# Выч мат 1

Калиничев Игорь

19 октября 2021 г.

## 1 7.23

**II.7.23.** Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T > 0$ и $F(\mathbf{x}) = 0.5\cdot(\mathbf{Ax},\mathbf{x}) - (\mathbf{b},\mathbf{x})$ – квадратичная функция. Доказать, что:

1) $F(\mathbf{x}) = 1/2\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|_A^2 - 1/2\|\mathbf{x}^*\|^2$, где $\mathbf{x}^*$ – точное решение системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$;

2) равенство $F(\mathbf{x}^*) = \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n} F(\mathbf{x})$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^*$ – точное решение системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$;

3) для градиента функции $F(\mathbf{x})$ справедлива формула $\nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$.

В учебнике почему-то 2 упражнения с номером 7.23, ну я очевидно выбрал попроще:
1)

$$\frac{1}{2}||x-x^*||_A^2 - \frac{1}{2}||x^*||_A^2 = \frac{1}{2}((x-x^*)^T A(x-x^*) - x^{*T}Ax^*) = \frac{1}{2}(x^TAx - x^{*T}Ax - x^TAx^*) =$$

$$= //Ax^* = b \Leftrightarrow x^{*T}A^T = x^{*T}A = b^T// = \frac{1}{2}(x^TA^Tx - b^Tx - x^Tb) = \frac{1}{2}(Ax,x) - (x,b) = F(x)$$

2)
из 1 следует что $min_{x\in R^n}F(x) = -\frac{1}{2}||x^*||_A^2$ и этот минимум дотигается только при условии $||x-x^*|| = 0 \Leftrightarrow x = x^*$
3)
запишем с помощью немых индексов $F(x) = \frac{1}{2}A_{ij}x^ix^j - b_mx^m$ Тогда

$$\nabla_k F(x) = \frac{1}{2}\partial_k A_{ij}x^ix^j - \partial_k b_m x^m = //\partial_k x^i = \delta_k^i// = \frac{1}{2}(A_{kj}x^j + A_{ik}x^i) - b_k = //A^T = A// = A_{ki}x^i - b_k$$

Таким образом

$$\nabla F(x) = Ax - b$$

## 2 7.36

**II.7.36.** Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T > 0$, $\lambda_A \in [m, M]$ и $\mathbf{A} \neq \beta\mathbf{E}$. Доказать, что $\mu(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{E})$ монотонно убывает по $\alpha$ при $\alpha > 0$.

Из $A = A^T > 0$ следует что А диаганализируем и все ее собственные числа $\lambda_i$ положительны, так как $A \neq \beta E$ существуют собственные значения $0 < \lambda_{min} < \lambda_{max}$, А еще у матрицы $A + \alpha E$ и $(A + \alpha E)^{-1}$ собственные числа равны соотвественно $\lambda_i + \alpha$ и $(\lambda_i + \alpha)^{-1}$. Из всего этого с учетом $(A + \alpha E)^T = A + \alpha E$ и $\alpha > 0$ можно сделать вывод, что $||A + \alpha|| = \lambda_{max} + \alpha$, и $||(A + \alpha)^{-1}|| = \dfrac{1}{\lambda_{min} + \alpha}$. Тогда

$$\mu(A + \alpha E) = \frac{\lambda_{max} + \alpha}{\lambda_{min} + \alpha} \Rightarrow \mu'_\alpha = \frac{\lambda_{min} - \lambda_{max}}{(\lambda_{min} + \alpha)^2} < 0 \ \forall \alpha > 0$$

Из чего следует что $\mu$ монотонно убывает по $\alpha$

## 3 9.2в

**II.9.2.** Дана система линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

А) Оценить максимально точно относительную погрешность $||\Delta\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ в заданной норме.

Найти вектор ошибки $\Delta\mathbf{b}$, на котором эта оценка достигается. При каком $\Delta\mathbf{b}$ относительная ошибка $||\Delta\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||$ будет минимальной? Найти ее.

в) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 101 & -90 \\ -90 & 82 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 112 \\ -98 \end{pmatrix}$; $\dfrac{\|\Delta\mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} \le 0.01$; $\|\mathbf{x}\|_2 = \sum_i |x_i|$,

скажем что $\dfrac{||\Delta x||}{||x||} \le c\dfrac{||\Delta b||}{||b||}$ и будем искать оптимальное с

$$c = \sup_{\Delta b} \frac{||\Delta x||\ ||b||}{||x||\ ||\Delta b||} = \frac{||b||}{||x||} \sup_{\Delta b} \frac{||\Delta x||}{||\Delta b||} = \frac{||b||}{||x||} \sup_{\Delta b} \frac{||A^{-1}\Delta b||}{||\Delta b||} = \frac{||b||}{||A^{-1}b||}||A^{-1}|| \approx 73.46$$

соотвественно вектор, на котором достигается оценка, равен вектору, на котором достигается $||A^{-1}||_2$, то есть вектор с 1 во второй координате (максимальная сумма по столбцам у $A^{-1}$ по второму столбцу) -

$$\Delta b = 2.1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Константа выбрана так, чтобы $\dfrac{||\Delta b||}{||b||} = 0.01$

Минимальная ошибка: очень хочется сказать при $\Delta b = 0$, но видимо подразумевается $||\Delta b|| = 0.01||b||$ тогда должно выполняться

$$c' = \frac{||\Delta x||\ ||b||}{||\Delta b||\ ||x||} = \frac{||b||}{||x||} \inf_{||\Delta b|| = 0.01||b||} \frac{||A^{-1}\Delta b||}{||\Delta b||} = \frac{||b||}{||x||} \frac{1}{\sup_{||\Delta b||=0.01||b||} \frac{||AA^{-1}\Delta b||}{||A^{-1}\Delta b||}} = \frac{||b||}{||x||\ ||A||}$$

Соотвественно минимальная ошибка

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} = \frac{||b||}{||A^{-1}b|| \; ||A||} 0.01 \approx 0.0036$$

выполняется на $A^{-1}\Delta b = a(1,0)^T$ , от куда $\Delta b = \frac{1}{a}A(1,0)^T = \frac{1}{a}(101,-90)$ и с условием нормировки

$$\Delta b = \frac{0.01 \; 210}{191} \begin{pmatrix} 101 \\ -90 \end{pmatrix}$$

# 4 9.15*

**II.9.15.** Система уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \; \mathbf{f} = (3, -6, 3)^{\mathrm{T}},$$

решается с помощью метода простых итераций, начальное приближение нулевое. При каких значениях итерационного параметра метод будет сходиться

а) при вычислениях с бесконечным числом бит в мантиссе?

б) при длине мантиссы 50 бит?

в) при каком значении итерационного параметра сходимость будет самая быстрая?

г) найти значение оптимального параметра для первого шага решения системы методом наискорейшего спуска.

Звездочка, как написано в задании, подразумевает считать $f = (4,-4,2)^T$
Посчитаем для $A$ собственные вектора и собственные значения: $\lambda_1 = 4$ $e_1 = (3,-2,1)^T$, $\lambda_2 = 6$ $e_2 = (1,-2,1)^T$, $\lambda_3 = 8$ $e_3 = (1,-2,3)^T$. Тогда $f$ разложится как $f = e_1 + e_2$.

Еще можно написать что вектор невязок выражается как $r^{(s+1)} = (E - \tau A)r^{(s)} = = \sum_i c_i(1-\tau\lambda_i)^{s+1}e_i$ и $r^{(0)} = f$, так как начальное приближение 0, из этого следуют все теоретические факты, используемые в дальнейшем

а) Третья компонента вектора всегда будет равна нулю и соответственно сходимость будет при значениях параметра

$$\tau \in (1, \frac{2}{\max(\lambda_1,\lambda_2)}) = (1, \frac{1}{3})$$

б) Из-за ошибок округления третья компонента будет появлять и чтобы она не нарастала необходимо потребовать

$$\tau \in (1, \frac{2}{\lambda_{max}}) = (1, \frac{1}{4})$$

в) оптимальное значение параметра, в силу отсутствия $e_3$ в разложении $f$ будет

$$\tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

г) Если я правильно понял, от меня хотят, чтобы я нашел $\tau$, такое что $||r^{(1)}|| = = ||(1-\tau\lambda_1)e_1 + (1-\tau\lambda_2)e_2||$ было минимальным, распишем

$$||(1-\tau\lambda_1)e_1 + (1-\tau\lambda_2)e_2||^2 = (1-4\tau)^2||e_1||^2 + (1-4\tau)(1-6\tau)(e_1,e_2) + (1-6\tau)^2||e_2||^2$$

Забъем в вольфрам и получим $\tau = \frac{43}{206}$ для евклидовой нормы

# 5 9.23

**II.9.23.** (Т. К. Старожилова) Дана система линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -7 \\ -6 & 6 & 0 \\ -7 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

1. Исследовать на сходимость и оценить скорость сходимости простой итерации $\mathbf{x}^{k+1} = (\mathbf{E} - \tau\mathbf{A})\mathbf{x}^k + \tau\mathbf{f}$ при $\tau = 0.02$.

