REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA

MINISTERIO DEL PODER POPULAR PARA LA EDUCACION

UNIVERSIDAD POLITECNICA TERRITORIAL DEL ESTADO BOLIVAR

PROGRAMA NACIONAL DE FORMACION EN INFORMATICA

MATEMATICA II

UNIDAD II: ECUACIONES DIFERENCIALES

PROFESOR:
LUZMEIDI BRAVO

ESTUDIANTES:
DAVID AVARULLO
C.I: V-30.877.419
OLIVER CASTILLO
C.I: V-28.030.110
ORSINI JAVIER
C.I: V-31.776.150

CIUDAD BOLIVAR, NOVIEMBRE DEL 2024

INDICE

Pagina

INTRODUCCION

Las ecuaciones diferenciales son herramientas matemáticas fundamentales que describen cómo cambian las cantidades en relación con otras. Su estudio se remonta a varios siglos atrás, con contribuciones significativas de matemáticos como Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz en el siglo XVII, quienes desarrollaron el cálculo diferencial e integral. Estas innovaciones sentaron las bases para la formulación de ecuaciones que modelan fenómenos físicos, biológicos y económicos.

Las ecuaciones diferenciales han sido utilizadas para resolver problemas complejos en diversas disciplinas. Por ejemplo, en la física, se emplean para describir el movimiento de los cuerpos bajo la influencia de fuerzas; en la biología, para modelar el crecimiento poblacional; y en la economía, para analizar cambios en variables económicas a lo largo del tiempo. La evolución de estas ecuaciones ha llevado al desarrollo de métodos analíticos y numéricos que permiten encontrar soluciones a problemas cada vez más complejos.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona una función con sus derivadas. En la matemática aplicada, las funciones usualmente representan cantidades físicas, las derivadas representan sus razones de cambio y la ecuación define la relación entre ellas.

Características

Las ecuaciones diferenciales tienen varias características importantes que las distinguen y determinan cómo se pueden resolver y aplicar. Algunas de las principales características son:

1. ***Orden***

El orden de una ecuación diferencial está determinado por la derivada de mayor grado presente en la ecuación. Por ejemplo, una ecuación diferencial de primer orden incluye solo la primera derivada de la función, mientras que una de segundo orden incluye hasta la segunda derivada.

2. ***Linealidad***

Una ecuación diferencial puede ser lineal o no lineal:

-Lineal: Si la ecuación es lineal en la función desconocida y sus derivadas. Por ejemplo,

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

es una ecuación lineal.

-No lineal: Si la ecuación incluye términos no lineales en la función desconocida o sus derivadas. Por ejemplo:

$$y'' + y^2 = 0$$

Es una ecuación no lineal.

3. *Homogeneidad*

Una ecuación diferencial es homogénea si todos sus términos dependen de la función desconocida y sus derivadas. Si hay un término independiente de la función, la ecuación es no homogénea. Por ejemplo:

- Homogénea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

- No homogénea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

4. *Coeficientes*

Los coeficientes de una ecuación diferencial pueden ser constantes o variables:

-Constantes: Los coeficientes no dependen de la variable independiente. Por ejemplo,

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

-Variables: Los coeficientes dependen de la variable independiente. Por ejemplo,

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

5. *Soluciones*

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales pueden ser:

- Explícitas: La solución se expresa directamente en términos de la variable independiente. Por ejemplo,

$$y = ex$$

- Implícitas: La solución no está despejada explícitamente. Por ejemplo,

$$x^2 + y^2 = 1$$

- Generales: Incluyen una familia de soluciones que dependen de constantes arbitrarias.

- Particulares: Una solución específica obtenida al asignar valores particulares a las constantes.

6. De Segundo Orden

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden es una ecuación que puede ser escrita de la forma:

$$\frac{d^2y}{d^2x} = y'' = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = f(x, y, y')$$

Es posible en una ecuación diferencial de segundo orden, despejar la segunda derivada de la variable dependiente y''; además, en la parte derecha de la ecuación se tiene una expresión que puede depender de x, y y la derivada y'. Dentro de este grupo de ecuaciones diferenciales, así como en las de primer orden, están las lineales y las no lineales también.

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden es lineal si puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{d^2x} = p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x)$$

O también como:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones únicas de "x" y además son continuas en un intervalo $I \subseteq R$.

7. *De Primer Orden*

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación diferencial ordinaria donde intervienen derivadas de primer orden respecto a una variable independiente. Es una relación en la que intervienen la variable dependiente, la función incógnita y su derivada de primer orden.

Estas ecuaciones, junto con su condición inicial, se pueden encontrar expresadas en forma explícita, llamada también ecuación resuelta respecto a su primera derivada en esta forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

O en su forma implícita:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \; con \; y(x_0) = \; y$$

METODOS DE SEPARACION DE VARIABLES

La separación de variables se puede utilizar cuando:

se pueden mover todos los términos **y** (incluido dy) a un lado de la ecuación y

todos los términos **x** (incluido dx) al otro lado.

Método

Consiste en tres pasos:

- **Paso 1** Mover todos los términos **y** (incluido dy) a un lado de la ecuación y todos los términos **x** (incluido dx) al otro lado.

- **Paso 2** Integrar un lado con respecto a **y** y el otro lado con respecto a **x**. No olvides "+ C" (la constante de integración).

- **Paso 3** Simplificar.

