em [2.1 *Primitivas - parte 3*] ver Primitivação por mudança de variável

1 Fórmula e hipóteses

Sejam F uma primitiva de f e ϕ uma função invertível (detalhes a seguir)
Definindo $G(t) = F(\phi(t))$, temos que $F(x) = G(\phi^{-1}(x))$ e que

$$G'(t) = \big(F(\phi(t))\big)' = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

Assim, caso seja possível determinar uma primitiva de $f(\phi(t))\phi'(t)$, o seguinte esquema permite calcular (indiretamente) uma primitiva de f.

$$\begin{tikzcd}
\int f(x)\,dx \arrow[rr, "x=\phi(t)"'] \arrow[d, "\text{(primitiva)}"'] & x \in I \quad t \in J & \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt \arrow[d, "\text{(primitiva)}"] \\
F(x) = G(\phi^{-1}(x)) & & G(t) \arrow[ll, "t=\phi^{-1}(x)"']
\end{tikzcd}$$

- o domínio das primitivas é um intervalo: $D_F = I (\subseteq D_f)$ e $D_G = J$
- logo, sendo $G = F \circ \phi$, é necessário que: $\boxed{D_\phi = J \text{ e } CD_\phi \subseteq I = D_F}$
- $\boxed{\phi \text{ tem de ser diferenciável e invertível}}$ (usam-se as duas propriedades)

2 Sobre a fórmula do integral

Vimos que, se $x = \phi(t)$, então $\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$
Para justificar a igualdade podemos recorrer à notação de Leibniz:

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Embora a fração seja simbólica, podemos 'multiplicar por dt' e escrever

$$\phi'(t)\,dt = d\phi(t) = dx$$

$$\begin{tikzcd}
\int f(x)\,dx \arrow[d, "x=\phi(t)"'] \arrow[d, shift left=4, "dx=\phi'(t)\,dt"] \\
\int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt
\end{tikzcd}$$

3 Exemplo 1

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x+1}\,dx &= \int \frac{1}{t+1}(\ln t)'\,dt \\
&= \int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt \\
&= \int \frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t}\,dt && (1) \\
&= -\ln|t+1| + \ln|t| + C \\
&= -\ln|e^x+1| + \ln|e^x| + C \\
&= x - \ln(e^x+1) + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Escolho $t = e^x$ para (tentar) simplificar o integral: repare-se que, nestes casos, em vez de ϕ começa-se por definir a função inversa:

$$t = \phi^{-1}(x) = e^x \implies x = \phi(t) = \ln t$$

Sendo $D_f = \mathbb{R} \Rightarrow I = D_F = \mathbb{R}$, $D_\phi = \mathbb{R}^+ = J$, $CD_\phi = \mathbb{R} \subseteq I$ e ϕ diferenciável, podemos efetuar a substituição.

(1) Nesta passagem foi calculada a decomposição em frações simples da função racional $\frac{1}{t(t+1)}$.

4 Exemplo 2

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t-1}}(\ln t)'\,dt\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{t-1}}\cdot\frac{1}{t}\,dt \quad (?)\end{aligned}$$

Escolho $t=e^x$ como no exemplo anterior; agora, $D_f=D_F=I=\mathbb{R}^+$: preciso de definir D_ϕ para que $CD_\phi \subseteq D_F \Leftrightarrow \ln t>0 \Leftrightarrow t>1$. Assim, com $D_\phi=J=]1,+\infty[$, posso aplicar a substituição que, infelizmente, não torna mais simples o cálculo do integral.

Tento com $t=\sqrt{e^x-1}=\phi^{-1}(x)$. Pelas propriedades da raiz e pelo domínio de f, tem que ser $t>0$. Assim, calculo $\phi(t)=\ln(1+t^2)$, com $D_\phi=\mathbb{R}^+$, que satisfaz as hipóteses: com esta substituição obtém-se a primitiva.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx &= \int \frac{1}{t}\big(\ln(t^2+1)\big)'\,dt\\ &= \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}\,dt\\ &= 2\int\frac{1}{t^2+1}\,dt\\ &= 2\operatorname{arctg} t + C\\ &= 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C,\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

5 Exemplo 3

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int t(e^t)'\,dt\\ &= \int te^t\,dt\\ &= te^t-\int e^t\,dt\\ &= te^t-e^t+C\\ &= e^t(t-1)+C\\ &= x\big(\ln(x)-1\big)+C,\ C\in\mathbb{R} \qquad (1)\end{aligned}$$

O integral dado calcula-se por partes, com um truque (uma parte é '1'). No entanto, com a substituição $t=\phi^{-1}(x)=\ln x$, ou seja, $x=\phi(t)=e^t$, obtém-se um integral em que a resolução por partes é mais evidente.

