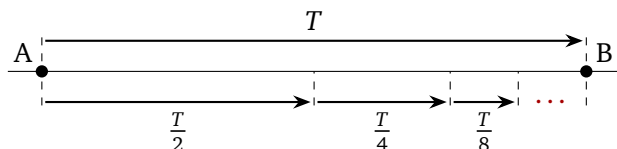




ver também [Séries numéricas],

## 1 Até os gregos enganaram-se, há 2500 anos ...

Dizia Zenão: para percorrer a distância entre A e B num tempo  $T$ ,



$$T = \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T}{2^n}$$

um atleta tem de percorrer metade da distância, em  $\frac{T}{2}$ ,

depois metade da distância que falta, em  $\frac{T}{4}$ ,

e a seguir metade da distância que falta, em  $\frac{T}{8}$ , ...

Mas  $T$ , finito, **não pode** ser a soma de infinitos termos positivos!?

## 2 Série numérica

Dada uma sucessão de números reais  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq p$  (termo geral da série)

- define-se uma nova sucessão  $S_k = a_p + \dots + a_k = \sum_{n=p}^k a_n$ ,  $k \geq p$  (somadas parciais)

- cujo limite é a **série numérica**  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=p}^k a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$

- repare-se que  $S_{k+1} = \sum_{n=p}^{k+1} a_n = S_k + a_{k+1}$ , ou seja,  $a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$

Podemos agora resolver o paradoxo de Zenão:

$$2S_k = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \dots + \frac{T}{2^{k-2}} + \frac{T}{2^{k-1}}$$

$$S_k = \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \dots + \frac{T}{2^{k-1}} + \frac{T}{2^k} \quad (k \geq p = 1)$$

$$S_k = 2S_k - S_k = T - \frac{T}{2^k} = T(1 - \frac{1}{2^k})$$

portanto, como era de esperar, a série é **convergente** e tem soma  $T$ , pois

$$\frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T}{2^n} = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} T(1 - \frac{1}{2^k}) = T$$

## 3 Séries divergentes – a série não é uma soma

Uma série **diverge** se o limite das somadas parciais é infinito ou não existe

- se  $a_n = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^k 1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} k = +\infty$

- se  $a_n = (-1)^n$ ,  $S_1 = -1$ ,  $S_2 = -1 + 1 = 0$ ,  $S_3 = -1 + 1 - 1 = -1$ ,  $S_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \dots$   
a sucessão das somadas parciais  $S_k$  é periodica, logo  $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$  não existe

Atenção: a notação de ‘soma infinita’  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$  é **enganadora**!

- uma ‘soma infinita’ **não é associativa**:  $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = ?$

$$(-1+1) + (-1+1) + \dots = 0+0+\dots = 0 \quad \text{ou} \quad -1 + (1-1) + (1-1) + \dots = -1+0+0+\dots = -1 ?$$

(contudo, se a série converge, a ‘soma infinita’ é associativa)

- uma ‘soma infinita’ **não é comutativa**: um exemplo... brevemente



## 4 Séries geométricas

A série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  é **geométrica** se  $a_n$  é termo de uma progressão geométrica:

$$\forall n \geq p, a_{n+1} = r a_n \text{ ou } \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ (se } a_n \neq 0), \text{ onde } r \text{ (razão) não depende de } n$$

- para  $n \geq 0$ ,  $a_{n+p} = r^n a_p$  ou, para  $n \geq p$ ,  $a_n = r^{n-p} a_p$
- para  $k \geq p$ ,  $S_k = \sum_{n=p}^k a_n \Rightarrow r S_k = \sum_{n=p+1}^{k+1} a_n \Rightarrow (1-r) S_k = a_p - a_{k+1} = (1-r^{k+1-p}) a_p$

Calculando  $S_k$  e o seu limite com  $k \rightarrow +\infty$ , a **série geométrica de razão  $r$**

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ converge se e só se } |r| < 1; \text{ se converge, } \sum_{n=p}^{+\infty} a_n = \frac{a_p}{1-r}$$

**Exercício:** caso converja, calcula a soma de (a)  $\sum_{n=3}^{+\infty} 3^n 4^{1-\frac{n}{2}}$ ; (b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{3n+1}}{3^{2(n+1)}}$

