Отчет к проекту

Калиничев Игорь

18 мая 2022 г.

1 Проверка на устойчивость метода Рунге-Кутты 4 порядка

Мы начинаем со схемы:

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ h \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{dt} = -DAx_n$$

где матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & \Lambda_x \\ 0 & 0 & ... & \Lambda_y \\ \Lambda_x & \Lambda_y & 0 & ... \end{bmatrix}$$

где $(\Lambda_{x,y}u)_n = \dfrac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2d_{x,y}}$, а

$$D = \begin{bmatrix} g & 0 & ... & 0 \\ 0 & g & 0 & ... \\ .. & .. & .. & .. \\ ... & 0 & H & 0 \\ 0 & ... & 0 & H \end{bmatrix}$$

Заменой переменных $\hat{u} = \sqrt{g}u$, $\hat{v} = \sqrt{g}v$, $\hat{h} = \sqrt{H}h$ можно привести D к виду $diag(\sqrt{gH}, \sqrt{gH}, ..., \sqrt{gH}$
далее считаем $\hat{x} = x$
Несложно заметить что матрицы $\Lambda_{x,y}$ антисимметрична, а значит и вся матрица A антисимметрична ($A^T = -A$). Так как iA самосопряженная, A приводится к диагональному виду, а из $(x, A^2x) = -(Ax, Ax) \leq 0$ и $\sigma(A^2) = \sigma^2(A)$ получается что все собственные значения A комплексные. Нетрудно также оценить собственные числа матрицы A. Так как все строки матрицы A содержат не более 4 ненулевых слагаемых по модулю равных $\dfrac{1}{2dx}$ или $\dfrac{1}{2dy}$ получим оценку

$$||Ax||_{max} \leq (\frac{2}{2dx} + \frac{2}{2dy})||x||_{max}$$

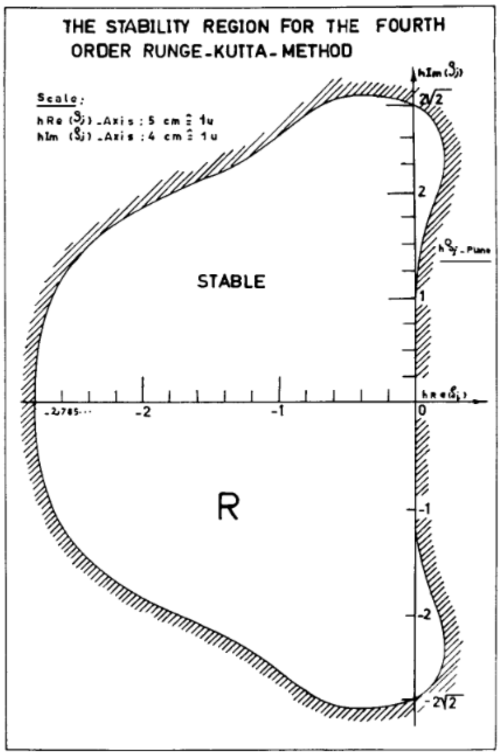
Соотвественно и $|\lambda| \leq (\dfrac{1}{dx} + \dfrac{1}{dy})$, так как D диагональная все тоже, умноженное на $\sqrt{gH}$ верно и для DA, таким образом мы привели систему к диагональному виду. Обозначив $z = \sqrt{gH}\lambda dt$ получим условие устойчивости метода Рунге-Кутты:

$$|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}| \leq 1$$

От куда с учетом того что z чисто комплексное получим условие устойчивости:

$$\sqrt{gH}|\lambda|dt \le 2\sqrt{2} \Rightarrow dt(\frac{1}{dx} + \frac{1}{dy}) \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{gH}}$$

Что подтверждается на практике, если для $\sigma = \sqrt{gH}dt(\frac{1}{dx} + \frac{1}{dy}) = 2$ схема ведет себя устойчиво, то для $\sigma = 4$, схема уже взрывается. При этом, если посмотреть, наши рассуждения не зависили от того используем мы периодическую схему, или схему с граничными условиями, соотвествующими стенкам, и там и там матрица A антисимметрична и верна одна и таже оценка на ее собственные числа. Еще я красивую картинку на область устойчивости метода Рунге-Кутты нашел



2 Проверка на устойчивость метода глупого метода

Просто по признаку фон-Неймана, с помощью вольфрама получаем корень, еще есть корень $= 1$ и сопряженный к этому, они нас не интересуют:

$$, \{\lambda \to \frac{1}{2}\left(2 - \frac{dt^2\, g\, H\, \mathrm{Sin}[\alpha]^2}{dx^2} - \frac{dt^2\, g\, H\, \mathrm{Sin}[\beta]^2}{dy^2} - \sqrt{-4 + \left(-2 + \frac{dt^2\, g\, H\, \mathrm{Sin}[\alpha]^2}{dx^2} + \frac{dt^2\, g\, H\, \mathrm{Sin}[\beta]^2}{dy^2}\right)^2}\right)\};$$

Сделав замену, $\sigma = \sqrt{\frac{dt^2 gH}{2dx^2}\sin^2\alpha + \frac{dt^2 gH}{2dy^2}\sin^2\beta}$, получим

$$\lambda = 1 - \sigma^2 - \frac{1}{2}\sqrt{-4 + (2\sigma^2 - 2)^2}$$

Далее рассмотрим случаи, если $\sigma^2 \geq 2$, тогда под корнем действительное число и:

$$\lambda = 1 - \sigma^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\ldots} \leq -1, \sqrt{\ldots} \geq 0$$

Получается для устойчивости необходимо $\sigma^2 \leq 2$, рассмотрим этот случай, тогда

$$|\lambda|^2 = (1-\sigma^2)^2 + (\sigma^2 - 1)^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow |\sigma^2 - 1| \leq 1 \Rightarrow \sigma^2 \leq 2$$

От куда получаем условие устойчивости:

$$dt\sqrt{gH}\sqrt{\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2}} \leq 2$$

Что также хорошо согласуется с эксперементом, при $\sigma = dt\sqrt{gH}\sqrt{\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2}} = 1.4\sqrt{2}$ схема не взрывается, а при $\sigma = 1.5\sqrt{2}$, уже взрывается