(1) Repare-se que, nas substituições, podemos usar todas as relações encontradas entre x e t: neste caso, $e^t=x$ e $t=\ln x$.

6 Exemplo 4

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int\frac{1}{x^{\frac12}+x^{\frac13}}\,dx\int\frac{1}{x^{\frac36}+x^{\frac26}}\,dx\\ &= \int\frac{1}{t^3+t^2}(t^6)'\,dt\\ &= \int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt\\ &= 6\int\frac{t^3}{t+1}\,dt\\ &= 6\int t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\,dt \qquad (1)\\ &= 6\big(\tfrac{t^3}{3}-\tfrac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\big)+C\\ &= 2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C\\ &= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)\\ &\quad +C,\ C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Frequentemente, a substituição serve para obter uma função racional: neste caso, os expoentes das potências não são inteiros, mas são múltiplos de $\frac16$. Assim, se $t=\phi^{-1}(x)=x^{\frac16}=\sqrt[6]{x}>0$, tem-se $\sqrt{x}=t^3$ e $\sqrt[3]{x}=t^2$, sendo $x=\phi(t)=t^6$ diferenciável e invertível em $D_\phi=\mathbb{R}^+$, com $CD_\phi=\mathbb{R}^+=D_F$.

(1) Aqui foi calculada a divisão do polinómio t^3 por $t+1$, sendo t^2-t+1 o quociente e -1 o resto.

7 Substituições trigonométricas (para radicais)

Para integrar funções com raízes de expressões quadráticas podemos:

- transformar a raiz num dos radicais elementares apresentados na tabela
- aplicar as seguintes substituições (pode ser preciso usar restrições)

A.	$\sqrt{1-x^2} = \cos t$ se	$\begin{cases} x = \phi(t) = \operatorname{sen} t \in [-1,1] \\ t = \phi^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$
B.	$\sqrt{1+x^2} = \sec t$ se	$\begin{cases} x = \phi(t) = \operatorname{tg} t \in \mathbb{R} \\ t = \phi^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$
C.	$\sqrt{x^2-1} = \operatorname{tg} t$ se	$\begin{cases} x = \phi(t) = \sec t \in [1,+\infty[\text{ ou } -\sec t \in]-\infty,-1] \\ t = \phi^{-1}(x) = \arccos \frac{1}{\lvert x\rvert} = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} \in [0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$

TPC: obter as outras funções trigonométricas usando secante e tangente.

8 Exemplo 5 (radical de tipo 'A')

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \cos t (\operatorname{sen} t)'\,dt \\
&= \int \cos^2 t\,dt \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) + C && (1) \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t + C && (2) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C \\
&\quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\boxed{x = \operatorname{sen} t,\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

Neste tipo de substituição, não se *escolhe* ϕ^{-1}, mas ϕ, para poder *eliminar indiretamente* o radical.

(1) A primitiva obtida pela fórmula $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$ não permite voltar facilmente à variável x: no entanto, basta usar as fórmulas sobre somas de ângulos (aqui: $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen} t \cos t$) ou, como vimos, primitivar por partes para chegar a (2).

9 Exemplo 6 (radical de tipo 'A')

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\operatorname{sen} t \cos t}(\operatorname{sen} t)'\,dt \\
&= \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t \cos t}\,dt \\
&= \int \frac{1}{\operatorname{sen} t}\,dt \\
&= \int \operatorname{cosec} t\,dt \\
&= -\ln\lvert \operatorname{cosec} t + \operatorname{cotg} t\rvert + C \\
&= -\ln\left\lvert \frac{1+\cos t}{\operatorname{sen} t}\right\rvert + C && (1) \\
&= \ln\left\lvert \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}\right\rvert + C \\
&= \ln\left\lvert \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right\rvert + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\boxed{x = \operatorname{sen} t,\ t \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\text{ ou } t \in]0, \frac{\pi}{2}[}$

Neste caso, o domínio da substituição dada por $x = \phi(t) = \operatorname{sen} t$ não pode ser $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, pois $D_f =]-1,0[\cup]0,1[$ e, portanto, o domínio de F só pode ser o intervalo $I =]-1,0[$ ou $I =]0,1[$. Consequentemente, o domínio de ϕ poderá ser apenas o intervalo $J =]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ou $J =]0, \frac{\pi}{2}[$, onde todas as hipóteses são satisfeitas.

