Métodos Numéricos y de Simulación

TEMA 3

Autómatas Celulares y Fractales

Departamento de Electrónica y Electromagnetismo
Universidad de Sevilla

Indice

- Autómatas Celulares
- Fractales

¿Qué son los Autómatas Celulares?

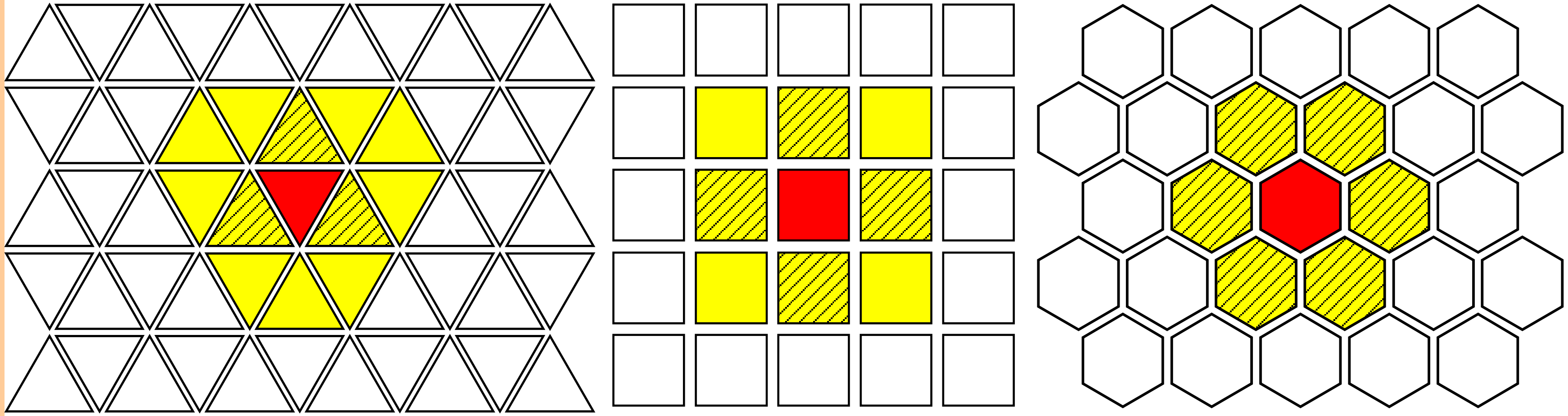
- Cellular automata (CA) – modelos simples para estudiar el comportamiento de sistemas complejos en diferentes campos de la ciencia (física, matemáticas, informática, química, biología, psicología, ciencias sociales, etc)
- CA son sistemas dinámicos discretos, cuya operación puede ser completamente descrita en términos de interacciones locales
- CA son el paradigma de la computación paralela

Definición de Autómata Celular

Autómata Celular A es un conjunto de 4 objetos $A = \langle G, Z, N, f \rangle$, donde

- G – grid, conjunto de celdas
- Z – conjunto de posibles estados de celdas
- N – conjunto que describe el vecindario de las celdas
- f – función de transición, reglas del autómata:
  - $Z^{|N|+1} \rightarrow Z$ (para CAs “con memoria”)
  - $Z^{|N|} \rightarrow Z$ (para CAs “sin memoria”)

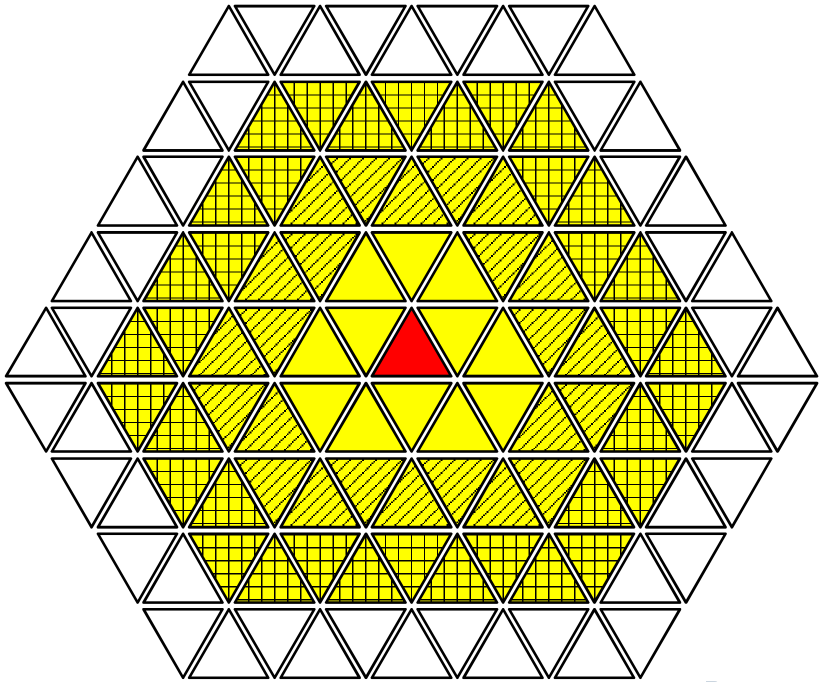
Ejemplos de Grid Bidimensional

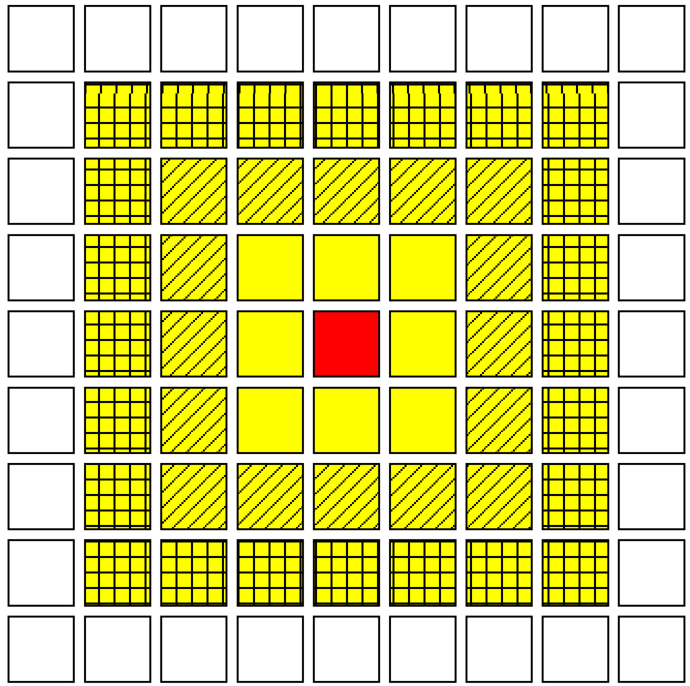


- Las celdas que tienen un eje común con una celda son sus “vecinos principales” (rayadas)
- El conjunto de vecinos de una celda *a*, que puede ser encontrado de acuerdo con *N*, se denota como *N*(*a*)

