# Matemática Discreta

Ano Letivo 2021/22 (Versão: 11 de Junho de 2022)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

# Capítulo V
# Elementos de Teoria dos Grafos

## Parte II

## Caminhos de custo mínimo

# Índice

# 1. Alguns conceitos métricos

## Passeios em grafos

### Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um passeio em $G$ é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

### Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um passeio em $G$ é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que $P$ é um passeio entre os vértices $v_0$ e $v_k$ (ou um passeio-$(v_0, v_k)$).

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um passeio em $G$ é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que $P$ é um passeio entre os vértices $v_0$ e $v_k$ (ou um passeio-$(v_0, v_k)$). O vértice $v_0$ designa-se por vértice inicial do passeio $P$ e $v_k$ designa-se por vértice final do passeio $P$, os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ designam-se por vértices intermédios.

### Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um passeio em $G$ é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que $P$ é um passeio entre os vértices $v_0$ e $v_k$ (ou um passeio-$(v_0, v_k)$). O vértice $v_0$ designa-se por vértice inicial do passeio $P$ e $v_k$ designa-se por vértice final do passeio $P$, os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ designam-se por vértices intermédios.

### Nota

Num grafo simples, um passeio é determinado pela sequência dos sucessivos vértices; isto é, basta considerar

$$P = (v_0, v_1, \ldots, v_k).$$

# Trajetos, caminhos, circuitos e ciclos

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também circuito.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também circuito.
- Um caminho é um trajeto que não repete vértices.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também circuito.
- Um caminho é um trajeto que não repete vértices.
- Um ciclo $P$ em $G$ é intuitivamente um «caminho fechado». Mais rigorosamente,

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também circuito.
- Um caminho é um trajeto que não repete vértices.
- Um ciclo $P$ em $G$ é intuitivamente um «caminho fechado». Mais rigorosamente,
  1. $P$ é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também circuito.
- Um caminho é um trajeto que não repete vértices.
- Um ciclo $P$ em $G$ é intuitivamente um «caminho fechado». Mais rigorosamente,
    1. $P$ é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
    2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também circuito.
- Um caminho é um trajeto que não repete vértices.
- Um ciclo $P$ em $G$ é intuitivamente um «caminho fechado». Mais rigorosamente,
  1. $P$ é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
  2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou
  3. $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k, e_{k+1}, v_0)$ é um passeio com $k \geq 2$ e $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ é um caminho.

# Trajetos, caminhos, circuitos e ciclos

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também circuito.
- Um caminho é um trajeto que não repete vértices.
- Um ciclo $P$ em $G$ é intuitivamente um «caminho fechado». Mais rigorosamente,
  1. $P$ é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
  2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou
  3. $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k, e_{k+1}, v_0)$ é um passeio com $k \geq 2$ e $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ é um caminho.

**Nota**

Num grafo simples, um ciclo tem pelo menos três vértices.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$ um passeio de $G$. Então, o comprimento de $P$ é

$$\mathrm{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\mathrm{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

# Comprimento de passeios

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$ um passeio de $G$. Então, o comprimento de $P$ é

$$\text{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\text{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

**Nota**

No caso dos caminhos e dos trajetos, o comprimento coincide com o número de arestas.

### Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots e_k, v_k)$ um passeio de $G$. Então, o comprimento de $P$ é

$$\mathrm{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\mathrm{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

### Nota

No caso dos caminhos e dos trajetos, o comprimento coincide com o número de arestas.

### Exemplos

Uma aresta é um caminho de comprimento 1 e um vértice é um caminho de comprimento 0.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). Para $x, y \in V$, consideremos o conjunto

$$\mathcal{P}_{x,y} = \{\text{os caminhos entre } x \text{ e } y\}.$$

Designa-se por distância entre vértices de $G$ a função

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\colon V \times V &\longrightarrow \{0, 1, \dots, \nu(G), \infty\} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \min\{\operatorname{comp}(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,y}\} & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \varnothing, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \varnothing. \end{cases} \end{aligned}$$

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). Para $x, y \in V$, consideremos o conjunto

$$\mathcal{P}_{x,y} = \{\text{os caminhos entre } x \text{ e } y\}.$$

Designa-se por distância entre vértices de $G$ a função

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\colon V \times V &\longrightarrow \{0, 1, \dots, \nu(G), \infty\} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \min\{\operatorname{comp}(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,y}\} & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \varnothing, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \varnothing. \end{cases} \end{aligned}$$

**Nota**

Tem-se

$$\operatorname{dist}(x, x) = 0, \quad \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}(y, z) \geq \operatorname{dist}(x, z),$$

e $\operatorname{dist}(x, y) = \operatorname{dist}(y, x)$, para todos os $x, y, z \in V$.

# Existem caminhos «compridos»...

**Teorema**

*Seja* $G = (V, E)$ *um grafo simples finito.*

# Existem caminhos «compridos»...

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*

## Existem caminhos «compridos»...

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

# Existem caminhos «compridos»...

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

$\square$

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

Portanto, todos os vizinhos de $v_k$ pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho),

$\square$

# Existem caminhos «compridos»...

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

Portanto, todos os vizinhos de $v_k$ pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\operatorname{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

$\square$

# Existem caminhos «compridos»...

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

Portanto, todos os vizinhos de $v_k$ pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$.

$\square$

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

Portanto, todos os vizinhos de $v_k$ pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$. Então, $C = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i)$ é um ciclo (note-se que $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_k)$ tem pelo menos três vertices porque $d(v_k) \geq 2$) $\square$

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

Portanto, todos os vizinhos de $v_k$ pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$. Então, $C = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i)$ é um ciclo (note-se que $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_k)$ tem pelo menos três vertices porque $d(v_k) \geq 2$) de comprimento $d(v_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$. $\square$

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- A cintura $g(G)$ de $G$ é o comprimento de um circuito de menor comprimento em $G$ se existe pelo menos um circuito em $G$; caso contrario $g(G) = \infty$.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- A cintura $g(G)$ de $G$ é o comprimento de um circuito de menor comprimento em $G$ se existe pelo menos um circuito em $G$; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre $v$ e todos os vértices de $G$ designa-se por excentricidade de $v$ e denota-se por $e(v)$.

  Mais formalmente: $\quad e(v) = \max_{u \in V} \operatorname{dist}_G(u, v).$

### Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- A cintura $g(G)$ de $G$ é o comprimento de um circuito de menor comprimento em $G$ se existe pelo menos um circuito em $G$; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre $v$ e todos os vértices de $G$ designa-se por excentricidade de $v$ e denota-se por $e(v)$.

  Mais formalmente: $e(v) = \max\limits_{u \in V} \operatorname{dist}_G(u, v)$.
- A maior excentricidade dos seus vértices designa-se por diâmetro de $G$ e denota-se por $\operatorname{diam}(G)$.

  **Nota**: $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.

### Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- A cintura $g(G)$ de $G$ é o comprimento de um circuito de menor comprimento em $G$ se existe pelo menos um circuito em $G$; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre $v$ e todos os vértices de $G$ designa-se por excentricidade de $v$ e denota-se por $e(v)$.

