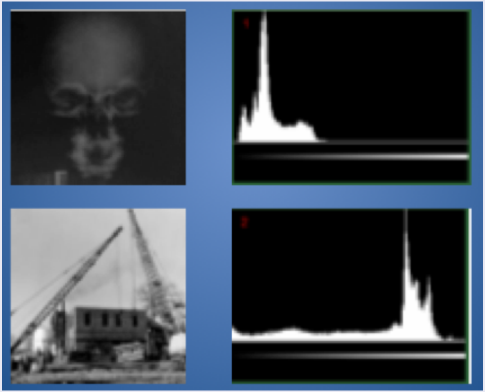
Histogramas

Elementos de Reconocimiento Visual

4to bimestre 2023

Histogramas



El histograma de la imagen nos da una idea de cómo es la imagen en términos de sus niveles de gris.

Los elementos del histograma de una imagen X son la frecuencia relativa de los niveles de gris presentes en la misma.

$$h_{n_i} = \frac{n_i}{NM}$$

donde
$n_i =$ cantidad de ocurrencias del nivel de gris i en la imagen X
$NM =$ cantidad de pixels.

El histograma de una imagen da una idea de la distribución de los niveles de gris presentes en la misma.

Ejemplo de una imagen de 4×4 con la tabla de valores y frecuencias

10	10	11	12
9	9	9	5
9	10	9	9
8	8	8	1

valor	frecuencia	valor	frecuencia
0	0	8	3
1	1	9	6
2	0	10	3
3	0	11	1
4	0	12	1
5	1	13	0
6	0	14	0
7	0	15	0

La suma total de las frecuencias debe dar la cantidad total de pixels de la imagen.

Frecuencias Relativas

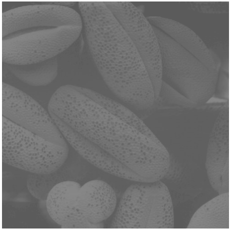
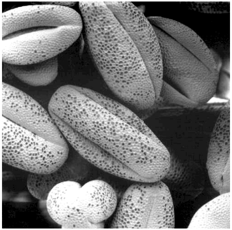
Sea r_j un nivel de gris, entonces

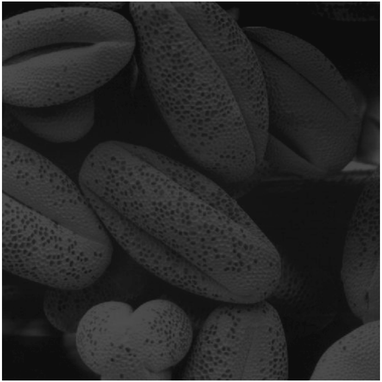
$$f_r(r_j) = \frac{n_j}{n}$$

donde n_j es la frecuencia absoluta y n es la cantidad total de pixels de la imagen.

En el ejemplo anterior la frecuencia relativa del valor de nivel de gris $r_j = 8$ es 0.1875.

Diferentes tipos de luminosidad



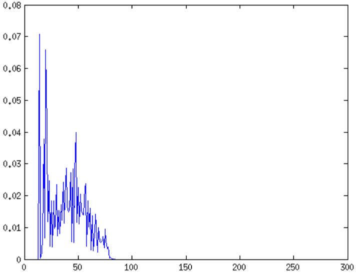
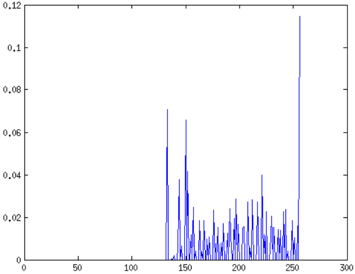


imagen oscura

histograma

Comparación de imágenes ecualizadas

imagen clara



histograma

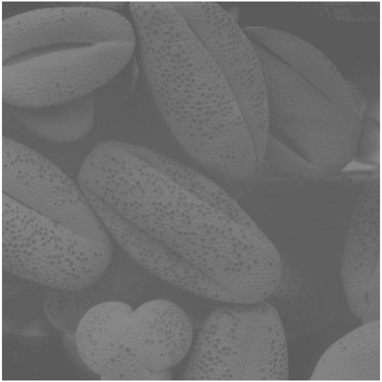
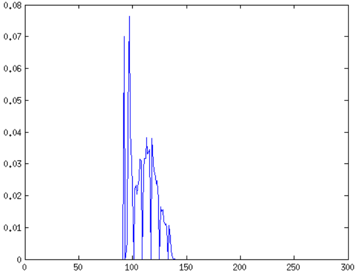
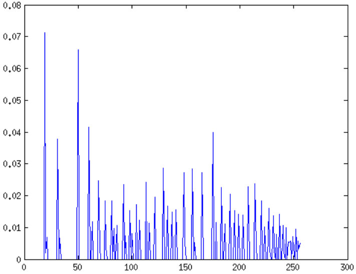


