Matemática Discreta

Ano Letivo 2021/22 (Versão: 16 de Maio de 2022)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Capítulo IV
Recorrência e Funções Geradoras

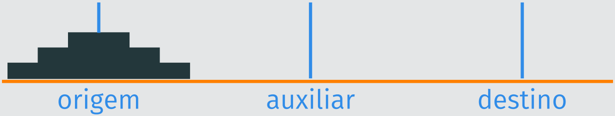
Parte 1

Equações de Recorrência

Introdução

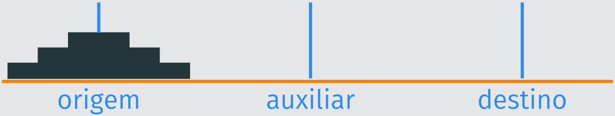
Torre de Hanói

O problema é



mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

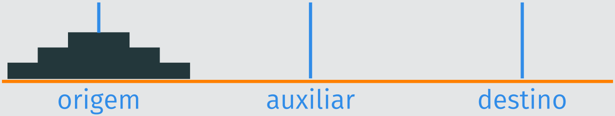
O problema é



mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

O problema é

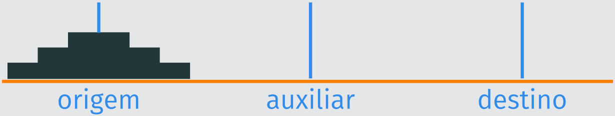


mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

A lenda diz que, num templo, havia uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Os monges foram ordenados pelo «Brama» de mover todos os discos de uma estaca para outra. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de origem para destino, o mundo desapareceria.

O problema é



mover n discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

A lenda diz que, num templo, havia uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Os monges foram ordenados pelo «Brama» de mover todos os discos de uma estaca para outra. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de origem para destino, o mundo desapareceria.

Temos de preocupar-nós?

Torre de Hanói

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

Torre de Hanói

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

Torre de Hanói

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =??$

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.

Torre de Hanói

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =??$

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:

Torre de Hanói

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} = ??$

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
  - mover os $n - 1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois

Torre de Hanói

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
  - mover os $n - 1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois
  - mover o último disco de origem para destino; depois

Torre de Hanói

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
  - mover os $n - 1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois
  - mover o último disco de origem para destino; depois
  - mover os $n - 1$ discos de auxiliar para destino utilizando origem.

Torre de Hanói

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
  - mover os $n-1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois
  - mover o último disco de origem para destino; depois
  - mover os $n-1$ discos de auxiliar para destino utilizando origem.

Logo, $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$.

Os números de Fibonacci

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots$$

são os termos da sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots$$

são os termos da sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Embora os números de Fibonacci sejam completamente determinados pelos primeiros dois termos F_0 e F_1, não é fácil calcular, por exemplo, $F_{312493741}$ porque, pela definição, é necessário calcular primeiro $F_{312493740}$ e $F_{312493739}$, para isso precisamos de $F_{312493738}$ e $F_{312493737}$, ... e assim até $F_2 = F_1 + F_0$.

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots$$

são os termos da sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Embora os números de Fibonacci sejam completamente determinados pelos primeiros dois termos F_0 e F_1, não é fácil calcular, por exemplo, $F_{312493741}$ porque, pela definição, é necessário calcular primeiro $F_{312493740}$ e $F_{312493739}$, para isso precisamos de $F_{312493738}$ e $F_{312493737}$, ... e assim até $F_2 = F_1 + F_0$.

Estes números aparecem em muitos contextos ....

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendente).

Os números de Fibonacci (exemplo I)

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e

Os números de Fibonacci (exemplo I)

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

No que se segue, A_n denota o número de pares de coelhos adultos e J_n o número de pares de coelhos jovens no final do mês n. *Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número* $c_n = A_n + J_n$ *de pares de coelhos?*

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

No que se segue, A_n denota o número de pares de coelhos adultos e J_n o número de pares de coelhos jovens no final do mês n. *Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número $c_n = A_n + J_n$ de pares de coelhos?* Por hipotése, $A_0 = 0$, $J_0 = 1$, $A_1 = 1$, $J_1 = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$A_n = A_{n-1} + J_{n-1} \quad \text{e} \quad J_n = A_{n-1}.$$

Os números de Fibonacci (exemplo I)

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendente). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

No que se segue, A_n denota o número de pares de coelhos adultos e J_n o número de pares de coelhos jovens no final do mês n. *Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número $c_n = A_n + J_n$ de pares de coelhos?* Por hipotése, $A_0 = 0$, $J_0 = 1$, $A_1 = 1$, $J_1 = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$A_n = A_{n-1} + J_{n-1} \quad \text{e} \quad J_n = A_{n-1}.$$

Portanto, para $n \geq 2$, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$; e $c_n = A_n + J_n$ satisfaz

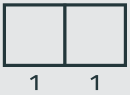
$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Os números de Fibonacci (exemplo II)

Quadrados

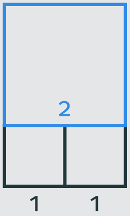
Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n?

