Estudo Autónomo: um objeto de aprendizagem ativa

Matemática Discreta

2016-2017

António Jorge Neves
Maria Paula Carvalho

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Conteúdo

Introdução

Este texto constitui um objeto de aprendizagem elaborado no ano letivo 2016-2017 para apoiar o estudo autónomo dos estudantes que frequentam a unidade curricular Matemática Discreta. Dirige-se, por isso, a estudantes da Licenciatura em Matemática, Mestrado Integrado em Computação e Telemática, Licenciatura em Engenharia Informática e Mestrado Integrado em Engenharia Computacional.

Abrange vários temas que integram o programa desta unidade curricular e pretende fomentar a aprendizagem ativa através da resolução de problemas capazes de motivar o estudo autónomo tendo como consequência a consolidação dos assuntos em tempo oportuno ao longo do semestre.

Os problemas são apresentados aos estudantes, os quais têm, em geral, cerca de duas semanas para os estudar e resolver. O apoio dos professores é assegurado sempre que solicitado.

Esta metodologia tem como objetivos, incentivar a autonomia, promover a discussão entre os pares e o trabalho de grupo, utilizar a bibliografia recomendada ou ser capaz de encontrar outra, bem como estimular o hábito de escrever matemática. Depois, é proposto ao estudante que resolva na aula um daqueles problemas escolhido de modo aleatório, sendo posteriormente publicada uma resolução completa e detalhada dos problemas em estudo.

Assim, este conjunto de problemas com resolução detalhada pode ser visto como material de estudo para apoiar os estudantes no desenvolvimento de raciocínios lógico-dedutivos e de demonstrações de resultados em contextos onde as entidades envolvidas têm natureza discreta.

O estudo autónomo contido neste texto está organizado em seis temas relevantes no contexto da Matemática Discreta.

O primeiro (EA1) é dedicado à Lógica Proposicional e Conjuntos. Uma vez que as propriedades das operações sobre conjuntos podem ser definidas à custa das correspondentes operações da lógica proposicional, optou-se por agrupar estes dois assuntos num mesma proposta de trabalho.

O segundo (EA2) tem como tema Relações e Funções, no qual se propõe que os estudantes trabalhem sobre as propriedades das relações binárias e das funções, sendo estas vistas como um caso particular das primeiras.

No terceiro (EA3) trabalha-se a Lógica de Primeira Ordem, onde se propõe a tradução de raciocínios em linguagem matemática e vice-versa, fazendo a integração com os dois temas anteriores.

O quarto (EA4) aborda as Estratégias de Demonstração, nomeadamente as técnicas que se baseiam nas propriedades da implicação, indução matemática e princípio da gaiola dos pombos.

Complementando processos de contagens já conhecidos anteriormente como, por exemplo, arranjos, combinações e permutações, o quinto tema (EA5) explora a resolução de problemas de contagem usando Relações de Recorrência e Funções Geradoras.

Finalmente, o último (EA6), Elementos da Teoria dos Grafos, faz uma abordagem a conceitos e resultados básicos sobre grafos.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro,

Setembro de 2017.

EA 1

Lógica Proposicional e Conjuntos

Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2016/2017 - UC 47166 (1º Ano/2º Sem)

EA1 - Lógica Proposicional e Conjuntos

Estudo autónomo para resolver numa aula da semana de 20-02-2017 a 24-02-2017

1. Construa uma tabela de verdade para $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow s$.
2. Determine quais das seguintes fórmulas são equivalentes a $(p \wedge q) \Rightarrow r$ e quais são e equivalentes a $(p \vee q) \Rightarrow r$:

   (a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (b) $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (c) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ (d) $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

   Na sua resposta deve indicar todas as propriedades que usa em cada passo. Uma resposta que use tabelas de verdade não será considerada.
3. Os operadores $\neg$ e $\vee$ são suficientes para definir os restantes operadores lógicos que conhecemos. Usando apenas $\neg$ e $\vee$ (e parentesis), escreva fórmulas envolvendo p e q que sejam logicamene equivalentes a

   (a) $p \wedge q$ (b) $p \dot{\vee} q$ (c) $p \Rightarrow q$ (d) $p \Leftrightarrow q$
4. A fórmula seguinte é uma tautologia ou é inconsistente? Explique a sua resposta.

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge ([(\neg r \wedge p) \Rightarrow \neg q] \vee [(r \wedge p) \Rightarrow \neg p])$$

5. Como todos sabemos, os ursos pardos gostam de comer amoras e não se relacionam bem com as pessoas! Traduza em linguagem formal em termos de proposições atómicas m, u e s as seguintes frases começando por dizer a que correspondem estas designações:

   (a) Não foram avistados ursos nesta região e passear neste caminho é seguro mas as amoras estão maduras.

   (b) Se as amoras estão maduras então passear neste caminho é seguro se e só se não foram avistados ursos nesta região.

   (c) Não é seguro passear neste caminho mas não foram avistados ursos nesta região e as amoras estão maduras.

   (d) Para ser seguro passear neste caminho é necessário mas não suficiente que as amoras não estejam maduras e que não tenham sido avistados ursos nesta região.

   (e) Passear neste caminho não é seguro sempre que tenham sido avistados urso na região e as amoras estejam maduras.
6. Se A e B são conjuntos finitos tais que $|A| = m$ e $|B| = n$, quais são os valores mínimo e máximo possíveis para a cardinalidade dos seguintes conjuntos? (Não é necessário escrever uma prova formal para cada caso, mas é necessário justificar devidamente a resposta.)

   (a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A \setminus B$ (d) $\mathcal{P}(A)$

Apoio ao estudo autónomo (ver bibliografia recomendada em elearning.ua.pt):

- Referência base [CSR09, pg. 6-14].
- Referência adicional [Pin99, pg. 1-12,17-24].
- Slides de apoio às aulas.
- Orientações Tutoriais (OTs) e horário de atendimento do seu professor.

Uma Resolução do EA1:

1.

p	q	r	s	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow s$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

2. (a)

$$\begin{aligned} p \Rightarrow (q \Rightarrow r) &\equiv p \Rightarrow (\neg q \vee r) && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \\ &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r) && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r && \text{(propriedade associativa de } \vee\text{)} \\ &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && \text{(leis de De Morgan)} \\ &\equiv (p \wedge q) \Rightarrow r && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} q \Rightarrow (p \Rightarrow r) &\equiv \neg q \vee (\neg p \vee r) && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \\ &\equiv (\neg q \vee \neg p) \vee r && \text{(propriedade associativa de } \vee\text{)} \\ &\equiv \neg(q \wedge p) \vee r && \text{(leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && \text{(propriedade comutativa de } \wedge\text{)} \\ &\equiv (p \wedge q) \Rightarrow r && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r && \text{(propriedade distributiva de } \vee \text{ relativamente a } \wedge\text{)} \\ &\equiv \neg(p \vee q) \vee r && \text{(leis de De Morgan)} \\ &\equiv (p \vee q) \Rightarrow r && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \\ &\equiv \neg p \vee \neg q \vee (r \vee r) && \text{(propriedades comutativa e associativa de } \vee\text{)} \\ &\equiv \neg p \vee \neg q \vee r && \text{(idempotência)} \\ &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && \text{(leis de De Morgan)} \\ &\equiv (p \wedge q) \Rightarrow r && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \end{aligned}$$

3. (a) $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$ (leis de De Morgan)

   (b)
$$\begin{aligned} p\dot{\vee}q &\equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) && \text{(definição de } \dot{\vee}) \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) && \text{(leis de De Morgan)} \\ &\equiv \neg\ [\ \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee \neg q)\ ] && \text{(leis de De Morgan)} \end{aligned}$$

   (c) $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ (tradução da implicação na disjunção)

   (d)
$$\begin{aligned} p \Leftrightarrow q &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) && \text{(definição de } \Leftrightarrow) \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \\ &\equiv \neg\ [\ \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)\ ] && \text{(leis de De Morgan)} \end{aligned}$$

4. Podemos ver que

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge ([(\neg r \wedge p) \Rightarrow \neg q] \vee [(r \wedge p) \Rightarrow \neg p]) \equiv p \Leftrightarrow q.$$

   De facto,

$$\begin{aligned} [(\neg r \wedge p) \Rightarrow \neg q] \vee [(r \wedge p) \Rightarrow \neg p] &\equiv (r \vee \neg p \vee \neg q) \vee (\neg r \vee \neg p \vee \neg p) \\ &\equiv (r \vee \neg r) \vee (\neg p \vee \neg p \vee \neg p) \vee \neg q \\ &\equiv 1 \vee \neg p \vee \neg q \equiv 1 \end{aligned}$$

   Donde, $(p \Leftrightarrow q) \wedge 1 \equiv p \Leftrightarrow q$.

