

# MATEMÁTICA DISCRETA

---

Ano Letivo 2021/22      (Versão: 2 de Junho de 2022)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro  
<https://elearning.ua.pt/>

# **CAPÍTULO V**

## **ELEMENTOS DE TEORIA DOS GRAFOS**

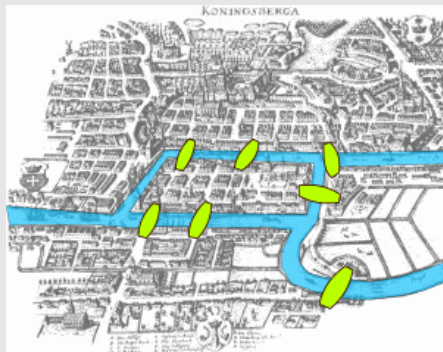
### **PARTE I**

### **CONCEITOS BÁSICOS**

# **INTRODUÇÃO**

# As Pontes de Königsberg

Fazer um passeio ...



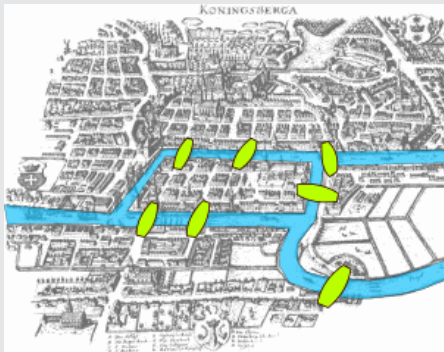
Será possível cruzar as sete pontes de Königsberg numa caminhada contínua sem passar duas vezes por uma delas?

---

Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático suíço.

# As PONTES DE KÖNIGSBERG

Fazer um passeio ...



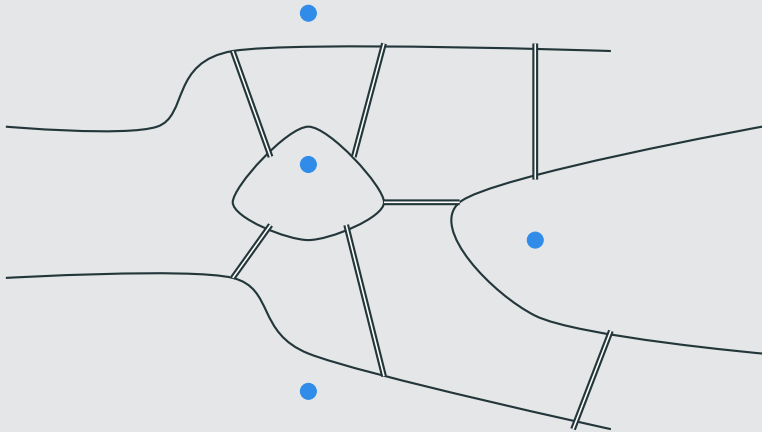
Será possível cruzar as sete pontes de Königsberg numa caminhada contínua sem passar duas vezes por uma delas? Veremos porque a resposta é «Não» ...

---

Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático suíço.

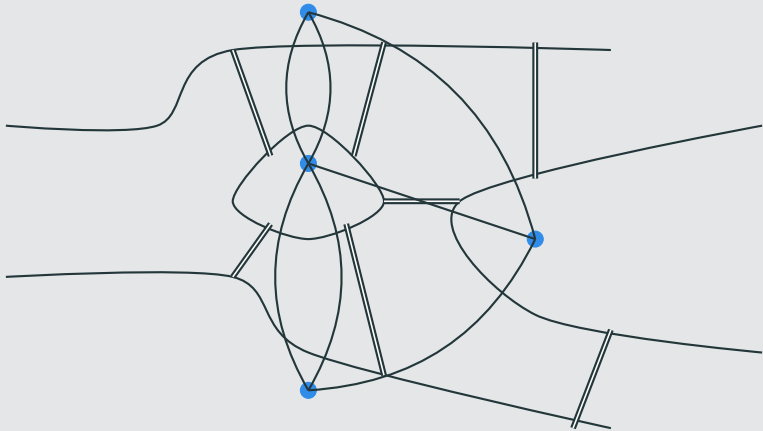
# AS PONTES DE KÖNIGSBERG

## Um modelo matemático



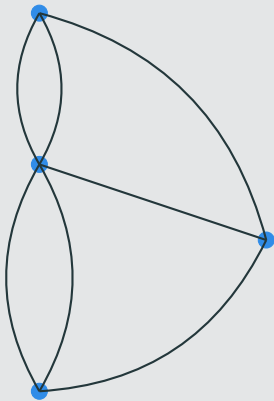
# AS PONTES DE KÖNIGSBERG

## Um modelo matemático



# AS PONTES DE KÖNIGSBERG

## Um modelo matemático





1. Conceitos fundamentais de teoria dos grafos
2. Grafos simples
3. Vizinhança e grau
4. Homomorfismos de grafos, grafos isomorfos e subgrafos

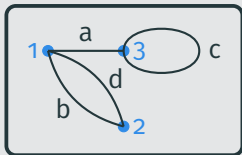
# **1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE TEORIA DOS GRAFOS**

# GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS

## Definição (grafo não orientado)

Designa-se por **grafo (não orientado)** um terno  $G = (V, E, \psi)$  onde

## Exemplo



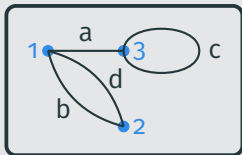
# GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS

## Definição (grafo não orientado)

Designa-se por **grafo (não orientado)** um terno  $G = (V, E, \psi)$  onde

- $V$  é um conjunto (os elementos de  $V$  chamamos **vértices**),

## Exemplo



$$V = \{1, 2, 3\},$$

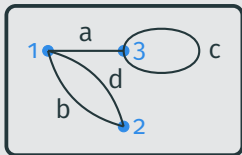
# GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS

## Definição (grafo não orientado)

Designa-se por **grafo (não orientado)** um terno  $G = (V, E, \psi)$  onde

- $V$  é um conjunto (os elementos de  $V$  chamamos **vértices**),
- $E$  é um conjunto (os elementos de  $E$  chamamos **arestas**, tipicamente  $E$  é disjunto de  $V$ ),

## Exemplo



$$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{a, b, c, d\},$$

# GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS

## Definição (grafo não orientado)

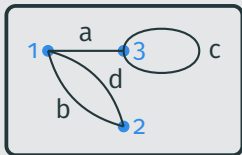
Designa-se por **grafo (não orientado)** um terno  $G = (V, E, \psi)$  onde

- $V$  é um conjunto (os elementos de  $V$  chamamos **vértices**),
- $E$  é um conjunto (os elementos de  $E$  chamamos **arestas**, tipicamente  $E$  é disjunto de  $V$ ),
- $\psi$  é uma função (a **função de incidência** do grafo)

$$\psi: E \longrightarrow \{A \subseteq V \mid 1 \leq |A| \leq 2\}.$$

Se  $\psi(a) = \{u, v\}$ ,  $u$  e  $v$  dizem-se os **pontos extremos** da aresta  $a$ .