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$\vdots$$



Os números de Fibonacci (exemplo II)

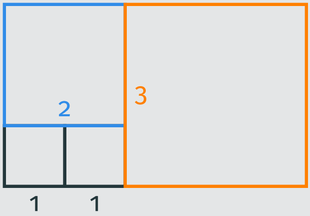
Quadrados



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado *n*?

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$
$$\vdots$$

Quadrados

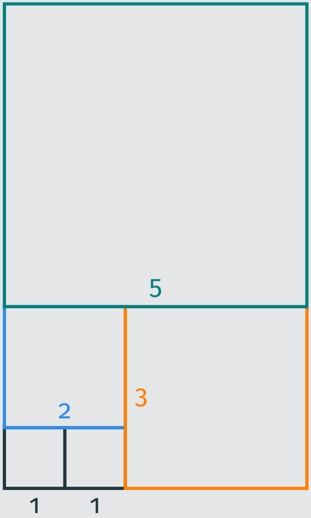


Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n?

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$
$$a_3 = 3,$$
$$\vdots$$

Os números de Fibonacci (exemplo II)

Quadrados

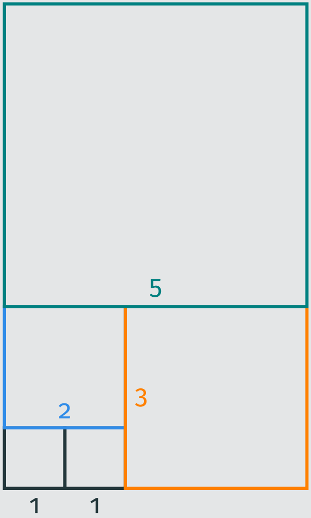


Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado n?

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$
$$a_3 = 3,$$
$$a_4 = 5,$$
$$\vdots$$

Os números de Fibonacci (exemplo II)

Quadrados



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado *n*?

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= 1, \\
a_2 &= 2, \\
a_3 &= 3, \\
a_4 &= 5, \\
&\vdots \\
a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n
\end{aligned}
$$

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 +$$

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 +$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
&+ (F_2 - F_0)\\
&+ (F_3 - F_1)\\
&+ (F_4 - F_2)\\
&\dots\\
&+ (F_n - F_{n-2})
\end{aligned}$$

Soma de números de Fibonacci

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^{n} F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
&+(F_2 - F_0)\\
&+(F_3 - F_1)\\
&+(F_4 - F_2)\\
&\dots\\
&+(F_n - F_{n-2})
\end{aligned}$$

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^{n} F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k = F_n + F_{n-1} - 1$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
&+ (F_2 - F_0) \\
&+ (F_3 - F_1) \\
&+ (F_4 - F_2) \\
&\dots \\
&+ (F_n - F_{n-2})
\end{aligned}$$

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^{n} F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k = F_n + F_{n-1} - 1 = F_{n+1} - 1.$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} &+ (F_2 - F_0) \\ &+ (F_3 - F_1) \\ &+ (F_4 - F_2) \\ &\dots \\ &+ (F_n - F_{n-2}) \end{aligned}$$

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \ldots, n\}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$?

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*?*

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$?

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ podemos obter de seguinte modo:

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \dots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n; depois

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$?

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \dots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n; depois
- podemos inserir $n + 1$, aqui há $n + 1$ possibilidades.

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1,2,\dots,n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1,2,\dots,n,n+1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1,2,\dots,n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n; depois
- podemos inserir $n+1$, aqui há $n+1$ possibilidades.

Pelo princípio da multiplicação, o número a_{n+1} de ordens totais em $\{1,2,\dots,n,n+1\}$ é

$$a_{n+1} = (n+1)a_n.$$

Índice

1. Noções gerais

Definição

- Uma equação de recorrência[a] é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}), \tag{*}$$

com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

[a] ou relação de recorrência

Definição

- Uma equação de recorrência[a] é uma equação da forma
$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}), \tag{*}$$
com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.
- A equação de recorrência (*) diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f depende da última variável).

[a] ou relação de recorrência

Equações de Recorrência

Definição

- Uma equação de recorrência[a] é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \qquad (*)$$

  com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

- A equação de recorrência (*) diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f depende da última variável).
- Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se solução de (*) quando os seus termos satisfazem a equação (*), para todo o $n \geq k$.

[a] ou relação de recorrência

Definição

- Uma equação de recorrência[a] é uma equação da forma
$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}), \tag{*}$$
com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.
- A equação de recorrência (*) diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f depende da última variável).
- Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se solução de (*) quando os seus termos satisfazem a equação (*), para todo o $n \geq k$.

[a] ou relação de recorrência

Nota

Resolver uma relação de recorrência significa determinar todas as suas soluções.

Equações de Recorrência

Definição

- Uma equação de recorrência[a] é uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \tag{*}$$

  com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.
- A equação de recorrência (*) diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f depende da última variável).
- Uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se solução de (*) quando os seus termos satisfazem a equação (*), para todo o $n \geq k$.