   Por isso, a fórmula dada não é tautologia nem é inconsistente. Se p e q têm o mesmo valor lógico é verdadeira, se p e q têm valores lógicos diferentes é falsa. A fórmula dada é uma fórmula não válida.

5. Designando por

   m : *as amoras estão maduras*;
   u : *foram avistados ursos nesta região*;
   s : *passear neste caminho é seguro*;

   tem-se

   (a) $\neg u \wedge s \wedge m$
   (b) $m \Rightarrow (s \Leftrightarrow \neg u)$
   (c) $\neg s \wedge \neg u \wedge m$
   (d) $s \Rightarrow (\neg m \wedge \neg u)$
   (e) $(u \wedge m) \Rightarrow \neg s$

6. (a) $\max\{m, n\} \leq |A \cup B| \leq m + n$. O máximo é atingido quando os conjuntos são disjuntos. O mínimo atinge-se se o conjunto com menores dimensões está contido no conjunto de maior dimensão (cardinalidade).

   (b) $0 \leq |A \cap B| \leq \min\{m, n\}$. O mínimo é atingido quando os conjuntos são disjuntos. O máximo atinge-se se o conjunto com menores dimensões está contido no conjunto de maior dimensão.

   (c) Se $m > n$, $m - n \leq |A \setminus B| \leq m$. O mínimo atinge-se quando $B \subset A$ e o máximo quando os conjuntos são disjuntos.
   Se $m \leq n$, $0 \leq |A \setminus B| \leq m$. O máximo atinge-se quando os conjuntos são disjuntos e o mínimo quando $A \subseteq B$. Portanto, podemos escrever, valendo para ambos os casos,

$$\max\{0, m - n\} \leq |A \setminus B| \leq m.$$

(d) $|\mathcal{P}(A)| = 2^m$. O mínimo é 1, quando $A = \{\ \}$, isto é, $m = 0$, e o máximo é $2^m = 2^{|A|}$.

Uma prova deste resultado pode ser feita recorrendo à fórmula binomial de Newton

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\ , \quad \text{com} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}\ , \quad \text{onde} \quad \binom{n}{k} \;=\; C_k^n\ .$$

Como,

o número de subconjuntos de A com zero elementos é dado por $\binom{m}{0}$,

o número de subconjuntos de A com 1 elemento é dado por $\binom{m}{1}$,

o número de subconjuntos de A com 2 elementos é dado por $\binom{m}{2}$,

$\ldots$,

o número de subconjuntos de A com m elementos é dado por $\binom{m}{m}$,

então, o número total de subconjuntos de A é

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \;=\; (1+1)^m \;=\; 2^m \;=\; |\mathcal{P}(A)|\ .$$

EA 2

Relações e Funções

Estudo autónomo para resolver numa aula da semana de 06-03-2017 a 10-03-2017

1. Seja $A = \{a, b, c, d\}$.

   (a) Recorrendo a uma função bijetiva adequada mostre que, em A, se podem definir 2^{16} relações binárias. [Sugestão: consulte a bibliografia recomendada de apoio ao EA2.]

   (b) Encontre uma relação $\mathcal{R}$ em A com exatamente 3 elementos (pares ordenados) que seja simétrica e antissimétrica.

   (c) Prove que toda a relação $\mathcal{R}$ em A com 15 pares ordenados não é transitiva.

   (d) Encontre uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em A com exatamente 10 elementos.

   (e) Encontre uma relação $\mathcal{R}$ em A que seja transitiva, não reflexiva, não simétrica e não antissimétrica, com exatamente 6 elementos.

2. O conjunto $\mathbb{Z}_3$ é o conjunto dos inteiros módulo 3, ou seja, $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Seja X o conjunto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Defina-se a relação $\sim$ em X, tal que:

$$(a, b) \sim (x, y) \text{ se e só se } a = x \wedge by > 0 \ , \quad \text{para quaisquer pares } \ (a, b), (x, y) \in X \ .$$

   (a) Mostre, justificando cada passo, que a relação $\sim$ é

      (i) reflexiva;

      (ii) simétrica;

      (iii) transitiva;

      ou seja, $\sim$ é uma relação de equivalência.

   (b) Diga se é verdadeiro ou falso que: $[(1, 5)]_\sim \cap [(1, -2)]_\sim = \emptyset$. Justifique a sua resposta.

   (c) Calcule o conjunto quociente $X/_\sim$ e diga qual é a sua cardinalidade.

3. Sejam, o conjunto $X = \mathbb{R}$ e a função $f : X \longrightarrow X$ definida por $f(y) = (y - 1)^2$. Considere a relação de equivalência $\mathcal{R}$ definida no conjunto X por:

$$x \, \mathcal{R} \, y \text{ se e só se } f(x) = f(y) \ , \quad \text{para quaisquer } \ x, y \in X \ .$$

   (a) Calcule $f\big(\{-1, 0, 3, 8\}\big) \cap f\big(\{1, -2, -7\}\big)$.

   (b) Determine o conjunto $f\big(f(\{0, 3\})\big)$.

   (c) Obtenha todos os subconjuntos A de $\mathcal{P}(X)$ tais que $f(A) = \{0, 100\}$.

   (d) Determine $[5]_\mathcal{R}$.

   (e) Discuta se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

      (e_1) Existe um número infinito de classes de equivalência induzidas por $\mathcal{R}$.

      (e_2) Todas as classes de equivalências determinadas por $\mathcal{R}$ têm a mesma cardinalidade.

Apoio ao estudo autónomo (ver bibliografia recomendada em elearning.ua.pt):

- Referência base [CSR09, pg. 16-22,57-58].
- Referência adicional [Pin99, pg. 42-55].
- Slides de apoio às aulas.
- Orientações Tutoriais (OTs) e horário de atendimento do seu professor.

Uma Resolução do EA2:

1. (a) Uma relação binária em A é um subconjunto de $A \times A$. Portanto, há tantas relações binárias em A quanto os elementos de $\mathcal{P}(A \times A)$, ou seja, $|\mathcal{P}(A \times A)|$. Queremos mostrar que este número é 2^{16}, recorrendo a uma função bijetiva.

   Comecemos por notar que $|A \times A| = 4 \times 4 = 16$. Para simplificar a notação, consideremos o conjunto $W = A \times A$ e admitamos que $W = \{x_1, x_2, \ldots, x_{16}\}$. Vamos mostrar que a cardinalidade de $\mathcal{P}(W)$ é 2^{16}, sendo W um qualquer conjunto com 16 elementos, independentemente da natureza desses elementos (no nosso caso, em particular, os elementos de W são pares ordenados).

