Classificação

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Exame Recurso

26 de janeiro de 2017 — Duração: **2h30**

Valores

Nome ________________________________ N.° Mec. __________

Curso ________________________ N.° Folhas suplementares __________

[Declaro que desisto ________________________________ (assinatura)]

Questão	1	2	3	4	5	6	7	total
Cotação	15	20	25	25	25	60	30	200
Classif.								

1. Calcula os valores próprios da matriz $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&3&0\\1&0&0&4\end{bmatrix}$.

2. Considera as matrizes $D=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&2\\-2&1&-1\end{bmatrix}$ e $E=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&3&3\\0&0&0\end{bmatrix}$.

   Na matriz D considera as suas colunas como sendo os vetores X_1, X_2 e X_3 de $\mathbb{R}^3$, ou seja $D=[X_1\ X_2\ X_3]$ com $X_1=(1,1,-2)$, $X_2=(1,1,1)$ e $X_3=(2,2,-1)$. A matriz E é uma forma escalonada por linhas da matriz D.

   (a) Indica: $\operatorname{car}(D)=\boxed{}$ $\operatorname{nul}(D)=\boxed{}$ $\operatorname{car}(E)=\boxed{}$ $\operatorname{nul}(E)=\boxed{}$

   (b) Qual a dimensão do espaço vetorial $S=<X_1,X_2,X_3>$? $\boxed{}$ Indica uma base para S:

3. Considera as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right]$. A matriz C é uma forma escalonada por linhas da matriz ampliada $[A|B]$.

(a) Indica: $\operatorname{car}(A) = \boxed{}$ $\operatorname{nul}(A) = \boxed{}$ $\operatorname{car}(C) = \boxed{}$ $\operatorname{nul}(C) = \boxed{}$

(b) Verifica se o vetor B pertence a $\mathcal{C}(A)$, o espaço das colunas de A.

(c) A matriz A é invertível? $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$ Justifica a tua resposta.

---

4. Considera em $\mathbb{R}^3$ as retas concorrentes $\mathcal{R}_1$ de equação vetorial $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \alpha(3, 0, -1), \alpha \in \mathbb{R}$, e $\mathcal{R}_2$ de equação vetorial $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \alpha(0, 2, -1), \alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determina, se possível, a equação vetorial de uma reta ortogonal a ambas as retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ e que contém o ponto $(1, 0, 1)$ de interseção de $\mathcal{R}_1$ com $\mathcal{R}_2$.

(b) Determina, se possível, a equação geral do plano que contém ambas as retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

Nome______________________________ N.° Mec. ____________

5. Considera a matriz $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(X) = FX$ para todo o $X \in \mathbb{R}^4$.

(a) Indica: $\operatorname{car}(F) = \boxed{}$ $\operatorname{nul}(F) = \boxed{}$

(b) Determina a imagem de ϕ, $\operatorname{im}(\phi)$, e uma sua base.

(c) ϕ é injetiva? Justifica.

(d) Encontra a matriz G representativa da transformação ϕ relativamente às bases $\mathcal{S} = \big((0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\big)$ e $\mathcal{C}$, canónica de $\mathbb{R}^2$.

6. Esta questão é constituída por 10 alíneas de escolha múltipla.

Atribuem-se 6 pontos por cada resposta correta,
0 pontos por cada resposta em branco e
-2 pontos por cada resposta errada.

E \ C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	00	06	12	18	24	30	36	42	48	54	60
1	-02	04	10	16	22	28	34	40	46	52	
2	-04	02	08	14	20	26	32	38	44		
3	-06	00	06	12	18	24	30	36			
4	-08	-02	04	10	16	22	28				
5	-10	-04	02	08	14	20					
6	-12	-06	00	06	12						
7	-14	-08	-02	04							
8	-16	-10	-04								
9	-18	-12									
10	-20										

(Reservado à cotação)

Cada alínea tem uma só opção correta que deve assinalar com uma $\times$ no ☐ correspondente.

(a) O conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2yz = -1$ constitui

☐ um cilindro elíptico.
☐ um hiperbolóide de uma folha.
☐ um hiperbolóide de duas folhas.
☐ o conjunto vazio.