(1) Mais uma vez é preciso reescrever o resultado em termos de seno e cosseno para conseguir voltar à variável x.

10 Exemplo 7 (radical de tipo 'B')

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sec t\,(\operatorname{tg} t)'\,dt && (1)\\
&= \int \sec^3 t\,dt && (2)\\
&= \frac{1}{2}\sec t\operatorname{tg} t + \frac{1}{2}\ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + C\\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C\\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C,\\
&\quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\boxed{x = \operatorname{tg} t,\, t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$

(2) Calcula-se por partes, tal como sugere a expressão de (1).

11 Exemplo 8 (radical de tipo 'B')

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx &= \int \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}\,dx\\
&= \int \frac{1}{\sec^3 t}(\operatorname{tg} t)'\,dt\\
&= \int \frac{1}{\sec t}\,dt\\
&= \int \cos t\,dt\\
&= \operatorname{sen} t + C\\
&= \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\cdot \cos t + C && (1)\\
&= \frac{\operatorname{tg} t}{\sec t} + C\\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\boxed{x = \operatorname{tg} t,\, t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$

(1) Nesta substituição (e na próxima) conhecem-se expressões na variável x para $\sec t$ e $\operatorname{tg} t$: usando estas duas funções é possível representar as outras funções trigonométricas. (Aliás, com a exceção do sinal, o mesmo pode ser feito a partir de uma única função trigonométrica qualquer.)

12 Exemplo 9 (radical de tipo 'C')

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \int \frac{1}{\sec t\operatorname{tg} t}(\sec t)'\,dt\\
&= \int \frac{\sec t\operatorname{tg} t}{\sec t\operatorname{tg} t}\,dt\\
&= \int 1\,dt\\
&= t + C\\
&= \arccos\frac{1}{x} + C && (1)\\
&= \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\boxed{x = \sec t,\, t \in]0, \frac{\pi}{2}[}$

O domínio da função integranda $D_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ não é um intervalo: a definição de ϕ depende do intervalo escolhido (ou dado, no caso do integral definido) para o domínio de F: se $D_F =]-\infty,-1[$, $x = \phi(t) = -\sec t$ e, se $D_F =]1,+\infty[$, $x = \phi(t) = \sec t$, com $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ em ambos os casos. Nesta resolução optou-se pela segunda hipótese.

(1) É possível escolher qualquer uma das duas soluções, embora seja mais comum a primeira.

13 Transformação de expressões quadráticas

Vamos transformar a expressão quadrática do radical $\sqrt{1+x-2x^2}$:

- pôr em evidência o coeficiente de x^2

$$1+x-2x^2 = -2\left(x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}\right)$$

- completar o quadrado $x^2 \pm 2ax = x^2 \pm 2ax + a^2 - a^2 = (x \pm a)^2 - a^2$

$$= -2\left(x^2 - 2\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}\right) = -2\left(\left(x-\tfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\right) = -2\left(\left(x-\tfrac{1}{4}\right)^2 - \tfrac{9}{16}\right)$$

- pôr em evidência o termo constante ($\frac{9}{16}$), escolhendo o sinal para que o fator numérico da expressão ($\frac{9}{8}$) seja positivo

$$= -2\left(-\tfrac{9}{16}\right)\left(-\tfrac{16}{9}\left(x-\tfrac{1}{4}\right)^2+1\right) = \tfrac{9}{8}\left(1-\tfrac{16}{9}\left(x-\tfrac{1}{4}\right)^2\right)$$

- passar o coeficiente para dentro do quadrado

$$= \tfrac{9}{8}\left(1-\left(\tfrac{4}{3}\left(x-\tfrac{1}{4}\right)\right)^2\right) = \tfrac{9}{8}\left(1-\left(\tfrac{4x-1}{3}\right)^2\right)$$

Então: $\sqrt{1+x-2x^2} = \sqrt{\frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{4x-1}{3}\right)^2\right)} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{4x-1}{3}\right)^2}$ com substituição

$$\sqrt{1-\left(\tfrac{4x-1}{3}\right)^2} = \cos t,\ \tfrac{4x-1}{3} = \operatorname{sen} t,\ t = \phi^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}\tfrac{4x-1}{3},\ x = \phi(t) = \tfrac{1}{4}(1+3\operatorname{sen} t)$$