   Definimos a função cujo domínio é o conjunto de todos os subconjuntos de W, ou seja, $\mathcal{P}(W)$, e o conjunto das imagens é o conjunto dos vetores de dimensão 16 cujas entradas são 1 ou 0:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{P}(W) & \longrightarrow & \{0,1\}^{16} \\ X & \longmapsto & \varphi(X) = (b_1, b_2, \ldots, b_{16}) \end{array}$$

   tal que, $b_i = 1$ se $x_i \in X$, $b_i = 0$ se $x_i \notin X$, com $i \in \{1, 2, \ldots, 16\}$.

   É fácil concluir que $\{0,1\}^{16}$ tem 2^{16} elementos. Cada vetor tem 16 posições, cada uma pode tomar 2 valores, 1 ou 0, logo $|\{0,1\}^{16}| = 2^{16}$. Note-se que, este conjunto é finito, porque podemos estabelecer uma correspondência entre os seus elementos e os do conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 2^{16} - 1, 2^{16}\}$.

   Basta, agora, mostrar que a função φ é bijetiva, para podermos concluir que os conjuntos $\mathcal{P}(W)$ e $\{0,1\}^{16}$ são equipotentes e, portanto, têm a mesma cardinalidade.

   (i) φ é injetiva:
   Sejam $X, Y \in \mathcal{P}(W)$, tais que $X \neq Y$. Admitindo, sem perda de generalidade, que existe $x_i \in W$, tal que, $x_i \in X \setminus Y$, então a i-ésima entrada do vetor $\varphi(X)$ é 1 e a do vetor $\varphi(Y)$ é 0, logo $\varphi(X) \neq \varphi(Y)$.

   (ii) φ é sobrejetiva:
   Seja $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{16})$ um **qualquer** vetor de $\{0,1\}^{16}$. Então o conjunto

$$Z = \{x_i \in W \, : \, v_i = 1\}$$

   é um subconjunto de W, isto é, pertence a $\mathcal{P}(W))$ e $\varphi(Z) = v$. Donde, para qualquer vetor de $\{0,1\}^{16}$ existe um elemento de $\mathcal{P}(W)$ cuja imagem é v.

   Conclusão, $|\mathcal{P}(A \times A)| = |\{0,1\}^{16}| = 2^{16}$, como se queria mostrar.

   (b) $\mathcal{R} = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$ é uma relação com essas propriedades (existem outras).

   (c) A relação com maior número de elementos que é possível definir em A tem 16 elementos. Supondo que existe uma relação com 15 elementos transitiva, seja (x,y) o **único** par ordenado que **não pertence** a essa relação. Tome-se z em A diferente de x e de y. Então como os pares (x,z) e (z,y) pertencem à relação, a transitividade obriga a que também (x,y) seja um par da relação, **contrariando** o que se tinha admitido, ou seja, que (x,y) é o **único** par ordenado que **não pertence** a essa relação.

   (d) $\mathcal{R} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (a,c), (b,a)(b,c), (c,a), (c,b)\}$ (existem outras).

   (e) $\mathcal{R} = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c)\}$ (existem outras).

2. (a) A relação

   (i) é reflexiva: para qualquer par $(a,b) \in X$ verifica-se $(a,b) \sim (a,b)$ uma vez que $a = a$ (a relação de igualdade em $\mathbb{Z}_3$ é reflexiva) e $b^2 > 0$ para qualquer b em $\mathbb{Z}^*$ (note-se que $b \neq 0$).

   (ii) é simétrica: para quaisquer pares $(a,b), (x,y) \in X$, $(a,b) \sim (x,y) \Rightarrow (x,y) \sim (a,b)$. De facto,

$$\text{se } (a,b) \sim (x,y) \text{ então } a = x \wedge by > 0.$$

Mas $a = x \wedge by > 0$ pode-se escrever, $x = a \wedge yb > 0$, porque a relação de igualdade em $\mathbb{Z}_3$ é simétrica e a multiplicação em $\mathbb{Z}^*$ é comutativa. Esta última expressão traduz que $(x, y) \sim (a, b)$.

(iii) é transitiva: sejam $(a, b), (x, y), (p, q) \in X$ (arbitrários) e vamos assumir que

$$(a, b) \sim (x, y) \wedge (x, y) \sim (p, q).$$

Então,

$$a = x \wedge by > 0 \ \wedge \ x = p \wedge yq > 0,$$

e, como a operação $\wedge$ é comutativa e associativa, podemos escrever,

$$(a = x \ \wedge \ x = p) \ \wedge \ (by > 0 \ \wedge yq > 0).$$

Pela transitividade da relação de igualdade $\mathbb{Z}_3$, $a = p$. Além disso, resulta da propriedade comutativa e associativa da multiplicação no conjunto dos números inteiros, que $by \cdot yq = y^2bq > 0$, portanto, $bq > 0$ (porquê?). Em conclusão, $(a, b) \sim (p, q)$.

(b) Verdade.
Se fosse falso, isto é, se $[(1, 5)]_\sim \cap [(1, -2)]_\sim \neq \emptyset$, existiria $(x, y) \in [(1, 5)]_\sim \cap [(1, -2)]_\sim$. Como $(x, y) \in [(1, 5)]_\sim$, significa, por definição de classe de equivalência, que $(x, y) \sim (1, 5)$ e $(x, y) \in [(1, -2)]_\sim$, significa que, $(x, y) \sim (1, -2)$, ter-se-ía, em particular, $5y > 0$ e $-2y > 0$, donde $y > 0$ e $y < 0$, o que não pode acontecer!

(c) Por definição,

$$[(a, b)]_\sim = \{(x, y) \in X \ : \ x = a \wedge by > 0\}.$$

Como $a \in \mathbb{Z}_3$ só pode ser $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$.
Com $a = 0$, se $b > 0$, todos os pares do tipo $(0, 1), (0, 2), (0, 3), \ldots$, estão relacionados por $\sim$, logo pertencem à mesma classe de equivalência. Podemos escolher qualquer um deles para representante da classe, por isso (escolhendo o primeiro), $[(0, 1)]_\sim$ é uma classe de equivalência determinada por $\sim$; se $b < 0$, todos os pares $(0, -1), (0, -2), (0, -3), \ldots$, estão relacionados por $\sim$, logo pertencem à mesma classe de equivalência. Escolhendo agora $(0, -1)$, obtém-se outra classe de equivalência: $[(0, -1)]_\sim$. Repetindo este raciocínio para os outros valores de a, encontra-se o conjunto quociente cuja cardinalidade é igual a 6:

$$X/_\sim = \{[(0, 1)]_\sim, [(0, -1)]_\sim, [(1, 1)]_\sim, [(1, -1)]_\sim, [(2, 1)]_\sim, [(2, -1)]_\sim\}.$$

3. (a) $f(\{-1, 0, 3, 8\}) \cap f(\{1, -2, -7\}) = \{1, 4, 49\} \cap \{0, 9, 64\} = \emptyset$.

(b) $f\big(f(\{0, 3\})\big) = f(\{1, 4\}) = \{0, 9\}$.

(c) $\{1, -9\}$, $\{1, 11\}, \{1, -9, 11\}$. Note-se que se f fosse bijetiva existiria apenas um conjunto.

(d)

$$\begin{aligned} [5]_\mathcal{R} &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ 5 \sim x\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(5) = f(x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ 16 = (x - 1)^2\} \\ &= \{-3, 5\}. \end{aligned}$$

(e) (e$_1$) Verdade: uma por cada número real superior ou igual a 1. Para $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} [x]_\sim &= \{y \in \mathbb{R} : f(x) = f(y)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 = (y - 1)^2\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : x - 1 = y - 1 \vee x - 1 = -y + 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y = x \vee y = 2 - x\} \\ &= \{x, 2 - x\} \end{aligned}$$

Observe-se que, se $x \geq 1$ tem-se $(2 - x) \leq 1$.