  Mais formalmente: $\quad e(v) = \max\limits_{u \in V} \operatorname{dist}_G(u, v).$
- A maior excentricidade dos seus vértices designa-se por diâmetro de $G$ e denota-se por $\operatorname{diam}(G)$.

  **Nota**: $\quad \operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y).$
- A menor excentricidade dos vértices de $G$ designa-se por raio e denota-se por $r(G)$.

## Cintura e excentricidade

### Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

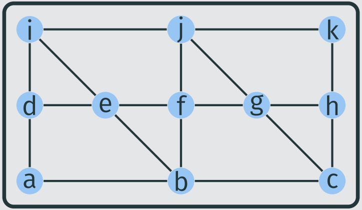
- A cintura $g(G)$ de $G$ é o comprimento de um circuito de menor comprimento em $G$ se existe pelo menos um circuito em $G$; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre $v$ e todos os vértices de $G$ designa-se por excentricidade de $v$ e denota-se por $e(v)$.

  Mais formalmente: $e(v) = \max_{u \in V} \operatorname{dist}_G(u, v)$.
- A maior excentricidade dos seus vértices designa-se por diâmetro de $G$ e denota-se por $\operatorname{diam}(G)$.

  **Nota**: $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- A menor excentricidade dos vértices de $G$ designa-se por raio e denota-se por $r(G)$.
- Um vértice $v$ diz-se central quando $e(v) = r(G)$. O conjunto dos vértices centrais designa-se por centro do grafo.

**Exemplo (TPC)**

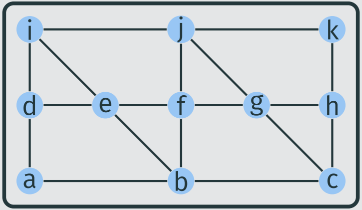
Considere o seguinte grafo $G$.



# Um exemplo (concreto)

**Exemplo (TPC)**

Considere o seguinte grafo $G$.

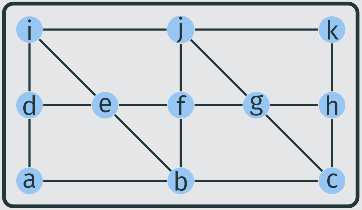



1. Determine a cintura do grafo $G$.

# Um exemplo (concreto)

**Exemplo (TPC)**

Considere o seguinte grafo $G$.

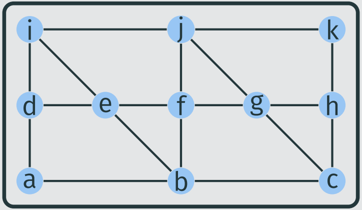



1. Determine a cintura do grafo $G$.
2. Determine a excentricidade dos vértices de $G$.

# Um exemplo (concreto)

**Exemplo (TPC)**

Considere o seguinte grafo $G$.

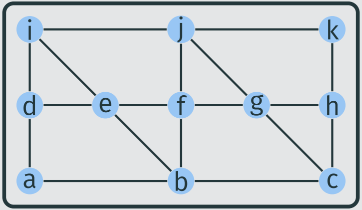



1. Determine a cintura do grafo $G$.
2. Determine a excentricidade dos vértices de $G$.
3. Determine o raio e o diâmetro de $G$.

# Um exemplo (concreto)

**Exemplo (TPC)**

Considere o seguinte grafo $G$.




1. Determine a cintura do grafo $G$.
2. Determine a excentricidade dos vértices de $G$.
3. Determine o raio e o diâmetro de $G$.
4. Determine o centro de $G$.

**Exemplo**

*Seja* $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$*. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

**Exemplo**

*Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

**Exemplo**

*Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.

# Mais um exemplo

## Exemplo

*Seja* $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$*. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.

# Mais um exemplo

**Exemplo**

*Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x, y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre $x$ e $y$ (ou $\infty$).

### Exemplo

*Seja* $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$*. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre $x$ e $y$ (ou $\infty$).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

# Mais um exemplo

**Exemplo**

*Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre $x$ e $y$ (ou $\infty$).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

**Caso 1:** Suponhamos que existem $x, y \in V$ com $\operatorname{dist}(x, y) = \infty$.

Então, para todo o $z \in V$,

# Mais um exemplo

**Exemplo**

*Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \emptyset$. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre $x$ e $y$ (ou $\infty$).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

**Caso 1:** Suponhamos que existem $x, y \in V$ com $\operatorname{dist}(x, y) = \infty$.

Então, para todo o $z \in V$, $\operatorname{dist}(z, x) = \infty$ ou $\operatorname{dist}(z, y) = \infty$ e por isso $r(G) = \infty$ e $\operatorname{diam}(G) = \infty$.

# Mais um exemplo

## Exemplo

*Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre $x$ e $y$ (ou $\infty$).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

**Caso 2:** Suponhamos que $\operatorname{dist}(x, y) < \infty$, para todos os $x, y \in V$.

**Exemplo**

*Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre $x$ e $y$ (ou $\infty$).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

**Caso 2:** Suponhamos que $\operatorname{dist}(x, y) < \infty$, para todos os $x, y \in V$.

Sejam $x, y$ os vértices com a maior distância $\operatorname{dist}(x, y) = \operatorname{diam}(G)$ e seja $z$ um vértice central (ou seja, $e(z) = r(G)$).

# Mais um exemplo

**Exemplo**

*Seja* $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$*. Então,*

$$r(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\mathrm{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho entre $x$ e $y$ (ou $\infty$).

Logo, $r(G) \leq \mathrm{diam}(G)$.

**Caso 2:** Suponhamos que $\mathrm{dist}(x, y) < \infty$, para todos os $x, y \in V$.

Sejam $x, y$ os vértices com a maior distância $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{diam}(G)$ e seja $z$ um vértice central (ou seja, $e(z) = r(G)$). Portanto:

$$\mathrm{diam}(G) = \mathrm{dist}(x, y) \leq \mathrm{dist}(x, z) + \mathrm{dist}(z, y) \leq 2\, e(z) = 2r(G).$$

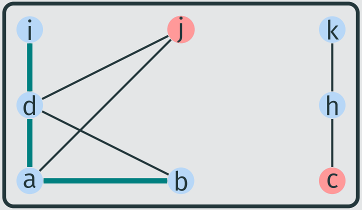
# 2. Conexidade

# A relação de conexidade

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se conexos quando existe um caminho entre eles em $G$.

**Exemplo**

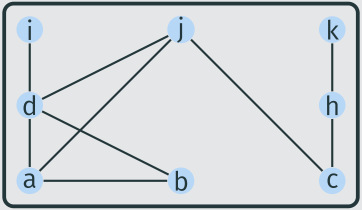



Por exemplo: $i$ e $b$ são conexos, e $j$ e $c$ não são conexos.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se conexos quando existe um caminho entre eles em $G$. O grafo $G$ com pelo menos um vértice diz-se conexo quando todos os seus vértices são conexos.