[a] ou relação de recorrência

Nota

Resolver uma relação de recorrência significa determinar todas as suas soluções. Estamos particularmente interessados em descrever as soluções com fórmulas fechadas; ou seja, na forma

$$a_n = \text{«uma expressão que apenas envolve a variável } n\text{»}.$$

2. Equações de recorrência lineares

Definição

- Uma equação de recorrência linear (de coeficientes constantes e) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \qquad (*)$$

(para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.

Definição

- Uma equação de recorrência linear (de coeficientes constantes e) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \tag{*}$$

(para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.

- A equação (*) diz-se homogénea quando $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão nula.

Definição

- Uma equação de recorrência linear (de coeficientes constantes e) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \tag{*}$$

  (para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \dots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.
- A equação (*) diz-se homogénea quando $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogénea associada a (*) é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Equações de recorrência lineares

Definição

- Uma equação de recorrência linear (de coeficientes constantes e) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \tag{*}$$

  (para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão.
- A equação (*) diz-se homogénea quando $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogénea associada a (*) é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Exemplo

- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2} + 3n$ é uma equação de recorrência linear (não homogénea) da ordem 2.

Equações de recorrência lineares

Definição

- Uma equação de recorrência linear (de coeficientes constantes e) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \qquad (*)$$

  (para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão.
- A equação (*) diz-se homogénea quando $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogénea associada a (*) é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Exemplo

- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2} + 3n$ é uma equação de recorrência linear (não homogénea) da ordem 2.
- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2}$ é a equação homogénea associada.

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes.

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes).

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes).

  Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

  $$a_n = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  é solução desta equação.

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes).

  Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

  $$a_n = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  é solução desta equação. De facto, para cada $n \geq 2$,

  $$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n-1)) - 3(n-2) = \\ 3(2(n-1) - (n-2)) = 3n = a_n.$$

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes).

  Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

  $$a_n = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  é solução desta equação. De facto, para cada $n \geq 2$,

  $$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n-1)) - 3(n-2) = \\ 3(2(n-1) - (n-2)) = 3n = a_n.$$

  Um cálculo semelhante revela que as sucessões

  $$(0)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (1)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (5n+2)_{n\in\mathbb{N}}$$

  são soluções da equação acima.

Como resolver equações de recorrência lineares?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \tag{*}$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{uma solução particular de (*).}} + \boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à equação (*)}}.$$

Como resolver equações de recorrência lineares?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{uma solução particular de } (*).} \;+\; \boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à equação } (*)}\,.$$

Nota

Um resultado deste tipo já conhecemos de

- ALGA $\rightsquigarrow$ resolver equações lineares;
- Cálculo II $\rightsquigarrow$ resolver equações diferenciais lineares.

Como resolver equações de recorrência lineares?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$\boxed{\text{uma solução particular de (*).}}$ + $\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à equação (*)}}$.

Demonstração.

- Se b é uma solução de (*) e a é uma solução da equação homogénea associada, então $a + b$ é uma solução de (*).

Como resolver equações de recorrência lineares?

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{uma solução particular de } (*).} + \boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à equação } (*)}.$$

Demonstração.

- Se b é uma solução de (*) e a é uma solução da equação homogénea associada, então $a + b$ é uma solução de (*).
- Se b_1 e b_0 são soluções de (*), então $b_1 - b_0$ é uma solução da equação homogénea associada, e $b_1 = b_0 + (b_1 - b_0)$. □

3. Equações de recorrência lineares homogéneas

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{*}$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea de ordem k.

O espaço das soluções

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{*}$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea de ordem k.

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{*}$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea de ordem k.

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (*) é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto,

$$\mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k \longrightarrow \{\text{as soluções de (*)}\}$$

$$(a_0, \dots, a_{k-1}) \longmapsto (a_0, \dots, a_{k-1}, \, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots)$$

  é um isomorfismo;

O espaço das soluções

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{*}$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea de ordem k.

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (*) é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto,

  $$\begin{aligned} \mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k &\longrightarrow \{\text{as soluções de (*)}\} \\ (a_0,\dots,a_{k-1}) &\longmapsto (a_0,\dots,a_{k-1},\, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots) \end{aligned}$$

  é um isomorfismo; logo: $\dim\{\text{as soluções de (*)}\} = k$.

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \qquad (*)$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea de ordem k.

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (*) é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k &\longrightarrow \{\text{as soluções de } (*)\} \\ (a_0, \dots, a_{k-1}) &\longmapsto (a_0, \dots, a_{k-1}, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots) \end{aligned}$$

  é um isomorfismo; logo: $\dim\{\text{as soluções de } (*)\} = k$.

Conclusão

Para descrever todas as soluções de (*), procuramos k soluções de (*) linearmente independente.

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções?

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$,

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k}(q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k), \end{aligned}$$

A EQUAÇÃO CARATERÍSTICA

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k}(q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k), \end{aligned}$$

portanto, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução de (*) se e somente se

$$0 = \underbrace{q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k}_{\text{polinómio em } q \text{ de grau } k}.$$

A EQUAÇÃO CARATERÍSTICA

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \dots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \dots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k}(q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k), \end{aligned}$$

portanto, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução de (*) se e somente se

$$0 = \underbrace{q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k}_{\text{polinómio em } q \text{ de grau } k}.$$

A equação acima diz-se equação caraterística de (*).