Ejemplo:

$$dydx = ky$$

- **Paso 1:** Separar las variables moviendo todos los términos ***y*** a un lado de la ecuación y todos los términos ***x*** al otro lado:

  - Multiplica ambos lados por *dx: dy = ky dx*
  - Divide ambos lados por ***y***: dy***y*** = *k dx*

- **Paso 2** Integrar ambos lados de la ecuación por separado.

  - Coloca los signos de integración:∫ *dy***y** = ∫ k dx
  - Integra el lado izquierdo: ln(y) + C = ∫ k dx
  - Integra el lado derecho: ln(y) + C = kx + D

  C es una constante de integración. Y usamos D para la otra, ya que es una constante diferente.

- **Paso 3:** Simplificar

Podemos combinar ambas constantes (a=D−C):

$$\ln(y) = kx - a$$

$e(ln(y)) \ = \ y$, así que podemos usar una propiedad de exponentes/logaritmos en ambos lados

$$y = e^{kx+a}$$

Y además podemos separar $e^{kx+a} = e^{kx} e^{a}$, así que

$$y = e^{kx}e^{a}$$

e^a es solo una constante, así que la reemplazamos con **c**:

$$y = ce^{kx}$$

La hemos resuelto:

$$y = ce^{kx}$$

Este es un tipo general de ecuación diferencial de primer orden que aparece en todo tipo de lugares inesperados en ejemplos del mundo real.

Ejemplo:

$$dydx = \frac{1}{y}$$

- **Paso 1**: Separar las variables moviendo todos los términos ***y*** a un lado de la ecuación y todos los términos ***x*** al otro lado:

  - Multiplica ambos lados por *dx: dy = (1/y) dx*
  - Multiplica ambos lados por *y: y dy = dx*

- **Paso 2** Integra ambos lados de la ecuación por separado:

  - Coloca los signos de integración: $\int y \, dy = \int dx$
  - Integra cada lado: $(y^2)/2 = x + C$

Integramos ambos lados en un solo paso.

- **Paso 3** Simplifica:

    - Multiplica ambos lados por 2:$y^2 = 2(x + C)$
    - Raíz cuadrada en ambos lados:$y = \pm\sqrt{(2(x + C))}$

Nota: Esto no es lo mismo que $y = \sqrt{(2x)} + C$, porque la C se agregó antes de sacar la raíz cuadrada. Esto sucede mucho con las ecuaciones diferenciales. No podemos simplemente agregar la C al final del proceso. Se agrega al hacer la integración.

La solución quedaría:

$$y = \pm\sqrt{2(x + c)}$$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}} = \frac{2xy}{1 + x^2}$$

- **Paso 1** Separar las variables:

    - Multiplica ambos lados por dx, divide ambos lados por ***y***:

$$\frac{1}{y}dy = \frac{2x}{1 + x^2}dx$$

- **Paso 2** Integrar ambos lados de la ecuación por separado:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{2x}{1 + x^2}dx$$

El lado izquierdo es un logaritmo simple, y el lado derecho se puede integrar mediante sustitución:

Sea $\boldsymbol{u = 1 + x^2}$, por lo que $\boldsymbol{du = 2x\,dx}$:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{2x}{1 + x^2}dx$$

Integra:

$$\ln(y) = \ln(u) + C$$

Luego hacemos *C* = *ln(k):*

$$ln(y) = ln(u) + ln(k)$$

Así que tenemos:

$$y = uk$$

Ahora sustituye de vuelta u = 1 + x^2:

$$y = k(1 + x2)$$

- **Paso 3** Simplificar:

Ya es tan simple como puede ser. La hemos solucionado:

$$\boldsymbol{y = k(1 + x^2)}$$

CONCLUSIONES

Las ecuaciones diferenciales son un pilar esencial en el estudio de las matemáticas aplicadas y su relevancia se extiende a múltiples disciplinas científicas. A través de su capacidad para modelar situaciones dinámicas y cambiantes, estas ecuaciones nos permiten comprender mejor el mundo que nos rodea.

El avance en técnicas analíticas y computacionales ha ampliado nuestras capacidades para abordar problemas complejos que antes parecían insuperables. A medida que continuamos explorando nuevas fronteras en ciencia e ingeniería, es probable que las ecuaciones diferenciales sigan desempeñando un papel crucial en nuestra comprensión y resolución de desafíos del mundo real. Así, su estudio no solo es fundamental desde un punto de vista teórico, sino también práctico, ofreciendo herramientas valiosas para innovar y avanzar en diversas áreas del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Clasificación de Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones.Org, (s.f), Recuperado el 23 de noviembre de 2024 de https://ecuaciones.org/como-se-clasifican-las-ecuaciones-diferenciales/

Ecuación Diferencial, Wikipedia, La Enciclopedia Libre, Recuperado el 23 de noviembre de 2024 de https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial

Ecuación diferencial ordinaria de primer orden, Wikipedia, La Enciclopedia Libre, Recuperado el 24 de noviembre de 2024 de https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial_ordinaria_de_primer_orden#Eqnref_1a

González, B. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden*, Universidad de La Laguna, (2013) Recuperado el 24 de noviembre de 2024 de https://campusvirtual.ull.es/ocw/pluginfile.php/6024/mod_resource/content/1/tema5/ME5-ecdiferenciales.pdf

Separacion de Variables, Disfruta Las Matemáticas, (2020) Recuperado el 23 de noviembre de 2024 de https://www.disfrutalasmatematicas.com/calculo/separacion-variables.html