imagen bajo contraste



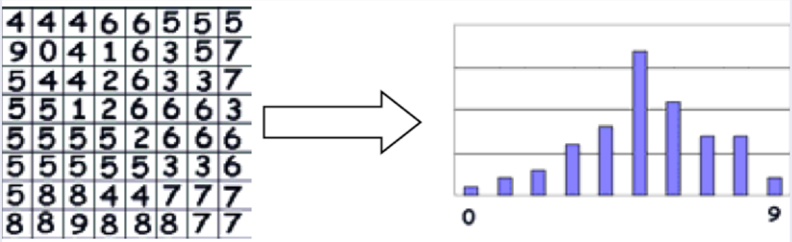
histograma

imagen con contraste



histograma

Ejemplo


4 4 4 6 6 5 5 5
9 0 4 1 6 3 5 7
5 4 4 2 6 3 3 7
5 5 1 2 6 6 6 3
5 5 5 5 2 6 6 6
5 5 5 5 5 3 3 6
5 8 8 4 4 7 7 7
8 8 9 8 8 8 7 7
0
9

Ecualización de Histogramas

- $\mathbf{r}$ variable aleatoria correspondiente a los niveles de gris de la imagen de entrada.
- $\mathbf{s}$ variable aleatoria correspondiente a los niveles de gris de la imagen de salida.
- $F_{\mathbf{r}}(r)$ función de distribución acumulada correspondiente a $\mathbf{r}$.

La ecualización del histograma consiste en encontrar una transformación que haga que la distribución del histograma de la imagen de salida tenga distribución uniforme.
Es decir que:

$$\mathbf{s} = T(\mathbf{r}),\ \mathbf{s} \sim U[0, L-1]$$

que es equivalente a:

$$s = F_{\mathbf{s}}(s)$$

T monótona creciente e inyectiva, entonces:

$$
\begin{aligned}
s = F_{\mathbf{s}}(s) = P(\mathbf{s} \leq s) = P(T(r) \leq s) = P(\mathbf{r} \leq T^{-1}(s)) = \\
= F_{\mathbf{r}}(T^{-1}(s)) = F_{\mathbf{r}}(r)
\end{aligned}
$$

Luego,

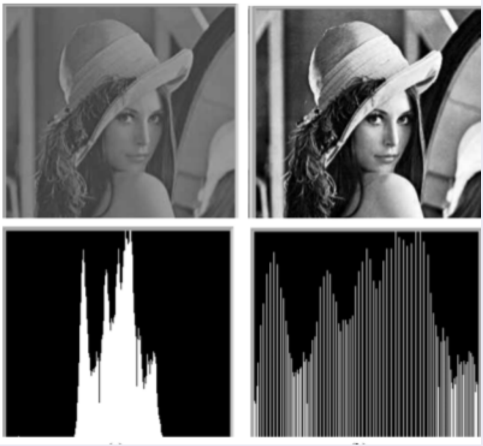
$$s = F_{\mathbf{r}}(r)$$

Veamos que efectivamente s tiene distribución uniforme:

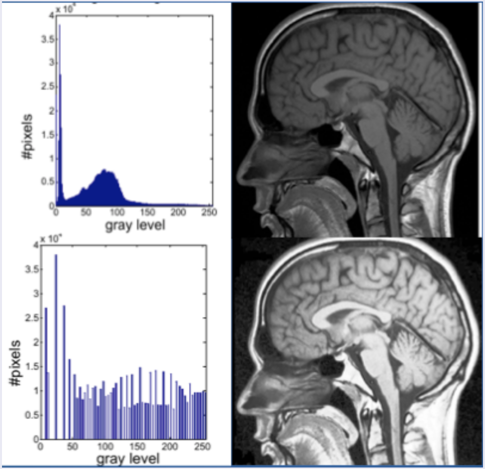
$$
\begin{aligned}
F_{\mathbf{s}}(s) = P(\mathbf{s} \leq s) = P(T(r) \leq s) = P(F_{\mathbf{r}}(r) \leq s) = \\
= P(\mathbf{r} \leq F^{-1}s) = F_{\mathbf{r}}(F^{-1}s) = s
\end{aligned}
$$

y por lo tanto, s resulta una variable aleatoria con distribución uniforme.