Um exemplo

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 =$$

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 =$$

Nota: As raízes inteiras de um polinómio da forma

$$q^n + \cdots + c$$

dividem c (e as outras raízes são irracionais).

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q - 2)$$

Nota: As raízes inteiras de um polinómio da forma

$$q^n + \cdots + c$$

dividem c (e as outras raízes são irracionais).

Um exemplo

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

Nota: As raízes inteiras de um polinómio da forma

$$q^n + \cdots + c$$

dividem c (e as outras raízes são irracionais).

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$.

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$. Verifica-se que as sucessões

$$(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

são linearmente independentes[a]; portanto,

---

[a] Mais tarde veremos que são vetores próprios associados a valores próprios diferentes.

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$. Verifica-se que as sucessões

$$(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

são linearmente independentes[a]; portanto, todas as soluções (reais) da equação (*) tem a forma

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

[a] Mais tarde veremos que são vetores próprios associados a valores próprios diferentes.

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos a solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ *e* $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação);

Um exemplo (continuação)

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos a solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ *e* $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação); ou seja, aquele solução com

$$\alpha + \beta = 5 \;\text{ (o caso } n = 0) \quad \text{e} \quad 2\alpha - \beta = 4 \;\text{ (o caso } n = 1).$$

Um exemplo (continuação)

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos a solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ *e* $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação); ou seja, aquele solução com

$$\alpha+\beta = 5 \;\text{ (o caso } n=0) \quad \text{e} \quad 2\alpha-\beta=4 \;\text{ (o caso } n=1).$$

Resolvendo este sistema de duas equações lineares dá $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

Um exemplo (continuação)

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos a solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação); ou seja, aquele solução com

$$\alpha + \beta = 5 \;\text{ (o caso } n = 0) \quad \text{e} \quad 2\alpha - \beta = 4 \;\text{ (o caso } n = 1).$$

Resolvendo este sistema de duas equações lineares dá $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

Assim, a solução é a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com

$$a_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n, \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Corolário

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Se a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

de (*) têm as k soluções (diferentes) q_1, q_2, ..., q_k, então as soluções de (*) são precisamente as combinações lineares das sucessões[a] $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ..., $(q_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$*; ou seja, as sucessões da forma*

$$(C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \cdots + C_k q_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

com constantes $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

[a] linearmente independente

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Para resolver a equação de recorrência linear homogénea

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

consideremos a equação $q^2 - q - 1 = 0$ de segundo grau que tem as duas soluções:

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Para resolver a equação de recorrência linear homogénea

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

consideremos a equação $q^2 - q - 1 = 0$ de segundo grau que tem as duas soluções:

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, todas as soluções da equação homogénea são combinações lineares das sucessões $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Em particular,

$$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exemplo

Note-se que $\phi \cdot \psi = -1$, $\phi + \psi = 1$ e $\phi - \psi = \sqrt{5}$.

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \qquad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}^{\psi} + \beta \overbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}^{\phi}.$$

[a] Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), matemático francês.

Exemplo

Note-se que $\phi \cdot \psi = -1$, $\phi + \psi = 1$ e $\phi - \psi = \sqrt{5}$.

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \qquad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}^{\psi} + \beta \overbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}^{\phi}.$$

Fazendo redução com a correspondente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \phi & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \phi - \psi & (1-\psi) \end{bmatrix}$$

produz $\beta = \frac{1-\psi}{\phi-\psi} = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ e $\alpha = 1 - \beta = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$.

[a] Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), matemático francês.

Exemplo

Note-se que $\phi \cdot \psi = -1$, $\phi + \psi = 1$ e $\phi - \psi = \sqrt{5}$.

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \qquad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}^{\psi} + \beta \overbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}^{\phi}.$$

Fazendo redução com a correspondente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \phi & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \phi - \psi & (1 - \psi) \end{bmatrix}$$

produz $\beta = \frac{1-\psi}{\phi-\psi} = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ e $\alpha = 1 - \beta = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$. Portanto, obtém-se a fórmula de Binet[a]:

$$F_n = \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

[a] Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), matemático francês.

Sobre o número de ouro

Nota

$\phi = 1.618033988749894\ldots$ é o número de ouro, e
$\psi = \frac{-1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\ldots$

Sobre o número de ouro

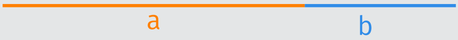
Nota

$\phi = 1.618033988749894\ldots$ é o número de ouro, e

$\psi = \frac{-1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\ldots$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

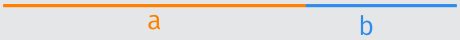
Sobre o número de ouro

Nota

$\phi = 1.618033988749894\dots$ é o número de ouro, e
$\psi = \frac{-1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\dots$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por ϕ, então temos

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi};$$

Sobre o número de ouro

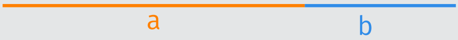
Nota

$\phi = 1.618033988749894\ldots$ é o número de ouro, e

$\psi = \frac{-1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\ldots$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por ϕ, então temos

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi};$$

ou seja, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$,

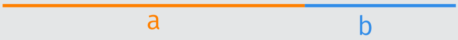
Sobre o número de ouro

Nota

$\phi = 1.618033988749894\ldots$ é o número de ouro, e
$\psi = \frac{-1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\ldots$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por ϕ, então temos

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi};$$

ou seja, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, o que implica $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (a única raiz positiva).

