ver *2.2 Integrais de Riemann*: [*parte 1*], [*parte 2*], [*parte 3*], [*parte 4*] e [*parte 5*]

1 Somas de Riemann

Objetivo: calcular a área da região definida pelo gráfico duma função [app]

- Uma partição P_n de um intervalo $I = [a, b]$ é um conjunto de $n + 1$ pontos
$$P_n = \{x_i, i = 0, \ldots, n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$
A partição regular, com $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, é a escolha mais comum
- A amplitude (norma) da partição P_n é $\Delta P_n = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}|$
A partição regular tem amplitude $\Delta P_n = \frac{b-a}{n}$
- À sequência $C_n = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ é compatível com P_n se $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
Tipicamente, ξ_i é x_{i-1} ou x_i ou o minimizante/maximizante de f (contínua!) em $[x_{i-1}, x_i]$
- A soma de Riemann da função f associada à partição P_n do intervalo $[a, b] \in D_f$ e à sequencia C_n compatível com P_n é o sumatório
$$S(f, P_n, C_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

2 Somas de Riemann e integrabilidade

A função f é integrável (à Riemann) em $[a, b] \subseteq D_f$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = I \in \mathbb{R}$ se
$$S(f, P_n, C_n) \to I, \text{ quando } n \to +\infty, \text{ desde que } \Delta(P_n) \to 0$$
sendo P_n partições de $[a, b]$ em n intervalos e C_n sequências compatíveis.
Negativamente: f não é integrável se $S(f, P_n, C_n)$ não tem limite, ou seja,

- para alguma escolha de P_n e C_n, $S(f, P_n, C_n) \to \pm\infty$ ou
- para duas escolhas de P_n e C_n, $S(f, P_n, C_n)$ tem limites diferentes

Contudo, se f é integrável, $S(f, P_n, C_n) \to \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ para quaisquer P_n e C_n

Exemplo: supondo que $f(x) = x$ é integrável, $\displaystyle\int_0^2 x\,dx = 2$ pois, com $x_i = \frac{2i}{n}$ $(\Delta(P_n) = \frac{2}{n})$ e $\xi_i = x_i, i = 1, \ldots, n$, $S(f, P_n, C_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\tfrac{2i}{n})\tfrac{2}{n} = \tfrac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \tfrac{4}{n^2}\tfrac{n^2+n}{2} = 2 + \tfrac{2}{n} \xrightarrow[\Delta(P_n)\to 0]{} 2$

3 Propriedades do integral de Riemann

Sejam f e g duas funções integráveis no intervalo $I = [a, b]$

- f é integrável em qualquer $[c, d] \subseteq I$
- aditividade: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (desde que estes existam)
consequentemente: $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ e $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- linearidade: $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- desigualdade triangular: $|f|$ é integrável em I e $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
- monotonia: $f(x) \leq g(x), \forall x \in I \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- teorema de Lagrange (!?) ou da média integral: f contínua em $I \Rightarrow \exists c \in I : f(c) = \displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

4 Condições de integrabilidade

Da função f, num intervalo $I = [a,b] \subseteq D_f$, podemos afirmar que ...

diferenciável $\Rightarrow$ contínua $\Rightarrow$ integrável $\Rightarrow$ limitada

não limitada $\Rightarrow$ não integrável

- limitada em I e não contínua num número finito de pontos $\Rightarrow$ integrável

  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$ é integrável em qualquer intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

- g integrável em I e $f(x) \neq g(x)$ num número finito de pontos $\Rightarrow$ integrável

  $$\text{sendo } \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

  com f do no exemplo anterior e $g(x) \equiv 0$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0$, $\forall [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

- monótona em $I \Rightarrow$ integrável [*mesmo com ∞ descontinuidades em I*]

5 Exercícios

1. Considera a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{se } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \notin]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$
   (a) Mostra que f é integrável em $[-\pi, \frac{\pi}{4}]$.
   (b) Mostra que f não é integrável em $[\frac{\pi}{4}, \pi]$.

