencial eléctrico y principalmente el campo eléctrico de un dipolo es debido a que este último es bastante ilustrativo al mostrar las características líneas de campo que se conocen desde hace tiempo. Además, la derivación de la expresión matemática del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico es una forma bastante interesante de abordar por el uso de más de una variable (coordenadas del espacio) y en el caso del campo eléctrico, por su representación vectorial. Por lo anterior, resultó interesante abordar este problema con ayuda de herramientas de computación.

Dipolo eléctrico

Se trata de un arreglo de dos cargas eléctricas opuestas y de igual magnitud, separadas por una distancia definida

Potencial eléctrico

Es el trabajo por unidad de carga (por convención positiva) hecho por un agente o fuerza externa al mover una carga positiva de un punto a otro. Cuando la carga de prueba (positiva) se mueve en dirección del campo eléctrico (producido por carga positiva) el trabajo es menor (negativo) y cuando la carga de prueba se mueve en dirección opuesta del campo el trabajo es mayor (positivo).

Campo eléctrico

Es un campo de fuerzas que existe en el espacio que rodea a una carga eléctrica, por el que otra carga eléctrica, respectivamente introducidos en esta región experimentan una fuerza. Es la fuerza eléctrica por unidad de carga de prueba (por convención positiva).

Potencial eléctrico de un dipolo eléctrico (coordenadas cartesianas)

El potencial eléctrico debido a un grupo de partículas cargadas se expresa como, por el principio de superposición:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

Donde q_i es el valor de i -ésima carga y r_i es la distancia radial de un punto dado desde la i -ésima carga.

Para el caso de un dipolo (dos partículas) se tiene entonces:

$$V = \sum_{i=1}^2 V_i = k\left(\frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}\right)$$

Aquí r_+ es la distancia radial del punto arbitrario P a la carga positiva y r_- es la distancia radial del punto arbitrario P a la carga negativa.

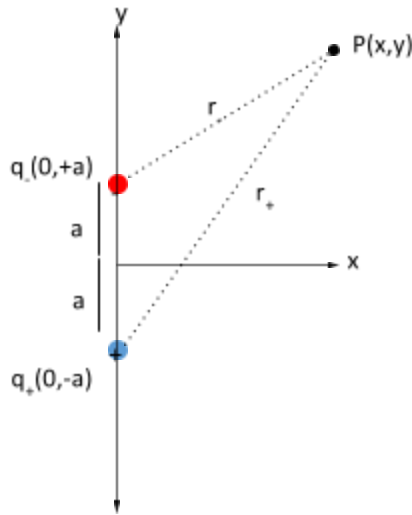


Figura 1: Esquema de un dipolo eléctrico posicionado en un plano cartesiano.

Aquí, la distancia a es la semidistancia entre ambas cargas, posicionadas sobre el eje y .

Para conocer la distancia radial en función de las coordenadas x e y , se obtiene la distancia entre cada par de puntos:

$$r_+ = P - q_+ = (x, y) - (0, -a) = \sqrt{(x-0)^2 + (y+a)^2} = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}$$

$$r_- = P - q_- = (x, y) - (0, +a) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}$$

Por lo que se tendría:

$$V = k\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = kq\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}\right)$$

$$V(x, y) = kq\left(\frac{1}{(x^2+(y+a)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2+(y-a)^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Lo cual es una función escalar que depende de dos variables (coordenadas x e y).

Ahora, para obtener la expresión del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico, se tiene la siguiente ecuación, que por motivos de alcance y espacio de este trabajo no se demostrará:

$$E = -\nabla V$$

Donde ∇ es el operador gradiente:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Lo anterior significa que la expresión del campo eléctrico es una función vectorial (campo vectorial), cuyos respectivos componentes son las derivadas parciales (respecto a la correspondiente coordenada) de la función de potencial, y además se trata del negativo del gradiente. El gradiente por sí sólo, en representación de vectores, indica cómo la función varía en la vecindad de un punto (origen del vector), por ejemplo, su componente x es la derivada parcial de la función respecto a x, una medida de la tasa de cambio de la función conforme uno se mueve en la dirección x. La dirección del vector del gradiente en cualquier punto, es la dirección en la cual uno debe moverse desde ese punto para encontrar el incremento más rápido en la función f. Como la función escalar f(x,y) depende de dos variables, se puede representar como una superficie que se levanta y desciende en ciertas regiones. Hay una dirección en la cual un pequeño paso conducirá más alto que un paso de la misma longitud en cualquier otra dirección. El gradiente de la función es un vector en la dirección del ascenso más abrupto, y su magnitud es la pendiente medida en esa dirección.

El signo menos indica que los puntos del campo eléctrico van de una región de mayor potencial a una de menor potencial, mientras que el vector del gradiente del potencial está definido de modo que éste apunta en la dirección donde se incrementa el potencial y por eso el signo negativo tiene sentido.