## Exemplo



$$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{a, b, c, d\},$$

$$\psi(a) = \{1, 3\}, \quad \psi(b) = \{1, 2\}, \quad \psi(c) = \{3\},$$

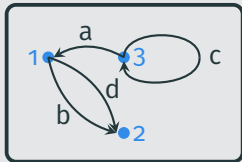
$$\psi(d) = \{1, 2\} = \{2, 1\}.$$

# GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS

## Definição (grafo orientado)

Designa-se por **grafo orientado** (ou **digrafo**) um terno  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  onde

## Exemplo



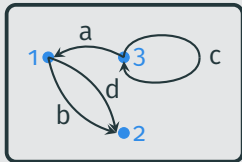
# GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS

## Definição (grafo orientado)

Designa-se por **grafo orientado** (ou **digrafo**) um terno  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  onde

- $V$  é um conjunto (os elementos de  $V$  chamamos **vértices**),

## Exemplo



$$V = \{1, 2, 3\},$$



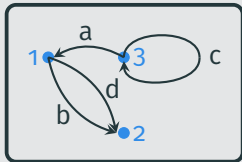
# GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS

## Definição (grafo orientado)

Designa-se por **grafo orientado** (ou **digrafo**) um terno  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  onde

- $V$  é um conjunto (os elementos de  $V$  chamamos **vértices**),
- $E$  é um conjunto (os elementos de  $E$  chamamos **arcos**, tipicamente  $E$  é disjunto de  $V$ ),

## Exemplo



$$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{a, b, c, d\},$$

# GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS

## Definição (grafo orientado)

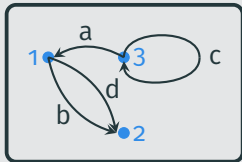
Designa-se por **grafo orientado** (ou **digrafo**) um terno  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  onde

- $V$  é um conjunto (os elementos de  $V$  chamamos **vértices**),
- $E$  é um conjunto (os elementos de  $E$  chamamos **arcos**, tipicamente  $E$  é disjunto de  $V$ ),
- $\psi$  é uma função (a **função de incidência** do grafo)

$$\psi: E \longrightarrow V \times V.$$

Se  $\psi(a) = (u, v)$ ,  $u$  diz-se **cauda** de  $a$  e  $v$  **cabeça** de  $a$ .

## Exemplo



$$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{a, b, c, d\},$$

$$\psi(a) = (3, 1), \quad \psi(b) = (1, 2), \quad \psi(c) = (3, 3),$$

$$\psi(d) = (3, 2).$$

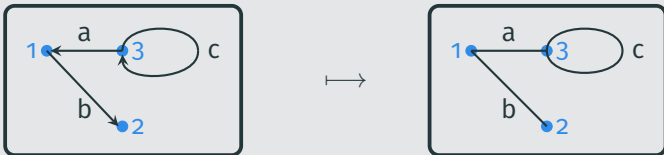
# GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS

## Grafos orientados vs. não-orientados

A cada grafo orientado  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  podemos associar um grafo não orientado  $G = (V, E, \hat{\psi})$  onde

$\hat{\psi}(a) = \{u, v\}$  precisamente quando  $\psi(a) = (u, v)$  ou  $\psi(a) = (v, u)$   
(ou seja, esquecemos a direção dos arcos).

## Exemplo



# GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS

## Grafos orientados vs. não-orientados

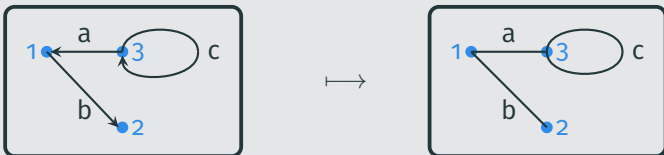
A cada grafo orientado  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  podemos associar um grafo não orientado  $G = (V, E, \hat{\psi})$  onde

$\hat{\psi}(a) = \{u, v\}$  precisamente quando  $\psi(a) = (u, v)$  ou  $\psi(a) = (v, u)$

(ou seja, esquecemos a direção dos arcos).

Desse modo, vários conceitos de grafos aplicam-se igualmente aos digrafos.

## Exemplo



### Definição

Consideremos um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente um digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$ .

## Definição

Consideremos um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente um digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$ .

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se **lacete**.

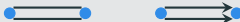


## Definição

Consideremos um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente um digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$ .

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se **lacete**.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por **arestas paralelas**, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por **arcos paralelos**.

- paralelas:



- não paralelas:



## Definição

Consideremos um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente um digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$ .

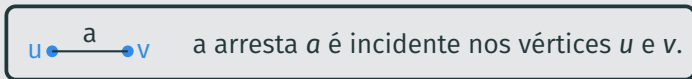
- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se **lacete**.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por **arestas paralelas**, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por **arcos paralelos**.
- $G$  (respetivamente  $\vec{G}$ ) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.



## Definição

Consideremos um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente um digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$ .

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se **lacete**.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por **arestas paralelas**, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por **arcos paralelos**.
- $G$  (respetivamente  $\vec{G}$ ) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.
- Uma aresta (um arco) diz-se **incidente** nos seus vértices extremos.



## Definição

Consideremos um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente um digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$ .

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se **lacete**.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por **arestas paralelas**, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por **arcos paralelos**.
- $G$  (respetivamente  $\vec{G}$ ) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.
- Uma aresta (um arco) diz-se **incidente** nos seus vértices extremos.
- Os vértices  $u$  e  $v$  dizem-se **adjacentes** se existe uma aresta (um arco) com pontos extremos  $u$  e  $v$ .

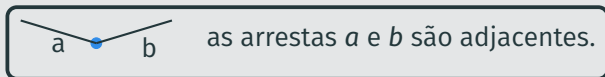


os vértices  $u$  e  $v$  são adjacentes.

## Definição

Consideremos um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente um digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$ .

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se **lacete**.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por **arestas paralelas**, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por **arcos paralelos**.
- $G$  (respetivamente  $\vec{G}$ ) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.
- Uma aresta (um arco) diz-se **incidente** nos seus vértices extremos.
- Os vértices  $u$  e  $v$  dizem-se **adjacentes** se existe uma aresta (um arco) com pontos extremos  $u$  e  $v$ .
- Arestas (arcos) incidentes num mesmo vértice dizem-se **adjacentes**.



## Definição

Um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  diz-se **finito** quando os conjuntos  $V$  e  $E$  são finitos.

## Definição

Um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  diz-se **finito** quando os conjuntos  $V$  e  $E$  são finitos.

## Nota

No que se segue, consideremos tipicamente grafos finitos.

# ORDEM E DIMENSÃO DE UM GRAFO

## Definição

Um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  diz-se **finito** quando os conjuntos  $V$  e  $E$  são finitos.

## Nota

No que se segue, consideremos tipicamente grafos finitos.

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

# ORDEM E DIMENSÃO DE UM GRAFO

## Definição

Um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  diz-se **finito** quando os conjuntos  $V$  e  $E$  são finitos.

## Nota

No que se segue, consideremos tipicamente grafos finitos.

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

- **ordem de  $G$ :**  $\nu(G) = |V|$  (o número de vértices).

# ORDEM E DIMENSÃO DE UM GRAFO

## Definição

Um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  diz-se **finito** quando os conjuntos  $V$  e  $E$  são finitos.

## Nota

No que se segue, consideremos tipicamente grafos finitos.

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

- **ordem de  $G$ :**  $\nu(G) = |V|$  (o número de vértices).
- **dimensão de  $G$ :**  $\epsilon(G) = |E|$  (o número de arestas).



# ORDEM E DIMENSÃO DE UM GRAFO

## Definição

Um grafo  $G = (V, E, \psi)$  respetivamente digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  diz-se **finito** quando os conjuntos  $V$  e  $E$  são finitos.