## 5 Séries redutíveis (ou telescópicas)

**Exemplo:** (série de Mengoli)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \begin{aligned} S_1 &= a_1 = 1 - \frac{1}{2} \\ S_2 &= S_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ S_3 &= S_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ S_k &= S_{k-1} + a_k = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{k+1} = 1$$

A série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  é **redutível** se existem  $u_n$  e  $q \in \mathbb{N}$  tais que  $a_n = u_n - u_{n+q}$

Neste caso, para  $k \geq p$ ,  $S_k = u_p + \dots + u_{p+q-1} - (u_{k+1} + \dots + u_{k+q})$

**Observação:** nesta expressão de  $S_k$  não há simplificações se  $k \geq p + q - 1$

## 6 Um exemplo e alguns exercícios

$\sum_{n=3}^{+\infty} \ln \frac{n+1}{n-1}$  é telescópica, com termo geral  $a_n = u_n - u_{n+q}$ ,  $u_n = -\ln(n-1)$ ,  $n \geq p=3$  e  $q=2$ :

$$a_n = \ln \frac{n+1}{n-1} = \ln(n+1) - \ln(n-1) = -\ln(n-1) - (-\ln(n+2-1)) = u_n - u_{n+2}$$

Sabe-se que  $S_k$  é a soma de  $q=2$  termos constantes e de 2 termos dependentes de  $k$

Para encontrar  $S_k$  podemos calcular e comparar  $S_{p+q} = S_{3+2} = S_5$  e  $S_{p+q+1} = S_6$ :

$$S_5 = a_3 + a_4 + a_5 = \ln 4 - \ln 2 + \ln 5 - \ln 3 + \ln 6 - \ln 4 = -\ln 2 - \ln 3 + \ln 5 + \ln 6$$

$$S_6 = S_5 + a_6 = -\ln 2 - \ln 3 + \ln 5 + \ln 6 + \ln 7 - \ln 5 = -\ln 2 - \ln 3 + \ln 6 + \ln 7$$

Deduz-se que  $S_k = -\ln 2 - \ln 3 + \ln k + \ln(k+1)$  e a série diverge, pois  $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = +\infty$

1. Justifica que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-9}$  é telescópica e  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{9n^2-4}$  não é telescópica

2. Verifica que  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ , geométrica com razão  $r \neq 1$ , é telescópica com  $u_n = \frac{a_n}{1-r}$  e  $q=1$ ;  
prova que é telescópica também para  $r=1$ .

3. Calcula: (a)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \left( \cos \frac{8\pi}{2^n} - \cos \frac{\pi}{2^n} \right)$ ; (b)  $\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \ln \left( \frac{n+1}{n-1} \right)$ ; (c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ .



## 7 Um critério de divergência

Condição necessária de convergência:  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  converge  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0$$

Critério (divergência):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \text{ não é zero ou não existe} \Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ diverge}$$

Atenção! Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , nada se pode concluir ( $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$  CONV e  $\sum_{n=3}^{+\infty} \ln \frac{n+1}{n-1}$  DIV)

Exercícios: 1. determina a natureza de (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$  e (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{-n}$

2. sabendo que  $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n = 1$ , com  $a_n > 0$ , determina a natureza de

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_n} \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{a_n} \quad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{1+a_n}{1+a_{n+1}} \quad (d) \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(a_n - a_{n+1})$$

Observação:  $\int_p^{+\infty} f(x)dx$  converge  $\nRightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  (p.e.,  $\int_1^{+\infty} x \cos(x^3)dx \cong 0.225686$ )

## 8 Propriedades das séries

- $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=q}^{+\infty} a_n$  têm a mesma natureza para  $p, q \in \mathbb{N}_0$  quaisquer
- $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=p}^{+\infty} \alpha a_n$  têm a mesma natureza para qualquer  $\alpha \neq 0$  e, caso sejam convergentes,  $\sum_{n=p}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=p}^{+\infty} a_n$

Sejam dadas  $S = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  e  $T = \sum_{n=p}^{+\infty} b_n$ :