**Exemplo**



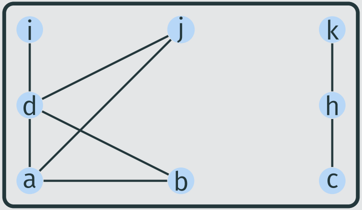

Grafo conexo

# A RELAÇÃO DE CONEXIDADE

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se conexos quando existe um caminho entre eles em $G$. O grafo $G$ com pelo menos um vértice diz-se conexo quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se desconexo.

**Exemplo**




Grafo desconexo

## A RELAÇÃO DE CONEXIDADE

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se conexos quando existe um caminho entre eles em $G$. O grafo $G$ com pelo menos um vértice diz-se conexo quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se desconexo.

**Nota**

A relação de conexidade definida por

$$x \sim y \text{ quando } x \text{ e } y \text{ são conexos}$$

é uma relação de equivalência em $V$.

# A relação de conexidade

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se conexos quando existe um caminho entre eles em $G$. O grafo $G$ com pelo menos um vértice diz-se conexo quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se desconexo.

**Nota**

A relação de conexidade definida por

$$x \sim y \text{ quando } x \text{ e } y \text{ são conexos}$$

é uma relação de equivalência em $V$.

**Nota**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo conexo. Então, $\nu(G) \leq \varepsilon(G) + 1$.

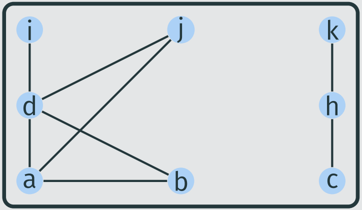
---

Ver a solução do exercício 25.

**Definição**

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se componentes conexas.

**Exemplo**

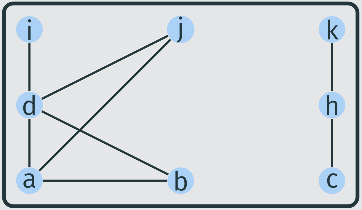


# Componentes conexas

**Definição**

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se componentes conexas. O número de componentes conexas de $G$ denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

**Exemplo**



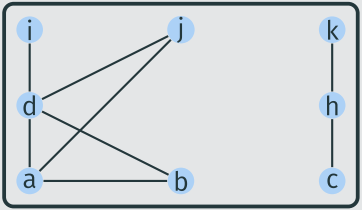

$\mathrm{cc}(G) = 2.$

# Componentes conexas

**Definição**

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se componentes conexas. O número de componentes conexas de $G$ denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

**Exemplo**




$\mathrm{cc}(G) = 2.$

**Nota**

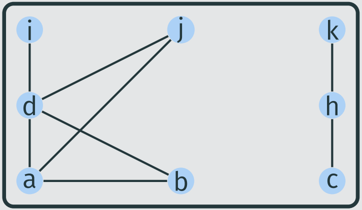
- Um grafo $G$ é conexo se e só se $\mathrm{cc}(G) = 1$.

# Componentes conexas

**Definição**

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se componentes conexas. O número de componentes conexas de $G$ denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

**Exemplo**




$\mathrm{cc}(G) = 2.$

**Nota**

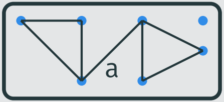
- Um grafo $G$ é conexo se e só se $\mathrm{cc}(G) = 1$.
- As componentes conexas são precisamente os subgrafos (induzidos) conexos maximais.

# Pontes

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Uma aresta $a \in E$ diz-se uma ponte (ou uma aresta de corte) quando $\mathrm{cc}(G - a) > \mathrm{cc}(G)$.

**Exemplo**

$G$: 

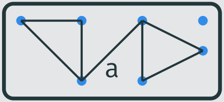

A aresta $a$ é uma ponte de $G$.

# Pontes

## Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Uma aresta $a \in E$ diz-se uma ponte (ou uma aresta de corte) quando $\operatorname{cc}(G - a) > \operatorname{cc}(G)$.

## Exemplo

$G$: 


A aresta $a$ é uma ponte de $G$.

## Nota

Ou seja, $a$ é uma ponte de $G$ se a eliminação de $a$ aumenta o número de componentes de $G$.

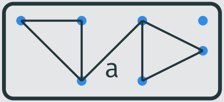
# Pontes

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Uma aresta $a \in E$ diz-se uma ponte (ou uma aresta de corte) quando $\mathrm{cc}(G - a) > \mathrm{cc}(G)$.

**Exemplo**

$G$:




A aresta $a$ é uma ponte de $G$.

**Teorema**

*Sejam $G = (V, E, \psi)$ um grafo e $a \in E$ com $\psi(a) = \{u, v\}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

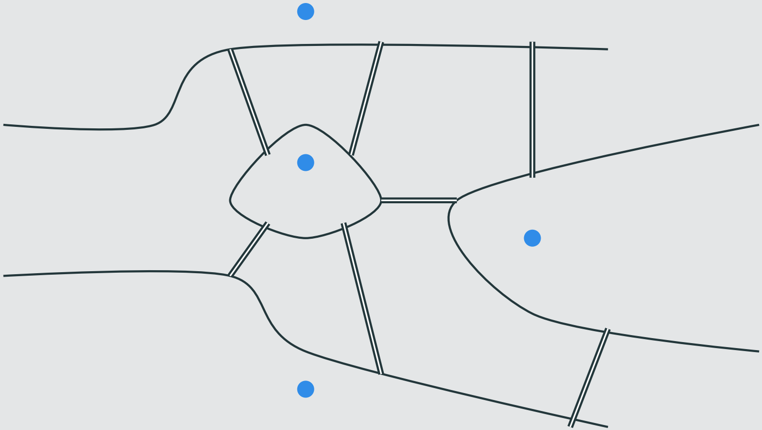
(i) *A aresta $a$ é uma ponte de $G$*

(ii) $\mathrm{cc}(G - a) = \mathrm{cc}(G) + 1$ *(supondo que $G$ é finito).*

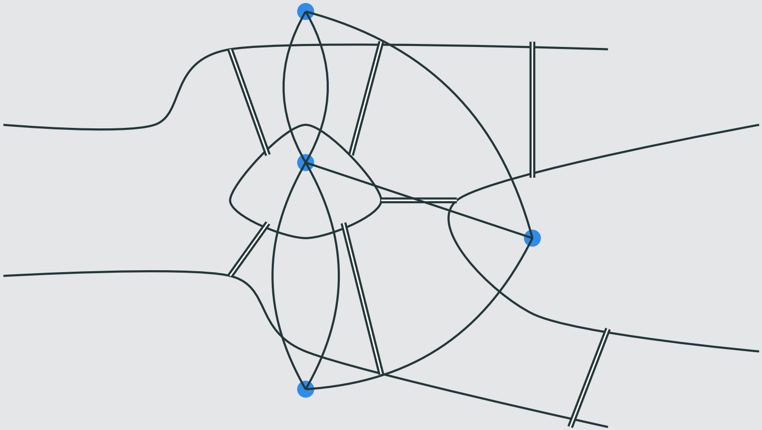
(iii) *Os vértices $u$ e $v$ não são conexos em $G - a$.*

(iv) *A aresta $a$ não pertence a nenhum circuito de $G$.*

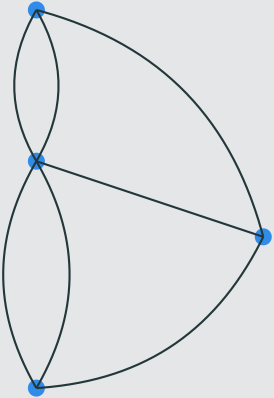
**Exemplo**



**Exemplo**



## Exemplo



# Voltando ao Königsberg

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um circuito em $G$ diz-se circuito de Euler quando contém todas as arestas de $G$.

