REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA

MINISTERIO DEL PODER POPULAR PARA LA EDUCACION

UNIVERSIDAD POLITECNICA TERRITORIAL DEL ESTADO BOLIVAR

PROGRAMA NACIONAL DE FORMACION EN INFORMATICA

MATEMATICA II

UNIDAD III - VECTORES

PROFESORA:

LUZMEIDI BRAVO

ESTUDIANTES:

OLIVER CASTILLO

C.I: V-28.030.110

CIUDAD BOLIVAR, DICIEMBRE DE 2024

INDICE

Pagina

INTRODUCCIÓN

Los vectores son una de las herramientas fundamentales en el campo de las matemáticas y la física, utilizados para representar magnitudes que tienen tanto dirección como módulo. Desde su aparición en el estudio de la geometría hasta su aplicación en diversas disciplinas como la ingeniería, la informática y la economía, los vectores han demostrado ser esenciales para modelar y resolver problemas complejos.

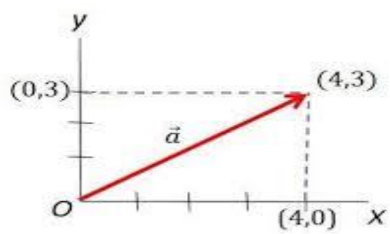
FUNDAMENTOS DE UN VECTOR

¿Qué es un vector?

Los vectores son segmentos de una línea recta que están orientados dentro de un plano bidimensional o tridimensional, también conocido como un espacio vectorial. Su expresión matemática se representa mediante una letra con una flecha en la parte superior y, a nivel gráfico, también se utiliza el recurso de la fecha para señalarlos.

$$\vec{a} = (x, y)$$

Además, un vector puede representarse en un plano cartesiano mediante un conjunto de coordenadas (*x*,*y*), o en uno tridimensional (*x*,*y*,*z*). Los vectores se representan típicamente mediante una flecha dibujada por encima del símbolo empleado.



Se utilizan principalmente para representar magnitudes físicas con intensidad y dirección, como la fuerza, el desplazamiento, el tiempo y la velocidad.

Elementos de un vector

- Dirección: La dirección del vector es la recta sobre la que se plantea el vector o de cualquier recta paralela a ella.
- Sentido: Representado por la punta de la flecha que gráficamente representa al vector, indica el lugar geométrico hacia el cual se dirige el vector. El sentido de un vector $\overrightarrow{AB}$ va desde A hasta la B.
- Modulo: Se trata de la longitud entre el inicio y fin del vector, es decir, dónde empieza y dónde termina la flecha.

- Coordenadas: Los valores de cada extremo del módulo. Si las coordenadas de los puntos extremos A y B son:

$$A(x1, y1)\ B(x2, y2)$$

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas

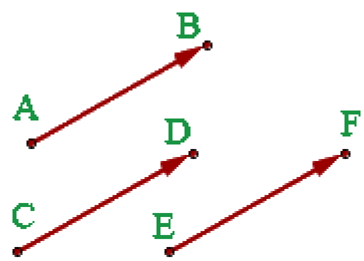
$$\overrightarrow{AB} = (x1 - x2, y1 - y2)$$

- Punto de aplicación: El punto desde donde comienza el vector.

Tipos de Vectores

Vectores Equipolentes

Es cuando dos vectores que tienen el mismo modulo, dirección y sentido.



Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$son vectores equipolentes, el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

Calcula las coordenadas de C para que el cuadrilátero de vértices: $A(-3,-4), B(2,-3), D(3,0)$ y C; sea un paralelogramo.