## Nota

No que se segue, consideremos tipicamente grafos finitos.

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

- **ordem de  $G$ :**  $\nu(G) = |V|$  (o número de vértices).
- **dimensão de  $G$ :**  $\epsilon(G) = |E|$  (o número de arestas).

(E da forma igual para digrafos.)

## **2. GRAFOS SIMPLES**

# SIMPLIFICAR A NOTAÇÃO

## Recordamos:

Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes. (Di)Grafos não simples denota-se também por **multi(di)grafo**.

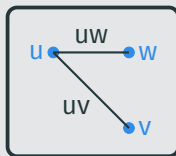
# SIMPLIFICAR A NOTAÇÃO

## Recordamos:

Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes. (Di)Grafos não simples denota-se também por **multi(di)grafo**.

## Nota

Num grafo (respetivamente digrafo) simples, cada aresta (arco)  $a$  é completamente determinada(o) pelos vértices extremos  $u$  e  $v$  (cauda  $u$  e cabeça  $v$ ). Neste caso escrevemos da forma mais sugestivo  $uv$  em lugar de  $a$ .



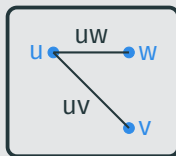
# SIMPLIFICAR A NOTAÇÃO

## Recordamos:

Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes. (Di)Grafos não simples denota-se também por **multi(di)grafo**.

## Nota

Num grafo (respetivamente digrafo) simples, cada aresta (arco)  $a$  é completamente determinada(o) pelos vértices extremos  $u$  e  $v$  (cauda  $u$  e cabeça  $v$ ). Neste caso escrevemos da forma mais sugestivo  $uv$  em lugar de  $a$ .



Com esta notação, o (di)grafo  $(V, E, \psi)$  é completamente determinado por  $(V, E)$  (ou seja, podemos «dispensar»  $\psi$ ).

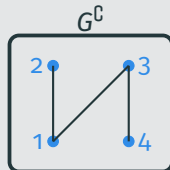
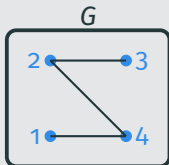
# GRAFOS COMPLEMENTARES

## Definição

Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples. O **grafo complementar** de  $G$  é o grafo  $G^c = (V, E^c)$  com o mesmo conjunto de vértices e com

$$uv \in E^c \iff uv \notin E.$$

## Exemplo

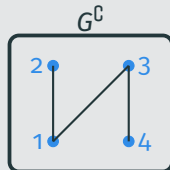
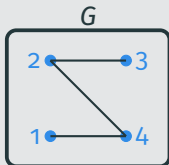


## Definição

Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples. O **grafo complementar** de  $G$  é o grafo  $G^c = (V, E^c)$  com o mesmo conjunto de vértices e com

$$uv \in E^c \iff uv \notin E.$$

## Exemplo



## Nota

Portanto,  $(G^c)^c = G$ .

### **3. VIZINHANÇA E GRAU**



## Definição

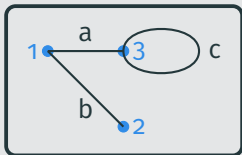
- Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo e  $v \in V$ .

# O CONCEITO DE VIZINHANÇA

## Definição

- Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo e  $v \in V$ . O conjunto de todos os vértices adjacentes a  $v$  designa-se por **vizinhança** de  $v$  e denota-se por  $\mathcal{N}_G(v)$  (ou simplesmente  $\mathcal{N}(v)$ ).

## Exemplo



$$\mathcal{N}(1) = \{2, 3\},$$

$$\mathcal{N}(2) = \{1\},$$

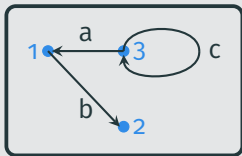
$$\mathcal{N}(3) = \{1, 3\}.$$

# O CONCEITO DE VIZINHANÇA

## Definição

- Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo e  $v \in V$ . O conjunto de todos os vértices adjacentes a  $v$  designa-se por **vizinhança** de  $v$  e denota-se por  $\mathcal{N}_G(v)$  (ou simplesmente  $\mathcal{N}(v)$ ).
- Seja  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  um digrafo e  $v \in V$ . A **vizinhança de entrada** de  $v$  é o conjunto  $\mathcal{N}^-(v)$  de todos os vértices  $u$  tal que existe um  $e \in E$  com  $\psi(e) = (u, v)$ , e a **vizinhança de saída** de  $v$  é o conjunto  $\mathcal{N}^+(v)$  de todos os vértices  $u$  tal que existe um  $e \in E$  com  $\psi(e) = (v, u)$ .

## Exemplo



$$\mathcal{N}^-(1) = \{3\}, \mathcal{N}^+(1) = \{2\}, \mathcal{N}(1) = \{2, 3\}$$

$$\mathcal{N}^-(2) = \{1\}, \mathcal{N}^+(2) = \emptyset, \mathcal{N}(2) = \{1\}$$

$$\mathcal{N}^-(3) = \{3\}, \mathcal{N}^+(3) = \{1, 3\}, \mathcal{N}(3) = \{1, 3\}$$

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

- Seja  $v \in V$ . O **grau** de  $v$  é o número  $d(v)$  de arestas incidentes em  $v$  (onde cada lacete conta duas vezes).

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

- Seja  $v \in V$ . O **grau** de  $v$  é o número  $d(v)$  de arestas incidentes em  $v$  (onde cada lacete conta duas vezes).
- O **maior grau dos vértices** do grafo  $G$  denota-se por  $\Delta(G)$ :

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

- Seja  $v \in V$ . O **grau** de  $v$  é o número  $d(v)$  de arestas incidentes em  $v$  (onde cada lacete conta duas vezes).
- O **maior grau dos vértices** do grafo  $G$  denota-se por  $\Delta(G)$ :

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$

- O **menor grau dos vértices** do grafo  $G$  denota-se por  $\delta(G)$ :

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

- Seja  $v \in V$ . O **grau** de  $v$  é o número  $d(v)$  de arestas incidentes em  $v$  (onde cada lacete conta duas vezes).
- O **maior grau dos vértices** do grafo  $G$  denota-se por  $\Delta(G)$ :

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$

- O **menor grau dos vértices** do grafo  $G$  denota-se por  $\delta(G)$ :

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

## Nota

No caso de um digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$ , consideremos ainda



## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

- Seja  $v \in V$ . O **grau** de  $v$  é o número  $d(v)$  de arestas incidentes em  $v$  (onde cada lacete conta duas vezes).
- O **maior grau dos vértices** do grafo  $G$  denota-se por  $\Delta(G)$ :

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$

- O **menor grau dos vértices** do grafo  $G$  denota-se por  $\delta(G)$ :

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

## Nota

No caso de um digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$ , consideremos ainda

- o **semigrau de entrada**:  $d^-(v) = |\{e \mid \exists u \in V \psi(e) = (u, v)\}|$ .

Ou seja,  $d^-(v)$  é o número de arcos com «cabeça em  $v$ ».

# GRAU DE UM VÉRTICE

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

- Seja  $v \in V$ . O **grau** de  $v$  é o número  $d(v)$  de arestas incidentes em  $v$  (onde cada lacete conta duas vezes).
- O **maior grau dos vértices** do grafo  $G$  denota-se por  $\Delta(G)$ :

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$

- O **menor grau dos vértices** do grafo  $G$  denota-se por  $\delta(G)$ :

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

## Nota

No caso de um digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$ , consideremos ainda

- **o semigrau de entrada**:  $d^-(v) = |\{e \mid \exists u \in V \psi(e) = (u, v)\}|$ .
- **o semigrau de saída**:  $d^+(v) = |\{e \mid \exists u \in V \psi(e) = (v, u)\}|$ .