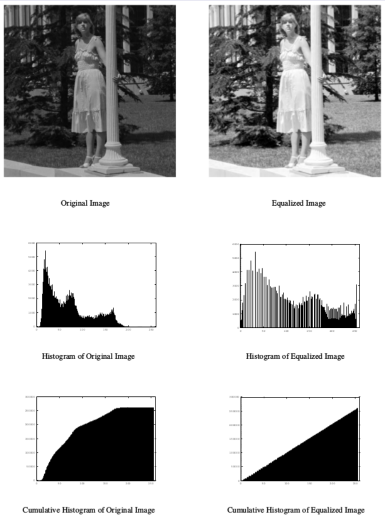
Resultado de la ecualización de la imagen de Lena



Otro ejemplo de ecualización



Histogramas y acumulados antes y después de la ecualización



En la forma discreta

Definimos:

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n_j}{n}$$

donde,

- r_k: k-ésimo nivel de gris que varía en el intervalo $[0, ..., L-1]$
- n_j: cantidad de pixels de la imagen que poseen nivel de gris r_j
- n: cardinal de la imagen
- $\frac{n_j}{n}$: frecuencia relativa del j-ésimo nivel de gris.

Notar que $s_{min} \leq s_k \leq 1$, para llevar el valor de gris al intervalo $[0, \ldots, L-1]$, aplicamos la transformación:

$$\hat{s}_k = \left\lfloor \frac{s_k - s_{min}}{1 - s_{min}}(L-1) + 0.5 \right\rfloor$$

Especificación de histograma

- r: variable aleatoria de niveles de gris de la imagen de entrada
- $p_r(r)$ función de densidad de probabilidad.

Objetivo

Transformar r en s.
s variable aleatoria con $p_s(s)$ función de densidad de probabilidad especificada.
Definimos w variable aleatoria uniforme:

$$w \triangleq \int_0^r p_r(x)dx = F_r(r)$$

tal que satisfaga la relación:

$$w = \int_0^r p_s(x)dx = F_s(s)$$

Obtenemos:

$$s = F_s^{-1}(F_r(r))$$

Entonces, la transformación T tal que $s = T(r)$, con $p_{\mathbf{s}}(s)$ especificada viene dada por:

$$T(r) = F_s^{-1}(F_r(r))$$

r y s variables aleatorias discretas

r y s toman valores x_i y y_i, $i = 0, \ldots, L-1$ con probalidades $p_r(x_i)$ y $p_s(y_i)$, respectivamente.

Definimos

$$w \triangleq \sum_{x_i=0}^{r} p_r(x_i)$$

$$\widetilde{w}_k \triangleq \sum_{y_i=0}^{k} p_s(y_i), \quad k = 0, \ldots, L-1$$

Denotamos $\dot{w}$ al $\widetilde{w}_n$ tal que $\widetilde{w}_n - w \geq 0$ para el valor más chico de n.

$$\hat{n} = \min_n \{n : \widetilde{w}_n - w \geq 0\}$$

$$\dot{w} = \widetilde{w}_{\hat{n}}$$

Entonces

$$\dot{s} = y_{\hat{n}}$$

es la salida de la transformación buscada.

Ejemplo

Dados

- $x_i = 0, 1, 2, 3 \quad p_r(x_i) = 0.25, \quad i = 0, \ldots, 3$
- $y_i = 0, 1, 2, 3 \quad p_s(y_0) = 0, p_s(y_1) = p_s(y_2) = 0.5, p_s(y_3) = 0$

Hallar la transformación entre r y s

$\mathbf{r}$	$\mathbf{p_r(x_i)}$	$\mathbf{w}$	$\widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{k}$	$\dot{\mathbf{w}}$	$\mathbf{n}$	$\dot{\mathbf{s}}$
0	0.25	0.25	0.00	0.50	1	1
1	0.25	0.50	0.50	0.50	1	1
2	0.25	0.75	1.00	1.00	2	2
3	0.25	1.00	1.00	1.00	2	2

Objetivo

Encontrar el histograma modificado $\widetilde{\mathbf{h}}$ que sea más parecido a un histograma uniforme $\mathbf{u}$, pero que el residuo entre $\widetilde{\mathbf{h}}$ y el original $\mathbf{h_o}$ sea pequeño.

