# Capítulo 7

# Resolución numérica de EDOs con MATLAB

## 7.1. Método de Euler

Estamos interesados en resolver numéricamente el problema de Cauchy asociado a un sistema de EDOs de primer orden en un cierto intervalo $I = [t_0, t_0 + T]$. En forma general el problema puede escribirse como:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \text{ en } I, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

### 7.1.1. Método de Euler explícito

El esquema numérico para el método de Euler explíto con paso constante se puede escribir:

$$\boxed{\begin{cases} t_0,\ y_0 \text{ dados,} \\ y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) \quad n = 0, \ldots, N-1. \end{cases}}$$

Algoritmo Euler Explícito

1. Argumentos de entrada: $f$ la función de la edo $y' = f(t, y)$, $t_0$ tiempo inicial , $T$ tiempo transcurrido , $n$ número de subintervalos, $y_0$ dato inicial.
2. Calcular el paso $h = (T - t0)/n$.
3. Iterar, calculando:
$$t_{i+1} = t_i + h$$
$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$
4. Argumentos de salida: $t$ partición del intervalo, $y$ aproximación de la solución de la edo.

**Ejercicio 7.1** Escribir una M-función llamada *EulerE* para implementar el método de Euler explícito.

```
function [ t,y ] = EulerE( f,t0,T,n,y0 )
% Esta función implementa el método de Euler explícito
% para el PVI y'=f(t,y), y(t0)=y0
% Argumentos de entrada:
% f función de la ecuación diferencial y'=f(t,y)
% [t0,T] es el intervalo donde se resuelve la ecuación
% n es el número de partes en las que se divide el intervalo
% y0 es el valor inicial
% Argumentos de salida:
% t es el vector que guarda los puntos t(i) que salen de la discretización
% y es el vector aproximación de la solución exacta
h=(T-t0)/n;
y(1)=y0;t(1)=t0;
for i=2:n+1
  t(i)=t(i-1)+h;
  y(i)=y(i-1)+h*f(t(i-1),y(i-1));
end

plot(t,y)
legend('Euler Explícito')
```

### 7.1.2. Método de Euler mejorado o de Heun.

El esquema numérico para el mtodo de Euler mejorado o de Heun con paso constante se puede escribir:

$$\begin{cases} t_0,\ y_0 \text{ dados,} \\ y_{n+1} = y_n + h/2\ [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))] \quad n = 0, \ldots, N-1. \end{cases}$$

**Ejercicio 7.2** Escribir una M-función llamada *Eulermejorado* para implementar el método de Euler mejorado o de Heun.

### 7.1.3. Método de Euler modificado o de Cauchy.

El esquema numérico para el mtodo de Euler modificado o de Cauchy con paso constante se puede escribir:

$$\begin{cases} t_0,\ y_0 \text{ dados,} \\ y_{n+1} = y_n + h\, f(t_{n+1/2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)) \quad n = 0, \ldots, N-1. \end{cases}$$

**Ejercicio 7.3** Escribir una M-función llamada *Eulermodificado* para implementar el método de Euler modificado o de Cauchy.

## 7.2. La función ode23

MATLAB dispone de varios comandos para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Nosotros trabajaremos con la función ode23, descrita del siguiente modo:

$$\boxed{\texttt{ode23}(\texttt{fun}, [\texttt{t}_0, \texttt{t}_\texttt{f}], \texttt{y}_0)}$$

$\boxed{\text{fun}}$ hace referencia a la función $f$ de la edo $y' = f(t, y)$ y puede ser especificada de dos formas:

$\texttt{ode23}(\texttt{fun}, [\texttt{t}_0, \texttt{t}_\texttt{f}], \texttt{y}_0)$ si f está descrita mediante una función anónima.

$\texttt{ode23}(@\texttt{fun}, [\texttt{t}_0, \texttt{t}_\texttt{f}], \texttt{y}_0)$ si f está descrita mediante una M-función.

$\boxed{[t_0, t_f]}$ representa el intervalo donde vamos a resolver el problema de Cauchy.

$\boxed{y_0}$ se corresponde con el valor inicial $y(t_0) = y_0$

**Ejemplo** Resolver el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y' = 0{,}2y \text{ en } [0, 10], \\ y(0) = 30. \end{cases}$$

```
fun = @(t, y)0.2 * y;
```

```
ode23(fun, [0, 10], 30)
```

también se podría escribir todo en una sola orden

```
ode23(@(t, y)0.2 * y, [0, 10], 30)
```

**Ejercicio 7.4** Resolver con MATLAB las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales y los intervalos que se indican:

1. $y' = ty + 4t \qquad y(0) = 0.5 \qquad t \in [0, 3]$
2. $y' = -y/t \qquad y(1) = 1 \qquad t \in [1, 3]$
3. $y' = y\ \cos(2t) \qquad y(0) = 5 \qquad t \in [0, \pi]$
4. $y' = y\ \log(3t) \qquad y(2) = 2 \qquad t \in [2, 5]$

**Ejercicio 7.5** Resolver con MATLAB las siguientes ecuaciones diferenciales, en el intervalo que se indica, con la condición inicial $y(1) = 1$

1. $yy' + (1 + y^2) \operatorname{sen} t = 0, \quad t \in [1, 1.3]$
2. $e^{-y}(1 + y') = 1, \quad t \in [1, 1.4]$
3. $(1 + t^2)y' + ty = (1 + t^2)^{5/2}, \quad t \in [1, 2]$
4. $y' - 5y = -\frac{5}{2}ty^3, \quad t \in [1, 5]$