Entonces la expresión del campo eléctrico quedaría como:

$$\begin{aligned} E(x, y) &= -\nabla V(x, y) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(kq \left(\frac{1}{(x^2+(y+a)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2+(y-a)^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(kq \left(\frac{1}{(x^2+(y+a)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2+(y-a)^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \right) \\ &= -\left(kqx \left(\frac{1}{(x^2+(y-a)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2+(y+a)^2)^{\frac{3}{2}}} \right), kq \left(\frac{y-a}{(x^2+(y-a)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y+a}{(x^2+(y+a)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right) \\ &= \left(kqx \left(\frac{1}{(x^2+(y+a)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2+(y-a)^2)^{\frac{3}{2}}} \right), kq \left(\frac{y+a}{(x^2+(y+a)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y-a}{(x^2+(y-a)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right) \end{aligned}$$

Así, ya es posible representar el campo eléctrico en cada punto del espacio como un campo vectorial.

Comentarios sobre la programación de los modelos

En primer lugar, cómo los valores de las coordenadas x e y se manejaron como rangos de valores, existe el caso cuando x e y coinciden ser ambos cero (0) por lo que se genera una indeterminación donde no es posible tener un valor del gráfico, para solucionar esto se suma (dentro o fuera de la raíz cuadrada, no hay diferencia) un valor muy pequeño, cercano a cero, que lo hace prácticamente despreciable pero que evita la indeterminación pues el denominador nunca será cero. Por lo que en realidad se tienen las siguientes expresiones para graficar:

$$V(x,y) = kq\left(\frac{1}{(x^2+(y+a)^2+1x10^{-10})^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2+(y-a)^2+1x10^{-10})^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$E(x,y) = -\nabla V(x,y) =$$

$$\left(kqx\left(\frac{1}{(x^2+(y+a)^2+1x10^{-10})^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2+(y-a)^2+1x10^{-10})^{\frac{3}{2}}}\right), kq\left(\frac{y+a}{(x^2+(y+a)^2+1x10^{-10})^{\frac{3}{2}}} - \frac{y-a}{(x^2+(y-a)^2+1x10^{-10})^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

Debido a que el valor de k , constante de Coulomb es prácticamente $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, el producto de kq conviene hacerlo de magnitud relativamente pequeña, en relación a la semidistancia de separación “ a ”, pues así se evita manejar valores muy grandes de potencial eléctrico y de campo eléctrico que dificultaría la lectura de los datos y el propósito ilustrativo del proyecto.

La programación del código para llevar a cabo las representaciones del potencial eléctrico y campo eléctrico se realizaron con el lenguaje de programación Julia 0.6. Y se encontraron dos paqueterías para generar gráficos con las características requeridas para los propósitos mencionados.

La paquetería Plots tiene la ventaja de exponer mejor la obtención del campo vectorial a partir del potencial eléctrico, pues se comienza por definir la función de potencial y el rango de valores de las coordenadas, luego usar la función de mostrar contornos de las curvas de nivel. Después se utilizan explícitamente las derivadas parciales de cada variable para construir la función vectorial del campo eléctrico y graficarlo como un campo vectorial. Sin embargo, el tamaño de los vectores se reduce por medio de un factor adecuado para los valores de los componentes de la función vectorial; se dividió entre un factor adecuado para visualizar mejor los vectores.

La paquetería Gadfly permite definir fácilmente la función del potencial eléctrico y después tiene la ventaja de hacer una mejor representación del campo vectorial, pues se tiene un mejor tamaño y proporción de los vectores, así como más controles del espacio sobre el que se grafica.

Por último, la paquetería PyPlot es muy versátil para diversos tipos de histogramas, nos permite trabajar en coordenadas polares de una manera relativamente fácil y cómoda, en cuando a la

presentación de los datos deja mucho a desear porque no puede trabajar con vectores fácilmente y solo nos deja trabajar con trazos en el plano.

Gráficos generados con lenguaje de programación Julia y en tres distintas paqueterías.