(e$_2$) Falso: $[1]_\sim = \{1\}$ tem cardinalidade 1. Todas as outras tem cardinalidade 2.

EA 3

Lógica de Primeira Ordem

Universidade de Aveiro - **Departamento de Matemática**

Matemática Discreta 2016/2017 - UC 47166 (1º Ano/2º Sem)

EA3 - Lógica de Primeira Ordem

Estudo autónomo para resolver numa aula da semana de 20-03-2017 a 24-03-2017

1. Considere o conjunto de todos os estudantes da UA como domínio e definam-se os seguintes predicados:

   $S(x)$: "x tem um *smartphone*";
   $A(x,y)$: "x e y são amigos";
   $U(x,y)$: "x usa o *smartphone* de y".

   Traduza para linguagem natural as seguintes fórmulas:

   (a) $\forall x \Big(S(x) \vee \exists y \big(S(y) \wedge A(x,y) \big) \Big)$

   (b) $\forall x \Big(\neg S(x) \Rightarrow \exists\, y \big(A(y,x) \wedge U(x,y) \big) \Big)$

2. Escreva na forma normal *prenex* a seguinte fórmula:

$$\neg \Big(\forall x \big(\exists y \forall z\ P(x,y,z) \wedge \exists z \forall y\ P(x,y,z) \big) \Big)$$

3. Averigue se são equivalentes as seguintes fórmulas. Em cada passo explicite claramente quais as propriedades que usa.

$$F_1 \quad : \quad \neg \Big(\exists x \big(p(x) \wedge (\exists y (q(y) \wedge \neg r(x,y))) \big) \Big)$$
$$F_2 \quad : \quad \forall x \Big(p(x) \Rightarrow \big(\forall y (q(y) \Rightarrow r(x,y)) \big) \Big)$$

4. Considere a relação binária $\mathcal{R}$ definida no conjunto das pessoas por

$$\underline{x \mathcal{R} y \text{ se e só se } x \text{ admira } y}.$$

   Admita que o universo do discurso é o conjunto de todas as pessoas, defina os predicados adequados e exprima por meio de fórmulas da lógica de primeira ordem as seguintes afirmações:

   (a) Não há ninguém que admire toda a gente.
   (b) Todos admiram o Jorge.
   (c) O João admira exatamente duas pessoas.
   (d) Ninguém se admira a si próprio, isto é, a relação $\mathcal{R}$ é irreflexiva.
   (e) A relação $\mathcal{R}$ não é simétrica.

5. Usando a lógica de primeira ordem, traduza o seguinte facto:

   Todo o polinómio de grau 1 *com coeficientes reais tem exatamente uma raiz real.*

Apoio ao estudo autónomo (ver bibliografia recomendada em elearning.ua.pt):

- Referência base [CC15].
- Referência adicional [Pin99, pg. 31-41].
- Slides de apoio às aulas.
- Orientações Tutoriais (OTs) e horário de atendimento do seu professor.

Uma Resolução do EA3:

1. (a) Todo o estudante da UA tem um *smartphone* ou tem um amigo que tem um *smartphone*.

   (b) Quem não tem *smartphone* usa o *smartphone* de alguém seu amigo.

2.

$$
\begin{aligned}
& \neg\Big(\forall x\big(\exists y\forall z\ P(x,y,z) \wedge \exists z\forall y\ P(x,y,z)\big)\Big) \\
\equiv\ & \exists x\Big(\neg\big(\exists y\forall z\ P(x,y,z)\big) \vee \neg\big(\exists z\forall y\ P(x,y,z)\big)\Big) \\
\equiv\ & \exists x\Big(\forall y\exists z\ \neg P(x,y,z) \vee \forall z\exists y\ \neg P(x,y,z)\Big) \\
\equiv\ & \exists x\Big(\forall y\exists z\ \forall z'\exists y'\ (\neg P(x,y,z) \vee \neg P(x,y',z'))\Big)
\end{aligned}
$$

3. Uma resolução:

$$
\begin{aligned}
& \neg\Big(\exists x\big(p(x) \wedge (\exists y(q(y) \wedge \neg r(x,y)))\big)\Big) && \text{(negação do quantificador existêncial)} \\
\equiv\ & \forall x \neg\Big(p(x) \wedge \big(\exists y(q(y) \wedge \neg r(x,y))\big)\Big) && \text{(leis de De Morgan)} \\
\equiv\ & \forall x\Big(\neg p(x) \vee \neg\big(\exists y(q(y) \wedge \neg r(x,y))\big)\Big) && \text{(negação do quantificador existêncial)} \\
\equiv\ & \forall x\Big(\neg p(x) \vee \big(\forall y \neg(q(y) \wedge \neg r(x,y))\big)\Big) && \text{(leis de De Morgan)} \\
\equiv\ & \forall x\Big(\neg p(x) \vee \forall y\big(\neg q(y) \vee r(x,y)\big)\Big) && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \\
\equiv\ & \forall x\Big(\neg p(x) \vee \forall y\big(q(y) \Rightarrow r(x,y)\big)\Big) && \text{(tradução da implicação na disjunção)} \\
\equiv\ & \forall x\Big(p(x) \Rightarrow \forall y\big(q(y) \Rightarrow r(x,y)\big)\Big) && \text{(esta é a fórmula } F_2.\text{)}
\end{aligned}
$$

4. Definindo o predicado de aridade dois (no conjunto de todas as pessoas)
   $R(x,y)\ :\ x$ admira y,

   (a) $\neg\big(\ \exists x\ \forall y\ R(x,y)\ \big)$ ou $\forall x\ \exists y\ \neg R(x,y)$

   (b) $\forall x\ R(x, \text{Jorge})$

   (c) $\exists x\ \exists y\ \big(R(\text{João},x) \wedge R(\text{João},y) \wedge \neg(x=y) \wedge \forall z\ (\neg(z=x) \wedge \neg(z=y)) \Rightarrow \neg R(\text{João},z)\big)$
   ou
   $\exists x\ \exists y\ \big(R(\text{João},x) \wedge R(\text{João},y) \wedge \neg(x=y) \wedge \forall z\ R(\text{João},z) \Rightarrow (z=x \vee z=y)\big)$

   (d) $\forall x\ \neg R(x,x)$ ou $\neg\,(\exists x\ R(x,x))$.

   (e) $\neg\,(\forall x\ \forall y\ R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$ ou $\exists x\ \exists y\ R(x,y) \wedge \neg R(y,x)$

5. $\forall m\,\forall b\,\Big(\neg(m=0) \Rightarrow \exists x\ \big(mx+b=0 \wedge \forall y\,(my+b=0 \Rightarrow y=x)\big)\Big)$,
   sendo o universo do discurso $\mathbb{R}$.

EA 4

Estratégias de Demonstração

Estudo autónomo para resolver numa aula da semana de 03-04-2017 a 07-04-2017

1. Prove cada uma das implicações do teorema seguinte usando uma técnica de demonstração adequada (direta, por contraposição ou por redução ao absurdo). Justifique a sua escolha.

   Teorema: *Dados dois inteiros positivos m e n, mn é ímpar <u>se e só se</u> m é ímpar e n é ímpar.*

2. Encontre uma fórmula em termos de $n \in \mathbb{N}$ para a soma

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \ .$$

   Para o efeito, calcule valores da soma para n pequeno, conjeture a fórmula e prove-a usando indução matemática.

3. Suponha que pretende separar os n quadradinhos de uma tablete retangular de chocolate para os dividir pelos seus amigos. Sabendo que pode separar a tablete inteira ou pedaços retangulares da tablete através de cortes verticais ou horizontais (ao longo dos lados dos quadradinhos), proponha uma fórmula que determine o número de cortes sucessivos necessários para separar todos os n quadradinhos e prove a sua veracidade usando indução completa.

