Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV

17/01/2023 **Exame final** **Duração: 2h30min**

Justifique *detalhadamente todas as respostas.* *Apresente todos os* ***cálculos****.*
Este exame tem ***6 questões****.*

(5.5) 1. Seja A a matriz dos coeficientes, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ o vetor das incógnitas e B a coluna dos termos independentes do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y + \alpha z = 3 \\ \alpha y + z = 2\alpha + 1 \end{cases},$$

onde α é um parâmetro real.

(a) Determine todos os valores do parâmetro α para os quais o sistema $AX = B$ é: **(i)** possível e determinado, **(ii)** possível e indeterminado e **(iii)** impossível.

(b) Considere $\alpha = -\mathbf{1}$. Seja r a reta determinada pelas duas primeiras equações do sistema $AX = B$ e $\mathcal{P}$ o plano que tem como equação geral a terceira equação deste sistema. Determine a posição relativa de r e $\mathcal{P}$.

(c) Considere $\alpha = \mathbf{0}$. Calcule o determinante de A e verifique que A é invertível. Calcule a inversa de A, A^{-1}.

(1.5) 2. Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 3,$$

usando as propriedades dos determinantes, calcule

$$\begin{vmatrix} 2a_1 - 4c_1 & c_1 & b_1 + 3a_1 \\ 2a_2 - 4c_2 & c_2 & b_2 + 3a_2 \\ 2a_3 - 4c_3 & c_3 & b_3 + 3a_3 \end{vmatrix}.$$

(3.0) 3. Considere os vetores $u = (0, 1, -2)$ e $v = (-2, 2, 1)$ pertencentes a $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcule a área do paralelogramo com um vértice na origem e lados dados por u e v.

(b) Considere a reta r que passa pelo ponto $B(2, -3, -2)$ e tem a direção do vetor $u = (0, 1, -2)$. Determine a distância do ponto $A(4, -5, -3)$ à reta r.

(4.0) 4. Considere o subconjunto $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que $\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine uma base ordenada B de $\mathcal{S}$ e indique a dimensão de S.

(c) Determine a projeção ortogonal de $v = (3, 0, 2)$ em $\mathcal{S}$.

(3.5) 5. Considere que A é uma matriz simétrica 3×3 que verifica as igualdades

$$AX = 2X, \; AY = 2Y \; \text{ e } AZ = -3Z,$$

onde $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $Z = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine, justificando, uma matriz ortogonal P e uma matriz diagonal D tal que $D = P^\top AP$.

(b) Considere em $\mathbb{R}^3$ a quádrica de equação $X^T AX = 4$. Determine uma equação reduzida e classifique a quádrica.

(2.5) 6. Considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\phi(X) = AX$, com $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Seja $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, -1))$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C}_2 = ((1, 0), (0, 1))$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(a) Determine o núcleo de ϕ. Verifique se ϕ é sobrejetiva.

(b) Determine a matriz de representação de ϕ, $M = M(\phi, \mathcal{C}_2, \mathcal{B})$.