### 7.2.1. Resolución de sistemas de EDOs con MATLAB

A continuación veremos como la función ode23 nos permite de igual modo resolver numéricamente sistemas de EDOs. Consideramos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right)' = \left( \begin{array}{c} f_1(t, y_1, y_2) \\ f_2(t, y_1, y_2) \end{array} \right) \text{ en } I, \\ \left( \begin{array}{c} y_1(t_0) = y_{1_0} \\ y_2(t_0) = y_{2_0}. \end{array} \right) \end{array} \right.$$

La resolución con ode23 será análoga al caso de una ecuación, teniendo en cuenta que ahora la función y los datos iniciales son vectores:

$$\boxed{\texttt{ode23}(\texttt{Fun}, [\texttt{t}_0, \texttt{t}_\texttt{f}], \texttt{Y}_0)}$$

$\boxed{\text{Fun}}$ hace referencia a la función a $F$ del sistema de EDOs $\left( \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right)' = F(t, y_1, y_2) = \left( \begin{array}{c} f_1(t, y_1, y_2) \\ f_2(t, y_1, y_2) \end{array} \right)$ y puede ser especificada de dos formas:

$\texttt{ode23}(\texttt{Fun}, [\texttt{t}_0, \texttt{t}_\texttt{f}], \texttt{Y}_0)$ si $F$ está descrita mediante una función anónima.

$\texttt{ode23}(\texttt{@Fun}, [\texttt{t}_0, \texttt{t}_\texttt{f}], \texttt{y}_0)$ si $F$ está descrita mediante una M-función.

$\boxed{[t_0, t_f]}$ representa el intervalo donde vamos a resolver el problema de Cauchy.

$\boxed{Y_0}$ se corresponde con el vector de valores iniciales $Y_0 = \left( \begin{array}{c} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} y_{1_0} \\ y_{2_0} \end{array} \right)$

**Ejemplo** Resolver el siguiente sistema de valores iniciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = -2y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -2y_2 + e^{-2t}\sqrt{t} \end{array} \right. \quad \text{en } [0, 5],$$

$$\left( \begin{array}{c} y_1(0) \\ y_2(0) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ -1/2 \end{array} \right)$$

```
f = @(t, y)[-2 * y(1) - 2 * y(2); -2 * y(2) + exp(-2 * t) * sqrt(t)];
ode23(f, [0, 5], [0; -0,5])
```

Es conocido el hecho de que una ecución diferencial de orden $n$ es equivalente a un sistema de $n$ ecuaciones ordinarias de primer orden, en este sentido a través de la función ode23 seremos capaces de resolver ecuaciones diferenciales de cualquier orden.

**Ejemplo** Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y''' = -2ty' - (y'')^2 \quad \text{en } [0,2],$$

$$\begin{pmatrix} y'(0) \\ y''(0) \\ y'''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Si llamamos $y_1 = y$, $y_2 = y'$ e $y_3 = y''$, entonces es evidente que la ecuación de tercer orden es equivalente al siguiente sistema de tres ecuaciones de primer orden:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 2ty_2 - y_3^2 \end{array} \right. \quad \text{en } [0,2],$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Por tanto los comandos para resolver el sistema serán:

```
f = @(t,y)[y(2);y(3);2*t*y(2)-y(3)^2];
```

```
ode23(f,[0,2],[0;3;5])
```

donde de las tres gráficas representadas la solución de la edo de tercer orden corresponde con la $y_1$, i.e., la que en el punto 0 vale 0 (en azul).

**Ejercicio 7.6** Resolver con MATLAB los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales que se indican:

1. $y_1' = 0.5y_1 - 0.2y_1y_2, \;\; y_2' = -0.5y_2 + 0.1y_1y_2 \qquad y_1(0) = 4, \;\; y_2(0) = 4$
2. $y_1' = 0.3y_1 - 0.2y_1y_2, \;\; y_2' = -0.7y_2 + 0.1y_1y_2 \qquad y_1(0) = 4, \;\; y_2(0) = 4$

**Ejercicio 7.7** Sean $y_1(t)$ el número en miles de conejos, e $y_2(t)$ el número en decenas de linces, que hay en una determinada zona de Doñana en el instante $t$, medido en meses. Sabiendo que la evolución de dichas poblaciones sigue el modelo de presa-depredador siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = 0.5y_1 - 0.2y_1y_2, \\ y_2' = -0.4y_2 + 0.2y_1y_2, \\ y_1(0) = 5, \\ y_2(0) = 2, \end{array} \right.$$

calcula el número de conejos y linces que habrá dentro de 4 años. (Solución: 3.3198 miles de conejos, 5.3054 decenas de linces)

**Ejercicio 7.8** Sean $y_1(t)$ e $y_2(t)$ el número en cientos de miles de sardinas y boquerones que hay en una determinada zona del Mar Cantábrico en el instante $t$, medido en meses. Sabiendo que la evolución de dichas poblaciones sigue el modelo siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = 0.5y_1 - 0.02y_1^2 - 0.1y_1y_2, \\ y_2' = 0.4y_2 - 0.02y_2^2 - 0.1y_1y_2, \\ y_1(0) = 3, \\ y_2(0) = 5, \end{array} \right.$$

calcula el número de sardinas y boquerones que habrá dentro de 3 meses. (Solución: 2.4525 sardinas y 5.3735 boquerones).

**Ejercicio 7.9** Resolver con MATLAB las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior, con las condiciones iniciales que se indican:

1. $t^2y'' + ty' - 2y = 0$, en $[0, 1]$ $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
2. $ty'' + 2y' + ty = t$, en $[1, 2]$ $\quad y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.
3. $y'' - y' - 2y = \cos(t) - \operatorname{sen}(2t)$ en $[0, 1]$ $\quad y(0) = \frac{-7}{20}$, $y'(0) = \frac{1}{5}$.