Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

Classificação

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Teste 2

9 de janeiro de 2017 — Duração: **1h30**

Valores

Nome ____________________ N.º Mec. __________

Curso ____________________ N.º Folhas suplementares __________

Questão	1	2	3	4	5	total
Cotação	45	15	40	50	50	200
Classif.						

1. Esta questão é constituída por 5 alíneas de escolha múltipla.

Atribuem-se 9 pontos por cada resposta correta,
0 pontos por cada resposta em branco e
-3 pontos por cada resposta errada.

E \ C	0	1	2	3	4	5
0	00	09	18	27	36	45
1	-03	06	15	24	33	
2	-06	03	12	21		
3	-09	00	09			
4	-12	-03				
5	-15					

(Reservado à cotação)

Cada alínea tem uma só opção correta que deve assinalar com uma $\times$ no ☐ correspondente.

(a) Considera a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ e a sua equação característica $(1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$.

- ☐ Os valores próprios de A são -1 e -3.
- ☐ O espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$, é subespaço próprio de A.
- ☐ O conjunto dos vetores próprios de A associados ao valor próprio 3 é $< (1,0,2), (0,1,0) >$.
- ☐ O sistema $(A - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$ é possível e indeterminado.

(b) Em $\mathbb{R}^3$ a equação $x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2yz = -1$ define

- ☐ um hiperbolóide de uma folha.
- ☐ um hiperbolóide de duas folhas.
- ☐ um cilindro elíptico.
- ☐ o conjunto vazio.

(c) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz representativa da aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ relativamente às bases $\mathcal{S} = ((1,1),(1,-1))$ e $\mathcal{T} = ((1,0,1),(0,1,0),(0,1,-1))$. Nas bases canónicas teremos

- ☐ $\phi(x,y) = (x, 2x+y, -x-2y)$.
- ☐ $\phi(x,y) = (\frac{x+y}{2}, y, 2x)$.
- ☐ $\phi(x,y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{3x+y}{2}, \frac{-3x+y}{2})$.
- ☐ $\phi(x,y) = (x, x-y, 2x+2y)$.

(d) Considera o espaço vetorial real $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 4y + z = 0\}$ e o vetor $X = (1,1,1)$. A projeção ortogonal de X sobre S, $\text{proj}_S\, X$, é

- ☐ $\text{proj}_S\, X = X$.
- ☐ $\text{proj}_S\, X = (3,-4,1)$.
- ☐ $\text{proj}_S\, X = 1$.
- ☐ $\text{proj}_S\, X = 0$.

(e) Considera a matriz $A_{m\times n}$ e a aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $\phi(X) = AX$.

- ☐ Se ϕ é sobrejetiva, $dim(im(\phi)) = m$.
- ☐ Se ϕ é injetiva, $dim(ker(\phi)) = n$.
- ☐ Se $m = n$, ϕ é um isomorfismo.
- ☐ Se $n < m$, $dim(im(\phi)) = m$.

2. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$? Rodeia a resposta correcta e explica a tua resposta. Sempre que possível indica uma base e a dimensão de S.

   (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9x + y + 2017z = 2027\}$ é subespaço vetorial real? $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$ Porquê?

   uma base de S é $\boxed{}$ e $\dim(S) = \boxed{}$

   (b) $S = \{(x - y, 2y, y + z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é subespaço vetorial real? $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$ Porquê?

   uma base de S é $\boxed{}$ e $\dim(S) = \boxed{}$

3. Considera os vetores $X_1 = (1, 1, 1)$, $X_2 = (-1, 1, 0)$ e $X_3 = (-1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Verifica se os vetores são linearmente independentes.

   (b) Determina a projecção ortogonal do vetor X_3 sobre o subespaço $< X_2 >$.

   (c) Determina, se possível, uma base ortonormada de $< X_2, X_3 >$.

4. Considera a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ com equação característica $\lambda^2(3-\lambda)=0$ e valores próprios 0 e 3.

   (a) Indica o conjunto de **vetores próprios** associados ao valor próprio 3:

   (b) Indica **o subespaço próprio** associado ao valor próprio 0:

   (c) Justifica que a matriz A é diagonalizável.

   (d) Indica matrizes P e D, P diagonalizante de A e D diagonal, tais que $P^{-1}AP = D$.

$$P = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

   (e) A matriz A é ortogonalmente diagonalizável? Justifica a tua resposta e, em caso afirmativo, indica uma matriz ortogonal Q que diagonaliza A e tal que $Q^T AQ = D$, sendo D a matriz indicada na alínea anterior.

$$Q = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

5. Considera a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(X) = CX$ para todo o $X \in \mathbb{R}^4$.

   (a) Determina a imagem de ϕ, $\mathrm{im}(\phi)$, e uma sua base.

   (b) ϕ é sobrejetiva? Justifica.

   (c) Determina o núcleo de ϕ, $\ker(\phi)$, e uma sua base.

   (d) ϕ é injetiva? Justifica.

   (e) Encontra a matriz G representativa da transformação ϕ relativamente às bases $\mathcal{S} = \big((1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\big)$ e $\mathcal{C}$, canónica de $\mathbb{R}^2$.