

CLASE PRÁCTICA 2

EJERCICIO 2.1 Adapte el script de MATLAB del paseo aleatorio en dos dimensiones proporcionado como ejemplo en clase de teoría, para comprobar que los resultados son extrapolables a tres dimensiones.

Recuerde que el resultado estadístico principal del paseo aleatorio es que si damos un paseo de N pasos de longitud r en direcciones aleatorias cubriendo una distancia total de Nr , acabamos el paseo (en media) a una distancia \sqrt{Nr} del punto de comienzo.

Nota: Para representar la trayectoria del paseo 3D utilice la función de MATLAB `plot3`.

EJERCICIO 2.2

- (a) Adapte el script de MATLAB del paseo aleatorio en dos dimensiones proporcionado como ejemplo en clase de teoría de manera que, en cada paso, los movimientos posibles sean, equiprobablemente, hacia norte, sur, este u oeste:

Norte (N)	→ +1 en coordenada y	Este (E)	→ +1 en coordenada x
Sur (S)	→ -1 en coordenada y	Oeste (O)	→ -1 en coordenada x

Ilustre gráficamente la trayectoria aleatoria seguida de esta manera en un paseo de 500 pasos (con longitud de paso 1).

Realice 1000 paseos aleatorios de 500 pasos cada uno y compruebe si la distancia media respecto al punto de comienzo cumple la estadística esperada.

- (b) Suponga la situación en la que un excursionista sin brújula intenta ir hacia el norte y que puede dar pasos en cualquiera de las direcciones anteriores. Hay estudios que demuestran que, en situaciones como ésta, hay tendencia a ir derivando hacia la derecha. Suponga que, en cada paso, las probabilidades de las distintas direcciones son:

	N: 80%	
O: 5%	---- ----	E: 15%
	S: 0%	

cifras que intentan ser consistentes con las apreciaciones anteriores.

Ilustre gráficamente la trayectoria aleatoria seguida de esta manera en un paseo de 500 pasos, (con longitud de paso 1).

Realice 1000 paseos aleatorios de 500 pasos cada uno. ¿A qué distancia (en promedio) acaba el excursionista del punto que idealmente esperaba (500 pasos al norte del punto de origen)?

EJERCICIO 2.3 Utilice el método de Monte Carlo de integración por valor medio para determinar la siguiente integral tridimensional:

$$\int_0^{0.9} dx \int_0^1 dy \int_0^{1.1} dz (x^2 + y^2 - z^2)$$

- (a) Evalúe la integral una vez muestreando 10000 veces el valor del integrando ($N=1e4$).
- (b) Repita el apartado anterior evaluando la integral mediante Monte Carlo 500 veces ($n_{\text{exp}} = 500$). Determine la media y la desviación standard de los resultados obtenidos.
- (c) Determine el error relativo del resultado obtenido respecto a la evaluación de la integral mediante la función de MATLAB `triplequad` (`l_mat`), que permite la integración numérica de funciones tridimensionales.

- (d) El error en la integración numérica por Monte Carlo disminuye cuando aumenta el número de muestras N que se toman del valor del integrando. Compruebe esto de la siguiente manera:

Evalúe la integral por Monte Carlo con $N = 1e2, 5e2, 1e3, 5e3, 1e4, 5e4$ y $1e5$ y corriendo 500 veces cada experimento ($n_{\text{exp}} = 500$). Determine la desviación standard de los valores obtenidos para cada N usado (σ_N) y dibuje:

- σ_N frente a N , con escala logarítmica en el eje x
- σ_N frente a $1/\sqrt{N}$, en escala lineal

EJERCICIO 2.4 El Carbono-14 (^{14}C) es un radio-isótopo del Carbono descubierto en 1940 y que, como sabrá, se utiliza en la datación de especímenes orgánicos. Su constante de desintegración es $\lambda = 0.000120968$, medida en $1/\text{años}$.

- (a) Adapte el script de MATLAB que se usó en clase para ilustrar genéricamente el proceso aleatorio de desintegración radiactiva al caso específico del ^{14}C .

Asuma que inicialmente el número de isótopos de ^{14}C es $N_0 = 10^4$ y obtenga la representación $N(t)$ frente a t (en años) usando escala logarítmica en el eje y .

- (b) Si el número de partículas $N(t)$ es alto, el proceso aleatorio de desintegración se aproxima a una ley exponencial:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t) \Rightarrow \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Compare gráficamente los resultados obtenidos a partir de la ecuación anterior con los que se obtienen considerando la verdadera naturaleza aleatoria del proceso de desintegración.

Compruebe, a partir de la ley exponencial, que la semi-vida del ^{14}C (es decir, el tiempo que tarda el número de partículas en reducirse al 50% por desintegración radioactiva) es de 5730 años.

- (c) El ^{14}C se usa en la datación de especímenes orgánicos, basados en la Química del Carbono. De manera simplificada, el procedimiento consiste básicamente en medir la concentración de ^{14}C de entre el Carbono presente en la muestra a datar (que llamaremos S) y compararlo con la concentración $^{14}\text{C}/\text{C}$ de muestras orgánicas modernas (que llamaremos M). Para ello se utiliza como referencia estandarizada la concentración $^{14}\text{C}/\text{C}$ del año 1950, $M = 1.176 \times 10^{-12}$ (algo más de 1 parte por billón). La edad de la muestra a datar se calcula de manera simplificada como:

$$t(BP) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{S}{M}\right)$$

donde $t(BP)$ es la edad en años “antes del presente” (del inglés, *Before Present*), tomando como “presente” el año 1950.

Represente gráficamente $t(BP)$ frente a la concentración de $^{14}\text{C}/\text{C}$ normalizada al año 1950 (S/M).

- (d) El método de datación por ^{14}C es la técnica basada en isótopos más fiable para conocer la edad de muestras orgánicas de menos de 60.000 años de antigüedad (en torno a 10 semi-vidas del ^{14}C). Así, mediante espectroscopía de masas (que se considera la técnica de datación por ^{14}C más precisa), se pueden datar muestras con sólo unos 40.000 átomos de ^{14}C con un error de ± 40 años.

En base a lo visto hasta ahora, discuta si el límite de 60.000 años en la datación de muestras se debe o no a que el número de átomos de ^{14}C es demasiado bajo para cumplir la ley exponencial de desintegración.