Ou seja,  $d^+(v)$  é o número de arcos com «cauda em  $v$ ».

# GRAU DE UM VÉRTICE

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo finito.

- Seja  $v \in V$ . O **grau** de  $v$  é o número  $d(v)$  de arestas incidentes em  $v$  (onde cada lacete conta duas vezes).
- O **maior grau dos vértices** do grafo  $G$  denota-se por  $\Delta(G)$ :

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$

- O **menor grau dos vértices** do grafo  $G$  denota-se por  $\delta(G)$ :

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

## Nota

No caso de um digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$ , consideremos ainda

- **o semigrau de entrada:**  $d^-(v) = |\{e \mid \exists u \in V \psi(e) = (u, v)\}|$ .
- **o semigrau de saída:**  $d^+(v) = |\{e \mid \exists u \in V \psi(e) = (v, u)\}|$ .
- **Nota:**  $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$ .

### Exemplo

O Sr. e a Sra. Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra. Silva. Em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram.

### Exemplo

O Sr. e a Sra. Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra. Silva. Em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram.

Depois de todos terem chegado o Sr. Silva observou:

*se me excluir a mim todos deram um número diferente de apertos de mão.*

### Exemplo

O Sr. e a Sra. Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra. Silva. Em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram.

Depois de todos terem chegado o Sr. Silva observou:

*se me excluir a mim todos deram um número diferente de apertos de mão.*

Quantos apertos de mão deu o Sr. Silva?

### Exemplo

O Sr. e a Sra. Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra. Silva. Em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram.

Depois de todos terem chegado o Sr. Silva observou:

*se me excluir a mim todos deram um número diferente de apertos de mão.*

Quantos apertos de mão deu o Sr. Silva?

É claro que os membros de um mesmo casal não se cumprimentaram um ao outro, pelo que o número de cumprimentos variou entre 0 e 8.

### Exemplo

O Sr. e a Sra. Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra. Silva. Em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram.

Depois de todos terem chegado o Sr. Silva observou:

*se me excluir a mim todos deram um número diferente de apertos de mão.*

Quantos apertos de mão deu o Sr. Silva?

É claro que os membros de um mesmo casal não se cumprimentaram um ao outro, pelo que o número de cumprimentos variou entre 0 e 8.

Por outro lado, uma vez que, excluindo o Sr. Silva, todas as restantes 9 pessoas deram um número diferente de apertos de mão, podemos atribuir a cada uma delas exactamente um índice  $j$  entre 0 e 8 que corresponde ao número de apertos de mão que deu.



## EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



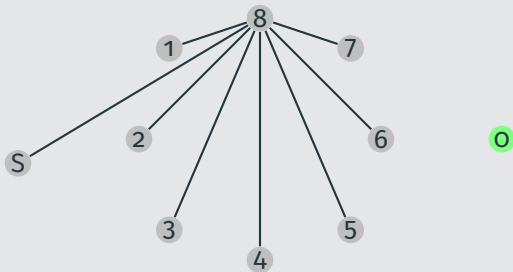
Portanto:

- O vértice  $n_0$  tem grau  $d(n_0) = 0$ ; portanto, nenhuma aresta pode ter um extremo em  $n_0$ .

## EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



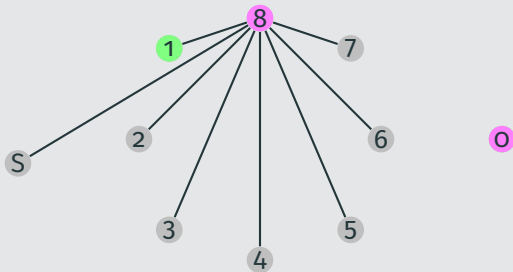
Portanto:

- Uma vez que o  $n_8$  deu 8 apertos de mão, ele apertou a mão a toda a gente, com exceção dele(a) próprio(a) e da mulher/do marido ... logo,  $n_0$  e  $n_8$  são casados.

## EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



Portanto:

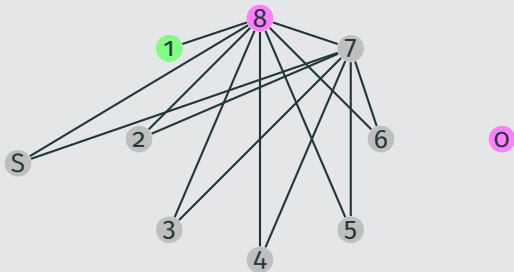
- Uma vez que o  $n_8$  deu 8 apertos de mão, ele apertou a mão a toda a gente, com exceção dele(a) próprio(a) e da mulher/do marido ... logo,  $n_0$  e  $n_8$  são casados.

Já temos  $d(n_0) = 0$ ,  $d(n_8) = 8$  e  $d(n_1) = 1$ , pelo que não pode haver mais arestas com extremos nestes vértices.

## EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



Portanto:

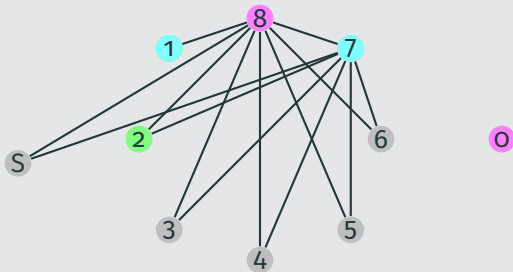
- Por sua vez,  $n_7$  só não apertou a mão a ele próprio, a  $n_0$  e  $n_1$  (uma vez que este último só deu um aperto de mão e foi a  $n_8$ ).

Logo,  $n_7$  e  $n_1$  são casados

## EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



Portanto:

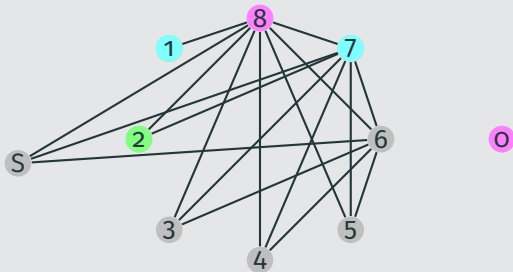
- Por sua vez,  $n_7$  só não apertou a mão a ele próprio, a  $n_0$  e  $n_1$  (uma vez que este último só deu um aperto de mão e foi a  $n_8$ ).

Logo,  $n_7$  e  $n_1$  são casados e já temos  $d(n_2) = 2$ .

## EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



Portanto:

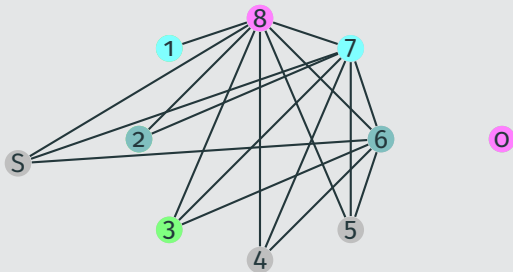
- Por sua vez,  $n_6$  só não deu apertos de mão a si próprio, a  $n_0$ ,  $n_1$  e  $n_2$  (note-se que este último deu um aperto de mão a  $n_8$  e  $n_7$ ).

