Выч мат 1

Калиничев Игорь

27 сентября 2021 г.

1 6.3

<u>I.6.3.</u> Пусть y^* – приближение к корню уравнения $f(y) = 0$. Вывести приближенное равенство

$$y - y^* \approx -\frac{f(y^*)}{f'(y^*)}.$$

$$f(y)-f(y^*) = (y-y^*)f'(\xi), \xi \in [y, y^*] \Leftrightarrow //f(y) = 0// \Leftrightarrow y-y* = -\frac{f(y^*)}{f'(\xi)} \Leftrightarrow y-y* \approx -\frac{f(y^*)}{f'(y*)}$$

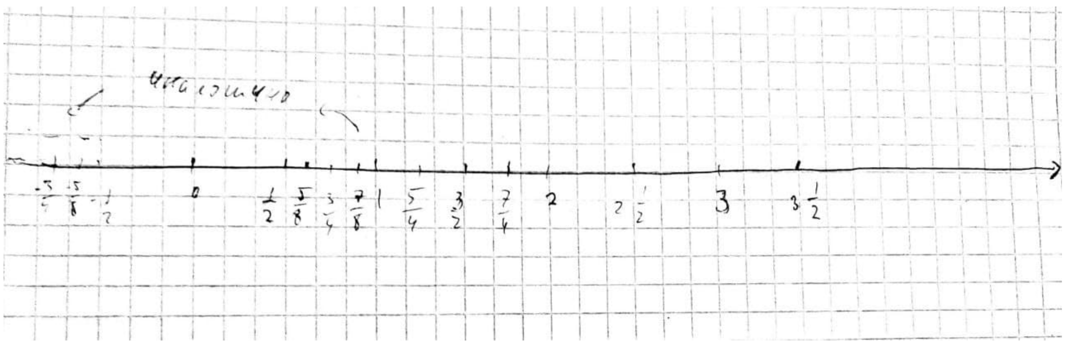
2 8.17

<u>I.8.17.</u> Рассмотрим модель представления чисел в IEEE-арифметике следующего вида:

$S = \{\pm\, b_0, b_1 b_2 \cdot 2^{\pm a}\}$, где числа $a, b_1, b_2 \in \{0,1\}$, а число $b_0 = 1$ всегда, кроме того случая, когда $a = b_1 = b_2 = 0$, в этом случае $b_0 \in \{0,1\}$.

а) Нарисовать множество S на действительной оси. Сколько чисел в данной модели арифметики у Вас получилось?

б) Чему равны машинные константы $\varepsilon_{\text{маш}}$, UFL, OFL в этой модели?



1)в случае когда $+b_0 = 1$ $b_1, b_2, \pm a$ задают $2 * 2 * 3 = 12$ разных чисел, аналогично для $-b_0 = -1$ и еще ноль, таким образом всего задается $12 + 12 + 1 = 25$ чисел

2)

$$\epsilon_m = \frac{(1,01_2 - 1_2)}{2} = 2^{-3}$$

$$OFL = 1,11_2 * 2^1 = 3\frac{1}{2}$$

$$UFL = 1,00_2 * 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

3 8.4

<u>I.8.4.</u> Найти абсолютную предельную погрешность, погрешность по производной и линейную оценку погрешности для функций

$u = \sin t,\ u = 1/(t^2 - 5t + 6).$

Заданы точка приближения $t = t^*$ и погрешность Δt.

Я честно говоря неоч понимаю что от меня хотят, не давая точных значений, но

1)$u(t) = sin(t)$:

абсолютная предельная погрешность:

$$D = \sup_{|t-t^*| \le \Delta t} |sin(t) - sin(t^*)|$$

погрешность по производной:

$$D_1 = \sup_{|t-t^*| \le \Delta t} |u'(t)| \Delta t = \sup_{|t-t^*| \le \Delta t} |cos(t)| \Delta t$$

Линейная погрешность:

$$D_2 = |u'(t^*)| \Delta t = |cos(t^*)| \Delta t$$

2)$u(t) = \dfrac{1}{t^2 - 5t + 6}$:

абсолютная предельная погрешность:

$$D = \sup_{|t-t^*| \le \Delta t} |\frac{1}{t^2 - 5t + 6} - \frac{1}{t^{*2} - 5t^* + 6}|$$

погрешность по производной:

$$D_1 = \sup_{|t-t^*| \le \Delta t} |u'(t)| \Delta t = \sup_{|t-t^*| \le \Delta t} |\frac{5 - 2t}{(t^2 - 5t + 6)^2}| \Delta t$$

Линейная погрешность:

$$D_2 = |u'(t^*)| \Delta t = |\frac{5 - 2t^*}{(t^{*2} - 5t^* + 6)^2}| \Delta t$$

4 8.26

I.8.26. Определить шаг τ, при котором погрешность вычисления производной $u'(t)$, приближенно вычисляемой в соответствии с формулами

$$u'(t) \approx \frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau},$$

$$u'(t) \approx \frac{f(t+\tau)-f(t-\tau)}{2\tau},$$

не превосходит 10^{-3}. Известно, что $|u''(t)| \leq 1$, $|u'''(t)| \leq 1$ для любых t.

как я понял и дальше буду считать $u = f$

$$|u'(t) - \frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}| = //\xi \in [t, t+\tau]// = |u'(t) - f'(t) - \frac{f''(\xi)\tau}{2}| \leq |\frac{f''(\xi)\tau}{2}| \leq \frac{\tau}{2}$$

таким образом для данной формулы нужно взять $\tau \leq 2 * 10^{-3}$

$$|u'(t) - \frac{f(t+\tau)-f(t-\tau)}{2\tau}| = //\xi, \zeta \in [t, t+\tau]// = |u'(t) - f'(t) - \frac{(f'''(\xi)+f'''(\zeta))\tau^2}{12}| \leq |\frac{\tau^2}{6}|$$

а для этой формулы стоит взять $\tau \leq \sqrt{6 * 10^{-3}} \approx 0.077$

5 9.1

I.9.1. Написать программу для вычисления $\exp(x)$, пользуясь рядом Маклорена и конечностью разрядов машинной арифметики: ввести величину SUM = 1, в цикле по I вычислять TERM = TERM * X / I, и если SUM + TERM равен SUM, то закончить вычисления и напечатать результат, а если не равен, то SUM = SUM + TERM и выполнять цикл далее. Вычислить и сравнить SUM и экспоненту от x для следующих аргументов:

$$x \in \{1,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ -1,\ -5,\ -10,\ -15,\ -20,\ -25\}$$

при вычислениях с одинарной точностью. Объяснить результат. Предложить усовершенствованную процедуру для вычисления экспоненты отрицательного аргумента.

См приложенный файл

При вычислении рядом для положительных показателей погрешность порядка машинной - 10^{-8}, для отрицательных же показателей очень большие члены в ряде с разными знаками при суммировании могут дать что-то небольшое, а потом убиться при прибавлении следующего большого числа и алгоритм начинает сходиться когда факториал побеждает степень, в итоге выдается что-то совсем некорректное уже для $x = -10$. Чтобы это исправить можно считать экспоненту для отрицательного показателя, как 1 поделить на экспоненту от положительного показателя, как видно это дает аналогично погрешность порядка машинной.