- $S$  e  $T$  convergem  $\Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=p}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=p}^{+\infty} b_n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (linearidade)
- $S$  converge e  $T$  diverge  $\Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} (a_n + b_n)$  diverge
- $S$  e  $T$  divergem  $\Rightarrow$  nada se pode concluir sobre a natureza de  $\sum_{n=p}^{+\infty} (a_n + b_n)$

Observação: às vezes, neste caso, basta pensar no limite das somas parciais

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k + T_k = \text{"limitada} + \infty" = +\infty$$

## 9 Exercícios

1. Determina a natureza e, em caso de convergência, a soma de

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n} - \frac{n^2+n+1}{n+1}\right) \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 1) \quad (c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$$

2. Sabendo que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(5a_n + \frac{3}{4^n}\right) = 10$ , (a) justifica que  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge (b) calcula a sua soma

3. Sejam  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$  e  $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3^{n-1}} - \frac{n+1}{3^n}\right)$ :

(a) verifica que  $S$  e  $T$  convergem e calcula as suas somas

(b) calcula o termo geral de  $T$  e deduz a soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$



## 10 Séries de termos não negativos

$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  é uma **série de termos não negativos** se  $a_n \geq 0, n \geq p$

Todavia, as técnicas específicas que serão apresentadas aplicam-se também quando

- $a_n \geq 0$  para algum  $q \geq p$ , analisando  $\sum_{n=q}^{+\infty} a_n$  ou
- $a_n \leq 0$ , analisando  $\sum_{n=p}^{+\infty} (-a_n)$

Neste caso, a natureza da série caracteriza-se de uma forma mais simples:

- **converge** se e só se a sucessão das somas parciais é limitada
- senão, **diverge para  $+\infty$**

**Exemplo importante:**  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$ , chama-se **série harmónica de ordem  $\alpha$**

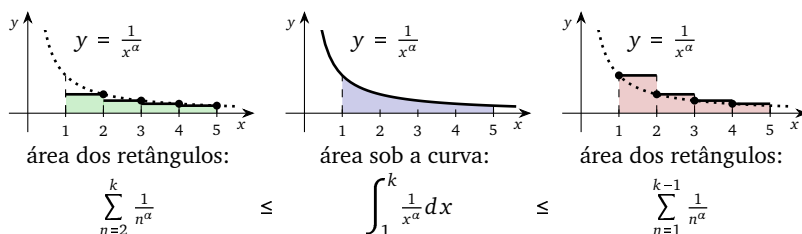
Uma série harmónica converge se e só se tem ordem  $\alpha > 1$

## 11 Critério do integral

Se  $f : [p, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  é **não negativa** e **decrecente** e  $a_n = f(n), \forall n \geq p$ ,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \int_p^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Verificação para séries harmónicas de ordem  $\alpha \geq 0$ : considerem-se as somas parciais



assim, a desigualdade  $S_k - a_1 \leq \int_1^k \frac{1}{x^\alpha} dx \leq S_{k-1}$  prova o resultado do critério.

**Exercício:** determina a natureza de (a)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ; (b)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ ; (c)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-\pi)^3}$

## 12 Critério de comparação

Dadas duas sucessões tais que  $a_n \geq b_n \geq 0, n \geq p \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ CONV} \Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} b_n \text{ CONV} \quad \text{e} \quad \sum_{n=p}^{+\infty} b_n \text{ DIV} \Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ DIV}$$

**Atenção!** Se  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  diverge ou  $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$  converge nada se pode concluir

**Exercício:** determina (se conseguires!) a natureza das seguintes séries

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3 - \cos n}{n^2 - e} \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3 - \cos n}{n - e} \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1} e^n \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n} \\
 & \text{(e)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\arctg n}{n+1} \quad \text{(f)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\arctg n}{n^2 + 1} \quad \text{(g)} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{(h)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$



### 13 Critério do limite

Se  $a_n \geq 0$  e  $b_n > 0$ ,  $n \geq p \in \mathbb{N}_0$ , e existe o limite  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ,

$L \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$  as séries  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$  têm a mesma natureza

Exemplo: comparar  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{2n+1}$  com  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n}{3^n-\ln n}$  com  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^n$

$L = 0$  e a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$  converge  $\Rightarrow$  a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  converge