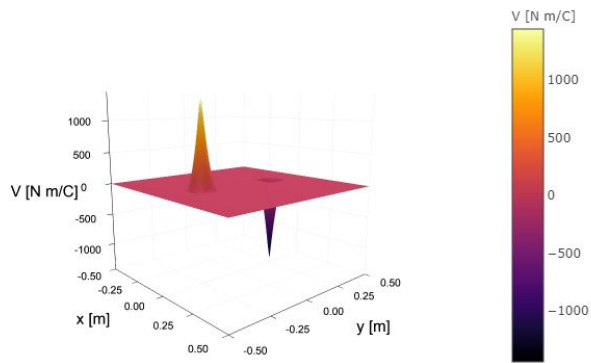


Figura 2: Superficie que representa la función del potencial eléctrico $V(x,y)$

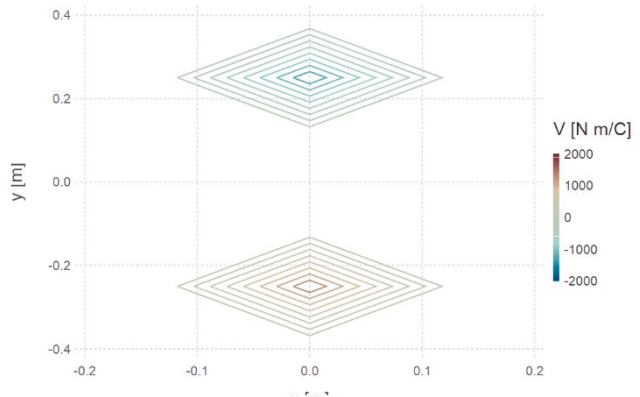


Figura 3: Curvas de nivel (contornos) de la función de potencial eléctrico $V(x,y)$. Con paquetería Gadfly.

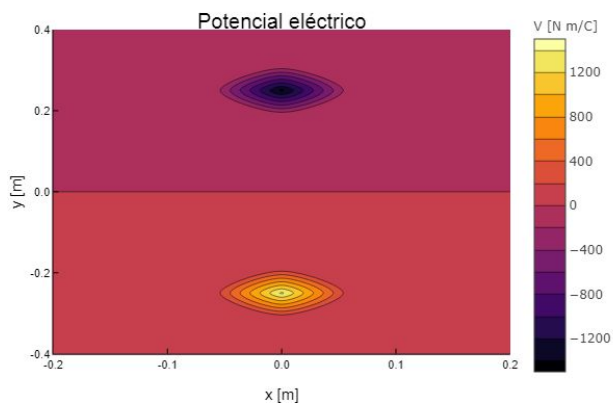


Figura 4: Curvas de nivel (contornos) de la función de potencial eléctrico $V(x,y)$. Con paquetería Plots.

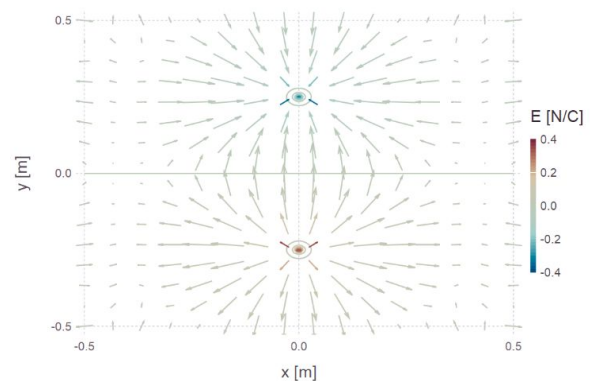


Figura 5: Campo vectorial que represente la función del campo eléctrico $V(x,y)$. Con paquetería Gadfly.

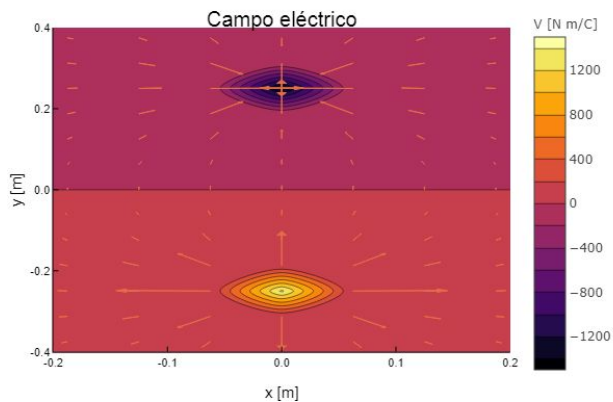


Figura 5: Campo vectorial que represente la función del campo eléctrico $V(x,y)$. Con paquetería Plots.

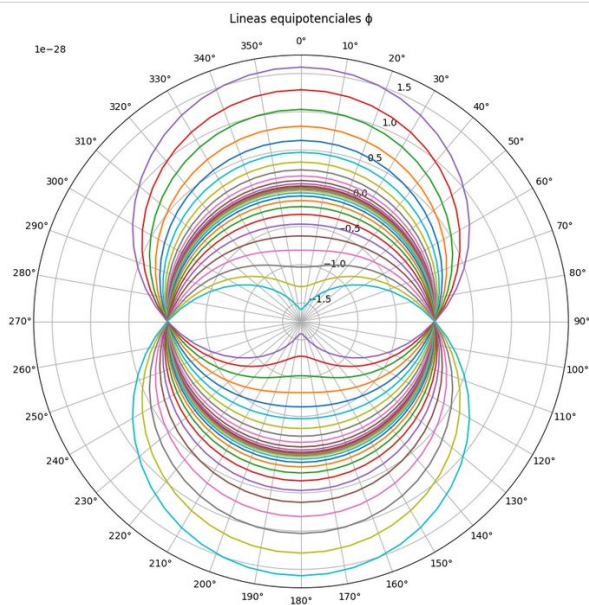


Figura 6: Representación del potencial eléctrico V en coordenadas polares. Se utilizó el paquete PyPlot