# Voltando ao Königsberg

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um circuito em $G$ diz-se circuito de Euler quando contém todas as arestas de $G$.

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ tem grau par.*

# Voltando ao Königsberg

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ tem grau par.*

**Demonstração.**

# Voltando ao Königsberg

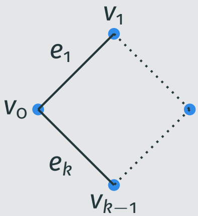
**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ tem grau par.*

**Demonstração.**

Suponha que $G$ tem um circuito de Euler, digamos

$P$:

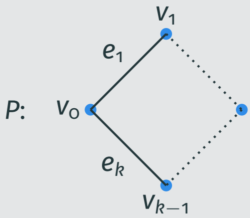


**Teorema**

*Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.*

**Demonstração.**

Suponha que $G$ tem um circuito de Euler, digamos




Se um vértice $v$ aparece $n$ vezes em $P$, então $d(v) = 2n$ é par.

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ tem grau par.*

**Demonstração.**

Suponha agora que todos os vértices de $G$ tem grau par.

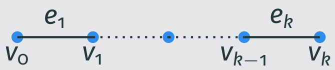
**Teorema**

*Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.*

**Demonstração.**

Suponha agora que todos os vértices de $G$ tem grau par. Seja

$P$:




um trajeto de maior comprimento em $G$.

# Voltando ao Königsberg

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ tem grau par.*

**Demonstração.**

Suponha agora que todos os vértices de $G$ tem grau par. Seja


um trajeto de maior comprimento em $G$. Logo, $P$ contém todas as arestas com um vértice em $v_k$. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$.

# Voltando ao Königsberg

**Teorema**

*Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.*

**Demonstração.**

Suponha agora que todos os vértices de $G$ tem grau par. Seja


um trajeto de maior comprimento em $G$. Logo, $P$ contém todas as arestas com um vértice em $v_k$. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$. Suponha que existe uma aresta fora de $P$; neste caso existe uma aresta $v$ — $v_i$ fora de $P$ com $v_i$ em $P$.

# Voltando ao Königsberg

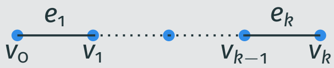
**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ tem grau par.*

**Demonstração.**

Suponha agora que todos os vértices de $G$ tem grau par. Seja

$P$:

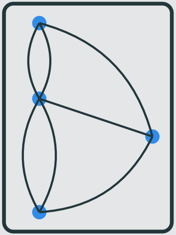



um trajeto de maior comprimento em $G$. Logo, $P$ contém todas as arestas com um vértice em $v_k$. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$. Suponha que existe uma aresta fora de $P$; neste caso existe uma aresta $v$ — $v_i$ fora de $P$ com $v_i$ em $P$. Então,

$P$:

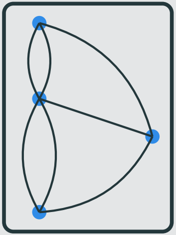

é um trajeto mais comprido, uma contradição. □

**Exemplo**



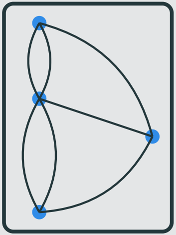
# Voltando ao Königsberg

**Exemplo**



Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, respetivamente; logo, não existe um circuito de Euler.

### Exemplo

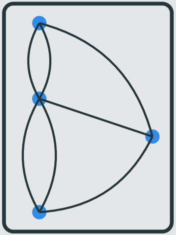


Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, respetivamente; logo, não existe um circuito de Euler.

### Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um trajeto em $G$ diz-se trajeto de Euler quando contém todas as arestas de $G$.

**Exemplo**



Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, respetivamente; logo, não existe um circuito de Euler.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um trajeto em $G$ diz-se trajeto de Euler quando contém todas as arestas de $G$.

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um trajeto de Euler se e só o número de vértices de grau ímpar é 0 ou 2.*

# 3. Grafos particulares

# Grafos completos e grafos nulos

**Definição**

Um grafo simples $G$ diz-se completo quando todos os pares de vértices são adjacentes.

# Grafos completos e grafos nulos

**Definição**

Um grafo simples $G$ diz-se completo quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se nulo quando $E = \varnothing$; ou seja, quando não tem arestas.

# Grafos completos e grafos nulos

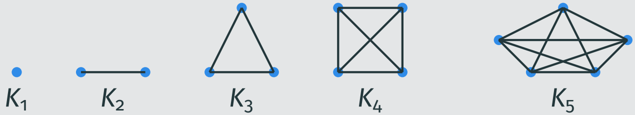
## Definição

Um grafo simples $G$ diz-se completo quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se nulo quando $E = \varnothing$; ou seja, quando não tem arestas.

## Nota

- A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem $n \in \mathbb{N}$. Denota-se este grafo por $K_n$, e tem-se $\epsilon(K_n) = \binom{n}{2}$.

## Exemplos (Grafos completos)



# Grafos completos e grafos nulos

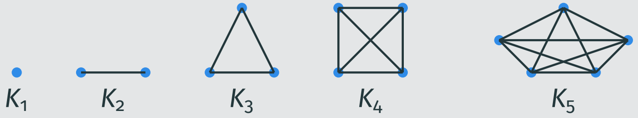
## Definição

Um grafo simples $G$ diz-se completo quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se nulo quando $E = \varnothing$; ou seja, quando não tem arestas.

## Nota

- A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem $n \in \mathbb{N}$. Denota-se este grafo por $K_n$, e tem-se $\epsilon(K_n) = \binom{n}{2}$.
- Cada grafo nulo é simples, de facto, os grafos nulos são precisamente os grafos complementares dos grafos completos. Portanto, denotamos o grafo nulo com $n$ vértices por $K_n^{\complement}$.

## Exemplos (Grafos completos)



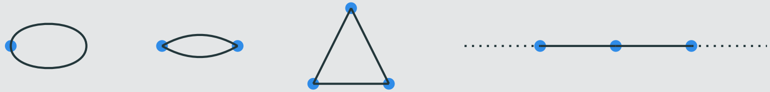
**Definição**

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se $k$-regular quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se regular quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

### Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se $k$-regular quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se regular quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

### Exemplos (Grafos 2-regulares)

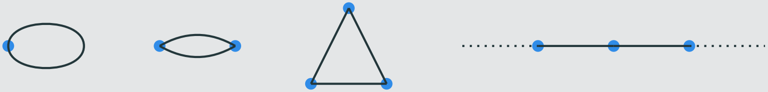


# Grafos regulares

**Definição**

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se $k$-regular quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se regular quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

**Exemplos (Grafos 2-regulares)**



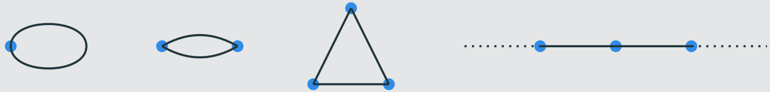
**Nota**

- Os grafos 3-regulares designam-se por grafos cúbicos.

## Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se $k$-regular quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se regular quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

## Exemplos (Grafos 2-regulares)



## Nota

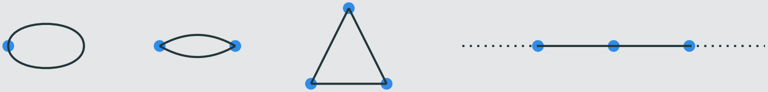
- Os grafos 3-regulares designam-se por grafos cúbicos.
- O grafo $K_n$ é $(n-1)$-regular.

# Grafos regulares

## Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se $k$-regular quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se regular quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

## Exemplos (Grafos 2-regulares)



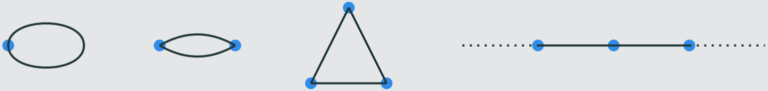
## Nota

- Os grafos 3-regulares designam-se por grafos cúbicos.
- O grafo $K_n$ é $(n-1)$-regular. De facto, um grafo simples $G$ com $n$ vértices é $(n-1)$-regular se e só se $G$ é completo.

**Definição**

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se $k$-regular quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se regular quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

**Exemplos (Grafos 2-regulares)**



**Nota**

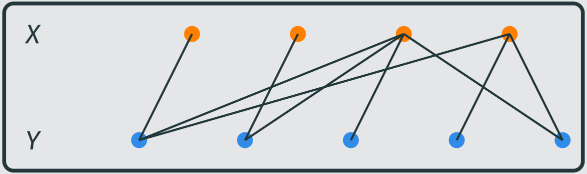
- Os grafos 3-regulares designam-se por grafos cúbicos.
- O grafo $K_n$ é $(n-1)$-regular. De facto, um grafo simples $G$ com $n$ vértices é $(n-1)$-regular se e só se $G$ é completo.
- Um grafo $G$ é 0-regular se e só se $G$ é um grafo nulo.

# Grafos bipartidos

## Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se bipartido quando existem subconjuntos não-vazios $X, Y \subseteq V$ de $V$ com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$ tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos.

## Exemplo

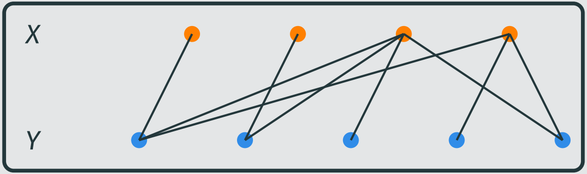


## Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se bipartido quando existem subconjuntos não-vazios $X, Y \subseteq V$ de $V$ com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$ tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos.

Isto é, não existem arestas entre qualquer par de vértices de $X$ nem entre qualquer par de vértices de $Y$; ou seja, cada aresta de $G$ tem um extremo em $X$ e outro em $Y$.

## Exemplo



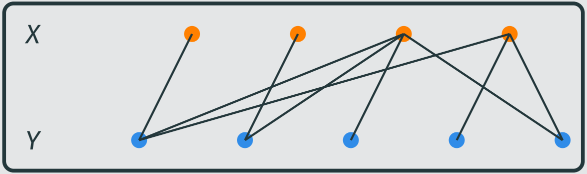
### Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se bipartido quando existem subconjuntos não-vazios $X, Y \subseteq V$ de $V$ com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$ tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos.

Isto é, não existem arestas entre qualquer par de vértices de $X$ nem entre qualquer par de vértices de $Y$; ou seja, cada aresta de $G$ tem um extremo em $X$ e outro em $Y$.

Uma tal partição $\{X, Y\}$ do conjunto $V$ dos vértices de $G$ designa-se por bipartição dos vértices. Neste caso denota-se $G$ por $(X, Y, E, \psi)$ (ou simplesmente $(X, Y, E)$ se $G$ é simples).

### Exemplo



# Grafos bipartidos

**Teorema**

*$G$[a] é bipartido $\iff$ $G$ não tem circuitos[b] de comprimento ímpar.*

[a] com pelo menos dois vértices

[b] circuito = passeio fechado sem repetição de arestas.

**Teorema**

*$G$ é bipartido $\iff$ $G$ não tem circuitos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

# Grafos bipartidos

**Teorema**

*$G$ é bipartido $\iff$ $G$ não tem circuitos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha que $G$ é bipartido (com a partição $\{X, Y\}$) e seja

$$P\colon \quad v_0 \xrightarrow{\;e_1\;} v_1 \cdots\cdots \bullet \cdots\cdots v_{k-1} \xrightarrow{\;e_k\;} v_k = v_0$$

um circuito em $G$. Suponhamos que $v_0 \in X$.

### Teorema

*$G$ é bipartido $\iff$ $G$ não tem circuitos de comprimento ímpar.*

### Demonstração.

Suponha que $G$ é bipartido (com a partição $\{X, Y\}$) e seja

$P$:


um circuito em $G$. Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, ..., $v_{k-1} \in Y$ e $v_0 \in X$.

# Grafos bipartidos

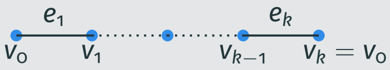
**Teorema**

*$G$ é bipartido $\iff$ $G$ não tem circuitos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha que $G$ é bipartido (com a partição $\{X, Y\}$) e seja

$P$:




um circuito em $G$. Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, …, $v_{k-1} \in Y$ e $v_0 \in X$. Portanto, há um número ímpar de vértices em $P$ – contando possivelmente com repetição – e por isso

# Grafos bipartidos

**Teorema**

*$G$ é bipartido $\iff$ $G$ não tem circuitos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha que $G$ é bipartido (com a partição $\{X, Y\}$) e seja

$P$:


um circuito em $G$. Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, $\dots$, $v_{k-1} \in Y$ e $v_0 \in X$. Portanto, há um número ímpar de vértices em $P$ – contando possivelmente com repetição – e por isso um número par de arestas.

**Teorema**

*G é bipartido* $\iff$ *G não tem circuitos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e $G$ é conexo).

**Teorema**

*$G$ é bipartido $\iff$ $G$ não tem circuitos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e $G$ é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos a partição $V = X \cup Y$ dada por

$$X = \{x \in V \mid \text{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \neq \varnothing, \quad Y = \{y \in V \mid \text{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

**Teorema**

*$G$ é bipartido $\iff$ $G$ não tem circuitos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e $G$ é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos a partição $V = X \cup Y$ dada por

$$X = \{x \in V \mid \operatorname{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \neq \varnothing, \quad Y = \{y \in V \mid \operatorname{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$).