Exemplo: comparar  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$  com  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

$L = +\infty$  e a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$  diverge  $\Rightarrow$  a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  diverge

Exemplo: comparar  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$  com  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$

nos outros casos, nada se pode concluir

Exemplo: comparar  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$  e  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$  com  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$  e com  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

### 14 Alguns limites e propriedades de sucessões

- Se  $x = x(n) \rightarrow 0$  (p.e.,  $x = \frac{1}{n}$ ), então  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- Exponencial:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n+a}\right)^{n+b} = e^x$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^{n+\gamma} = e^{\alpha-\beta} \quad \forall a, b, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
- “Hierarquia de infinitos”: a notação  $a_n \ll b_n$  significa  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$   
 $\log_a n$  (com  $a > 1$ )  $\ll n^p$  (com  $p > 0$ )  $\ll b^n$  (com  $b > 1$ )  $\ll n! \ll n^n$

- Seja  $a_n = f(n)$  para  $n \geq p$ , com  $[p, +\infty[ \subseteq D_f$ ; então

$f$  monótona, limitada ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Rightarrow a_n$  tem as mesmas propriedades

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \Rightarrow f$  tem limite  $\ell$  ou não tem limite

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$
- Logo, se  $a_n$  é obtida a partir de logaritmos ou potências de  $n$  através de somas, multiplicações, frações e composições, então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

### 15 Como usar o critério do limite

No critério do limite compara-se a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  com  $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$ , que é

1. uma série ‘elementar’ (quase sempre harmónica) ou
2. uma série mais simples (a analisar com outro critério)

O termo  $b_n$  determina-se frequentemente verificando se (e porquê)  $a_n \rightarrow 0$

**Exemplos:** destacar os termos que tendem mais rapidamente para  $+\infty$ :

$$a_n = \frac{n^2-7}{2n^4+\ln n} = \frac{n^2}{n^4} \cdot \frac{1-\frac{7}{n^2}}{2+\frac{\ln n}{n^4}} = \frac{1}{n^2} \cdot (\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{7}{n^2}}{2+\frac{\ln n}{n^4}}) \Rightarrow b_n = \frac{1}{n^2}$$

usar limites notáveis:  $a_n = \sqrt{n} \sin \frac{1}{n} = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}) \Rightarrow b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

**Exercício:** estuda a natureza de (a)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-\ln n}{n^2 \ln n}$ ; (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n - n2^n}{3^n + e^n \ln n}$ ; (c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(\cos \frac{1}{n})$



## 16 Série alternadas e critério de Leibniz

A série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  é **alternada** se  $a_n \cdot a_{n+1} < 0$  para  $n \geq p$  ou, equivalentemente, se

$$a_n = (-1)^n u_n \text{ (ou } a_n = (-1)^{n+1} u_n) \text{ com } u_n > 0 \quad (\text{sendo então } u_n = |a_n|)$$

**Atenção!**  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n-2)}{n^2-10}$  é alternada para  $n \geq 4$ ;  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$  **não é alternada**

**Critério de Leibniz:** se  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  é alternada e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , então  
a sucessão  $|a_n|$  é decrescente  $\Rightarrow$  a série é convergente

**Exemplo:** as séries harmônicas *alternadas*  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  convergem para  $\alpha > 0$

**Exercício:** verifica que convergem (a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(-2)^n}$ ; (b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$

**Desafio:** verifica que não se pode aplicar o critério de Leibniz e determina

natureza (e soma, se possível) de (a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{(-2)^n}$ ; (b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n}$

## 17 Convergência absoluta e simples

A série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  de *termos quaisquer*

• **converge absolutamente** se  $\sum_{n=p}^{+\infty} |a_n|$  **converge**; neste caso  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  **converge**:

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \quad \log \sum_{n=p}^{+\infty} |a_n| \text{ CONV} \Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} (a_n + |a_n|) \text{ CONV} \Rightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} a_n = \sum_{n=p}^{+\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=p}^{+\infty} |a_n|$$

• **converge simplesmente** se  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  **converge** e  $\sum_{n=p}^{+\infty} |a_n|$  **diverge**

**Exemplo:**  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  conv. absolutamente;  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  conv. simplesmente

**Atenção:** não existem critérios de convergência simples!!

Em particular, o critério de Leibniz só prova a convergência!