Calculamos la dirección y sentido

$$\overrightarrow{AB} = (2 + 3, -3 + 4) = (5,1)$$

$$\overrightarrow{CD} = (3 - x_c, 0 - y_c) = (3 - x_c, -y_c)$$

Queremos asegurar que es un paralelogramo, esto quiere decir que los lados opuestos son paralelos, entonces

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, por lo tanto, tenemos que:

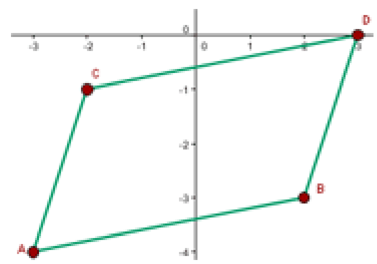
$$(5,1) = (3 - x_c, -y_c)$$

Igualando los valores de las respectivas coordenadas:

$$5 = 3 - x_c \qquad x_c = -2$$

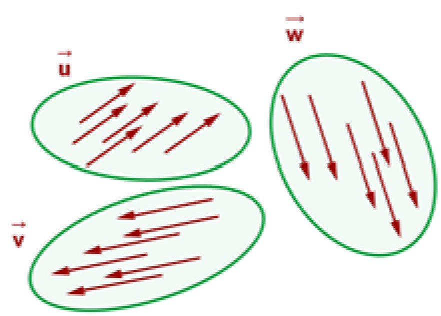
$$1 = -y_c \qquad y_c = -1$$

Entonces: $C(-2, -1)$.



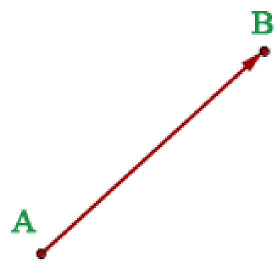
Vectores Libres

El conjunto de todos los vectores equipolentes entre sí se llama vector libre. Es decir, los vectores libres tienen el mismo módulo, dirección y sentido.



Vectores Fijos

Es un segmento orientado entre dos puntos llamados origen y extremo. Los vectores se representan con letras minúsculas con una flechita encima o mediante dos letras mayúsculas que representan los puntos origen y extremo. Son representantes de los vectores libres, así que tienen mismo módulo, dirección y sentido.

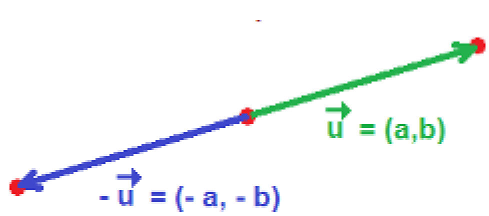


Vectores Ligados

Los vectores ligados son vectores equipolentes que actúan en la misma recta. Es decir, los vectores fijos tienen el mismo módulo**,** dirección**,** sentido y se encuentran en la misma recta.

Vectores Opuestos

Son aquello vectores que poseen el mismo modulo y. dirección, pero diferentes sentidos. Sus valores son iguales, pero con símbolos opuestos.



Vectores Unitarios

Es un vector que no tiene dimensión y su módulo es igual a 1.

Ejemplo

Hallar el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v} = (4, -3)$.

Solución:

Primero calculamos el módulo de $\vec{v}$

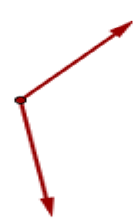
$$v = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

El vector unitario se obtiene dividiendo $\vec{v}$ entre su módulo $\vec{v}$ o, lo que es lo mismo, multiplicando $\frac{1}{v}$ por $\vec{v}$:

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{5} \cdot (4, -3) = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$$

Vectores Concurrentes

Los vectores son concurrentes cuando sus puntos de origen coinciden en el mismo punto.



ESPACIOS VECTORIALES

Un espacio vectorial (o espacio lineal) es una estructura matemática que consiste en un conjunto de vectores, los cuales pueden ser sumados entre sí y multiplicados por escalares (números reales o complejos), cumpliendo ciertas propiedades.

Notación

Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, se distinguen los elementos de V y los de K. Los elementos de V suelen denotarse por:

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$$

y son llamados vectores.

Dependiendo las fuentes que se consulten, también es común denotarlos por:

$$\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{w}}$$

y si el texto es de física entonces suelen denotarse por:

$$\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}$$

Mientras que los elementos de $\boldsymbol{K}$ se denotan como:

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$$

y son llamados escalares.

Propiedades

Un conjunto $\boldsymbol{V}$ se considera un espacio vectorial sobre un campo $\boldsymbol{F}$ (como los números reales o los números complejos) si cumple con las siguientes condiciones:

1. **Cerradura bajo la suma**: Si **A** y **V** son vectores en V, entonces su suma $\boldsymbol{U+V}$ también está en V.