(b) Considera a matriz $A_{3\times 3}$, um vetor $B \in \mathbb{R}^3$ e o sistema $AX = B$ possível e indeterminado.

☐ A matriz A é invertível.
☐ O vetor $B \notin \mathcal{C}(A)$.
☐ $\det(A) = 0$.
☐ $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.

(c) Considera as retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ de equações $x = y + z = 1$ e $(x, y, z) = (2, -1, 0) + \alpha(0, 1, 1)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, respectivamente.

☐ O ponto $(2, -1, 0)$ pertence a ambas as retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.
☐ As retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ intersetam-se num ponto.
☐ O ponto $(1, 0, 1)$ pertence a ambas as retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.
☐ As retas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são ortogonais.

(d) O núcleo de uma aplicação linear sobrejetiva $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tem dimensão

☐ 0.
☐ 1.
☐ 2.
☐ 3.

(e) Considera o espaço vetorial real $S = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

☐ S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
☐ S contém o vetor $(-1, 2, -1)$.
☐ S é gerado pelo vetor $(1, 1, 0)$.
☐ S contém o vetor $(-1, 1, 0)$.

(f) Considera a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ de equação característica $(-2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$.

- [ ] Os valores próprios de A são 2, -1 e -3.
- [ ] O sistema $(A - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$ é possível e indeterminado.
- [ ] O conjunto dos vetores próprios de A associados ao valor próprio -3 é $< (1,0,2),(0,1,0) >$.
- [ ] O espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$, é subespaço próprio de A.

(g) Quaisquer que sejam as matrizes $n \times n$ invertíveis A e B temos

- [ ] $(AB + A)^T = (B^T + I_n)A^T$.
- [ ] $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
- [ ] $(AB + A)^{-1} = A^{-1}(B^{-1} + I_n)$.
- [ ] $adj(AB)^T = (adj\ B)^T(adj\ A)^T$.

(h) Considera a reta $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ gerada pelo vetor $(-1,1,0)$.

- [ ] A projeção ortogonal do vetor $(-1,0,1)$ sobre a reta $\mathcal{R}$ é $(-1,1,0)$.
- [ ] A projeção ortogonal do vetor $(-1,0,1)$ sobre a reta $\mathcal{R}$ é $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$.
- [ ] O vetor $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ é ortogonal a $(-1,1,0)$ e a $(-1,0,1)$.
- [ ] A projeção ortogonal do vetor $(-1,0,1)$ sobre a reta $\mathcal{R}$ é $(-1,0,1)$.

(i) Considera a matriz $A_{5\times 3}$ tal que $\text{car}(A) = 3$. O sistema $AX = B$

- [ ] é tal que $\text{car}([A|B]) = 5$.
- [ ] tem solução única se $\text{car}([A|B]) < 3$.
- [ ] não tem solução se $\text{car}([A|B]) > 3$.
- [ ] tem uma infinidade de soluções.

(j) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz representativa da aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ relativamente às bases $\mathcal{S} = ((1,1),(1,-1))$ e $\mathcal{T} = ((1,0,1),(0,1,0),(0,1,-1))$. Nas bases canónicas teremos

- [ ] $\phi(x,y) = (\frac{x+y}{2}, y, 2x)$.
- [ ] $\phi(x,y) = (x, 2x+y, -x-2y)$.
- [ ] $\phi(x,y) = (x, x-y, 2x+2y)$.
- [ ] $\phi(x,y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{3x+y}{2}, \frac{-3x+y}{2})$.

7. Considera a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ com equação característica $\lambda(1-\lambda)(1+\lambda) = 0$.

(a) Indica **o subespaço próprio** associado ao valor próprio 0:

(b) Indica o conjunto de **vetores próprios** associados ao valor próprio 1:

(c) Justifica que o vetor $(1, -1, 1)$ é vetor próprio de A.

(d) Indica matrizes P e D, P diagonalizante de A e D diagonal, tais que $P^{-1}AP = D$.

$$P = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$