

# MATEMÁTICA DISCRETA

---

Ano Letivo 2021/22      (Versão: 24 de Maio de 2022)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro  
<https://elearning.ua.pt/>

# **CAPÍTULO I**

## **A LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM E DEMONSTRAÇÃO AUTOMÁTICA**

1. Introdução
2. Revisão de lógica proposicional
3. A sintaxe
4. A semântica
5. Formas normais de fórmulas
6. Unificação
7. O método de resolução

# **1. INTRODUÇÃO**

### Questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas **consequências** destas afirmações.

# O QUE VAMOS TRATAR?

## Questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas **consequências** destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa **consequência**? Como justificar?

## Questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas **consequências** destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa **consequência**? Como justificar?
- Consegue-se provar qualquer consequência, a partir de um conjunto de afirmações?

# O QUE VAMOS TRATAR?

## Questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas **consequências** destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa **consequência**? Como justificar?
- Consegue-se provar qualquer consequência, a partir de um conjunto de afirmações?
- O que é, em rigor, uma **prova**?



# O QUE VAMOS TRATAR?

## Questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas **consequências** destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa **consequência**? Como justificar?
- Consegue-se provar qualquer consequência, a partir de um conjunto de afirmações?
- O que é, em rigor, uma **prova**?

## Para dar esta resposta teremos que especificar:

- o que é, em rigor, uma **afirmação/asserção**.

# O QUE VAMOS TRATAR?

## Questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas **consequências** destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa **consequência**? Como justificar?
- Consegue-se provar qualquer consequência, a partir de um conjunto de afirmações?
- O que é, em rigor, uma **prova**?

## Para dar esta resposta teremos que especificar:

- o que é, em rigor, uma **afirmação/asserção**.
- o que é, em rigor, uma **linguagem formal**.

## **APRENDER (UM)A LÓGICA É COMO APRENDER UM IDIOMA ...**

**Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...**

# **APRENDER (UM)A LÓGICA É COMO APRENDER UM IDIOMA ...**

## **Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...**

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.

# APRENDER (UM)A LÓGICA É COMO APRENDER UM IDIOMA ...

## Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.

- «A, B, C, D, E,..., !,?,...»
- « $\wedge$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$ ,  $\forall$ ,  $\cos$ ,  $x$ ,  $y$ , ...»

# APRENDER (UM)A LÓGICA É COMO APRENDER UM IDIOMA ...

## Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.
  - «A, B, C, D, E,..., !,?,...»
  - « $\wedge$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$ ,  $\forall$ , cos, x, y, ...»
2. Aprender ortografia e gramática. Ou seja, que palavras (isto é: sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.

# APRENDER (UM)A LÓGICA É COMO APRENDER UM IDIOMA ...

## Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.
  - «A, B, C, D, E,..., !,?,...»
  - « $\wedge$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$ ,  $\forall$ , cos, x, y, ...»
2. Aprender ortografia e gramática. Ou seja, que palavras (isto é: sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.
  - «Futebol» conta mas «hhcdqwldb» não.
  - «Eu sou do Porto» está ótimo mas «Porto sou Eu do» não.
  - « $\forall x \exists y x < y$ » está bem mas « $xy \rightarrow \forall$ » não.

# APRENDER (UM)A LÓGICA É COMO APRENDER UM IDIOMA ...

## Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.
  - «A, B, C, D, E,..., !,?,...»
  - « $\wedge$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$ ,  $\forall$ ,  $\cos$ ,  $x$ ,  $y$ , ...»
2. Aprender ortografia e gramática. Ou seja, que palavras (isto é: sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.
  - «Futebol» conta mas «hhcdqwldb» não.
  - «Eu sou do Porto» está ótimo mas «Porto sou Eu do» não.
  - « $\forall x \exists y x < y$ » está bem mas « $xy \rightarrow \forall$ » não.
3. Aprender o **significado das palavras** (isto é, a sua interpretação).



# APRENDER (UM)A LÓGICA É COMO APRENDER UM IDIOMA ...

## Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.
  - «A, B, C, D, E,..., !,?,...»
  - « $\wedge$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$ ,  $\forall$ , cos, x, y, ...»
2. Aprender ortografia e gramática. Ou seja, que palavras (isto é: sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.
  - «Futebol» conta mas «hhcdqwldb» não.
  - «Eu sou do Porto» está ótimo mas «Porto sou Eu do» não.
  - « $\forall x \exists y x < y$ » está bem mas « $xy \rightarrow \forall$ » não.
3. Aprender o **significado das palavras** (isto é, a sua interpretação).

Por exemplo, a palavra «esquilo» significa



## Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

## Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

## Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

## Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

## Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓

## Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

## Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓
- Se  $3 + 3 = 0$  e o céu é azul, então o céu é azul. ✓

## Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

## Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓
- Se  $3 + 3 = 0$  e o céu é azul, então o céu é azul. ✓
- Se o céu é azul e  $3 + 3 = 0$ , então  $3 + 3 = 0$ . ✓

## Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

## Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓
- Se  $3 + 3 = 0$  e o céu é azul, então o céu é azul. ✓
- Se o céu é azul e  $3 + 3 = 0$ , então  $3 + 3 = 0$ . ✓
- ...

Mas não temos todo o dia!!

## Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

## Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓
- Se  $3 + 3 = 0$  e o céu é azul, então o céu é azul. ✓
- Se o céu é azul e  $3 + 3 = 0$ , então  $3 + 3 = 0$ . ✓
- ...

Mas não temos todo o dia!! Felizmente, basta considerar os casos « $p$  representa algo verdadeiro», « $p$  representa algo falso», « $q$  representa algo verdadeiro» e « $q$  representa algo falso».



## Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

## Demonstração.

Verificamos:

$p$	$q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1



## Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

## Demonstração.

Suponha  $p \wedge q$ . Logo  $q$ . Então, concluímos  $(p \wedge q) \rightarrow q$ .



# SOBRE O QUE É A LÓGICA PROPOSICIONAL?

## Proposições

Na lógica proposicional estudam-se afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos – as chamadas **proposições**.

# SOBRE O QUE É A LÓGICA PROPOSICIONAL?

## Proposições

Na lógica proposicional estudam-se afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos – as chamadas **proposições**.

## Exemplos

- «O Porto é campeão» é uma proposição.
- « $3 < (2 + 7)$ » é uma proposição.
- « $x = 6$ » não é uma proposição.
- «O Porto é campeão ou não» é uma proposição.
- «Se está chover, então está chover» é uma proposição.

# SOBRE O QUE É A LÓGICA PROPOSICIONAL?

## Proposições

Na lógica proposicional estudam-se afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos – as chamadas **proposições**.

## Exemplos

- «O Porto é campeão» é uma proposição.
- « $3 < (2 + 7)$ » é uma proposição.
- « $x = 6$ » não é uma proposição.
- «O Porto é campeão ou não» é uma proposição.
- «Se está chover, então está chover» é uma proposição.

## Nota

No que se segue, denotamos proposições por  $p, q, r, \dots$  ou por  $\varphi, \psi, \theta \dots$  e não discutimos mais a questão o que é uma proposição.

# SOBRE O QUE É A LÓGICA PROPOSICIONAL?

## Nota

Observamos que certos conetivos ocorrem frequentemente:

- «... e ...»,
- «... ou ...»,
- «não ...»,
- «Se ... então ...».

# SOBRE O QUE É A LÓGICA PROPOSICIONAL?

## Nota

Observamos que certos conetivos ocorrem frequentemente:

- «... e ...»,
- «... ou ...»,
- «não ...»,
- «Se ... então ...».

Assim, uma proposição pode ser

1. **atômica** (o valor de verdade é dado pelo contexto ou escolhido livremente) ou

# SOBRE O QUE É A LÓGICA PROPOSICIONAL?

## Nota

Observamos que certos conectivos ocorrem frequentemente:

- «... e ...»,
- «... ou ...»,
- «não ...»,
- «Se ... então ...».

Assim, uma proposição pode ser

1. **atômica** (o valor de verdade é dado pelo contexto ou escolhido livremente) ou
2. **composta** por proposições e pelos conectivos acima, cujo valor de verdade depende do valor de verdade das componentes.



### Sobre o «ou»

- Na matemática e na lógica formal, a disjunção «... ou ...» é apenas falsa se ambas as componentes são falsas; ou seja, é verdadeira quando pelo menos uma das componentes é verdadeira.

## Sobre o «ou»

- Na matemática e na lógica formal, a disjunção «... ou ...» é apenas falsa se ambas as componentes são falsas; ou seja, é verdadeira quando pelo menos uma das componentes é verdadeira.
- No entanto, na linguagem comum o significado de «... ou ...» não é tão *determinado*: pode ter o significado **inclusivo** acima, também pode ter o significado **exclusivo** onde «... ou ...» é verdadeira quando exatamente uma das componentes é verdadeira.

## Sobre o «ou»

- Na matemática e na lógica formal, a disjunção «... ou ...» é apenas falsa se ambas as componentes são falsas; ou seja, é verdadeira quando pelo menos uma das componentes é verdadeira.
- No entanto, na linguagem comum o significado de «... ou ...» não é tão *determinado*: pode ter o significado **inclusivo** acima, também pode ter o significado **exclusivo** onde «... ou ...» é verdadeira quando exatamente uma das componentes é verdadeira.
- Para evitar a ambiguidade, na linguagem comum acrescentam-se as vezes

«... mas não ambos», «... ou ambos», «... e/ou ...», ...

## Sobre o «ou»

- Na matemática e na lógica formal, a disjunção «... ou ...» é apenas falsa se ambas as componentes são falsas; ou seja, é verdadeira quando pelo menos uma das componentes é verdadeira.
- No entanto, na linguagem comum o significado de «... ou ...» não é tão *determinado*: pode ter o significado **inclusivo** acima, também pode ter o significado **exclusivo** onde «... ou ...» é verdadeira quando exatamente uma das componentes é verdadeira.
- Para evitar a ambiguidade, na linguagem comum acrescentam-se as vezes  
«... mas não ambos», «... ou ambos», «... e/ou ...», ...
- Neste curso, como é habitual na matemática, estabelecemos que «ou» tem o significado **inclusivo**.

### **Eliminar conetivos**

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

## Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».

## Exemplos

## Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».

## Exemplos

O João está na aula mas a Ana está na praia.

## Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».

## Exemplos

O João está na aula e a Ana está na praia.



## Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».
- «... só se ...» pode-se substituir por «... implica ...».

## Exemplos

## Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».
- «... só se ...» pode-se substituir por «... implica ...».

## Exemplos

Compro um Ferrari só se for rico.

## Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».
- «... só se ...» pode-se substituir por «... implica ...».

## Exemplos

Se compro um Ferrari, então sou rico.

## Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».
- «... só se ...» pode-se substituir por «... implica ...».
- «... exceto se ...» pode-se substituir por «... ou ...».

## Exemplos

## Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».
- «... só se ...» pode-se substituir por «... implica ...».
- «... exceto se ...» pode-se substituir por «... ou ...».

## Exemplos

Vendo a casa exceto se ligares

## Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».
- «... só se ...» pode-se substituir por «... implica ...».
- «... exceto se ...» pode-se substituir por «... ou ...».

## Exemplos

Ligas ou vendo a casa.

## Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».
- «... só se ...» pode-se substituir por «... implica ...».
- «... exceto se ...» pode-se substituir por «... ou ...».

Portanto, «exceto se» tem a mesma ambiguidade como o «ou», e estabelecemos que neste semestre tem o significado **inclusivo**.

## Exemplos

Ligas ou vendo a casa.

## Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».
- «... só se ...» pode-se substituir por «... implica ...».
- «... exceto se ...» pode-se substituir por «... ou ...».

Portanto, «exceto se» tem a mesma ambiguidade como o «ou», e estabelecemos que neste semestre tem o significado **inclusivo**.

## Exemplos

**Evitar a ambiguidade:** Vendo a casa, exceto se ligares a dizer o contrário.



## **2. REVISÃO DE LÓGICA PROPOSICIONAL**

## Fórmulas (bem formadas – «fbf»)

Consideremos

- uma coleção de **variáveis** (que representam as proposições),
- os símbolos  $\perp$  e  $\top$  e os **conetivos**

Negação:  $\neg$  (não ...),

Conjunção:  $\wedge$  (... e ...),

Disjunção:  $\vee$  (... ou ...),

Implicação:  $\rightarrow$  (se ..., então ...),

Equivalência:  $\leftrightarrow$  (... se e somente se ...).

## Fórmulas (bem formadas – «fbf»)

Consideremos

- uma coleção de **variáveis** (que representam as proposições),
- os símbolos  $\perp$  e  $\top$  e os **conetivos**

Negação:  $\neg$  (não ...),

Conjunção:  $\wedge$  (... e ...),

Disjunção:  $\vee$  (... ou ...),

Implicação:  $\rightarrow$  (se ..., então ...),

Equivalência:  $\leftrightarrow$  (... se e somente se ...).

- Cada variável é uma fórmula, e  $\perp$  and  $\top$  são fórmulas.

## Fórmulas (bem formadas – «fbf»)

Consideremos

- uma coleção de **variáveis** (que representam as proposições),
- os símbolos  $\perp$  e  $\top$  e os **conetivos**

Negação:  $\neg$  (não ...),

Conjunção:  $\wedge$  (... e ...),

Disjunção:  $\vee$  (... ou ...),

Implicação:  $\rightarrow$  (se ..., então ...),

Equivalência:  $\leftrightarrow$  (... se e somente se ...).

- Cada variável é uma fórmula, e  $\perp$  and  $\top$  são fórmulas.
- Se  $\varphi$  e  $\psi$  são fórmulas, então as expressões

$$(\neg\psi), \quad (\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

são fórmulas.

## Nota

Para tornar a notação menos pesada, suprimem-se os parêntesis mais externos. Por exemplo, escreve-se

$$\varphi \vee (\psi \rightarrow \gamma) \quad \text{em lugar de} \quad (\varphi \vee (\psi \rightarrow \gamma)).$$

## Nota

Para tornar a notação menos pesada, suprimem-se os parêntesis mais externos. Por exemplo, escreve-se

$$\varphi \vee (\psi \rightarrow \gamma) \quad \text{em lugar de} \quad (\varphi \vee (\psi \rightarrow \gamma)).$$

## Nota

Entende-se que « $\neg$ » tem uma precedência inferior aos outros conetivos. Por exemplo, escreve-se

$$\neg \varphi \vee \psi \quad \text{em lugar de} \quad (\neg \varphi) \vee \psi.$$

## Exemplos (de fórmulas)

Sejam  $p, q, r$  variáveis:

- $\top, \perp, p, q, r, \dots$

## Exemplos (de fórmulas)

Sejam  $p, q, r$  variáveis:

- $\top, \perp, p, q, r, \dots$
- $(p \vee q)$  (escrevemos apenas  $p \vee q$ ),



## Exemplos (de fórmulas)

Sejam  $p, q, r$  variáveis:

- $\top, \perp, p, q, r, \dots$
- $(p \vee q)$  (escrevemos apenas  $p \vee q$ ),  $p \rightarrow \perp$ ,  $\neg \top$ ,  $\dots$

## Exemplos (de fórmulas)

Sejam  $p, q, r$  variáveis:

- $\top, \perp, p, q, r, \dots$
- $(p \vee q)$  (escrevemos apenas  $p \vee q$ ),  $p \rightarrow \perp$ ,  $\neg \top$ , ...
- $(p \wedge q) \rightarrow q$ ,  $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ , ...

## Exemplos (de fórmulas)

Sejam  $p, q, r$  variáveis:

- $\top, \perp, p, q, r, \dots$
- $(p \vee q)$  (escrevemos apenas  $p \vee q$ ),  $p \rightarrow \perp$ ,  $\neg \top$ , ...
- $(p \wedge q) \rightarrow q$ ,  $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ , ...
- $(p \wedge q) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow q)$ , ...

## Exemplos (de fórmulas)

Sejam  $p, q, r$  variáveis:

- $\top, \perp, p, q, r, \dots$
- $(p \vee q)$  (escrevemos apenas  $p \vee q$ ),  $p \rightarrow \perp$ ,  $\neg \top$ , ...
- $(p \wedge q) \rightarrow q$ ,  $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ , ...
- $(p \wedge q) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow q)$ , ...

## Exemplos (não são fórmulas)

Sejam  $p, q, r$  variáveis:

$(\top \perp)$ ,  $(p \ q \ r)$ ,  $(\top \rightarrow)$ ,  $(p \rightarrow \wedge)$ , ...

## Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada **variável** um **valor de verdade** (ou seja, um valor em  $\{0, 1\}$ ), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

## Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada **variável** um **valor de verdade** (ou seja, um valor em  $\{0, 1\}$ ), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$  interpreta-se por **0** (falso)

## Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada **variável** um **valor de verdade** (ou seja, um valor em  $\{0, 1\}$ ), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$  interpreta-se por **0** (falso)
- $\top$  por **1** (verdadeiro)

## Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada **variável** um **valor de verdade** (ou seja, um valor em  $\{0, 1\}$ ), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$  interpreta-se por **0** (falso)
- $\top$  por **1** (verdadeiro)
- os **conectivos** interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:



## Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada **variável** um **valor de verdade** (ou seja, um valor em  $\{0, 1\}$ ), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$  interpreta-se por **0** (falso)
- $\top$  por **1** (verdadeiro)
- os **conectivos** interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

$\varphi$	$\neg\varphi$
0	1
1	0

## Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada **variável** um **valor de verdade** (ou seja, um valor em  $\{0, 1\}$ ), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$  interpreta-se por **0** (falso)
- $\top$  por **1** (verdadeiro)
- os **conectivos** interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

$\varphi$	$\neg\varphi$
0	1
1	0

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

## Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada **variável** um **valor de verdade** (ou seja, um valor em  $\{0, 1\}$ ), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$  interpreta-se por **0** (falso)
- $\top$  por **1** (verdadeiro)
- os **conectivos** interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

$\varphi$	$\neg\varphi$
0	1
1	0

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

## Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada **variável** um **valor de verdade** (ou seja, um valor em  $\{0, 1\}$ ), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$  interpreta-se por **0** (falso)
- $\top$  por **1** (verdadeiro)
- os **conectivos** interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

## Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada **variável** um **valor de verdade** (ou seja, um valor em  $\{0, 1\}$ ), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$  interpreta-se por **0** (falso)
- $\top$  por **1** (verdadeiro)
- os **conectivos** interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

### Exemplo

A interpretação da fórmula  $(p \vee q) \rightarrow q$

## Exemplo

A interpretação da fórmula  $(p \vee q) \rightarrow q$

- para a interpretação das variáveis  $p \mapsto 0$  e  $q \mapsto 0$ :

$p$	$q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow q$
0	0	0	1

## Exemplo

A interpretação da fórmula  $(p \vee q) \rightarrow q$

- para a interpretação das variáveis  $p \mapsto 0$  e  $q \mapsto 0$ :

$p$	$q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow q$
0	0	0	1

- para a interpretação das variáveis  $p \mapsto 1$  e  $q \mapsto 0$ :

$p$	$q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow q$
1	0	1	0



# FÓRMULAS VÁLIDAS E CONSISTENTES

## Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para **cada** a interpretação.

# FÓRMULAS VÁLIDAS E CONSISTENTES

## Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para **cada** a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para **alguma** interpretação.

# FÓRMULAS VÁLIDAS E CONSISTENTES

## Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para **cada** a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para **alguma** interpretação.

## Exemplo

A fórmula  $(p \wedge q) \rightarrow q$  é uma tautologia.

## Demonstração.

$p$	$q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1



# FÓRMULAS VÁLIDAS E CONSISTENTES

## Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para **cada** a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para **alguma** interpretação.

## Exemplo

A fórmula  $(p \wedge q) \rightarrow q$  é uma tautologia.

## Nota

Uma fórmula é **inconsistente** (ou uma **contradição**) quando não é consistente; isto é, se tem valor lógico 0 para cada a interpretação.

# FÓRMULAS EQUIVALENTES

## Definição

As fórmulas  $\varphi$  e  $\psi$  dizem-se **equivalentes** (em símbolos:  $\varphi \equiv \psi$ ) quando a fórmula  $\varphi \leftrightarrow \psi$  é uma tautologia.

# FÓRMULAS EQUIVALENTES

## Definição

As fórmulas  $\varphi$  e  $\psi$  dizem-se **equivalentes** (em símbolos:  $\varphi \equiv \psi$ ) quando a fórmula  $\varphi \leftrightarrow \psi$  é uma tautologia.

## Exemplo

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

## Demonstração.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1



# FÓRMULAS EQUIVALENTES

## Definição

As fórmulas  $\varphi$  e  $\psi$  dizem-se **equivalentes** (em símbolos:  $\varphi \equiv \psi$ ) quando a fórmula  $\varphi \leftrightarrow \psi$  é uma tautologia.

## Exemplo

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

## Exemplo

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

Verificam-se as equivalências

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$$

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$$

$$(p \wedge p) \equiv p$$

$$(p \vee p) \equiv p$$

$$(p \wedge \top) \equiv p$$

$$(p \vee \perp) \equiv p$$

$$(p \wedge \perp) \equiv \perp$$

$$(p \vee \top) \equiv \top$$

bem como as leis de distributividade

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

as leis de De Morgan

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q),$$

e a lei da contraposição e da dupla negação

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

$$\neg\neg p \equiv p.$$



# FÓRMULAS NA FORMA NORMAL

## Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.

## Exemplos

Consideremos as variáveis  $p, q, r$ .

- $p, q, \neg r$  são literais.

# FÓRMULAS NA FORMA NORMAL

## Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.

## Exemplos

Consideremos as variáveis  $p, q, r$ .

- $p, q, \neg r$  são literais.
- $\neg\neg q, p \rightarrow q$  não são literais.

# FÓRMULAS NA FORMA NORMAL

## Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula  $\varphi$  diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada  $\varphi_i$  é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \quad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais  $L_i$  (dizemos que  $\varphi_i$  é uma **cláusula**).

## Exemplos

Consideremos as variáveis  $p, q, r$ .

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r)$  é uma **CNF** (conjuntiva).

# FÓRMULAS NA FORMA NORMAL

## Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula  $\varphi$  diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada  $\varphi_i$  é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \quad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais  $L_i$  (dizemos que  $\varphi_i$  é uma **cláusula**).

## Exemplos

Consideremos as variáveis  $p, q, r$ .

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r)$  é uma **CNF** (conjuntiva).
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg r)$  é uma **DNF** (disjuntiva).

# FÓRMULAS NA FORMA NORMAL

## Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula  $\varphi$  diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada  $\varphi_i$  é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \quad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais  $L_i$  (dizemos que  $\varphi_i$  é uma **cláusula**).

## Exemplos

Consideremos as variáveis  $p, q, r$ .

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r)$  é uma **CNF** (conjuntiva).
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg r)$  é uma **DNF** (disjuntiva).
- $p \wedge q \wedge r$  é uma **CNF** e uma **DNF**.

# FÓRMULAS NA FORMA NORMAL

## Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula  $\varphi$  diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada  $\varphi_i$  é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \quad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais  $L_i$  (dizemos que  $\varphi_i$  é uma **cláusula**).

## Exemplos

Consideremos as variáveis  $p, q, r$ .

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r)$  é uma **CNF** (conjuntiva).
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg r)$  é uma **DNF** (disjuntiva).
- $p \wedge q \wedge r$  é uma **CNF** e uma **DNF**.
- $(p \wedge (q \vee r)) \vee q$  nem é uma **CNF** nem uma **DNF**.

# FÓRMULAS NA FORMA NORMAL

## Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula  $\varphi$  diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada  $\varphi_i$  é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \quad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais  $L_i$  (dizemos que  $\varphi_i$  é uma **cláusula**).

## Nota

A disjunção «vazia» (ou seja,  $n = 0$ ) é a fórmula  $\perp$ , e a conjunção «vazia» é a fórmula  $\top$ .

## OBTER A FORMA NORMAL

### Teorema

*Cada fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva (disjuntiva).*



# OBTER A FORMA NORMAL

## Teorema

*Cada fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva (disjuntiva).*

## Como obter?

Utilizar

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi, \quad \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

## Teorema

*Cada fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva (disjuntiva).*

## Como obter?

Utilizar

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi, \quad \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

e as leis de De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi, \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$$

# OBTER A FORMA NORMAL

## Teorema

*Cada fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva (disjuntiva).*

## Como obter?

Utilizar

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi, \quad \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

e as leis de De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi, \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$$

e as leis de distributividade

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge (\psi \vee \theta)) &\equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta), \\ (\varphi \vee (\psi \wedge \theta)) &\equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta).\end{aligned}$$

# CONJUNTOS CONSISTENTES DE FÓRMULAS

## Definição

Um conjunto  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  de fórmulas diz-se **consistente** quando existe uma interpretação que avalia todas as fórmulas de  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  em 1.

# CONJUNTOS CONSISTENTES DE FÓRMULAS

## Definição

Um conjunto  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  de fórmulas diz-se **consistente** quando existe uma interpretação que avalia todas as fórmulas de  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  em 1.

## Exemplo

O conjunto

$$\{\neg p, p \rightarrow q, q\}$$

é consistente:

# CONJUNTOS CONSISTENTES DE FÓRMULAS

## Definição

Um conjunto  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  de fórmulas diz-se **consistente** quando existe uma interpretação que avalia todas as fórmulas de  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  em 1.

## Exemplo

O conjunto

$$\{\neg p, p \rightarrow q, q\}$$

é consistente: podemos escolher a interpretação

$$p \longmapsto 0, \quad q \longmapsto 1.$$

# SUDOKU

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os  $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  
a proposição atômica  $P_{i,j,k}$  representa a  
afirmação

«a posição  $(i, j)$  contém o número  $k$ ».



Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os  $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  
a proposição atômica  $P_{i,j,k}$  representa a  
afirmação

«a posição  $(i, j)$  contém o número  $k$ ».

- Portanto, de acordo com o quadro acima, as fórmulas

$$P_{1,2,2}, \quad P_{1,3,6}, \quad P_{2,7,1}, \quad \dots, \quad P_{9,8,4}$$

devem ser válidas.

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os  $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  
a proposição atômica  $P_{i,j,k}$  representa a  
afirmação

«a posição  $(i, j)$  contém o número  $k$ ».

- Cada número aparece em cada linha:

$$F_1 =$$

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os  $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  
a proposição atômica  $P_{i,j,k}$  representa a  
afirmação

«a posição  $(i, j)$  contém o número  $k$ ».

- Cada número aparece em cada linha:

$$F_1 = (P_{1,1,1} \vee P_{1,2,1} \vee \dots \vee P_{1,9,1}) \wedge (P_{1,1,2} \vee P_{1,2,2} \vee \dots) \wedge \dots$$

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os  $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  
a proposição atômica  $P_{i,j,k}$  representa a  
afirmação

«a posição  $(i, j)$  contém o número  $k$ ».

- Cada número aparece em cada linha:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= (P_{1,1,1} \vee P_{1,2,1} \vee \dots \vee P_{1,9,1}) \wedge (P_{1,1,2} \vee P_{1,2,2} \vee \dots) \wedge \dots \\
 &= \bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{k=1}^9 \bigvee_{j=1}^9 P_{i,j,k}.
 \end{aligned}$$

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os  $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  
a proposição atômica  $P_{i,j,k}$  representa a  
afirmação

«a posição  $(i, j)$  contém o número  $k$ ».

- Cada número aparece em cada coluna:

$$F_2 = \bigwedge_{j=1}^9 \bigwedge_{k=1}^9 \bigvee_{i=1}^9 P_{i,j,k}.$$

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os  $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  
a proposição atômica  $P_{i,j,k}$  representa a  
afirmação

«a posição  $(i, j)$  contém o número  $k$ ».

- Cada número aparece em cada bloco  $3 \times 3$ :

$$F_3 = \bigwedge_{k=1}^9 \bigwedge_{u=0}^2 \bigwedge_{v=0}^2 \bigvee_{i=1}^3 \bigvee_{j=1}^3 P_{3u+i, 3v+j, k}.$$

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os  $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  
a proposição atômica  $P_{i,j,k}$  representa a  
afirmação

«a posição  $(i, j)$  contém o número  $k$ ».

- Nenhuma posição tem dois números:

$$\begin{aligned}
 F_4 &= \neg(P_{1,1,1} \wedge P_{1,1,2}) \wedge \neg(P_{1,1,1} \wedge P_{1,1,3}) \wedge \dots \\
 &= \bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{j=1}^9 \bigwedge_{1 \leq k < k' \leq 9} \neg(P_{i,j,k} \wedge P_{i,j,k'}).
 \end{aligned}$$

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os  $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  
a proposição atômica  $P_{i,j,k}$  representa a  
afirmação

«a posição  $(i, j)$  contém o número  $k$ ».

Resolver o jogo significa de facto verificar que o conjunto das fórmulas

$$\{P_{1,2,2}, P_{1,3,6}, P_{2,7,1}, \dots, P_{9,8,4}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

é consistente.



Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os  $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  
a proposição atômica  $P_{i,j,k}$  representa a  
afirmação

«a posição  $(i, j)$  contém o número  $k$ ».

Resolver o jogo significa de facto verificar que o conjunto das fórmulas

$$\{P_{1,2,2}, P_{1,3,6}, P_{2,7,1}, \dots, P_{9,8,4}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

é consistente. O número de variáveis é  $9^3 = 729$ , portanto, a tabela de verdade correspondente tem  $2^{729} > 10^{200}$  linhas ...

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os  $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$ ,  
a proposição atômica  $P_{i,j,k}$  representa a  
afirmação

«a posição  $(i, j)$  contém o número  $k$ ».

Resolver o jogo significa de facto verificar que o conjunto das fórmulas

$$\{P_{1,2,2}, P_{1,3,6}, P_{2,7,1}, \dots, P_{9,8,4}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

é consistente. O número de variáveis é  $9^3 = 729$ , portanto, a tabela de verdade correspondente tem  $2^{729} > 10^{200}$  linhas ...

No entanto, podem utilizar um SAT-solver como [www.minisat.se](http://www.minisat.se).

# CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA

## Definição

A fórmula  $\psi$  diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  quando, para toda a interpretação  $I$ ,

se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  têm o valor 1 em  $I$ , então  $\psi$  tem o valor 1 em  $I$ .

# CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA

## Definição

A fórmula  $\psi$  diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  quando, para toda a interpretação  $I$ ,

se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  têm o valor 1 em  $I$ , então  $\psi$  tem o valor 1 em  $I$ .

Neste caso escrevemos:  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ .

# CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA

## Definição

A fórmula  $\psi$  diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  quando, para toda a interpretação  $I$ ,

se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  têm o valor 1 em  $I$ , então  $\psi$  tem o valor 1 em  $I$ .

Neste caso escrevemos:  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ .

## Exemplo

Verificamos:  $p \vee q, p \rightarrow q \models q \vee \neg p$ .

# CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA

## Definição

A fórmula  $\psi$  diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  quando, para toda a interpretação  $I$ ,

se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  têm o valor 1 em  $I$ , então  $\psi$  tem o valor 1 em  $I$ .

Neste caso escrevemos:  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ .

## Exemplo

Verificamos:  $p \vee q, p \rightarrow q \models q \vee \neg p$ .

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$q \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

# CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA

## Definição

A fórmula  $\psi$  diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  quando, para toda a interpretação  $I$ ,

se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  têm o valor 1 em  $I$ , então  $\psi$  tem o valor 1 em  $I$ .

Neste caso escrevemos:  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ .

## Exemplo

Verificamos:  $p \vee q, p \rightarrow q \models q \vee \neg p$ .

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$q \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

# CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA

## Definição

A fórmula  $\psi$  diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  quando, para toda a interpretação  $I$ ,

se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  têm o valor 1 em  $I$ , então  $\psi$  tem o valor 1 em  $I$ .

Neste caso escrevemos:  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ .

## Exemplo

Verificamos:  $p \vee q, p \rightarrow q \models q \vee \neg p$ .

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$q \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1



# CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA

## Definição

A fórmula  $\psi$  diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  quando, para toda a interpretação  $I$ ,

se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  têm o valor 1 em  $I$ , então  $\psi$  tem o valor 1 em  $I$ .

Neste caso escrevemos:  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ .

## Exemplo

Verificamos:  $p \vee q, p \rightarrow q \models q \vee \neg p$ .

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$q \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

## Nota

$\dots, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \models \psi$  se e só se  $\dots, \varphi_1, \varphi_2 \models \psi$ .

# COMO VERIFICAR CONSEQUÊNCIAS?

## Exemplo

Consideremos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \models \varphi \rightarrow \theta$

# COMO VERIFICAR CONSEQUÊNCIAS?

## Exemplo

Consideremos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \models \varphi \rightarrow \theta$

Podemos validar esta consequência verificando **todas** as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade).