**Teorema**

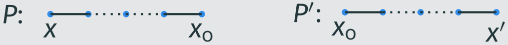
*$G$ é bipartido $\iff$ $G$ não tem circuitos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e $G$ é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos a partição $V = X \cup Y$ dada por

$$X = \{x \in V \mid \operatorname{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \neq \varnothing, \quad Y = \{y \in V \mid \operatorname{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$). Sejam




caminhos de menor comprimento (necessariamente par).

**Teorema**

*$G$ é bipartido $\iff$ $G$ não tem circuitos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e $G$ é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos a partição $V = X \cup Y$ dada por

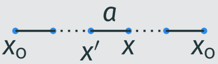
$$X = \{x \in V \mid \mathrm{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \neq \varnothing, \quad Y = \{y \in V \mid \mathrm{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$). Sejam

$P$: 

$P'$: 

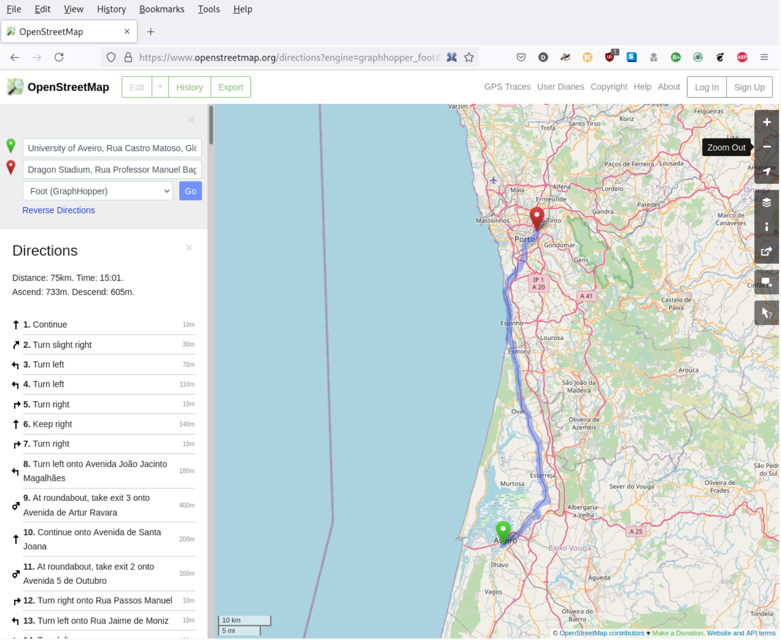

caminhos de menor comprimento (necessariamente par). Portanto,



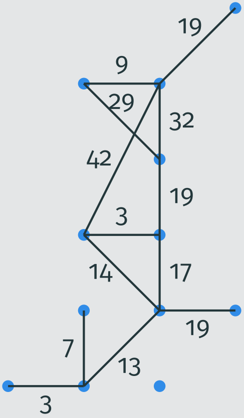

é um passeio fechado de comprimento ímpar, logo existe um circuito de comprimento ímpar (TPC!!), uma contradição. □

# 4. Problemas de caminho de «custo mínimo» em grafos

# O PROBLEMA


File Edit View History Bookmarks Tools Help
OpenStreetMap
https://www.openstreetmap.org/directions?engine=graphhopper_foot&
OpenStreetMap
Edit
History
Export
GPS Traces User Diaries Copyright Help About
Log In
Sign Up
University of Aveiro, Rua Carlos Matoso, Gl
Dragon Stadium, Rua Professor Manuel Bag
Foot (GraphHopper)
Go
Reverse Directions
Directions
Distance: 75km. Time: 15:01.
Ascend: 733m. Descend: 605m.
1. Continue 10m
2. Turn slight right 30m
3. Turn left 70m
4. Turn left 110m
5. Turn right 10m
6. Keep right 140m
7. Turn right 10m
8. Turn left onto Avenida João Jacinto Magalhães 180m
9. At roundabout, take exit 3 onto Avenida de Artur Ravara 400m
10. Continue onto Avenida de Santa Joana 200m
11. At roundabout, take exit 2 onto Avenida 5 de Outubro 100m
12. Turn right onto Rua Passos Manuel 10m
13. Turn left onto Rua Jaime de Moniz 10m
Zoom Out
Porto
Matosinhos
Maia
Gondomar
Espinho
Ovar
Estarreja
Murtosa
Aveiro
Ílhavo
Vagos
Águeda
Albergaria-a-Velha
Arouca
10 km
5 mi
© OpenStreetMap contributors ♥ Make a Donation. Website and API terms

## Na linguagem de grafos




- Os vértices representam cruzamentos
- As arestas representam estradas com distância/tempo/preço/ ...

### Definição

Um grafo com custos não negativos nas arestas $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples $(V, E)$ e uma matriz de custos

$$W\colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$.

**Definição**

Um grafo com custos não negativos nas arestas $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples $(V, E)$ e uma matriz de custos

$$W\colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, podemos dispensar $E$.)

**Definição**

Um grafo com custos não negativos nas arestas $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples $(V, E)$ e uma matriz de custos

$$W\colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, podemos dispensar $E$.)

Para um caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ em $G$, o custo de $P$ é

$$W(P) = \sum_{i=0}^{k-1} W(v_i, v_{i+1})$$

(onde $\alpha + \infty = \infty = \infty + \alpha$).

### Definição

Um grafo com custos não negativos nas arestas $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples $(V, E)$ e uma matriz de custos

$$W \colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, podemos dispensar $E$.)

Para um caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ em $G$, o custo de $P$ é

$$W(P) = \sum_{i=0}^{k-1} W(v_i, v_{i+1})$$

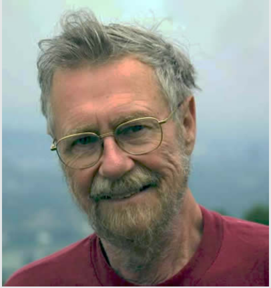
(onde $\alpha + \infty = \infty = \infty + \alpha$).

### Objetivo

Encontrar o caminho de menor custo entre dois vértices.

## Considerações iniciais

Se $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ é o caminho de «menor custo» entre $v_0$ e $v_k$, então $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$ é o caminho de «menor custo» entre $v_0$ e $v_{k-1}$.

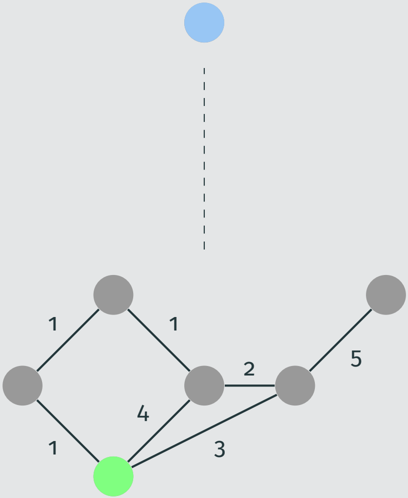


DIJKSTRA, EDSGER W. (1959). «A note on two problems in connexion with graphs». Em: *Numerische Mathematik* **1**.(1), pp. 269–271.