Anillos

- $R(a,i)$ es el i-ésimo conjunto de celdas que rodean concéntricamente a una dada *a*
- La distancia entre dos celdas *a* y *b* es $D(a,b)=i:a\in R(b,i)$





Propiedades básicas de los CAs

- La función de transición *f* es local
- El sistema es similar para todas las celdas
- Todas las celdas obtienen sus nuevos valores simultáneamente, tras un paso de tiempo discreto, después de que todos los nuevos valores fueron calculados para todas las celdas
- Sirven para expresar:
  - relaciones de vecindario
  - evolucion temporal

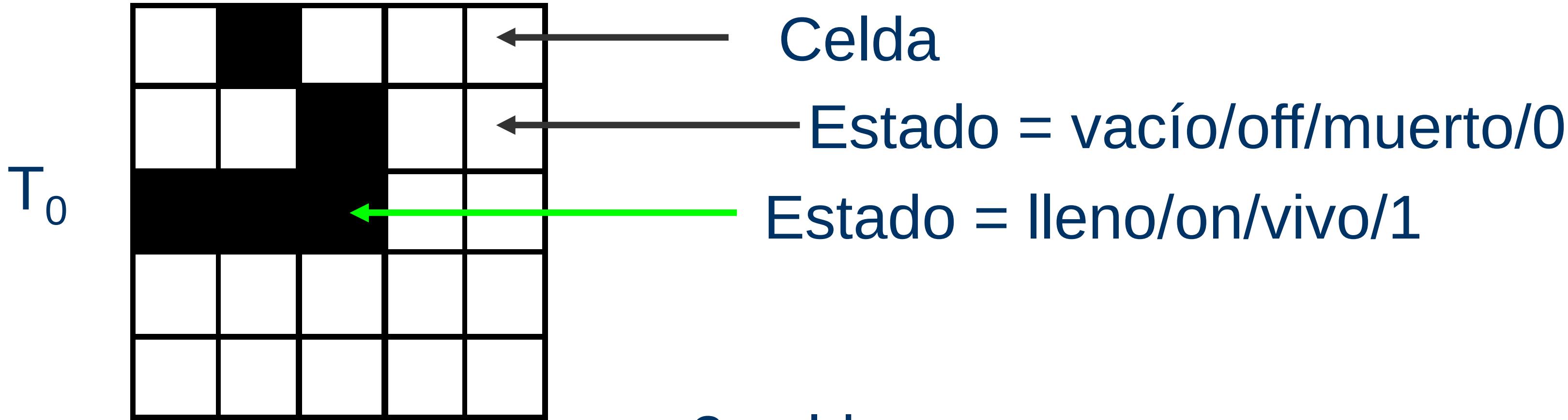
Aplicaciones de los CAs

- Paseo aleatorio (Movimiento Browniano, …)
- Difusión (Propagación de fuego, …)
- Computación bio-inspirada
  - Movimientos de hormigas
  - Juego de la vida
  - Relación predador-presa
- …

Juego de la vida (Conway, 1970)

- Estados de las celdas: Z=0 (muerta); Z=1 (viva)
- Reglas o función de transicion (f):
  1. Si una celda está “muerta” (Z=0) y exactamente tres de sus vecinas están “vivas” (Z=1) , entonces la celda “nace” (Z=1) en el siguiente paso de tiempo. En otro caso, sigue “muerta” (Z=0)
  2. Si una celda está viva (Z=1) y dos o tres de sus vecinas están vivas (Z=1) seguirá viva (Z=1) en el siguiente paso de tiempo. En otro caso, muere (Z=0)
- Un conjunto de reglas tan simple como este puede producir resultados impredecibles

Juego de la vida (Grid 5x5)



2 celdas mueren
2 celdas nacen
21 celdas siguen en su estado

C:\Users\Usuario\
ıments\MATLAB\li·

Tipos de resultados (Wolfram)

Dependiendo de la regla de transición, el número de celdas y la condición inicial, la evolución conduce a:

1. Un estado homogéneo
2. Un conjunto de estados estables separados o estructuras periódicas
3. Un patrón caótico
4. Estructuras complejas localizadas, incluso de larga vida

Variantes: Go (围棋), un juego milenario

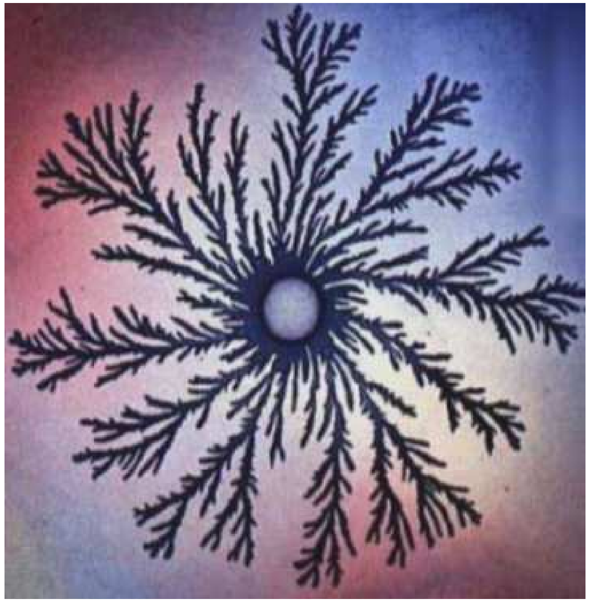
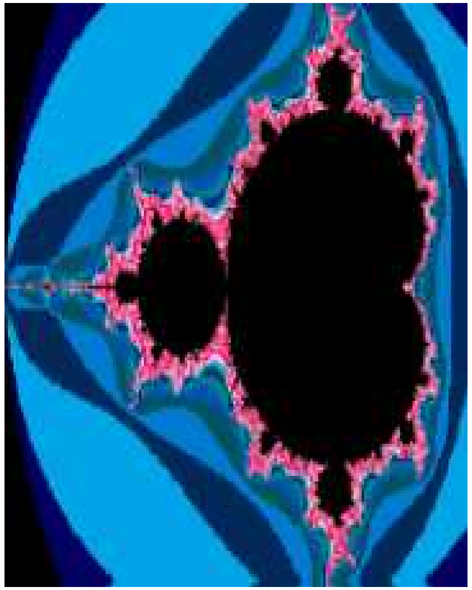
- Matriz 19x19
- Estados de las celdas:
  - blanca, negra, vacía
- Regla o función de transición (f):

Una piedra o cadena de piedras del mismo color es capturada y retirada del juego si después de una jugada, se encuentra completamente rodeada por piedras del color contrario en todas sus intersecciones directamente adyacentes

- Reglas del juego:

