Выч мат 4

Калиничев Игорь

22 ноября 2021 г.

1 11.13(a)

погрешность приближения x_n не превосходила 10^{-}.

<u>IV.11.13.</u> Показать, что для решения методом Ньютона следующих уравнений за x^0 можно принять любое $x^0 > 0$:

а) $e^x = 1/x$,

б) $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$,

в) $\ln x - 1/x = 0$.

По методу Ньютона получим итерационный процесс

$$x(s+1) = x(s) - \frac{e^{x(s)} - \dfrac{1}{x(s)}}{e^{x(s)} + \dfrac{1}{x(s)^2}}$$

обозначим $\phi(x) = x - \dfrac{x^2e^x - x}{x^2e^x + 1}$, чтобы решение сходилось, достаточно потребовать $|\phi'_x| < q < 1$, легко проверяется на вольфраме что такое неравенсто удовлетворяется например для $x \geq 0.3$ тогда взяв компакт $[0.3, \max(x_0, 1)]$ (очевидно корень лежит на отрезке $[0.3, 1]$, мы получим сжимающее отображение, таким образом утверждение доказано для $x \in [0.3, \infty)$. Для $0 < x < 0.3$ также легко проверить

$$\phi(x) > x \Leftrightarrow xe^x < 1 \Leftarrow x \leq 0.3$$

То есть $x^s = \phi^{(s)}(x^0)$ и либо для какого-то s $x^s > 0.3$, а далее очевидно сойдется к решению, либо x^s образуют монотонную последовательность и следовательно сходятся к точке x, такой что $x = \phi(x)$, то есть к решению.

2 11.14

IV.11.14. Для нахождения положительного корня нелинейного уравнения предложено несколько вариантов МПИ. Исследовать эти методы и сделать выводы о целесообразности использования каждого из них.

$$x\ln(x+2)+x^2-1=0,\quad \left[\begin{array}{l} 1.\ x_{n+1}=(1-x_n^2)/\ln(x_n+2), \\ 2.\ x_{n+1}=\exp(1/x_n-x_n)-2, \\ 3.\ x_{n+1}=\sqrt{1-x_n\ln(x_n+2)}, \\ 4.\ x_{n+1}=1/x_n-\ln(x_n+1). \end{array}\right.$$

Уравнение имеет 2 корня, $x_0 = -1$ и $x_1 \in (0,1)$. Все вычисления проводились в вольфраме.

1.

$$\phi(x) = \frac{1-x^2}{\ln(x+2)}$$

$|\phi'(x)| > 1$ при $x > 0$, а значит и в окрестности x_1 и $|\phi'(x_0)| = 1$. Так что условию Липшица функция не удовлетворяет ни в какой окрестности корней и что-то про схидимость метода сказать сложно.

2.

$$\phi = \exp\left(\frac{1}{x} - x\right) - 2$$

$|\phi'(x)| > 1$ при $0 < x < 1$ и $x < -0.5$. Так что условия Липшица нет и более того в окрестности корней $|\phi'(\xi)| > 1$ и, кажется, последовательности в принципе никогда не будут сходится к корням, так что целесообразность метода весьма сомнительна.

3.

$$\phi(x) = \sqrt{1 - x\ln(x+2)}$$

$|\phi'(x)| < q < 1$ при $x \in [-1.1, c],\ c > 0$, то есть отображение сжимающие в данной области, очевидно $x_0 \in [-1.1, c]$, если бы $c \geq x_1$, сжимающее отображение имело бы две стационарные точки, чего быть не может, значит данный метод подходит только для поиска x_0, при взятии начального приближения в $[-1.1, c]$

4.

$$\phi(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1)$$

$|\phi'(x)| > 1$ при $x \in (-1.5, 1)$, так что, аналогично 2 случаю, использование метода нецелесообразно.

3 11.1(в)

IV.11.1. Определить область изменения параметров a, b и c, при которых метод простой итерации $x^{(n+1)} = \varphi(x^{(n)})$ сходится для любого начального приближения $x_0 \in R$:

а) $\varphi(x) = a \sin x + b \cos x + c$;

б) $\varphi(x) = a \cos(bx) + c$;

в) $\varphi(x) = a \sin^2 x + b \cos^2 x + c$;

г) $\varphi(x) = a \operatorname{arctg}(bx) + c$;

д) $\varphi(x) = a \exp(-b^2x^2) + c$.

Ответ: а) $\sqrt{a^2+b^2} < 1$, с – любое; б) $|ab| < 1$, с – любое; в) $|a-b| < 1$, с – любое; г) $|ab| < 1$, с – любое; д) $|ab| < \sqrt{e/2}$, с – любое.