$\widetilde{\mathbf{h}}$ podría ser usado para obtener la transformación de niveles de gris $T(r)$.

Problema de minimización

Suma pesada de dos objetivos:

$$\min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{h} - \mathbf{h_o}\| + \lambda \|\mathbf{h} - \mathbf{u}\| \tag{1}$$

donde $\mathbf{h}$, $\mathbf{h_o}$ y $\mathbf{u}$ pertenecen a $\mathbb{R}^{256}$.
$\lambda \in [0, \infty]$: parámetro de ajuste.
$\mathbf{h_o}$: histograma de la imagen original.
$\mathbf{u}$: histograma uniforme.

$\lambda = 0$ correponde a la ecualización del histograma standard.
$\lambda \to \infty$ preserva los detalles de la imagen original.

Ecualización ajustable de histogramas

una solución analítica de la ecuación (1) puede ser obtenida usando la norma euclídea:

$$\widetilde{\mathbf{h}} = \arg\min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{h} - \mathbf{h_o}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{h} - \mathbf{u}\|_2^2$$

lo que resulta un problema de optimización cuadrática:

$$\widetilde{\mathbf{h}} = \arg\min_{\mathbf{h}} [(\mathbf{h} - \mathbf{h_o})^t(\mathbf{h} - \mathbf{h_o}) + \lambda(\mathbf{h} - \mathbf{u})^t(\mathbf{h} - \mathbf{u})]$$

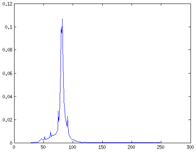
cuya solución es:

$$\widetilde{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h_o} + \lambda\mathbf{u}}{1+\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}\mathbf{h_o} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{u}$$

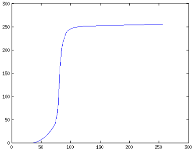
el histograma modificado $\widetilde{\mathbf{h}}$ es el promedio pesado entre $\mathbf{h_o}$ y $\mathbf{u}$.

Ecualización standard de histogramas

imagen original

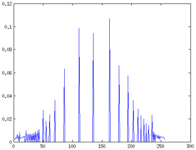


histograma



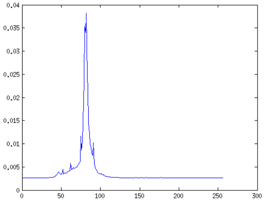
hist. acumulado

imagen ecualizada

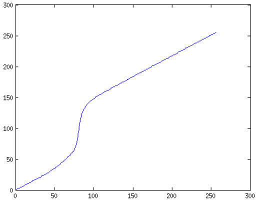


hist. ecualizado

Modificación de histogramas



$\widetilde{\mathbf{h}}$, $\lambda = 2$



$\widetilde{\mathbf{h}}$ acumulado

imagen ecualizada

Condición de suavidad: el histograma modificado tiende a tener menos picos, la diferencia $h(i) - h(i-1)$ puede ser usada para medir suavidad.

Consideremos la matriz $D \in \mathbb{R}^{255\times256}$ de diferencias bi-diagonal

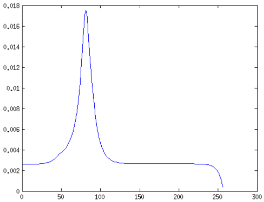
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

la minimización tiene un término que penaliza la suavidad:

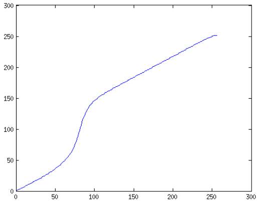
$$\min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{h} - \mathbf{h_o}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{h} - \mathbf{u}\|_2^2 + \gamma \|D\mathbf{h}\|_2^2$$

$$\widetilde{\mathbf{h}} = ((1+\lambda)\mathbb{I} + \gamma D^t D)^{-1}(\mathbf{h_o} + \lambda \mathbf{u})$$

Modificación de histogramas



$\widetilde{\mathbf{h}}$, $\lambda = 2$, $\gamma = 100$



$\widetilde{\mathbf{h}}$ acumulado

imagen ecualizada suave

Comparación de imágenes ecualizadas

imagen original

ecualizada $\lambda = 2$

ecualizada $\lambda = 2$, $\gamma = 100$