Lista de Exercícios 1

Cálculo I

Exercício 1 Calcule, caso existam, os limites

(a) $\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{arcsen}(x^2))^{\frac{1}{x}}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(5x)}{x}$

(c) $\lim_{x\to +\infty}\arctan(1-x)$.

Exercício 2 Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\begin{cases} \arctan(x^2), & x\leq 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}.$$

(a) Estude f quanto à continuidade em $x=0$.

(b) Estude f quanto à diferenciabilidade em $x=0$.

(c) Estude a existência de extremos locais.

(d) Mostre que existe pelo menos um $\theta\in]-1,1[$ tal que $f'(\theta)=-\frac{\pi}{4}$.

(e) Considere a função g definida em $\mathbb{R}_0^-$ por $g(x)=f(x)$. Justifique que g é invertível e determine a função inversa de g indicando o domínio, contradomínio e expressão analítica.

Exercício 3 Seja $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}+\arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Estude f quanto à monotonia e extremos locais.

Exercício 4 Considere a função dada por $f(x)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$. Determine:

(a) o domínio de f;

(b) os valores de x tais que $f(x)\geq 0$.

Exercício 5 Caracterize a função inversa da função f e estude-a quanto à continuidade, sendo $f(x)=\pi-\arccos(2x+1)$.

Exercício 6

(a) Utilizando o Teorema de Lagrange, mostre que se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contíua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$ e tal que $f'(x)=0$ para todo o $x\in]a,b[$, então f é constante em $]a,b[$.

(b) Prove que sendo $f(x)=\operatorname{arcsen}(x)+\arccos(x)$ então $f(x)=\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in[-1,1]$. (Sugestão: use a alínea anterior).

Exercício 7 Considere a função f definida em $]-\infty, 3[$ por

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{12}{\pi} + x\right) \cdot \arctan(1-x), & x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ \frac{2x}{\ln(3+x) - \ln(3-x)}, & 0 < x < 3 \end{cases}.$$

(a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.

(b) Mostre que $f'_e(0) = \frac{\pi^2 - 24}{4\pi}$.

(c) Mostre que existe pelo menos um $c \in \left]-\frac{12}{\pi}, 0\right[$ tal que $f'(c) = \frac{\pi}{4}$.

Exercício 8 Considere a função f definida pela expressão analítica

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(1-x) + \sqrt{2x - x^2}.$$

(a) Determine o domínio de f.

(b) Mostre que $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

(c) Justifique que f atinge um máximo global e um mínimo global. Determine também esses valores.

(d) Determine o contradomínio de f.

Respostas

1a. 1

1b. 5

1c. $-\frac{\pi}{2}$

2a. f é contínua em $x = 0$

2b. f não é diferenciável em $x = 0$

2c. f tem minimo local em $x = 0$

3. f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$. A função não tem extremos locais.

4a. $D_f = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

4b. $x \in]-\infty, -3]$

5. $f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$ continua em $D_f = [-1, 0]$, $D'_f = [0, \pi]$. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\cos(\pi - x) - 1)$ é contínua em $D_{f^{-1}} = D'_f$.

8a. $D_f = [0, 2]$

8c. Use o Teorema de Weirstrass. Observar que $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]0, 2[$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e $f(2) = -\frac{\pi}{2}$. Então o minimo global é $-\frac{\pi}{2}$ e o máximo global é $\frac{\pi}{2}$.

8d. $D'_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$