# COMO VERIFICAR CONSEQUÊNCIAS?

## Exemplo

Consideremos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \models \varphi \rightarrow \theta$

Podemos validar esta consequência verificando **todas** as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade). No entanto, como veremos, na lógica de primeira ordem não é possível verificar todas as interpretações pois em geral há uma infinidade ...

# COMO VERIFICAR CONSEQUÊNCIAS?

## Exemplo

Consideremos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \models \varphi \rightarrow \theta$

Podemos validar esta consequência verificando **todas** as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade). No entanto, como veremos, na lógica de primeira ordem não é possível verificar todas as interpretações pois em geral há uma infinidade ...

Em alternativa, podemos fazer uma **prova** (= argumentação), ou seja, escrevemos uma sequência de fórmulas

$$\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta, \quad \dots \quad \text{algo esperto}^a \quad \dots \quad \varphi \rightarrow \theta.$$

---

<sup>a</sup>Justificado pelo anterior utilizando certas regras (**as regras de inferência**).

# COMO VERIFICAR CONSEQUÊNCIAS?

## Exemplo

Consideremos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \models \varphi \rightarrow \theta$

Podemos validar esta consequência verificando **todas** as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade). No entanto, como veremos, na lógica de primeira ordem não é possível verificar todas as interpretações pois em geral há uma infinidade ...

Em alternativa, podemos fazer uma **prova** (= argumentação), ou seja, escrevemos uma sequência de fórmulas

$$\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta, \dots \text{ algo esperto}^a \dots \varphi \rightarrow \theta.$$

---

<sup>a</sup>Justificado pelo anterior utilizando certas regras (**as regras de inferência**).

## Nota

Se existe uma prova de  $\psi$  a partir de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , escreve-se

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi.$$

# O QUE CONTA COMO UMA PROVA? (INFORMAÇÃO COMPLEMENTAR)

## As regras de inferência (lógica proposicional)

$$\begin{array}{c} \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge \mathcal{I} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge \mathcal{E}_1 \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge \mathcal{E}_2 \\[2em] \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee \mathcal{I}_1 \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee \mathcal{I}_2 \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{|c|} \hline \varphi \\ \vdots \\ \theta \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \psi \\ \vdots \\ \theta \end{array}}{\theta} \vee \mathcal{E} \\[2em] \frac{\begin{array}{|c|} \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \mathcal{I} \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow \mathcal{E} \qquad \frac{\perp}{\varphi} \perp \mathcal{E} \qquad \frac{}{\varphi \vee \neg \varphi} \text{EM} \end{array}$$

$\mathcal{E}$  – Eliminação,  $\mathcal{I}$  – Introdução

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

### Exemplo

Verificamos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \vdash \varphi \rightarrow \theta$ .

---

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.



# COMO FUNCIONA? (INFORMAÇÃO COMPLEMENTAR)

## Exemplo

Verificamos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \vdash \varphi \rightarrow \theta$ .

Formulês:

1	$\varphi \rightarrow \psi$	
2	$\psi \rightarrow \theta$	
<hr/>		
3	$\varphi$	H
<hr/>		
4	$\psi$	$\rightarrow E, 1, 3$
5	$\theta$	$\rightarrow E, 2, 4$
6	$\varphi \rightarrow \theta$	$\rightarrow I, 3, 5$

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

# COMO FUNCIONA? (INFORMAÇÃO COMPLEMENTAR)

## Exemplo

Verificamos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \vdash \varphi \rightarrow \theta$ .

Formulês:

1	$\varphi \rightarrow \psi$	
2	$\psi \rightarrow \theta$	
<hr/>		
3	$\varphi$	H
<hr/>		
4	$\psi$	$\rightarrow E, 1, 3$
5	$\theta$	$\rightarrow E, 2, 4$
6	$\varphi \rightarrow \theta$	$\rightarrow I, 3, 5$

Português:

Por hipótese,  $\varphi \rightarrow \psi$  e  $\psi \rightarrow \theta$ .

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

# COMO FUNCIONA? (INFORMAÇÃO COMPLEMENTAR)

## Exemplo

Verificamos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \vdash \varphi \rightarrow \theta$ .

Formulês:

1	$\varphi \rightarrow \psi$	
2	$\psi \rightarrow \theta$	
3	$\varphi$	H
4	$\psi$	$\rightarrow E, 1, 3$
5	$\theta$	$\rightarrow E, 2, 4$
6	$\varphi \rightarrow \theta$	$\rightarrow I, 3, 5$

Português:

Por hipótese,  $\varphi \rightarrow \psi$  e  $\psi \rightarrow \theta$ .

Com o objetivo de provar  $\varphi \rightarrow \theta$ , suponha-se  $\varphi$  (temporariamente!!).

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

# COMO FUNCIONA? (INFORMAÇÃO COMPLEMENTAR)

## Exemplo

Verificamos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \vdash \varphi \rightarrow \theta$ .

Formulês:

1	$\varphi \rightarrow \psi$	
2	$\psi \rightarrow \theta$	
3	$\varphi$	H
4	$\psi$	$\rightarrow E, 1, 3$
5	$\theta$	$\rightarrow E, 2, 4$
6	$\varphi \rightarrow \theta$	$\rightarrow I, 3, 5$

Português:

Por hipótese,  $\varphi \rightarrow \psi$  e  $\psi \rightarrow \theta$ .

Com o objetivo de provar  $\varphi \rightarrow \theta$ , suponha-se  $\varphi$  (temporariamente!!). Como  $\varphi \rightarrow \psi$ , conclua-se  $\psi$ ;

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

# COMO FUNCIONA? (INFORMAÇÃO COMPLEMENTAR)

## Exemplo

Verificamos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \vdash \varphi \rightarrow \theta$ .

Formulês:

1	$\varphi \rightarrow \psi$	
2	$\psi \rightarrow \theta$	
3	$\varphi$	H
4	$\psi$	$\rightarrow E, 1, 3$
5	$\theta$	$\rightarrow E, 2, 4$
6	$\varphi \rightarrow \theta$	$\rightarrow I, 3, 5$

Português:

Por hipótese,  $\varphi \rightarrow \psi$  e  $\psi \rightarrow \theta$ .

Com o objetivo de provar  $\varphi \rightarrow \theta$ , suponha-se  $\varphi$  (temporariamente!!). Como  $\varphi \rightarrow \psi$ , conclua-se  $\psi$ ; como  $\psi \rightarrow \theta$ , conclua-se  $\theta$ .

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

# COMO FUNCIONA? (INFORMAÇÃO COMPLEMENTAR)

## Exemplo

Verificamos:  $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \vdash \varphi \rightarrow \theta$ .

### Formulês:

1	$\varphi \rightarrow \psi$	
2	$\psi \rightarrow \theta$	
3	$\varphi$	H
4	$\psi$	$\rightarrow E, 1, 3$
5	$\theta$	$\rightarrow E, 2, 4$
6	$\varphi \rightarrow \theta$	$\rightarrow I, 3, 5$

### Português:

Por hipótese,  $\varphi \rightarrow \psi$  e  $\psi \rightarrow \theta$ .

Com o objetivo de provar  $\varphi \rightarrow \theta$ , suponha-se  $\varphi$  (temporariamente!!). Como  $\varphi \rightarrow \psi$ , conclua-se  $\psi$ ; como  $\psi \rightarrow \theta$ , conclua-se  $\theta$ .

Portanto,  $\varphi \rightarrow \theta$  (e retire-se  $\varphi$ ).

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

## DOIS TEOREMAS (INFORMAÇÃO COMPLEMENTAR)

### Teorema (As regras são corretas)

*«Tudo o que se prova é válido.»*

# DOIS TEOREMAS (INFORMAÇÃO COMPLEMENTAR)

## **Teorema (As regras são corretas)**

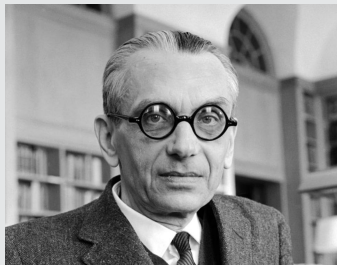
*«Tudo o que se prova é válido.»*

## **Teorema (As regras são suficientes)**

*«Tudo o que é válido se pode provar.»*

## **Um pouco de história ...**

O Kurt Gödel apresentou o resultado correspondente para a lógica de primeira ordem numa conferência em Königsberg (Kaliningrad) em 1930 ... um dia antes de anunciar o seu famoso resultado de incompletude.



---

Kurt Friedrich Gödel (1906 – 1978), matemático austríaco e norte-americano.



## Nota

No que se segue, apresentamos um algoritmo para verificar se a fórmula  $\psi$  é consequência das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

Começamos por observar:

## Teorema

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$  se e só se  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi\}$  é inconsistente.

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL)

## Ideia

**Questão:** Como verificar se  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é inconsistente?

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL)

## Ideia

**Questão:** Como verificar se  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é inconsistente?

Deduzimos uma «contradição».

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL)

## Ideia

**Questão:** Como verificar se  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é inconsistente?

Deduzimos uma «contradição». Como já observamos, uma **dedução** consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \perp$$

de fórmulas onde  $\psi_i \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  ou  $\psi_i$  é «consequência» das fórmulas anteriores.

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL)

## Ideia

**Questão:** Como verificar se  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é inconsistente?

Deduzimos uma «contradição». Como já observamos, uma **dedução** consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \perp$$

de fórmulas onde  $\psi_i \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  ou  $\psi_i$  é «consequência» das fórmulas anteriores. Agora consideremos apenas a seguinte regra (**Resolução**):

$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi} \text{ Res} \quad \text{para as fórmulas } \varphi, \psi, \theta.$$

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL)

## Ideia

**Questão:** Como verificar se  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é inconsistente?

Deduzimos uma «contradição». Como já observamos, uma **dedução** consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \perp$$

de fórmulas onde  $\psi_i \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  ou  $\psi_i$  é «consequência» das fórmulas anteriores. Agora consideremos apenas a seguinte regra (**Resolução**):

$$\frac{\psi \rightarrow \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi} \text{Res} \quad \text{para as fórmulas } \varphi, \psi, \theta.$$

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL)

## Ideia

**Questão:** Como verificar se  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é inconsistente?

Deduzimos uma «contradição». Como já observamos, uma **dedução** consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \perp$$

de fórmulas onde  $\psi_i \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  ou  $\psi_i$  é «consequência» das fórmulas anteriores. Agora consideremos apenas a seguinte regra (**Resolução**):

$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi} \text{ Res} \quad \text{para as fórmulas } \varphi, \psi, \theta.$$

$$\text{Em particular:} \quad \frac{\neg\psi \quad \psi \vee \varphi}{\varphi} \quad \text{e} \quad \frac{\neg\psi \quad \psi}{\perp}.$$

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL)

## Teorema

Para as cláusulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ,

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é inconsistente se e só se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \perp$ .



# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL)

## Teorema

Para as cláusulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ,

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é inconsistente se e só se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \perp$ .

## Nota

Para verificar se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ :

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL)

## Teorema

Para as cláusulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ,

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é inconsistente se e só se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \perp$ .

## Nota

Para verificar se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ :

1. Converter as fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  na forma normal conjuntiva.

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL)

## Teorema

Para as cláusulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ,

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é inconsistente se e só se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \perp$ .

## Nota

Para verificar se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ :

1. Converter as fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  na forma normal conjuntiva.
2. Negar a fórmula  $\psi$  e converter  $\neg\psi$  na forma normal conjuntiva.

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO (LÓGICA PROPOSICIONAL)

## Teorema

Para as cláusulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ,

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  é inconsistente se e só se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \perp$ .

## Nota

Para verificar se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ :

1. Converter as fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  na forma normal conjuntiva.
2. Negar a fórmula  $\psi$  e converter  $\neg\psi$  na forma normal conjuntiva.
3. Aplicar a regra de resolução às cláusulas obtidas acima até ou
  - obtém-se  $\perp$ , ou
  - não se aplica mais a regra de resolução (sem obter  $\perp$ ).

## Exemplo

Verificamos:  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ .

## Exemplo

Verificamos:  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ .

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r,$$

## Exemplo

Verificamos:  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ .

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad \neg(p \rightarrow r);$$

## Exemplo

Verificamos:  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ .

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad \neg(p \rightarrow r);$$

ou seja,

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad \neg(\neg p \vee r).$$



## Exemplo

Verificamos:  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ .

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad \neg(p \rightarrow r);$$

ou seja,

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p \wedge \neg r.$$

## Exemplo

Verificamos:  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ .

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad \neg(p \rightarrow r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

## Exemplo

Verificamos:  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ .

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad \neg(p \rightarrow r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

Agora:  $\neg p \vee q, \quad p,$

## Exemplo

Verificamos:  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ .

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad \neg(p \rightarrow r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

Agora:  $\neg p \vee q, \quad p, \quad q, \quad \neg q \vee r,$

## Exemplo

Verificamos:  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ .

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad \neg(p \rightarrow r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

Agora:  $\neg p \vee q, \quad p, \quad q, \quad \neg q \vee r, \quad r, \quad \neg r,$

## Exemplo

Verificamos:  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ .

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad \neg(p \rightarrow r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

Agora:  $\neg p \vee q, \quad p, \quad q, \quad \neg q \vee r, \quad r, \quad \neg r, \quad \perp$ .

## Exemplo

Em suma, provámos que

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$$

uma vez que o conjunto de cláusulas

$$\{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$$

é inconsistente, tal como se verifica na seguinte dedução:

1.	$\neg p \vee q$	Hip.
2.	$\neg q \vee r$	Hip.
3.	$p$	Hip.
4.	$\neg r$	Hip.
5.	$q$	Res (1,3)
6.	$r$	Res (2,5)
7.	$\perp$	Res (4,6)

## Exemplo

Verificamos  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ , ou seja, consideremos as fórmulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$



## Exemplo

Verificamos  $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ , ou seja, consideremos as fórmulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

- Apresentamos cada fórmula numa linha de uma tabela com colunas indexados por  $p, q, r$ , escrevendo
  - 1 se a correspondente variável ocorre na fórmula,
  - 0 se a correspondente variável não ocorre na fórmula,
  - -1 se a correspondente variável ocorre negada na fórmula.

## Exemplo

Verificamos  $p \rightarrow q$ ,  $q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ , ou seja, consideremos as fórmulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

- Apresentamos cada fórmula numa linha de uma tabela com colunas indexados por  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , escrevendo
  - 1 se a correspondente variável ocorre na fórmula,
  - 0 se a correspondente variável não ocorre na fórmula,
  - -1 se a correspondente variável ocorre negada na fórmula.
- Enquanto existirem duas linhas que contenham uma e só uma das células, associadas à mesma coluna, com sinais contrários, obter a próxima linha pela «adição»  $\oplus$  dos respetivos pares de linhas, onde

$$1 \oplus 1 = 1, \quad (-1) \oplus (-1) = (-1), \quad 1 \oplus (-1) = 0 = (-1) \oplus 1$$

$$\text{e } x \oplus 0 = 0 \oplus x = x.$$

## Exemplo

Verificamos  $p \rightarrow q$ ,  $q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ , ou seja, consideremos as fórmulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

- Apresentamos cada fórmula numa linha de uma tabela com colunas indexados por  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , escrevendo
  - 1 se a correspondente variável ocorre na fórmula,
  - 0 se a correspondente variável não ocorre na fórmula,
  - -1 se a correspondente variável ocorre negada na fórmula.
- Enquanto existirem duas linhas que contenham uma e só uma das células, associadas à mesma coluna, com sinais contrários, obter a próxima linha pela «adição»  $\oplus$  dos respetivos pares de linhas, onde

$$1 \oplus 1 = 1, \quad (-1) \oplus (-1) = (-1), \quad 1 \oplus (-1) = 0 = (-1) \oplus 1$$

$$\text{e } x \oplus 0 = 0 \oplus x = x.$$

- Se resultar uma linha de zeros (correspondente à cláusula vazia), então **PARAR** (o conjunto de fórmulas é inconsistente).

