Выч мат 3

Калиничев Игорь

20 октября 2021 г.

1 4.1

<u>III.4.1.</u> (В.С. Рябенький) Предложить алгоритм проведения на плоскости окружности через четыре и более точек методом наименьших квадратов.

В терминах МНК мы хотим приблизить функцию на плоскости $F(x,y)=0$ функцией вида $F(x,y)=(a-x)^2+(b-y)^2-R^2$. Соотвественно для этого нам нужно минимизировать функционал

$$\digamma=\sum_{i=1}^{n}(F(x_i,y_i,a,b,R)-0)^2=\sum_{i=1}^{n}((a-x_i)^2+(b-y_i)^2-R^2)^2\to min$$

Соотвественно значения a,b,R находятся методом наименьших квадратов и по ним строится оптимальная окружность.

2 *

19	4.1	*	4.5	**	4.6	5.11д	5.13-1.3
20	4.2	*	4.5	**	4.6	5.11е	5.12аб

* Доказать, что $\forall\varphi,\forall L\in N:\ \sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(i(\frac{2\pi Lk}{N}+\varphi)\right)=0$. Получить из этой формулы следствия для действительной и мнимой частей.

** Пользуясь результатом задачи *, доказать, что если набор узлов $x_k, k=0,1,...,n$ определяется нулями многочлена Чебышева $n+1$ порядка: $T_{n+1}(x_k)=0, k=0,1,...,n$, то $\forall l,m\le n:\ \sum_{k=0}^{n}T_l(x_k)T_m(x_k)=\frac{n+1}{2}\delta_{lm}$, т.е. многочлены Чебышева ортогональны на нулях более старших многочленов.

Воспользуемся формулой суммы геом прогрессии

$$\sum_{k=0}^{N-1}exp(\frac{i2\pi Lk}{N})=//L\neq mN//=\frac{exp(\frac{i2\pi LN}{N})-1}{exp(\frac{i2\pi L}{N})-1}=\frac{exp(i2\pi L)-1}{exp(\frac{i2\pi L}{N})-1}=//L\in\mathbf{N}//=0$$

Если сумма в знаменателе зануляется, значит N делит L, и все слагаемые в сумме просто равны 0, так что равенство все равно выполняется. Таким образом:

$$\sum_{k=0}^{N-1} exp(i(\frac{2\pi Lk}{N} + \phi)) = exp(i\phi) \sum_{k=0}^{N-1} exp(i(\frac{2\pi Lk}{N}) = 0$$

Приравняв действительную и комплексную часть к 0 получим следствия:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin(\frac{2\pi Lk}{N} + \phi) = \sum_{k=0}^{N-1} \cos(\frac{2\pi Lk}{N} + \phi) = 0$$

3 4.5

<u>III.4.5.</u> Функцию $y = \sqrt{1+\sin^2(x-1)}$ решено приближенно заменить тригонометрическим полиномом

$P_2(x) = a + a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x$, который наименее в смысле метода наименьших квадратов удаляется от таблицы значений этой функции, вычисленной в некоторых десяти заданных точках $x_0, x_1, \ldots, x_9$.

а) Опишите алгоритм для отыскания коэффициентов a, a_1, a_2, b_1, b_2.

б) какие (существенные!) упрощения можно сделать в случае, если $x_k = k \cdot 2\pi/10$, $k = 0, 1, \ldots, 9$.

а)Нужно минимизировать такой функционал:

$$F = \sum_{i=0}^{9} (a + a_1 \sin(x_i) + b_1 \cos(x_i) + a_2 \sin(2x_i) + b_2 \cos(2x_i) - \sqrt{1 + \sin^2(x_i - 1)})^2 \to \min$$

Для чего достаточно просто найти его частные производные по параметрам, приравнять их у нулю и решить систему уравнений.
б) можно раскрыть квадрат и пользуясь тригонометрическими формулами и формулой из * сразу получить

$$\sum_{i=0}^{9} \cos(x_i)\sin(x_i) = \sum_{i=0}^{9} \cos(x_i)\sin(2x_i) = \sum_{i=0}^{9} \cos(2x_i)\sin(x_i) = \sum_{i=0}^{9} \cos(2x_i)\sin(2x_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{9} \cos^2(x_i) = \sum_{i=0}^{9} \cos^2(2x_i) = \sum_{i=0}^{9} \sin^2(x_i) = \sum_{i=0}^{9} \sin^2(2x_i) = 5$$

Учитывая все это наш функционал преобразится в

$$F = \sum_{i=0}^{9} (1+\sin^2(x_i-1)) - 2\sum_{i=0}^{9} (a+a_1 \sin(x_i)+b_1 \cos(x_i)+a_2 \sin(2x_i)+b_2 \cos(2x_i))\sqrt{1 + \sin^2(x_i - 1)} +$$

$$+10a^2 + 5(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2)$$

то есть по факту нужно минимизировать

$$F^* = 10a^2+5(a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2) - 2\sum_{i=0}^{9} (a+a_1 \sin(x_i)+b_1 \cos(x_i)+a_2 \sin(2x_i)+b_2 \cos(2x_i))\sqrt{1 + \sin^2(x_i - 1)}$$

что проще минимизации начального функционала

4 **

19	4.1	*	4.5	**	4.6	5.11д	5.13-1.3
20	4.2	*	4.5	**	4.6	5.11е	5.12аб

* Доказать, что $\forall\varphi, \forall L \in N: \quad \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(i(\frac{2\pi Lk}{N} + \varphi) \right) = 0$. Получить из этой формулы следствия для действительной и мнимой частей.