**Exercício:** determina a natureza (conv. simples ou absoluta ou div.) de

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}} \quad (b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-e)^{-n}}{1+e^{-n}} \quad (c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-e)^n}{1+e^n} \quad (d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2\cos n}{n^2 \ln n}$$

## 18 Critérios de convergência absoluta

Se existe o limite

•  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  (critério da **raiz/de Cauchy**) ou

•  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , com  $a_n \neq 0$  para  $n \geq p$  (critério da **razão/de d'Alembert**)

$$L < 1 \Rightarrow \text{a série } \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ converge absolutamente}$$

$$L > 1 \Rightarrow \text{a série } \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ diverge (entende-se que } +\infty > 1)$$

$$L = 1 \Rightarrow \text{nada se pode concluir sobre a natureza da série } \sum_{n=p}^{+\infty} a_n$$

**Exercício:** estuda a natureza das seguintes séries

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n!} \quad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \quad (d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^n}{e^{n^2}} \quad (e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n! n^n}$$



## 19 Critérios de convergência absoluta: observações

- O critério da raiz aplica-se a “fatoriais”, usando a **fórmula de Stirling**:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

- Pela relação entre os dois limites, o critério da raiz é mais *poderoso*:

$$\begin{aligned} L_{\text{razão}} = 1 &\Rightarrow L_{\text{raiz}} = 1 & \nexists L_{\text{raiz}} &\Rightarrow \nexists L_{\text{razão}} \\ L_{\text{raiz}} = 1 &\Rightarrow L_{\text{razão}} = 1 \text{ ou } \nexists L_{\text{razão}} & \nexists L_{\text{razão}} &\Rightarrow L_{\text{raiz}} \text{ pode existir} \end{aligned}$$

**Exemplo:** determina a natureza de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{(-2)^n}$

- Os critérios *falham* se  $\sum_{n=p}^{+\infty} |a_n|$  é comparável com uma série harmónica!
- Os critérios *falham* se a série  $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$  é simplesmente convergente!
- Pode ser útil estudar uma série mais *simples* (obtida por comparação)

**Exemplo:** determina a natureza de (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! - 2n^n}{4^n + n^4}$  (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + (-3)^n}{n! \cos(n\pi)}$

## 20 Exercícios

- Verifica que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$  para qualquer  $b > 1$  e que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ .
- Estuda a natureza das séries  
 (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{e^{n^2}}$  (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n^n - n!}$  (c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$  (d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)!}$   
 (e)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(1+\frac{1}{\ln n})}$ ; (f)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3-2n}{3n-2}\right)^n$ ; (g)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n! + \arctg n}$ ; (h)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$
- Mostra que a série  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}$  converge e calcula a sua soma.
- Estuda a natureza de: (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{2n^n}$ ; (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n n!}{2n^n}\right)^n$ ; (c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n!}{2n^n}}$
- Sabe-se que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0.2022$ , com  $a_n \geq 0$  para  $n \in \mathbb{N}$ : calcula  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[2023]{a_n}$ .
- Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$  com  $a_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Estuda a natureza de  
 (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + a_{n+1})(a_n - a_{n+1})$ , (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S + \sin a_n}{2 + \cos a_n}$ , (c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S a_n}{S + a_n}$ .
- Sabendo que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , com  $a_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , estuda a natureza de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

## 21 Mais exercícios

- Sabendo que  $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  e que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3}{2}$ , determina a natureza (divergente, absoluta ou simplesmente convergente) das seguintes séries: (a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ; (b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ; (c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n a_n$ .
- Se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge simplesmente, mostra que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$  converge absolutamente; se  $a_n \neq 0$ , prova que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  diverge.
- Considera  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , convergente, e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ , divergente, com  $a_n$  e  $b_n$  positivos.  
 (a) Determina a natureza de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{a_n}$ . (b) O  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n}$  pode ser zero?
- Sabe-se que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{3}$ , onde  $a_n > 0$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .  
 (a) Justifica que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{5a_n}$  converge. (b) Justifica que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .  
 (c) Estuda a natureza de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln a_n}{n}$ . (d) Analisa a natureza de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n (a_n - 6)$ .