Logo,  $n_2$  e  $n_6$  são casados

## EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



Portanto:

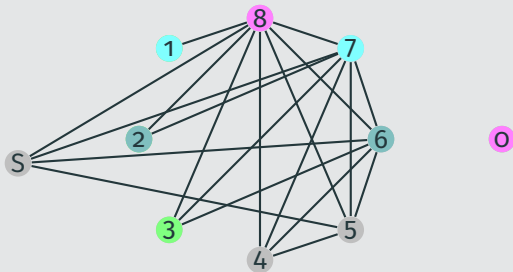
- Por sua vez,  $n_6$  só não deu apertos de mão a si próprio, a  $n_0$ ,  $n_1$  e  $n_2$  (note-se que este último deu um aperto de mão a  $n_8$  e  $n_7$ ).

Logo,  $n_2$  e  $n_6$  são casados e já temos  $d(n_3) = 3$ .

## EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



Portanto:

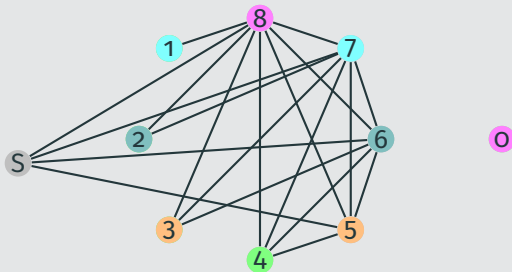
- O  $n_5$  apertou a mão de  $n_8$ ,  $n_7$ ,  $n_6$ ,  $n_4$  e ao Sr. Silva e, consequentemente, é casado com  $n_3$ .



## EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



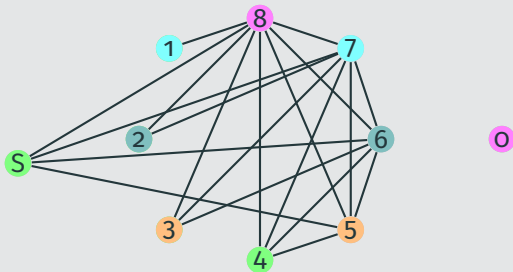
Portanto:

- O  $n_5$  apertou a mão de  $n_8$ ,  $n_7$ ,  $n_6$ ,  $n_4$  e ao Sr. Silva e, consequentemente, é casado com  $n_3$ .

## EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



Portanto:

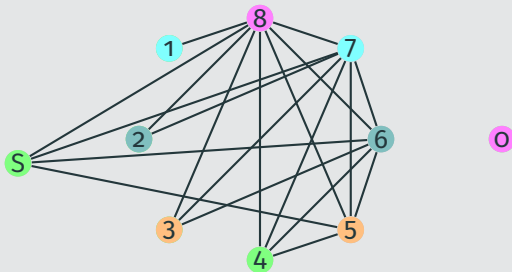
- O  $n_5$  apertou a mão de  $n_8$ ,  $n_7$ ,  $n_6$ ,  $n_4$  e ao Sr. Silva e, consequentemente, é casado com  $n_3$ .

Assim,  $n_4$  é a Sra. Silva (que, naturalmente, não deu um aperto de mão ao Sr. Silva) e ficam determinados todos os apertos de mão.

## EXEMPLO (CONTINUAÇÃO)

### Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



Portanto:

O Sr. Silva apertou a mão a  $n_8$ ,  $n_7$ ,  $n_6$  e  $n_5$ .

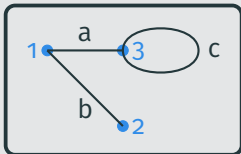
# REPRESENTAÇÃO POR MATRIZES

## A matriz de incidência

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo (finito). A **matriz de incidência** (aresta-vértice) de  $G$  é a matriz do tipo  $\nu \times \epsilon$  definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, a) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } v \notin \psi(a), \\ 1 & \text{se } \psi(a) = \{u, v\} \text{ com } u \neq v, \\ 2 & \text{se } \psi(a) = \{v\}. \end{cases}$$

## Exemplo



	a	b	c
1	1	1	0
2	0	1	0
3	1	0	2

# REPRESENTAÇÃO POR MATRIZES

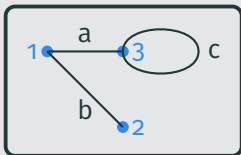
## A matriz de incidência

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo (finito). A **matriz de incidência** (aresta-vértice) de  $G$  é a matriz do tipo  $\nu \times \epsilon$  definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, a) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } v \notin \psi(a), \\ 1 & \text{se } \psi(a) = \{u, v\} \text{ com } u \neq v, \\ 2 & \text{se } \psi(a) = \{v\}. \end{cases}$$

**Nota:** Para cada  $a \in E$ , a soma sobre todos os elementos da «coluna  $a$ » é 2. Para cada  $v \in V$ , a soma sobre todos os elementos da «linha  $v$ » é o grau de  $v$ .

## Exemplo



	a	b	c
1	1	1	0
2	0	1	0
3	1	0	2

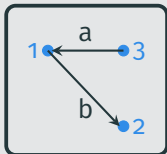
# REPRESENTAÇÃO POR MATRIZES

## A matriz de incidência

Seja  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  um digrafo (finito) sem lacetes. A **matriz de incidência** (aresta-vértice) de  $\vec{G}$  é a matriz do tipo  $V \times E$  definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, a) \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (u, v) = \psi(a), \\ 1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (v, u) = \psi(a), \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

## Exemplo



	a	b
1	-1	1
2	0	-1
3	1	0

# REPRESENTAÇÃO POR MATRIZES

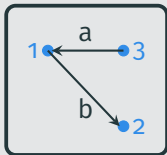
## A matriz de incidência

Seja  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  um digrafo (finito) sem lacetes. A **matriz de incidência** (aresta-vértice) de  $\vec{G}$  é a matriz do tipo  $\nu \times e$  definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, a) \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (u, v) = \psi(a), \\ 1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (v, u) = \psi(a), \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

**Nota:** Para cada  $a \in E$ , a soma sobre todos os elementos da «coluna  $a$ » é 0. Para cada  $v \in V$ , a soma sobre todos os elementos da «linha  $v$ » é igual a  $d^+(v) - d^-(v)$ .

## Exemplo



	a	b
1	-1	1
2	0	-1
3	1	0

### Teorema

*Para todo o grafo  $G = (V, E, \psi)$  finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$



## INTERMEZZO: ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS

### Teorema

*Para todo o grafo  $G = (V, E, \psi)$  finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

### Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de  $G$ :

## INTERMEZZO: ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS

### Teorema

*Para todo o grafo  $G = (V, E, \psi)$  finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

### Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de  $G$ :

- Para cada «linha  $v$ », a soma das entradas desta linha é igual ao  $d(v)$ .

### Teorema

*Para todo o grafo  $G = (V, E, \psi)$  finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

### Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de  $G$ :

- Para cada «linha  $v$ », a soma das entradas desta linha é igual ao  $d(v)$ . Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à  $\sum_{v \in V} d(v)$ .

### Teorema

*Para todo o grafo  $G = (V, E, \psi)$  finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

### Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de  $G$ :

- Para cada «linha  $v$ », a soma das entradas desta linha é igual ao  $d(v)$ . Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à  $\sum_{v \in V} d(v)$ .
- Para cada «coluna  $a$ », a soma das entradas desta coluna é igual à 2.