** Пользуясь результатом задачи *, доказать, что если набор узлов $x_k, k = 0,1,\ldots,n$ определяется нулями многочлена Чебышева $n+1$ порядка: $T_{n+1}(x_k) = 0, k = 0,1,\ldots,n$, то $\forall l, m \le n: \ \sum_{k=0}^{n} T_l(x_k) T_m(x_k) = \frac{n+1}{2}\delta_{lm}$, т.е. многочлены Чебышева ортогональны на нулях более старших многочленов.

нули многочлена Чебышева T_n равны $x_k = \cos\left(\pi\dfrac{1+2k}{2n}\right)$ кроме того известно $T_l(\cos(x)) = \cos(lx)$. Таким образом

$$\sum_{k=0}^{n-1} T_l(x_k)T_m(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(\pi+2\pi k)l}{2n}\right)\cos\left(\frac{(\pi+2\pi k)m}{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(\pi+2\pi k)(l+m)}{2n}\right) + \cos\left(\frac{(\pi+2\pi k)(l-m)}{2n}\right)$$

По следствию в *, эта сумма не равна нулю только при условии $l = m$ и тогда она равна:

$$\sum_{k=0}^{n-1} T_l(x_k)T_l(x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{n}{2}$$

То есть

$$\sum_{k=0}^{n-1} T_l(x_k)T_m(x_k) = \frac{n}{2}\delta_{ml}$$

5 4.6

III.4.6. Пусть замеры функции $y = f(x)$ осуществлены в точках $x_k = \cos\frac{\pi(1+2k)}{2(n+1)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, являющихся нулями многочлена Чебышёва $T_{n+1}(x)$, и записаны в виде следующей таблицы.

x	X_0	x_1	…	x_{n-1}	x_n
y	Y_0	y_1	…	y_{n-1}	y_n

Среди многочленов степени не выше заданного k $0 \le k \le n$ указать тот многочлен $P_k(x)$, который наилучшим (в смысле метода наименьших квадратов) образом приближает заданную функцию.

Указание. Искать $P_k(x)$ в виде $P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} C_j T_j(x)$ и воспользоваться тем, что многочлен Чебышёва: $T_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$ образуют ортонормированную систему векторов на множестве точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

а) осуществить вычисления в случае $n = 3$

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	2	1	3	0

Многочлены Чебышева степени не выше k образуют ортогональный базис в пространстве многочленов степени не выше k со стандартным скалярным произведением для МНК с заданными точками x_i (следствие **), соотвественно чтобы минимизировать норму $||y(x) - \sum_{j=0}^{k} C_j T_j(x)||$ необходимо и достаточно взять $C_j = \dfrac{(y, T_j)}{(T_j, T_j)}$ в условии написано T_j ортонормированы и видимо я неправ, но казалось бы из ** должно следовать $||T_j||^2 = \frac{n+1}{2}$ и я буду так считать.
а) В соответсвии с вышесказанным осталось только посчитать:

$$C_0 = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} y_k T_0(x_k) = 3$$

$$C_1 = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} y_k T_1(x_k) = -0.5411$$

$$C_2 = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} y_k T_2(x_k) = -0.7071$$

$$C_3 = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} y_k T_3(x_k) = -1.306565$$

6 5.11г

III.5.11. Постройте наилучшую среднеквадратическую линейную аппроксимацию для функции

а) $f(x) = x^{1/2}$ при $x \in [0; 1]$;

б) $f(x) = 1/x$ при $x \in [1; 2]$;

в) $f(x) = \ln(1 + x)$ при $x \in [0; 1]$;

г) $f(x) = \sin x$ при $x \in [0; \pi]$;

д) $f(x) = x^2$ при $x \in [0; 1]$;

е) $f(x) = e^x$ при $x \in [0; 1]$;

ж) $f(x) = \sin x$ при $x \in [0; \pi/2]$.