Edsger Wybe Dijkstra (1930 – 2002), matemático e cientista da computação holandês.

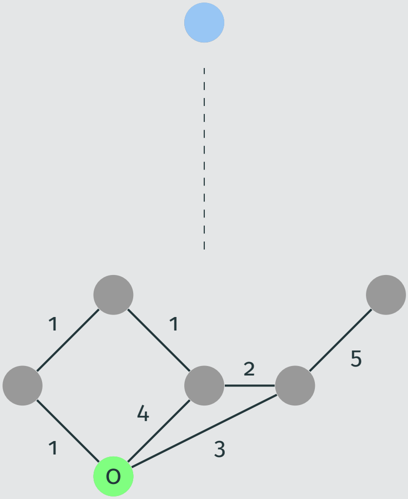
Ver também `https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/welcome.html`.

## A ideia



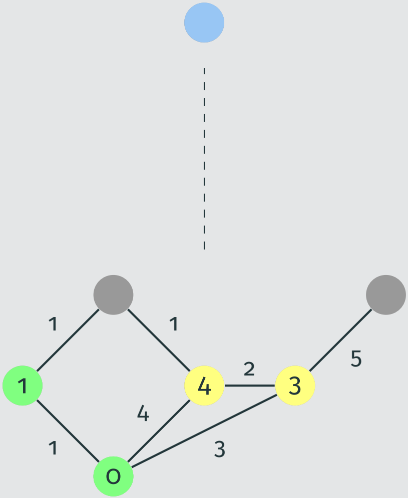

Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

## A ideia



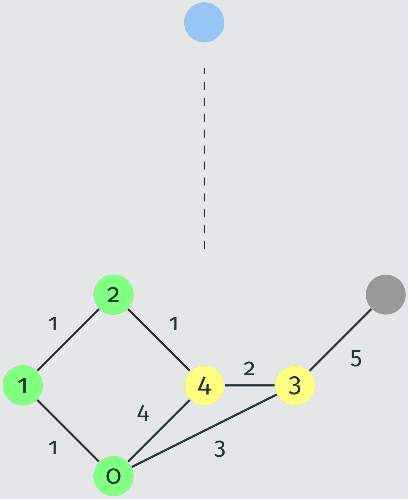

Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

## A ideia



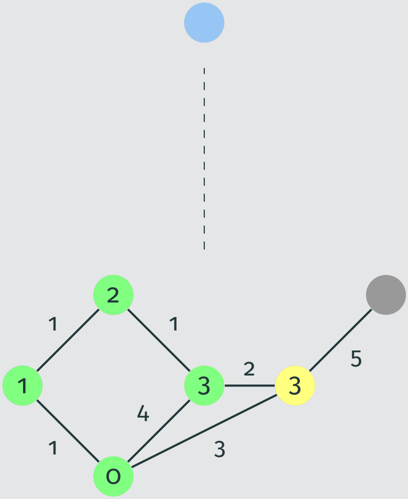

Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

## A ideia



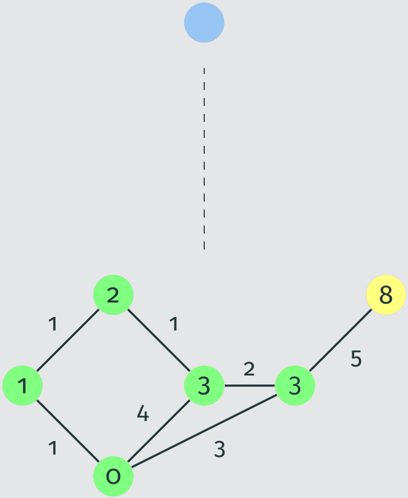

Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

## A ideia



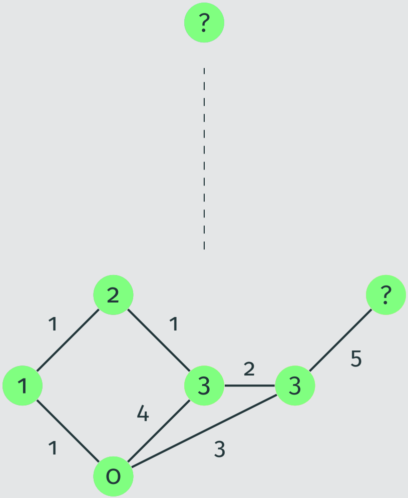

Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

## A ideia




Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

## A ideia




Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

**As variáveis**

- `start` = o vértice inicial.

**As variáveis**

- `start` $=$ o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:

### As variáveis

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **marca**($v$) = «custo» do caminho de menor «custo» entre `start` e $v$ (até o momento).

**As variáveis**

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **marca**($v$) = «custo» do caminho de menor «custo» entre `start` e $v$ (até o momento).
  - **ant**($v$) = antecessor de $v \neq$ `start` no caminho de menor «custo» entre `start` e $v$ (até o momento).

**As variáveis**

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **marca**($v$) = «custo» do caminho de menor «custo» entre `start` e $v$ (até o momento).
  - **ant**($v$) = antecessor de $v \neq$ `start` no caminho de menor «custo» entre `start` e $v$ (até o momento).
- **temp** = lista dos vértices com valores temporários.

**As variáveis**

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
    - **marca**($v$) = «custo» do caminho de menor «custo» entre `start` e $v$ (até o momento).
    - **ant**($v$) = antecessor de $v \neq$ `start` no caminho de menor «custo» entre `start` e $v$ (até o momento).
- **temp** = lista dos vértices com valores temporários.
- `menor` = vértice de menor «custo» (neste momento).

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\mathbf{marca}(v) = \infty$, $\mathbf{ant}(v) = \varnothing$.

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
    - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
    - **marca**$(\texttt{start}) = 0$.

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\mathbf{marca}(v) = \infty$, $\mathbf{ant}(v) = \varnothing$.
  - $\mathbf{marca}(\texttt{start}) = 0$.
  - $\mathbf{temp} = V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
  - **marca**$(\texttt{start}) = 0$.
  - **temp** $= V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:

Até $\texttt{menor}$ = o vértice terminal.

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
  - **marca**$(\texttt{start}) = 0$.
  - **temp** $= V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:
  - $c_{\mathrm{aux}} = \infty$.
  - Para todo o $v$ em **temp**:
    - Se **marca**$(v) >$ **marca**$(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v)$, então

$$\textbf{marca}(v) = \textbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v),$$
$$\textbf{ant}(v) = \texttt{menor}\,.$$

Até $\texttt{menor} =$ o vértice terminal.