## INTERMEZZO: ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS

### Teorema

*Para todo o grafo  $G = (V, E, \psi)$  finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

### Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de  $G$ :

- Para cada «linha  $v$ », a soma das entradas desta linha é igual ao  $d(v)$ . Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à  $\sum_{v \in V} d(v)$ .
- Para cada «coluna  $a$ », a soma das entradas desta coluna é igual à 2. Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à  $2|E|$ . □

## INTERMEZZO: ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS

### Teorema

*Para todo o grafo  $G = (V, E, \psi)$  finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

### Corolário

*O número de vértices de grau ímpar é par.*

## INTERMEZZO: ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS

### Teorema

Para todo o grafo  $G = (V, E, \psi)$  finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

### Corolário

O número de vértices de grau ímpar é par.

### Teorema

Para todo o digrafo  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  finito,

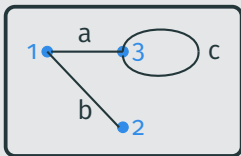
$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|.$$

# REPRESENTAÇÃO POR MATRIZES

## As matrizes de adjacência

- Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo (finito). A **matriz de adjacência** de  $G$  é a matriz do tipo  $\nu \times \nu$  com entrada  $(u, v)$  igual a **número de arestas entre  $u$  e  $v$  (cada lacete conta duas vezes)**.

## Exemplo



	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	0	2



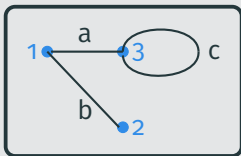
# REPRESENTAÇÃO POR MATRIZES

## As matrizes de adjacência

- Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo (finito). A **matriz de adjacência** de  $G$  é a matriz do tipo  $\nu \times \nu$  com entrada  $(u, v)$  igual a **número de arestas entre  $u$  e  $v$  (cada lacete conta duas vezes)**.

**Nota:** Esta matriz é simétrica e a soma sobre os elementos da coluna  $u$  (ou linha  $u$ ) é igual ao grau de  $u$ .

## Exemplo



	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	0	2

# REPRESENTAÇÃO POR MATRIZES

## As matrizes de adjacência

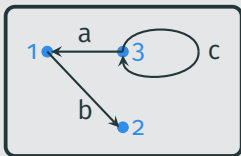
- Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo (finito). A **matriz de adjacência** de  $G$  é a matriz do tipo  $\nu \times \nu$  com entrada  $(u, v)$  igual a **número de arestas entre  $u$  e  $v$  (cada lacete conta duas vezes)**.

**Nota:** Esta matriz é simétrica e a soma sobre os elementos da coluna  $u$  (ou linha  $u$ ) é igual ao grau de  $u$ .

- Seja  $\vec{G} = (V, E, \psi)$  um digrafo (finito). A **matriz de adjacência** de  $\vec{G}$  é a matriz do tipo  $\nu \times \nu$  definida por

$$V \times V \mapsto \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto |\{a \in E \mid \psi(a) = (u, v)\}|.$$

## Exemplo



	1	2	3
1	0	1	0
2	0	0	0
3	1	0	1

## **4. HOMOMORFISMOS DE GRAFOS, GRAFOS ISOMORFOS E SUBGRAFOS**

# HOMOMORFISMOS DE GRAFOS

## Definição

Sejam  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  grafos. Um **homomorfismo** de  $G$  em  $H$  é um par  $f: V_G \longrightarrow V_H$  e  $h: E_G \longrightarrow E_H$  de funções tais que, para todos os  $e \in E_G$  e  $u, v \in V_G$ ,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \implies (\psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\}).$$

# HOMOMORFISMOS DE GRAFOS

## Definição

Sejam  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  grafos. Um **homomorfismo** de  $G$  em  $H$  é um par  $f: V_G \rightarrow V_H$  e  $h: E_G \rightarrow E_H$  de funções tais que, para todos os  $e \in E_G$  e  $u, v \in V_G$ ,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \implies (\psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se  $(u, v)$  em lugar de  $\{u, v\}$ .)

# HOMOMORFISMOS DE GRAFOS

## Definição

Sejam  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  grafos. Um **homomorfismo** de  $G$  em  $H$  é um par  $f: V_G \rightarrow V_H$  e  $h: E_G \rightarrow E_H$  de funções tais que, para todos os  $e \in E_G$  e  $u, v \in V_G$ ,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \implies (\psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se  $(u, v)$  em lugar de  $\{u, v\}$ .)

## Exemplos

- Para cada grafo  $G = (V, E, \psi)$ , as identidades  $\text{id}_V: V \rightarrow V$  e  $\text{id}_E: E \rightarrow E$  definem um homomorfismo de  $G$  em  $G$ .

# HOMOMORFISMOS DE GRAFOS

## Definição

Sejam  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  grafos. Um **homomorfismo** de  $G$  em  $H$  é um par  $f: V_G \rightarrow V_H$  e  $h: E_G \rightarrow E_H$  de funções tais que, para todos os  $e \in E_G$  e  $u, v \in V_G$ ,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \implies (\psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se  $(u, v)$  em lugar de  $\{u, v\}$ .)

## Exemplos

- Para cada grafo  $G = (V, E, \psi)$ , as identidades  $\text{id}_V: V \rightarrow V$  e  $\text{id}_E: E \rightarrow E$  definem um homomorfismo de  $G$  em  $G$ .
- As compostas de homomorfismos são homomorfismos.

# HOMOMORFISMOS DE GRAFOS

## Definição

Sejam  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  grafos. Um **homomorfismo** de  $G$  em  $H$  é um par  $f: V_G \rightarrow V_H$  e  $h: E_G \rightarrow E_H$  de funções tais que, para todos os  $e \in E_G$  e  $u, v \in V_G$ ,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \implies (\psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se  $(u, v)$  em lugar de  $\{u, v\}$ .)

## Nota

No caso de grafos simples, e denotando as arestas da forma « $uv$ », a função  $h$  acima é completamente determinada por  $f$ :

$$h(uv) = f(u)f(v).$$



# HOMOMORFISMOS DE GRAFOS

## Definição

Sejam  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  grafos. Um **homomorfismo** de  $G$  em  $H$  é um par  $f: V_G \rightarrow V_H$  e  $h: E_G \rightarrow E_H$  de funções tais que, para todos os  $e \in E_G$  e  $u, v \in V_G$ ,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \implies (\psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se  $(u, v)$  em lugar de  $\{u, v\}$ .)

## Nota

No caso de grafos simples, e denotando as arestas da forma « $uv$ », a função  $h$  acima é completamente determinada por  $f$ :

$$h(uv) = f(u)f(v).$$

Portanto, um homomorfismo entre grafos simples  $(V_G, E_G)$  e  $(V_H, E_H)$  é dado por uma função  $f: V_G \rightarrow V_H$  tal que, para todos os  $u, v \in V_G$ :

$$uv \in E_G \implies f(u)f(v) \in E_H.$$

# ISOMORFISMOS DE GRAFOS

## Definição

Um homomorfismo de  $G$  em  $H$  é um **isomorfismo** de  $G$  em  $H$  se tem um homomorfismo de grafos inverso.

## Definição

Um homomorfismo de  $G$  em  $H$  é um **isomorfismo** de  $G$  em  $H$  se tem um homomorfismo de grafos inverso.