2. Найти $\tau_{\text{опт}}$ и дать оценку скорости сходимости при этом $\tau_{\text{опт}}$.

3. Задано начальное приближение $(17, 2, -12)^T$; найти для него скорость сходимости при $\tau = 0.02$, $\tau'_{\text{опт}}$ и оценку скорости сходимости при этом новом $\tau'_{\text{опт}}$.

4. Выписать формулы для итерационного процесса Якоби и доказать его сходимость.

5. Выписать формулы для итерационного процесса Зейделя и доказать его сходимость.

Аналогично 9.15 найдем собственные вектора $A$: $\lambda_1 = 1$ $e_1 = (5, 6, 7)^T$, $\lambda_2 = 6$ $e_2 = (0, -7, 6)^T$, $\lambda_3 = 23$ $e_3 = (-17, 6, 7)^T$.
1. В разложении f по собственным векторам ни 1 из коэффициентов не зануляется, так что скорость сходимости по шагу $k$ будет порядка

$$\max_i |1 - \tau\lambda_i|^k = 0.98^k$$

2.

$$\tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} = \frac{1}{12}$$

При нем, аналогично 1, порядок скорости сходимости

$$\max_i |1 - \tau\lambda_i|^k = (\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}})^k = (\frac{11}{12})^k$$

3. Для данного начального приближения $u = (17, 2, -12)^T$

$$r^{(0)} = f - Au = (-391, 96, 197)^T = 6e_2 + 23e_3$$

как мы видим $r^{(0)}$ не содержит в своем разложении $e_1$, и тогда

$$\tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_2 + \lambda_3} = \frac{2}{29}$$

и скорость сходимости уже

$$\max_{i=2,3} |1 - \tau\lambda_i|^k = (\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 + \lambda_2})^k = (\frac{17}{29})^k$$

4. Если разложить $A = L + D + U$; $L$ - нижнетреугольная, $U$ - верхнетреугольная, $D$ - диагональная. Тогда метод Якоби запишется как

$$u^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)u^{(k)} + D^{-1}f = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 18 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 \end{pmatrix} u^{(k)} + \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -13 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Чтобы метод Якоби сходился, необходимо и достаточно, чтобы многочлен $\begin{vmatrix} 18\lambda & -6 & -7 \\ -6 & 6\lambda & 0 \\ -7 & 0 & 6\lambda \end{vmatrix}$ имел все корни по модулю меньше единицы, что легко проверяется в вольфраме
5. Аналогично

$$u^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}Uu^{(k)} + (L+D)^{-1}f = \frac{1}{108}\begin{pmatrix} 0 & 36 & 42 \\ 0 & 36 & 42 \\ 0 & 42 & 49 \end{pmatrix} u^{(k)} + \frac{1}{108}\begin{pmatrix} -78 \\ 30 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Матрица $A$ вещественная, симметричная и положительна определенная (все собственные числа положительны), так что по достаточному условию итерационный метод Зейделя сходится

# 6 10.6л

**П.10.6.** (О.А. Пыркова) Решить методами Гаусса и Зейделя, найти $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$, определить число обусловленности матрицы $\mu = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$. Сделать печать невязок обоих методов. Указать критерий останова итераций метода Зейделя.

**к)** $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & f_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & f_n \end{cases}$$

$$n = 10,\ a_{ii} = 1,\ a_{ij} = 1/(i+j)\ \left(i \neq j\right),\ f_i = 1/i.$$

**л)** система п. к) при

$$n = 20,\ a_{ii} = 10,\ a_{ij} = 1/(i+j)\ \left(i \neq j\right),\ f_i = 1/i.$$

Для Зейделя условие остановки: $||v^{(k+1)} - v^{(k)}|| \leq \epsilon$, я брал $\epsilon = 10^{-16}$,вообще немного странно работает matlab, если взять тоже условие с $\epsilon = 0$, то получится 1 невязка, но если взять условие $v^{(k+1)} - v^{(k)} = 0$, то невязка будет другой, наверное это связано с тем, что при подсчете нормы он считает сумму квадратов маленьких чисел и соотвественно зануляется, раньше чем зануляются $v^{(k+1)} - v^{(k)}$. На всякий случай сюда еще скопирую ответы из матлаба:

Невязка методом Гаусса $r_{gauss} = 1.4720e - 16$

Невязка методом Зейделя $r_{seidel} = 7.0079e - 17$

Максимальное собственное значение $\lambda_{max} = 11.3001$

Минимальное собственное значение $\lambda_{min} = 9.6578$

Число обусловленности $\mu = 1.1701$