### O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
  - **marca**$(\mathtt{start}) = 0$.
  - **temp** $= V \setminus \{\mathtt{start}\}$ e $\mathtt{menor} = \mathtt{start}$.
- Repetir:
  - $c_{\text{aux}} = \infty$.
  - Para todo o $v$ em **temp**:
    - Se **marca**$(v) >$ **marca**$(\mathtt{menor}) + W(\mathtt{menor}, v)$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{marca}(v) &= \mathbf{marca}(\mathtt{menor}) + W(\mathtt{menor}, v), \\ \mathbf{ant}(v) &= \mathtt{menor}\,. \end{aligned}$$

    - Se **marca**$(v) < c_{\text{aux}}$ então $c_{\text{aux}} =$ **marca**$(v)$ e $v_{\text{aux}} = v$ (lembrar do «menor custo»).

Até $\mathtt{menor}$ = o vértice terminal.

### O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
    - Para cada $v \in V$: $\textbf{marca}(v) = \infty$, $\textbf{ant}(v) = \varnothing$.
    - $\textbf{marca}(\texttt{start}) = 0$.
    - $\textbf{temp} = V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:
    - $c_{\text{aux}} = \infty$.
    - Para todo o $v$ em **temp**:
        - Se $\textbf{marca}(v) > \textbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v)$, então

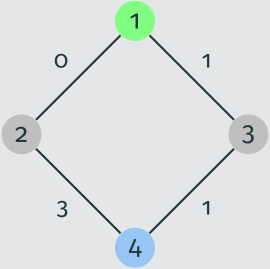
$$\textbf{marca}(v) = \textbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v),$$
$$\textbf{ant}(v) = \texttt{menor}\,.$$

        - Se $\textbf{marca}(v) < c_{\text{aux}}$ então $c_{\text{aux}} = \textbf{marca}(v)$ e $v_{\text{aux}} = v$ (lembrar do «menor custo»).
    - $\textbf{temp} = \textbf{temp} \setminus \{v_{\text{aux}}\}$ e $\texttt{menor} = v_{\text{aux}}$.

Até $\texttt{menor}$ = o vértice terminal.

## Exemplo

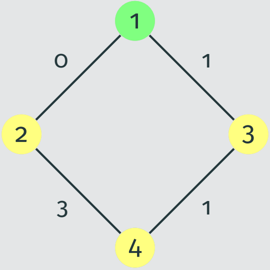
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |




- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

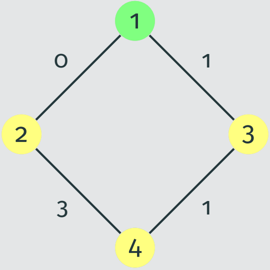



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

# O ALGORITMO DE DIJKSTRA

## Exemplo

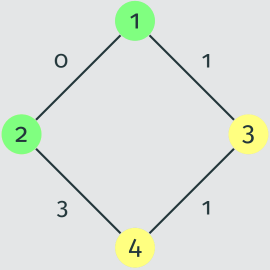
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0,-)$ | $(\infty,-)$ | $(\infty,-)$ | $(\infty,-)$ | 1 | $\{2,3,4\}$ |
| | $(0,1)$ | $(1,1)$ | $(\infty,-)$ | | |
| | | | | | |
| | | | | | |




- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\infty, -)$ | 2 | $\{3, 4\}$ |
| | | | | | |
| | | | | | |

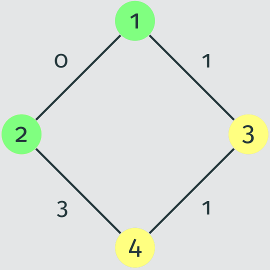



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

# O algoritmo de Dijkstra

## Exemplo

| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\infty, -)$ | 2 | $\{3, 4\}$ |
| | | $(1, 1)$ | $(3, 2)$ | | |
| | | | | | |

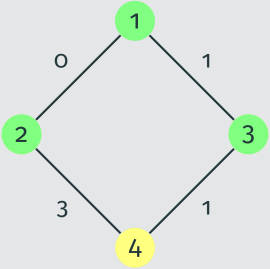



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

# O ALGORITMO DE DIJKSTRA

## Exemplo

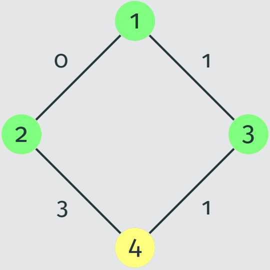
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0,-)$ | $(\infty,-)$ | $(\infty,-)$ | $(\infty,-)$ | 1 | $\{2,3,4\}$ |
| | $(0,1)$ | $(1,1)$ | $(\infty,-)$ | 2 | $\{3,4\}$ |
| | | $(1,1)$ | $(3,2)$ | 3 | $\{4\}$ |
| | | | | | |




- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

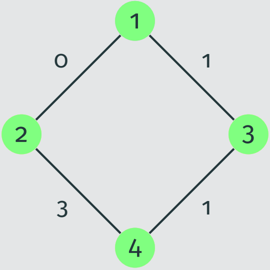
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\infty, -)$ | 2 | $\{3, 4\}$ |
| | | $(1, 1)$ | $(3, 2)$ | 3 | $\{4\}$ |
| | | | $(2, 3)$ | | |




- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\infty, -)$ | 2 | $\{3, 4\}$ |
| | | $(1, 1)$ | $(3, 2)$ | 3 | $\{4\}$ |
| | | | $(2, 3)$ | 4 | $\varnothing$ |

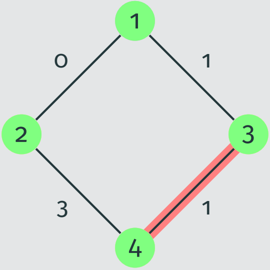



- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

# O algoritmo de Dijkstra

## Exemplo

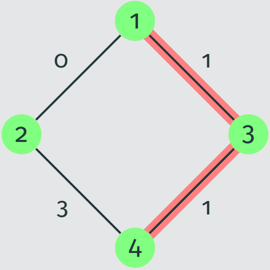
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\infty, -)$ | 2 | $\{3, 4\}$ |
| | | $(1, 1)$ | $(3, 2)$ | 3 | $\{4\}$ |
| | | | $(2, 3)$ | 4 | $\varnothing$ |




- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0,-)$ | $(\infty,-)$ | $(\infty,-)$ | $(\infty,-)$ | 1 | $\{2,3,4\}$ |
| | $(0,1)$ | $(1,1)$ | $(\infty,-)$ | 2 | $\{3,4\}$ |
| | | $(1,1)$ | $(3,2)$ | 3 | $\{4\}$ |
| | | | $(2,3)$ | 4 | $\emptyset$ |




- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

# Informações adicionais


Dolan, Stephen (2013). «Fun with semirings: a functional pearl on the abuse of linear algebra». Em: *Proceedings of the 18th ACM SIGPLAN international conference on Functional programming - ICFP '13*. Vol. 48. 9. ACM. ACM Press, pp. 101–110. URL: https://www.cl.cam.ac.uk/~sd601/papers/semirings.pdf.

Jones, Simon Peyton e Goldberg, Andrew (2010). «Getting from A to B: fast route-finding on slow computers». URL: https://www.microsoft.com/en-us/research/video/getting-from-a-b-fast-route-finding-using-slow-computers/. A talk by Simon Peyton-Jones for Think Computer Science 2010.