2. Seja f uma função de domínio $D = [0,2]$ tal que $f(0) = 0$ e, para cada $n = 0,1,2,3,\ldots$, $f(x) = \frac{1}{2^n}$ (constante) no intervalo $]\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}]$. Esboça o gráfico de f e, baseando-te nele:
   (a) justifica que f é integrável;
   (b) mostra que $A = \int_0^2 f(x)\,dx = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$;
   (c) verifica que $\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq x$ e prova que $A \in [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$.

6 Funções primitiváveis e integráveis

Observação: as derivadas laterais da função F (que definem F') não são limites laterais de F'

derivadas laterais: $F'_\pm(c) = \lim\limits_{x\to c^\pm} \frac{F(x)-F(c)}{x-c}$ limites laterais da derivada: $F'(c^\pm) = \lim\limits_{x\to c^\pm} F'(x)$

contudo: $\circledast$ se F é contínua e existe $F'(c^\pm)$, então $F'_\pm(c) = F'(c^\pm)$ [*pela regra de Cauchy*]

F é uma primitiva de f (ou seja, f é a derivada de F) em $I = [a,b]$ se e só se

$$F'_+(a) = f(a); \quad F'(x) = f(x), \forall x \in]a,b[; \quad F'_-(b) = f(b)$$

Sendo assim, F é contínua em $I = [a,b]$ (à direita em a e à esquerda em b) e

$$f \text{ primitivável em } [a,b] \text{ e } \lim_{x\to c} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ contínua em } c \in I \qquad [\textit{aplicar } \circledast]$$

---

integrável $\not\Rightarrow$ primitivável f do slide 4 tem $\lim\limits_{x\to c} f(x) \equiv 0$ e não é contínua

primitivável $\not\Rightarrow$ integrável $f(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ não é limitada perto de $x = 0$,

mas tem primitiva $F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (contínua, com $F'_\pm(0) = 0$) [*verificar!*]

wiki dot ver também [*2.1 Primitivas - parte 4*]

7 Fórmula de Barrow – cálculo do integral de Riemann

f integrável e primitivável (com $f = F'$) em $[a, b]$ ou, em particular, contínua,

então $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$ (fórmula de Barrow)

Em muitos casos não é necessário calcular explicitamente a primitiva

$$\int_a^b f(u)\,u'\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt \quad \text{onde } \phi(\alpha) = a \text{ e } \phi(\beta) = b$$

Nesta fórmula, ϕ pode não ser invertível! Caso seja, $\alpha = \phi^{-1}(a)$ e $\beta = \phi^{-1}(b)$

Exemplos: (a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg} x\,dx = \ln 2$ (b) $\int_1^e \ln x\,dx = 1$ (c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2+\operatorname{tg} x}dx = \frac{\pi+\ln 3}{5}$

8 O 'Teorema Fundamental' do cálculo integral

Dada a função f e $c \in D_f$, seja $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

- $d \in D_F$ se e só se f é integrável no intervalo de extremos c e d
- $D_F \subseteq D_f$ é sempre um intervalo que contém c, sendo $F(c) = 0$
- F é contínua (no domínio)
- f contínua em $d \in D_F \Rightarrow F'(d) = f(d)$, ou seja, $\boxed{\text{contínua} \Rightarrow \text{primitivável}}$
- senão, caso existam os limites laterais $f(d^\pm)$, então $F'_\pm(d) = f(d^\pm)$
- para $a, b \in D_F$, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

De uma forma mais geral, seja $G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$

- $d \in D_G$ se e só se f é integrável no intervalo de extremos $\alpha(d)$ e $\beta(d)$
- α, β contínuas $\Rightarrow G$ contínua
- α, β diferenciáveis e f contínua $\Rightarrow G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$

9 Exercícios

3. Sabendo que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \in [0,1] \\ 1 & \text{se } t \in]1,2[\\ \frac{4}{t^2} & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$
   (a) caracteriza a funcão F;
   (b) calcula e interpreta o significado geométrico do $\lim_{x\to+\infty} F(x)$;
   (c) caracteriza a funcão F'.
   (d) A função F tem derivadas laterais nos pontos, caso existam, onde F' não está definida?
4. Considera a função definida por $F(x) = \int_x^{4x} \frac{1}{\sqrt{t}-2}\,dt$.
   (a) Determina o domínio de F.
   (b) Caracteriza a função F'.
   (c) Caracteriza a função F.