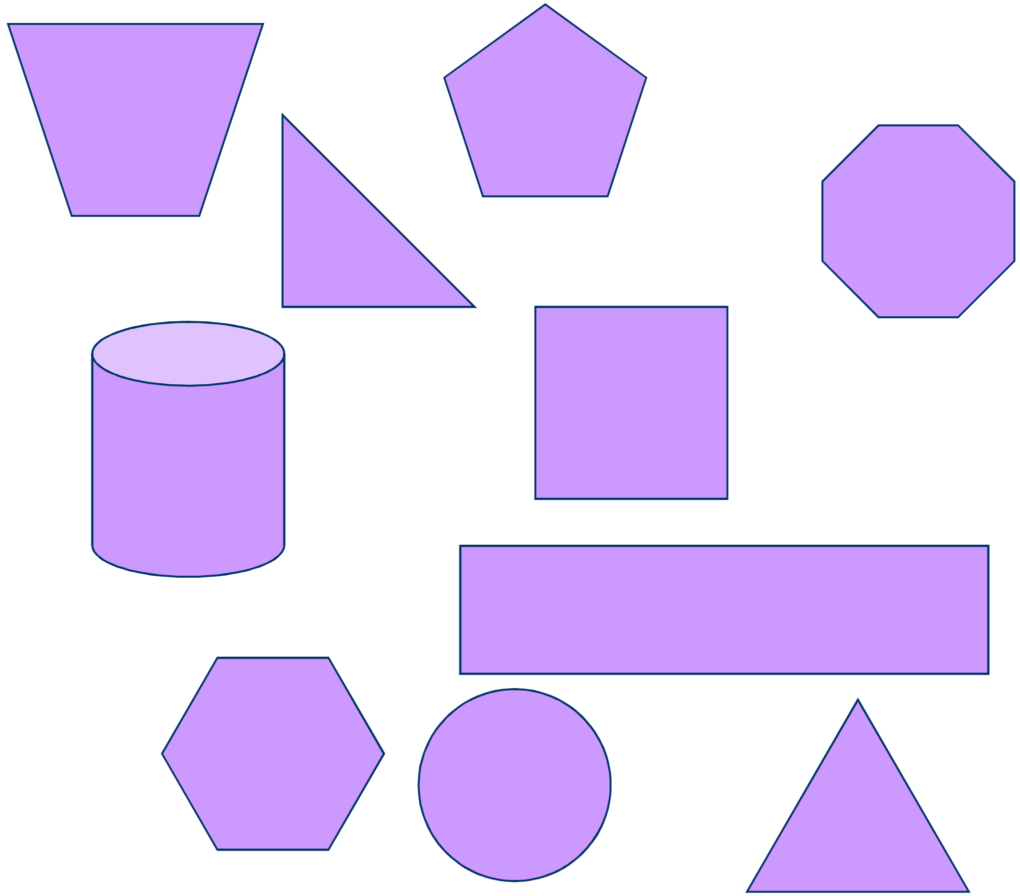
Negro y blanco alternan movimientos. Una vez colocada una piedra, no se mueve por el resto del juego. Gana quien obtenga la mayor puntuación

FRACTALES


Geometría Euclídea

- Triángulos
- Círculos
- Cuadrados
- Rectángulos
- Trapezoides
- Pentágonos
- Hexágonos
- Octágonos
- Cilindros



Departamento de Electrónica y Electromagnetismo
Universidad de Sevilla

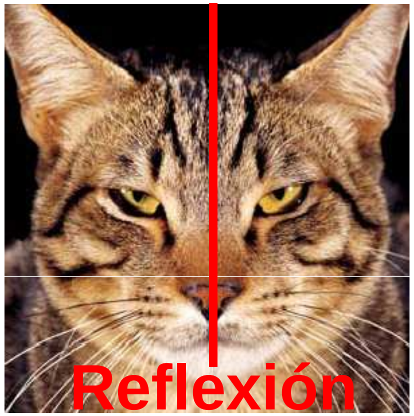
¿Cómo describir la Naturaleza sólo con la geometría euclídea?

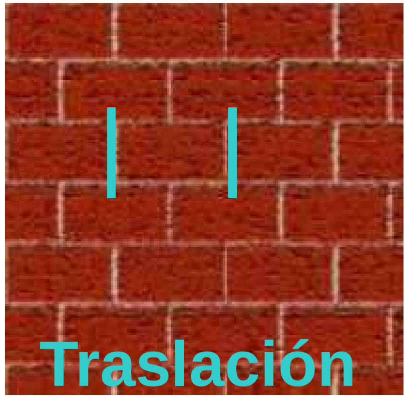
- ¿Arbol con cilindros?
- ¿Montañas con triángulos?
- ¿Nubes con círculos?
- ¿Hojas?
- ¿Rocas?

Formas irregulares y no uniformes

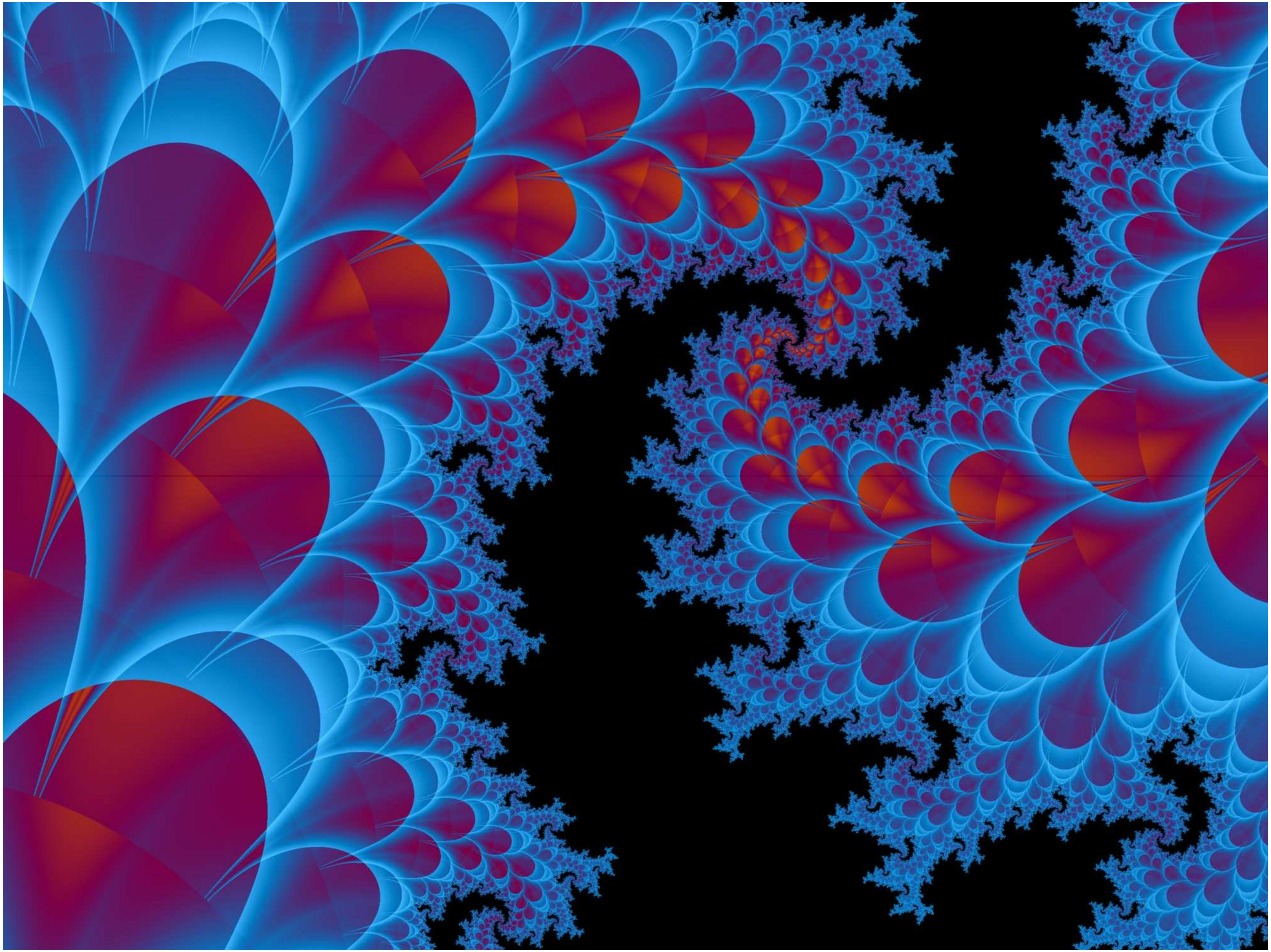
Departamento de Electrónica y Electromagnetismo
Universidad de Sevilla

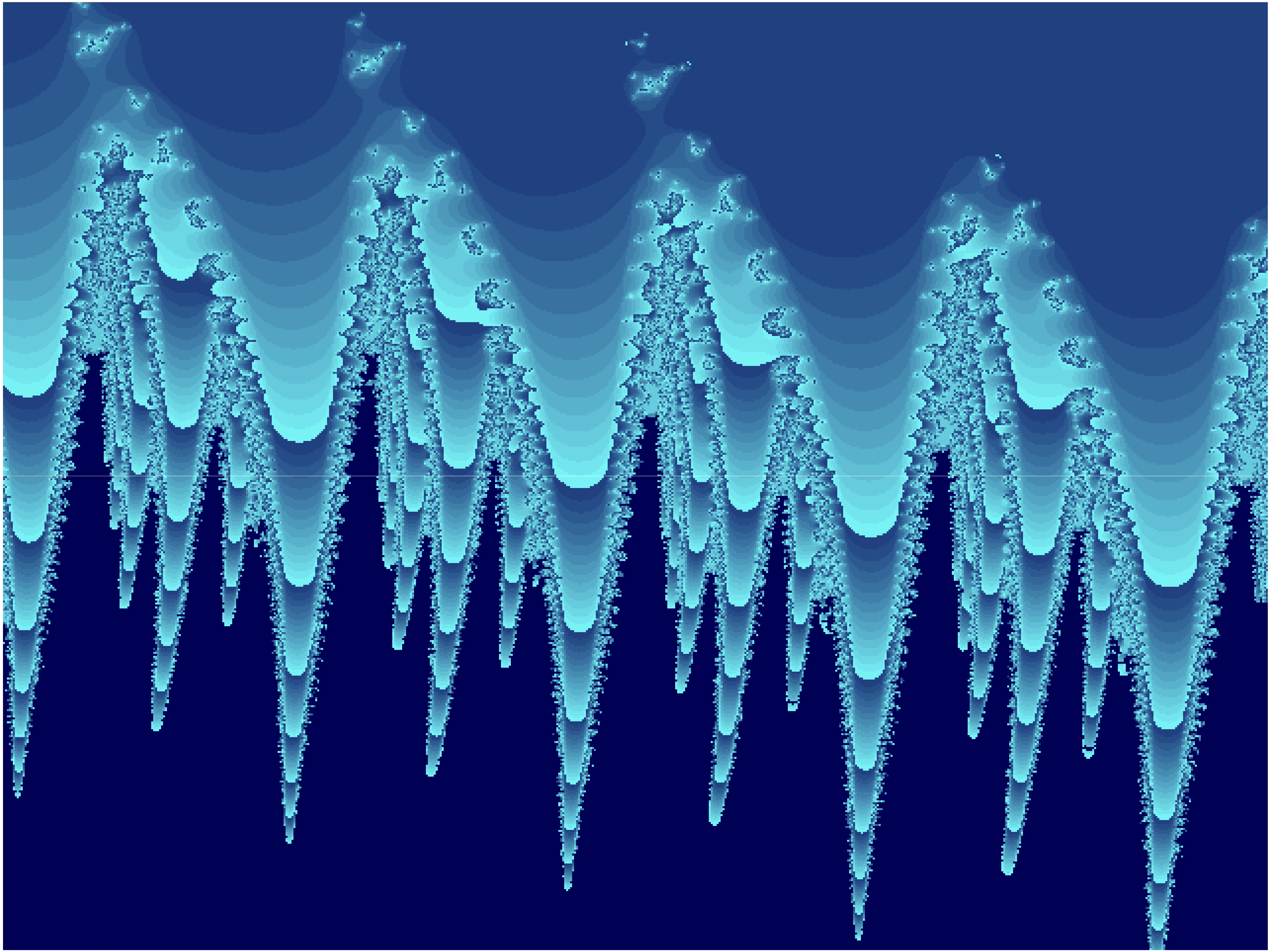
Tipos de Simetría

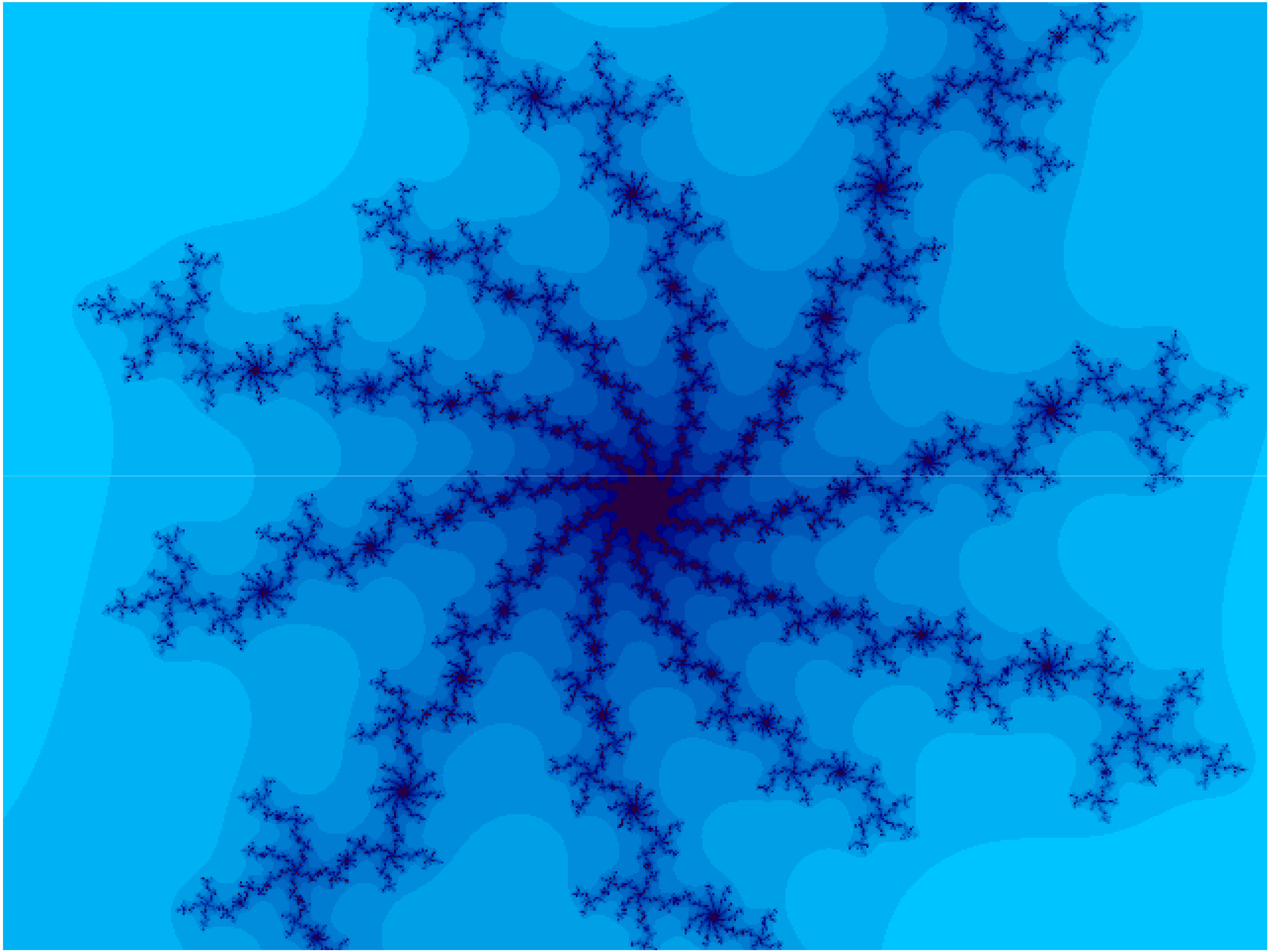


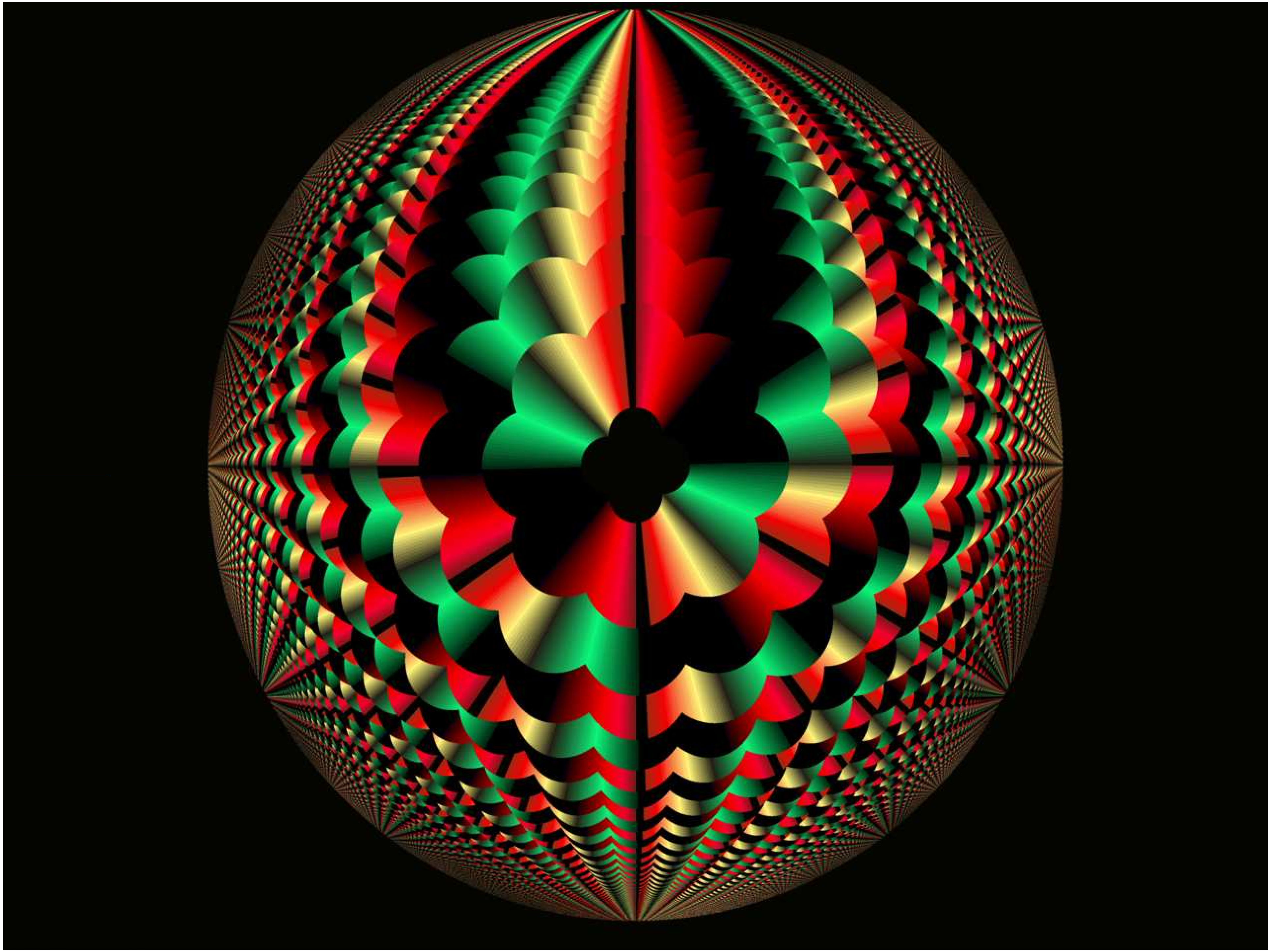


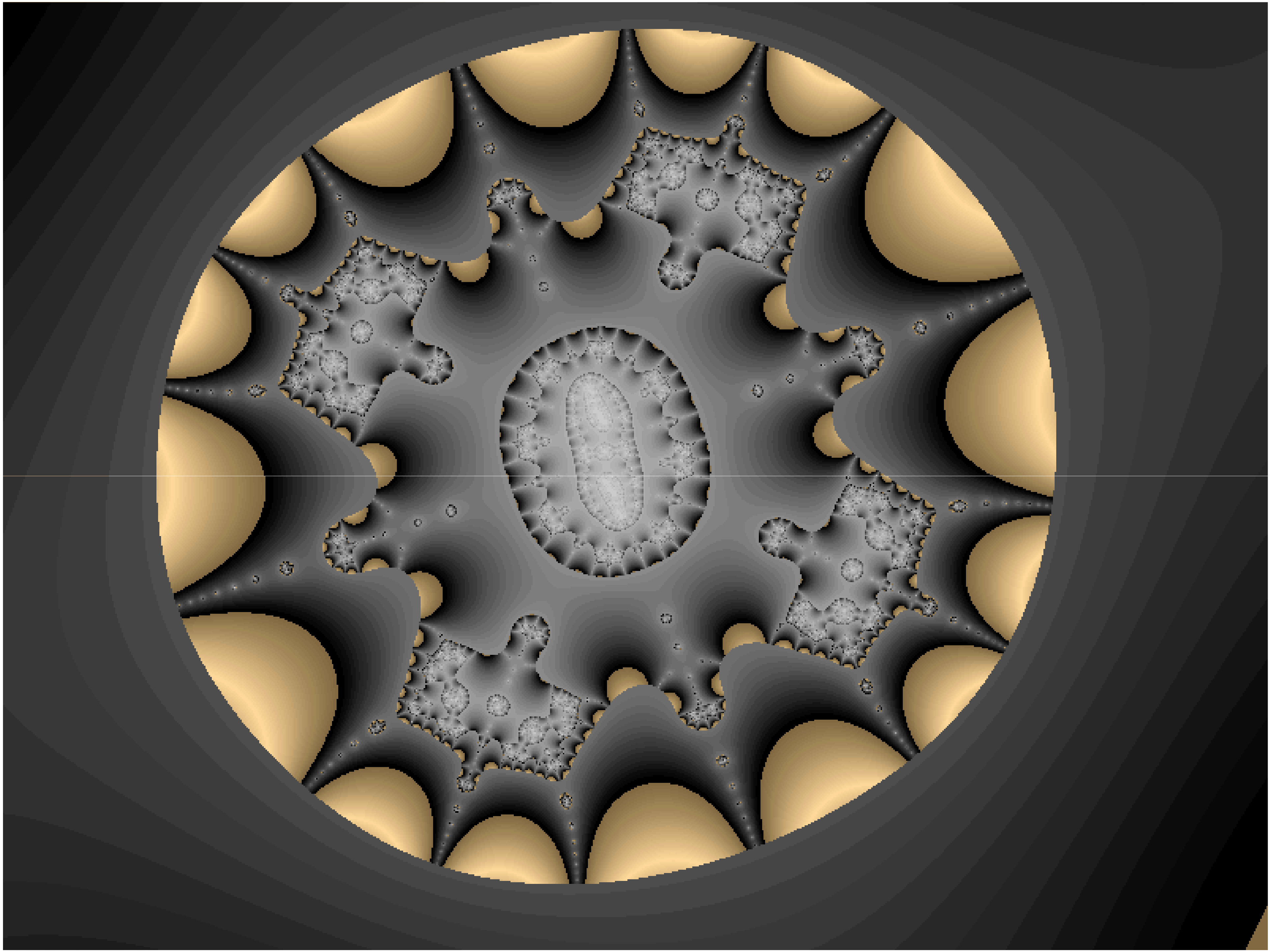
- 4º tipo: Autosimilitud
- FRACTAL: Figura geométrica autosimilar, con simetría escalada o invarianza a la escala. Parecen ser los mismos tras magnificarlos, al estar compuestos de copias más pequeñas de ellos mismos.

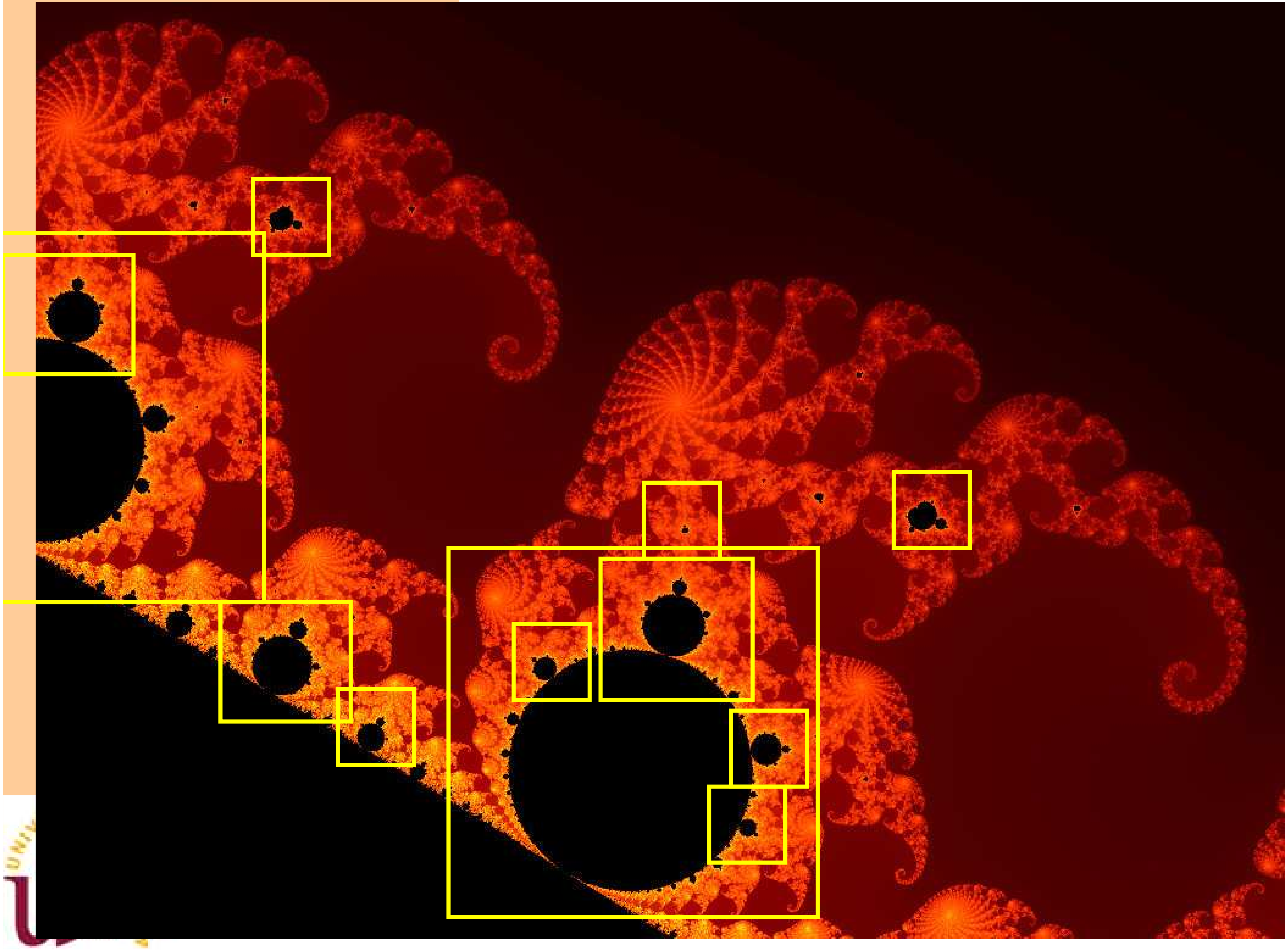








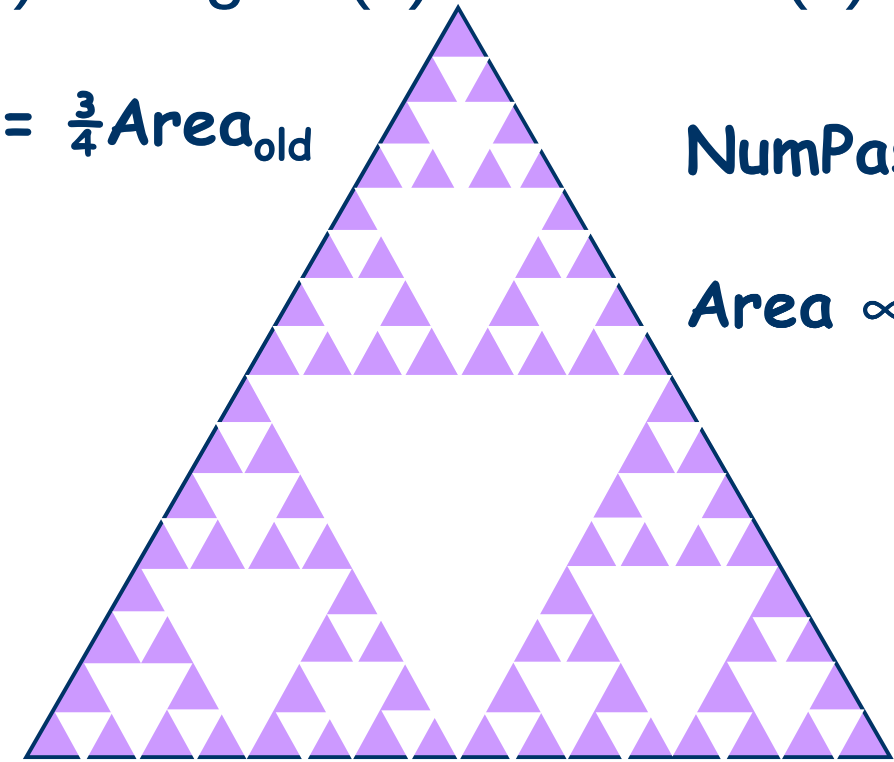




El Triángulo de Sierpinski

- Conectar los centros de los lados y sombrear el(los) triángulo(s) resultante(s)

$$Area_{new} = \frac{3}{4} Area_{old}$$



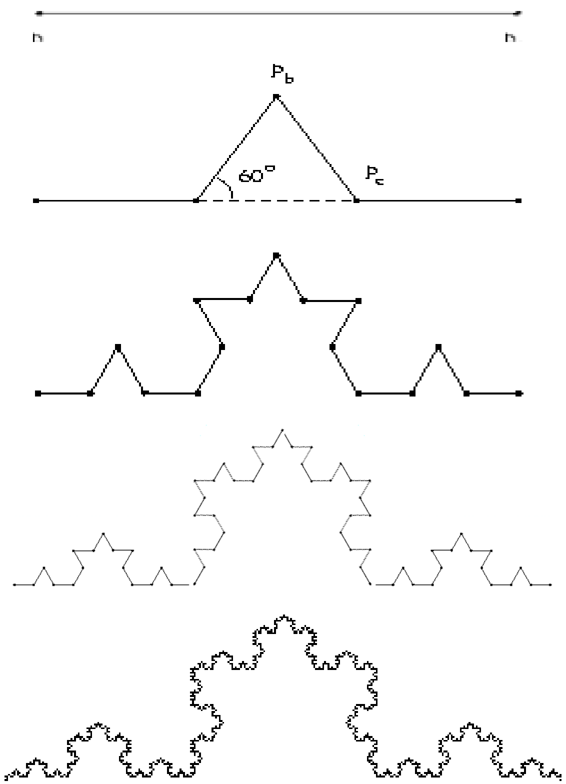
$$NumPasos \rightarrow \infty$$

$$Area \propto \left(\frac{3}{4}\right)^{NumPasos} \rightarrow 0$$

triangle.m

Departamento de Electrónica y Electromagnetismo
Universidad de Sevilla

El copo de nieve de Koch



Longitud = 1

1er Paso — Longitud = (4/3)