Limite da razão entre números de Fibonacci

Nota

Utilizando a fórmula de Binet:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi^n - \psi^n} = \phi \, \frac{1 - (\frac{\psi}{\phi})^{n+1}}{1 - (\frac{\psi}{\phi})^n} \longrightarrow \phi$$

para $n \to \infty$ porque $|\frac{\psi}{\phi}| < 1$.

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3$

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2$

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\cdots = (q - q_1)(q - q_2) \ldots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q -$

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\cdots = (q - q_1)(q - q_2)\dots(q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q - 1)(q$

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\cdots = (q - q_1)(q - q_2)\dots(q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q-1)(q+1)(q$

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\cdots = (q - q_1)(q - q_2) \ldots (q - q_k).$$

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q-1)(q+1)(q+2)$.

Resumo (resolver eq. de recorrência lineares homogéneas

de ordem k com k raízes diferentes)

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\cdots = (q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_k).$$

- Se obtemos k soluções diferentes, então todas as soluções da equação de recorrência tem a forma

$$(C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \cdots + C_k q_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

  com constantes $C_1, C_2, \dots, C_k$.

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q - 1)(q + 1)(q + 2)$.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

Mais um ...

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q$$

Mais um ...

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q$$

Mais um ...

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q-1)$$

Mais um ...

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q-1) = (q-1)^2(q+2).$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q-1) = (q-1)^2(q+2).$$

E agora? Temos apenas as duas soluções independentes

$$(1^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad ((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \ldots$$

Equações de recorrência lineares homogéneas (caso geral)

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \qquad (k \geq 1,\ c_k \neq 0) \tag{*}$$

com a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \cdots + n_l = k$ *e* $n_i > 0$.

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \qquad (k \geq 1,\ c_k \neq 0) \qquad (*)$$

com a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \cdots + n_l = k$ *e* $n_i > 0$*. Então, as soluções da equação (*) são precisamente as combinações lineares das* k *sucessões*

$$\begin{aligned} &(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ &(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ &\qquad \dots \\ &(q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$

Equações de recorrência lineares homogéneas (caso geral)

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \dots - c_k x_{n-k} \qquad (k \geq 1,\ c_k \neq 0) \qquad (*)$$

com a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \dots + n_l = k$ e $n_i > 0$. Então, as soluções da equação (*) são precisamente as combinações lineares das k sucessões

$$\begin{array}{ll} (q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ (q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\ \dots & \\ (q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{array}$$

Equações de recorrência lineares homogéneas (caso geral)

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \dots - c_k x_{n-k} \qquad (k \geq 1,\ c_k \neq 0) \qquad (*)$$

com a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \dots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \dots + n_l = k$ *e* $n_i > 0$*. Então, as soluções da equação (*) são precisamente as combinações lineares das* k *sucessões*

$$\begin{array}{lllll}
(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \dots & (n^{n_1-1} \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\
(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \dots & (n^{n_2-1} \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\
\quad\dots & & & & \\
(q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \dots & (n^{n_l-1} \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{array}$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ *e* $x_2 = 18$.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ *e* $x_2 = 18$.

A equação caraterística é

$$0 = q^3 - 5q^2 + 8q - 4 = (q-1)(q-2)(q-2) = (q-1)(q-2)^2;$$

portanto, as solução da equação de recorrência são as sucessões da forma (com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$(\alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ *e* $x_2 = 18$.

A equação caraterística é

$$0 = q^3 - 5q^2 + 8q - 4 = (q-1)(q-2)(q-2) = (q-1)(q-2)^2;$$

portanto, as solução da equação de recorrência são as sucessões da forma (com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$(\alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Considerando os valores iniciais, procuramos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha + 2\beta + 2\gamma = 4, \quad \alpha + 4\beta + 8\gamma = 18.$$

Exemplo

Utilizando a primeira equação, o sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0, \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma &= 4, \\ \alpha + 4\beta + 8\gamma &= 18 \end{aligned}$$

reduz ($\alpha = -\beta$) ao sistema

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma &= 4, \\ 3\beta + 8\gamma &= 18; \end{aligned}$$

cuja solução é $\gamma = 3$ e $\beta = -2$, logo $\alpha = 2$.

