



1 Primitivas imediatas e quase imediatas

Se $f = F'$, sendo F (geralmente) uma *função elementar*, diz-se que a fórmula

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

apresenta uma **primitiva quase imediata** (ou só **imediate**, quando $g(x) = x$)

De facto, $(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$, desde que g seja diferenciável

- A notação das seguintes tabelas obtém-se definindo $u = g(x)$ (e $u' = g'(x)$):

a derivada de $F(u)$ é $f(u)u'$ e uma primitiva de $f(u)u'$ é $F(u)$

Além disso, através da equivalência formal $u' = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow u'dx = du$ pode-se transformar

a primitiva quase imediata $\int f(u)u'dx$ na primitiva imediata $\int f(u)du$

Exemplo: se $f(x) = \cos x$, com $F(x) = \sin(x)$, e $u = x^2$, com $u' = 2x$, então

$$\int \cos(x^2)2xdx = \int \cos(u)u'dx = \left[\int \cos(u)du \right] = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

2 Tabela das derivadas de composições

Função	Derivada
u^r	$r u^{r-1} u'$
$\ln u $	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u' e^u$
a^u	$u' a^u \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sinh u$	$u' \cosh u$
$\cosh u$	$u' \sinh u$

Função	Derivada
$\operatorname{tg} u$	$u' \sec^2 u$
$\operatorname{cotg} u$	$-u' \operatorname{cosec}^2 u$
$\sec u$	$u' \sec u \operatorname{tg} u$
$\operatorname{cosec} u$	$-u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$
$\arcsen u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arccotg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$

3 Tabela das primitivas quase imediatas

Função	Primitiva
$u^r u'$	$\frac{u^{r+1}}{r+1} \quad (r \neq -1)$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\frac{a^u}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$
$u' \cosh u$	$\sinh u$
$u' \sinh u$	$\cosh u$

Função	Primitiva
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$
$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$
$u' \sec u \operatorname{tg} u$	$\sec u$
$u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{cosec} u$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsen u$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$
$u' \sec u$	$\ln \sec u + \operatorname{tg} u $
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u $



4 Primitivas quase imediatas: exercícios

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \int x(1+x^2)^9 dx & \text{b)} \int \sin x \cos^5 x dx & \text{c)} \int \frac{x^5}{1+x^6} dx & \text{d)} \int \operatorname{tg} x dx \\
 \text{e)} \int \frac{1}{1+4x^2} dx & \text{f)} \int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x dx & \text{g)} \int x 7^{x^2} dx & \text{h)} \int \operatorname{tg}^2 x dx \\
 \text{i)} \int \frac{x}{x^2+9} dx & \text{j)} \int \frac{1}{x^2+9} dx & \text{k)} \int \frac{1}{(x+9)^2} dx & \text{l)} \int \frac{x^2}{x^2+9} dx \\
 \text{m)} \int x^3 \sqrt{1-x^4} dx & \text{n)} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx & \text{o)} \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx & \text{p)} \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\
 \text{q)} \int \frac{\ln x}{x} dx & \text{r)} \int \frac{5}{x \ln^3 x} dx & \text{s)} \int \frac{1}{x \ln x} dx & \text{t)} \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \\
 \text{u)} \int \sin^3 x \cos^5 x dx & \text{v)} \int \frac{1}{\sec x - \cos x} dx & \text{w)} \int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx & \text{x)} \int \frac{1}{1+e^x} dx
 \end{array}$$

5 Uma fórmula de trigonometria

$$\boxed{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}$$

$$(\text{donde } \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \text{ e } \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x)$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(A)} \begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \end{cases} & \Rightarrow & \text{(B)} \begin{cases} \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \end{cases}
 \end{array}$$

Primitivas

- para produtos de $\sin(nx)$ e $\cos(mx)$, $m, n \in \mathbb{N}$, basta usar (A)
- para $\sin^n x \cos^m x$, $m, n \in \mathbb{N}$, um deles ímpar, usar $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- para $\sin^n x \cos^m x$, $m, n \in \mathbb{N}$, ambos pares, usar (B)

Calcular: (a) $\int \sin(3x) \sin(5x) dx$ (b) $\int \cos^2 x dx$ (c) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

em [\[2.1 Primitivas - parte 2\]](#) ver [Primitivação do produto de duas funções](#)

6 Integração por partes

$$\boxed{\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx}$$

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \int x \sin x dx & \text{(b)} \int x e^{-x} dx & \text{(c)} \int \ln x dx & \text{(d)} \int \operatorname{arctg} x dx \\
 \text{(e)} \int \sin^2 x dx & \text{(f)} \int e^x \cos x dx & \text{(g)} \int x^3 e^{x^2} dx & \text{(h)} \int x \arcsin x^2 dx
 \end{array}$$

Mais primitivas trigonométricas ...