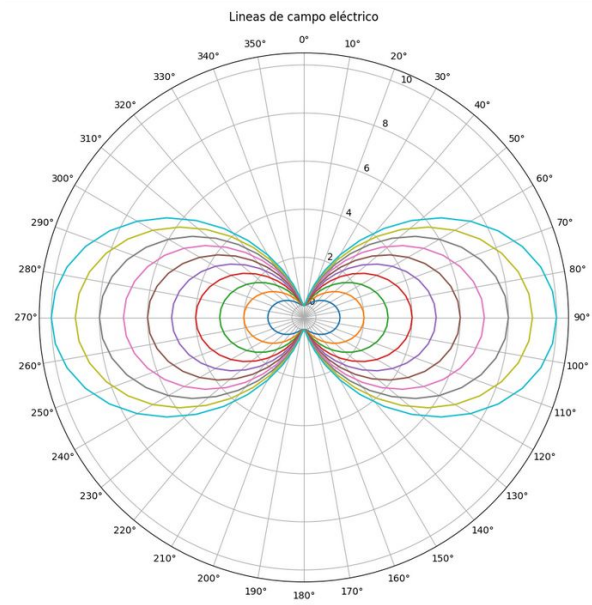


Figura 7: Representación del campo eléctrico con respecto al potencial V en coordenadas polares. Se utilizó el paquete PyPlot

Fuentes de información:

- Breloff, T. (Mayo, 2016). Example Plots.jl/notebooks/quiver.ipynb. GitHub. Consultado el 16 de diciembre de 2017 en <https://github.com/JuliaPlots/ExamplePlots.jl/blob/master/notebooks/quiver.ipynb>
- G. Hewitt, Paul. (2007). "Capítulo 23: Corriente eléctrica". En Física Conceptual (pp. 436-452). Edo. de México, México: Pearson Educación.
- Gadfly.jl. Geom.contour. Consultado el 16 de diciembre de 2017 en http://gadflyjl.org/latest/lib/geoms/geom_contour.html#Geom.contour-1
- Gadfly.jl. Geom.vectorfield. Consultado el 16 de diciembre de 2017 en http://gadflyjl.org/latest/lib/geoms/geom_vectorfield.html#Geom.vectorfield-1
- Halliday, D. y Resnick, R. (2014). "Chapter 22: Electric Fields" (pp. 630-643) y "Chapter 24: Electric Potential" (pp. 680-697). En Fundamentals of Physics. 10a ed. Massachusetts, USA: Wiley.
- Massachusetts Institute of Technology (MIT). (s.f.). Chapter 2: Coulomb's Law. Consultado el 16 de diciembre de 2017 en <http://web.mit.edu/viz/EM/visualizations/coursenotes/modules/guide02.pdf>

- Massachusetts Institute of Technology (MIT). (s.f.). Chapter 3: Electric Potential. Consultado el 16 de diciembre de 2017 en <http://web.mit.edu/viz/EM/visualizations/coursenotes/modules/guide03.pdf>
- National Programme on Technology Enhanced Learning (NPTEL). (s.f.). Module 2: Electrostatics; Lecture 9: Electrostatic Potential. Consultado el 16 de diciembre de 2017 en <http://nptel.ac.in/courses/122101002/downloads/lec-9.pdf>
- Plots. Pyplot. Consultado el 16 de diciembre de 2017 en <http://docs.juliaplots.org/latest/examples/pyplot/#contours>
- Purcell, E. y Morin, D. (2013). "*Chapter 2: The electric potential*" (pp. 58-77). En Electricity and Magnetism. 3era ed. Newyork, USA: Cambridge University press.
- The Julia Language. Array. Consultado el 16 de diciembre de 2017 en <https://docs.julialang.org/en/stable/stdlib/arrays/>
- The Julia Language. Multi-dimensional Arrays. Consultado el 16 de diciembre de 2017 en <https://docs.julialang.org/en/stable/manual/arrays/>
- Github. The PyPlot module for Julia. Consultado el 5 de enero de 2018 en <https://github.com/JuliaPy/PyPlot.jl>
- Github. Julia Examples: pyplot_windrose.jl. Consultado el 6 de enero de 2018 en https://github.com/gizmaa/Julia_Examples/blob/master/pyplot_windrose.jl