

ALGA — Agrupamento IV (ECT, EET, EI)

Teste 2

| 9 | de | ianeiro | de 2017 | — Duração: | 1h30 |
|---|----|---------|---------|------------|------|
| | | | | | |

Valores

| ome | | | | | N.° Mec | | | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------------------|---------------------------------------------------|--|--|--|
| urso | | | N | .° Folhas sup | lementares _ | | | | |
| Questão | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | total | | | |
| Cotação | 45 | 15 | 40 | 50 | 50 | 200 | | | |
| Classif. | | | | | | | | | |
| 1. Esta questâ | io é constituída po | or 5 alíneas de es | colha múltipla. | | | | | | |
| Atribuem | 0 pontos p | or cada resposta o or cada resposta o or cada resposta o | em branco e | | E\C\C\O\0\000000000000000000000000000000 | 2 3 4 5 18 27 36 45 15 24 33 12 21 09 | | | |
| Cada alíne | a tem uma só opç | ão correta que de | ve assinalar com | uma × no | correspondente. | | | | |
| | idera a matriz A = Os valores próprio O espaço nulo de A | s de A são -1 e | -3. | | $-\lambda)^2(3-\lambda)=0.$ | | | | |
| | | | | | < (1 0 2) (0 1 | 0) > | | | |
| O conjunto dos vetores próprios de A associados ao valor próprio $3 \notin (1,0,2), (0,1,0) >$. O sistema $(A - I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$ é possível e indeterminado. | | | | | | | | | |
| | Sistema ($A-I_3$ | $A = 0_{\mathbb{R}^3}$ e poss | iver e indetermin | ado. | | | | | |
| (b) Em \mathbb{R}^3 a equação $x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2yz = -1$ define um hiperbolóide de uma folha. um hiperbolóide de duas folhas. um cilindro elíptico. | | | | | | | | | |
| (c) A ma | o conjunto vazio. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz representativa da aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ relativamente às bas | | | | | | | | |
| \Box ϕ | | | | | | | | | |
| (d) Consi | | torial real $S = \{($ | $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:3x$ | (z - 4y + z = 0) | e o vetor $X = (1$ | ,1,1). A projeçã | | | |
| | $\operatorname{proj}_S X = (3, -4)$ $\operatorname{proj}_S X = 1.$ | , 1). | | | | | | | |
| p | $\operatorname{proj}_S X = 0.$ | | | | | | | | |
| | idera a matriz A_m se ϕ é sobrejetiva, | | | \mathbb{R}^m definida por | $\phi(X) = AX.$ | | | | |
| | Se ϕ é injetiva, dir | $n(ker(\phi)) = n.$ | | | | | | | |
| S | Se $m=n,\phi$ é um | isomorfismo. | | | | | | | |
| | Se $n < m$, $dim(ir)$ | | | | | | | | |
| | , | 11/ | | | | | | | |

| (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9x + y + 2017z = 2027\}$ é subespaço vetorial real? S N Po | orquê? | | | | | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | |
| uma base de S é | | | | | | | |
| (b) $S=\{(x-y,2y,y+z):x,y,z\in\mathbb{R}\}$ é subespaço vetorial real? $\boxed{\mathbb{S}}$ $\boxed{\mathbb{N}}$ Porquê? | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| uma base de S é | | | | | | | |
| 3. Consider os vetores $X_1=(1,1,1), X_2=(-1,1,0)$ e $X_3=(-1,0,1)$ de \mathbb{R}^3 . | | | | | | | |
| (a) Verifica se os vetores são linearmente independentes. | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| (b) Determina a projecção ortogonal do vetor X_3 sobre o subespaço $< X_2 >$. | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| (c) Determina, se possível, uma base ortonormada de $\langle X_2, X_3 \rangle$. | | | | | | | |

2. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 ? Rodeia a resposta correcta e explica a tua resposta.

Sempre que possível indica uma base e a dimensão de S.

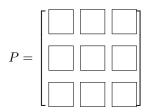
| 4. Considera a matriz A= | $=\begin{bmatrix} 1\\1\\1 \end{bmatrix}$ | 1 1 1 | 1 1 1 | com equação característica $\lambda^2(3-\lambda)=0$ e valores próprios 0 e 3. |
|--------------------------|------------------------------------------|-------------|-------------|---------------------------------------------------------------------------------|
|--------------------------|------------------------------------------|-------------|-------------|---------------------------------------------------------------------------------|

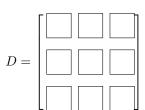
(a) Indica o conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio 3:

(b) Indica o subespaço próprio associado ao valor próprio 0:

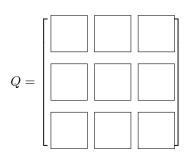
(c) Justifica que a matriz A é diagonalizável.

(d) Indica matrizes P e D, P diagonalizante de A e D diagonal, tais que $P^{-1}AP=D$.





(e) A matriz A é ortogonalmente diagonalizável? Justifica a tua resposta e, em caso afirmativo, indica uma matriz ortogonal Q que diagonaliza A e tal que $Q^TAQ=D$, sendo D a matriz indicada na alínea anterior.



| 5. Considera a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | 0 1 | 1 0 | $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ | e a transformação linear $\phi:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(X)=CX$ para todo o |
|------------------------------------------------------------------|--------|--------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $X \in \mathbb{R}^4$. | | | _ | |

(a) Determina a imagem de ϕ , $\operatorname{im}(\phi)$, e uma sua base.

- (b) ϕ é sobrejetiva? Justifica.
- (c) Determina o núcleo de ϕ , $\ker(\phi)$, e uma sua base.

- (d) ϕ é injetiva? Justifica.
- (e) Encontra a matriz G representativa da transformação ϕ relativamente às bases $\mathbb{S}=\big((1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\big)$ e \mathcal{C} , canónica de \mathbb{R}^2 .