10 Exercícios

5. Dada a função F definida por $F(x) = 3 + \int_{\pi}^{x} \frac{1+\operatorname{sen}^2 t}{t-4}\, dt$,
   (a) determina o domínio de F;
   (b) justifica que F é invertível;
   (c) calcula $(F^{-1})'(3)$.

6. Considera a função F definida por $F(x) = \int_0^{x^2} x^3 e^{t^2}\, dt$ em $I = \mathbb{R}_0^+$.
   (a) Justifica a diferenciabilidade de F em I.
   (b) Determina $F'(x)$ para $x \in I$ e mostra que $x = 0$ é um minimizante global de F.
   (c) Calcula (justificando!) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\operatorname{sen} x}$.

11 Exercícios

7. Calcula os seguintes integrais definidos:

(a) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+6x+9}\, dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)(3+\operatorname{sen} x)}\, dx$

(c) $\int_0^1 \ln \frac{1+x}{1+x^2}\, dx$

(d) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

(e) $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\, dx$

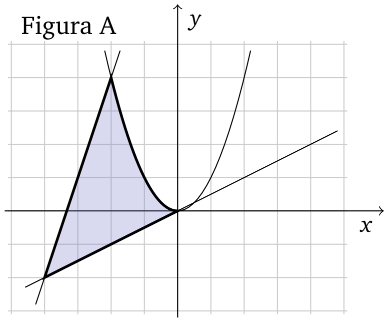
(f) $\int_1^e \operatorname{sen}(\pi \ln x)\, dx$

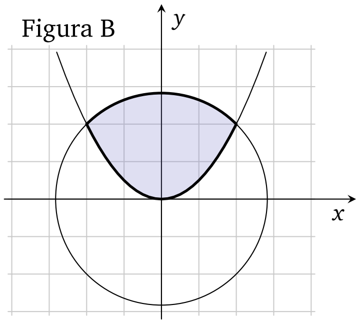
(g) $\int_0^1 \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2+3}}\, dx$

(h) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\, dx$

12 Exercícios

8. Calcula a área da região ...
   (a) ...sombreada na Figura A, delimitada por $y = x^2$, $y = 3x+10$ e $y = \frac{1}{2}x$;





   (b) ...sombreada na Figura B, delimitada por $2y = x^2$ e $x^2 + y^2 = 8$;
   (c) ...delimitada pelos gráficos de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ e $g(x) = -2(x+1)$.

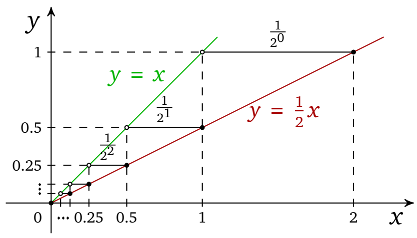
Soluções

1. (a) Sendo contínua em $[-\pi, 0]$, f também é limitada (teorema de Weierstrass); em $]0, \frac{\pi}{4}]$ f é contínua e, sendo $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$, é limitada: sendo limitada com, no máximo, uma descontinuidade (em $x = 0$), f é integrável em $[-\pi, \frac{\pi}{4}]$.

   (b) Como f não é limitada em $[\frac{\pi}{4}, \pi]$, pois $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$, então não é integrável.