г) $f(x) = \sin x$ $x \in [0, \pi]$ Берем линейный функционал $F = a + bx = a\phi_0 + b\phi_1$ В соотвествии с теорией нужно посчитать скалярные произведения:

$$(\phi_0, \phi_1) = (\phi_1, \phi_0) = \int_0^\pi x dx = \frac{\pi^2}{2}$$

$$(\phi_0, \phi_0) = \int_0^\pi 1^2 dx = \pi$$

$$(\phi_1, \phi_1) = \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^3}{3}$$

$$(\phi_1, \sin x) = \int_0^\pi x \sin x dx = \pi$$

$$(\phi_0, \sin x) = \int_0^\pi \sin x dx = 2$$

И решить систему линейных уравнений с матрицей Грама:

$$\begin{pmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi \end{pmatrix}$$

от куда $a = \dfrac{2}{\pi}$, $b = 0$. Таким образом

$$F = \frac{2}{\pi}$$

7 5.13-1,2

III.5.13. В следующей таблице представлены уровни смертности (число смертей на сто тысяч человек) для возрастов 20–45 лет в Англии начала столетия:

20	21	22	23	24	25	26	27	28
431	409	429	422	530	505	459	499	526

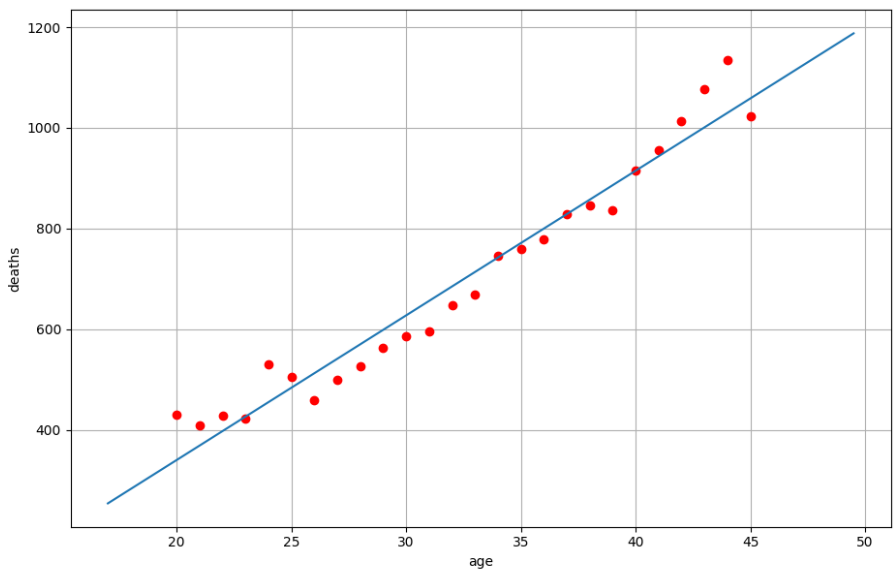
29	30	31	32	33	34	35	36	37
563	587	595	647	669	746	760	778	828

38	39	40	41	42	43	44	45	
846	836	916	956	1014	1076	1134	1024	

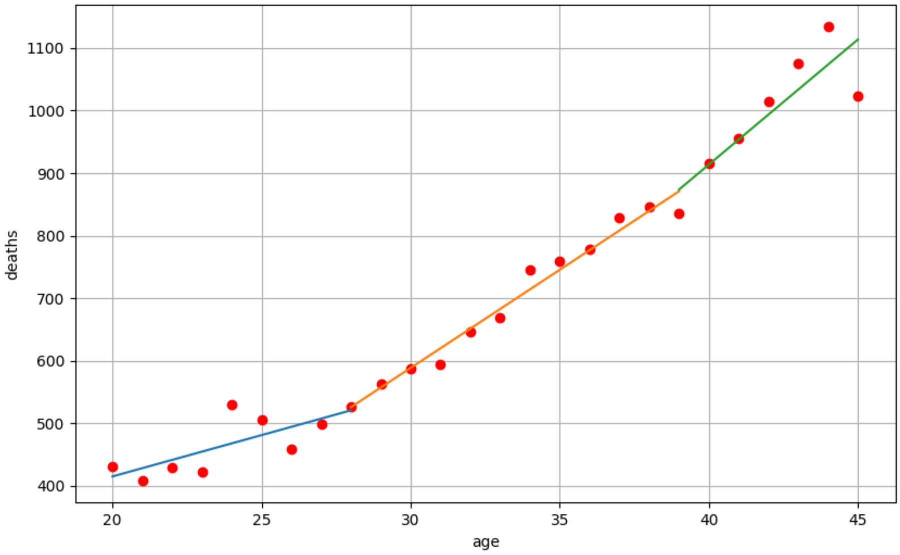
1) Нарисуйте прямую метода наименьших квадратов для аппроксимации этих данных и исходные данные. Хорошо ли прямая аппроксимирует данные?

2) График исходных данных позволяет предположить, что для возрастных интервалов [20, 28], [28, 39] и [39, 45] данные можно приблизить различными прямыми. Методом наименьших квадратов постройте приближения на трех этих отрезках отдельно.

Не знаю насколько это законно, но в питоне задача сводится к 4 раза применить np.polyfyt 1) $y = 28.72x - 234.16$



2) $y_1 = 13.216x + 150.577$ $y_2 = 31.381x - 352.850$ $y_3 = 40x - 686.28$



Еще, как человек с 5 семестрами лаб, не могу не спросить зачем так извращаться, и почему вместо 3 прямых не приблизить параболой: