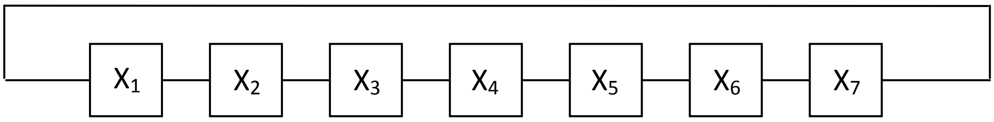
MÉTODOS NUMÉRICOS Y DE SIMULACIÓN

Enunciado de Prácticas TEMA 3. Autómatas Celulares y Fractales

AUTOMATAS CELULARES

Ejercicio 1

Determinados Autómatas Celulares (CAs) unidimensionales sirven para generar patrones pseudoaleatorios (secuencias aleatorias reproducibles mediante simulación). Considere un CA de 7 celdas, siguiendo el esquema de la figura. Cada celda tiene dos vecinos: uno a su izquierda y otro a su derecha.



Los valores posibles de cada celda son 1 ó 0. Las reglas de transición (valor futuro de cada celda) dependen del valor actual de cada celda y de sus vecinos, indicándose en la siguiente tabla de verdad:

Patrón actual para una celda y sus vecinos (x_{j-1} x_j x_{j+1})	111	110	101	100	011	010	001	000
Nuevo estado para la celda central (x_j)	0	0	0	1	1	1	1	0

Formalmente, la tabla de verdad anterior se puede implementar con dos operadores lógicos OR y XOR de la forma siguiente: $x_j=x_{j-1}$ XOR (x_j OR x_{j+1}).
La operación OR se define como: *a* OR *b* = 0 sii *a*=*b*=0; en otro caso vale 1.
La operación XOR se define como: *a* XOR *b* = 0 sii *a*=*b*; en otro caso vale 1.
Dichas funciones OR y XOR no hay que definirlas, sino que ya existen como comandos de MATLAB o bloques de SIMULINK.

Determine la evolución del autómata con MATLAB en los siguientes casos:

a) Todas las celdas tienen el mismo valor (1 ó 0)
b) Distintas distribuciones arbitrarias de 1s y 0s ¿Qué características tienen las secuencias generadas?

Ejercicio 2 (Complejidad Media)

Se trata de modelar con CAs un ecosistema formado por predadores (tiburones) y presas (peces) en el océano (celdas vacías). Se parte de una distribución aleatoria de peces (50% de las celdas, valor +1), tiburones (25%, valor -1) y celdas vacías (25%, valor 0) en un grid de 100x200 celdas (20000 celdas).

Regla de reproducción:

Si una celda está vacía y tiene 4 ó más vecinos de una especie y 3 ó más de ellos están en edad fértil (>1 para peces, >2 para tiburones), entonces se crea en la celda un individuo de esa especie, con edad 1.

Reglas para los peces:

Si un pez tiene más de 5 vecinos tiburones, muere engullido

Si un pez tiene 8 vecinos peces, el pez muere por sobrepoblación (falta de alimento)

Si el pez no muere, incrementa en edad (pasa de valor +j a valor +j+1), viviendo a lo máximo 10 unidades de tiempo

Reglas para los tiburones:

Si un tiburón está rodeado por 6 ó más tiburones y ningún pez, muere de hambre

Un tiburón tiene 1/32 (0.031) posibilidades de morir debido a causas aleatorias

Si un tiburón no muere, incrementa su edad (pasa de valor -k a valor –k-1), viviendo a lo máximo 20 unidades de tiempo

Realice un conjunto de simulaciones que muestren el comportamiento estacionario (>100 unidades de tiempo) del ecosistema, modificando en cada caso la distribución inicial.
Sugerencia: modifique el fichero Life2D para obtener el código final

Ejercicio 3 (Complejidad Alta)

Los sistemas de seguimiento por desprendimiento de calor son ampliamente usados, desde víboras del desierto, hasta sistemas de seguimiento de misiles. Se trata de modelar con CAs un sistema de este tipo, formado por 100x100 celdas cuadradas, todas ellas vacías a excepción de dos, la fuente de calor (objetivo) y el rastreador.