- $(\operatorname{co}) \operatorname{tg}^n x$, $n \in \mathbb{N}$: destaca-se, substituindo, $(\operatorname{co}) \operatorname{tg}^2 x = (\operatorname{co}) \sec^2 x - 1$
- $(\operatorname{co}) \sec^n$, n par: destaca-se $(\operatorname{co}) \sec^2 x$ e, noutro fator, $(\operatorname{co}) \sec^2 x = (\operatorname{co}) \operatorname{tg}^2 x + 1$
- $(\operatorname{co}) \sec^n$, n ímpar: por partes, *primitivando* o fator $(\operatorname{co}) \sec^2 x$

Calcular: (i) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ (j) $\int \operatorname{cosec}^4 x dx$ (k) $\int \sec^3 x dx$

em [\[2.1 Primitivas - parte 2\]](#) ver [Primitivação de funções racionais](#)



7 Decomposição e primitivação de funções racionais

- Pode-se escrever uma função racional $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$ na forma $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$, onde q é o quociente e r o resto da divisão de n por d , ou seja, $\frac{r(x)}{d(x)}$ é própria
- Se d_1 e d_2 não têm fatores em comum, a função racional própria $f(x) = \frac{n(x)}{d_1(x)d_2(x)}$ tem uma única decomposição em funções racionais próprias $f(x) = \frac{n_1(x)}{d_1(x)} + \frac{n_2(x)}{d_2(x)}$
- A função racional própria $f(x) = \frac{n(x)}{d^m(x)}$, $m \in \mathbb{N}$, admite uma única decomposição $f(x) = \frac{n_1(x)}{d(x)} + \frac{n_2(x)}{d^2(x)} + \dots + \frac{n_m(x)}{d^m(x)}$ com grau $n_i < \text{grau } d$ para $i = 1, \dots, m$

Primitivas elementares, com $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $C \in \mathbb{R}$ (verificar!)

$$\int \frac{1}{(x+a)^n} dx = \begin{cases} \ln|x+a| + C & n = 1 \\ \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C & n > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x+\gamma}{(x+\alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{1}{2} \ln((x+\alpha)^2 + \beta^2) + \frac{\gamma-\alpha}{\beta} \arctg \frac{x+\alpha}{\beta} + C$$

Exercício: calcula

(a) $\int \frac{x^4-6}{x^3-2x^2} dx$

(b) $\int \frac{3x}{x^3-3x^2+4} dx$

(c) $\int \frac{x^2-1}{2x^3+6x^2+5x} dx$

8 Método de Hermite-Ostrogradski (facultativo)

O caso de potências de fatores irredutíveis de grau 2 no denominador é complicado: resolve-se com *substituições trigonométricas* ou com uma *fórmula de recorrência*

O método de Hermite-Ostrogradski elimina essa dificuldade:

seja $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$ uma função racional própria; então, se

- $d_s(x)$ é o produto dos fatores de $d(x)$ sem considerar as multiplicidades e
- $d_r(x) = d(x)/d_s(x)$ é o produto dos restantes fatores,

existem, e são únicas, as frações **próprias** $\frac{n_s(x)}{d_s(x)}$ e $\frac{n_r(x)}{d_r(x)}$ tais que $f(x) = \frac{n_s(x)}{d_s(x)} + \left(\frac{n_r(x)}{d_r(x)}\right)'$

Observação: repare-se que $\int f(x) dx = \int \frac{n_s(x)}{d_s(x)} dx + \frac{n_r(x)}{d_r(x)}$

Para simplificar as contas, convém misturar os dois métodos apresentados:

- aplicar o método das frações simples a todos os fatores de grau 1
- aplicar o método de Hermite-Ostrogradski a cada fator de grau 2

9 Comparação de decomposições

Exemplo: são apresentadas três decomposições da mesma função racional própria

$$\begin{aligned} \frac{4(1-x)}{x^3(x^2+2)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+2} + \frac{Fx+G}{(x^2+2)^2} && \left(\begin{array}{l} \text{frações} \\ \text{simples} \end{array} \right) \\ &= \frac{ax^2+bx+c}{x(x^2+2)} + \left(\frac{dx^3+ex^2+fx+g}{x^2(x^2+2)} \right)' && \left(\begin{array}{l} \text{Hermite} \\ \text{Ostrogradski} \end{array} \right) \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+2} + \left(\frac{\phi x + \gamma}{x^2+2} \right)' && \left(\begin{array}{l} \text{f.s. \&} \\ \text{H.O.} \end{array} \right) \\ \Rightarrow \int \frac{4(1-x)}{x^3(x^2+2)^2} dx &= \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+2} dx + \frac{\phi x + \gamma}{x^2+2} \end{aligned}$$

Exercícios:

1. Calcula os coeficientes das diferentes decomposições e a primitiva do exemplo

2. Calcula (a) $\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2} dx$

(b) $\int \frac{x+1}{x(x^2-2x+2)^2} dx$