4. Considere cinco pontos (arbitrários) no interior de um triângulo equilátero com lados de comprimento igual a 2 *cm*. Mostre que, pelo menos dois daqueles pontos estão a uma distância máxima de 1 *cm*.

Apoio ao estudo autónomo (ver bibliografia recomendada em elearning.ua.pt):

- Referência base [CSR09, pg. 37-51].
- Referência adicional [Pin99, pg. 88-95].
- Slides de apoio às aulas.
- Orientações Tutoriais (OTs) e horário de atendimento do seu professor.

<u>Uma Resolução do EA4:</u>

1. Para $m, n \in \mathbb{N}$, sejam as proposições p : "m é ímpar", q : "n é ímpar e r : "mn é ímpar".

   Usando estas proposições, prova-se cada uma das implicações, ($\Rightarrow$) e ($\Leftarrow$), do **Teorema**:

   • $r \Rightarrow (p \wedge q)$

   Neste caso, é mais adequada a prova por contraposição, bastando provar que $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$, isto é, $(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow \neg r$, ou seja, *se m é par ou n é par então mn é par.*

   Assim, se m é par, então existe $\alpha \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2\alpha$, logo $mn = (2\alpha)n$, e, portanto, $mn = 2\alpha'$, com $\alpha' = \alpha n$, $\alpha' \in \mathbb{N}$, donde, conclui-se que *mn é par.*

   Se m é ímpar, n tem de ser par, para que a hipótese seja verdadeira. Neste caso, existe $\beta \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2\beta$. Então $mn = m(2\beta) = 2m\beta$, e, portanto, $mn = 2\beta'$, com $\beta' = m\beta$, $\beta' \in \mathbb{N}$, donde, conclui-se que *mn é par.*

   • $(p \wedge q) \Rightarrow r$

   A demonstração, agora, pode fazer-se usando a prova direta pois, se *m é ímpar* e *n é ímpar*, existe $\alpha_1 \in \mathbb{N}$, tal que $m = 2\alpha_1 - 1$ e existe $\beta_1 \in \mathbb{N}$, tal que $n = 2\beta_1 - 1$, pelo que, $mn = (2\alpha_1 - 1)(2\beta_1 - 1) = 4\alpha_1\beta_1 - 2\alpha_1 - 2\beta_1 + 1 = 2(2\alpha_1\beta_1 - (\alpha_1 + \beta_1)) + 1$. Como $2\alpha_1\beta_1 \geq (\alpha_1 + \beta_1)$, tomando $\gamma = 2\alpha_1\beta_1 - (\alpha_1 + \beta_1)$, verifica-se $mn = 2\gamma + 1$, com $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ou seja, conclui-se que *mn é ímpar.*

2. Observando que, para

   $n = 1$, tem-se $\dfrac{1}{1 \times 2} = \dfrac{1}{2}$,

   $n = 2$, tem-se $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$,

   $n = 3$, tem-se $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$,

   ...

   é fácil intuir que, $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$.

   Pode conjeturar-se a fórmula

   $$P(n) : \ \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \ , \quad \text{para } n \in \mathbb{N},$$

   a qual se deve provar usando indução matemática.

   Assim, é trivial mostrar que se verifica para o primeiro valor de n, ou seja,

   $P(1) : \ \dfrac{1}{1 \times 2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{n+1}$, com $n = 1$.

   Admitindo, por Hipótese de Indução (HI), que a fórmula é verdadeira para $k \in \mathbb{N}$, ou seja, supondo que se verifica $P(k)$, tal que

   $$P(k) : \ \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} \ ,$$

   então, terá de provar-se a veracidade de $P(k+1)$, com

   $$P(k+1) : \ \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \ ,$$

   de modo a demonstrar-se que é verdadeira a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Ora,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\times(k+2)} &= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\ , \quad \text{por (HI)}\\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{k+1}{k+2}\ .
\end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de indução, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo o inteiro $n \geq 1$.

3. Para se chegar à fórmula pretendida, podemos começar por investigar o número de cortes com n pequeno. Assim, no caso de $n = 1$ teremos uma tablete com apenas um quadradinho de chocolate, não sendo necessário qualquer corte, enquanto que, com $n = 2, 3, 4$ teremos que efetuar, respetivamente, um, dois e três cortes para obter todos os quadradinhos da tablete. Note-se que, para alguns valores de n é possível obter uma disposição quadrangular (quando n é um quadrado perfeito, isto é, $n = 4, 9, 16, \ldots$).

   Na figura 1 pode observar-se uma tablete retangular com $n = 40$ quadradinhos, na qual já foi efetuado um corte vertical que originou dois pedaços retangulares de 24 e 16 quadradinhos respetivamente. Somos capazes de intuir que para separar todos os quadradinhos desses dois pedaços são precisos 23 e 15 cortes, respetivamente, efetuando-se no total $1 + 23 + 15 = 39$ cortes.

Figura 1: Tablete de 40 quadradinhos partida em dois pedaços retangulares [Tab].

   Vamos provar que são necessários $n-1$ cortes para separar todos os n quadradinhos de qualquer tablete retangular, com $n \in \mathbb{N}$. A prova deste resultado requere a aplicação do princípio de indução completa.

   O passo inicial da prova é trivial, pois, com $n = 1$, nenhum corte é necessário, $n - 1 = 0$. Suponha-se, agora, que a fórmula é verdadeira para qualquer pedaço retangular de chocolate com m quadradinhos, tal que $1 \leq m < n$, com $n \geq 2$. Então, podemos efetuar um primeiro corte (vertical ou horizontal) de modo a separar a tablete em dois pedaços retangulares, um com m quadradinhos e o outro com $n - m$, tal que $1 \leq n - m < n$. Estes, por, hipótese de indução, requerem, respetivamente, $m - 1$ e $n - m - 1$ cortes. Donde, para separar todos os n quadradinhos da tablete inteira são necessários $1 + (m - 1) + (n - m - 1)$ cortes, sendo este número igual a $n - 1$, tal como pretendiamos provar.

4. Unindo os pontos médios dos lados do triângulo equilátero original, com lados de comprimento igual a 2 cm, pode obter-se uma partição deste em 4 triângulos equiláteros, com lados de comprimento igual a 1 cm, conforme mostra a Figura 2.

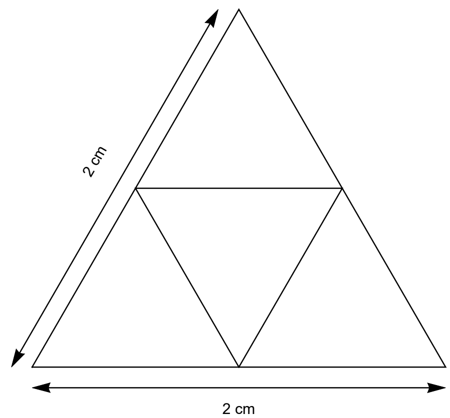


Figura 2: Partição de um triângulo equilátero em 4 triângulos.

Ora, marcando 5 pontos, arbitrariamente, no triângulo equilátero original, recorrendo ao princípio da gaiola dos pombos podemos concluir que pelo menos um dos 4 triângulos da partição contém dois ou mais pontos. Ou seja, não é possível marcar os 5 pontos o mais afastado possível sem que, pelo menos dois deles fiquem no mesmo triângulo equilátero, com lado igual a 1 cm. Como consequência, é claro que tais pontos estarão a uma distância máxima de 1 cm.