## Nota

Portanto, um isomorfismo de  $G$  em  $H$  é um par  $f: V_G \longrightarrow V_H$  e  $h: E_G \longrightarrow E_H$  de funções bijetivas tais que, para todos os  $e \in E_G$  e  $u, v \in V_G$ ,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\}).$$

Um isomorfismo entre grafos simples  $(V_G, E_G)$  e  $(V_H, E_H)$  é dado por uma função bijetiva  $f: V_G \longrightarrow V_H$  tal que, para todos os  $u, v \in V_G$ :

$$uv \in E_G \iff f(u)f(v) \in E_H.$$

# ISOMORFISMOS DE GRAFOS

## Definição

Um homomorfismo de  $G$  em  $H$  é um **isomorfismo** de  $G$  em  $H$  se tem um homomorfismo de grafos inverso.

## Exemplos

- Para cada grafo  $G = (V, E, \psi)$ , as identidades  $\text{id}_V: V \longrightarrow V$  e  $\text{id}_E: E \longrightarrow E$  definem um isomorfismo de  $G$  em  $G$ .

## Definição

Um homomorfismo de  $G$  em  $H$  é um **isomorfismo** de  $G$  em  $H$  se tem um homomorfismo de grafos inverso.

## Exemplos

- Para cada grafo  $G = (V, E, \psi)$ , as identidades  $\text{id}_V: V \longrightarrow V$  e  $\text{id}_E: E \longrightarrow E$  definem um isomorfismo de  $G$  em  $G$ .
- Para cada isomorfismo de  $G$  em  $H$ , as funções  $f^{-1}: V_H \longrightarrow V_G$  e  $h^{-1}: E_H \longrightarrow E_G$  definem um isomorfismo de  $H$  em  $G$ .

## Definição

Um homomorfismo de  $G$  em  $H$  é um **isomorfismo** de  $G$  em  $H$  se tem um homomorfismo de grafos inverso.

## Exemplos

- Para cada grafo  $G = (V, E, \psi)$ , as identidades  $\text{id}_V: V \longrightarrow V$  e  $\text{id}_E: E \longrightarrow E$  definem um isomorfismo de  $G$  em  $G$ .
- Para cada isomorfismo de  $G$  em  $H$ , as funções  $f^{-1}: V_H \longrightarrow V_G$  e  $h^{-1}: E_H \longrightarrow E_G$  definem um isomorfismo de  $H$  em  $G$ .
- As compostas de isomorfismos são isomorfismos.

## Definição

(Di)grafos dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles.

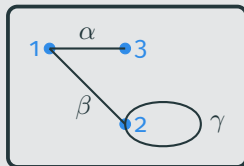
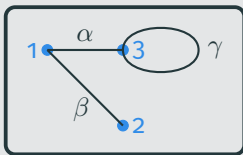
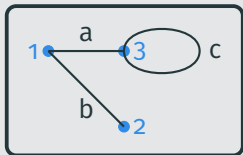
# GRAFOS ISOMORFOS

## Definição

(Di)grafos dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles.

## Nota

Intuitivamente, grafos isomorfos são «iguais a menos da etiquetação dos vértices e aresta».





## Definição

(Di)grafos dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles.

## Nota

Grafos isomorfos tem «as mesmas propriedades de grafos».

Mais concretamente, sendo o par  $f: V_G \longrightarrow V_H$  e  $h: E_G \longrightarrow E_H$  um isomorfismo entre os grafos  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  (finitos). Então:

## Definição

(Di)grafos dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles.

## Nota

Grafos isomorfos tem «as mesmas propriedades de grafos».

Mais concretamente, sendo o par  $f: V_G \longrightarrow V_H$  e  $h: E_G \longrightarrow E_H$  um isomorfismo entre os grafos  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  (finitos). Então:

- Os grafos têm a mesma ordem e a mesma dimensão:

$$\nu(G) = \nu(H) \quad \text{e} \quad \epsilon(G) = \epsilon(H).$$

## Definição

(Di)grafos dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles.

## Nota

Grafos isomorfos tem «as mesmas propriedades de grafos».

Mais concretamente, sendo o par  $f: V_G \longrightarrow V_H$  e  $h: E_G \longrightarrow E_H$  um isomorfismo entre os grafos  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  (finitos). Então:

- Os grafos têm a mesma ordem e a mesma dimensão:

$$\nu(G) = \nu(H) \quad \text{e} \quad \epsilon(G) = \epsilon(H).$$

- $G$  é simples se e só se  $H$  é simples.

## Definição

(Di)grafos dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles.

## Nota

Grafos isomorfos tem «as mesmas propriedades de grafos».

Mais concretamente, sendo o par  $f: V_G \longrightarrow V_H$  e  $h: E_G \longrightarrow E_H$  um isomorfismo entre os grafos  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  (finitos). Então:

- Os grafos têm a mesma ordem e a mesma dimensão:

$$\nu(G) = \nu(H) \quad \text{e} \quad \epsilon(G) = \epsilon(H).$$

- $G$  é simples se e só se  $H$  é simples.
- Vértices correspondentes têm o mesmo grau:

$$\text{para cada } v \in V_G, d_G(v) = d_H(\varphi(v)).$$

## Definição

(Di)grafos dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles.

## Nota

Grafos isomorfos tem «as mesmas propriedades de grafos».

Mais concretamente, sendo o par  $f: V_G \longrightarrow V_H$  e  $h: E_G \longrightarrow E_H$  um isomorfismo entre os grafos  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  (finitos). Então:

- Os grafos têm a mesma ordem e a mesma dimensão:

$$\nu(G) = \nu(H) \quad \text{e} \quad \epsilon(G) = \epsilon(H).$$

- $G$  é simples se e só se  $H$  é simples.
- Vértices correspondentes têm o mesmo grau:

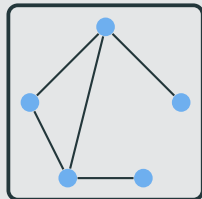
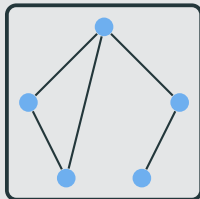
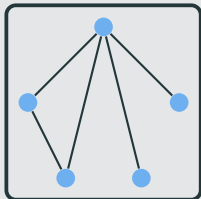
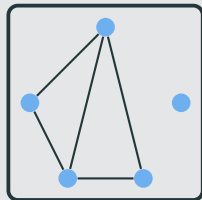
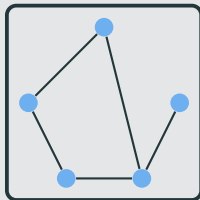
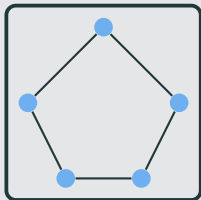
$$\text{para cada } v \in V_G, d_G(v) = d_H(\varphi(v)).$$

- Portanto:  $\Delta(G) = \Delta(H)$  e  $\delta(G) = \delta(H)$ .

# UM EXEMPLO

## Exemplo

Representação gráfica de todos os grafos simples não isomorfos, com 5 vértices e 5 arestas:



## Definição

Sejam  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  grafos. O grafo  $H$  diz-se **subgrafo** de  $G$  quando  $V_H \subseteq V_G$ ,  $E_H \subseteq E_G$  e  $\psi_H$  é a restrição de  $\psi_G$  ao conjunto  $E_H$ . Neste caso também se diz que  $G$  é um **supergrafo** de  $H$ .