## Exemplo

Consideremos as fórmulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

	$p$	$q$	$r$
(1)	-1	1	0
(2)	0	-1	1
(3)	1	0	0
(4)	0	0	-1

## Exemplo

Consideremos as fórmulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

	$p$	$q$	$r$
(1)	-1	1	0
(2)	0	-1	1
(3)	1	0	0
(4)	0	0	-1
(5) = (1) $\oplus$ (2)	-1	0	1

## Exemplo

Consideremos as fórmulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

	$p$	$q$	$r$
(1)	-1	1	0
(2)	0	-1	1
(3)	1	0	0
(4)	0	0	-1
(5) = (1) $\oplus$ (2)	-1	0	1
(6) = (1) $\oplus$ (3)	0	1	0

## Exemplo

Consideremos as fórmulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

	$p$	$q$	$r$
(1)	-1	1	0
(2)	0	-1	1
(3)	1	0	0
(4)	0	0	-1
(5) = (1) $\oplus$ (2)	-1	0	1
(6) = (1) $\oplus$ (3)	0	1	0
(7) = (2) $\oplus$ (4)	0	-1	0

## Exemplo

Consideremos as fórmulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p, \quad \neg r.$$

	$p$	$q$	$r$
(1)	-1	1	0
(2)	0	-1	1
(3)	1	0	0
(4)	0	0	-1
(5) = (1) $\oplus$ (2)	-1	0	1
(6) = (1) $\oplus$ (3)	0	1	0
(7) = (2) $\oplus$ (4)	0	-1	0
$\vdots$			
(m) = (6) $\oplus$ (7)	0	0	0



### Exemplo

Será que  $p, p \rightarrow q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$  ?

### Exemplo

Será que  $p, p \rightarrow q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$  ?

Aplicamos o método de resolução:

### Exemplo

Será que  $p, p \rightarrow q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$  ?

Aplicamos o método de resolução:

(1)  $p$

(2)  $\neg p \vee q$

(3)  $\neg r \vee q$

### Exemplo

Será que  $p, p \rightarrow q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$  ?

Aplicamos o método de resolução:

(1)  $p$

(2)  $\neg p \vee q$

(3)  $\neg r \vee q$

(4)  $\neg r$

### Exemplo

Será que  $p, p \rightarrow q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$  ?

Aplicamos o método de resolução:

(1)  $p$

(2)  $\neg p \vee q$

(3)  $\neg r \vee q$

(4)  $\neg r$

(5)  $q$  (Resolvente de (1) e (2))

### Exemplo

Será que  $p, p \rightarrow q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$  ?

Aplicamos o método de resolução:

(1)  $p$

(2)  $\neg p \vee q$

(3)  $\neg r \vee q$

(4)  $\neg r$

(5)  $q$  (Resolvente de (1) e (2))

Não há mais resolventes.

## Exemplo

Será que  $p, p \rightarrow q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$  ?

Aplicamos o método de resolução:

(1)  $p$

(2)  $\neg p \vee q$

(3)  $\neg r \vee q$

(4)  $\neg r$

(5)  $q$  (Resolvente de (1) e (2))

Não há mais resolventes. Logo, a afirmação

$$p, p \rightarrow q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$$

é falsa.

### **3. A SINTAXE**



## Nota

Na lógica proposicional podemos expressar, por exemplo,

$$((p \wedge q) \rightarrow r).$$

## Nota

Na lógica proposicional podemos expressar, por exemplo,

$$((p \wedge q) \rightarrow r).$$

Agora, na lógica de primeira ordem, podemos ser mais específicos

$$((\text{par}(x) \wedge \text{par}(y)) \rightarrow \text{par}(x + y))$$

## Nota

Na lógica proposicional podemos expressar, por exemplo,

$$((p \wedge q) \rightarrow r).$$

Agora, na lógica de primeira ordem, podemos ser mais específicos

$$\forall x \forall y ((\text{par}(x) \wedge \text{par}(y)) \rightarrow \text{par}(x + y))$$

e podemos quantificar.

## Nota

Na lógica proposicional podemos expressar, por exemplo,

$$((p \wedge q) \rightarrow r).$$

Agora, na lógica de primeira ordem, podemos ser mais específicos

$$\forall x \forall y ((\text{par}(x) \wedge \text{par}(y)) \rightarrow \text{par}(x + y))$$

e podemos quantificar.

Por exemplo, para expressar que «todos os gatos têm garras»:

$$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x)).$$

## Exemplo (Os factos)

1. A Ana é docente.
2. Todos os docentes são pessoas.
3. O Paulo é diretor.
4. Os diretores são docentes.
5. Todos os docentes consideram o diretor um amigo ou não o conhecem.
6. Todos têm um amigo.
7. As pessoas apenas criticam aquelas pessoas que não são suas amigas.
8. A Ana critica o Paulo.

## Exemplo (Os factos ... mais formais)

1.  $\text{docente}(\text{Ana})$
2.  $\forall x (\text{docente}(x) \rightarrow \text{pessoa}(x))$
3.  $\text{diretor}(\text{Paulo})$
4.  $\forall x (\text{diretor}(x) \rightarrow \text{docente}(x))$
5.  $\forall x \forall y ((\text{docente}(x) \wedge \text{diretor}(y)) \rightarrow (\text{amigo}(y, x) \vee \neg \text{conhece}(x, y)))$
6.  $\forall x \exists y \text{amigo}(y, x)$
7.  $\forall x \forall y ((\text{pessoa}(x) \wedge \text{pessoa}(y) \wedge \text{critica}(x, y)) \rightarrow \neg \text{amigo}(y, x))$
8.  $\text{critica}(\text{Ana}, \text{Paulo})$

## Exemplo (Os factos ... mais formais)

1.  $\text{docente}(\text{Ana})$
2.  $\forall x (\text{docente}(x) \rightarrow \text{pessoa}(x))$
3.  $\text{diretor}(\text{Paulo})$
4.  $\forall x (\text{diretor}(x) \rightarrow \text{docente}(x))$
5.  $\forall x \forall y ((\text{docente}(x) \wedge \text{diretor}(y)) \rightarrow (\text{amigo}(y, x) \vee \neg \text{conhece}(x, y)))$
6.  $\forall x \exists y \text{amigo}(y, x)$
7.  $\forall x \forall y ((\text{pessoa}(x) \wedge \text{pessoa}(y) \wedge \text{critica}(x, y)) \rightarrow \neg \text{amigo}(y, x))$
8.  $\text{critica}(\text{Ana}, \text{Paulo})$

**Questão.** O Paulo não é amigo da Ana?

$\neg \text{amigo}(\text{Paulo}, \text{Ana})$

## Exemplo (Os factos ... do ponto de vista de um computador)

1.  $P_1(A)$
2.  $\forall x (P_1(x) \rightarrow P_3(x))$
3.  $P_4(B)$
4.  $\forall x (P_4(x) \rightarrow P_1(x))$
5.  $\forall x \forall y ((P_1(x) \wedge P_4(y)) \rightarrow (P_2(x, y) \vee \neg P_5(x, y)))$
6.  $\forall x \exists y P_2(y, x)$
7.  $\forall x \forall y ((P_3(x) \wedge P_3(y) \wedge P_6(x, y)) \rightarrow \neg P_2(y, x))$
8.  $P_6(A, B)$

**Questão.**  $\neg P_2(B, A)$



## As tarefas

- Coleccionar o conhecimento.
- Escolher uma linguagem apropriada: símbolos de constantes, de predicados<sup>a</sup>, ...
- Representar o conhecimento nesta linguagem.
- Consultar a base de dados (e o procedimento de dedução).

---

<sup>a</sup>Na gramática, o predicado é um dos termos essenciais da oração, juntamente com o sujeito. Define-se o predicado como tudo aquilo que se diz ou o que se declara sobre o sujeito, ou tudo aquilo que se informa sobre o sujeito, que é o termo com o qual verbo concorda. (fonte: Wikipédia)

## Definição

Um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos « $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\neg$ ,  $\perp$ ,  $\top$ » da lógica proposicional,

## Definição

Um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos « $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\neg$ ,  $\perp$ ,  $\top$ » da lógica proposicional,
3. os **quantificadores**: os símbolos « $\exists$ » (existe) e « $\forall$ » (para todos),

## Definição

Um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos « $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\neg$ ,  $\perp$ ,  $\top$ » da lógica proposicional,
3. os quantificadores: os símbolos « $\exists$ » (existe) e « $\forall$ » (para todos),
4. o símbolo de igualdade « $=$ »,

## Definição

Um **alfabeto de 1ª ordem** consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos « $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\neg$ ,  $\perp$ ,  $\top$ » da lógica proposicional,
3. os **quantificadores**: os símbolos « $\exists$ » (existe) e « $\forall$ » (para todos),
4. o símbolo de igualdade « $=$ »,
5. Além destes símbolos, e dependente do contexto, temos
  - uma coleção de símbolos de constante,
  - uma coleção de símbolos de função  
(cada símbolo de função  $f$  tem uma «aridade»  $n \in \mathbb{N}$  – o número de argumentos),
  - uma coleção de símbolos de predicado (= relação) de  $n$  argumentos.

### Exemplo (espaços vetoriais)

O alfabeto da **teoria de espaços vetoriais** consiste em (além dos símbolos de lógica e dos variáveis):

- o símbolo de constante  $0$ ,
- para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o símbolo de função  $\alpha \cdot -$  de uma variável, e
- o símbolo de função  $+$  de duas variáveis.

## Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

## Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis  $x, y, z$ , um símbolo de constante  $a$ , um símbolo de função  $i$  de um argumento e um símbolo de função  $m$  de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

## Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.

## Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis  $x, y, z$ , um símbolo de constante  $a$ , um símbolo de função  $i$  de um argumento e um símbolo de função  $m$  de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- $x, y, z, a$ .



## Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se  $f$  é um símbolo de função de  $n$  variáveis e  $t_1, \dots, t_n$  são termos, então  $f(t_1, \dots, t_n)$  é um termo.

## Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis  $x, y, z$ , um símbolo de constante  $a$ , um símbolo de função  $i$  de um argumento e um símbolo de função  $m$  de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- $x, y, z, a$ .

## Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se  $f$  é um símbolo de função de  $n$  variáveis e  $t_1, \dots, t_n$  são termos, então  $f(t_1, \dots, t_n)$  é um termo.

## Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis  $x, y, z$ , um símbolo de constante  $a$ , um símbolo de função  $i$  de um argumento e um símbolo de função  $m$  de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- $x, y, z, a$ .
- $i(a), i(x), m(z, y), m(a, z), \dots$

## Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se  $f$  é um símbolo de função de  $n$  variáveis e  $t_1, \dots, t_n$  são termos, então  $f(t_1, \dots, t_n)$  é um termo.

## Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis  $x, y, z$ , um símbolo de constante  $a$ , um símbolo de função  $i$  de um argumento e um símbolo de função  $m$  de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- $x, y, z, a.$
- $i(a), i(x), m(z, y), m(a, z), \dots$
- $m(i(x), x), i(m(x, a)), m(m(z, a), i(x)), \dots$
- $\dots$

## Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **fórmula**:

- $P(t_1, \dots, t_n)$  é uma fórmula onde  $P$  é um símbolo de predicado de  $n$  argumentos e  $t_1, \dots, t_n$  são termos.
- $t_1 = t_2$  é uma fórmula onde  $t_1, t_2$  são termos.
- $\perp$  e  $\top$  são fórmulas.

Às fórmulas acima chamamos **átomos**.

## Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **fórmula**:

- $P(t_1, \dots, t_n)$  é uma fórmula onde  $P$  é um símbolo de predicado de  $n$  argumentos e  $t_1, \dots, t_n$  são termos.
- $t_1 = t_2$  é uma fórmula onde  $t_1, t_2$  são termos.
- $\perp$  e  $\top$  são fórmulas.

Às fórmulas acima chamamos **átomos**.

- Se  $\varphi$  e  $\psi$  são fórmulas, então

$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\neg \varphi), \quad \perp, \quad \top$$

são fórmulas.

## Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **fórmula**:

- $P(t_1, \dots, t_n)$  é uma fórmula onde  $P$  é um símbolo de predicado de  $n$  argumentos e  $t_1, \dots, t_n$  são termos.
- $t_1 = t_2$  é uma fórmula onde  $t_1, t_2$  são termos.
- $\perp$  e  $\top$  são fórmulas.

Às fórmulas acima chamamos **átomos**.

- Se  $\varphi$  e  $\psi$  são fórmulas, então

$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\neg \varphi), \quad \perp, \quad \top$$

são fórmulas.

- Se  $\varphi$  é uma fórmula e  $x$  é uma variável, então

$$\forall x \varphi \quad \text{e} \quad \exists x \varphi$$

são fórmulas.

## Exemplo

$$\forall x, y, z \underbrace{(x < y)}_{\text{fórmula}} \rightarrow \underbrace{(\underbrace{x + z}_{\text{termo}} < \underbrace{y + z}_{\text{termo}})}_{\text{fórmula}}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{fórmula}}$

## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respectivamente  $\exists$ .



## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respectivamente  $\exists$ .

## Exemplos

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respetivamente  $\exists$ .

## Exemplos

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $(\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ ».

## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respectivamente  $\exists$ .

## Exemplos

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $(\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ ».

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$ :

## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respectivamente  $\exists$ .

## Exemplos

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $(\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ ».

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $\exists y x < y$ ».

## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respectivamente  $\exists$ .

## Exemplos

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $(\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ ».

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $\exists y x < y$ ».

O alcance de « $\exists$ » é « $x < y$ ».

## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respectivamente  $\exists$ .

## Exemplos

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $(\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ ».

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $\exists y x < y$ ».

O alcance de « $\exists$ » é « $x < y$ ».

- $\forall x \exists y (x < y \wedge a < x)$ :

## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respetivamente  $\exists$ .

## Exemplos

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $(\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ ».

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $\exists y x < y$ ».

O alcance de « $\exists$ » é « $x < y$ ».

- $\forall x \exists y (x < y \wedge a < x)$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $\exists y (x < y \wedge a < x)$ ».

## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respectivamente  $\exists$ .

## Exemplos

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $(\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ ».

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $\exists y x < y$ ».

O alcance de « $\exists$ » é « $x < y$ ».

- $\forall x \exists y (x < y \wedge a < x)$ :

O alcance de « $\forall$ » é « $\exists y (x < y \wedge a < x)$ ».

O alcance de « $\exists$ » é « $x < y \wedge a < x$ ».



# VARIÁVEIS LIVRES E LIGADAS

## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respectivamente  $\exists$ .

## Variável livre e ligada

Uma ocorrência de uma **variável** numa fórmula diz-se **ligada** se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma **variável** numa fórmula diz-se **livre** se essa ocorrência não é ligada.

# VARIÁVEIS LIVRES E LIGADAS

## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respectivamente  $\exists$ .

## Variável livre e ligada

Uma ocorrência de uma **variável** numa fórmula diz-se **ligada** se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma **variável** numa fórmula diz-se **livre** se essa ocorrência não é ligada.

Uma **variável** numa fórmula diz-se **livre** quando ocorre pelo menos uma vez livre na fórmula.

# VARIÁVEIS LIVRES E LIGADAS

## Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma  $\forall x \varphi$  e  $\exists x \varphi$ , a fórmula  $\varphi$  é o **alcance do quantificador**  $\forall$  respectivamente  $\exists$ .

## Variável livre e ligada

Uma ocorrência de uma **variável** numa fórmula diz-se **ligada** se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma **variável** numa fórmula diz-se **livre** se essa ocorrência não é ligada.

Uma **variável** numa fórmula diz-se **livre** quando ocorre pelo menos uma vez livre na fórmula.

## Nota

Uma fórmula diz-se **fechada** quando não tem variáveis livres.

## Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e  $a$  é um símbolo de constante.

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

## Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e  $a$  é um símbolo de constante.

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

A variável  $x$  ocorre ligada. A fórmula é fechada.

## Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e  $a$  é um símbolo de constante.

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

A variável  $x$  ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$ :

## Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e  $a$  é um símbolo de constante.

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

A variável  $x$  ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$ :

A variável  $y$  ocorre ligada e a variável  $x$  ocorre livre e ligada.

A fórmula não é fechada.

## Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e  $a$  é um símbolo de constante.

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

A variável  $x$  ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$ :

A variável  $y$  ocorre ligada e a variável  $x$  ocorre livre e ligada.

A fórmula não é fechada.

- $\forall x \exists y (x < y \wedge a < x)$ :



## Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e  $a$  é um símbolo de constante.

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ :

A variável  $x$  ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$ :

A variável  $y$  ocorre ligada e a variável  $x$  ocorre livre e ligada.

A fórmula não é fechada.

- $\forall x \exists y (x < y \wedge a < x)$ :

As variáveis  $x$  e  $y$  ocorrem ligadas. A fórmula é fechada.