2. **Cerradura bajo la multiplicación por escalares**: Si C es un escalar en **F** y **U** es un vector en V, entonces el producto **U** también está en V.

3. **Propiedades de la suma:**

   - Conmutatividad:

     $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

   - Asociatividad:

     $$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

   - Elemento neutro: Existe un vector cero **0** ∈ **v** tal que para cualquier vector **u,** se cumple que

     $$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

   - Inverso aditivo: Para cada vector **u**, existe un vector **-u** tal que

     $$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

4. **Propiedades de la multiplicación por escalares:**

   - Distributividad respecto a la suma de vectores:

     $$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$$

   - Distributividad respecto a la suma de escalares:

     $$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + c\mathbf{u}$$

- Asociatividad de la multiplicación por escalares:

$$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$$

- Elemento neutro de la multiplicación por escalares:

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Ejemplos

Ejemplo 1: Espacio Euclideano:

El conjunto de todos los vectores en el plano bidimensional $\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$ o tridimensional $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ es un espacio vectorial. Los espacios $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, con $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{1}$, son los ejemplos principales de espacios vectoriales.

Los vectores de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ son n-uplas de números reales, o sea:

$$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} = \{(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}), \qquad \boldsymbol{con\ x_i} \in \mathbb{R}\}$$

En $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, la suma de vectores y el producto por un escalar se definen así:

Sean $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)\ \ y\ \ v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$

$$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_{2,} \dots, \alpha v_n) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$

Puede comprobarse que las operaciones definidas verifican los axiomas de espacio vectorial.

Ejemplo 2: Polinomios

El conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n forma un espacio vectorial.

Llamemos P_2 al conjunto de polinomios de grado menor o igual que 2, incluyendo el polinomio nulo.

Recordemos la suma de polinomios y la multiplicación por un escalar:

Dados $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2$

Definimos las operaciones:

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in P_2$$

$$(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 \in P_2$$

Puede demostrarse que estas operaciones verifican todos los axiomas de espacio vectorial.

En particular, el vector nulo en este espacio es el *polinomio nulo*, es decir el polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero.

Generalizando, para cualquier $n \geq 0$, el conjunto P_n de todos los polinomios de grado menor o igual que n (incluyendo el polinomio nulo) es un espacio vectorial.

CONCLUSIÓN

Los vectores son elementos clave en el estudio de las matemáticas que permiten describir fenómenos físicos y resolver problemas complejos con claridad y precisión. La versatilidad de los vectores no solo facilita la representación de datos multidimensionales, sino que también es crucial para el desarrollo de teorías más avanzadas en campos como la mecánica clásica, la teoría de gráficos y el aprendizaje automático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Equipo editorial, Etecé (31 de agosto de 2020). Vector. Enciclopedia Concepto. Recuperado el 18 de noviembre de 2024 de https://concepto.de/vector/.

Marta, *Los Tipos de Vectores*, Material Didáctico – superprof (s. f.), Recuperado el 12 de diciembre de 2024 de *https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/vectores/tipos-de-vectores.html*

Farfán, R. *Vectores Fijos*, Scribd (s. f.), Recuperado el 12 de diciembre de 2024 de *https://es.scribd.com/document/375117317/Vectores-fijos*

Vectores Opuestos, Blogger (s. f.), Recuperado el 16 de diciembre de 2024 de *http://luistallana.blogspot.com/p/blog-page.html*

Vector Unitario, El Telescopio de Galileo (s, f.), Recuperado el 16 de diciembre de 2024 de *https://fisicabachillerato.netlify.app/vectores-unitario.html*

Espacio Vectorial, Wikipedia, La Enciclopedia Libre, Recuperado el 22 de diciembre de 2024 de *https://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial*

Espacios y Subespacios Vectoriales, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires (s. f.), Recuperado el 22 de diciembre de 2024 de *https://aga.frba.utn.edu.ar/espacios-y-subespacios-vectoriales/*