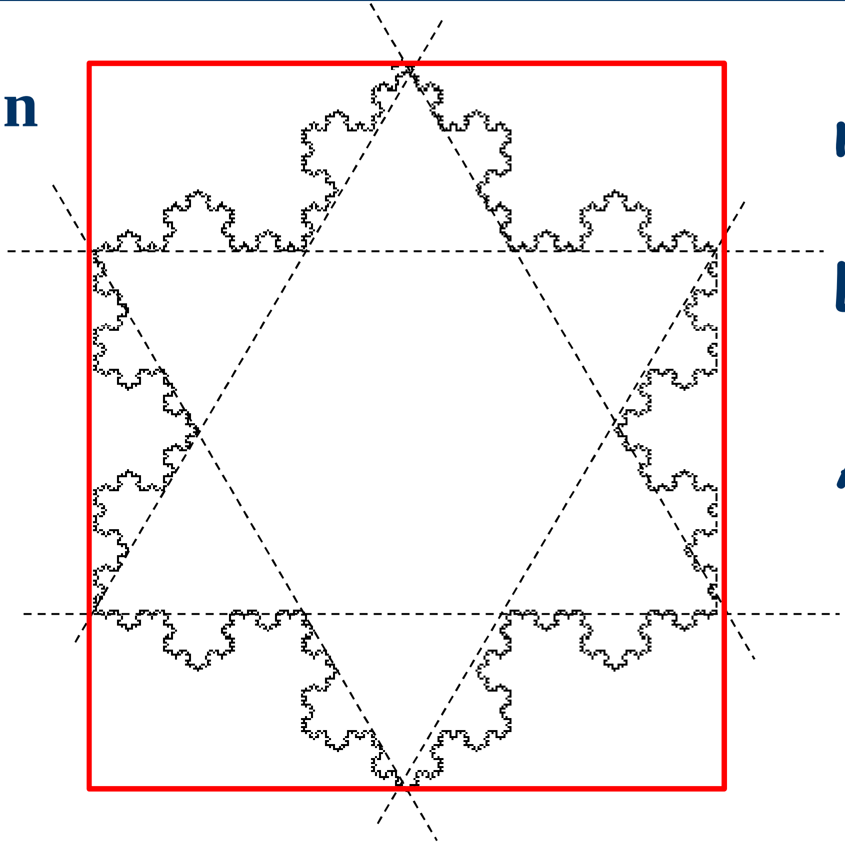
2^{o} Paso — Longitud = $(4/3)^2$

3er Paso — Longitud = $(4/3)^3$

nth Paso — Longitud = $(4/3)^n$

Un copo de nieve (sumando 6)

Paso **n**



$n \rightarrow \infty$

Longitud $\propto (4/3)^n \rightarrow \infty$

Area < 1x1.15

http://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake

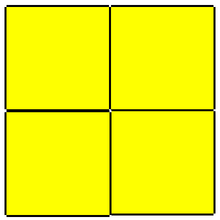
Departamento de Electrónica y Electromagnetismo
Universidad de Sevilla

Dimensionalidad: $\log_k N$

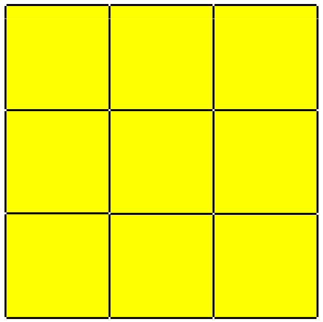
Dilatar *k* veces una forma proporciona N copias del original

$k = 2 \qquad N = 2$

$$\log_k N = 1$$

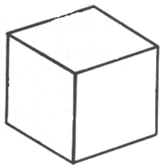


k=2; N=4

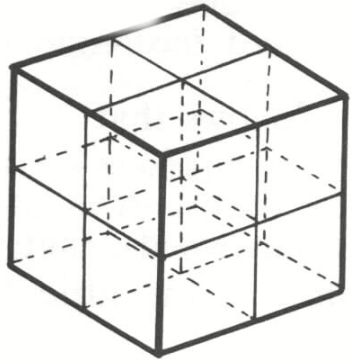


k=3; N=9

$$\log_k N = 2$$



k=2; N=8



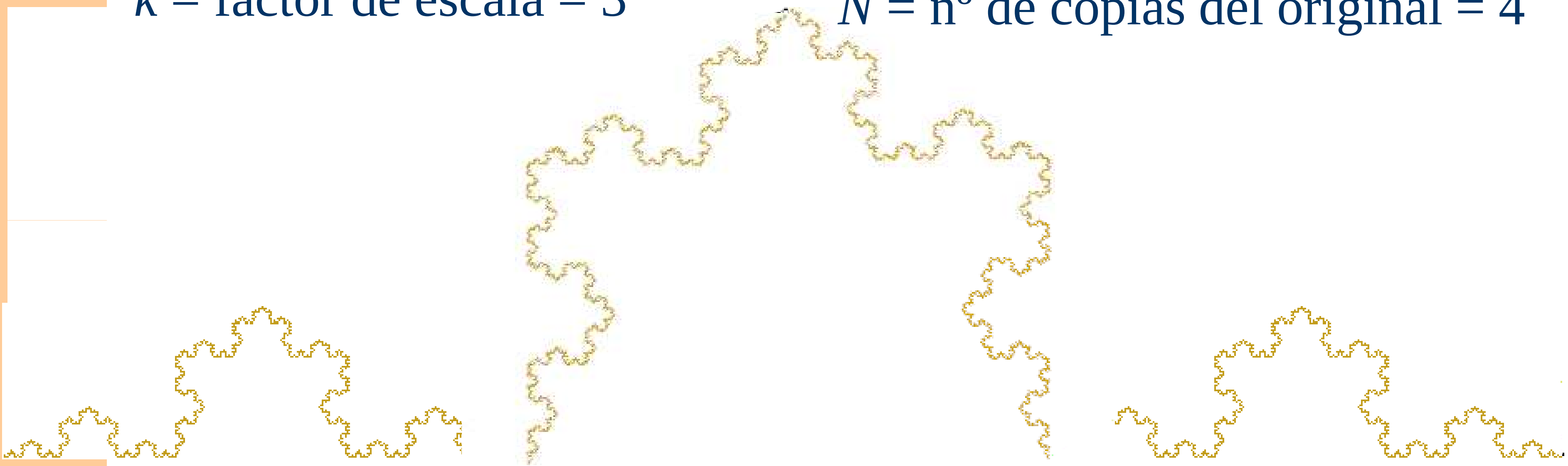
$$\log_k N = 3$$

Departamento de Electrónica y Electromagnetismo
Universidad de Sevilla

Dimensionalidad de un Fractal

k = factor de escala = 3

N = nº de copias del original = 4



$$\log_k N = \log_3 4 \approx 1.261...$$

Un fractal tiene dimensiones no enteras

Departamento de Electrónica y Electromagnetismo
Universidad de Sevilla

Cómo medir la dimensión fractal

Método de la cuenta de cajas (counting box)

1.- Se dibuja sobre la imagen una gradilla de cajas de lado 1/r

2.- Se cuenta el número de cajas (N) que contienen parte del fractal

3.- La dimensión fractal es la pendiente de la recta log(N)/log(r), cuando se varía el tamaño de las cajas

Applet en http://fractalfoundation.org/OFC/OFC-10-5.html

DimensionFractal_MNS.m

Aplicaciones de fractales

- Medicina: anatomía, enzimología, histopatología, …
- Crecimiento bacteriano y biología molecular
- Análisis de costas, accidentes geográficos, nubes…
- Sismología
- Astronomía (galaxias, anillos de Saturno)
- Meteorología
- Mecánica (fracturas y superficies)
- Antenas
- Economía (evolución de precios, de población, etc.)
- Termodinámica y estado sólido
- Generación de música, videojuegos, paisajes, etc.
- Compresión de imágenes y señales
- …

Ejemplos de ficheros .m para fractales


Paquete


dragon.m


hilbert.m


molecule.m