## **4. A SEMÂNTICA**

## Definição

Uma **estrutura**  $\mathcal{M}$  para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

## Definição

Uma **estrutura**  $\mathcal{M}$  para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto  $D$ ,

## Definição

Uma **estrutura**  $\mathcal{M}$  para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto  $D$ ,
- a cada símbolo de constante  $a$  associamos um elemento  $a^{\mathcal{M}} \in D$ ,

## Definição

Uma **estrutura**  $\mathcal{M}$  para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto  $D$ ,
- a cada símbolo de constante  $a$  associamos um elemento  $a^{\mathcal{M}} \in D$ ,
- a cada símbolo de função  $f$  com  $n$  argumentos associamos uma função  $f^{\mathcal{M}}: D^n \longrightarrow D$ ,

## Definição

Uma **estrutura**  $\mathcal{M}$  para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto  $D$ ,
- a cada símbolo de constante  $a$  associamos um elemento  $a^{\mathcal{M}} \in D$ ,
- a cada símbolo de função  $f$  com  $n$  argumentos associamos uma função  $f^{\mathcal{M}}: D^n \longrightarrow D$ ,
- a cada símbolo de predicado  $P$  com  $n$  argumentos associamos um subconjunto  $P^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$ .

## Definição

Uma **estrutura**  $\mathcal{M}$  para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto  $D$ ,
- a cada símbolo de constante  $a$  associamos um elemento  $a^{\mathcal{M}} \in D$ ,
- a cada símbolo de função  $f$  com  $n$  argumentos associamos uma função  $f^{\mathcal{M}}: D^n \longrightarrow D$ ,
- a cada símbolo de predicado  $P$  com  $n$  argumentos associamos um subconjunto  $P^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$ .

## Nota

Dada uma estrutura  $\mathcal{M}$ , uma **valoração**  $V$  em  $\mathcal{M}$  associa a cada variável  $x$  um elemento  $V(x) \in D$ .

O par  $(\mathcal{M}, V)$  diz-se **interpretação**.



# INTERPRETAÇÃO DE TERMOS

## Interpretação de termos

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$V(f(t_1, \dots, t_n)) = f(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in D.$$

# INTERPRETAÇÃO DE TERMOS

## Interpretação de termos

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$V(f(t_1, \dots, t_n)) = f(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in D.$$

## Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função binária  $f$  (ou seja, de dois argumentos) e um símbolo de constante  $a$ .

Para a interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  com  $D = \mathbb{Z}$  e

$$f^{\mathcal{M}}: D^2 \longrightarrow D, (n, m) \longmapsto |n| - |m|, \quad a^{\mathcal{M}} = 0, \quad V(x) = -2 \text{ e } V(y) = 1,$$

temos:

# INTERPRETAÇÃO DE TERMOS

## Interpretação de termos

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$V(f(t_1, \dots, t_n)) = f(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in D.$$

## Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função binária  $f$  (ou seja, de dois argumentos) e um símbolo de constante  $a$ .

Para a interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  com  $D = \mathbb{Z}$  e

$$f^{\mathcal{M}}: D^2 \longrightarrow D, (n, m) \longmapsto |n| - |m|, \quad a^{\mathcal{M}} = 0, \quad V(x) = -2 \text{ e } V(y) = 1,$$

temos:

- $V(f(a, x)) = |0| - |-2| = -2.$

# INTERPRETAÇÃO DE TERMOS

## Interpretação de termos

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$V(f(t_1, \dots, t_n)) = f(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in D.$$

## Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função binária  $f$  (ou seja, de dois argumentos) e um símbolo de constante  $a$ .

Para a interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  com  $D = \mathbb{Z}$  e

$$f^{\mathcal{M}}: D^2 \longrightarrow D, (n, m) \longmapsto |n| - |m|, \quad a^{\mathcal{M}} = 0, \quad V(x) = -2 \text{ e } V(y) = 1,$$

temos:

- $V(f(a, x)) = |0| - |-2| = -2.$
- $V(f(f(x, y), a)) = |(|-2| - |1|) - |0|| = 1.$

# INTERPRETAÇÃO DE FÓRMULAS

## Definição

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente o conceito de  $\varphi$  é válido em  $(\mathcal{M}, V)$ , ou  $(\mathcal{M}, V)$  é modelo de  $\varphi$ , denotado por  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ .

# INTERPRETAÇÃO DE FÓRMULAS

## Definição

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente o conceito de  $\varphi$  é válido em  $(\mathcal{M}, V)$ , ou  $(\mathcal{M}, V)$  é modelo de  $\varphi$ , denotado por  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ .

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$  quando  $V(t_1) = V(t_2)$ .

## Definição

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente o conceito de  $\varphi$  é válido em  $(\mathcal{M}, V)$ , ou  $(\mathcal{M}, V)$  é modelo de  $\varphi$ , denotado por  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ .

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$  quando  $V(t_1) = V(t_2)$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \dots, t_n)$  quando  $(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in R$ .

## Definição

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente o conceito de  $\varphi$  é válido em  $(\mathcal{M}, V)$ , ou  $(\mathcal{M}, V)$  é modelo de  $\varphi$ , denotado por  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ .

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$  quando  $V(t_1) = V(t_2)$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \dots, t_n)$  quando  $(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in R$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$  e **não**  $(\mathcal{M}, V) \models \perp$



## Definição

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente o conceito de  $\varphi$  é válido em  $(\mathcal{M}, V)$ , ou  $(\mathcal{M}, V)$  é modelo de  $\varphi$ , denotado por  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ .

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$  quando  $V(t_1) = V(t_2)$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \dots, t_n)$  quando  $(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in R$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$  e **não**  $(\mathcal{M}, V) \models \perp$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  e  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .

## Definição

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente o conceito de  $\varphi$  é válido em  $(\mathcal{M}, V)$ , ou  $(\mathcal{M}, V)$  é modelo de  $\varphi$ , denotado por  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ .

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$  quando  $V(t_1) = V(t_2)$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \dots, t_n)$  quando  $(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in R$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$  e **não**  $(\mathcal{M}, V) \models \perp$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  e  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \vee \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  ou  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .

## Definição

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente o conceito de  $\varphi$  é válido em  $(\mathcal{M}, V)$ , ou  $(\mathcal{M}, V)$  é modelo de  $\varphi$ , denotado por  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ .

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$  quando  $V(t_1) = V(t_2)$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \dots, t_n)$  quando  $(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in R$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$  e **não**  $(\mathcal{M}, V) \models \perp$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  e  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \vee \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  ou  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \rightarrow \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  implica  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .

## Definição

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente o conceito de  $\varphi$  é válido em  $(\mathcal{M}, V)$ , ou  $(\mathcal{M}, V)$  é modelo de  $\varphi$ , denotado por  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ .

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$  quando  $V(t_1) = V(t_2)$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \dots, t_n)$  quando  $(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in R$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$  e **não**  $(\mathcal{M}, V) \models \perp$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  e  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \vee \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  ou  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \rightarrow \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  implica  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models \neg \varphi$  quando **não**  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ .

## Definição

Dada uma interpretação  $(\mathcal{M}, V)$  de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente o conceito de  $\varphi$  é válido em  $(\mathcal{M}, V)$ , ou  $(\mathcal{M}, V)$  é modelo de  $\varphi$ , denotado por  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ .

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$  quando  $V(t_1) = V(t_2)$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \dots, t_n)$  quando  $(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in R$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$  e **não**  $(\mathcal{M}, V) \models \perp$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  e  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \vee \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  ou  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \rightarrow \psi)$  quando  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$  implica  $(\mathcal{M}, V) \models \psi$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models \neg \varphi$  quando **não**  $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ .

Falta considerar os quantificadores ...

# INTERPRETAÇÃO DE FÓRMULAS (CONTINUAÇÃO)

## Modificação da valoração

Para uma variável  $x$  e um elemento  $a \in D$ ,  $V_a^x$  denota a valoração definida por

$$V_a^x(y) = \begin{cases} V(y) & \text{se } y \text{ é diferente de } x, \\ a & \text{se } y \text{ é igual ao } x. \end{cases}$$

# INTERPRETAÇÃO DE FÓRMULAS (CONTINUAÇÃO)

## Modificação da valoração

Para uma variável  $x$  e um elemento  $a \in D$ ,  $V_a^x$  denota a valoração definida por

$$V_a^x(y) = \begin{cases} V(y) & \text{se } y \text{ é diferente de } x, \\ a & \text{se } y \text{ é igual ao } x. \end{cases}$$

## Definição

Continuamos:

- $(\mathcal{M}, V) \models \exists x \psi$  quando, para algum  $a \in D$ ,  $(\mathcal{M}, V_a^x) \models \psi$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models \forall x \psi$  quando, para todo o  $a \in D$ ,  $(\mathcal{M}, V_a^x) \models \psi$ .

# INTERPRETAÇÃO DE FÓRMULAS (CONTINUAÇÃO)

## Modificação da valoração

Para uma variável  $x$  e um elemento  $a \in D$ ,  $V_a^x$  denota a valoração definida por

$$V_a^x(y) = \begin{cases} V(y) & \text{se } y \text{ é diferente de } x, \\ a & \text{se } y \text{ é igual ao } x. \end{cases}$$

## Definição

Continuamos:

- $(\mathcal{M}, V) \models \exists x \psi$  quando, para algum  $a \in D$ ,  $(\mathcal{M}, V_a^x) \models \psi$ .
- $(\mathcal{M}, V) \models \forall x \psi$  quando, para todo o  $a \in D$ ,  $(\mathcal{M}, V_a^x) \models \psi$ .

## Nota

Se uma fórmula  $\varphi$  não tem variáveis livres, a interpretação das variáveis é irrelevante na interpretação de  $\varphi$ .



## EXEMPLOS

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

[illegible]

## EXEMPLOS

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

[illegible]

## EXEMPLOS

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

[illegible]

## EXEMPLOS

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

[illegible]

## EXEMPLOS

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	

## EXEMPLOS

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

[illegible]

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	não válida



## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	não válida
$\forall y y < 4$	

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	não válida
$\forall y y < 4$	não válida

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	não válida
$\forall y y < 4$	não válida
$\forall y \exists y y < 4$	

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	não válida
$\forall y y < 4$	não válida
$\forall y \exists y y < 4$	válida

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	não válida
$\forall y y < 4$	não válida
$\forall y \exists y y < 4$	válida
$\forall x ((x < 4) \rightarrow (1 = 0))$	

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	não válida
$\forall y y < 4$	não válida
$\forall y \exists y y < 4$	válida
$\forall x ((x < 4) \rightarrow (1 = 0))$	não válida

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	não válida
$\forall y y < 4$	não válida
$\forall y \exists y y < 4$	válida
$\forall x ((x < 4) \rightarrow (1 = 0))$	não válida
$\forall x \exists y x < y$	

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	não válida
$\forall y y < 4$	não válida
$\forall y \exists y y < 4$	válida
$\forall x ((x < 4) \rightarrow (1 = 0))$	não válida
$\forall x \exists y x < y$	válida



## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	não válida
$\forall y y < 4$	não válida
$\forall y \exists y y < 4$	válida
$\forall x ((x < 4) \rightarrow (1 = 0))$	não válida
$\forall x \exists y x < y$	válida
$\exists x \forall y x \leq y$	

## Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em  $D = \mathbb{R}$  (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de $x$
$\forall x x < 4$	não válida
$\forall y y < 4$	não válida
$\forall y \exists y y < 4$	válida
$\forall x ((x < 4) \rightarrow (1 = 0))$	não válida
$\forall x \exists y x < y$	válida
$\exists x \forall y x \leq y$	não válida

## Exemplo (Espaços vetoriais)

Um espaço vetorial é um modelo das fórmulas (no alfabeto da teoria de espaços vetoriais):

1.  $\forall u \forall v \quad u + v = v + u,$
2.  $\forall u \forall v \forall w \quad u + (v + w) = (u + v) + w,$
3.  $\forall u \quad u + 0 = u,$
4.  $\forall u \quad 0 \cdot u = 0,$
5.  $\forall u \quad 1 \cdot u = u,$
6.  $\forall u \quad \alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u,$
7.  $\forall u \quad (\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u),$
8.  $\forall u \forall v \quad \alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v).$

## Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula  $\varphi$  diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em **cada** interpretação.

# A VALIDADE DE FÓRMULAS

## Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula  $\varphi$  diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em **cada** interpretação.

**Notação:** Escreve-se  $\models \varphi$  quando  $\varphi$  é válida.

# A VALIDADE DE FÓRMULAS

## Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula  $\varphi$  diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em **cada** interpretação.

**Notação:** Escreve-se  $\models \varphi$  quando  $\varphi$  é válida.

- **consistente** quando é válida em **alguma** interpretação.

# A VALIDADE DE FÓRMULAS

## Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula  $\varphi$  diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em **cada** interpretação.

**Notação:** Escreve-se  $\models \varphi$  quando  $\varphi$  é válida.

- **consistente** quando é válida em **alguma** interpretação.

## Nota

- Uma fórmula não válida diz-se **inválida** e uma fórmula não consistente diz-se **inconsistente**.

# A VALIDADE DE FÓRMULAS

## Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula  $\varphi$  diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em **cada** interpretação.

**Notação:** Escreve-se  $\models \varphi$  quando  $\varphi$  é válida.

- **consistente** quando é válida em **alguma** interpretação.

## Nota

- Uma fórmula não válida diz-se **inválida** e uma fórmula não consistente diz-se **inconsistente**.
- Uma fórmula  $\varphi$  é inconsistente se e só se  $\neg\varphi$  é válida.



# A VALIDADE DE FÓRMULAS

## Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula  $\varphi$  diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em **cada** interpretação.

**Notação:** Escreve-se  $\models \varphi$  quando  $\varphi$  é válida.

- **consistente** quando é válida em **alguma** interpretação.

## Nota

- Uma fórmula não válida diz-se **inválida** e uma fórmula não consistente diz-se **inconsistente**.
- Uma fórmula  $\varphi$  é inconsistente se e só se  $\neg\varphi$  é válida.  
Portanto, uma fórmula inconsistente diz-se também uma **contradição**.

# A VALIDADE DE FÓRMULAS

## Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula  $\varphi$  diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em **cada** interpretação.

**Notação:** Escreve-se  $\models \varphi$  quando  $\varphi$  é válida.

- **consistente** quando é válida em **alguma** interpretação.

## Nota

- Uma fórmula não válida diz-se **inválida** e uma fórmula não consistente diz-se **inconsistente**.

- Uma fórmula  $\varphi$  é inconsistente se e só se  $\neg\varphi$  é válida.

Portanto, uma fórmula inconsistente diz-se também uma **contradição**.

## Definição

As fórmulas  $\varphi$  e  $\psi$  dizem-se **equivalentes** quando  $\varphi \leftrightarrow \psi$  é uma tautologia. Neste caso escrevemos  $\varphi \equiv \psi$ .

## Definição

Uma fórmula  $\psi$  diz-se **consequência** (semântica ou lógica) das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  quando, para toda a interpretação  $(\mathcal{M}, V)$ ,  
se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  são válidas em  $(\mathcal{M}, V)$ , então  $\psi$  é válida em  $(\mathcal{M}, V)$ .

## Definição

Uma fórmula  $\psi$  diz-se **consequência** (semântica ou lógica) das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  quando, para toda a interpretação  $(\mathcal{M}, V)$ ,

se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  são válidas em  $(\mathcal{M}, V)$ , então  $\psi$  é válida em  $(\mathcal{M}, V)$ .

**Em símbolos:**  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ .

## Definição

Uma fórmula  $\psi$  diz-se **consequência** (semântica ou lógica) das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  quando, para toda a interpretação  $(\mathcal{M}, V)$ ,

se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  são válidas em  $(\mathcal{M}, V)$ , então  $\psi$  é válida em  $(\mathcal{M}, V)$ .

**Em símbolos:**  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ .

## Nota

As regras de dedução «natural» da lógica proposicional admitem uma extensão para a lógica de primeira ordem. Tal como na lógica proposicional, baseada nestas regras define-se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ , e tem-se

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi \iff \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi.$$

## Definição

Uma fórmula  $\psi$  diz-se **consequência** (semântica ou lógica) das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  quando, para toda a interpretação  $(\mathcal{M}, V)$ ,

se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  são válidas em  $(\mathcal{M}, V)$ , então  $\psi$  é válida em  $(\mathcal{M}, V)$ .