## 22 Ainda mais exercícios!

5. Não há nenhuma maneira geral de deduzir a natureza de uma série

a partir da natureza das séries dos fatores do seu termo geral:

determina a natureza das séries de termos gerais  $a_n$ ,  $b_n$  e  $c_n = a_n b_n$ .

$$(a) a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (b) a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n, b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (c) a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, b_n = \frac{1}{n}$$

$$(d) a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \quad (e) a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, b_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n \quad (f) a_n = \frac{1}{n}, b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

6. Seja  $S$  a série de termo geral  $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}$ .

(a) Verifica que o módulo do termo geral é  $v_n = |u_n| = \frac{n+(-1)^n}{n^2}$ .

(b) Pode aplicar-se o critério da raiz ou o da razão?

(c) Mostra que  $S$  não é absolutamente convergente.

(d) Pode aplicar-se o critério de Leibniz?

(e) Prova que  $S$  é simplesmente convergente.

## 23 O teorema de Riemann (não faz parte do programa)

Quando converge, uma ‘soma de infinitos termos’ é associativa (slide 3); nesse caso,

$$a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots \text{ é comutativa } \Leftrightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ converge absolutamente}$$

Em particular, a convergência simples tem uma consequência surpreendente...

**Teorema (de Riemann):** dada uma série simplesmente convergente,

é possível alterar a ordem dos seus termos para obter

- uma série convergente para qualquer número real ou
- uma série divergente para  $+\infty$ , para  $-\infty$  ou sem limite

**Exemplo:**  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge simplesmente (prova-se que  $S = \ln 2$ );

mudando a ordem de  $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$

da seguinte forma: um índice ímpar, dois pares, um ímpar, dois pares... tem-se

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_3 + a_6 + a_8 + a_5 + a_{10} + a_{12} + \dots = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2}S$$

## 24 Soluções dos exercícios

Slide 4: (a) div, (b)  $\frac{2}{17}$ .

Slide 6: 1.  $\frac{1}{4n^2-9} = u_n - u_{n+3}$  com  $u_n = \frac{1/6}{2n-3}$ , mas não existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $\frac{1}{9n^2-4} = u_n - u_{n+q}$  (só  $q = \frac{4}{3}$ ); 2. para  $r = 1$ ,  $u_n = -na_p$ ,  $a_n = u_n - u_{n+1} = a_p$ ; 3. (a)  $-3$ , (b)  $\ln \frac{2}{3}$ , (c)  $\frac{\ln 2}{2}$ .

Slide 7: 1. (a,b) div; 2. (a,b,d) div, (c) conv.

Slide 9: 1. (a) 1, (b) div, (c)  $\frac{15}{2}$ ; 2. (b)  $\frac{6}{5}$ ; 3. (a)  $S = \frac{1}{2}$  e  $T = 1$ , (b)  $\frac{3}{4}$ .

Slide 11: (a) div, (b,c) conv.

Slide 12: (a,d,f,h) conv, as outras div.

Slide 15: (a) div, (b,c) conv.

Slide 16: (desafio) módulo não decrescente, (a)  $\frac{10}{3}$ , (b) div.

Slide 17: (a) simp conv, (b,d) abs conv, (c) div.

Slide 18: (a) conv, (b,d) abs conv, (c,e) div.

Slide 19: (a) div, (b) conv.

Slide 20: 2. (f,g) abs conv, (a,b,c) conv e (d,e,h) div; 3. 1; 4. (a,b) conv, (c) div; 5. 0; 6. (a,c) conv, (b) div; 7. div.

Slide 21: 1. (a,b) div, (c) abs conv; 3. (a) div, (b) claramente não! 4. (c) div, (d) conv.

Slide 22: 5. natureza da série de termos  $a_n/b_n/c_n$ : (a) conv/conv/conv, (b) conv/div/conv, (c) div/div/conv, (d) (simp) conv/(simp) conv/div, (e) conv/div/div, (f) div/div/div; 6. (b) sim, com limite igual a 1, (d) não, o módulo não é decrescente.