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Utilizando a primeira equação, o sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0, \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma &= 4, \\ \alpha + 4\beta + 8\gamma &= 18 \end{aligned}$$

reduz ($\alpha = -\beta$) ao sistema

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma &= 4, \\ 3\beta + 8\gamma &= 18; \end{aligned}$$

cuja solução é $\gamma = 3$ e $\beta = -2$, logo $\alpha = 2$. Assim, a solução da equação de recorrência com os valores iniciais é a sucessão

$$(2 - 2 \cdot 2^n + 3 \cdot n \cdot 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Preparação

Consideremos a função linear S «esquecer o primeiro termo» definida por

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Preparação

Consideremos a função linear S «esquecer o primeiro termo» definida por

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Então, uma sucessão $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - c_1x_{n-1} - c_2x_{n-2} - \cdots - c_kx_{n-k}$$

se e somente se

$$\begin{aligned}
\text{sucessão nula} &= S^n(a) - c_1S^{n-1}(a) - \cdots - c_kS^{n-k}(a)\\
&= (S^n - c_1S^{n-1} - \cdots - c_kS^{n-k})(a)\\
&= S^{n-k} \circ (S^k - c_1S^{k-1} - \cdots - c_k\,\mathrm{id})(a),
\end{aligned}$$

para cada $n \geq k$.

Preparação

Consideremos a função linear S «esquecer o primeiro termo» definida por

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Então, uma sucessão $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - c_1x_{n-1} - c_2x_{n-2} - \cdots - c_kx_{n-k}$$

se e somente se

$$\begin{aligned}\text{sucessão nula} &= S^n(a) - c_1S^{n-1}(a) - \cdots - c_kS^{n-k}(a)\\ &= (S^n - c_1S^{n-1} - \cdots - c_kS^{n-k})(a)\\ &= S^{n-k}\circ(S^k - c_1S^{k-1} - \cdots - c_k\,\mathrm{id})(a),\end{aligned}$$

para cada $n \geq k$. Veremos agora quais sucessões a função linear

$$S^k - c_1S^{k-1} - \cdots - c_k\,\mathrm{id}$$

anula.

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística,

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \operatorname{id} = (S - q_1 \operatorname{id})^{n_1} \circ \cdots \circ (S - q_k \operatorname{id})^{n_k}.$$

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \operatorname{id} = (S - q_1 \operatorname{id})^{n_1} \circ \cdots \circ (S - q_k \operatorname{id})^{n_k}.$$

«A chave» da prova do teorema é o seguinte lema.

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \,\mathrm{id} = (S - q_1 \,\mathrm{id})^{n_1} \circ \cdots \circ (S - q_k \,\mathrm{id})^{n_k}.$$

«A chave» da prova do teorema é o seguinte lema.

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q \,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$(q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (n^2 \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ *e* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, *a função linear* $(S - q\,\mathrm{id})^m$ *anula as sucessões*

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

A DEMONSTRAÇÃO DO LEMA

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Para $m = 1$: $\quad S((q^n)_{n\in\mathbb{N}}) = (q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = q(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$; ou seja

$$(S - q\,\mathrm{id})(s_1) = \text{a sucessão nula.}$$

Nota: Portanto, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um vetor próprio de S com valor próprio q.

A demonstração do lema

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Seja agora $m > 1$ e suponhamos que $(S - q\,\mathrm{id})^{m-1}$ anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Logo, $(S - q\,\mathrm{id})^m$ também anula $s_1, \dots, s_{m-1}$.

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Seja agora $m > 1$ e suponhamos que $(S - q\,\mathrm{id})^{m-1}$ anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Logo, $(S - q\,\mathrm{id})^m$ também anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Calculamos primeiro, para cada $n \in \mathbb{N}$, o termo n de $(S - q\,\mathrm{id})(s_m)$:

$$\begin{aligned} (n+1)^{m-1} \cdot q^{n+1} - n^{m-1}q^{n+1} &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^{n+1}\right) - n^{m-1}q^{n+1} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-2} q \cdot \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^n\right)}_{\text{combinação linear do termo } n \text{ de } s_1,\dots,s_{m-1}} \quad ; \end{aligned}$$

A DEMONSTRAÇÃO DO LEMA

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Seja agora $m > 1$ e suponhamos que $(S - q\,\mathrm{id})^{m-1}$ anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Logo, $(S - q\,\mathrm{id})^m$ também anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Calculamos primeiro, para cada $n \in \mathbb{N}$, o termo n de $(S - q\,\mathrm{id})(s_m)$:

$$\begin{aligned}
(n+1)^{m-1} \cdot q^{n+1} - n^{m-1}q^{n+1} &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^{n+1}\right) - n^{m-1}q^{n+1} \\
&= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-2} q \cdot \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^n\right)}_{\text{combinação linear do termo } n \text{ de } s_1,\dots,s_{m-1}} \quad ;
\end{aligned}$$

Logo, $(S - q\,\mathrm{id})(s_m) = \alpha_1 s_1 + \dots \alpha_{m-1}s_{m-1}$ e por isso

$$(S - q\,\mathrm{id})^m(s_m) = \text{a sucessão nula.}$$

□

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$\begin{aligned} a &= (z^n)_{n\in\mathbb{N}} \\ b &= (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n \in \mathbb{N}}$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- $z = a + ib = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$

  com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).

... E SE AS RAIZES SÃO COMPLEXAS?

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}},$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) - i\,\mathrm{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

  com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}},$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) - i\,\mathrm{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

  com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).
- $(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)$.

Abraham de Moivre (1667 – 1754), matemático francês.