Чтобы метод сходился для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ достаточно потребовать, чтобы $|\phi'(x)| < q < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, то есть чтобы отображение было сжимающим:

$$|\phi'(x)| = |(b-a)\sin 2x| = |b-a|,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$$

Таким образом мы приходим к усовию

$$|b-a| < 1,\ c \in \mathbb{R}$$

4 12.4(м)

IV.12.4. Отделить корни следующих уравнений, а затем уточнить один из них с помощью подходящего итерационно процесса

з) $2\lg x - x/2 + 1 = 0$,

к) $\ln x + (x-1)^3 = 0$,

м) $(x+1)^{0.5} = 1/x$.

При отрицательных x уравнение очевидно корней не имеет, а при $x > 0$ $(x+1)^{0.5}$ возрастает, а $\dfrac{1}{x}$ убывает, и, следовательно, корень один - x^*. из очевидных неравенств

$(\frac{1}{100}+1)^{0.5} < 100$ и $2^{0.5} > 1$ получим $x^* \in (0,1)$. далее выстроим итерационный процесс:

$$x^{(s+1)} = \frac{1}{(x^{(s)}+1)^{0.5}}$$

$$|(\frac{1}{(x+1)^{0.5}})'| = \frac{1}{2(x+1)^{1.5}} < \frac{1}{2} \Leftarrow x \in [0,1]$$

Так что такой процесс будет сходится к x^* в заданной окрестности, уточним наш корень

$$x^{(1)} = \frac{1}{(0.5+1)^{0.5}} = 0.81$$

$$x^{(2)} = \frac{1}{(x^{(1)}+1)^{0.5}} = 0.74$$

$$x^{(3)} = 0.757$$

$$x^{(4)} = 0.754$$

$$x^{(5)} = 0.754$$

Можно и дальше уточнять, остановившись на пятом шаге мы получили точность по крайней мере

$$\epsilon = \frac{(1-0)}{2^5} = \frac{1}{32}$$

5 12.5в

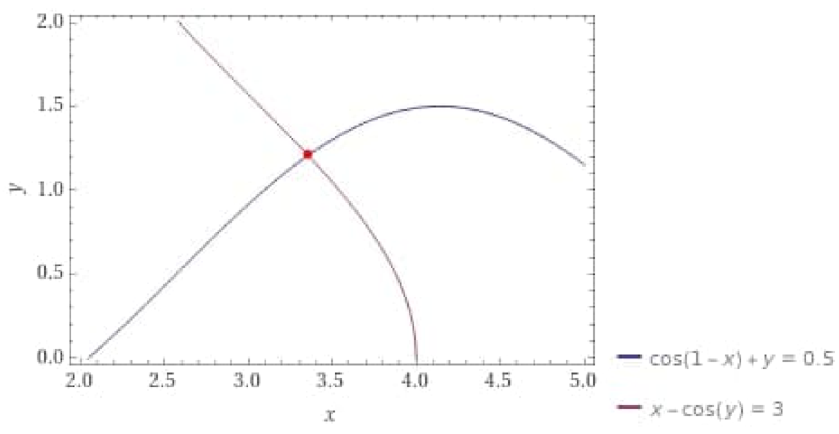
IV.12.5. Вычислить с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ координаты точек пересечения кривых

а) $\sin(x+1) - y = 1.2,$
$2x + \cos y = 2;$

б) $\operatorname{tg}(xy + 0.4) = x^2,$
$0.6\,x^2 + 2y^2 = 1;$

в) $\cos(x-1) + y = 0.5,$
$x - \cos y = 3;$

г) $\sin(x+2) - y = 1.5,$
$x + \cos(y-2) = 0.5.$



См приложенный файл
Ну система очевидным образом приводится к виду

$$\begin{cases} x = 3 + \cos y \\ y = 0.5 - \cos(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x})$$

Методом пристального взгляда на график в вольфраме, получим что решение сидит где-то в квадрате $x \in [3, 3.5]$ и $y \in [1, 1.4]$.

$$\Phi'(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(y) \\ \sin(x-1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$||\Phi(x, y)||_\infty = \max(|sin(y)|, |sin(x-1)|) \leq \sin(1.4) < 0.99$$

Так как квадрат - шар в норме, от которой порожденна данная норма матрицы, получаем сразу, что Φ сжимающее отображение в данном квадрате и, обозначив $\vec{x}^*$ решение:

$$||\vec{x}^* - \vec{\Phi}^{(s)}(x^{(0)}, y^{(0)})||_\infty < 0.5 * 0.99^s$$

таким образом для достижения заданной точности необходимо провести

$$N = \frac{\ln(2\epsilon)}{\ln 0.99} \approx 619$$

С помощью питона получим решение

$$\begin{cases} x = 3.356 \\ y = 1.207 \end{cases}$$

На деле можно было конечно использовать меньшее число итераций, точность мы получили явно больше ϵ, но тогда нужно было бы уменьшать квадрат локализации, и было бы какое-то слишком наглое использование вольфрама. Еще, чтоб не использовать вольфрам, можно было бы подставить x из первого уравнения во второе, поподставлять значения в уже функцию 1 аргумента, и аналогично y из второго в первое, делать я этого конечно же не стал.