2. (a) f é monótona (crescente);

   (b) como $f(x) \geq 0$ no domínio, o integral de f é igual à área da região delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas no intervalo $[0, 2]$, ou seja, A é a soma das áreas dos quadrados de lado 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $\ldots$, ou seja, $1^2 = 1$, $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{(2^2)^2} = \frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{(2^3)^2} = \frac{1}{4^3}$, $\ldots$;



   (c) o gráfico mostra que $f(x) \in [\frac{1}{2}x, x]$; assim, se Q é o quadrado cujo lado é o intervalo $[1, 2]$ (da reta $y = 0$) e T_1 e T_2 são os triângulos retângulos com base no intervalo $[0, 1]$ e hipotenusa na reta $y = \frac{1}{2}x$ e, respetivamente, $y = x$, então a região de área A contém a reunião de Q e T_1, de área $\frac{5}{4}$, e está contida na reunião de Q e T_2, de área $\frac{3}{2}$.

3. (a) Como f é integrável em $[0, x]$ para qualquer $x \geq 0$ (sendo limitada com, no máximo, 2 descontinuidades), F está definida em $D_F = \mathbb{R}_0^+$. A sua expressão é

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(x)\,dx & = \int_0^x 2\,dx & = 2x & \text{se } x \in [0,1] \\ \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^x f(x)\,dx = F(1) + \int_1^x 1\,dx & & = 1 + x & \text{se } x \in [1,2] \\ \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^x f(x)\,dx = F(2) + \int_2^x \frac{4}{x^2}\,dx & & = 5 - \frac{4}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

   (Podem-se *sobrepor* os extremos dos ramos pela continuidade de F, sempre garantida.)

   (b) Sendo $f(x) \geq 0$ no domínio, $F(x)$ representa uma área: o limite de F com x que tende para $+\infty$ (igual a 5), é a área da região limitada inferiormente pelo eixo das abcissas e superiormente pelo gráfico de f em $\mathbb{R}_0^+$ (ilimitada à direita).

   (c) Dado que f não é contínua em $x = 1$, sendo $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, mas é contínua em $x = 2$, então F' está definida, e é igual a f, em $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$.

   (d) Pela continuidade de F, $F'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} F'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ e $F'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} F'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$.

4. (a) $D_F = [0, 1[\cup]4, +\infty[$ (é necessário que $[x, 4x] \subseteq \mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$, onde $\frac{1}{\sqrt{t}-2}$ é contínua).

   (b) $F'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2}$ em D_F (pela continuidade de $\frac{1}{\sqrt{t}-2}$ e diferenciabilidade de x e $4x$).

   (c) $F(x) = 2\sqrt{x} + 4\ln\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$.

5. (a) $D_F =]-\infty, 4[$ (intervalo que contém π e contido em $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, domínio de $\frac{1+\operatorname{sen}^2 t}{t-4}$).

   (b) $F'(x) = \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{x-4} < 0$, para $x \in D_F$, logo F é estritamente decrescente e invertível.

   (c) $(F^{-1})'(3) = \frac{1}{F'(F^{-1}(3))} = \frac{1}{F'(\pi)} = \pi - 4$.

6. (a) É o produto de funções diferenciáveis: x^3 e $\int_0^{x^2} e^{t^2} dt$ (porque e^{x^2} é contínua e x^2 é diferenciável).

   (b) $F'(x) = 3x^2 \int_0^{x^2} e^{t^2} dt + 2x^4 e^{x^4} > 0$ para $x > 0$; pela monotonia, o mínimo é $F(0) = 0$.

   (c) O limite é 0, aplicando a regra de Cauchy (pela continuidade, $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = F(0) = 0$).

7. (a) $\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ (c) $1 - \frac{\pi}{2} + \ln 2$ (d) $\frac{5}{3}$

   (e) $\frac{16}{3}$ (f) $\frac{(1+e)\pi}{1+\pi^2}$ (g) $2\sqrt{3} - \frac{10}{3} + \frac{1}{2}\ln 3$ (h) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$

8. (a) $\frac{26}{3}$ (b) $2\pi + \frac{4}{3}$ (c) $\frac{37}{12}$