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}},$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) - i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}}.$$

- $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

  com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).
- $(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)$.

Abraham de Moivre (1667 – 1754), matemático francês.

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}},$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) - i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Assim, obtemos as soluções (linearmente independentes)

$$\frac{a+b}{2} = (r^n\cos(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \frac{a-b}{2i} = (r^n\,\mathrm{sen}(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) + i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}},$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(n\varphi) - i\,\mathrm{sen}(n\varphi)))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Assim, obtemos as soluções (linearmente independentes)

$$\frac{a+b}{2} = (r^n\cos(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \frac{a-b}{2i} = (r^n\,\mathrm{sen}(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Finalmente, se z e $\bar{z}$ são raízes múltiplas, consideremos

$$\dots, (r^n n^i\cos(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (r^n n^i\,\mathrm{sen}(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}}, \dots.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$,

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\,\pi}{3}\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\,\pi}{3}\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Com a condição inicial $a_0 = 0$ obtemos $\alpha = 0$,

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\,\pi}{3}\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Com a condição inicial $a_0 = 0$ obtemos $\alpha = 0$, e com $a_1 = 1$ obtemos

$$1 = \beta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \beta\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\, a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha \cos\left(\frac{n\,\pi}{3}\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Com a condição inicial $a_0 = 0$ obtemos $\alpha = 0$, e com $a_1 = 1$ obtemos

$$1 = \beta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \beta\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, a solução é a sucessão $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Equações de recorrência lineares em geral

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à (*)}} \quad +$$

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à } (*)} + \boxed{\text{uma solução particular de } (*)}.$$

Equações de recorrência lineares em geral

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \tag{*}$$

obtém-se como

$\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à (*)}} + \boxed{\text{uma solução particular de (*)}}.$

Nota

- Já sabemos resolver a primeira questão.

Equações de recorrência lineares em geral

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

todas as soluções da equação homogénea associada à (*) + uma solução particular de (*).

Nota

- Já sabemos resolver a primeira questão.
- Estudamos agora métodos para obter uma solução particular de (*).

Dois casos

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação caraterística

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

(B) Se $d_n =$ um polinómio em n de grau j: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j \qquad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 não é solução da equação caraterística respetivamente

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

(B) Se $d_n =$ um polinómio em n de grau j: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j \qquad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 não é solução da equação caraterística respetivamente

$$b_n = (A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j) \cdot n^m \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 é solução da equação caraterística de multiplicidade m.

Dois casos

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

(B) Se $d_n =$ um polinómio em n de grau j: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j \qquad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 não é solução da equação caraterística respetivamente

$$b_n = (A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j) \cdot n^m \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 é solução da equação caraterística de multiplicidade m.

Os valores dos parâmetros A, A_i obtém-se substituindo b_n na equação de recorrência dada.

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots;$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogénea associada, cuja equação caraterística é

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogénea associada, cuja equação caraterística é

$$0 = q^2 - 3q + 2 =$$

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogénea associada, cuja equação caraterística é

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1).$$

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogénea associada, cuja equação caraterística é

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1).$$

Portanto, a solução geral da equação de recorrência homogénea é a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 2^n = \alpha + \beta \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

da forma

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

o que é equivalente a

$$2 = 2An - 3A(n-1) + A(n-2) = A.$$

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

o que é equivalente a

$$2 = 2An - 3A(n-1) + A(n-2) = A.$$

Logo, uma solução da equação de recorrência acima é $(n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n 2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -6 &= \alpha + 2\beta \end{aligned}.$$

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 \end{aligned} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -6 &= \alpha + 2\beta \end{aligned}.$$

Subtraindo a primeira linha à segunda dá $\beta = -6$ e por isso $\alpha = 6$.

Um exemplo (continuação)

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 =$ -2. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -6 &= \alpha + 2\beta \end{aligned}.$$

Subtraindo a primeira linha à segunda dá $\beta =$ -6 e por isso $\alpha = 6$.

Portanto, a solução é

$$(6 - 6 \cdot 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Teorema

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(1)} + \cdots + d_n^{(m)} \qquad (*)$$

uma equação de recorrência linear e suponhamos que as sucessões $b^{(1)}$, $b^{(2)}, \dots, b^{(m)}$ *são soluções de*

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(1)}, \\ x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(2)}, \\ &\vdots \\ x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(m)}, \end{aligned}$$

respetivamente. Então, a sucessão $b^{(1)} + \cdots + b^{(m)}$ *é uma solução de* (*).

Mais um exemplo

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Mais um exemplo

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$$

Mais um exemplo

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogénea associada,

Mais um exemplo

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogénea associada, $(b_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \qquad n = 2, 3, \dots,$$

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \dots$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogénea associada, $(b_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \qquad n = 2, 3, \dots,$$

e $(b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + (1+n), \qquad n = 2, 3, \dots.$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Falta determinar uma solução da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots.$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Falta determinar uma solução da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Uma vez que $1 + n$ é um polinómio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1),$$

consideramos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Falta determinar uma solução da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Uma vez que $1 + n$ é um polinómio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1),$$

consideramos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$. Substituindo na equação acima, obtemos $b_n^{(2)} = -\frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Falta determinar uma solução da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots.$$

Uma vez que $1 + n$ é um polinómio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1),$$

consideramos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$. Substituindo na equação acima, obtemos $b_n^{(2)} = -\frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2$.