**Em símbolos:**  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ .

## Nota

As regras de dedução «natural» da lógica proposicional admitem uma extensão para a lógica de primeira ordem. Tal como na lógica proposicional, baseada nestas regras define-se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ , e tem-se

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi \iff \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi.$$

No entanto, neste capítulo consideremos o **método de resolução**.

# A DEDUÇÃO COM QUANTIFICADORES (A IDEIA)

## Exemplo

Todos os gatos têm garras. Tom é um gato.

Tom tem garras.

# A DEDUÇÃO COM QUANTIFICADORES (A IDEIA)

## Exemplo

Todos os gatos têm garras. Tom é um gato.

Tom tem garras.

## Na linguagem de 1ª ordem

$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garra}(x)), \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$

## Aqui:

- «gato, garra» são símbolos de predicado de um argumento,
- «Tom» é um símbolo de constante.



# A DEDUÇÃO COM QUANTIFICADORES (A IDEIA)

## Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras. Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

## Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garra}(x)), \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$$

## Preparar para a dedução

$$\forall x (\neg \text{gato}(x) \vee \text{garra}(x)), \quad \text{gato}(\text{Tom}), \quad \neg \text{garra}(\text{Tom}).$$

# A DEDUÇÃO COM QUANTIFICADORES (A IDEIA)

## Exemplo

Todos os gatos têm garras. Tom é um gato.

Tom tem garras.

## Na linguagem de 1ª ordem

$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garra}(x)), \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$

## Preparar para a dedução

$\neg \text{gato}(x) \vee \text{garra}(x),^a \quad \text{gato}(\text{Tom}), \quad \neg \text{garra}(\text{Tom}).$

<sup>a</sup>Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

# A DEDUÇÃO COM QUANTIFICADORES (A IDEIA)

## Exemplo

Todos os gatos têm garras. Tom é um gato.

Tom tem garras.

## Na linguagem de 1ª ordem

$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garra}(x)), \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$

## Preparar para a dedução

$\neg \text{gato}(x) \vee \text{garra}(x),^a \quad \text{gato}(\text{Tom}), \quad \neg \text{garra}(\text{Tom}).$

<sup>a</sup>Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

## Deduzimos agora:

$\text{gato}(\text{Tom}), \quad \neg \text{gato}(x) \vee \text{garra}(x)$

# A DEDUÇÃO COM QUANTIFICADORES (A IDEIA)

## Exemplo

Todos os gatos têm garras. Tom é um gato.

Tom tem garras.

## Na linguagem de 1ª ordem

$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garra}(x)), \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$

## Preparar para a dedução

$\neg \text{gato}(x) \vee \text{garra}(x),^a \quad \text{gato}(\text{Tom}), \quad \neg \text{garra}(\text{Tom}).$

<sup>a</sup>Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

## Deduzimos agora:

$\text{gato}(\text{Tom}), \quad \neg \text{gato}(\text{Tom}) \vee \text{garra}(\text{Tom}),^a$

<sup>a</sup>Escrever «Tom» em lugar de «x» ... já que a fórmula é válida «para todos».

# A DEDUÇÃO COM QUANTIFICADORES (A IDEIA)

## Exemplo

Todos os gatos têm garras. Tom é um gato.

Tom tem garras.

## Na linguagem de 1ª ordem

$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garra}(x)), \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$

## Preparar para a dedução

$\neg \text{gato}(x) \vee \text{garra}(x),^a \text{gato}(\text{Tom}), \neg \text{garra}(\text{Tom}).$

<sup>a</sup>Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

## Deduzimos agora:

$\text{gato}(\text{Tom}), \neg \text{gato}(\text{Tom}) \vee \text{garra}(\text{Tom}),^a \text{garra}(\text{Tom}),$

<sup>a</sup>Escrever «Tom» em lugar de «x» ... já que a fórmula é válida «para todos».

# A DEDUÇÃO COM QUANTIFICADORES (A IDEIA)

## Exemplo

Todos os gatos têm garras. Tom é um gato.

Tom tem garras.

## Na linguagem de 1ª ordem

$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garra}(x)), \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$

## Preparar para a dedução

$\neg \text{gato}(x) \vee \text{garra}(x),^a \text{gato}(\text{Tom}), \neg \text{garra}(\text{Tom}).$

<sup>a</sup>Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

## Deduzimos agora:

$\text{gato}(\text{Tom}), \neg \text{gato}(\text{Tom}) \vee \text{garra}(\text{Tom}),^a \text{garra}(\text{Tom}), \neg \text{garra}(\text{Tom}),$

<sup>a</sup>Escrever «Tom» em lugar de «x» ... já que a fórmula é válida «para todos».

# A DEDUÇÃO COM QUANTIFICADORES (A IDEIA)

## Exemplo

Todos os gatos têm garras. Tom é um gato.

Tom tem garras.

## Na linguagem de 1ª ordem

$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garra}(x)), \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$

## Preparar para a dedução

$\neg \text{gato}(x) \vee \text{garra}(x),^a \text{gato}(\text{Tom}), \neg \text{garra}(\text{Tom}).$

<sup>a</sup>Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

## Deduzimos agora:

$\text{gato}(\text{Tom}), \neg \text{gato}(\text{Tom}) \vee \text{garra}(\text{Tom}),^a \text{garra}(\text{Tom}), \neg \text{garra}(\text{Tom}), \perp.$

<sup>a</sup>Escrever «Tom» em lugar de «x» ... já que a fórmula é válida «para todos».

## **5. FORMAS NORMAIS DE FÓRMULAS**



## Definição

Adaptamos a definição da lógica proposicional:

- Um literal é um átomo ou a negação de um átomo.
- Uma fórmula  $\varphi$  diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada  $\varphi_i$  é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \quad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais  $L_i$ .

# FÓRMULAS NA FORMA NORMAL PRENEX

## Definição

Uma fórmula da forma

$$Qx_1 \dots Qx_n \varphi$$

onde  $\varphi$  é uma fórmula sem quantificadores e  $Q$  denota « $\exists$ » ou « $\forall$ » diz-se na **na forma normal prenex**.

# FÓRMULAS NA FORMA NORMAL PRENEX

## Definição

Uma fórmula da forma

$$Qx_1 \dots Qx_n \varphi$$

onde  $\varphi$  é uma fórmula sem quantificadores e  $Q$  denota « $\exists$ » ou « $\forall$ » diz-se na **na forma normal prenex**.

## Como obter?

- Mover « $\neg$ » mais para o interior:

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi \quad \text{e} \quad \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi.$$

# FÓRMULAS NA FORMA NORMAL PRENEX

## Definição

Uma fórmula da forma

$$Qx_1 \dots Qx_n \varphi$$

onde  $\varphi$  é uma fórmula sem quantificadores e  $Q$  denota « $\exists$ » ou « $\forall$ » diz-se na **na forma normal prenex**.

## Como obter?

- Mover « $\neg$ » mais para o interior:

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi \quad \text{e} \quad \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi.$$

- Mover os quantificadores mais para o exterior:

- $(\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi) \equiv \forall x (\psi \wedge \varphi),$
- $(\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi) \equiv \exists x (\psi \vee \varphi).$

# FÓRMULAS NA FORMA NORMAL PRENEX

## Definição

Uma fórmula da forma

$$Qx_1 \dots Qx_n \varphi$$

onde  $\varphi$  é uma fórmula sem quantificadores e  $Q$  denota « $\exists$ » ou « $\forall$ » diz-se na **na forma normal prenex**.

## Como obter?

- Mover « $\neg$ » mais para o interior:

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi \quad \text{e} \quad \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi.$$

- Mover os quantificadores mais para o exterior:

- $(\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi) \equiv \forall x (\psi \wedge \varphi),$

- $(\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi) \equiv \exists x (\psi \vee \varphi).$

- Suponha que  $\psi$  não contém a variável  $x$ :

$$(\forall x \varphi) \wedge \psi \equiv \forall x (\varphi \wedge \psi), \quad (\exists x \varphi) \wedge \psi \equiv \exists x (\varphi \wedge \psi),$$

$$(\forall x \varphi) \vee \psi \equiv \forall x (\varphi \vee \psi), \quad (\exists x \varphi) \vee \psi \equiv \exists x (\varphi \vee \psi).$$

# FORMA NORMAL DE SKOLEM

## Definição

Uma fórmula na **forma normal de Skolem**<sup>a</sup> é uma fórmula fechada (= sem variáveis livres)

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \quad \varphi$$

onde  $\varphi$  é uma fórmula sem quantificadores na forma normal conjuntiva.

---

<sup>a</sup>Thoralf Albert Skolem (1887 – 1963), matemático norueguês.

# FORMA NORMAL DE SKOLEM

## Definição

Uma fórmula na **forma normal de Skolem**<sup>a</sup> é uma fórmula fechada (= sem variáveis livres)

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$$

onde  $\varphi$  é uma fórmula sem quantificadores na forma normal conjuntiva.

---

<sup>a</sup>Thoralf Albert Skolem (1887 – 1963), matemático norueguês.

## Nota

Como

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi) \wedge (\forall x_1 \dots \forall x_n \psi),$$

uma fórmula na forma normal de Skolem pode-se escrever como uma conjunção de fórmulas normais de Skolem  $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi_i$  onde  $\varphi_i$  é uma cláusula  $L_1 \vee \dots \vee L_n$ .

## COMO OBTER?

A partir da forma normal prenex



## COMO OBTER?

### A partir da forma normal prenex

- No caso de  $\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ :

## COMO OBTER?

### A partir da forma normal prenex

- No caso de  $\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ :
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos  $c$ ),

## COMO OBTER?

### A partir da forma normal prenex

- No caso de  $\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ :
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos  $c$ ),
  2. substituir todas as ocorrências livres de  $x_1$  em  $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$  por  $c$ , e

## COMO OBTER?

### A partir da forma normal prenex

- No caso de  $\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ :
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos  $c$ ),
  2. substituir todas as ocorrências livres de  $x_1$  em  $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$  por  $c$ , e
  3. eliminar  $\exists x_1$ .

## COMO OBTER?

### A partir da forma normal prenex

- No caso de  $\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ :
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos  $c$ ),
  2. substituir todas as ocorrências livres de  $x_1$  em  $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$  por  $c$ , e
  3. eliminar  $\exists x_1$ .
- No caso de  $\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n \varphi$  ( $k > 1$ ):

## A partir da forma normal prenex

- No caso de  $\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ :
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos  $c$ ),
  2. substituir todas as ocorrências livres de  $x_1$  em  $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$  por  $c$ , e
  3. eliminar  $\exists x_1$ .
- No caso de  $\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n \varphi$  ( $k > 1$ ):
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos  $f$ ) de  $k - 1$  argumentos,

# COMO OBTER?

## A partir da forma normal prenex

- No caso de  $\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ :
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos  $c$ ),
  2. substituir todas as ocorrências livres de  $x_1$  em  $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$  por  $c$ , e
  3. eliminar  $\exists x_1$ .
- No caso de  $\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n \varphi$  ( $k > 1$ ):
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos  $f$ ) de  $k - 1$  argumentos,
  2. substituir todas as ocorrências livres de  $x_k$  em  $Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n \varphi$  por  $f(x_1, \dots, x_{k-1})$ , e

# COMO OBTER?

## A partir da forma normal prenex

- No caso de  $\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ :
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos  $c$ ),
  2. substituir todas as ocorrências livres de  $x_1$  em  $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$  por  $c$ , e
  3. eliminar  $\exists x_1$ .
- No caso de  $\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n \varphi$  ( $k > 1$ ):
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos  $f$ ) de  $k - 1$  argumentos,
  2. substituir todas as ocorrências livres de  $x_k$  em  $Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n \varphi$  por  $f(x_1, \dots, x_{k-1})$ , e
  3. eliminar  $\exists x_k$ .



# COMO OBTER?

## A partir da forma normal prenex

- No caso de  $\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ :
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos  $c$ ),
  2. substituir todas as ocorrências livres de  $x_1$  em  $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$  por  $c$ , e
  3. eliminar  $\exists x_1$ .
- No caso de  $\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n \varphi$  ( $k > 1$ ):
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos  $f$ ) de  $k - 1$  argumentos,
  2. substituir todas as ocorrências livres de  $x_k$  em  $Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n \varphi$  por  $f(x_1, \dots, x_{k-1})$ , e
  3. eliminar  $\exists x_k$ .

## Teorema

Sejam  $\psi_1, \dots, \psi_n$  as «skolemizações» das fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , então

$$\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \text{ é consistente } \iff \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ é consistente.}$$

## **6. UNIFICAÇÃO**

# SUBSTITUIÇÃO (DE VARIÁVEIS)

## Definição

Uma **substituição** é uma função  $\sigma: \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{termos}\}$ .

# SUBSTITUIÇÃO (DE VARIÁVEIS)

## Definição

Uma **substituição** é uma função  $\sigma: \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{termos}\}$ .

## Nota

- Se

$$\{v \mid \sigma(v) \neq v\} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

é finito, podemos descrever a substituição  $\sigma$  indicando apenas as substituições «relevantes»:

$$\{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$$

sendo  $t_i = \sigma(v_i)$ .

# SUBSTITUIÇÃO (DE VARIÁVEIS)

## Definição

Uma **substituição** é uma função  $\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$ .

## Nota

- Se

$$\{v \mid \sigma(v) \neq v\} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

é finito, podemos descrever a substituição  $\sigma$  indicando apenas as substituições «relevantes»:

$$\{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$$

sendo  $t_i = \sigma(v_i)$ .

- A substituição

$$\{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}, \quad v \longmapsto v$$

denotamos por  $\varepsilon$ . Ou seja,  $\varepsilon = \emptyset$ .

## Exemplo

$\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$  corresponde à substituição

$\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$

$$v \longmapsto \begin{cases} f(z) & \text{se a variável } v \text{ é } x, \\ A & \text{se a variável } v \text{ é } y, \\ v & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

# SUBSTITUIÇÃO EM TERMOS

## Estender substituições:

Cada substituição  $\sigma: \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{termos}\}$  se pode estender a uma função

$$\hat{\sigma}: \{\text{termos}\} \rightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

# SUBSTITUIÇÃO EM TERMOS

## Estender substituições:

Cada substituição  $\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$  se pode estender a uma função

$$\hat{\sigma}: \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\hat{\sigma}(v) = \sigma(v)$ , para cada variável  $v$ .



# SUBSTITUIÇÃO EM TERMOS

## Estender substituições:

Cada substituição  $\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$  se pode estender a uma função

$$\hat{\sigma}: \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\hat{\sigma}(v) = \sigma(v)$ , para cada variável  $v$ .
- $\hat{\sigma}(c) = c$ , para cada símbolo de constante  $c$ .

## Estender substituições:

Cada substituição  $\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$  se pode estender a uma função

$$\hat{\sigma}: \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\hat{\sigma}(v) = \sigma(v)$ , para cada variável  $v$ .
- $\hat{\sigma}(c) = c$ , para cada símbolo de constante  $c$ .
- $\hat{\sigma}(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n))$ , para cada símbolo de função  $f$  de  $n$  argumentos e termos  $t_1, \dots, t_n$ .

# SUBSTITUIÇÃO EM TERMOS

## Estender substituições:

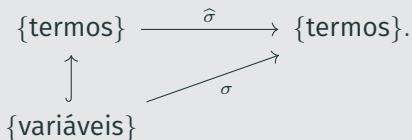
Cada substituição  $\sigma: \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{termos}\}$  se pode estender a uma função

$$\hat{\sigma}: \{\text{termos}\} \rightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\hat{\sigma}(v) = \sigma(v)$ , para cada variável  $v$ .
- $\hat{\sigma}(c) = c$ , para cada símbolo de constante  $c$ .
- $\hat{\sigma}(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n))$ , para cada símbolo de função  $f$  de  $n$  argumentos e termos  $t_1, \dots, t_n$ .

Portanto, obtemos



## Estender ainda mais

Dada uma substituição  $\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$  e uma fórmula  $E$  (sem quantificadores),

$$E\sigma$$

denota a fórmula obtida aplicando  $\hat{\sigma}$  ao todos os termos em  $E$ .

## Estender ainda mais

Dada uma substituição  $\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$  e uma fórmula  $E$  (sem quantificadores),

$$E\sigma$$

denota a fórmula obtida aplicando  $\hat{\sigma}$  ao todos os termos em  $E$ .