EA 5

Recorrência e Funções Geradoras

Estudo autónomo para resolver numa aula da semana de 15-05-2017 a 19-05-2017

1. Suponha que um canal de informação transmite mensagens usando apenas dois sinais: 0 e 1. Uma palavra código é qualquer sequência de símbolos do alfabeto $\{0,1\}$. Sabe-se que o sinal 0 leva uma unidade de tempo a ser transmitida e o sinal 1 leva duas unidades de tempo. Seja N_t o número de palavras código que podem ser transmitidas em exatamente t unidades de tempo. Encontre uma relação de recorrência para N_t e resolva-a. Note que deve encontrar também as condições iniciais que lhe permitem resolver a equação de recorrência.

2. Chama-se *partição ordenada* de um número inteiro $n \in \mathbb{N}$ a uma família de inteiros positivos cuja soma é n, onde a ordem das parcelas é importante (quer dizer, por exemplo, $6 = 1+2+3$ e $6 = 2+1+3$ são duas partições distintas).

   Seja a_n o número de partições ordenadas de n. Deduza uma equação de recorrência para a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e resolva-a, isto é, obtenha uma fórmula fechada para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Obtenha uma relação de recorrência para a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, com

$$a_n = (-3)^n(3+4n) + n^2 2^n \ .$$

4. Encontre uma relação de recorrência para a sucessão $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde R_n é o número de regiões em que fica dividido o plano por n retas, tais que, não há retas paralelas e não há três retas que se encontrem num mesmo ponto.

   Determine uma fórmula fechada para R_n e indique as condições iniciais.

5. (a) Utilize o método da função geradora para calcular o número de soluções inteiras não negativas da equação $a+b+c=n$, com $a,b,c \in \mathbb{N}_0$ e $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Considere que tem 30 bolas das quais 5 são brancas, 10 são pretas e 15 são vermelhas. De quantas maneiras se podem colocar todas as bolas em duas caixas de modo a que cada caixa fique com 15 bolas? Justifique.

   Sugestão: Use, adequadamente, os cálculos feitos em (a). Não precisa de repetir cálculos.

Apoio ao estudo autónomo (ver bibliografia recomendada em elearning.ua.pt):

- Referência base [CSR09, pg. 93-124].
- Referência adicional [Pin99, pg. 135-171].
- Slides de apoio às aulas.
- Orientações Tutoriais (OTs) e horário de atendimento do seu professor.

Uma Resolução do EA5:

1. Consideremos uma qualquer palavra código transmissível em exatamente t unidades de tempo. Cada palavra começa por 0 ou por 1.

   Se começa por 0, o resto da palavra é transmitida em $t-1$ unidades de tempo; se começa por 1, o resto é transmitido em $t-2$ unidades de tempo. Pelo princípio da adição:

$$N_t = N_{t-1} + N_{t-2}\ ,\ t = 3, 4, \dots\ ,\ \text{com } N_1 = 1,\ N_2 = 2\ .$$

   Esta relação de recorrência (linear homogénea de ordem 2) é a mesma que define a sucessão de Fibonacci, mas as condições iniciais não são as mesmas. De facto, para $t = 1$ apenas é possível transmitir um sinal 0, enquanto que com $t = 2$ existem duas palavras código distintas que podem ser transmitidas, uma com dois sinais 0 ou outra com um sinal 1.

   A partir da relação de recorrência encontrada pode escrever-se a equação característica

$$x^2 - x - 1 = 0,\ \text{a qual admite duas soluções, } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \text{ e } \ \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}\ ,$$

   pelo que, a respetiva solução geral é dada por

$$N_t \ = \ C_1\, \phi^t \ + \ C_2\, \hat{\phi}^t\ ,\ \ t \in \mathbb{N}\ ,$$

   onde C_1 e C_2 são constantes reais a determinar usando as condições iniciais. Assim, tem-se o sistema

$$\begin{cases} C_1\, \phi \ + \ C_2\, \hat{\phi} \ = \ 1 \\ C_1\, \phi^2 \ + \ C_2\, \hat{\phi}^2 \ = \ 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1\, \phi \ + \ \frac{2 \ - \ C_1\ \phi^2}{\hat{\phi}} \ = \ 1 \\ C_2\, \hat{\phi} \ = \ \frac{2 \ - \ C_1\ \phi^2}{\hat{\phi}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1\, (\phi^2 \ - \phi\, \hat{\phi}) \ = \ 2 \ - \hat{\phi} \\ \dots \end{cases}$$

   Atendendo a que $\hat{\phi} = -\dfrac{1}{\phi}$, da primeira equação do sistema pode obter-se C_1, fazendo

$$C_1 \ = \ \frac{2-\hat{\phi}}{\phi^2+1} \ = \ \frac{2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+1} \ = \ \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \ = \ \frac{(3+\sqrt{5})\,(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})\,(5-\sqrt{5})} \ = \ \frac{5+\sqrt{5}}{10}\ .$$

   Substituindo C_1 na segunda equação do sistema, de modo análogo determina-se C_2, vindo

$$C_2 \ = \ \frac{2-C_1\phi^2}{\hat{\phi}^2} \ = \ \frac{2-\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2} \ = \ \frac{2}{5}\frac{(5-2\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})} \ = \ \frac{5-\sqrt{5}}{10}\ .$$

   Donde, a equação de recorrência linear homogénea de ordem 2 sujeita às condições iniciais descritas, tem como solução

$$N_t = \frac{1}{10}\left[\ \left(5+\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t \ + \ \left(5-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t\ \right],\ t \in \mathbb{N}.$$

2. Há uma só partição de n com uma única parcela: $n = n$. Qualquer outra possível soma com várias parcelas termina com um número $j < n$ precedida de uma soma que perfaz $n - j$.

O número a_n de partições possíveis obtém-se somando para cada j o número a_{n-j} de partições possíveis do número $n-j$ mais uma (aquela que tem só uma parcela), ou seja,

$$a_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j} \ ,$$

pelo que,

$$a_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \ , \tag{1}$$

onde i tem a mesma variação que $n-j$ (verifique).

Por exemplo, para $n=6$, temos $6 = 6 = 1 + \mathbf{5} = 2 + \mathbf{4} = 3 + \mathbf{3} = 4 + \mathbf{2} = 5 + \mathbf{1}$, vindo

$$a_6 = 1 + a_{\mathbf{5}} + a_{\mathbf{4}} + a_{\mathbf{3}} + a_{\mathbf{2}} + a_{\mathbf{1}}.$$

Retomando (1), tem-se

$$a_n = \underbrace{\left(1 + \sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)}_{a_{n-1}} + a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-1} \ , \tag{2}$$

donde,

$$a_n = 2a_{n-1}, n \in \{2,3,\ldots\}, \text{ com } a_1 = 1.$$

Resolver esta equação de recorrência de ordem 1 é muito fácil (foi feito nas aulas). A solução é $a_n = 2^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}$.

3. As raízes características são -3 e 2 com multiplicidades 2 e 3, respetivamente. Portanto, equação característica é:

$$(x+3)^2(x-2)^3 = 0 \Leftrightarrow x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72 = 0 \ .$$

Daqui se tira a equação de recorrência pedida: $a_n = 15a_{n-2} - 10a_{n-3} - 60a_{n-4} + 72a_{n-5} \ , \ n \geq 5$, com $a_0 = 3, \ a_1 = -19, \ a_2 = 115, \ a_3 = -333, \ a_4 = 1795$.

