Rachunek prawdopodobieństwa
Rozgrzewka przed drugą częścią egzaminu

Zadanie 1. O zmiennych losowych X i Y wiemy, że są niezależne i mają ten sam rozkład dany dystrybuantą

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s \leqslant 2, \\ \frac{1}{4}(s-2)^2 & \text{dla } 2 < s \leqslant 4, \\ 1 & \text{dla } s > 4. \end{cases}$$

a) Wyznacz $\mathbb{E}(XY)$.
b) Wyznacz $\mathbb{P}(X > 3)$.
c) Wyznacz $\mathbb{P}(X > 3, Y < 3)$.

Zadanie 2. Gęstość wektora losowego (X_1, X_2) dana jest wzorem:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3(x^2y + xy^2) & \text{dla } x, y \in [0,1], \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

a) Oblicz $\mathbb{E}\left(X_1^3\right)$.
b) Oblicz $\mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leqslant X_1 \leqslant \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leqslant X_2 \leqslant \frac{3}{2}\right)$.

Zadanie 3. Roztargniona Ola zapomniała 4-cyfrowego kodu do kłódki zamykającej jej szafkę w szatni. Chcąc być sprytną, postanowiła napisać program, który pomoże jej odgadnąć kod. Niestety jedyny pomysł na algorytm, który przyszedł jej do głowy, polegał na zastosowaniu generatora liczb losowych, który z równym prawdopodobieństwem losuje jedną z liczb całkowitych z przedziału od 0 do 9999, i testuje, czy jest to szukany kod. Zakładamy, że przerywamy sprawdzanie w momencie odnalezienia właściwego kodu. Oceń, na ile algorytm zastosowany przez Olę przyspieszy poszukiwania. W tym celu policz wartość oczekiwaną liczby sprawdzanych losowych kodów oraz ich wariancję.

Zadanie 4. Dzienna liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu jest zmienną losową o wartości oczekiwanej 150 i wariancji 50. Oszacuj prawdopodobieństwo, że:

a) w poniedziałek liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu będzie większa niż 200, używając nierówności Markowa i Czebyszewa;
b) we wtorek liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu będzie mniejsza niż 175, używając nierówności Markowa;
c) w ciągu całego tygodnia (od poniedziałku do niedzieli) łączna liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu będzie większa od 1000 i mniejsza od 1100, używając nierówności Czebyszewa.

Uwaga: Zakładamy, że każdego dnia odjeżdża jeden pociąg do Kołobrzegu, a liczby pasażerów każdego dnia są niezależne.

Zadanie 5. Używając CTG, oszacuj, ile co najmniej razy musimy rzucić symetryczną, czworościenną kostką do gry, aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 średnia liczba wyrzuconych w tych rzutach oczek należała do przedziału $(2\frac{2}{5}, 2\frac{3}{5})$. **Uwaga:** Zakładamy, że na ściankach kostki znajdują się odpowiednio 1, 2, 3 i 4 oczka.

Zadanie 6. Rozważmy łańcuch Markowa $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ dany poniższą macierzą przejścia:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Wyznacz rozkład po trzech krokach, jeśli $\bar{\rho}^0 = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ jest rozkładem początkowym tego łańcucha.
b) Sprawdź, czy $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ jest łańcuchem nierozkładalnym.
c) Sprawdź, czy $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ jest łańcuchem okresowym.
d) Ustal, czy $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ jest łańcuchem ergodycznym.
e) Znajdź wszystkie rozkłady stacjonarne dla tego łańcucha.

Zadanie 7. W loterii mamy 100 losów, w tym 10 wygrywających. Staś losuje 5 z nich. Oszacuj prawdopodobieństwo, że Staś (a) wylosuje co najmniej jeden los wygrywający, (b) wylosuje co najmniej dwa losy wygrywające.

1. Odpowiedzi

Zad. 1. a) $\frac{100}{9}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{3}{16}$

Zad. 2. a) $\frac{9}{20}$; b) $\frac{5}{32}$

Zad. 3. $\mathbb{E}X = 10000$; $\mathrm{Var} = 99990000$

Zad. 4. a) z nierówności Markowa $\mathbb{P}(X > 200) \leqslant \frac{3}{4}$, z nierówności Czebyszewa $\mathbb{P}(X > 200) \leqslant \frac{1}{50}$

b) z nierówności Markowa $\mathbb{P}(X > 175) \geqslant \frac{1}{7}$

c) z nierówności Czebyszewa $\mathbb{P}(1000 < Y < 1100) \geqslant \frac{43}{50}$

Zad. 5. 481

Zad. 6. a) $\bar{\rho}^3 = \left(\frac{11}{32}, 0, \frac{11}{32}, \frac{10}{32}\right)$; b) nie; c) nie; d) nie; e) $\left(\frac{14}{37}, 0, \frac{10}{37}, \frac{13}{37}\right)$

Zad. 7. a) z nierówności Markowa $\mathbb{P}(X \geqslant 1) \leqslant \frac{1}{2}$, nierówność Czebyszewa daje trywialne oszacowanie

b) z nierówności Markowa $\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant \frac{1}{4}$, z nierówności Czebyszewa $\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant \frac{19}{99}$