## Definição

Sejam  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  grafos. O grafo  $H$  diz-se **subgrafo** de  $G$  quando  $V_H \subseteq V_G$ ,  $E_H \subseteq E_G$  e  $\psi_H$  é a restrição de  $\psi_G$  ao conjunto  $E_H$ . Neste caso também se diz que  $G$  é um **supergrafo** de  $H$ .

## Nota

Cada grafo é subgrafo de si próprio.



## Definição

Sejam  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  grafos. O grafo  $H$  diz-se **subgrafo** de  $G$  quando  $V_H \subseteq V_G$ ,  $E_H \subseteq E_G$  e  $\psi_H$  é a restrição de  $\psi_G$  ao conjunto  $E_H$ . Neste caso também se diz que  $G$  é um **supergrafo** de  $H$ .

## Nota

Cada grafo é subgrafo de si próprio. Se  $H$  é um subgrafo de  $G$  e  $H \neq G$ , então diz-se que  **$H$  é um subgrafo próprio de  $G$** .

## Definição

Sejam  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  e  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  grafos. O grafo  $H$  diz-se **subgrafo** de  $G$  quando  $V_H \subseteq V_G$ ,  $E_H \subseteq E_G$  e  $\psi_H$  é a restrição de  $\psi_G$  ao conjunto  $E_H$ . Neste caso também se diz que  $G$  é um **supergrafo** de  $H$ .

## Nota

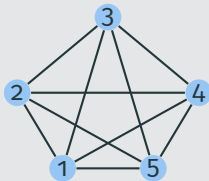
Cada grafo é subgrafo de si próprio. Se  $H$  é um subgrafo de  $G$  e  $H \neq G$ , então diz-se que  **$H$  é um subgrafo próprio de  $G$** .

## Definição

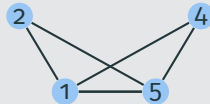
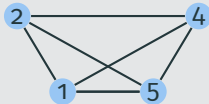
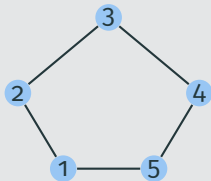
Um subgrafo  $H = (V_H, E_H, \psi_H)$  de  $G = (V_G, E_G, \psi_G)$  diz-se **abrangente** quando  $V_H = V_G$ .

## Exemplos

Considere o seguinte grafo  $G$ .



Alguns subgrafos de  $G$ :



### Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo e sejam  $\hat{V} \subseteq V$  e  $\hat{E} \subseteq E$ .

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo e sejam  $\hat{V} \subseteq V$  e  $\hat{E} \subseteq E$ .

- O **subgrafo  $G[\hat{V}]$  de  $G$  induzido por  $\hat{V}$**  é o grafo cujo conjunto de vértices é  $\hat{V}$  e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de  $G$  com extremos em  $\hat{V}$ .

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo e sejam  $\hat{V} \subseteq V$  e  $\hat{E} \subseteq E$ .

- O **subgrafo  $G[\hat{V}]$  de  $G$  induzido por  $\hat{V}$**  é o grafo cujo conjunto de vértices é  $\hat{V}$  e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de  $G$  com extremos em  $\hat{V}$ .
- O **subgrafo  $G[\hat{E}]$  de  $G$  induzido por  $\hat{E}$**  é o grafo cujo conjunto de arestas é  $\hat{E}$  e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de  $\hat{E}$ .

# SUBGRAFOS INDUZIDOS

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo e sejam  $\hat{V} \subseteq V$  e  $\hat{E} \subseteq E$ .

- O **subgrafo  $G[\hat{V}]$  de  $G$  induzido por  $\hat{V}$**  é o grafo cujo conjunto de vértices é  $\hat{V}$  e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de  $G$  com extremos em  $\hat{V}$ .
- O **subgrafo  $G[\hat{E}]$  de  $G$  induzido por  $\hat{E}$**  é o grafo cujo conjunto de arestas é  $\hat{E}$  e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de  $\hat{E}$ .

## Nota

Tem-se  $G = G[V]$  mas em geral  $G[E] \neq G$ . Por exemplo, para o grafo  $G$



o grafo  $G[E]$  é o grafo



De facto,  $G[E] = G$  se e só se  $G$  não têm vértices isolados.

# SUBGRAFOS INDUZIDOS

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo e sejam  $\hat{V} \subseteq V$  e  $\hat{E} \subseteq E$ .

- O **subgrafo  $G[\hat{V}]$  de  $G$  induzido por  $\hat{V}$**  é o grafo cujo conjunto de vértices é  $\hat{V}$  e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de  $G$  com extremos em  $\hat{V}$ .
- O **subgrafo  $G[\hat{E}]$  de  $G$  induzido por  $\hat{E}$**  é o grafo cujo conjunto de arestas é  $\hat{E}$  e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de  $\hat{E}$ .

## Nota

- Por definição,  $G[V - \hat{V}]$  é o sugrafo gerado pelo complemento de  $\hat{V}$ , e escrevemos simplesmente  $G - \hat{V}$ . Ainda mais, se  $\hat{V} = \{v\}$ , escreve-se simplesmente  $G - v$ .



# SUBGRAFOS INDUZIDOS

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo e sejam  $\hat{V} \subseteq V$  e  $\hat{E} \subseteq E$ .

- O **subgrafo  $G[\hat{V}]$  de  $G$  induzido por  $\hat{V}$**  é o grafo cujo conjunto de vértices é  $\hat{V}$  e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de  $G$  com extremos em  $\hat{V}$ .
- O **subgrafo  $G[\hat{E}]$  de  $G$  induzido por  $\hat{E}$**  é o grafo cujo conjunto de arestas é  $\hat{E}$  e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de  $\hat{E}$ .

## Nota

- Por definição,  $G[V - \hat{V}]$  é o subgrafo gerado pelo complemento de  $\hat{V}$ , e escrevemos simplesmente  $G - \hat{V}$ . Ainda mais, se  $\hat{V} = \{v\}$ , escreve-se simplesmente  $G - v$ .
- Denota-se por  $G - \hat{E}$  o subgrafo **abrangente** cujo conjunto de arestas é  $E - \hat{E}$ . Se  $\hat{E} = \{e\}$  escreve-se simplesmente  $G - e$ .

# SUBGRAFOS INDUZIDOS

## Definição

Seja  $G = (V, E, \psi)$  um grafo e sejam  $\hat{V} \subseteq V$  e  $\hat{E} \subseteq E$ .

- O **subgrafo  $G[\hat{V}]$  de  $G$  induzido por  $\hat{V}$**  é o grafo cujo conjunto de vértices é  $\hat{V}$  e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de  $G$  com extremos em  $\hat{V}$ .
- O **subgrafo  $G[\hat{E}]$  de  $G$  induzido por  $\hat{E}$**  é o grafo cujo conjunto de arestas é  $\hat{E}$  e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de  $\hat{E}$ .

## Nota

- Por definição,  $G[V - \hat{V}]$  é o subgrafo gerado pelo complemento de  $\hat{V}$ , e escrevemos simplesmente  $G - \hat{V}$ . Ainda mais, se  $\hat{V} = \{v\}$ , escreve-se simplesmente  $G - v$ .
- Denota-se por  $G - \hat{E}$  o subgrafo **abrangente** cujo conjunto de arestas é  $E - \hat{E}$ . Se  $\hat{E} = \{e\}$  escreve-se simplesmente  $G - e$ .

**Atenção:** Em geral  $G[E - \hat{E}]$  e  $G - \hat{E}$  são distintos.