4. Ao traçar-se a n-ésima reta sobre o plano esta interseta todas as $n-1$ já existentes, uma vez que não podem existir retas paralelas, dividindo-se o plano em mais n regiões, além das já obtidas anteriormente, para $n = 1, 2, \ \ldots$, havendo no início (com $n = 0$) apenas uma região. Assim, a relação de recorrência é dada por $R_n = R_{n-1} + n$, com $n \in \mathbb{N}$, sendo a condição inicial $R_0 = 1$. Resolvendo esta equação de recorrência (não homogénea) obtém-se $R_n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1, \ n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Como $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, as respetivas funções geradoras $f_a(x)$, $f_b(x)$ e $f_c(x)$, são iguais:

$$f_a(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^i + \ldots \ = \sum_{i=0}^{\infty} x^i;$$

$$f_b(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^j + \ldots \ = \sum_{j=0}^{\infty} x^j;$$

$$f_c(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots \ = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

A função geradora associada ao problema dado é $\mathcal{F}(x) = f_a(x) \ f_b(x) \ f_c(x)$, ou seja, $\mathcal{F}(x) = (1+x+x^2+\ldots+x^i+\ldots)\,(1+x+x^2+\ldots+x^j+\ldots)\,(1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots)$, pelo que, o número de soluções inteiras não negativas da equação $a+b+c = n$, $n \in \mathbb{N}$, corresponde em $\mathcal{F}(x)$ ao número de termos da forma $x^i x^j x^k$, tal que, $i+j+k = n$. Tal número é dado pelo coeficiente de x^n no desenvolvimento de $\mathcal{F}(x)$.

Ora, como

$$\mathcal{F}(x) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m\right)^3 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n-1}{n} x^n \ ,$$

o número pedido é $\displaystyle\binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

(b) Basta contar o número de maneiras de colocar 15 bolas numa caixa (as restantes 15 ficam na outra). Assim, como o número de bolas brancas, pretas e vermelhas, pode variar, respetivamente, de 0 a 5 , 0 a 10 e 0 a 15, a função geradora associada ao problema é, neste caso, dada por:

$$\mathcal{G}(x) = \left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{10}\right)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{15}\right) \ .$$

Donde, pretende-se determinar o coeficiente de x^{15} no desenvolvimento de $\mathcal{G}(x)$, o qual dá o número de possibilidades de colocar 15 bolas numa caixa (escolhendo entre brancas, pretas e vermelhas, nas quantidades disponíveis).

Ora, atendendo a que, em $\mathcal{G}(x)$ temos um produto da soma de 6, 11 e 16 primeiros termos, respetivamente, de três progressões geométricas (cada uma delas de razão x), tem-se

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1-x^6}{\boldsymbol{1-x}}\ \frac{1-x^{11}}{\boldsymbol{1-x}}\ \frac{1-x^{16}}{\boldsymbol{1-x}} = \left(1-x^6\right)\left(1-x^{11}\right)\left(1-x^{16}\right)\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(1-x)^3}} \ .$$

Donde, tendo em conta o resultado usado na alínea (a), podemos escrever

$$\mathcal{G}(x) = \left(1-x^6-x^{11}-x^{16}+x^{17}+x^{22}+x^{27}-x^{33}\right)\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\infty}\binom{\boldsymbol{k+2}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x^k} \ ,$$

pelo que, o coeficiente de x^{15} resulta da contabilização dos termos com os produtos de 1 por $\boldsymbol{x^{15}}$, de x^6 por $\boldsymbol{x^9}$ e de x^{11} por $\boldsymbol{x^4}$, ou seja, quando $\boldsymbol{k=15},\ \boldsymbol{k=9}$ e $\boldsymbol{k=4}$, obtendo-se

$$\binom{15+2}{2} - \binom{9+2}{2} - \binom{4+2}{2} = 66 \ .$$

EA 6

Elementos de Teoria dos Grafos

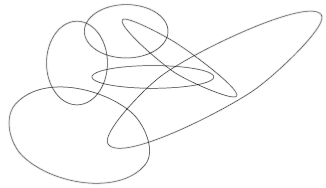
Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2016/2017 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

EA6 - Elementos de Teoria dos Grafos

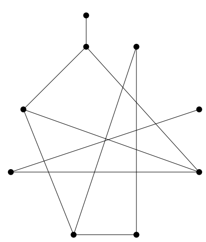
Estudo autónomo para resolver numa aula da semana de 05-06-2017 a 09-06-2017

1. Seja G o grafo no qual os vértices representam as ovais da figura seguinte [Hai] e as arestas interligam os vértices cujas respetivas ovais se apresentam sobrepostas. Desenhe o grafo G etiquetando-o de forma conveniente e escreva a matriz de adjacência de G. Justifique.

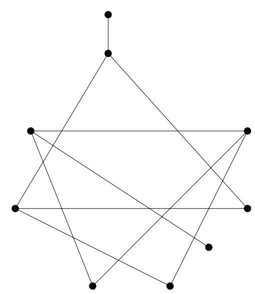


2. Suponha um grafo simples G de ordem n, com $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Mostre que não é possível que todos os vértices de G tenham graus diferentes.

3. Considere os grafos G e H da figura seguinte. Indique um isomorfismo entre G e H ou mostre que o mesmo não existe. Justifique devidamente.



G



H

4. O hipercubo H_n é um grafo $H_n = (V_n, E_n)$, com 2^n vértices, $n \in \mathbb{N}$, construído da seguinte forma. Etiquetando os vértices com inteiros de 0 a $2^n - 1$, se $i, j \in V_n$, então $ij \in E_n$ se e só se as representações dos inteiros i e j na base 2 diferem exatamente num único *bit* (digíto binário). Por exemplo, com $n = 3$, tem-se $V_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, e $57 \in E_3$, ou seja, 57 é uma aresta de H_3, uma vez que na base 2 escreve-se $5 = (101)_2$ e $7 = (111)_2$, sendo estas representações diferentes num único *bit*. Mas, as representações $5 = (101)_2$ e $6 = (110)_2$ diferem em dois *bits*, então 56 não é uma aresta de H_3. Note que, $\forall i \in V_n$ pode ser escrito na base 2 usando n *bits*.

   (a) Para $n = 1, 2, 3, 4$, descreva $H_n = (V_n, E_n)$ através de uma representação conveniente.

   (b) Quais são os graus dos vértices de H_n? Justifique.

   (c) Quantas arestas possui H_n? Justifique.

   (d) Para que valores de n o grafo H_n é Euleriano, ou seja, admite um circuito que contém todas as arestas de H_n? Justifique, com base em resultados teóricos que deve consultar na bibliografia recomendada [CSR09, Cap. 18].

   (e) H_n pode conter um ciclo de comprimento 3? Justifique.

Apoio ao estudo autónomo (ver bibliografia recomendada em elearning.ua.pt):

- Referência base [CSR09].
- Referência adicional [Pin99, pg. 173-205].
- Slides de apoio às aulas.
- Orientações Tutoriais (OTs) e horário de atendimento do seu professor.

Uma Resolução do EA6:

1. Na Figura 3 representa-se o grafo $G = (V, E)$ pedido, para o qual os 6 vértices em $V(G) = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ reproduzem, aproximadamente, as localizações das correspondentes ovais. Cada aresta de $E(G)$ tem como vértices extremos dois vértices cujas respetivas ovais se sobrepõem, tal como se pedia.

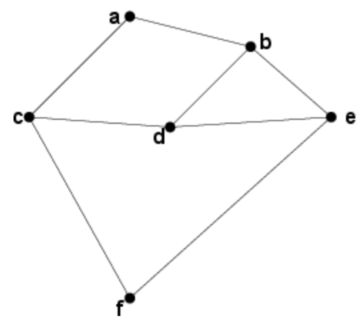


Figura 3: Grafo G representando a distribuição das seis ovais.

A matriz de adjacência A_G de G é de ordem 6 (quadrada 6×6), podendo escrever-se como

$$A_G = \begin{array}{c} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Num grafo simples G de ordem $n \geq 2$ o grau máximo de qualquer vértice é $n - 1$.

   Se G é conexo então não tem vértices de grau zero. Assim, o conjunto dos graus dos vértices de G é um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Como existem n vértices e apenas $n - 1$ graus possíveis, pelo princípio da gaiola dos pombos, existem pelo menos dois vértices (pombos) com o mesmo grau (na mesma gaiola). Logo, não é possível ter todos os vértices de G com graus diferentes (ou seja, ter todos os pombos em gaiolas diferentes).