De acuerdo con la Ley de Newton de calentamiento y enfriamiento, la difusión del calor se modela a través del cambio de temperatura que sufre el objeto en relación a su entorno. En un modelo de difusión dinámico, el cambio de temperatura (ΔT) en una celda vacía es proporcional a la suma de las diferencias de temperatura entre los vecinos y la temperatura de la celda, según la ecuación:

$$\Delta T_t = r\sum_{j=1}^{8}(T_{j,t} - T_t)$$

Así, la temperatura estimada de la celda en un paso de tiempo es:

$$\mathrm{T}_{t+\Delta t} = \mathrm{T}_t + \Delta T_t = (1-8r)T_t + r\sum_{j=1}^{8}T_{j,t}$$

Considere inicialmente que todas las celdas, incluida la del rastreador, están a temperatura ambiente (25ºC), la temperatura del objetivo es 45ºC. Suponga que el objetivo se mueve aleatoriamente a una de sus vecinas en cada instante de tiempo. El rastreador se mueve en cada instante de tiempo hacia su celda vecina con mayor temperatura. Considere r=0.1.

A partir de una situación inicial aleatoria para el rastreador y el objetivo, realice un conjunto de simulaciones que muestren el proceso de búsqueda y captura.

FRACTALES

Ejercicio 4

Consideremos el problema del crecimiento de la población. Si r es el porcentaje de crecimiento y P es la población actual, la población de la próxima generación será:

$$P_{next} = (1+r) \cdot P$$

De acuerdo con esta fórmula, la población crecerá indefinidamente (si r>0, P→∞). Dada la limitación en recursos, la población está necesariamente limitada, de forma que a medida que se va alcanzando un límite máximo (P=1), la razón de crecimiento r decrece hasta valores próximos a 0. Matemáticamente se puede conseguir si multiplicamos r por (1–P), resultando una razón de crecimiento r(1–P). La fórmula de arriba queda como:

$$P_{next} = [1 + r(1-P)] \cdot P$$

Aplicando esta fórmula, determine la evolución de la población a partir de una población inicial P=0.5 tras muchas (100) generaciones en los siguientes casos:

a) r=1
b) r=2.25
c) r=2.5
d) r=3
e) Dibuje los valores de población finales frente a r, considerando que r varía de 1.9 a 3 (en pasos muy pequeños). Razone por qué son aplicables a este problema los términos de bifurcación, caos y fractal (la figura se conoce como Fractal de Feigenbaum).

Ejercicio 5 (Complejidad Media)

Un fractal de gran interés es el set de Cantor. A partir de una recta de longitud unidad (C_1), se elimina el tercio central. De los dos segmentos que quedan (C_2) se vuelve a eliminar el tercio central, quedando C_3. La eliminación iterativa (n→∞) del tercio central del set anterior genera el set de Cantor.

$$C_1 = [0,1]$$

$$C_2 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$$

$$C_3 = \left([0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\right) \cup \left([\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]\right)$$

...

$$C_n = \left([0,\frac{1}{3^{n-1}}] \cup [\frac{2}{3^{n-1}},\frac{1}{3^{n-2}}]\right) \cup \ldots \cup \left([\frac{2}{3^{n-2}},\frac{3^{n-2}-2}{3^{n-1}}] \cup [\frac{3^{n-2}-1}{3^{n-1}},1]\right)$$

a) Genere un código MATLAB que dibuje el set de Cantor para n=5 y 10
b) Determine la longitud y dimensionalidad del set de Cantor.

Nota: la sección transversal de los anillos de Saturno, sigue fielmente un set de Cantor.