14 Exemplos – mais expressões quadráticas

$$x^2+6x+14 = x^2+2\cdot 3x+14 = (x+3)^2-9+14 = (x+3)^2+5$$
$$= 5\left(\tfrac{1}{5}(x+3)^2+1\right) = 5\left(\left(\tfrac{x+3}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)$$

Logo, $\sqrt{x^2+6x+14} = \sqrt{5\left(\left(\frac{x+3}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)} = \sqrt{5}\sqrt{\left(\frac{x+3}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$ com substituição

$$\sqrt{\left(\tfrac{x+3}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \sec t,\ \tfrac{x+3}{\sqrt{5}} = \operatorname{tg} t,\ t = \phi^{-1}(x) = \operatorname{arctg}\tfrac{x+3}{\sqrt{5}},\ x = \phi(t) = -3+\sqrt{5}\operatorname{tg} t$$

$$\frac{1}{4}x^2-2x+3 = \tfrac{1}{4}(x^2-8x+12) = \tfrac{1}{4}\left((x-4)^2-4\right)$$
$$= \tfrac{4}{4}\left(\tfrac{(x-4)^2}{4}-1\right) = \left(\tfrac{x-4}{2}\right)^2-1$$

Logo, $\sqrt{\frac{1}{4}x^2-2x+3} = \sqrt{\left(\frac{x-4}{2}\right)^2-1}$ com substituição

$$\sqrt{\left(\tfrac{x-4}{2}\right)^2-1} = \operatorname{tg} t,\ \tfrac{x-4}{2} = \pm\sec t,\ t = \phi^{-1}(x) = \arccos\tfrac{2}{|x-4|},\ x = \phi(t) = 4 \pm 2\sec t$$

15 Exemplo 10 (radical de tipo 'C')

$$\int \frac{\sqrt{\frac{1}{4}x^2-2x+3}}{x-4}\,dx = \int \frac{\operatorname{tg} t}{2\sec t}(4+2\sec t)'\,dt$$
$$= \int \frac{\operatorname{tg} t}{2\sec t}\cdot 2\sec t\operatorname{tg} t\,dt$$
$$= \int \operatorname{tg}^2 t\,dt$$
$$= \int \sec^2 t - 1\,dt$$
$$= \operatorname{tg} t - t + C$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2-2x+3} - \arccos\frac{2}{x-4} + C,$$
$$C \in \mathbb{R}$$

$\boxed{x = 4+2\sec t,\ t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[}$

Aproveitando as contas da página anterior, se $x = \phi(t) = 4+2\sec t$, com $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $x \in [6, +\infty[$, podemos aplicar a substituição, sendo $\sqrt{\frac{1}{4}x^2-2x+3} = \operatorname{tg} t$, $x-4 = 2\sec t$ e $t = \phi^{-1}(x) = \arccos\frac{2}{x-4}$.

16 Primitivação quase imediata e por substituição

A primitivação quase imediata (**PQI**) é o "contrário" da substituição (**PS**)

PS: escolhe-se $\phi(t)$ e transforma-se $f(x)$ em $f(\phi(t))\phi'(t)$

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \left[\begin{smallmatrix} t=\phi^{-1}(x)=\ln x,\, x=\phi(t)=e^t \\ dx=d\phi(t)=\phi'(t)dt=e^t dt \end{smallmatrix}\right] = \int \frac{e^t dt}{e^t(1+t)} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln|1+\ln x| + C$$

PQI: descobre-se $u(x)$ e transforma-se $f(u(x))u'(x)$ em $f(u)$

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{1}{1+\ln x}\frac{1}{x}\, dx = \left[\begin{smallmatrix} u(x)=1+\ln x \\ u'(x)=\frac{1}{x} \end{smallmatrix}\right] = \int \frac{1}{u} u' dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln|1+\ln x| + C$$

Contudo, na **PQI**, a primitiva de $f(u)$ não é sempre imediata (=tabelas)!

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}(\operatorname{sen} x)' dx = \int \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\, d(\operatorname{sen} x)$$

$$(u=\operatorname{sen} x) = \int \frac{1}{1-u^2}\, du = \text{(função racional!)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + C$$

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{1-\operatorname{sen}^2 x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x}\right| = \ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right| = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\right)$$

17 Substituições com funções hiperbólicas (facultativo)

$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, análoga a $\sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t = 1$, proporciona as substituições

B'.	$\sqrt{1+x^2} = \cosh t$	se	$\begin{cases} x = \phi(t) = \operatorname{senh} t \in \mathbb{R} \\ t = \phi^{-1}(x) = \operatorname{arsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \in \mathbb{R} \end{cases}$
C'.	$\sqrt{x^2-1} = \operatorname{senh} t$	se	$\begin{cases} x = \phi(t) = \cosh t \in [1, +\infty[\text{ ou } -\cosh t \in]-\infty, -1] \\ t = \phi^{-1}(x) = \operatorname{arcosh}(\lvert x\rvert) = \ln(\lvert x\rvert + \sqrt{x^2-1}) \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$

No cálculo das primitivas podem ser úteis as seguintes fórmulas:

$$e^t = \cosh t + \operatorname{senh} t \qquad \cosh(2t) = \cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t \qquad \operatorname{senh}(2t) = 2\operatorname{senh} t \cosh t$$

$$(\operatorname{tgh} t)' = 1 - \operatorname{tgh}^2 t = \frac{1}{\cosh^2 t} \qquad (\operatorname{cotgh} t)' = 1 - \operatorname{cotgh}^2 t = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 t}$$

$$\int \cosh^2 t\, dt = \frac{1}{2}(t + \operatorname{senh} t \cosh t) + C \qquad \int \operatorname{senh}^2 t\, dt = \frac{1}{2}(-t + \operatorname{senh} t \cosh t) + C$$

Estas substituições são aplicadas aos exemplos 7, 8 e 9 nos slides seguintes

18 Exemplo 11 (radical de tipo B')

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2}\, dx &= \int \cosh t (\operatorname{senh} t)'\, dt \\ &= \int \cosh^2 t\, dt \qquad (1) \\ &= \frac{1}{2}(t + \operatorname{senh} t \cosh t) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C, \\ &\quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\boxed{x = \operatorname{senh} t,\ t \in \mathbb{R}}$

(1) calcula-se por partes, como no caso trigonométrico, aplicando a identidade $\operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t - 1$.

19 Exemplo 12 (radical de tipo B’)

$$\boxed{x = \operatorname{senh} t, t \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx &= \int \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\cosh^3 t}(\operatorname{senh} t)'\,dt \\ &= \int \frac{1}{\cosh^2 t}\,dt \\ &= \operatorname{tgh} t + C \\ &= \frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t} + C \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C,\ C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

20 Exemplo 13 (radical de tipo C’)

$$\boxed{x = \cosh t, t \in \mathbb{R}^+}$$

Escolheu-se $x \in]1,+\infty[$ também nesta resolução, mas o domínio da substituição $x = \phi(t) = \cosh t$ é $t \in]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \int \frac{1}{\cosh t \operatorname{senh} t}(\cosh t)'\,dt \\ &= \int \frac{1}{\cosh t}\,dt \qquad (1) \\ &= \int \frac{\cosh t}{\cosh^2 t}\,dt \\ &= \int \frac{(\operatorname{senh} t)'}{1+\operatorname{senh}^2 t}\,dt \\ &= \operatorname{arctg}(\operatorname{senh} t) + C \\ &= \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}) + C\end{aligned}$$

(1) As contas são parecidas com o integral da secante (slide 16), mas neste caso a primitiva quase imediata resolve-se com a primitiva imediata da arco tangente.

21 Revisão

(a) $\displaystyle\int (1+x)^{-2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)^3\sqrt{x^2+6x+8}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int (x-1)\ln(x+1)\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int x(1-x)^{42}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\operatorname{senh} x)\cosh x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{senh} x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\,dx \quad [t = \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} x]$

Soluções:

(a) $-\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{4}{3}} + C$

(b) $\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x^2+6x+8}}{(x+3)^2} + C$

(c) $\dfrac{1}{2}(x^2-2x-3)\ln(1+x) - \dfrac{1}{4}(x-3)^2 + C$

(d) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} - 2\sqrt{1+\ln x} + C$

(e) $\dfrac{1}{44}(1-x)^{44} - \dfrac{1}{43}(1-x)^{43} + C$

(f) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right| + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{senh} x) + C$

(g) $\ln\left|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$

(h) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\operatorname{tg}^{\frac{4}{3}} x - \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} x + 1}{(\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} x + 1)^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} x - 1}{\sqrt{3}} + C$