Para um conjunto  $\mathcal{E}$  de fórmulas (sem quantificadores), definimos:

$$\mathcal{E}\sigma = \{E\sigma \mid E \in \mathcal{E}\}.$$

## Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$ :

$$\hat{\sigma}(R(x, y)) =$$

## Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$ :

$$\hat{\sigma}(R(x, y)) = R(f(z), A).$$

## Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$ :

$$\hat{\sigma}(R(x, y)) = R(f(z), A).$$

- $\sigma = \{f(z, y)/x, A/y\}$ :

$$\hat{\sigma}(R(x, y)) =$$



## Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$ :

$$\hat{\sigma}(R(x, y)) = R(f(z), A).$$

- $\sigma = \{f(z, y)/x, A/y\}$ :

$$\hat{\sigma}(R(x, y)) = R(f(z, y), A).$$

# A COMPOSIÇÃO DE SUBSTITUIÇÕES

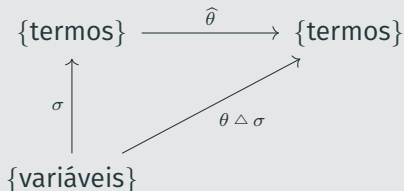
## Definição

Sejam

$$\sigma, \theta: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

substituições. A **composta de  $\theta$  após  $\sigma$**  é a função

$$\theta \triangle \sigma = \hat{\theta} \circ \sigma.$$



# A COMPOSIÇÃO DE SUBSTITUIÇÕES

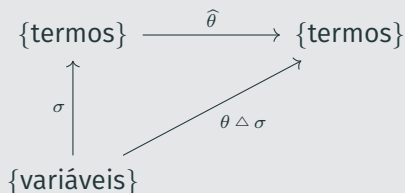
## Definição

Sejam

$$\sigma, \theta: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

substituições. A **composta de  $\theta$  após  $\sigma$**  é a função

$$\theta \triangle \sigma = \hat{\theta} \circ \sigma.$$



## Nota

Para cada expressão (= termo, fórmula)  $E$ :  $E(\theta \triangle \sigma) = (E\sigma)\theta$ .

## Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x, g(x)/y, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x, z/y, x/u\}.$$

Então,

$$\theta \triangle \sigma =$$

## Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x, g(x)/y, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x, z/y, x/u\}.$$

Então,

$$\theta \triangle \sigma = \{\hat{\theta}(A)/x, \hat{\theta}(g(x))/y, \hat{\theta}(y)/z,$$

## Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x, g(x)/y, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x, z/y, x/u\}.$$

Então,

$$\theta \triangle \sigma = \{\hat{\theta}(A)/x, \hat{\theta}(g(x))/y, \hat{\theta}(y)/z, x/u\}$$

## Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x, g(x)/y, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x, z/y, x/u\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \theta \triangle \sigma &= \{\hat{\theta}(A)/x, \hat{\theta}(g(x))/y, \hat{\theta}(y)/z, x/u\} \\ &= \{A/x, g(f(y))/y, z/z, x/u\} \end{aligned}$$

## Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x, g(x)/y, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x, z/y, x/u\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\theta \triangle \sigma &= \{\hat{\theta}(A)/x, \hat{\theta}(g(x))/y, \hat{\theta}(y)/z, x/u\} \\ &= \{A/x, g(f(y))/y, z/z, x/u\} \\ &= \{A/x, g(f(y))/y, x/u\}.\end{aligned}$$



# UM EXEMPLO (UNIFICAR TERMOS)

## Exemplo

Consideramos as expressões  $E_1 = x$  e  $E_2 = y$ :

Substituição	$x$	$y$

# UM EXEMPLO (UNIFICAR TERMOS)

## Exemplo

Consideramos as expressões  $E_1 = x$  e  $E_2 = y$ :

Substituição	$x$	$y$
$\{y/x\}$		

# UM EXEMPLO (UNIFICAR TERMOS)

## Exemplo

Consideramos as expressões  $E_1 = x$  e  $E_2 = y$ :

Substituição	$x$	$y$
$\{y/x\}$	$y$	

# UM EXEMPLO (UNIFICAR TERMOS)

## Exemplo

Consideramos as expressões  $E_1 = x$  e  $E_2 = y$ :

Substituição	$x$	$y$
$\{y/x\}$	$y$	$y$

# UM EXEMPLO (UNIFICAR TERMOS)

## Exemplo

Consideramos as expressões  $E_1 = x$  e  $E_2 = y$ :

Substituição	$x$	$y$
$\{y/x\}$	$y$	$y$
$\{x/y\}$		

# UM EXEMPLO (UNIFICAR TERMOS)

## Exemplo

Consideramos as expressões  $E_1 = x$  e  $E_2 = y$ :

Substituição	$x$	$y$
$\{y/x\}$	$y$	$y$
$\{x/y\}$	$x$	

# UM EXEMPLO (UNIFICAR TERMOS)

## Exemplo

Consideramos as expressões  $E_1 = x$  e  $E_2 = y$ :

Substituição	$x$	$y$
$\{y/x\}$	$y$	$y$
$\{x/y\}$	$x$	$x$

# UM EXEMPLO (UNIFICAR TERMOS)

## Exemplo

Consideramos as expressões  $E_1 = x$  e  $E_2 = y$ :

Substituição	$x$	$y$
$\{y/x\}$	$y$	$y$
$\{x/y\}$	$x$	$x$
$\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\}$		



# UM EXEMPLO (UNIFICAR TERMOS)

## Exemplo

Consideramos as expressões  $E_1 = x$  e  $E_2 = y$ :

Substituição	$x$	$y$
$\{y/x\}$	$y$	$y$
$\{x/y\}$	$x$	$x$
$\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\}$	$f(f(A))$	

# UM EXEMPLO (UNIFICAR TERMOS)

## Exemplo

Consideramos as expressões  $E_1 = x$  e  $E_2 = y$ :

Substituição	$x$	$y$
$\{y/x\}$	$y$	$y$
$\{x/y\}$	$x$	$x$
$\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\}$	$f(f(A))$	$f(f(A))$

# UM EXEMPLO (UNIFICAR TERMOS)

## Exemplo

Consideramos as expressões  $E_1 = x$  e  $E_2 = y$ :

Substituição	$x$	$y$
$\{y/x\}$	$y$	$y$
$\{x/y\}$	$x$	$x$
$\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\}$	$f(f(A))$	$f(f(A))$

**Nota:**

$$\begin{aligned}\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\} &= \{f(f(A))/y\} \triangle \{y/x\} \\ &= \{f(f(A))/x\} \triangle \{x/y\}.\end{aligned}$$

## Definição

- Seja  $\mathcal{E}$  um conjunto de expressões (termos, fórmulas). Uma substituição

$$\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

diz-se **unificador** de  $\mathcal{E}$  quando, para todos as expressões  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ ,  $E_1\sigma = E_2\sigma$ .

## Definição

- Seja  $\mathcal{E}$  um conjunto de expressões (termos, fórmulas). Uma substituição

$$\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

diz-se **unificador** de  $\mathcal{E}$  quando, para todos as expressões  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ ,  $E_1\sigma = E_2\sigma$ .

- Um conjunto  $\mathcal{E}$  de expressões diz-se **unificável** quando existe um unificador de  $\mathcal{E}$ .

## Exemplos

1.  $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$

### Exemplos

1.  $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$  é unificável com  $\sigma = \{A/x\}$ .

## EXEMPLOS E UNIFICADOR MAIS GERAL

### Exemplos

1.  $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$  é unificável com  $\sigma = \{A/x\}$ .
2.  $\mathcal{E} = \{R(x, y), Q(z)\}$



## EXEMPLOS E UNIFICADOR MAIS GERAL

### Exemplos

1.  $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$  é unificável com  $\sigma = \{A/x\}$ .
2.  $\mathcal{E} = \{R(x, y), Q(z)\}$  não é unificável.

## EXEMPLOS E UNIFICADOR MAIS GERAL

### Exemplos

1.  $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$  é unificável com  $\sigma = \{A/x\}$ .
2.  $\mathcal{E} = \{R(x, y), Q(z)\}$  não é unificável.
3.  $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(z))\}$

## EXEMPLOS E UNIFICADOR MAIS GERAL

### Exemplos

1.  $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$  é unificável com  $\sigma = \{A/x\}$ .
2.  $\mathcal{E} = \{R(x, y), Q(z)\}$  não é unificável.
3.  $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(z))\}$  é unificável com  $\sigma = \{f(z)/x\}$ .

## EXEMPLOS E UNIFICADOR MAIS GERAL

### Exemplos

1.  $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$  é unificável com  $\sigma = \{A/x\}$ .
2.  $\mathcal{E} = \{R(x, y), Q(z)\}$  não é unificável.
3.  $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(z))\}$  é unificável com  $\sigma = \{f(z)/x\}$ .
4.  $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(x))\}$

## EXEMPLOS E UNIFICADOR MAIS GERAL

### Exemplos

1.  $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$  é unificável com  $\sigma = \{A/x\}$ .
2.  $\mathcal{E} = \{R(x, y), Q(z)\}$  não é unificável.
3.  $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(z))\}$  é unificável com  $\sigma = \{f(z)/x\}$ .
4.  $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(x))\}$  não é unificável.

# EXEMPLOS E UNIFICADOR MAIS GERAL

## Exemplos

1.  $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$  é unificável com  $\sigma = \{A/x\}$ .
2.  $\mathcal{E} = \{R(x, y), Q(z)\}$  não é unificável.
3.  $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(z))\}$  é unificável com  $\sigma = \{f(z)/x\}$ .
4.  $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(x))\}$  não é unificável.

## Definição

Seja  $\mathcal{E}$  um conjunto de expressões. Um unificador  $\sigma$  de  $\mathcal{E}$  diz-se **unificador mais geral (abreviação: mgu)** de  $\mathcal{E}$  quando, para cada unificador  $\theta$  de  $\mathcal{E}$ , existe uma substituição  $\lambda$  tal que

$$\theta = \lambda \triangle \sigma.$$

Ou seja, cada unificador de  $\mathcal{E}$  se pode descrever como «acrescentar substituições acima do unificador mais geral».

## COMO OBTER O UNIFICADOR MAIS GERAL?

### O procedimento

Seja  $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  um conjunto de expressões:

## COMO OBTER O UNIFICADOR MAIS GERAL?

### O procedimento

Seja  $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  um conjunto de expressões:

1. Começar com  $k = 0$ ,  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ ,  $\sigma_0 = \varepsilon$ .



## COMO OBTER O UNIFICADOR MAIS GERAL?

### O procedimento

Seja  $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  um conjunto de expressões:

1. Começar com  $k = 0$ ,  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ ,  $\sigma_0 = \varepsilon$ .
2. **Se**  $\mathcal{E}_k$  tem apenas uma expressão, **então**  $\sigma_k$  é unificador mais geral de  $\mathcal{E}$  e podemos PARAR.

# COMO OBTER O UNIFICADOR MAIS GERAL?

## O procedimento

Seja  $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  um conjunto de expressões:

1. Começar com  $k = 0$ ,  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ ,  $\sigma_0 = \varepsilon$ .
2. **Se**  $\mathcal{E}_k$  tem apenas uma expressão, **então**  $\sigma_k$  é unificador mais geral de  $\mathcal{E}$  e podemos PARAR.
3. Determinar o **conjunto das diferenças** de  $\mathcal{E}_k$ ; isto é, o conjunto  $\mathcal{D}_k = \{D_1, \dots\}$  das *primeiras* sub-expressões (a contar da esquerda) onde as expressões de  $\mathcal{E}_k$  são diferentes.

# COMO OBTER O UNIFICADOR MAIS GERAL?

## O procedimento

Seja  $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$  um conjunto de expressões:

1. Começar com  $k = 0$ ,  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ ,  $\sigma_0 = \varepsilon$ .
2. **Se**  $\mathcal{E}_k$  tem apenas uma expressão, **então**  $\sigma_k$  é unificador mais geral de  $\mathcal{E}$  e podemos PARAR.
3. Determinar o **conjunto das diferenças** de  $\mathcal{E}_k$ ; isto é, o conjunto  $\mathcal{D}_k = \{D_1, \dots\}$  das *primeiras* sub-expressões (a contar da esquerda) onde as expressões de  $\mathcal{E}_k$  são diferentes.
4. **Se** existem uma variável  $v$  e um termo  $t$  em  $\mathcal{D}$  e  $v$  não ocorre em  $t$ , **então**
  - $\sigma_{k+1} = \{t/v\} \triangle \sigma_k$ ,
  - $\mathcal{E}_{k+1} = \mathcal{E}_k\{t/v\}$ ,
  - $k := k + 1$  e voltar ao ponto (2);

**se não** PARAR com a mensagem «Não é unificável».

## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(y, z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

Aqui:

- $x, y, z$  são variáveis.
- $A$  é um símbolo de constante.
- $h$  é um símbolo de função de um argumento.
- $P$  é um símbolo de predicado de dois argumentos.

## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(y, z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{y, x, A\}$ . Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x, z), P(x, h(x)), P(A, h(A))\}$$

## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(y, z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

0.  $\mathcal{D}_0 = \{y, x, A\}$ . Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x, z), P(x, h(x)), P(A, h(A))\}$$

1.  $\mathcal{D}_1 = \{x, A\}$ . Portanto:

$$\sigma_2 = \{A/x\} \triangle \sigma_1 = \{A/x, A/y\},$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1\sigma_2 = \{P(A, z), P(A, h(A)), P(A, h(A))\}$$

## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(y, z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

0.  $\mathcal{D}_0 = \{y, x, A\}$ . Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x, z), P(x, h(x)), P(A, h(A))\}$$

1.  $\mathcal{D}_1 = \{x, A\}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \{A/x\} \triangle \sigma_1 = \{A/x, A/y\}, \\ \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_1\sigma_2 = \{P(A, z), P(A, h(A)), P(A, h(A))\} \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{D}_2 = \{z, h(A)\}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \{h(A)/z\} \triangle \sigma_2 = \{h(A)/z, A/x, A/y\}, \\ \mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}_2\sigma_3 = \{P(A, h(A)), P(A, h(A)), P(A, h(A))\} \end{aligned}$$

## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(y, z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

0.  $\mathcal{D}_0 = \{y, x, A\}$ . Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x, z), P(x, h(x)), P(A, h(A))\}$$

1.  $\mathcal{D}_1 = \{x, A\}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \{A/x\} \triangle \sigma_1 = \{A/x, A/y\}, \\ \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_1\sigma_2 = \{P(A, z), P(A, h(A)), P(A, h(A))\} \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{D}_2 = \{z, h(A)\}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \{h(A)/z\} \triangle \sigma_2 = \{h(A)/z, A/x, A/y\}, \\ \mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}_2\sigma_3 = \{P(A, h(A)), P(A, h(A)), P(A, h(A))\} \end{aligned}$$

3.  $\mathcal{E}_3 = \{P(A, h(A))\}$ . Logo:  $\text{mgu} = \{A/x, A/y, h(A)/z\}$ .



## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{h(x), x, A\}$ . Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z), P(A, h(y)), P(A, h(A))\}$$

## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

0.  $\mathcal{D}_0 = \{h(x), x, A\}$ . Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z), P(A, h(y)), P(A, h(A))\}$$

1.  $\mathcal{D}_1 = \{h(A), A\}$ .

## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{h(x), x, A\}$ . Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z), P(A, h(y)), P(A, h(A))\}$$

1.  $\mathcal{D}_1 = \{h(A), A\}$ .

Como nenhuma variável pertence à  $\mathcal{D}_1$ , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{h(x), x, A\}$ . Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z), P(A, h(y)), P(A, h(A))\}$$

1.  $\mathcal{D}_1 = \{h(A), A\}$ .

Como nenhuma variável pertence à  $\mathcal{D}_1$ , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

## Exemplo

Consideramos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(x, h(A))\}$ :

## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{h(x), x, A\}$ . Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z), P(A, h(y)), P(A, h(A))\}$$

1.  $\mathcal{D}_1 = \{h(A), A\}$ .

Como nenhuma variável pertence à  $\mathcal{D}_1$ , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

## Exemplo

Consideramos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(x, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{h(x), x, x\} = \{h(x), x\}$ .

## Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$ :

- o.  $\mathcal{D}_0 = \{h(x), x, A\}$ . Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z), P(A, h(y)), P(A, h(A))\}$$

1.  $\mathcal{D}_1 = \{h(A), A\}$ .

Como nenhuma variável pertence à  $\mathcal{D}_1$ , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

## Exemplo

Consideramos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(x, h(A))\}$ :

- o.  $\mathcal{D}_0 = \{h(x), x, x\} = \{h(x), x\}$ .

