Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

Classificação

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Teste 1

2 de novembro de 2016 — Duração: **1h45**

Valores

Nome ____________________ N.° Mec. __________

Curso ____________________ N.° Folhas suplementares __________

Questão	1	2	3	4	5	6	total
Cotação	45	30	20	20	30	55	200
Classif.							

1. Esta primeira questão é constituída por 5 alíneas de escolha múltipla.

Atribuem-se 9 pontos por cada resposta correta,
0 pontos por cada resposta em branco e
-3 pontos por cada resposta errada.

E \ C	0	1	2	3	4	5
0	00	09	18	27	36	45
1	-03	06	15	24	33	
2	-06	03	12	21		
3	-09	00	09			
4	-12	-03				
5	-15					

(Reservado à cotação)

Cada alínea tem uma só opção correta que deve assinalar com uma $\times$ no ☐ correspondente.

(a) Seja G a matriz obtida a partir de D através das seguintes operações elementares nas linhas $L_1 := \frac{1}{2}L_1, \quad L_2 := L_2 - 4L_1, \quad L_3 := L_3 - 7L_1.$

☐ $\det(G) = \det(D)$.
☐ $\det(G) = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times \det(D)$.
☐ $\det(G) = 2\det(D)$.
☐ $\det(G) = \frac{1}{2}\det(D)$.

(b) Para as matrizes $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1+2x & 2 & 3 \\ 4+5x & 5 & 6 \\ 7+8x & 8 & 9 \end{bmatrix}$ com $x \neq 0$ podemos dizer

☐ C é invertível.
☐ $\det(C) = \det(F)$.
☐ $\det(F) = x$.
☐ $\det(F) = \det(C) + x$.

(c) Considera a matriz $A_{3\times 5}$ tal que $\operatorname{car}(A) = 3$. O sistema $AX = B$

☐ é tal que $\operatorname{car}(A|B) > 3$.
☐ tem sempre solução única.
☐ tem uma infinidade de soluções.
☐ não tem solução.

(d) Considera a matriz $A_{3\times 3}$ invertível com colunas C_1, C_2 e C_3, um vetor $B \in \mathbb{R}^3$ e o sistema $AX = B$.

☐ O sistema $AX = B$ é sempre impossível.
☐ Se $B = C_1 + C_2 + C_3$, então $X = (1, 1, 1)$.
☐ Se $B = C_3$, então o sistema é possível e indeterminado.
☐ O sistema $AX = B$ é sempre possível e indeterminado.

(e) Considere as retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ de equações $x = y + z = 1$ e $(x, y, z) = (2, -1, 0) + \alpha(0, 1, 1)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, respectivamente.

☐ A distância entre as duas retas é 0.
☐ O plano de equação $x = 1$ contém a reta $\mathcal{R}_2$.
☐ As retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ intersetam-se num ponto, são concorrentes.
☐ A reta de equações $y = 0$ e $z = 1$ é ortogonal às retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

2. Considera as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Se possível, calcula o determinante da matriz AB.

(b) A matriz BA é invertível? Justifica.

---

3. Ao aplicar o método de eliminação de Gauss-Jordan à resolução de determinado sistema obteve-se uma matriz ampliada $[R|d]$ que permitiu obter a seguinte solução do sistema $X=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Uma matriz ampliada $[R|d]$ obtida pode ser $\begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$

4. Considera as matrizes $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Usando o método de eliminação de Gauss ou o método de eliminação de Gauss-Jordan, resolve o sistema $AX = B$ e indica o seu conjunto de soluções.

---

5. Considera as matrizes $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $E=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. A matriz E é a matriz escalonada por linhas da matriz $[A|Q]$.

(a) Indica: $\text{nul}(A) = \boxed{}$ e $\text{car}(A) = \boxed{}$.

(b) Determina $\mathcal{N}(A)$, o espaço nulo de A, ou seja o conjunto de soluções do sistema homogéneo.

(c) Verifica se o vetor Q pertence a $\mathcal{C}(A)$, o espaço das colunas de A. Justifica a tua resposta.

6. Considera a reta $\mathcal{R}$ que passa nos pontos $A(3,0,1)$ e $B(1,0,0)$ e o plano $\mathcal{P}$ de equação geral $-x-4y+az=1$.

(a) Determina as equações cartesianas da reta $\mathcal{R}$.

(b) Determina uma equação do plano que contém o ponto $P(2,1,-1)$ e é ortogonal à reta $\mathcal{R}$.

(c) Em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}$, indica, justificando, qual a posição relativa da reta $\mathcal{R}$ e do plano $\mathcal{P}$.

Nota que as matrizes $D = \begin{bmatrix} -1 & -4 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} -1 & -4 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & -2 \end{bmatrix}$ são equivalentes por linhas.

(d) Em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}$, calcula $\operatorname{dist}(\mathcal{R},\mathcal{P})$, a distância da reta $\mathcal{R}$ ao plano $\mathcal{P}$.