Portanto, a solução geral da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por

$$(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$\left(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \tfrac{7}{2}n - \tfrac{1}{2}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 - \tfrac{7+1}{2} \end{aligned} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta \end{aligned}\;;$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n\in\mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 - \frac{7+1}{2} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta \end{aligned} \;;$$

logo $\beta = -2$ e $\alpha = 2$.

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$\left(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \tfrac{7}{2}n - \tfrac{1}{2}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 - \tfrac{7+1}{2} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta \end{aligned}\;;$$

logo $\beta = -2$ e $\alpha = 2$.

Logo, a solução da equação de recorrência dada com as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$ é

$$\left(2 - 2\cdot 2^n + n2^{n+1} - \tfrac{7}{2}n - \tfrac{1}{2}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

5. Equações de recorrência não lineares

Equações de recorrência não lineares

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$.

Equações de recorrência não lineares

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Em muitos casos podemos «linearizar» a equação utilizando um substituição adequada.

Equações de recorrência não lineares

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Em muitos casos podemos «linearizar» a equação utilizando um substituição adequada.

Exemplo (substituição «simples»)

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1 \qquad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $x_0 = 2$*; aqui suponhamos* $x_n \geq 0$*, para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Equações de recorrência não lineares

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Em muitos casos podemos «linearizar» a equação utilizando um substituição adequada.

Exemplo (substituição «simples»)

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1 \qquad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $x_0 = 2$; aqui suponhamos $x_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Escrevendo $y_n = x_n^2$, esta equação de recorrência não linear transforma-se na equação de recorrência linear

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $y_0 = x_0^2 = 4$.

Exemplo (continuação)

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.
- Como o termo «não homogéneo» é o polinómio 1 de grau zero, e como 1 não é raiz do polinómio caraterístico $q - 2$, sabemos que existe uma solução particular $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $b_n = A$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Substituindo na equação produz $A = 2A + 1$, ou seja, $A = -1$.

Exemplo (continuação)

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.
- Como o termo «não homogéneo» é o polinómio 1 de grau zero, e como 1 não é raiz do polinómio caraterístico $q - 2$, sabemos que existe uma solução particular $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $b_n = A$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Substituindo na equação produz $A = 2A + 1$, ou seja, $A =$ -1.
- Consequentemente, as soluções desta equação de recorrência são precisamente as sucessões $(c \cdot 2^n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$, com $c \in \mathbb{R}$.
  Tendo em conta a condição inicial $y_0 = 4$, obtemos $c = 5$; assim, a solução da equação $x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1$ com $x_0 = 2$ é a sucessão

$$(\sqrt{5 \cdot 2^n - 1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Utilizar o «linearizador»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Utilizar o «linearizador»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

Utilizar o «linearizador»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Utilizar o «linearizador»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \quad \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Utilizar o «linearizador»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \quad \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad y_0 = y_1 = 1;$$

Utilizar o «linearizador»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \quad \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad y_0 = y_1 = 1;$$

cuja solução é a sucessão $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos números de Fibonacci.

Utilizar o «linearizador»

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podems «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, a solução da equação acima com as condições iniciais é

$$(2^{F_n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Mais um exemplo

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\ldots\sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$.

Mais um exemplo

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\ldots\sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$,

Mais um exemplo

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots\sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\ldots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

Mais um exemplo

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\ldots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ $(n \geq 2)$;

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ $(n \geq 2)$; o que é equivalente a

$$2\log_2(x_n) = 1 + \log_2(x_{n-1}) \quad (n \geq 2).$$

Mais um exemplo

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ $(n \geq 2)$; o que é equivalente a

$$2\log_2(x_n) = 1 + \log_2(x_{n-1}) \quad (n \geq 2).$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2)$$

com a condição inicial $y_1 = 1$.

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c(\frac{1}{2})^n + 1)_{n \geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2} y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c(\frac{1}{2})^n + 1)_{n \geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c(\frac{1}{2}) + 1;$$

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c(\frac{1}{2})^n + 1)_{n\geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c(\frac{1}{2}) + 1;$$

logo, $c = 0$.

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$\left(c\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)_{n\geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c\left(\frac{1}{2}\right) + 1;$$

logo, $c = 0$. Portanto, para todo o $n \geq 1$,

$$x_n = 2^{y_n} = 2,$$

e $x_0 = 4$.

Ainda mais um exemplo

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = n! \cdot y_{n-1},$$

Ainda mais um exemplo

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = n! \cdot y_{n-1},$$

o que é equivalente a $y_n = y_{n-1}$, para todo o $n \geq 1$.

Ainda mais um exemplo

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = n! \cdot y_{n-1},$$

o que é equivalente a $y_n = y_{n-1}$, para todo o $n \geq 1$. Portanto, a solução geral da equação acima é dada por

$$(n! \cdot c)_{n \in \mathbb{N}} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$