   Se G não é conexo então não tem vértices de grau $n - 1$. Assim o conjunto dos graus dos vértices de G é um subconjunto de $\{0, 1, \ldots, n-2\}$. Tal como no caso anterior existem n vértices e apenas $n - 1$ graus possíveis, e, por conseguinte, aplicando o princípio da gaiola dos pombos, pode concluir-se que existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau. Portanto, neste caso, também não é possível que todos os vértices de G tenham graus diferentes.

3. Os grafos $G = (V_G, E_G)$ e $H = (V_H, E_H)$ são ambos de ordem $\nu = 9$ e dimensão $\varepsilon = 10$. Tanto G como H, têm quatro vértices de grau 3, três de graus 2 e dois de grau 1. Além disso, nos dois grafos existem dois triângulos, ou seja, dois ciclos de comprimento três. E também em G e H um dos vértices de grau 1 é adjacente a um vértice de grau 3 que faz parte de um daqueles ciclos.

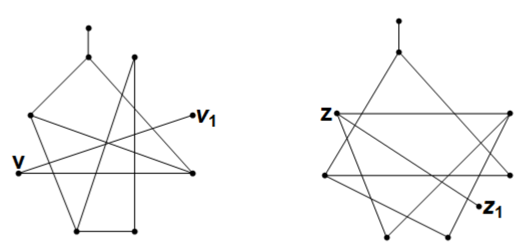


Figura 4: Grafos G e H etiquetados, respetivamente, com as arestas v_1v e z_1z.

Definindo a função

$$\phi : V_G \to V_H \ ,$$

pode verificar-se que, conforme mostra a Figura 4, existe em G um vértice v_1 de grau 1 adjacente a um vértice v de grau 2, isto é, a aresta $v_1 v \in E_G$, onde $d_G(v_1) = 1$ e $d_G(v) = 2$. No entanto, não é possível encontrar em H dois vértices $z_1 = \phi(v_1)$ e $z = \phi(v)$ extremos da aresta $\phi(v_1)\phi(v) \in E_H$, tal que, $d_H(z_1) = 1$ e $d_H(z) = 2$. Neste caso, tem-se $d_H(z) = 3$. Donde, não é possível estabelecer a correspondência da aresta $v_1 v \in E_G$ com uma aresta em E_H, daí que, não seja possível encontrar uma função ϕ bijetiva, ou seja, não existe um isomorfismo ϕ entre os dois grafos G e H que preserve as relações de adjacência e de incidência entre os respetivos conjuntos de vértices e de arestas. Concluindo-se, por isso, que G e H não são isomorfos.

4. (a) Para $n = 1, 2, 3$ representam-se na Figura 5 os três grafos $H_n = (V_n, H_n)$ etiquetados por $n-$uplos binários e onde dois vértices são adjacentes se e só se as etiquetas que lhes correspondem diferem num único dígito binário.

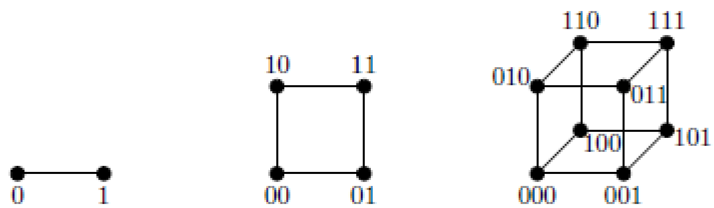


Figura 5: Representação de H_n para $n = 1, 2, 3$.

Assim, o grafo H_1 consiste em dois vértices unidos por uma aresta, H_2 coincide com um quadrado (é um ciclo de comprimento 4, C_4) e H_3 é o grafo cuja representação é um cubo de 8 vértices e 12 arestas.

Figura 6: Uma representação do hipercubo H_4 e um exemplo no DMat UA.

Na Figura 6 pode observar-se o grafo H_4, o qual consiste num hipercubo em $\mathbb{R}^4$ com $2^4 = 16$ vértices e 32 arestas. Os vértices podem ser etiquetados por sequências binárias de comprimento $n = 4$, de modo a que as etiquetas correspondentes a dois vértices adjacentes diferem num único dígito binário. A referida figura inclui também uma fotografia de um hipercubo H_4 que se encontra na entrada principal do Departamento de Matemática da UA (DMat UA).

Note-se que, a representação do hipercubo apresentada na Figura 6 pode ser obtida a partir de [LLC, **https://www.wolframalpha.com/**] fazendo **hypercubegraph[4]**. Usando este programa (**WolframAlpha**) podem obter-se outras representações para H_4.

(b) Para um dado vértice $v \in H_n$ existem n sequências binárias que diferem da etiqueta de v num único *bit*. Tal significa que existem exatamente n vértices adjacentes a v e, por conseguinte, o grau de v é n, ou seja, $d_{H_n}(v) = n$. Logo H_n é $n-$regular, isto é, todos os seus vértices têm grau n.

(c) Dado que o número de vértices de H_n é $\nu(H_n) = 2^n$, sendo $\varepsilon(H_n)$ o número de arestas e tendo em conta o resultado teórico que, num grafo simples, relaciona o somatório dos graus dos vértices com o número de arestas, pode escrever-se

$$\sum_{v \in H_n} d_{H_n}(v) = 2\varepsilon(H_n) \ \Leftrightarrow \ n2^n = 2\varepsilon(H_n) \ \Leftrightarrow \ \varepsilon(H_n) = n2^{n-1}.$$

(d) Atendendo ao Teorema 18.1 (Euler-Hierholzer) referido em [CSR09, pg. 482], sabe-se que um grafo (ou multigrafo) conexo é Euleriano, ou seja, admite um circuito que contém todas as arestas do grafo se e só se nenhum dos seus vértices tem grau ímpar. Donde, como H_n é conexo e $n-$regular a existência de um tal circuito é garantida para n par, ou seja, H_n é Euleriano quando n é par.

(e) De facto, $H_n = (V_n, E_n)$ não contém um ciclo de comprimento 3 (C_3). Com efeito, considerando três vértices distintos $i, j, k \in V_n$, tal que, $ij \in E_n$ e $jk \in E_n$, tem-se que as representações binárias de i e j, respetivamente, $(i)_2$ e $(j)_2$, diferem num único *bit*, o qual se encontra numa posição $p_1 \in \{1, \ldots, n\}$. De modo análogo, como $jk \in E_n$ as representações binárias $(j)_2$ e $(k)_2$ diferem também num *bit*, na posição $p_2 \in \{1, \ldots, n\}$. Pelo que, $p_1 \neq p_2$, senão ter-se-ia $i = k$. Donde, $(i)_2$ e $(k)_2$ diferem em pelo menos dois *bits* (um na posição p_1 e o outro na posição p_2), logo, $ik \notin E_n$. E, portanto, quaisquer que sejam os três vértices distintos $i, j, k \in V_n$ não podem formar um triângulo.

Referências

[CC15] Domingos Moreira Cardoso e Maria Paula Carvalho. *Noções de Lógica Matemática.* Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, 2015.

[CSR09] Domingos Moreira Cardoso, Jerzy Szymański, e Mohammad Rostami. *Matemática Discreta.* Escolar Editora, Lisboa, 2009.

[Hai] Mark Haiman. Math 55 - discrete mathematics - spring 2003, course home page. `https://math.berkeley.edu/~mhaiman/math55/review3.pdf`.

[LLC] Wolfram Alpha LLC. `https://wolframalpha.com/`.

[Pin99] José Sousa Pinto. *Tópicos de Matemática Discreta.* Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, 1999.

[Tab] Doces com massa folhada. `https://co.pinterest.com/search/pins/?q=doces-com-massa-folhada-chocolate`.