Como  $x$  (a única variável em  $\mathcal{D}_0$ ) ocorre em  $h(x)$  (o único termo em  $\mathcal{D}_0$  diferente do  $x$ ), terminamos com a mensagem «Não é unificável».

### Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), \neg P(A, h(A))\}$ :



### Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), \neg P(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$ .

### Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), \neg P(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$ .

Como nenhuma variável pertence à  $\mathcal{D}_0$ , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

### Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), \neg P(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_o = \{\neg\}$ .

Como nenhuma variável pertence à  $\mathcal{D}_o$ , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

### Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), Q(A, h(A))\}$ :

### Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), \neg P(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$ .

Como nenhuma variável pertence à  $\mathcal{D}_0$ , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

### Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), Q(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{P, Q\}$ .

### Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), \neg P(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$ .

Como nenhuma variável pertence à  $\mathcal{D}_0$ , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

### Exemplo

Consideremos  $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), Q(A, h(A))\}$ :

o.  $\mathcal{D}_0 = \{P, Q\}$ .

Como nenhuma variável pertence à  $\mathcal{D}_0$ , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

## **7. O MÉTODO DE RESOLUÇÃO**

## Convenção

A partir de agora consideramos apenas linguagens sem o símbolo «=». Além disso, vamos supor que o domínio da interpretação não é vazio.

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

## As regras

Consideremos as fórmulas  $\varphi, \psi, \theta, \gamma$ .

- **Resolvente binária:** 
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

( $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$  sem variáveis comuns)
- **Fator:** 
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$



# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

## As regras

Consideremos as fórmulas  $\varphi, \psi, \theta, \gamma$ .

- **Resolvente binária:** 
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

( $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$  sem variáveis comuns)
- **Fator:** 
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

## Exemplos

Consideremos  $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$  e  $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$ .

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

## As regras

Consideremos as fórmulas  $\varphi, \psi, \theta, \gamma$ .

- **Resolvente binária:** 
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

( $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$  sem variáveis comuns)
- **Fator:** 
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

## Exemplos

Consideremos  $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$  e  $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$ .

- $P(f(y)) \vee R(g(y))$  é um fator de  $C_1$ .

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

## As regras

Consideremos as fórmulas  $\varphi, \psi, \theta, \gamma$ .

- **Resolvente binária:** 
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

( $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$  sem variáveis comuns)
- **Fator:** 
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

## Exemplos

Consideremos  $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$  e  $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$ .

- $P(f(y)) \vee R(g(y))$  é um fator de  $C_1$ .
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$  é uma resolvente binária de um fator de  $C_1$  e  $C_2$ .

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

## As regras

Consideremos as fórmulas  $\varphi, \psi, \theta, \gamma$ .

- **Resolvente binária:** 
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

( $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$  sem variáveis comuns)
- **Fator:** 
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

## Exemplos

Consideremos  $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$  e  $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$ .

- $P(f(y)) \vee R(g(y))$  é um fator de  $C_1$ .
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$  é uma resolvente binária de um fator de  $C_1$  e  $C_2$ .
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$  é uma resolvente de  $C_1$  e  $C_2$ .

**Resolvente** de cláusulas  $C_1$  e  $C_2$  = Resolvente binária de (um fator de)  $C_1$  e de (um fator de)  $C_2$ .

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

## As regras

Consideremos as fórmulas  $\varphi, \psi, \theta, \gamma$ .

- **Resolvente binária:** 
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

( $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$  sem variáveis comuns)
- **Fator:** 
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

## Recordamos

Para justificar que

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$$

( $\psi$  é consequência de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ), mostramos que

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi\}$$

é inconsistente.

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

## As regras

Consideremos as fórmulas  $\varphi, \psi, \theta, \gamma$ .

- **Resolvente binária:** 
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

( $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$  sem variáveis comuns)
- **Fator:** 
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

## O procedimento

Para «refutar» um conjunto  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  de fórmulas fechadas:

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

## As regras

Consideremos as fórmulas  $\varphi, \psi, \theta, \gamma$ .

- **Resolvente binária:** 
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

( $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$  sem variáveis comuns)
- **Fator:** 
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

## O procedimento

Para «refutar» um conjunto  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  de fórmulas fechadas:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

## As regras

Consideremos as fórmulas  $\varphi, \psi, \theta, \gamma$ .

- **Resolvente binária:** 
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

( $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$  sem variáveis comuns)
- **Fator:** 
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

## O procedimento

Para «refutar» um conjunto  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  de fórmulas fechadas:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;
2. «ignorar» os quantificadores  $\forall$  (já que não há outros e todas as variáveis são quantificadas);



# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

## As regras

Consideremos as fórmulas  $\varphi, \psi, \theta, \gamma$ .

- **Resolvente binária:** 
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

( $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$  sem variáveis comuns)
- **Fator:** 
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

## O procedimento

Para «refutar» um conjunto  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  de fórmulas fechadas:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;
2. «ignorar» os quantificadores  $\forall$  (já que não há outros e todas as variáveis são quantificadas);
3. renomear as variáveis em cada cláusula tal que são distintas;

# O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

## As regras

Consideremos as fórmulas  $\varphi, \psi, \theta, \gamma$ .

- **Resolvente binária:** 
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

( $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$  sem variáveis comuns)
- **Fator:** 
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

## O procedimento

Para «refutar» um conjunto  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  de fórmulas fechadas:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;
2. «ignorar» os quantificadores  $\forall$  (já que não há outros e todas as variáveis são quantificadas);
3. renomear as variáveis em cada cláusula tal que são distintas;
4. aplicar sucessivamente as duas regras anteriores, até se obter uma contradição (se for possível).

## Exemplo (de Lewis Carroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

---

Carroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

## Exemplo (de Lewis Carroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

---

Carroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

**Na linguagem de 1ª ordem (português  $\rightsquigarrow$  formulês)**

## Exemplo (de Lewis Carroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

---

Carroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x))$ .

## Exemplo (de Lewis Carroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

---

Carroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x))$ .
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x))$ .

## Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

---

Caroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$

## Exemplo (de Lewis Carroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

---

Carroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x))$ .
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x))$ .
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x))$ .
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x))$ .



## Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

---

Caroll, Lewis (1896). *Symbolic Logic*.

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x))$ .
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x))$ .
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x))$ .
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x))$ .      A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x))$ .

## UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

### Obter a forma normal («skolemização»)

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

## Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x))$

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

## Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

## Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x))$

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

## Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee I(x)).$

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

## Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x))$

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

## Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x (\neg I(x) \vee \neg S(x)).$



# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

## Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x (\neg I(x) \vee \neg S(x)).$
- $\exists x (P(x) \wedge B(x))$

## UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

### Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x (\neg I(x) \vee \neg S(x)).$
- $\exists x (P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c),$      $c$  um símbolo de constante.

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

## Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x (\neg I(x) \vee \neg S(x)).$
- $\exists x (P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c),$      $c$  um símbolo de constante.

## Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x),$$

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

## Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x (\neg I(x) \vee \neg S(x)).$
- $\exists x (P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c),$      $c$  um símbolo de constante.

## Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y),$$

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

## Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x (\neg I(x) \vee \neg S(x)).$
- $\exists x (P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c),$      $c$  um símbolo de constante.

## Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z),$$

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$       A negação:  $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

## Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x (\neg I(x) \vee \neg S(x)).$
- $\exists x (P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c),$      $c$  um símbolo de constante.

## Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

## UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

**Consideremos as seguintes fórmulas**

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

**A dedução**

## UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

**Consideremos as seguintes fórmulas**

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

**A dedução**

1.  $P(c)$ ,



## UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

**Consideremos as seguintes fórmulas**

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

**A dedução**

1.  $P(c)$ ,
2.  $\neg P(y) \vee I(y)$ ,      mgu de  $P(c)$  e  $P(y)$ :  $\{c/y\}$ .

## UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1.  $P(c)$ ,
2.  $\neg P(y) \vee I(y)$ ,      mgu de  $P(c)$  e  $P(y)$ :  $\{c/y\}$ .
3.  $I(c)$ ,

## UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1.  $P(c)$ ,
2.  $\neg P(y) \vee I(y)$ ,      mgu de  $P(c)$  e  $P(y)$ :  $\{c/y\}$ .
3.  $I(c)$ ,
4.  $\neg I(z) \vee \neg S(z)$ ,      mgu de  $I(c)$  e  $I(z)$ :  $\{c/z\}$ .

## UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1.  $P(c)$ ,
2.  $\neg P(y) \vee I(y)$ ,      mgu de  $P(c)$  e  $P(y)$ :  $\{c/y\}$ .
3.  $I(c)$ ,
4.  $\neg I(z) \vee \neg S(z)$ ,      mgu de  $I(c)$  e  $I(z)$ :  $\{c/z\}$ .
5.  $\neg S(c)$ ,

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

## A dedução

1.  $P(c)$ ,
2.  $\neg P(y) \vee I(y)$ ,      mgu de  $P(c)$  e  $P(y)$ :  $\{c/y\}$ .
3.  $I(c)$ ,
4.  $\neg I(z) \vee \neg S(z)$ ,      mgu de  $I(c)$  e  $I(z)$ :  $\{c/z\}$ .
5.  $\neg S(c)$ ,
6.  $\neg B(x) \vee S(x)$ ,      mgu de  $S(c)$  e  $S(x)$ :  $\{c/x\}$ .

# UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

## Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

## A dedução

1.  $P(c)$ ,
2.  $\neg P(y) \vee I(y)$ ,      mgu de  $P(c)$  e  $P(y)$ :  $\{c/y\}$ .
3.  $I(c)$ ,
4.  $\neg I(z) \vee \neg S(z)$ ,      mgu de  $I(c)$  e  $I(z)$ :  $\{c/z\}$ .
5.  $\neg S(c)$ ,
6.  $\neg B(x) \vee S(x)$ ,      mgu de  $S(c)$  e  $S(x)$ :  $\{c/x\}$ .
7.  $\neg B(c)$ ,

## UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

### A dedução

1.  $P(c)$ ,
2.  $\neg P(y) \vee I(y)$ ,      mgu de  $P(c)$  e  $P(y)$ :  $\{c/y\}$ .
3.  $I(c)$ ,
4.  $\neg I(z) \vee \neg S(z)$ ,      mgu de  $I(c)$  e  $I(z)$ :  $\{c/z\}$ .
5.  $\neg S(c)$ ,
6.  $\neg B(x) \vee S(x)$ ,      mgu de  $S(c)$  e  $S(x)$ :  $\{c/x\}$ .
7.  $\neg B(c)$ ,
8.  $B(c)$ ,

## UM EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

### A dedução

1.  $P(c)$ ,
2.  $\neg P(y) \vee I(y)$ ,      mgu de  $P(c)$  e  $P(y)$ :  $\{c/y\}$ .
3.  $I(c)$ ,
4.  $\neg I(z) \vee \neg S(z)$ ,      mgu de  $I(c)$  e  $I(z)$ :  $\{c/z\}$ .
5.  $\neg S(c)$ ,
6.  $\neg B(x) \vee S(x)$ ,      mgu de  $S(c)$  e  $S(x)$ :  $\{c/x\}$ .
7.  $\neg B(c)$ ,
8.  $B(c)$ ,
9.  $\perp$ .



### Exemplo

$\forall x P(x) \models \exists x P(f(x));$  ou seja  $\forall x P(x), \forall x \neg P(f(x)) \models \perp.$

Aqui:

- $x$  é uma variável.
- $f$  é um símbolo de função de um argumento.
- $P$  é um símbolo de relação de um argumento.

---

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

### Exemplo

$\forall x P(x) \models \exists x P(f(x))$ ; ou seja  $\forall x P(x), \forall x \neg P(f(x)) \models \perp$ .

Consideremos as fórmulas

$$P(x), \quad \neg P(f(x)).$$

---

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

### Exemplo

$\forall x P(x) \models \exists x P(f(x))$ ; ou seja  $\forall x P(x), \forall x \neg P(f(x)) \models \perp$ .

Consideremos as fórmulas

$$P(x), \quad \neg P(f(x)).$$

A dedução:

1.  $\neg P(f(x))$
2.  $P(x)$

---

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

### Exemplo

$\forall x P(x) \models \exists x P(f(x))$ ; ou seja  $\forall x P(x), \forall x \neg P(f(x)) \models \perp$ .

Consideremos as fórmulas

$$P(x), \quad \neg P(f(x)).$$

A dedução:

1.  $\neg P(f(x))$
2.  $P(x)$ ,  $P(f(x))$  e  $P(x)$  não são unificáveis!!?

---

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

### Exemplo

$\forall x P(x) \models \exists x P(f(x))$ ; ou seja  $\forall x P(x), \forall x \neg P(f(x)) \models \perp$ .

Consideremos as fórmulas

$$P(x), \quad \neg P(f(x)).$$

A dedução:

1.  $\neg P(f(x))$
2.  $P(x)$ ,  $P(f(x))$  e  $P(x)$  não são unificáveis!!?

Esquecemos renomear as variáveis:  $P(x) \rightsquigarrow P(y) \quad \dots$

---

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

## Exemplo

- |    |                                |       |
|----|--------------------------------|-------|
| 1. | $\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$ | (Hip) |
| 2. | $\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$      | (Hip) |
| 3. | $P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$      | (Hip) |
| 4. | $P(x_4) \vee Q(y_3)$           | (Hip) |

## Exemplo

- |                                   |                  |
|-----------------------------------|------------------|
| 1. $\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$ | (Hip)            |
| 2. $\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$      | (Hip)            |
| 3. $P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$      | (Hip)            |
| 4. $P(x_4) \vee Q(y_3)$           | (Hip)            |
| 5. $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$ | Resolvente (1,2) |

## Exemplo

- |                                   |                  |
|-----------------------------------|------------------|
| 1. $\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$ | (Hip)            |
| 2. $\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$      | (Hip)            |
| 3. $P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$      | (Hip)            |
| 4. $P(x_4) \vee Q(y_3)$           | (Hip)            |
| 5. $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$ | Resolvente (1,2) |
| 6. $\neg P(x_1)$                  | Fator (5)        |



## Exemplo

- |                                   |                  |
|-----------------------------------|------------------|
| 1. $\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$ | (Hip)            |
| 2. $\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$      | (Hip)            |
| 3. $P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$      | (Hip)            |
| 4. $P(x_4) \vee Q(y_3)$           | (Hip)            |
| 5. $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$ | Resolvente (1,2) |
| 6. $\neg P(x_1)$                  | Fator (5)        |
| 7. $P(x_3) \vee P(x_4)$           | Resolvente (3,4) |


## Exemplo

- |                                   |                  |
|-----------------------------------|------------------|
| 1. $\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$ | (Hip)            |
| 2. $\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$      | (Hip)            |
| 3. $P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$      | (Hip)            |
| 4. $P(x_4) \vee Q(y_3)$           | (Hip)            |
| 5. $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$ | Resolvente (1,2) |
| 6. $\neg P(x_1)$                  | Fator (5)        |
| 7. $P(x_3) \vee P(x_4)$           | Resolvente (3,4) |
| 8. $P(x_3)$                       | Fator (7)        |

## Exemplo

- |                                   |                  |
|-----------------------------------|------------------|
| 1. $\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$ | (Hip)            |
| 2. $\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$      | (Hip)            |
| 3. $P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$      | (Hip)            |
| 4. $P(x_4) \vee Q(y_3)$           | (Hip)            |
| 5. $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$ | Resolvente (1,2) |
| 6. $\neg P(x_1)$                  | Fator (5)        |
| 7. $P(x_3) \vee P(x_4)$           | Resolvente (3,4) |
| 8. $P(x_3)$                       | Fator (7)        |
| 9. $\perp$                        | Resolvente (6,8) |

## O método de resolução baseia-se no trabalho

 ROBINSON, JOHN ALAN (1965). «A machine-oriented logic based on the resolution principle». Em: *Journal of the ACM* **12**.(1), pp. 23–41.


Este método é (correto e) completo na lógica de 1ª ordem no seguinte sentido:

Se

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi,$$

então existe uma dedução de  $\perp$  a partir de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$ .

### Sobre a programação (em lógica):

 ABELSON, HAROLD e SUSSMAN, GERALD JAY (1996). *Structure and interpretation of computer programs*. 2ª ed. MIT Press. URL: [mitpress.mit.edu/sicp/full-text/book/book.html](http://mitpress.mit.edu/sicp/full-text/book/book.html).

Em particular: 4.4. «Logical Programming».

Vídeos em: <https://groups.csail.mit.edu/mac/classes/6.001/abelson-sussman-lectures/>